Grundlagen_der_Statistik_Skript_Python

March 1, 2024

1 Grundlagen der Statistik

1.1 für Informatiker

1.1.1 Wolfgang Tröscher, SPE München

1.1.2 Stand: 21.02.2024

In diesem Dokument soll gezeigt werden, wie wir die statischen Berechnungen, die in dem Skript ##Grundlagen der Statistik (für Informatiker)** mit Hilfe der Programmiersprache **Python** durchführen können. Ich gehe hier strikt nach den Kapiteln im Skript vor, sodass man leicht den gesuchten Python-Code finden sollte. auch die Kapitelnummern stimmen jeweils überein.

Als Datenstruktur verwende ich hier immer ein Numpy-Array.

2 Kapitel 3: Deskriptive Statistik

2.1 3.1 Lageparameter

[29]:
```
import numpy as np
x = np.array([3,5,7,10,15])

# Der Mittelwert
print(np.mean(x))
```

```
8.0
```

[30]:
```
# Der Median
x = np.array([4,8,15,16,23,42])
print(np.median(x))
```

```
15.5
```

[31]:
```
# Quantile
# Numpy bietet  hier mehrere Varianten für die Berechnung an:
# 'inverted_cdf'
# 'averaged_inverted_cdf'
# 'closest_observation'
# 'interpolated_inverted_cdf'
# 'hazen'
```

```
# 'weibull'
# 'linear' (default)
# 'median_unbiased'
# 'normal_unbiased'

# Wir berechnen für alle diese Mögichkeiten das 70%-Quantil
methods = ["inverted_cdf", "averaged_inverted_cdf", "closest_observation",
 ↪"interpolated_inverted_cdf", "hazen", "weibull", "linear", "median_unbiased",
           "normal_unbiased"]

x = np.array([3,5,7,8,9,11,12,13,14,16,18])

for method in methods:
    print(f"Methode = {method}, Wert = {np.quantile(x, q = [0.7],
 ↪method=method)}")
```

```
Methode = inverted_cdf, Wert = [13]
Methode = averaged_inverted_cdf, Wert = [13.]
Methode = closest_observation, Wert = [13]
Methode = interpolated_inverted_cdf, Wert = [12.7]
Methode = hazen, Wert = [13.2]
Methode = weibull, Wert = [13.4]
Methode = linear, Wert = [13.]
Methode = median_unbiased, Wert = [13.26666667]
Methode = normal_unbiased, Wert = [13.25]
```

[32]:
```
# Modus
from scipy.stats import mode
x = np.array([4,1,2,4,3,4,2,5,2,3])
print(mode(x))

# Diese Funktion liefert im Falle, dass mehrere Zahlen mit der gleichen
 ↪maximalen Häufigkeit vorkommen, nur eine (die kleinere) zurück.
```

```
ModeResult(mode=2, count=3)
```

