TỔNG HỢP CÔNG THỨC XÁC SUẤT GIỮA KỲ HK251

1 Các khái niệm và phép toán cơ bản trên biến cố

Các khái niệm về phép thử và biến cố

Các khái niệm về phép thử và biến cố	
Phép thử ngẫu nhiên	Thực hiện một số điều kiện xác định (thí nghiệm cụ thể hoặc quan sát hiện tượng), có thể lặp lại nhiều lần. Kết quả không xác định trước.
Không gian mẫu	Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử, kí hiệu Ω.
Biến cố sơ cấp	Mỗi kết quả $\omega \in \Omega$.
Biến cố ngẫu nhiên	Tập con của Ω gồm nhiều biến cố sơ cấp, kí hiệu $A, B, \ldots$
Biến cố chắc chắn	Xảy ra luôn khi thực hiện phép thử, kí hiệu Ω.
Biến cố bất khả	Không xảy ra khi thực hiện phép thử, kí hiệu $\varnothing$.

Các phép toán trên các biến cố

Các phép toán trên các biến cố	
Bao hàm (Kéo theo)	Nếu biến cố A xảy ra thì B cũng xảy ra. Ký hiệu: $A \subset B$.
Tương đương	A và B xảy ra đồng thời: $A \Leftrightarrow B$. Ký hiệu: $A = B$.
Biến cố đối (Phủ định)	Biến cố ngược với A: A không xảy ra. Ký hiệu: $\overline{A}$ hoặc A^C. *Công thức De Morgan:* $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
Tổng (Hợp)	Biến cố "A hoặc B (hoặc cả hai) xảy ra". Ký hiệu: $A + B$.
Tích (Giao)	Biến cố "A và B cùng xảy ra". Ký hiệu: $A \cdot B$.
Hiệu (Trừ)	Biến cố xảy ra khi A xảy ra nhưng B không xảy ra. Ký hiệu: $A - B$ hoặc $A \setminus B$. Ta có: $A - B = A \cdot \overline{B}$. *Hiệu với hợp và giao:* $A - (B + C) = (A - B) \cdot (A - C)$ $A - (B \cdot C) = (A - B) + (A - C)$
Phân phối	*Phân phối của giao và hợp:* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Chú thích: $A + B = A \cup B$ (Hợp), $A \cdot B = A \cap B$ (Giao), $A^C = \overline{A}$ (Phủ định)

2 Các công thức xác suất

Công thức cộng và công thức nhân xác suất

1. Công thức cộng xác suất	
Xét hai biến cố	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$
Trường hợp: nếu A, B xung khắc (tức là $A.B = \varnothing$)	$P(A+B) = P(A) + P(B)$
Xét ba biến cố	$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A.B) - P(B.C) - P(A.C) + P(A.B.C)$
Trường hợp: nếu A, B, C xung khắc đôi một	$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$
Xét n biến cố	$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i.A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i.A_j.A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1.A_2.\ldots.A_n)$
Trường hợp: nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc đôi một (tức là $A_i.A_j = \varnothing$ với mọi $i \neq j$)	$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$
2. Công thức nhân xác suất	
Xét hai biến cố	$P(A.B) = P(B).P(A\|B) = P(A).P(B\|A)$
Trường hợp: Nếu A và B độc lập *(Hai biến cố độc lập nghĩa là việc xảy ra của A không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của B, và ngược lại.)*	$P(A.B) = P(A).P(B)$
Xét n biến cố	$P(A_1.A_2.\ldots.A_n) = P(A_1)P(A_2\|A_1)P(A_3\|A_1.A_2)\ldots P(A_n\|A_1.A_2.\ldots.A_{n-1})$
Trường hợp: Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ độc lập toàn phần *(Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập toàn phần nếu mọi tập con của chúng đều gồm các biến cố độc lập.)*	$P(A_1.A_2.\ldots.A_n) = P(A_1).P(A_2)\ldots P(A_n)$
3. Xác định tính độc lập của biến cố	
Hai biến cố độc lập	A, B độc lập $\iff P(A.B) = P(A).P(B)$
Ba biến cố độc lập toàn phần	$\begin{cases} P(A.B) = P(A).P(B) \\ P(A.C) = P(A).P(C) \\ P(B.C) = P(B).P(C) \\ P(A.B.C) = P(A).P(B).P(C) \end{cases}$
n biến cố độc lập toàn phần	Cho n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là độc lập toàn phần với nhau nếu chúng thoả: $P(A_iA_j) = P(A_i).P(A_j)$, $P(A_iA_jA_k) = P(A_i).P(A_j).P(A_k)$, $P(A_1.A_2...A_n) = P(A_1).P(A_2)...P(A_n)$. với mọi tổ hợp chập 2 (i, j), chập ba (i, j, k), ... của n chỉ số.

Công thức xác suất có điều kiện, công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

1. Công thức suất có điều kiện

Công thức: $P(A|B) = \dfrac{P(A.B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$

Trường hợp: Nếu $A \subset B$ $\quad P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

Trường hợp: Nếu A, B xung khắc $\quad P(A|B) = 0$

Trường hợp: Nếu A, B độc lập $\quad P(A|B) = P(A)$

Trường hợp: Nếu ta có thêm biến cố C sao cho A, C xung khắc $\quad P[(A+C)|B] = P(A|B) + P(C|B)$

2. Khái niệm hệ biến cố đầy đủ

Khái niệm: *Một hệ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ được gọi là hệ biến cố đầy đủ nếu:*

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \varnothing, & \forall i \neq j, \\ A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega. \end{cases}$$

3. Công thức xác suất toàn phần

Công thức: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i), \quad$ với $\{A_i\}$ là hệ đầy đủ.

4. Công thức Bayes

Công thức: $P(A_j|B) = \dfrac{P(A_j)\,P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i)}, \quad P(B) \neq 0$

Các công thức xác suất thường gặp khác

1. Công thức về biến cố đối và phần bù

Công thức phần bù: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Công thức hợp phần bù: $P(\overline{A} + \overline{B}) = 1 - P(A.B)$

Công thức giao phần bù: $P(\overline{A}.\overline{B}) = 1 - P(A + B)$

Công thức phần bù giao: $P(\overline{A.B}) = 1 - P(A.B)$

2. Công thức hiệu xác suất

Hiệu hai biến cố: $P(A.\overline{B}) = P(A) - P(A.B)$

$P(\overline{A}.B) = P(B) - P(A.B)$

3. Công thức sai khác - Symmetric Difference

Hai biến cố: $P(A.\overline{B} + \overline{A}.B) = P(A) + P(B) - 2P(A.B)$

Ba biến cố: $P(A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C) = P(A) + P(B) + P(C) - 2[P(A.B) + P(A.C) + P(B.C)] + 3P(A.B.C)$

