

---

# TECHNIQUES NUMERIQUES EN FINANCE

---

**Groupe du projet :**

Abdel Weddoud Ismail  
Gimié Florian  
Lannoy Léna  
Pham Thi Thu Phuong  
Truong Tina

# Sommaire

<b>I. Introduction</b>	<b>3</b>
1. Courte présentation du sujet	3
2. Calcul préliminaire du strike de la partie optionnelle du contrat d'épargne	3
<b>II. Résolution numérique</b>	<b>4</b>
1. Estimation de la $NAV_0$	4
2. Méthode Simulations dans les Simulations (SdS)	4
a. Tests de convergence	4
3. Méthode Least-Square Monte-Carlo (LSMC)	5
a. Tests de convergence	6
4. Comparaison des méthodes SdS et LSMC	7
a. Intervalles de confiance	7
b. Temps de calcul	9
5. Sensibilité du SCR avec la méthode LSMC	10
a. Sensibilité par rapport au taux sans risque $r$	10
b. Sensibilité par rapport au taux garanti $rg$	10
<b>III. Conclusion</b>	<b>11</b>

# I. Introduction

## 1. Courte présentation du sujet

Dans ce projet, nous nous intéressons au risque financier d'un unique contrat d'épargne de maturité deux ans. Dans le cadre de la réglementation Solvabilité II, nous mettons en place deux méthodes pour évaluer le Solvency Capital Requirement (SCR) qu'il est nécessaire de mobiliser pour ce contrat.

## 2. Calcul préliminaire du strike de la partie optionnelle du contrat d'épargne

Au terme du contrat, l'assuré recevra au minimum son investissement rémunéré au taux technique  $r_g$ . En revanche, si l'évolution de la valeur du fonds de placement  $\frac{VM_T}{VM_0}$  est supérieure au taux technique, l'assuré récupérera son investissement rémunéré au taux d'évolution du fonds. En d'autres termes, la garantie en capital s'écrit :

$$\widehat{BE}_T = \max(PM_0 e^{r_g T}, PM_0 \frac{VM_T}{VM_0})$$

Que l'on peut écrire encore :

$$\widehat{BE}_T = PM_0 \frac{VM_T}{VM_0} + (PM_0 e^{r_g T} - PM_0 \frac{VM_T}{VM_0})^+$$

Avec :

$$VM_T = xVM_0 S_T + (1 - x)VM_0 e^{r_g T},$$

la valeur du fonds de placement ventilée selon l'actif. On obtient la nouvelle expression :

$$\begin{aligned} \widehat{BE}_T &= PM_0 (xS_T + (1 - x)e^{r_g T}) + [(PM_0 e^{r_g T} - PM_0 (1 - x)e^{r_g T}) - PM_0 xS_T]^+ \\ &= BE_T + (K - \widehat{S}_T)^+ = BE_T + O_T, \end{aligned}$$

où :  $\widehat{S}_T = PM_0 xS_T$  est le sous-jacent de valeur initiale  $PM_0 x$

$K = PM_0 e^{r_g T} - PM_0 (1 - x)e^{r_g T}$  est le strike de la partie optionnelle implicite.

## II. Résolution numérique

### 1. Estimation de la $NAV_0$

Pour le calcul de la net asset value (NAV) à  $t = 0$ , nous choisissons d'implémenter la méthode de Monte Carlo.

À partir d'une même valeur  $S_0$ , nous simulons des trajectoires sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$  entre  $t = 0$  et  $t = 1$ , notés  $S_1$ , puis à partir de chaque  $S_1$  nous simulons une trajectoire jusqu'à  $t = 2$  sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ . Cela nous permet de calculer la  $NAV_0^k$  pour chaque simulation par la formule suivante :

$$NAV_0^k = VM_0 - PM_0 - \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}}[\exp(-rT) \times O_T] = VM_0 - PM_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-rT} O_T^{k,i}$$

Avec cette procédure, nous calculons une  $NAV_0$  moyenne par la méthode de Monte Carlo égale à 7,226 (30 000  $NAV_0^k$ ,  $N = 3000$ ).

