HCMUT-CNCP LỚP XÁC SUẤT THỐNG KÊ A+ HK242

Các công thức cơ bản

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

$P(A+B+C) = P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A.B) - P(B.C) - P(A.C) + P(A.B.C)$

$P(A.B) = P(A \cap B) = P(B/A).P(A)$

- Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì P(A.B)= P(A).P(B)
- Nếu A, B là hai biến cố xung khắc thì $P(A.B) = 0$

Xác suất có điều kiện

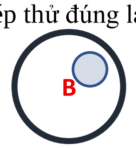
$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

P(B/A) là xác suất biến cố B xảy ra với điều kiện biến cố A đã xảy ra.

Xác suất hình học

Biến cố có không gian mẫu là hình tròn B và phép thử đúng là hình tròn A thì:

$$P(A) = \frac{S_A(\text{diện tích hình tròn A})}{S_B(\text{diện tích hình tròn B})}$$



Định lý bernoully

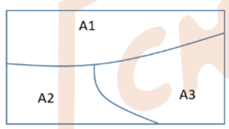
Thực hiện n phép thử độc lập với nhau, xác suất thành công của một phép thử không đổi là p. Xác suất có đúng k phép thử thành công trong n lần thử là

$$C_n^k p^k.(1-p)^{n-k}$$

Công thức xác suất đầy đủ

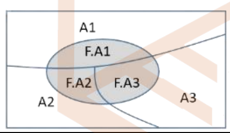
Cho {A1, A2, A3} là hệ biến cố đầy đủ khi đó P(A1)+P(A2)+P(A3) = 1

$$P(F) = P(A1).P\left(\frac{F}{A1}\right) + P(A2).P\left(\frac{F}{A2}\right) + P(A3).P\left(\frac{F}{A3}\right)$$



Công thức Bayes

$$P\left(\frac{Ai}{F}\right) = \frac{P(A_i).P\left(\frac{F}{A_i}\right)}{P(F)} \text{ Với } i = 1,2,3..$$



Bảng phân phối xác suất (Chỉ có ở biến X rời

Cho biến cố ngẫu nhiên rời rạc $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Ta có $p_i = P(X = x_i)$

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Tính chất: $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$

Hàm mật độ xác suất

	Một số trường hợp hay dùng
➢ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ➢ $f(x) \geq 0$ ➢ $P(X = xi) \approx 0$ (gần bằng 0) ➢ $P(a \leq X \leq b)=\int_a^b f(x)\,dx$	➢ $P(X = a) = f(a)$ ➢ $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 1 - \int_a^{+\infty} f(x)dx$ ➢ $P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ➢ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Hàm phân phối xác suất

Cho một biến cố ngẫu nhiên X:

- Nếu X là biến rời rạc thì hàm phân phối xác suất của X là F(x) = $P(X \leq x)$
- Nếu X là biến liên tục thì hàm phân phối xác suất của X là F(x) = $P(X \leq x)$

Một số tính chất: F(+∞) = 1, F(- ∞) = 0, P(a ≤ X ≤ b)=F(a)-F(b)

Mối liên hệ giữa hàm phân phối xác suất và mật độ xác suất của 1 biến cố ngẫu nhiên liên tục: $f(x) = F'(x)$ và $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên

	Biến rời rạc	Biến liên tục
Kì vọng E(x)	$E(X) = x_1.p_1 + x_2.p_2 + \ldots = \sum x_i.p_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
Tính chất của E(X)	• $E(aX+b) = aE(X) + b$ • $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ • $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ nếu X, Y là 2 biến cố độc lập	
Kì vọng E(Y) với Y=M(X)	$\sum M(x_i).p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} M(x)f(x)dx$
Phương sai D(X)	$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$ với - $E(X^2) = \sum x^2.p_i$ (nếu là biến rời rạc) - $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ (nếu là biến liên tục)	
Tính chất phương sai D(X)	➢ $D(aX+b) = a^2 D(X)$ ➢ $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ nếu X và Y độc lập ➢ $D(X-Y) = D(X+Y)$	
Mod	Là giá trị của biến ngẫu nhiên X tại đó xác suất sảy ra là lớn nhất	
Trung vị	$\begin{cases} P(X < med(X)) \leq 0.5 \\ P(X > med(X)) \leq 0.5 \end{cases}$ Cách tìm trung vị của biến ngẫu nhiên liên tục khi biết hàm mật độ f(x) là giải phương trình sau $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.5$	

