Лекция Скубачевский 16.09.24

16 сентября 2024 г.

1 Предел последовательности

Опр. $U_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$ Что значит $x \in U_\epsilon(x_0)$

$|x - x_0| < 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Опр. Число $a \in R$ наз-ся пределом последовательности $\{a_n\}$ если:

$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in N \forall n \geq N \mapsto |a - a_n| < \epsilon$

Пример:

Д-ть: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Док-во: $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in N \forall n \geq N \mapsto |0 - \frac{1}{n}| < \epsilon$

1) Решим неравенство $|0 - \frac{1}{n}| < \epsilon \longrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \longrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$

2) $\forall \epsilon > 0 \exists N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1 : \forall n \geq N \mapsto |\frac{1}{n}| < \epsilon \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Бесконечно большие п-ти

$\lim\limits_{n\infty} n = +\infty$

$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \mapsto |n - +\infty| < \epsilon$ (bullshit)

Опр. $U_\epsilon(+\infty) = (\epsilon; +\infty), \epsilon > 0$

Или: $U_\epsilon(+\infty) = (\frac{1}{\epsilon}; +\infty), \epsilon > 0$

$U_\epsilon(-\infty) = (-\infty; -\epsilon), \epsilon > 0$ Или $U_\epsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\epsilon})$

Опр. $\lim\limits_{n\ to\infty} a_n = +\infty$, если: $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in N : \forall n \geq N \mapsto a_n > \epsilon$

Опр. $\overline{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ Расширенное мн-во действ чисел

Опр. элемент ß$n\overline{R}$ наз. пределом $\{a_n\}$, если $\forall\epsilon > 0 \exists N \in N : \forall n \geq N \mapsto a_n \in U_\epsilon(a)$

Опр. $\{a_n\}$ - сходится если у нее есть конечный предел, в противном случае - расходится

$\{a_n\}$ - сх. в $\overline{R}$, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \overline{R}$

$a_n = n \cdot (-1)^n$ - расходится в $R, \overline{R}$

Опр $\{a_n\}$ наз-ся бесокнечно большой, если $\forall\epsilon > 0 \exists N \in N : \forall n \geq N \mapsto |a_n| > \epsilon$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n = \infty$, но не равен $+\infty$ и $-\infty$

Св-ва сходящихся посл-ти

Th. Всякая сх. посл-ть ограничена.

Док-во: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$

$\forall\epsilon > 0 \exists N \in N : \forall n \geq N \mapsto a_n \in U_\epsilon(a)$ Для $\epsilon = 1 \exists N_1 \in N : \forall n \geq N \mapsto a_n \in U_1(a)$

Лемма. $\forall a, b \in \overline{R}$ существуют непересекающиеся окрестности.

Д-во:

$1) a, b \in R \longrightarrow \exists \epsilon \dfrac{b-a}{2} : U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b) \neq 0$

2) $a \in R; b = +\infty$

$U_1(a) \cap U_{a+2}(+\infty) =$ пустое мн-во

Th. $\{a_n\}$ имеет не более одного предела в $\overline{R}$

Д-во: Предп., что $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \end{cases}$

По Лемме: $\exists \epsilon_1, \epsilon_2 : U_{\epsilon 1}(a) \cap U_{\epsilon 2}(b) \neq$ пустое мн-во

1) $\forall\epsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N \mapsto a_n \in U_\epsilon(a) \longrightarrow \exists N_1 L \forall n \geq N_1 \mapsto a_n \in U_{\epsilon 1}(a)$ - для ϵ_1

Для ϵ_2: $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \mapsto a_n \in U_{\epsilon 2}(b) \longrightarrow \exists N = max\{N_1, N_2\} : \forall n \geq N \mapsto a_n \in U_{\epsilon 1}(a) \cap U_{\epsilon 2}(b) =$пустое мн-во

Противоречие. ч т д