### 2. Méthode Simulations dans les Simulations (SdS)

Pour rappel,

$$NAV_1 = e^{-r(T-1)} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}}(VM_T | S_1) - e^{-r(T-1)} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}}(BE_T + O_T | S_1)$$

On estimera  $NAV_1$  par M simulations Monte-Carlo chaque  $NAV_1^k$  sachant une simulation de  $S_1^k$  donné, k allant de 1 à N.

$$NAV_1^k = \frac{1}{M} e^{-r(T-1)} \sum_{i=1}^M (VM_T^{k,i} - BE_T^{k,i} - O_T^{k,i})$$

Ensuite, le SCR sera obtenu par la formule :

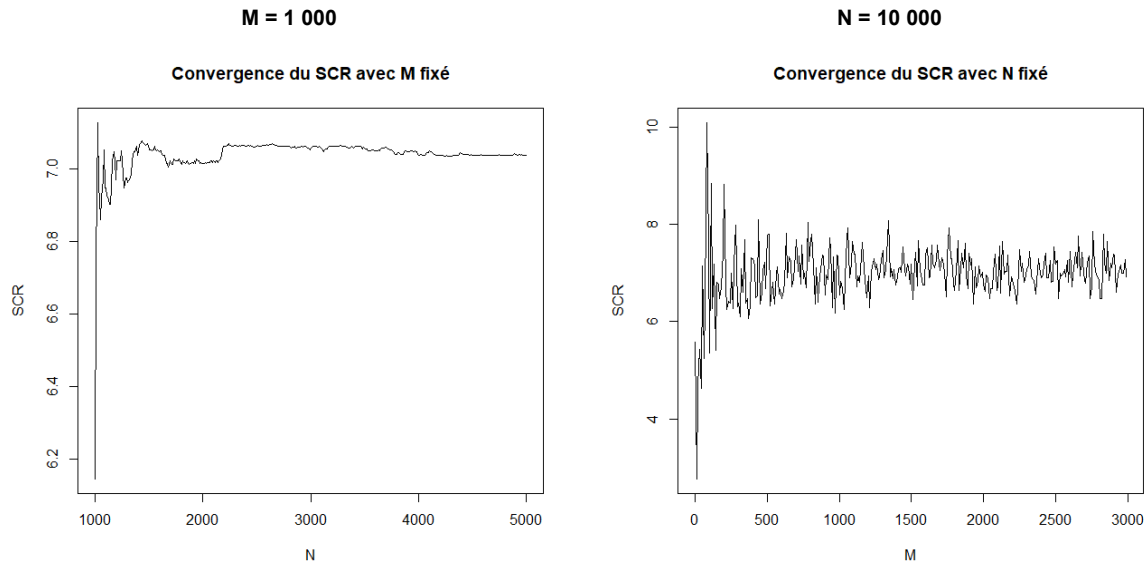
$$SCR = q_{0,995}(NAV_0 - \frac{NAV_1}{1+r})$$

#### a. Tests de convergence

Nous avons réalisé, toutes choses étant égales par ailleurs, plusieurs tests de sensibilité. Pour M fixé (nous le prenons égal à 1000 pour nos calculs de convergence), le SCR converge relativement bien à partir de 2200 simulations. Quant au calcul du SCR à N fixé, nous avons choisi  $N = 10\ 000$ . La convergence, un peu moins évidente ici, se fait à partir de  $M = 1000$ .

Nous verrons avec la méthode LSMC que la méthode SdS demande plus d'itérations pour que le SCR commence à converger.