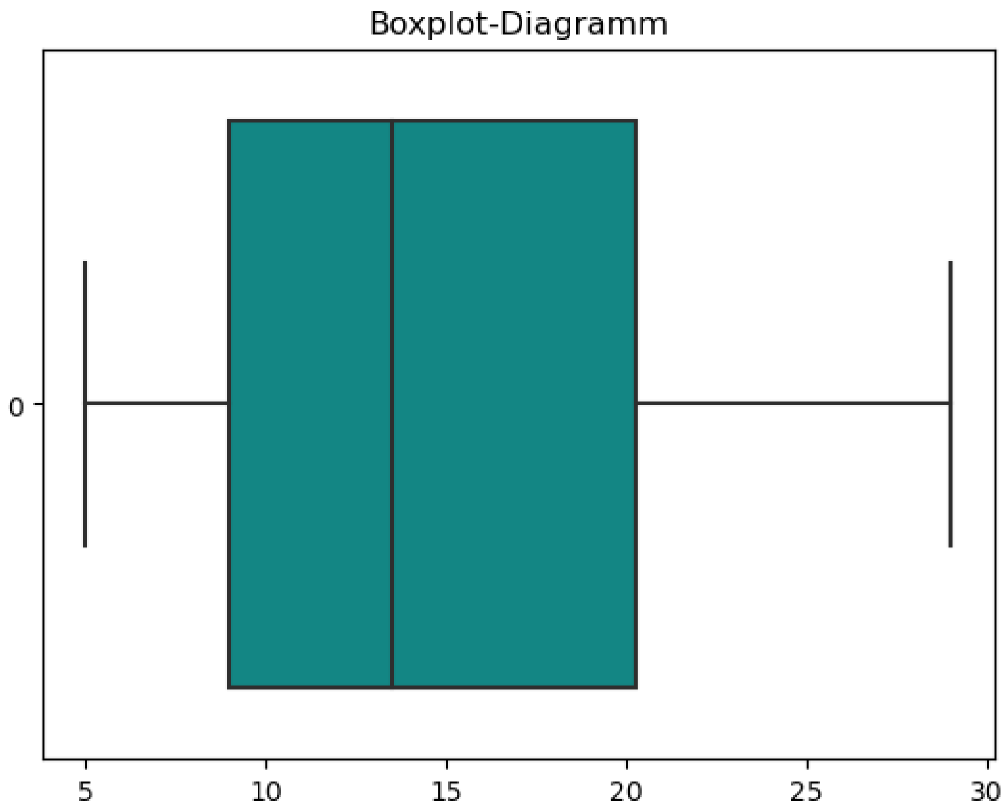
2.2 3.2 Streuungsparameter

[34]:
```
# Interquartilsabstand IQR
from scipy.stats import iqr
x = np.array([5,7,8,12,13,14,18,21,23,29])
print(iqr(x, interpolation="nearest"))
```

```
13
```

[35]:
```
# Boxplot-Diagramme (hier mit Hilfe des Paktes seaborn)
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import seaborn as sns
sns.boxplot(x, orient="h", color="#009997").set_title("Boxplot-Diagramm")
plt.show()
```



[36]:
```
# Spannweite
x = np.array([5,7,8,12,13,14,18,21,23,29])
print(np.max(x) - np.min(x))
```

```
24
```

[37]:
```
# Varianz
x = np.array([5,7,8,12,13,14,18,21,23,29])

# Der Population
print(f"Varianz der Population = {np.var(x)}")

# Der Stichprobe
print(f"Varianz der Stichprobe (df=n-1) = {np.var(x, ddof=1)}")
```

```
Varianz der Population = 53.2
Varianz der Stichprobe (df=n-1) = 59.111111111111114
```

[38]:
```python
# Standardabweichung
x = np.array([5,7,8,12,13,14,18,21,23,29])

# Der Population
print(f"Standardabweichung der Population = {np.std(x)}")

# Der Stichprobe
print(f"Standardabweichung der Stichprobe (df=n-1) = {np.std(x, ddof=1)}")
```

```
Standardabweichung der Population = 7.293833011524188
Standardabweichung der Stichprobe (df=n-1) = 7.688375063113864
```

[39]:
```python
# Kovarianz
x = np.array([3,5,9,13,17,25])
y = np.array([12,19,33,42,59,75])

# Der Population
print(f"Kovarianz der Population = {np.cov(x,y, ddof=0)[0,1]}")

# Der Stichprobe
print(f"Standardabweichung der Stichprobe (df=n-1) = {np.cov(x,y,␣
↪ddof=1)[0,1]}")
```

```
Kovarianz der Population = 162.0
Standardabweichung der Stichprobe (df=n-1) = 194.4
```

