Матанализ лекция 1

Линьков Вадим

9 сентября 2024 г.

Всякое рациональное число представимо в виде периодической десят.дроби

$$\Sigma_{i=1}^{k} x_i \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i$$

$12,60(714285)$ - предст в виде обык дроби

$12,6 + \frac{714285}{10^8} + \frac{714285}{10^14}$ - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, член которой $b_0 = \frac{714285}{10^8}$, $q = 10^-6$

Тогда $S = \frac{b_0}{1-q} + 12.6 = \frac{714285}{10^8 \cdot (1 - \frac{1}{10^6}}) + 12.6 = \frac{714285}{100 \cdot 999999} + 12.6 = \frac{5}{700} + \frac{63}{5} = \frac{353}{28}$

Определение. Число $c = a + b$ - сумма действительных чисел a и b, если $\forall q_1, q_2, r_1, r_2 : q_1 \leq a \leq q_2$ и $r_1 \leq b \leq r_2$

Опр. Мн-во $E \in R$ наз-ся ограниченным сверху если $\exists M : \forall x \in E : x \leq M$

Опр. точная верх грань - наим их всех граней: $M = \sup E$

$\sup[0; 1] = 1 \qquad \sup(0; 1) = 1$

Док-во:

1) 1 - верх грань 2) Покажем, что $\forall B < 1$ - не верхняя грань $\exists x_0 = \frac{b+1}{2} > b$ чтд

$0,(9) = 1$(ШОК КОНТЕНТ) $0,(9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + ... = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$

$M = \sup E$, если: 1)М - верхняя грань 2)$\forall b < M : \bar{b}$ - верхняя грань ($\forall x \in E \mapsto x \leq b$)

$\forall b < M \exists x \in E : x > b$ Опр. $M = \sup E \longleftrightarrow$

1)$\forall x \in E \mapsto x \leq M$

2)$\forall b < m \exists x \in E : x > M$

Опр. $M = \sup E \longleftrightarrow$

1) $\forall x \in E \mapsto x \leq M$

2) $\forall \epsilon > 0 \exists x \in E : x > M - \epsilon$

Опр. Точная нижняя грань - наиб из ниж. граней.(инфинум)

Док: $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

Док-во: 1) $\alpha = \sup A \longrightarrow \forall a \in A \mapsto a \leq \alpha$

$\beta = \sup B \longrightarrow \forall b \in B \mapsto b <= \beta \qquad \theta = \sup(A+B)$, т.е $a + b \leq \theta$

$\forall (a+b) \in A + Ba + b \leq \alpha + \beta$

2) $\alpha = \sup A \longrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists a \in A : a > \alpha - \epsilon \qquad \beta = \sup B \longrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists b \in B : b > \beta - \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \exists (a+b) \in (A+B) : a + b > \alpha + \beta - 2 \cdot \epsilon \qquad (\alpha + \beta = \theta)$

Th. (об отделимости)

Пусть $\forall x \in X, \forall y \in Y \mapsto x \leq y$ Тогда $\exists \sup X, \inf Y$, причем $\sup X \leq \inf Y$

Д-во:

$\forall x \in X \mapsto x \leq y_0 \in Y \Longrightarrow$ X - огр.сверху, а у всякого огр сверху мн - ва $\exists \sup X$

2)$\forall y \in Y \mapsto \sup X \leq y$ - это значит, что $\sup X - Y, \leq \inf Y \longrightarrow \sup X \leq \inf Y$ чтд