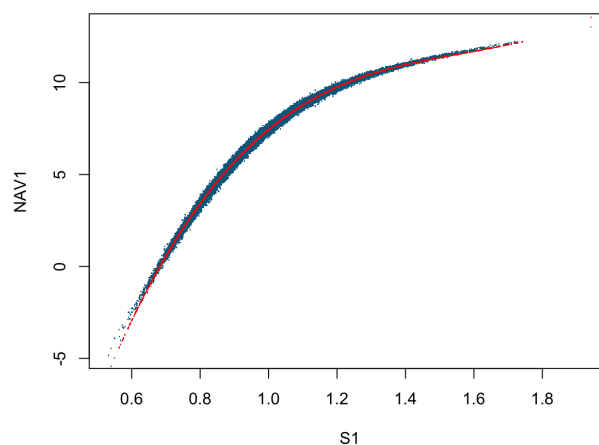
Les graphiques suivants illustrent cette vitesse de convergence du SCR lorsque l'on fixe M, puis N respectivement :



### 3. Méthode Least-Square Monte-Carlo (LSMC)

Dans cette partie, "LSMC régression indépendante des simulations secondaires" signifie qu'on garde le même résultat de la régression entre  $S_1$  et  $NAV_1$  (indépendant de M) et "LSMC régression dynamique" signifie qu'on fait des régressions sur M simulations secondaires et N simulations primaires de  $S_1^k$ .

Ce graphique résume la méthode LSMC.



**Méthode LSMC**

Approximation de  $NAV_1$  par un polynôme d'ordre 3 en  $S_1$

### a. Tests de convergence

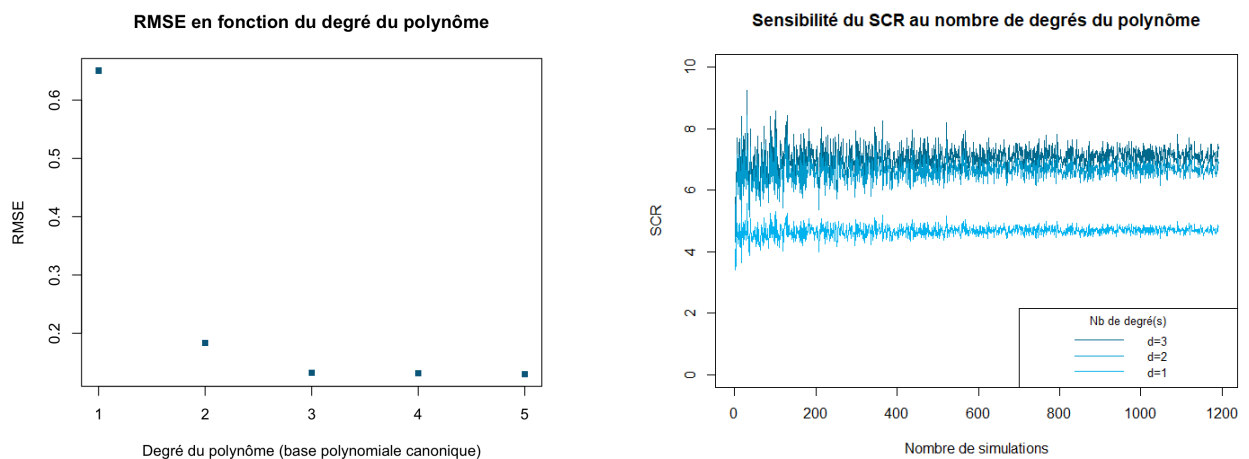
Pour cette méthode, nous reprenons nos estimations de la  $NAV_1$  trouvées avec la méthode des simulations dans les simulations puis nous utilisons une régression linéaire de ces estimations sur une base orthonormée. Nous proposons 3 bases de polynômes orthonormées :

- La base polynomiale canonique :  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Les polynômes de Chebyshev :  $T_n(x) = n \sum_{k=0}^n (-2)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!(2k)!} (1-x)^k$
- Les polynômes de Hermite :  $H_n(x) = \sum_{k=0}^{Ent(n/2)} (-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k}$