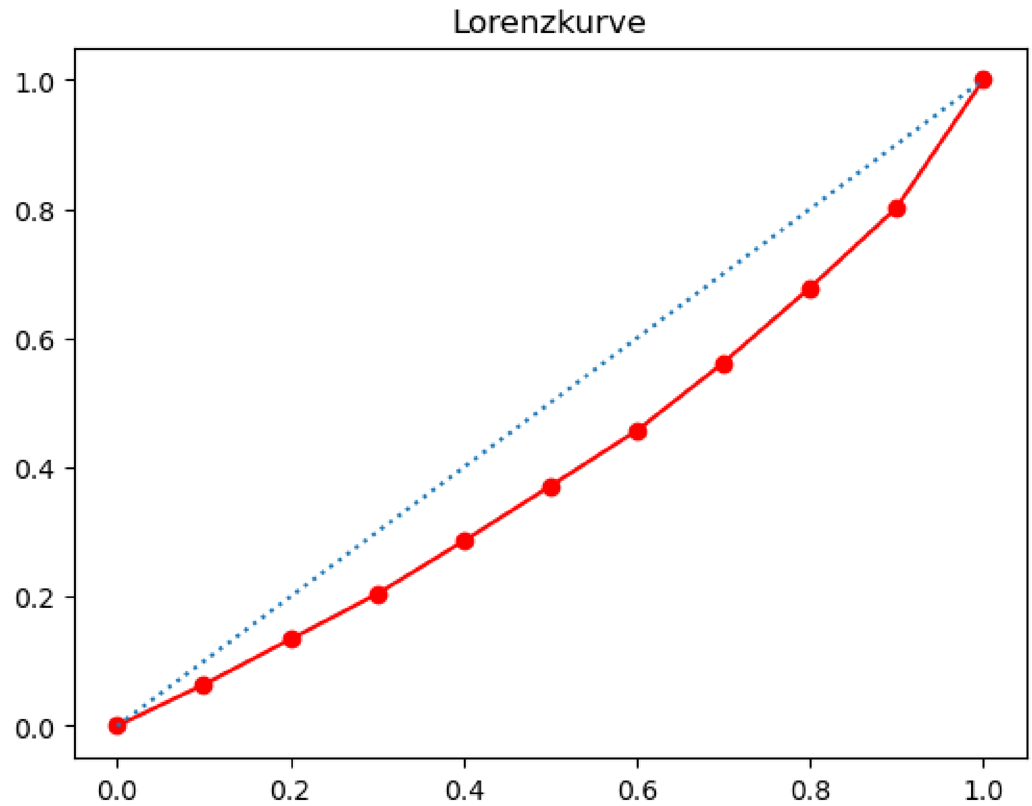
[40]:
```python
# Variatioskoeffizient
from scipy.stats import variation
x1 = np.array([5,7,6,8,10])
x2 = np.array([50,70,60,80,100])

print(variation(x1))
print(variation(x2))
```

```
0.23895347964007296
0.23895347964007296
```

[41]:
```python
# Gini-Koeffizient
# Mir ist keine Implementierung zum Beispiel im Paket scipy bekannt. Daher hier␣
↪eine eigene Implementierung der Funktion:
import matplotlib.pyplot as plt
def berechne_gini(daten, korrigiert=False, lorenz=False):
    """ Gibt den Gini-Koeffizienten zurueck
    Parameter:
    daten (Liste)
    korrigiert=False (bei True wird der korrigierte Gini-Koeffizient
    zurueckgegeben)
```

```
    lorenz=False (bei True wird die Lorenzkurve geplottet)
    """
    if not isinstance(daten, list):
        raise TypeError("Daten muessen als Liste übergeben werden.")
    n = len(daten)
    s = sum(daten)
    daten.sort()

    summe_kumuliert = [daten[0]]
    for i in range(1,n):
        summe_kumuliert.append(summe_kumuliert[i-1] + daten[i])



    zaehler = 2 * sum([i * daten[i-1] for i in range(1,n+1)])
    nenner = n * s
    gini = zaehler / nenner - (n+1)/n

    if(lorenz):
        anteile_kumuliert = [x / s for x in summe_kumuliert]
        anteile_kumuliert.insert(0,0)
        x = [i / n for i in range(n+1)]
        plt.plot(x,anteile_kumuliert, color="red", marker="o")
        plt.plot([0,1], [0,1], linestyle='dotted')
        plt.title("Lorenzkurve")
        plt.show

    return gini if not korrigiert else gini  * n/(n-1)


gehaelter =  [3200,3500,3500,4100,4250,4300,5250,5800,6200,9900]

berechne_gini(gehaelter, lorenz=True)
```

