Лекция 2

11 сентября 2024 г.

1 Рекурентно - заданные п-ти

Пример рекур:

$x_1 = \sqrt{2} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

$x_n = \alpha \cdot x_{n-1} + \beta \cdot x_{n-2} + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in R$ мин рекур ур-е 2 порядка

Пример: п-ть Фибонначи(кролики множатся)))))))

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, где $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

Найти общее решения рекур ур-я

$x_n = 2 \cdot x_{n-1}$
ВААААAУ!!! ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ FOUND(+1000 aura)

$x_n = x_1 \cdot 2^{n-1} = C \cdot 2^{n-1}$

Найти общее решение $x_{n+1} = -10 \cdot x_n + 3$

$x_n = -10 \cdot x_{n-1} + 3 \qquad x_{n-1} = -10 \cdot x_{n-2} + 3 \qquad x_{n-2} = -10 \cdot x_{n-3} + 3$

Будем домножать на -10 в степени $n-$ номер элемента

$x_{n+1} + (-10) \cdot x_n + (-10)^2 \cdot x_{n-1} + ... + (-10)^{n-1} \cdot x_2 = -10 \cdot x_n + 3 + 100 \cdot x_{n-1} + -30 + ... + (-10)^n \cdot x_1 + 3 \cdot (-10)^{n-1}$

Туда сюда сокращается

$$x_{n+1} = x_1 \cdot (-10^n) + 3 \cdot (1 - 10 + 100 + ... + (-10)^{n-1}) = x_1 \cdot (-10)^n + 3 \cdot \frac{(-10)^n - 1}{-11}$$

Как же все таки решать эти уравнения???

Однородное: $x_{n+2} = \alpha \cdot x_{n+1} + \beta \cdot x_n$ т.е нету члена $+\gamma$ в правой части

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 1$ - не однородное из за доп члена $(+1)$

Th.1 Общее решения неоднородного ур-я представляет собой сумму решения однородного ур-я и частного решения неоднородного

Метод решения однородных ур-й:

$x_{n+2} = \alpha \cdot x_{n+1} \beta \cdot x_n$

Составим квадратное ур-е: $\lambda^2 = \alpha \cdot \lambda + \beta$

2)Находим корни

3)Тогда общее решение ур-я:

$x_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$

Подставим в исходное: $\lambda^{n+2} = \alpha \cdot \lambda^{n+1} + \beta \cdot \lambda^n$

Пример: $x_n - 10 \cdot x_{n-1} - 56 \cdot x_{n-2} = 0$

1) $\lambda^2 - 10 \cdot \lambda - 56 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 5 \pm 9$

Ответ: $x_n = C_1 \cdot 14^n + C^2 \cdot (-4)^n$

Если даны $x_{1,2}$ - дано найти любые x и C, если не дано - то не дано)

Общее решения неоднородного = решения однородного + какоета частное решение неоднородного(дальше покажу как угадать)

Вопрос: Как?

Пусть γ_n - решение $\qquad$ Тогда: $x_{n+2} = \alpha \cdot x_{n+1} + \beta \cdot x_n + \gamma_n$

1) Если $\gamma_n = P_k(n)$ -многочлен k-й степени $\qquad$ частное решение ищем в виде $n^\delta \cdot Q_k(n)$

δ - кратность корня $\lambda = 1$

2) $\gamma = \alpha \cdot b^n \longrightarrow$ ищем решения в виде $C \cdot n^\delta \cdot b^n$

$x_n - 4 \cdot x_{n-1} + 3 \cdot x_{n-2} = n^2 + 3^n$

1) Решим однородное ур-е: $x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0 \qquad \lambda^2 - 4 \cdot \lambda + 3 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1, 3$

Общее решение: $x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n$

2)Найти частное решение неоднородного:
$x_n - 4 \cdot x_{n-1} + 3 \cdot x_{n-2} = n^2(1)$

$n^\delta \cdot Q_k(n) = n^1(A \cdot n^2 + B \cdot n + C)$ $\qquad$ подставим в (1), найдем A, B, C

$n \cdot (A \cdot n^2 + B \cdot n + C) - 4 \cdot (n-1) \cdot (A \cdot (n-1)^2 + B \cdot (n-1) + C) + 3 \cdot (n-2) \cdot (A \cdot (n-2)^2 + B \cdot (n-1) + C) = n^2$

$-6 \cdot A \cdot n^2 + (24 \cdot A - 4 \cdot B) \cdot n - 20 \cdot A + 8 \cdot B - 2 \cdot C = n^2$

Приравниваем коэф. при равных степенях

-при n^2: $-6 \cdot A = 1$

-при $n : 24 \cdot A - 4 \cdot B = 0$

-при $1 : -20 \cdot A + 8 \cdot B - 2 \cdot C = 0$

$$\begin{cases} \text{A} = \dfrac{1}{6} \\ \text{B} = \text{-}\ 1 \\ \text{C} = \text{-}\ \dfrac{7}{3} \end{cases} \longrightarrow y_n = n^1 \cdot (-\frac{1}{6} \cdot n^2 - n - \frac{7}{3})$$

3) $x_n - 4 \cdot x_{n-1} + 3 \cdot x_{n-2} = 3^n$ $\quad \frac{3}{2}n \cdot 3^n$