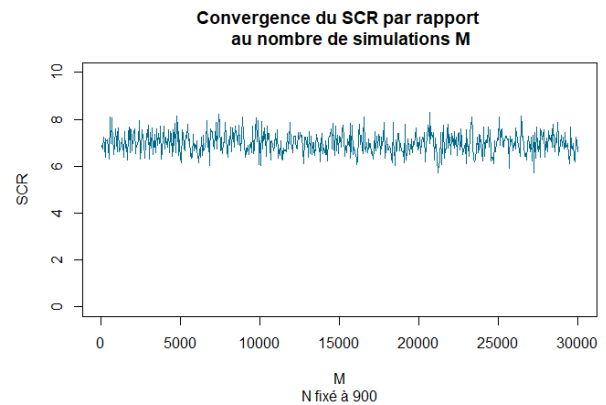
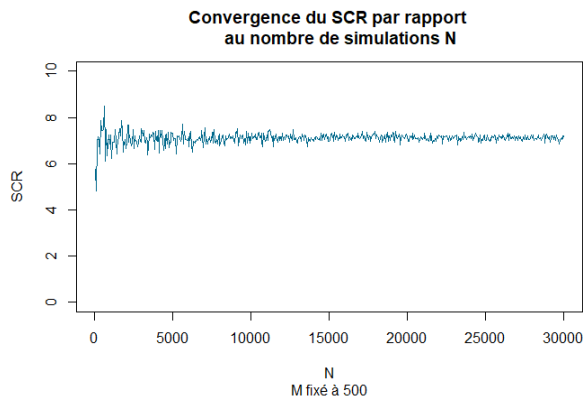
Comme tous les polynômes forment une base orthogonale, le résultat de la méthode LSMC est indépendante du polynôme choisi. Dans cette partie, on prendra la base polynomiale canonique.

Encore une fois, on procède, toutes choses étant égales par ailleurs, à plusieurs tests de sensibilité. Nous commençons par tester la sensibilité de l'estimation du SCR au nombre de degrés, d.

Par la suite, nous choisissons un polynôme de 3 degrés en remarquant que notre SCR converge de manière satisfaisante à partir de  $d = 3$ . En effet, choisir un polynôme de degré supérieur alourdit le temps de calcul pour un faible gain en précision.



Ensuite, nous nous intéressons à la sensibilité du SCR par rapport au nombre de simulations primaires  $N$  et au nombre de simulations secondaires  $M$ .



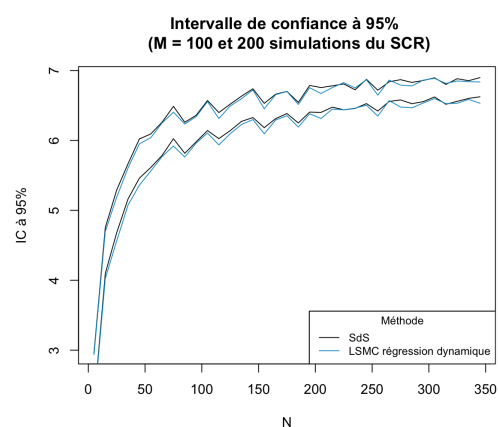
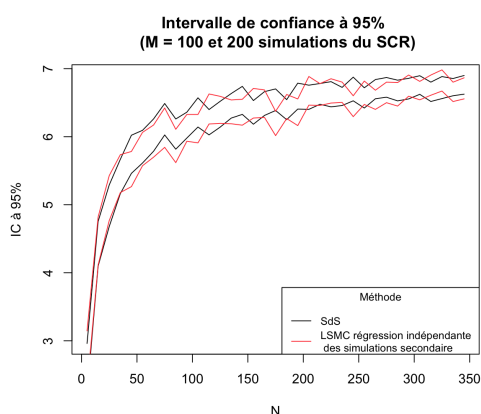
Le SCR dépend fortement du nombre de simulations primaires et semble converger à partir de  $N = 7000$  simulations.

Fixons par exemple  $N = 900$  pour étudier la sensibilité du SCR en fonction du nombre de simulations secondaires  $M$ . Nous déduisons du deuxième graphique que l'estimation du SCR avec la méthode LSMC est très peu sensible au nombre de simulations  $M$ .