[41]: 0.18839999999999999



3 Kapitel 6: Verteilungen

3.1 6.1 Diskrete Verteilungen

3.1.1 6.1.1 Binomialverteilung

[43]:
```
# In einer Urne befinden sich 4 rote und 6 schwarze Kugeln. Wir ziehen 10 Mal␣
 ↪mit Zurücklegen eine Kugel.
# Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 5 Mal eine rote Kugel zu ziehen?

from scipy.stats import binom
print(binom.pmf(5,10,0.4))
```

```
0.20065812479999992
```

3.1.2 6.1.2 Hypergeometrische Verteilung

[45]:
```
# Lotto (6 aus 49): Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige
from scipy.stats import hypergeom
print(hypergeom.pmf(3,49,6,6))
```

```
0.017650403866870105
```

3.1.3 6.1.3 Poissonverteilung

[47]:
```python
# Ein radioaktives Element zerfällt mit Mittel mit 5 Zerfällen pro Sekunde. Wie␣
 ↪groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 Teile zerfallen?

from scipy.stats import poisson
print(poisson.pmf(3, 5))
```

```
0.1403738958142805
```

3.2 6.2 Stetige Verteilungen

3.2.1 6.2.1 Normalverteilung

[49]:
```python
from scipy.stats import norm
# Körpergröße: Erwartungswert = 178,9cm, Standardabweichung = 8,5cm
# b) P(X<175cm)

print(norm.cdf(175, 178.9, 8.5))

# c) P(X>180cm)
print(1 - norm.cdf(180, 178.9, 8.5))

# d) P(170 <= X <= 180)
links = norm.cdf(170, 178.9, 8.5)
rechts = 1 - norm.cdf(180, 178.9, 8.5)
print(1-links-rechts)
```

```
0.32318044829413806
0.44851591953587056
0.40394785603164407
```

3.3 Simulation: Standardfehler in Abhängigkeit von der Stichprobengröße n

Wir erstellen zufällig 200 normalverteilte Zahlen, die die Population simulieren. Anschließend berechnen wir für jede Stichprobengröße n den Schätzer für den Standardfehler:

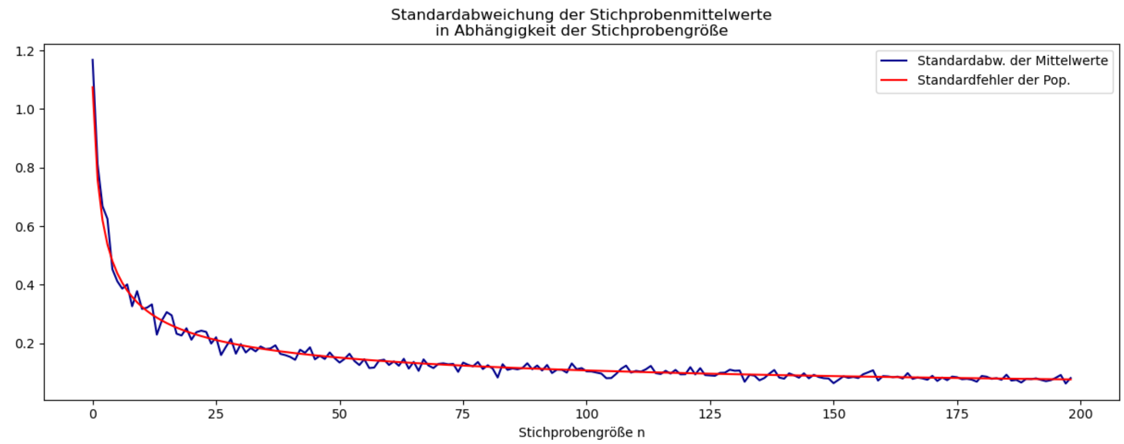
$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Der Standardfehler wird als blaue Kurve dargestellt. In der Schleife ziehen wir zusätzlich 50 Stichproben der Größe n, berechnen deren Mittelwerte und anschließend daraus die Standardabweichung. Diese Standardabweichungen werden als rote Kurve dargestellt.