4. Các công thức mở rộng và suy luận nhanh

Biến cố chắc chắn và rỗng: $P(\Omega) = 1, \quad P(\varnothing) = 0$

Tính đơn điệu: Nếu $A \subseteq B$ thì $P(A) \leq P(B)$

3 Biến ngẫu nhiên

1. Biến ngẫu nhiên rời rạc (Discrete Random Variable)

Định nghĩa: Biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị rời rạc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với xác suất tương ứng $p_1, p_2, \ldots, p_n$, thỏa mãn:

$$p_i = P(X = x_i), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Bảng phân phối xác suất:

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

Hàm xác suất (PMF): $f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \\ 0, & x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \end{cases}$

Tính chất của hàm xác suất:

$$f(x) \geq 0, \ \forall x; \qquad \sum_x f(x) = 1$$

Hàm phân phối tích lũy (CDF): $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$

Tính chất của hàm phân phối tích luỹ (rời rạc):

- $F(x)$ là hàm không giảm: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- Liên tục bên phải: $\lim_{t \to x^+} F(t) = F(x)$
- Bước nhảy tại x_i chính là xác suất p_i:

$$F(x_i) - F(x_i^-) = P(X = x_i) = p_i$$

Các công thức xác suất thường dùng:

- $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i^-)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(X \leq a) = F(a)$
- $P(X > a) = 1 - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p_i$

2. Biến ngẫu nhiên liên tục (Continuous Random Variable)

Định nghĩa: Biến ngẫu nhiên liên tục X là biến có thể nhận vô số giá trị trong một khoảng (hoặc nhiều khoảng) của trục số thực.

Hàm mật độ xác suất (PDF): Phân phối của X được đặc trưng bởi $f(x)$ sao cho:

$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Ý nghĩa: $f(x)$ không phải là xác suất tại điểm x, mà biểu diễn *mức độ dày đặc* (mật độ) của xác suất quanh điểm x. Xác suất để X nhận giá trị trong khoảng $[a, b]$ được tính bởi:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad P(X = x) = 0$$

Hàm phân phối tích lũy (CDF): $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Mối liên hệ giữa $f(x)$ và $F(x)$: Nếu $F(x)$ khả vi tại x, thì

$$f(x) = F'(x), \qquad P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

Tính chất của hàm phân phối tích luỹ (liên tục):

- $F(x)$ là hàm tăng (không giảm) trên $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và khả vi tại mọi điểm mà $f(x)$ tồn tại

Công thức xác suất thường dùng:

- $P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a)$
- $P(X > a) = 1 - F(a)$
- $P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
- $P(a < X < b) = P(a \le X \le b)$ vì $P(X = a) = 0$

3. Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng (giá trị trung bình): $E(X) = \sum_i x_i p_i$ (nếu X rời rạc)

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ (nếu X liên tục)

Ý nghĩa: là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên, phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất của X.

Tính chất của kỳ vọng:

- $E(a) = a$
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- Nếu X, Y độc lập: $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Nếu X rời rạc: $E(Y) = E[p(X)] = \sum p(x_i) \cdot p_i$
- Nếu X liên tục: $E(Y) = E[p(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x).f(x)dx$

Phương sai: $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

với : $E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i$ (nếu X rời rạc)

với : $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ (nếu X liên tục)

Ý nghĩa: phương sai là trung bình bình phương sai lệch, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.

Tính chất của phương sai:

- $V(X) \ge 0$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- Nếu X, Y độc lập: $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- Nếu X, Y độc lập: $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$
- Nếu X, Y độc lập: $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$
- $V(aX + bY) = a^2(X) + b^2(Y) + 2ab\,Cov(X, Y)$

Độ lệch chuẩn: $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Trung vị (Median): là giá trị m_X thoả mãn:

$P(X \le m_X) \ge \frac{1}{2}$ và $P(X \ge m_X) \ge \frac{1}{2}$ (nếu X rời rạc)

$P(X \le m_X) = \int_{-\infty}^{m_X} f(x)dx = F(m_X) = \frac{1}{2}$ (nếu X liên tục)

Mốt (Mode): là giá trị x_i có xác suất lớn nhất (nếu X rời rạc)

là giá trị x tại đó $f(x)$ đạt cực đại (nếu X liên tục).

4 Vectơ ngẫu nhiên

1. Vectơ ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

Hàm phân phối tích lũy đồng thời (Joint CDF): $F_{XY}(x, y) = P(X \le x, Y \le y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Tính chất hàm phân phối tích lũy đồng thời:

- $F_{XY}(x, y)$ là hàm tăng (không giảm) theo từng biến:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_{XY}(x_1, y) \le F_{XY}(x_2, y)$$

$$y_1 < y_2 \Rightarrow F_{XY}(x, y_1) \le F_{XY}(x, y_2)$$

- Giá trị nằm trong khoảng $0 \le F_{XY}(x, y) \le 1$
- Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} F_{XY}(x, y) = 0,$$

$$\lim_{y\to-\infty} F_{XY}(x, y) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F_{XY}(x, y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F_{XY}(x, y) = 1$$

- Xác suất trên một "ô" rời rạc:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = F_{XY}(x_i, y_j) - F_{XY}(x_{i-1}, y_j)$$

$$-F_{XY}(x_i, y_{j-1}) + F_{XY}(x_{i-1}, y_{j-1})$$

Hàm khối xác suất đồng thời (Joint PMF): $f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$

Tính chất hàm khối xác suất đồng thời:

- $f_{XY}(x, y) \ge 0$
- $\sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1$

Độc lập của hai biến ngẫu nhiên rời rạc: Hai biến X và Y độc lập nếu thỏa một trong các điều kiện:

- $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \ \forall x, y$
- $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y), \ f_X(x) > 0$
- $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \ f_Y(y) > 0$
- $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$ với mọi tập A, B

2. Các đặc trưng của vectơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y)

Hiệp phương sai (Covariance):

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Hệ số tương quan (Correlation coefficient):

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}}$$

$-1 \le \rho_{XY} \le 1$

Ý nghĩa: Mức độ và hướng quan hệ tuyến tính giữa X và Y.

5 Các quy luật phân phối xác suất

Các quy luật phân phối xác suất thường gặp

1. Phân phối Nhị thức (Binomial distribution)

Định nghĩa: Phân phối Nhị thức là một phân phối xác suất rời rạc, mô tả số lần xuất hiện của một biến cố (hay số lần thành công) trong n phép thử độc lập, mỗi phép thử có xác suất thành công là p và xác suất thất bại là $q = 1 - p$.