## 4. Comparaison des méthodes SdS et LSMC

### a. Intervalles de confiance

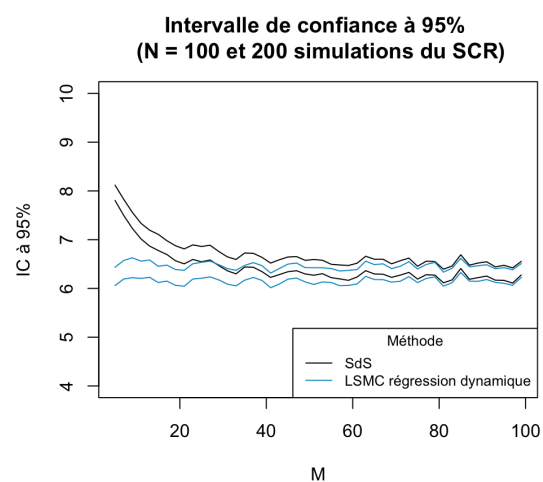
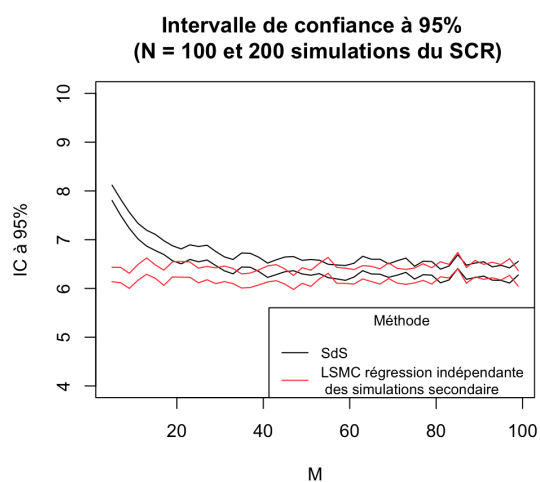
Pour un nombre de simulations secondaires  $M$  fixé, l'efficacité des méthodes SdS tout comme les méthodes LSMC (régression indépendante et dynamique) dépend fortement du nombre de simulations primaires  $N$ .



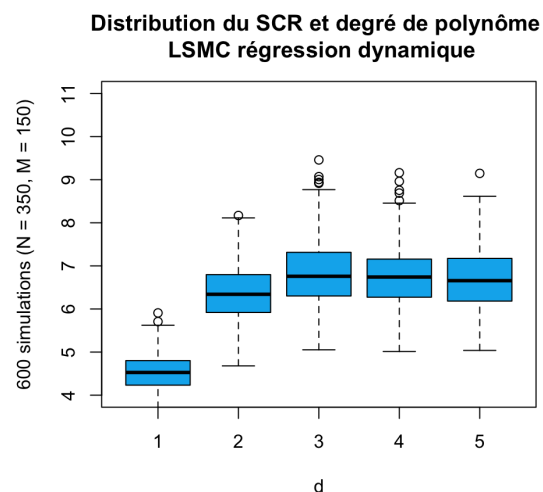
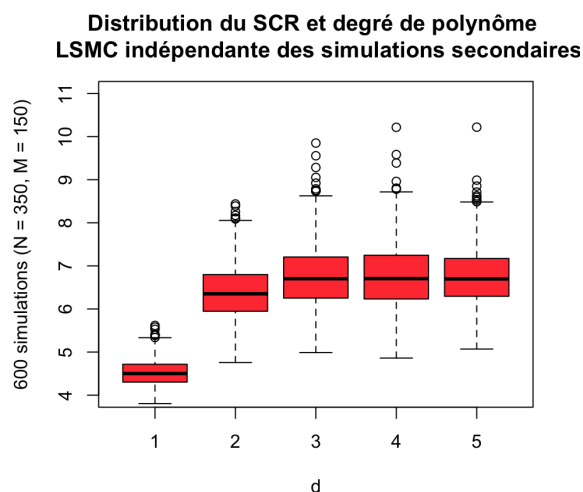
Pour un nombre de simulations primaires  $N$  fixé, la méthode LSMC permet, avec moins de simulations secondaires  $M$ , d'obtenir une performance équivalente que celle de la

méthode SdS avec plus de simulations secondaires. Autrement dit, la méthode SdS a besoin de plus de simulations  $M$  pour avoir un résultat convenable. Ceci est intuitif, car on peut imaginer qu'avec un nombre convenable de points, la régression permet de négliger les bruits liés au faible nombre de simulations. Ce résultat justifie donc l'intérêt de la méthode LSMC.