Wir sehen: Der Standardfehler nimmt mit zunehmender Stichprobengröße ab, unser Schätzer nähert sich auch zunehmend der Standardabweichung der Mittelwerte.

[51]:

```
import  numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 200 # Populationsgröße


pop = np.random.normal(0, 1, N)
sigma = np.std(pop)


sample_mean_std = []
standard_errors = []

for n in range(1,N):
    sample_means = [np.random.choice(pop, n).mean() for i in range(50)]
    sample_mean_std.append(np.std(sample_means))
    standard_errors.append(sigma/np.sqrt(n))


fig, ax = plt.subplots(figsize=(15,5))
ax.plot(sample_mean_std, color="darkblue", label="Standardabw. der Mittelwerte")
ax.plot(standard_errors, color="red", label="Standardfehler der Pop.")
ax.legend()
ax.set_title("Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte\nin Abhängigkeit␣
↪der Stichprobengröße")
ax.set_xlabel("Stichprobengröße n")
fig.show()
```



3.4 7.1 Konfidenzintervalle

[53]:
```python
# KI für den Intelligenzquotienten mit Stichprobengröße = 50,␣
↪Stichprobenmittelwert = 103, Standardabweichung = 5
from scipy.stats import norm
# Wichtig: Für scale muss man hier den Standardfehler (Standardabweichung des␣
↪Mittelwertes) angegen, nicht die Standardabweichung der Stichprobe!
print(norm.interval(.95, 103, 5/np.sqrt(50)))
```

```
(101.61409617565032, 104.38590382434968)
```

[54]:
```python
# KI für Zuckergehalt, Signifikanzniveau = 95%
x = np.array([12.8, 11.9, 10.1, 11.9, 10.8, 12.1, 12.3, 9.9, 11.7, 10.9])

from scipy.stats import t
from scipy.stats import sem

print(t.interval(.95, len(x)-1, x.mean(), sem(x)))
```

```
(10.749558075797859, 12.130441924202144)
```

3.4.1 Konfidenzintervall für Anteilswerte

[56]:
```python
# Umfrage unter 100 Personen, 21 davon gaben an, eine bestimmte Partei zu␣
↪wählen.
# Berechne den KI für alpha=0.10

from statsmodels.stats.proportion import proportion_confint
print(proportion_confint(count=21, nobs=100, alpha=.1, method="normal"))
```

```
(0.14300375689380565, 0.2769962431061943)
```

3.5 7.2 Hypothesentest

3.5.1 7.2.1 t-Test

[58]:
```python
# Einstichproben-t-Test, zweiseitig

# Zuckergehalt: H0: mü = 12%, H1: mü <> 12%
from scipy.stats import ttest_1samp
x = np.array([12.8, 11.9, 10.1, 11.9, 10.8, 12.1, 12.3, 9.9, 11.7, 10.9])

print(ttest_1samp(x, popmean=12))
```

```
TtestResult(statistic=-1.8347785189881753, pvalue=0.0997357600099662, df=9)
```

[59]:
```python
# Einstichproben-t-Test, einseitig
# H0: mü >= 100g, H1: mü < 100g
n = 20
```

```
x_quer = 99.4
s = 0.3

# Erstelle Zufallszahlen, die dem angegebenen Kennzahlen entsprechen
x = np.random.normal(loc=x_quer, scale=s, size=n)
print(ttest_1samp(x, popmean=100, alternative="less"))
```

```
TtestResult(statistic=-8.81417437049564, pvalue=1.9295083407157427e-08, df=19)
```