Một biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối Nhị thức (kí hiệu: $X \sim B(n,p)$) nếu : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n.$

Đặc trưng: $E(X) = np; V(X) = npq; \sigma(X) = \sqrt{npq}$

$np - q \le \mathrm{Mod}(X) \le np - q + 1, \ (\mathrm{Mod}(X) \in \mathbb{N}).$

Công thức xác suất: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \sum_{k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Tính chất: Tính chất xấp xỉ của Nhị thức

Trường hợp 1: Khi n lớn và p không quá nhỏ hoặc quá lớn ($np \ge 5$ và $nq \ge 5$), ta có $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ với $\mu = np; \sigma^2 = npq$.

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(k-\mu)^2}{2.\sigma^2}}$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

(Lưu ý: Đây là tính chất xấp xỉ Chuẩn của phân phối Nhị thức dựa trên Định lý Giới hạn Trung tâm (Central Limit Theorem – CLT). Trong công thức đã có hiệu chỉnh liên tục để tăng độ chính xác.

Trường hợp 2: Khi n lớn và p nhỏ ($n \ge 20$, $p \le 0.05$; $np \le 5$), ta có $X \approx P(\lambda)$ với $\lambda = np$

$$P(X = k) \approx \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!}$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \approx \sum_{k_1}^{k_2} \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!}$$

(Lưu ý: Đây là Định lý Giới hạn Poisson (Poisson Limit Theorem)

Tính chất cộng của phân phối Nhị thức: Nếu X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, i = 1, 2, ..., m, và $X_i \sim B(n_i, p)$ thì $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_m \sim B(n, p)$ với $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

2. Phân phối Poisson (Poisson distribution)

Định nghĩa: Phân phối Poisson là một phân phối xác suất rời rạc, mô tả số lần xảy ra của một sự kiện trong một khoảng thời gian, không gian hoặc phạm vi xác định, khi các sự kiện xảy ra độc lập.

Một biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối Poisson với tham số λ (kí hiệu: $X \sim P(\lambda)$) nếu: $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$; $k = 0, 1, 2, ...$

Trong đó: λ là giá trị kỳ vọng (trung bình) của số lần xảy ra sự kiện trong khoảng xét (cũng là tham số của phân phối).

Đặc trưng: $E(X) = V(X) = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}, \quad \lambda - 1 \le \mathrm{Mod}(X) \le \lambda$

Công thức xác suất: $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \sum_{k_1}^{k_2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Tính chất: Tính chất cộng: Xét X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, i = 1, 2, ..., n và $X_i \sim P(\lambda_i)$. Nếu ta đặt $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ thì $Y \sim P(\lambda_Y)$ với $\lambda_Y = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

Tính chất xấp xỉ: Khi λ lớn, (thường $\lambda > 30$): $X \sim P(\lambda) \approx N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$

Lưu ý: cần hiệu chỉnh liên tục (continuity correction) khi tính xác suất.

Tính chất phân rã: Giả sử $Z \sim P(\lambda)$. Mỗi sự kiện được phân loại độc lập vào m nhóm, với xác suất vào nhóm k là p_k $\left(\sum_{k=1}^{m} p_k = 1\right)$. Khi đó, số sự kiện thuộc nhóm k, ký hiệu Z_k, có phân phối $Z_k \sim P(p_k\lambda)$, và các $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ độc lập, thỏa: $Z = \sum_{k=1}^{m} Z_k$

Liên hệ với phân phối mũ: Nếu $X \sim P(\lambda)$ biểu thị số sự kiện xảy ra trong một khoảng thời gian nhất định, thì thời gian giữa hai sự kiện liên tiếp, ký hiệu là T, sẽ tuân theo phân phối mũ với cùng tham số: $T \sim E(\lambda)$.

3. Phân phối mũ (Exponential distribution)

Định nghĩa: Phân phối mũ là một phân phối xác suất liên tục, mô tả khoảng thời gian chờ giữa hai sự kiện liên tiếp trong một quá trình Poisson.

Một biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối mũ với tham số $\lambda > 0$ (kí hiệu: $X \sim E(\lambda)$) nếu: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Trong đó: λ là tham số tốc độ (rate parameter) - số sự kiện trung bình xảy ra trong một đơn vị thời gian.

Hàm phân phối xác suất: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Đặc trưng: $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}, V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}, \mathrm{mod}(X) = 0, m_X = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Tính chất: Tính chất cực tiểu (Minimum Property): Nếu X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, i = 1, 2, ..., n, và $X_i \sim E(\lambda_i)$ thì $Y = \min(X_1, ..., X_n) \sim E(\lambda_Y)$ với $\lambda_Y = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Tính chất không nhớ: $X \sim E(\lambda)$ và $\forall a, b > 0$, ta có $P(X \ge a + b | X \ge a) = P(X \ge b)$.

Chú ý: *"Thời gian giữa hai sự kiện liên tiếp" và "thời gian chờ để sự kiện đầu tiên xảy ra" thực chất mang cùng ý nghĩa, đều biểu thị khoảng thời gian giữa hai lần xảy ra sự kiện trong quá trình Poisson.*

4. Phân phối đều (Uniform distribution)

Định nghĩa: Phân phối đều mô tả các giá trị có khả năng xảy ra như nhau trong một khoảng (liên tục) hoặc trên một tập hợp hữu hạn (rời rạc).

☐ Trường hợp liên tục: Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều liên tục trên đoạn $[a,b]$, ký hiệu $X \sim U(a,b)$, nếu hàm mật độ xác suất có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{ở nơi khác} \end{cases}$$

Hàm phân phối xác suất: $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Đặc trưng: $E(X) = m_X = \dfrac{a+b}{2}; V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}; \sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

☐ Trường hợp rời rạc: Nếu X nhận n giá trị hữu hạn có xác suất bằng nhau, ta nói X có phân phối đều rời rạc.

Đặc trưng: Nếu X có giá trị trong tập $\{a, a+1, \ldots, b\}$ thì:

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}; V(X) = \dfrac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

Nếu X có giá trị trong tập $\{a, a+c, a+2c, \ldots, b\}$ với $c \neq 0$ thì:

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}; V(X) = \dfrac{(b-a+c)^2 - c^2}{12}$

5. Phân phối chuẩn (Normal distribution)

Định nghĩa: Phân phối chuẩn là phân phối liên tục, có hình chuông đối xứng quanh trung bình μ, xác định bởi tham số: trung bình μ và độ lệch chuẩn σ.

Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$

Đặc trưng: $E(X) = m_X = \text{Mod}(X) = \mu; V(X) = \sigma^2; \sigma(X) = \sigma$

Phân phối chuẩn tắc: Phân phối chuẩn chuẩn hoá (chuẩn tắc) là trường hợp đặc biệt khi $\mu = 0, \sigma = 1$, ký hiệu $X \sim N(0,1)$.