Il n'y a pas de différence significative entre une LSMC dont la régression est indépendante des simulations secondaires et la régression dynamique.



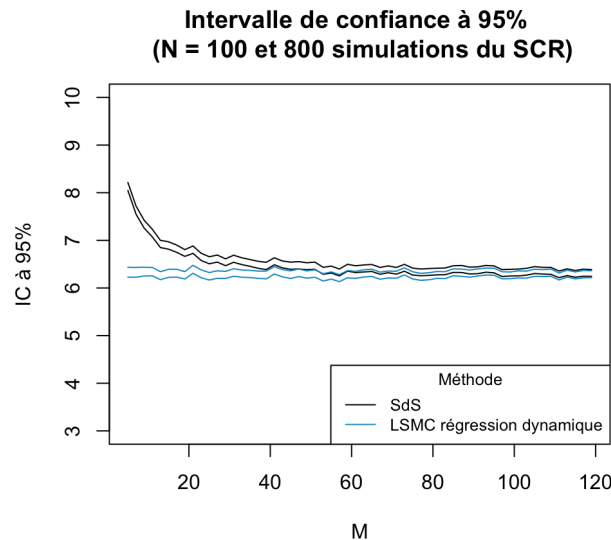
La méthode LSMC est optimale pour  $d = 3$ .





## b. Temps de calcul

Enfin, comme la méthode SdS a besoin de plus d'estimations secondaires  $M$  (pour  $N$  fixé à 100), on peut comparer les temps de calculs des deux méthodes en choisissant un  $M$  tel que les performances des méthodes soient comparables.



SdS M=120	LSMC régression dynamique M=30 ; d=3
Time difference of 1.257713 secs	Time difference of 1.13039 secs

La méthode LSMC permet de diminuer le temps de calculs, mais pas significativement.

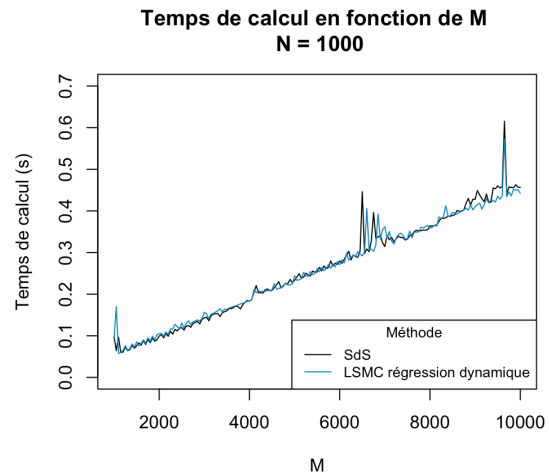
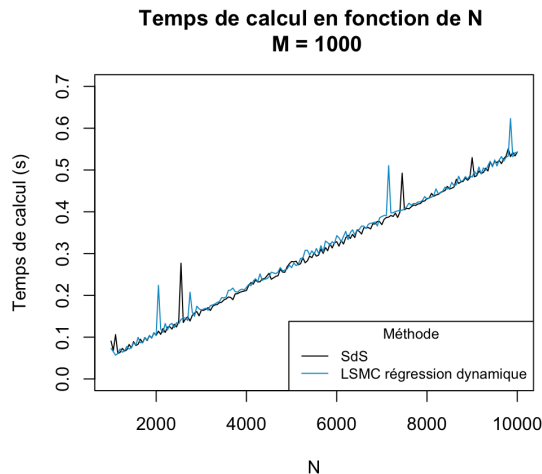
Pour  $M = 1000$ , le temps d'exécution est quasiment linéaire en fonction du nombre de simulations primaires  $N$ .

Pour  $M = 1000$  fixé, le temps d'exécution en fonction de  $N$  par la méthode **LSMC** est le même par rapport à la méthode **SdS**. Le fait d'ajouter une régression en plus dans la méthode LSMC n'augmente pas significativement le temps de calcul.

