Семинар 2

11 сентября 2024 г.

1 Комплексные числа

$i^2 = -1 \qquad x + iy$, где $x, y \in R$

Комплексное число - пара действительных чисел

$ReZ = Re(x+iy) = x$, где Re - real(действ число) $\qquad ImZ = Im(x+iy) = y$, где Im - imaginary

Пример сложения комплексных чисел:

$(5+3i)+(4-2i) = 9+i$

Однако при перемножении важно помнить: $i^2 = -1$

Равенство двух комплексных чисел: два комплексных числа равны если равны их мнимые и действительные части

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$Z = x + iy, \qquad$ сопряженное $\overline{Z} = x - iy \qquad Z + \overline{Z} = 2x, 2x \in R$

$Z \cdot \overline{Z} = x^2 + y^2 \in R$

$$\frac{(5+3i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{14+22i}{20} = \frac{7}{10} + \frac{11}{10}i$$

Предположим: $i > 0 \qquad$ Домножим на i $\qquad$ Тогда $i^2 > 0 \longrightarrow -1 > 0$ - неверно

(x, y) - Декартовы координаты $\qquad$ Полярные координаты
$r = |Z|, y = argZ$

$x = z \cdot \cos\phi \qquad y = r \cdot \sin\phi \qquad Z = r(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$

Пример:

$z_1 = -3 \qquad z_1 = -3 = 3 \cdot (\cos\pi + i \cdot \sin\pi)$

$z_2 = 3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \cdot (\cos\frac{\pi}{6} - i \cdot \sin\frac{\pi}{6})$

$z_3 = -20 - 21i = 29(\cos(\pi + \arccos\frac{20}{29}) + i\sin(\pi + \arccos\frac{20}{29})$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 + i\cos\phi_1 \cdot \sin\phi_2 + i \cdot \cos\phi_2 \cdot \sin\phi_1 - \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2))$

$n \in N$

$z^n = (r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi))^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i\sin n\phi)$ - формула Муавра

Пример:

$(i \cdot \sqrt{3} - 1)^{2024} = (2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}))^{2024} = 2^{2024} \cdot (\cos\frac{4048\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4048\pi}{3}) = \frac{4048\pi}{3}$
$\frac{4044\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}$
$= 2^{2024} \cdot (-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = -2^{2023} - i \cdot \sqrt{3}$ (не дописал :(

$(cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha \cdot \cos^3\alpha + 3 \cdot i \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha - i \cdot \sin^3\alpha = \cos 3\alpha + i \cdot \sin 3\alpha$

$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \qquad \sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha$

$Z^n = W$, где W - известно, Z - нет

1) $W = 0 \longrightarrow Z = 0$

2) $W \neq 0 (\longrightarrow Z \neq 0) \longrightarrow$ представим Z и W в триг. форме

$z = p \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad w = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$

$p^n \cdot (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$(т.е в полярных коорд. одна и та же точка)

Тогда:

$$\begin{cases} \text{p}^n = r \\ \text{n } \cdot\alpha = \phi + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

Выразим p и α:

$$\begin{cases} \text{p} = {}^n\sqrt{r} \\ \alpha = \frac{\phi + 2\pi k}{n} \end{cases}$$

${}^n\sqrt{z \cdot (\cos\phi + i\sin\phi)} = {}^n\sqrt{r} \cdot (\cos\frac{4 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{4 + 2\pi k}{n}) \qquad 0 \leq k \leq n-1, k \in Z$

$k = 0 \longrightarrow \frac{\phi}{n}$

$k = 1 \longrightarrow \frac{\phi + 2\pi}{n}$

$k = 2 \longrightarrow \frac{\phi + 4\pi}{n}$

$$k = n \longrightarrow \frac{\phi + 2\pi n}{n} = \frac{\phi}{n} + 2\pi$$