[60]:
```
# Zweistichproben-t-Test (unverbunden)
# Gedächtnistest bei zwei Schulklassen

klasse1 = np.random.normal(loc=65.8, scale=7.9, size=23)
klasse2 = np.random.normal(loc=62.7, scale=5.8, size=22)

#F-Test
from scipy.stats import f
f_emp = 7.9**2 / 5.8**2
print(f"Emp. F-Wert = {f_emp}")
print(f"Kritischer F-Wert = {f.isf(.05, len(klasse1)-1, len(klasse2)-1)}")

from scipy.stats import ttest_ind
print(ttest_ind(klasse1, klasse2))
```

```
Emp. F-Wert = 1.8552318668252081
Kritischer F-Wert = 2.073309399374337
TtestResult(statistic=0.8586635327589381, pvalue=0.3952875780291756, df=43.0)
```

[61]:
```
# Zweistichproben-t-Test (verbunden)
from scipy.stats import ttest_rel

x1 = np.array([159,181,165,160,175,181])
x2 = np.array([145,170,165,140,155,182])

print(ttest_rel(x1, x2))
```

```
TtestResult(statistic=2.8001312592292362, pvalue=0.037987739473339l9, df=5)
```

3.5.2 7.2.3 χ^2-Test

[63]:
```
## Unbhängigkeitstest
from scipy.stats import chi2_contingency
obs = np.array([[12,23,11], [17,27,19], [19,19,33]])
print(obs)

print(chi2_contingency(obs))
```

```
[[12 23 11]
```

```
 [17 27 19]
 [19 19 33]]
Chi2ContingencyResult(statistic=9.169027276148263, pvalue=0.05701070094169602,
dof=4, expected_freq=array([[12.26666667, 17.63333333, 16.1       ],
       [16.8       , 24.15      , 22.05      ],
       [18.93333333, 27.21666667, 24.85      ]]))
```

3.5.3 7.2.4 Lineare Regression

[65]:

```python
import pandas as pd
from statsmodels.formula.api import ols

x = np.array([21,30,35,42,70,75])
y = np.array([600,850,1200,1300,1990,2100])

df = pd.DataFrame({"X" : x, "Y":y})
model = ols("y~x", data=df).fit()
print(model.summary())
```