Hàm mật độ phân phối chuẩn tắc: Nếu $X \sim N(0,1)$ thì $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$

Hàm phân phối chuẩn tắc: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \Phi(x)$

. Tính chất hàm $\Phi(z)$: $\Phi(+\infty) = 1,\ \Phi(-\infty) = 0;\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Công thức xác suất: $P(k_1 \le X \le k_2) = \Phi\left(\dfrac{k_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{k_1-\mu}{\sigma}\right)$

$P(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$ (*)

Chú ý: Công thức (*) là công thức xác suất đối xứng quanh trung bình của phân phối chuẩn, hay còn gọi là công thức tính xác suất để biến ngẫu nhiên sai lệch so với kỳ vọng không quá ε.

Từ (*), ta có $\varepsilon = k.\sigma$, ta sẽ có công thức tính xác suất nằm trong k độ lệch chuẩn: $P(|X-\mu| < k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$

Quy tắc 3-sigma: Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, thì:
- Khoảng $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ chứa khoảng 68% dữ liệu
- Khoảng $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ chứa khoảng 95% dữ liệu
- Khoảng $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ chứa khoảng 99.7% dữ liệu

Các định lý: (1) Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ và $Y = aX + b$ với $a \neq 0$ thì:

$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ với $\mu_Y = a\mu + b$ và $\sigma_Y^2 = a^2\sigma^2$.

(2) Nếu $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ và $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ và X_1 và X_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập thì:

$Y = aX_1 + bX_2 \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ với $\mu_Y = a\mu_1 + b\mu_2$ và $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$.

(3) Nếu $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, thì:

- $X = X_1 + ... + X_n \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ với $\mu = \mu_1 + ... + \mu_n$ và $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$
- $\overline{X} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n} \sim N\left(\mu_{\overline{X}}, \sigma_{\overline{X}}^2\right)$ với $\mu_{\overline{X}} = \dfrac{\mu_1 + ... + \mu_n}{n}$ và $\sigma_{\overline{X}}^2 = \dfrac{\sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2}{n^2}$

(4) Nếu $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, thì:

- $X = X_1 + ... + X_n \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ với $\mu_X = n\mu$ và $\sigma_X^2 = n\sigma^2$
- $\overline{X} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n} \sim N\left(\mu_{\overline{X}}, \sigma_{\overline{X}}^2\right)$ với $\mu_{\overline{X}} = \mu$ và $\sigma_{\overline{X}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Phân vị bên phải z_α: Phân vị bên phải z_α của phân phối chuẩn tắc là giá trị sao cho:

$$P(Z \le z_\alpha) = 1 - \alpha, \quad Z \sim N(0,1)$$

- Sử dụng máy tính bỏ túi để tìm z_α theo xác suất tích lũy $1-\alpha$
- Ví dụ: $z_{0.05} \implies P(Z \le z_{0.05}) = 0.95 \implies z_{0.05} \approx 1.65$

Một số phân phối xác suất khác

1. Phân phối Bernoulli (Bernoulli distribution)

Định nghĩa: Phân phối Bernoulli mô tả một phép thử chỉ có hai kết quả: *thành công* (1) với xác suất p và *thất bại* (0) với xác suất $1-p$. Ký hiệu: $X \sim Bernoulli(p)$.

Hàm xác suất: $P(X = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x = 0 \end{cases}$

Đặc trưng: $E(X) = p; V(X) = p(1-p); \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Tính chất: Nếu X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối $Bernoulli(p)$ thì tổng $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim B(n,p)$

Chú ý: Phân phối Bernoulli chính là trường hợp riêng của phân phối Nhị thức khi n = 1

2. Phân phối siêu bội (Hypergeometric distribution)

Định nghĩa: Dùng để mô tả số lần thành công khi lấy mẫu *không hoàn lại* từ một quần thể hữu hạn. Giả sử có N phần tử, trong đó có M phần tử loại "thành công". Lấy ngẫu nhiên n phần tử, số thành công thu được là biến ngẫu nhiên $X \sim H(N, M, n)$.

Hàm xác suất: $P(X=k) = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad \max(0, n-(N-M)) \le k \le \min(n, M)$

Đặc trưng: $E(X) = n\dfrac{M}{N}; V(X) = n\dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$

Tính chất: Tính chất xấp xỉ

Khi kích thước quần thể rất lớn so với mẫu, tức là: $N \gg n$ hay $\dfrac{n}{N} \le 0.5$.

Khi đó $X \sim H(N, M, n) \approx B\left(n, p = \dfrac{M}{N}\right)$

Khi n và N đủ lớn, $\dfrac{M}{N}$ không quá gần 0 hoặc 1 (thường $np(1-p) > 5$).

Khi đó: $X \sim H(N, M, n) \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$

với $\mu_X = n\dfrac{M}{N}$ và $\sigma_X^2 = n\dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$

3. Phân phối nhị thức âm (Negative binomial distribution)

Định nghĩa 1: Mô tả **số lần thất bại** xảy ra trước khi đạt được r lần thành công trong các phép thử Bernoulli độc lập, mỗi phép thử có xác suất thành công p. Ký hiệu: $X \sim NB(r, p)$.

Hàm xác suất: $P(X=x) = C_{r-1}^{x+r-1} p^r (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

Đặc trưng: $E(X) = r\dfrac{1-p}{p}; V(X) = r\dfrac{1-p}{p^2}$

Định nghĩa 2: Mô tả **tổng số phép thử** cần thực hiện để đạt được r lần thành công trong các phép thử Bernoulli độc lập, mỗi phép thử có xác suất thành công p. Ký hiệu: $Y \sim NB(r, p)$ hoặc $Y = X + r$.

Hàm xác suất: $P(Y=k) = C_{r-1}^{k-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \ldots$

Đặc trưng: $E(Y) = \dfrac{r}{p}; V(Y) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Mối liên hệ giữa hai định nghĩa: $Y = X + r$ - tức là biến "tổng số phép thử" bằng "số thất bại" cộng với r lần thành công. Hai định nghĩa chỉ khác nhau ở cách đếm, nhưng bản chất là tương đương.

Chú ý: Nếu $r = 1$, ta thu được phân phối hình học.

Tính chất: Tính chất tái sinh (summing property): Nếu $X_1 \sim NB(r_1, p), X_2 \sim NB(r_2, p)$ và X_1 và X_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập thì $Y = X_1 + X_2 \sim NB(r_Y, p)$ với $r_Y = r_1 + r_2$.

Tính chất xấp xỉ: Nếu xác suất thành công nhỏ, số phép thử lớn $(r \to \infty, p \to 0, r.p = \lambda)$ thì $X \sim NB(r, p) \approx P(\lambda)$.