Casio tính đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Casio 570, Vinacal	Casio 580
Step1: Mở tần số Shift → Mode → ∇→ 4→ ON Step2: Nhập bảng Mode → Thống kê (3) → 1 Nhập giá trị X và cột X và nhập xác suất của biến đó vào cột Freq, xong rồi ấn AC Step 3: Shift →1→ 4 • $E(x) = \bar{x}$ (kì vọng) • $\sigma_x = \sqrt{D(x)}$ (độ lệch chuẩn)	Step 1: Mở tần số Shift → Menu → ∇→ 3→ 1 Step2: Nhập bảng Menu → Thống kê(6) →1(Tính tke 1-biến) Nhập giá trị X và cột X và nhập xác suất của biến đó vào cột Freq, xong rồi ấn AC Step 3: Option (OPTN) → ∇→ 2 • $E(x) = \bar{x}$ (kì vọng) • $\sqrt{D(x)} = \sigma_x$ (độ lệch chuẩn) • $D(x) = \sigma^2{}_x$ (Phương sai)

Phân phối mũ

Biến ngẫu nhiên X có phân phối mũ khi có hàm mật độ có dạng

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0\\ 0, \qquad x<0\end{cases}$$

Trong đó: $\lambda=\frac{1}{E(X)}$; Ký hiệu: $X \sim E(\lambda)$

Lưu ý cần nhớ

- $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
- $Med(X)=\frac{\ln(2)}{\lambda}$

Đặc biệt: Y = min$\{X_1, X_2, X_3, \dots X_n\}$ => $\lambda=\lambda 1+\cdots+\lambda n$

Phân phối Poisson

Biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân phối Poisson

$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$, kí hiệu: $X \sim P(\lambda)$. Trong đó $E(X)=D(X)=\lambda$

Đặc biệt:$Y = X_1+X_2+X_3+\cdots$=> $\lambda=\lambda 1+\lambda 2+\cdots+\lambda n$

Phân phối chuẩn

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Trong đó: a=E(X), $\sigma^2=D(X)$, Kí hiệu: $X \sim N(a,\sigma^2)$

Hàm phân phối xác suất của biến cố ngẫu nhiên có phân phối chuẩn chính tắc

$$F(x)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$P(m \le X \le n)=\int_m^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$
$$=\int_{\frac{m-a}{\sigma}}^{\frac{n-a}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi\left(\frac{n-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)$$

Cách bấm máy tính tìm $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{a})$

Casio 570, Vinacal	Casio 580
Step1: Bật tính năng thống kê Mode →3→ 1→ AC Step2: Tìm $\Phi(a)$ Nhấn Shift →1→ 5 → 1 (P) Nhập P(a)	Step 1: Bật tính năng thống kê Menu → 6 → AC Step2: Tìm $\Phi(a)$ Option → ∇ → 4 Nhập P(a)

Đặc biệt: $Y = X_1+X_2+X_3+\cdots$ đều là PP chuẩn thì $Y \sim N\ (a1+a2+a3+..,\sigma 1^2+\sigma 2^2+\sigma 3^2+..)$

Phân phối nhị thức

Đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối nhị thức thì

$$P(X=k)=C_n^k p^k.(1-p)^{n-k}$$

Kí hiệu: : $X \sim B(n,p)$

Một số tính chất $E(X)=np, D(X)=np(1-p)$

Lưu ý:

- Nếu n rất lớn (n>30) và p ≤ 5% ta xấp sỉ phân phối nhị thức về phân phối Poisson. Với $\lambda=E(X)=np$
- Nếu n rất lớn (n>30) và p > 5% ta xấp sỉ phân phối nhị thức về phân phối chuẩn. Với $a=E(X)=np$, $\sigma^2=D(X)=np(1-p)$, nhưng khác là phải tính theo công thức PP chuẩn hiệu chỉnh sau
  $P(m \le X \le n)=\Phi\left(\frac{n+0,5-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{m-0,5-a}{\sigma}\right)$

Đặc biệt:

$x_1 \sim B(n_1;p)$,$X_2 \sim B(n_2;p)$, $X_3 \sim B(n_3;p)$,….. $X_n \sim B(n_n;p)$ thì $Y=X_1+X_2+X_2+\cdots X_n$ thì $X_n \sim B(n_1+n_2+\cdots+n_n;p)$

Phân phối đều

Đại lượng ngẫu nhiên X gọi là có phân phối đều trên đoạn [a, b] nếu hàm mật độ của X là

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\ne[a,b]\end{cases}$$

Kí hiệu: $X \sim U(a,b)$ và $E(X)=\frac{a+b}{2}, D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

Phân phối siêu bội

Cho đại lượng ngẫu nhiên X gọi là phân phối siêu bội nếu tồn tại các số tự nhiên M, N sao cho $n \le M \le N$ thỏa

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Kí hiệu: $X \sim H(N,M,n)$, $E(X) \sim np$, $D(X)=npq\frac{N-n}{N-1}$

Với: $p=\frac{M}{N}, q=1-p$

Định lý giá trị trung bình

Cho các biến ngẫu nhiên $x_1+x_2+x_3+\cdots x_n$ có cùng quy luật phân phối bất kì và có cùng kì vọng a=E(X) và phương sai σ^2.

- Với BNN Y = $x_1+x_2+x_3+\cdots x_n$ thì BNN Y sẽ có quy luật phân phối chuẩn $Y \sim N(n.a; n.\sigma^2)$.
- Với BNN Y=$Y=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots x_n}{n}$ thì BNN Y sẽ có quy luật phân phối chuẩn là $Y \sim N(a;\sigma^2/n)$

Lưu ý, lúc này phải tính theo công thức PP chuẩn hiệu chỉnh sau

$P(m \le X \le n)=\Phi\left(\frac{n+0,5-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{m-0,5-a}{\sigma}\right)$

Vecto ngẫu nhiên

Tổng xác suất phải bằng 1: $\sum_{i,j=0}^{n}p_{ij}=1$

Hiệp phương sai: $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)$

Casio 570, Vinacal	Casio 580
Step1: Mở tần số Shift → Mode → ∇→ 4→ ON Step2: Nhập bảng Mode → Thống kê (3) → 2 (AX+B) Nhập giá trị X và Y và Freq tương ứng theo bảng, xong rồi ấn AC Step 3: Shift →1→ 4. Chọn thông số muốn xem Xem hệ số tương quan R_{xy}: Shift → 1 → 5 → 3	Step 1: Mở tần số Shift → Menu → ∇→ 3→ 1 Step2: Nhập bảng Menu → Thống kê(6) →2 (AX+B) Nhập giá trị X và Y và Freq tương ứng theo bảng, xong rồi ấn AC Step 3: Option (OPTN) → ∇→ 2 . Chọn thông số muốn xem • $E(x)=\bar{x}$ (kì vọng) • $\sqrt{D(x)}=\sigma_x$ (độ lệch chuẩn) • $D(x)={\sigma^2}_x$ (độ lệch chuẩn) Xem hệ số tương quan R_{xy}: (OPTN) → ∇→ 4

Phần này nên xem video luyện tập trước nhà nhé