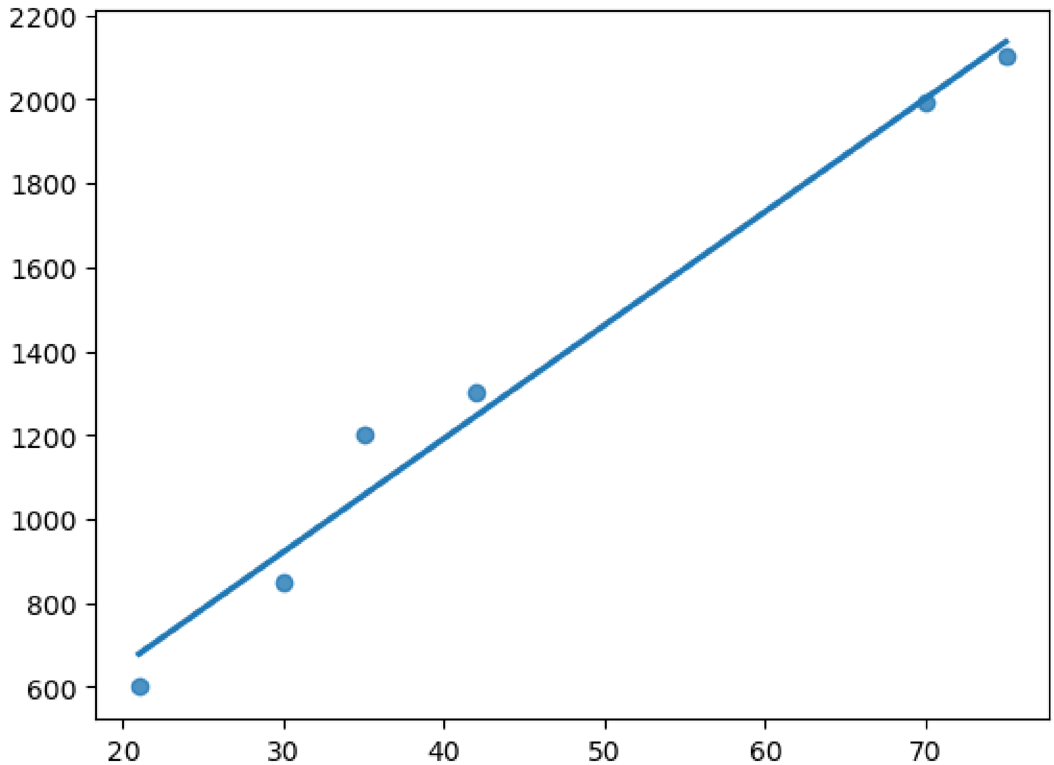
```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.980
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.975
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     195.3
Date:                Fri, 01 Mar 2024   Prob (F-statistic):           0.000152
Time:                        09:58:32   Log-Likelihood:                -34.637
No. Observations:                   6   AIC:                             73.27
Df Residuals:                       4   BIC:                             72.86
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
Intercept    111.9581     96.089      1.165      0.309    -154.829     378.745
x             26.9899      1.931     13.976      0.000      21.628      32.352
==============================================================================
Omnibus:                          nan   Durbin-Watson:                   1.629
Prob(Omnibus):                    nan   Jarque-Bera (JB):                0.744
Skew:                           0.781   Prob(JB):                        0.689
Kurtosis:                       2.268   Cond. No.                         123.
==============================================================================

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly
specified.
```

```
/opt/conda/envs/anaconda-panel-2023.05-py310/lib/python3.11/site-
packages/statsmodels/stats/stattools.py:74: ValueWarning: omni_normtest is not
```

```
valid with less than 8 observations; 6 samples were given.
  warn("omni_normtest is not valid with less than 8 observations; %i "
```

[66]:
```python
# Regressionsgerade zeichnen
import seaborn as sns
sns.regplot(x=x,y=y, ci=None)
```

[66]:
```
<Axes: >
```



3.5.4 7.2.6 Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman

[68]:
```python
# Ränge ermitteln
from scipy.stats import rankdata
zeiten = np.array([9.58, 9.71, 9.84, 9.93, 9.93, 10, 10, 10.34])

print(rankdata(zeiten))
```

```
[1.  2.  3.  4.5 4.5 6.5 6.5 8. ]
```

[69]:
```python
# Berechnung des Korrelationskoeffizienten: Zusammenhang Vorbereitungszeit und␣
↪Klausurergebnis
from scipy.stats import spearmanr
```

```
zeiten = np.array([21,22,15,16,8,1])
punkte = np.array([98,87,89,71,65,30])

print(spearmanr(zeiten, punkte))
```

```
SignificanceResult(statistic=0.7142857142857143, pvalue=0.1107871720116617)
```

3.6 7.4 Nichtparametrische Tests

3.6.1 7.4.1 Mann-Whitney-Test

[71]:
```
## Reaktionsgeschwindigkeit zwischen den Geschlechtern
from scipy.stats import mannwhitneyu

maenner = np.array([47,47,51,57,77,85,86,89])
frauen = np.array([61,67,69,69,84,89,90])

print(mannwhitneyu(maenner, frauen))
```

```
MannwhitneyuResult(statistic=19.5, pvalue=0.35324679686204175)
```

3.6.2 7.4.2 Kruskal-Wallis-Test

[73]:
```
## Zusammenhang Anzahl besuchter Vorlesungen und Klausurergebnis
from scipy.stats import kruskal


bwl = np.array([5,7,8,11,19])
it = np.array([8,10,14,15,16,18])
physik = np.array([6,12,12,17,20,21])

print(kruskal(bwl,it,physik))
```

```
KruskalResult(statistic=2.52612612612612, pvalue=0.28278650564234037)
```