4. Phân phối hình học (Geometric distribution)

Định nghĩa 1: Mô tả **số lần thất bại xảy** ra trước khi đạt được lần thành công đầu tiên trong các phép thử Bernoulli độc lập, mỗi phép thử có xác suất thành công p. Ký hiệu: $X \sim G(p)$.

Hàm xác suất: $P(X=k) = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Đặc trưng: $E(X) = \dfrac{1-p}{p}; V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Tính chất: Tính chất không nhớ: Nếu $X \sim G(p)$, thì với mọi $a, b \ge 0$: $P(X > a+b | X > a) = P(X > b)$

Định nghĩa 2: Mô tả **số phép thử** cần thiết để đạt được lần thành công đầu tiên trong các phép thử Bernoulli độc lập, mỗi phép thử có xác suất thành công p. Ký hiệu: $Y \sim G(p)$.

Hàm xác suất: $P(Y=k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

Đặc trưng: $E(Y) = \dfrac{1}{p}; V(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Tính chất: Tính chất không nhớ: Nếu $Y \sim G(p)$, thì với mọi $a, b \ge 1$: $P(Y > a+b | Y > a) = P(Y > b)$

Ghi chú: Phân phối này là trường hợp đặc biệt của phân phối nhị thức âm khi số thành công $r = 1$.

5. Phân phối Logistic (Logistic distribution)

Định nghĩa: Phân phối Logistic là phân phối xác suất liên tục có dạng tương tự phân phối chuẩn nhưng có đuôi dày hơn. Ký hiệu: $X \sim Logistic(\mu, s)$, với μ là tham số vị trí, $s > 0$ là tham số tỷ lệ.

Hàm mật độ xác suất (PDF): $f(x; \mu, s) = \dfrac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s\left(1+e^{-\frac{x-\mu}{s}}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$

Hàm phân phối tích luỹ (CDF): $F(x; \mu, s) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{x-\mu}{s}}}$

Đặc trưng: $E(X) = \mu; V(X) = \dfrac{\pi^2 s^2}{3}; \sigma(X) = \dfrac{\pi s}{\sqrt{3}}$

Tính chất:

- Đối xứng quanh μ; đuôi dày hơn phân phối chuẩn.
- Với $\mu = 0, s = 1$: $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

6. Phân phối Cauchy (Cauchy distribution)

Định nghĩa: Phân phối Cauchy là phân phối liên tục đối xứng quanh tham số vị trí μ, có tham số tỷ lệ $s > 0$. Ký hiệu: $X \sim Cauchy(\mu, s)$.

Hàm mật độ xác suất (PDF): $f(x; \mu, s) = \dfrac{1}{\pi s\left[1+\left(\dfrac{x-\mu}{s}\right)^2\right]}, \quad -\infty < x < \infty$

Hàm phân phối tích luỹ (CDF): $F(x; \mu, s) = \dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{x-\mu}{s}\right) + \dfrac{1}{2}$

Đặc trưng: Không có kỳ vọng ($E(X)$ không tồn tại) và phương sai ($V(X)$ không xác định).

Tính chất:

- Đối xứng quanh μ.
- Có "đuôi dày" – các giá trị cực trị xuất hiện thường xuyên hơn phân phối chuẩn.
- Dạng chuẩn tắc: $Cauchy(0, 1)$ có $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.
- Trung vị và mode đều bằng μ.

7. Phân phối Log-Normal (Log-normal distribution)

Định nghĩa: Một biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối Log-Normal nếu $\ln X$ tuân theo phân phối chuẩn. Ký hiệu: $X \sim LogNormal(\mu, \sigma^2)$, trong đó $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Hàm mật độ xác suất (PDF): $f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > 0$

Hàm phân phối tích luỹ (CDF): $F(x;\mu,\sigma) = \Phi\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), \quad x > 0$

Đặc trưng: $E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}; V(X) = \left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{2\mu+\sigma^2}, m_X = e^{\mu}; \text{Mode}(X) = e^{\mu-\sigma^2}$

Tính chất:
- X luôn dương ($x > 0$).
- Nếu $Y = \ln X$ thì $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Định lý giới hạn trung tâm

1. Định lý Giới hạn Trung tâm (Central Limit Theorem – CLT)

Định nghĩa: Định lý Giới hạn Trung tâm phát biểu rằng: với số lượng mẫu đủ lớn, tổng hoặc trung bình của các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối (hữu hạn kỳ vọng và phương sai) sẽ xấp xỉ tuân theo phân phối chuẩn.

Điều kiện: Các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập, cùng phân phối với: $E(X_i) = \mu$ và $V(X_i) = \sigma^2$.

Kết quả: Khi n đủ lớn, ta có:
- $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$ với $\mu_X = n\mu$ và $\sigma_X^2 = n\sigma^2$
- $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \approx N\left(\mu_{\overline{X}}, \sigma_{\overline{X}}^2\right)$ với $\mu_{\overline{X}} = \mu$ và $\sigma_{\overline{X}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Hiệu chỉnh liên tục: Hiệu chỉnh liên tục áp dụng khi biến tổng $X = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ là rời rạc (nghĩa là mỗi X_i là các biến ngẫu nhiên rời rạc $\Rightarrow$ tổng X cũng rời rạc). Khi đó, ta hiệu chỉnh ± 0.5 khi tính xác suất:
$P(k_1 \le X \le k_2) = \Phi\left(\dfrac{k_2 + 0.5 - \mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\dfrac{k_1 - 0.5 - \mu_X}{\sigma_X}\right)$

Dạng chuẩn hoá: Khi n lớn, biến ngẫu nhiên chuẩn hoá có phân phối tiệm cận chuẩn tắc: $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

Chú ý: *Định lý áp dụng tốt khi $n \ge 30$ (theo kinh nghiệm thống kê).*
Định lý Giới hạn Trung tâm đặc biệt hữu ích khi các X_i không có phân phối chuẩn ban đầu. Khi đó, tổng hoặc trung bình mẫu của chúng vẫn xấp xỉ phân phối chuẩn khi n đủ lớn.

2. Phân phối của tỷ lệ mẫu – Sample Proportion

Định nghĩa: Phân phối của tỷ lệ mẫu thực chất là một trường hợp đặc biệt của Định lý giới hạn trung tâm. Giả sử thực hiện n phép thử độc lập với xác suất thành công p, gọi X là số lần thành công, $\hat{p} = X/n$ là tỷ lệ thành công mẫu. Phân phối của $\hat{p}$ được gọi là phân phối tỷ lệ mẫu.

