Матанализ семинар 1

Линьков Вадим

9 сентября 2024 г.

Опр. Последовательность - функция, областью определения которой явл-ся мн-во натуральных чисел N

Пример: $(5, 10, 15, 20, 25...)$, где элементы - $(a_1, a_2, a_3...a_n)$ формула общего члена $a_n =$ кол-во элементов последовательности $\cdot n$ рекурентно: $a_n + 1 = a_n +$ кол-во элементов

N.1
$a = 79$ $b = 144$ $c = 510$ $d = 2584$

$a_1 = a_2 = 1$ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 3 5 8

Ограниченность

Опр. последовательность ограничена сверху (снизу), если все ее элементы не превосходят M, $M \in R$(больше $m \in R$)

Квантовый вариант записи: $\exists M \in R : \forall n \in N \mapsto a_n < M$ $\exists m \in R : \forall n \in N \mapsto a_n > m$

П-ть ограничена, если огр сверху и снизу.

$\exists M, m \in R : \forall n \in N \mapsto m < a_n < M$ $\exists M \in R : \forall n \in N \mapsto |a_n| < M$

N.2
$x_n = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $D!$ не ограничена

$\forall M \in R : \exists n \in N \mapsto |a_n| > M$ (Нужно доказать что нет ограничения сверху или снизу)

Попробуем сгруппировать сумму

$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}) +$ 16 слагаемых $+$ 32 слагаемых $+$ 64 слагаемых

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ (Используем замену)

Σ слагаемых в каждой скобке $> \frac{1}{2}$

кол-во групп бесконечна $\longrightarrow$ п-ть не ограничена сверху $\longrightarrow$ не ограничена

N.3

$\Sigma_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ $D!$ не ограничена

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k\cdot(k-1)}$ (ну тут понятно явно)

$x_n = 1+\Sigma_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 1+\Sigma_{k=2}^{n}\frac{1}{k\cdot(k-1)} = 1+\Sigma_{k=2}^{n}(\frac{1}{k\cdot(k-1)}-\frac{1}{k}) = 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} =$

$= 2-\frac{1}{n}; 2-\frac{1}{n} < 2$ $1 < y_n < 2 \longrightarrow$ ограничена

Монотонность

Опр. П-ть(строго) убывает, если $\forall n \in N \mapsto x_n \geq x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$

N.4

$a_n = (-1)^n$

$\begin{cases} \text{a}_n > a_{n-1} \\ \text{a}_n > a_{n+1} \end{cases}$
-1 1 -1

N.5

$x_n = \frac{4\cdot n-5}{3\cdot n+7}$

$x_{n+1}-x_n = \frac{4\cdot(n+1)-5}{3\cdot(n+1)+7} - \frac{4n-5}{3n+7} = \frac{12\cdot n^2+28n-3n-7-12\cdot n^2+15n-40n+50}{(3n+16)(3n+7)}$

$\frac{43}{(3n+7)(3n+10)} > 0$ т.к $n \in N \longrightarrow \forall n \in N \mapsto x_{n-1}-x_n > 0 \longrightarrow$

N.6

$x_n = \sqrt{n^2+4n+8}-\sqrt{n^2+n+11}$ (домножаем на сопряженное)

$x_n = \frac{n^2-4n+8-n^2-n-11}{\sqrt{n^2+4n+8}-\sqrt{n^2+n+11}}$(делим на n и приводим общие члены)

$x_n = \frac{3-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{8}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{11}{n^2}}}$(числитель увеличивается, знаменатель уменьшается, общий итог - увеличиваться.

N.7

$x_n = \frac{n^2+4}{n+1}$

$x_n +_+ 1 \geq x_n$ $\frac{(n+1)^2+4}{n+1+1} \geq \frac{n^2+4}{n+1}$ $n^3+2\cdot n^2+5n+n^2+2n+5-n^3-4n-2\cdot n^2-8$ (знаменатель - больше 0, можно домножить)

$n^2+3n-3 \geq 0$ $D = 21 \longrightarrow n_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$
$n = [\frac{-3+\sqrt{21}}{2}]$ (округление)

N.8

$x_n = (1+\frac{c}{n})^n$, где с - константа, с > 0; ср.геом $\leq$ ср.арифм

$(1+\frac{c}{n})(1+\frac{c}{n})...(1+\frac{c}{n})\cdot 1 < (\frac{(1+\frac{c}{n})+...+1+\frac{c}{n}+1}{n+1})^{n+1}$(приводим туда сюда и все складывается ШОК К О Н Т Е Н Т)

$(1+\frac{c}{n+1})^{n+1} = x_{n+1} \longrightarrow$ строго возрастающая