

Матанализ семинар 1

Линьков Вадим

9 сентября 2024 г.

Опр. Последовательность - функция, областью определения которой явл-ся мн-во натуральных чисел N

Пример: $(5, 10, 15, 20, 25...)$, где элементы - $(a_1, a_2, a_3...a_n)$ формула общего члена $a_n = \text{кол-во элементов последовательности} \cdot n$ рекуррентно: $a_n + 1 = a_n + \text{кол-во элементов}$

N.1

$$a = 79 \quad b = 144 \quad c = 510 \quad d = 2584$$

$$a_1 = a_2 = 1 \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad 3 \ 5 \ 8$$

Ограниченность

Опр. последовательность ограничена сверху (снизу), если все ее элементы не превосходят M , $M \in R$ (больше $m \in R$)

Квантовый вариант записи: $\exists M \in R : \forall n \in N \mapsto a_n < M \quad \exists m \in R : \forall n \in N \mapsto a_n > m$

П-ть ограничена, если огр сверху и снизу.

$$\exists M, m \in R : \forall n \in N \mapsto m < a_n < M \quad \exists M \in R : \forall n \in N \mapsto |a_n| < M$$

N.2

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad D! \text{ не ограничена}$$

$\forall M \in R : \exists n \in N \mapsto |a_n| > M$ (Нужно доказать что нет ограничения сверху или снизу)

Попробуем сгруппировать сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + 16 \text{ слагаемых} + 32 \text{ слагаемых} + 64 \text{ слагаемых}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad (\text{Используем замену})$$

Σ слагаемых в каждой скобке $> \frac{1}{2}$

кол-во групп бесконечна \longrightarrow п-ть не ограничена сверху \longrightarrow не ограничена

N.3

$\Sigma_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ $D!$ не ограничена

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k \cdot (k-1)}$ (ну тут понятно явно)

$$x_n = 1 + \Sigma_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \Sigma_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot (k-1)} = 1 + \Sigma_{k=2}^n \left(\frac{1}{k \cdot (k-1)} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} =$$

$$= 2 - \frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad 1 < y_n < 2 \longrightarrow \text{ограничена}$$

Монотонность

Опр. П-ть(строго) убывает, если $\forall n \in N \mapsto x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$)

N.4

$$a_n = (-1)^n$$

$$\begin{cases} a_n > a_{n-1} \\ a_n > a_{n+1} \end{cases}$$

-1 1 -1

N.5

$$x_n = \frac{4 \cdot n - 5}{3 \cdot n + 7}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4 \cdot (n+1) - 5}{3 \cdot (n+1) + 7} - \frac{4n - 5}{3n + 7} = \frac{12 \cdot n^2 + 28n - 3n - 7 - 12 \cdot n^2 + 15n - 40n + 50}{(3n+16)(3n+7)}$$

$$\frac{43}{(3n+7)(3n+10)} > 0 \text{ т.к } n \in N \longrightarrow \forall n \in N \mapsto x_{n-1} - x_n > 0 \longrightarrow$$

N.6

$$x_n = \sqrt{n^2 + 4n + 8} - \sqrt{n^2 + n + 11} \text{ (домножаем на сопряженное)}$$

$$x_n = \frac{n^2 - 4n + 8 - n^2 - n - 11}{\sqrt{n^2 + 4n + 8} - \sqrt{n^2 + n + 11}} \text{ (делим на } n \text{ и приводим общие члены)}$$

$$x_n = \frac{3 - \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{11}{n^2}}} \text{ (числитель увеличивается, знаменатель уменьшается, общий итог - увеличивается)}$$

N.7

$$x_n = \frac{n^2 + 4}{n + 1}$$

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \frac{(n+1)^2 + 4}{n+1+1} \geq \frac{n^2 + 4}{n+1} \quad n^3 + 2 \cdot n^2 + 5n + n^2 + 2n + 5 - n^3 - 4n - 2 \cdot n^2 - 8 \text{ (знаменатель - больше 0, можно домножить)}$$

$$n^2 + 3n - 3 \geq 0 \quad D = 21 \longrightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$n = \left[\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \right] \text{ (округление)}$$

N.8

$x_n = (1 + \frac{c}{n})^n$, где c - константа, $c > 0$; ср.геом \leq ср.арифм

$(1 + \frac{c}{n})(1 + \frac{c}{n}) \dots (1 + \frac{c}{n}) \cdot 1 < (\frac{(1 + \frac{c}{n}) + \dots + 1 + \frac{c}{n} + 1}{n+1})^{n+1}$ (приводим туда сюда и все складывается ШОК К
О Н Т Е Н Т)

$(1 + \frac{c}{n+1})^{n+1} = x_{n+1} \longrightarrow$ строго возрастающая

2024-09-09 10.58.17.jpg