Phân phối xấp xỉ: Vì $X \sim B(n,p)$, theo ĐLGT với n lớn ($n \ge 30$): $\hat{p} \approx N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$

Đặc trưng: $E(\hat{p}) = p; \text{Var}(\hat{p}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$

Công thức xác suất: $P(a \le \hat{p} \le b) = \Phi\left(\dfrac{b-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)$

6 Một số bài toán xác suất ứng dụng

Một số bài toán xác suất ứng dụng

1. Bài toán xác suất hình học

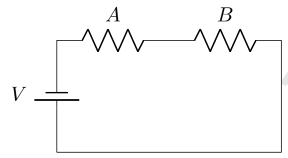
Mô tả các bài toán trong đó không gian mẫu Ω là một miền hình học (đoạn, diện tích, thể tích, ...). Xác suất của biến cố A được xác định bằng tỉ số giữa độ đo của miền tương ứng với A và độ đo của toàn không gian Ω:

$$P(A) = \frac{\text{Độ đo của miền } A}{\text{Độ đo của miền } \Omega}$$

2. Bài toán mạch điện

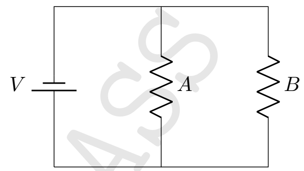
Cho hai linh kiện A và B mắc như hình vẽ. Giả sử mỗi linh kiện hoạt động độc lập với xác suất hoạt động p_i và xác suất hỏng $q_i = 1 - p_i$. Ta có:

Mắc nối tiếp:



$$P(\text{hệ hoạt động}) = p_1 \cdot p_2, \quad P(\text{hệ hỏng}) = 1 - p_1p_2$$

Mắc song song:



$$P(\text{hệ hoạt động}) = 1 - q_1q_2, \quad P(\text{hệhỏng}) = q_1q_2$$

3. Bài toán xác định số phép thử cần thiết

Xét bài toán tìm số phép thử n để xác suất xảy ra **ít nhất một lần biến cố** A trong n phép thử không nhỏ hơn ε. Giả sử xác suất để A xảy ra trong một phép thử là p (không đổi), khi đó $q = 1 - p$.

$P(\text{ít nhất một lần } A) \ge \varepsilon$
$\Leftrightarrow \ 1 - P(\text{không có lần nào } A) \ge \varepsilon$
$\Leftrightarrow \ 1 - q^n \ge \varepsilon$
$\Leftrightarrow \ n \ge \log_q(1-\varepsilon)$
Chọn n là **số nguyên nhỏ nhất** thoả điều kiện trên.

4. Bài toán toa tàu

Một chuyến tàu gồm n toa và k hành khách ($k \ge n$). Mỗi hành khách lên toa ngẫu nhiên và độc lập. Tìm xác suất để mỗi toa đều có hành khách.

$$P(A) = 1 - \frac{C_n^1(n-1)^k - C_n^2(n-2)^k + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^n(n-n)^k}{n^k}$$

7 Hướng dẫn sửa dụng máy tính bỏ túi

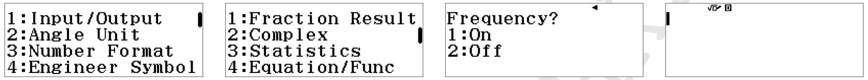
Ví dụ 1 Tính các đặc trưng (bảng 1 chiều)

Xét bảng phân phối xác suất sau:

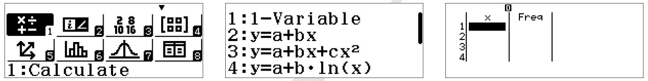
X	1	2	3	4
P	0.1	0.3	0.2	0.4

Yêu cầu: Tính $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$ bằng máy tính **Casio fx-580VN X**.

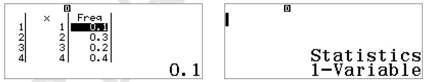
Bước 1: Mở cột tần số: Nhấn SHIFT ⇒ MENU ⇒ ∇ ⇒ 3 (Thống kê) ⇒ 1 (Mở).



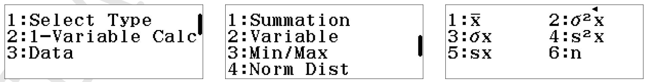
Bước 2: Mở chế độ nhập bảng: Nhấn MENU ⇒ 6 (THỐNG KÊ) ⇒ 1 (Tính thống kê 1 biến).



Bước 3: Sau khi xuất hiện 2 cột, ta nhập số liệu vào bảng: Nhập các giá trị của X vào cột **X**, nhập xác suất tương ứng của X vào cột **FREQ**. Sau khi nhập xong, nhấn AC.

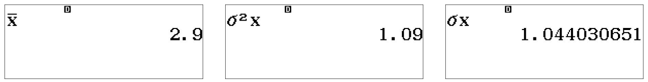


Bước 4: Tìm các đặc trưng bằng cách: Nhấn OPTION ⇒ ∇ ⇒ 2 (BIẾN THỐNG KÊ).



với: 1($\bar{x}$): kỳ vọng $E(X)$; 2 (σ_x^2): phương sai $V(X)$; 3 (σ_x): độ lệch chuẩn $\sigma(X)$

Kết quả:



Ví dụ 2 Tính xác suất theo phân phối chuẩn

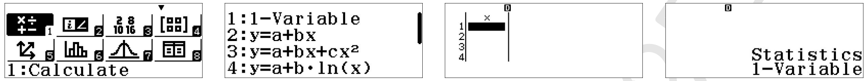
Xét biến ngẫu nhiên $X \sim N(\mu = 170, \sigma^2 = 9)$.

Yêu cầu: Tính các xác suất sau bằng máy tính **Casio fx-580VN X**:

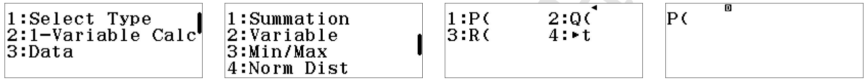
$$P(165 \leq X \leq 172), \quad P(X \geq 165), \quad P(X < 172).$$

Bước 1: Mở chế độ nhập bảng 1 chiều:

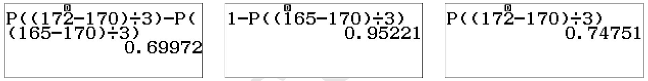
Nhấn MENU ⇒ 6 (THỐNG KÊ) ⇒ 1 (Tính tkê 1 - biến) ⇒ AC (bỏ qua bước nhập số liệu).



Bước 2: Sử dụng $\Phi(x)$ để tính các xác suất: Nhấn OPTION ⇒ ∇ ⇒ 4 (Phân phối chuẩn) ⇒ 1: P(



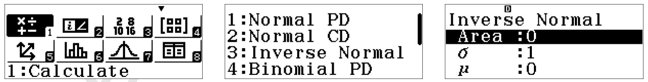
Kết quả:



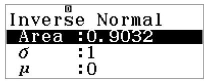
Ví dụ 3 Ngược phân phối chuẩn

Yêu cầu: Tìm giá trị x sao cho $\Phi(x) = 0.9032$, bằng máy tính **Casio fx-580VN X**.