Pour  $N = 1000$ , le temps d'exécution est aussi linéaire en fonction du nombre de simulations secondaires  $M$ .

Pour  $N = 1000$  fixé, le temps d'exécution en fonction de  $M$  par la méthode **LSMC** identique à celui de la méthode **SdS**. Le fait d'ajouter une régression en plus dans la méthode LSMC n'augmente pas significativement le temps de calcul.

En comparant les pentes des deux graphiques ci-dessous, on voit que le nombre d'estimations primaires  $N$  a un impact plus important sur le temps de calcul que le nombre d'estimations secondaires  $M$ .



## 5. Sensibilité du SCR avec la méthode LSMC

### a. Sensibilité par rapport au taux sans risque $r$

Nous calculons la sensibilité du SCR au taux sans risque avec la méthode LSMC en utilisant une base polynomiale orthonormée de Chebyshev grâce au package ***orthopolynom*** de R. À noter que le choix du polynôme n'a pas d'impact significatif sur les résultats.

Nous faisons une première estimation du SCR avec  $N = 6000$ ,  $M = 200$ ,  $d = 3$ ,  $r_g = 1\%$  et  $r = 0,5\%$  noté  $r_1$ , puis une seconde en augmentant le taux sans risque  $r$  de  $0,01\%$  noté  $r_2$ .

Nous en déduisons la sensibilité du taux sans risque :  $\frac{SCR_{r_2} - SCR_{r_1}}{0,0001 r} = -83$

Il existe donc une relation négative entre le SCR et le taux sans risque. Plus particulièrement, quand  $r$  augmente d'une unité, le SCR diminue de 83 unités.

Ce résultat semble intuitif, puisque l'actualisation d'un montant donné diminue d'autant plus le montant que le taux d'intérêt est élevé.

### b. Sensibilité par rapport au taux garanti $r_g$

Nous utilisons exactement la même méthode que pour le taux sans risque sauf que, cette fois-ci, on fait varier le taux garanti  $r_g$ . Ce calcul nous permet de conclure à une relation positive entre le taux garanti et le SCR. Plus particulièrement, une hausse d'une unité du taux garanti provoquera une hausse de 90 unités du SCR.

Encore une fois, ce résultat est cohérent avec ce que l'on attendait : l'augmentation du taux garanti, et donc des engagements de l'assureur, provoque une hausse des provisions nécessaires à son activité et donc une hausse du SCR.

### III. Conclusion

En assurance vie, et plus précisément pour les contrats d'épargne, l'assureur doit pouvoir honorer son engagement vis-à-vis de l'assuré selon les termes définis dans son contrat. Pour ce faire, et en particulier, il doit pouvoir évaluer le Solvency Capital Requirement. Nous avons vu deux méthodes permettant de le calculer :

- la **méthode Simulations dans les Simulations** est une approche simple et rapide à mettre en œuvre, qui se base sur le calcul de la net asset value du contrat.
- toutefois, la **méthode LSMC** permet d'obtenir une même précision avec un nombre de simulations moins élevé. Elle reprend le fondement de la méthode SdS et fait intervenir une régression sur une base orthonormale de polynômes préalablement choisie. Nous avons vu que le degré du polynôme devait être au minimum de 3 pour obtenir une convergence satisfaisante du SCR.

Par ailleurs, le nombre de simulations primaires  $N$  a plus d'impact sur la qualité de l'estimation finale que le nombre de simulations secondaires  $M$ . De plus, pour  $N$  fixé, la méthode LSMC permet de diminuer le nombre de simulations secondaires  $M$  requis par rapport à la méthode SdS. Cependant, le gain en termes de temps de calcul est négligeable.

Enfin, nous avons observé que la sensibilité du SCR par rapport au taux sans risque était négative, et celle par rapport au taux garanti  $r_g$  positive. Cela peut paraître intuitif, car un taux garanti plus élevé se traduit par un plus grand engagement, et donc une mobilisation de capital supplémentaire pour l'assureur.