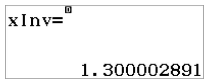
Bước 1: Nhấn MENU ⇒ 7 (PHÂN PHỐI) ⇒ 3 (Ngược phân phối chuẩn)



Bước 2: Nhập giá trị cần tra hàm ngược Φ vào ô Vùng và nhấn = = *(Không nhập σ và μ).*



Kết quả: *Kết quả được làm tròn đến hai chữ số thập phân theo nguyên tắc quá bán (tức là nếu chữ số thứ ba sau dấu phẩy ≥ 5 thì làm tròn lên, ngược lại giữ nguyên). Ví dụ:* $3.145 \Rightarrow 3.15$, $2.134 \Rightarrow 2.13$.



Ví dụ 4 Tính các đặc trưng (bảng 2 chiều)

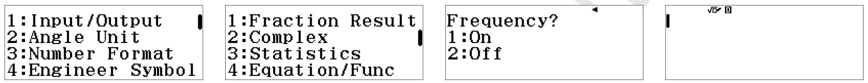
Xét bảng phân phối xác suất đồng thời sau:

		Điểm đánh giá ở giai đoạn 1 (X)		
		0	1	2
Điểm đánh giá ở giai đoạn 2 (Y)	0	0.163	0.050	0.067
	1	0.122	0.125	0.078
	2	0.091	0.095	0.209

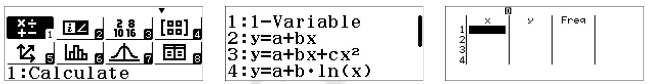
Yêu cầu: Tính các giá trị đặc trưng bằng máy tính **Casio fx-580VN X**:

$$E(X),\ V(X),\ \sigma(X),\ E(Y),\ V(Y),\ \sigma(Y),\ E(XY).$$

Bước 1: Mở cột tần số: Nhấn $\boxed{\text{SHIFT}} \Rightarrow \boxed{\text{MENU}} \Rightarrow \boxed{\nabla} \Rightarrow \boxed{3}$ (Thống kê) $\Rightarrow \boxed{1}$ (Mở).



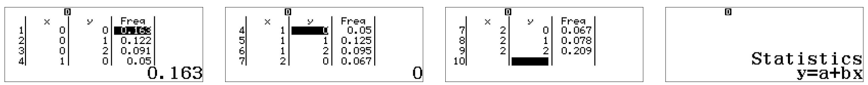
Bước 2: Mở chế độ nhập bảng: Nhấn $\boxed{\text{MENU}} \Rightarrow \boxed{6}$ (THỐNG KÊ) $\Rightarrow \boxed{2}$ (y = a + bx).



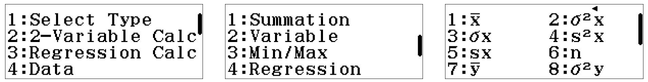
Bước 3: Sau khi xuất hiện 3 cột, ta nhập số liệu vào bảng: Bảng phân phối xác suất đồng thời có thể được viết lại như sau:

X	Y	$P(X = x, Y = y)$
0	0	0.163
0	1	0.122
0	2	0.091
1	0	0.05
1	1	0.125
1	2	0.095
2	0	0.067
2	1	0.078
2	2	0.209

Nhập các giá trị của **X** vào cột **X**, nhập các giá trị của **Y** vào cột **Y** và nhập xác suất tương ứng của X, Y vào cột FREQ. Nhập xong nhấn $\boxed{\text{AC}}$.



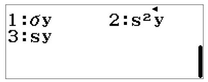
Bước 4: Tìm các đặc trưng bằng cách: Nhấn $\boxed{\text{OPTION}} \Rightarrow \boxed{\nabla} \Rightarrow \boxed{2}$ (BIẾN THỐNG KÊ)



với: 1($\bar{x}$): kỳ vọng $E(X)$; 2 (σ_x^2): phương sai $V(X)$; 3 (σ_x): độ lệch chuẩn $\sigma(X)$;

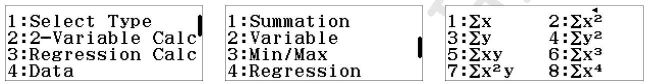
7($\bar{y}$): kỳ vọng $E(Y)$; 8 (σ_y^2): phương sai $V(Y)$.

và tìm độ lệch chuẩn của Y bằng cách nhấn $\boxed{\nabla}$.



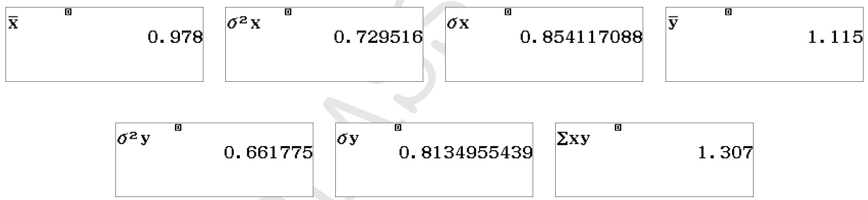
với: 1 (σ_y): độ lệch chuẩn $\sigma(Y)$.

Ngoài ra, ta có thể tìm $E(XY)$ bằng cách nhấn $\boxed{\text{OPTION}} \Rightarrow \boxed{\nabla} \Rightarrow \boxed{1}$ (PHÉP TÍNH TỔNG).



với: 5($\sum xy$): $E(XY)$

Kết quả:



Ví dụ 5 Tính xác suất theo phân phối nhị thức

$X \sim B(n = 5, p = 0.4)$. Tính các xác suất: **bằng máy tính Casio fx-580VN X.**

$$P(X = 2),\quad P(X \le 2),\quad P(X \ge 2),\quad P(1 < X \le 3),\quad P(2 \le X \le 4),$$

Bước 1: Nhấn $\boxed{\text{MENU}} \Rightarrow \boxed{7}$ (PHÂN PHỐI)

Bước 2:

- Chọn $\boxed{\text{4: Binomial PD}} \Rightarrow \boxed{\text{2: Variable}}$ để tính $P(X = k)$
- Chọn $\boxed{\nabla} \Rightarrow \boxed{\text{1: Binomial CD}} \Rightarrow \boxed{\text{2: Variable}}$ để tính xác suất tích lũy $P(X \le k)$

Bước 3: Nhập các giá trị và tính toán:

- $P(X = 2)$: nhập $n = 5$, $p = 0.4$, $x = 2 \Rightarrow$ **Kết quả:** 0.3456
- $P(X \le 2)$: nhập $n = 5$, $p = 0.4$, $x = 2 \Rightarrow$ **Kết quả:** 0.6826
- $P(X \ge 2)$: $1 - P(X \le 1) \Rightarrow 1 - 0.3370 = 0.6630$
- $P(1 < X \le 3)$: $P(X \le 3) - P(X \le 1) \Rightarrow 0.9139 - 0.3370 = 0.5769$
- $P(2 \le X \le 4)$: $P(X \le 4) - P(X \le 1) \Rightarrow 0.9898 - 0.3370 = 0.6528$

8 Các bảng tra số

Bảng tra hàm $\Phi(x)$ - bảng 1

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

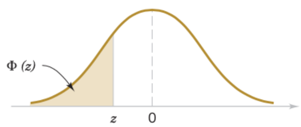


TABLE • III Cumulative Standard Normal Distribution

z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.03	−0.01	−0.00
−3.9	0.000033	0.000034	0.000036	0.000037	0.000039	0.000041	0.000042	0.000044	0.000046	0.000048
−3.8	0.000050	0.000052	0.000054	0.000057	0.000059	0.000062	0.000064	0.000067	0.000069	0.000072
−3.7	0.000075	0.000078	0.000082	0.000085	0.000088	0.000092	0.000096	0.000100	0.000104	0.000108
−3.6	0.000112	0.000117	0.000121	0.000126	0.000131	0.000136	0.000142	0.000147	0.000153	0.000159
−3.5	0.000165	0.000172	0.000179	0.000185	0.000193	0.000200	0.000208	0.000216	0.000224	0.000233
−3.4	0.000242	0.000251	0.000260	0.000270	0.000280	0.000291	0.000302	0.000313	0.000325	0.000337
−3.3	0.000350	0.000362	0.000376	0.000390	0.000404	0.000419	0.000434	0.000450	0.000467	0.000483
−3.2	0.000501	0.000519	0.000538	0.000557	0.000577	0.000598	0.000619	0.000641	0.000664	0.000687
−3.1	0.000711	0.000736	0.000762	0.000789	0.000816	0.000845	0.000874	0.000904	0.000935	0.000968
−3.0	0.001001	0.001035	0.001070	0.001107	0.001144	0.001183	0.001223	0.001264	0.001306	0.001350
−2.9	0.001395	0.001441	0.001489	0.001538	0.001589	0.001641	0.001695	0.001750	0.001807	0.001866
−2.8	0.001926	0.001988	0.002052	0.002118	0.002186	0.002256	0.002327	0.002401	0.002477	0.002555
−2.7	0.002635	0.002718	0.002803	0.002890	0.002980	0.003072	0.003167	0.003264	0.003364	0.003467
−2.6	0.003573	0.003681	0.003793	0.003907	0.004025	0.004145	0.004269	0.004396	0.004527	0.004661
−2.5	0.004799	0.004940	0.005085	0.005234	0.005386	0.005543	0.005703	0.005868	0.006037	0.006210
−2.4	0.006387	0.006569	0.006756	0.006947	0.007143	0.007344	0.007549	0.007760	0.007976	0.008198
−2.3	0.008424	0.008656	0.008894	0.009137	0.009387	0.009642	0.009903	0.010170	0.010444	0.010724
−2.2	0.011011	0.011304	0.011604	0.011911	0.012224	0.012545	0.012874	0.013209	0.013553	0.013903
−2.1	0.014262	0.014629	0.015003	0.015386	0.015778	0.016177	0.016586	0.017003	0.017429	0.017864
−2.0	0.018309	0.018763	0.019226	0.019699	0.020182	0.020675	0.021178	0.021692	0.022216	0.022750
−1.9	0.023295	0.023852	0.024419	0.024998	0.025588	0.026190	0.026803	0.027429	0.028067	0.028717
−1.8	0.029379	0.030054	0.030742	0.031443	0.032157	0.032884	0.033625	0.034379	0.035148	0.035930
−1.7	0.036727	0.037538	0.038364	0.039204	0.040059	0.040929	0.041815	0.042716	0.043633	0.044565
−1.6	0.045514	0.046479	0.047460	0.048457	0.049471	0.050503	0.051551	0.052616	0.053699	0.054799
−1.5	0.055917	0.057053	0.058208	0.059380	0.060571	0.061780	0.063008	0.064256	0.065522	0.066807
−1.4	0.068112	0.069437	0.070781	0.072145	0.073529	0.074934	0.076359	0.077804	0.079270	0.080757
−1.3	0.082264	0.083793	0.085343	0.086915	0.088508	0.090123	0.091759	0.093418	0.095098	0.096801
−1.2	0.098525	0.100273	0.102042	0.103835	0.105650	0.107488	0.109349	0.111233	0.113140	0.115070
−1.1	0.117023	0.119000	0.121001	0.123024	0.125072	0.127143	0.129238	0.131357	0.133500	0.135666
−1.0	0.137857	0.140071	0.142310	0.144572	0.146859	0.149170	0.151505	0.153864	0.156248	0.158655
−0.9	0.161087	0.163543	0.166023	0.168528	0.171056	0.173609	0.176185	0.178786	0.181411	0.184060
−0.8	0.186733	0.189430	0.192150	0.194894	0.197662	0.200454	0.203269	0.206108	0.208970	0.211855
−0.7	0.214764	0.217695	0.220650	0.223627	0.226627	0.229650	0.232695	0.235762	0.238852	0.241964
−0.6	0.245097	0.248252	0.251429	0.254627	0.257846	0.261086	0.264347	0.267629	0.270931	0.274253
−0.5	0.277595	0.280957	0.284339	0.287740	0.291160	0.294599	0.298056	0.301532	0.305026	0.308538
−0.4	0.312067	0.315614	0.319178	0.322758	0.326355	0.329969	0.333598	0.337243	0.340903	0.344578
−0.3	0.348268	0.351973	0.355691	0.359424	0.363169	0.366928	0.370700	0.374484	0.378281	0.382089
−0.2	0.385908	0.389739	0.393580	0.397432	0.401294	0.405165	0.409046	0.412936	0.416834	0.420740
−0.1	0.424655	0.428576	0.432505	0.436441	0.440382	0.444330	0.448283	0.452242	0.456205	0.460172
0.0	0.464144	0.468119	0.472097	0.476078	0.480061	0.484047	0.488033	0.492022	0.496011	0.500000

Bảng tra hàm $\Phi(x)$ - bảng 2

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

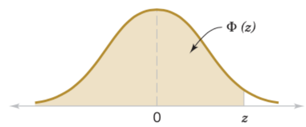


TABLE • III Cumulative Standard Normal Distribution (*Continued*)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.532922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967