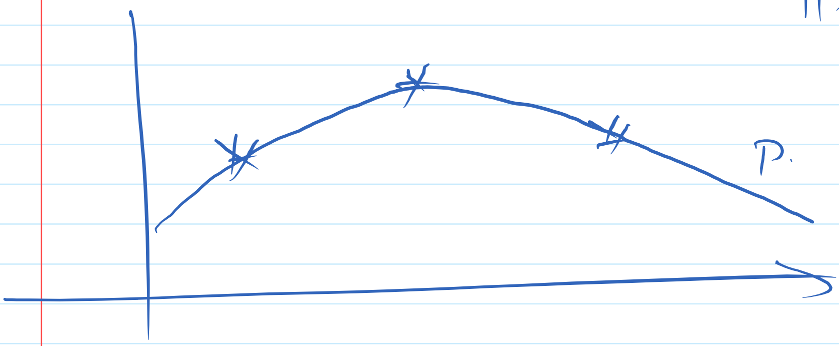
Πολυωνυμική Παρεμβολή



$(x_i, y_i) \quad i=0,1,\ldots n$

p?

$p(x_i) = y_i \quad i=0,1,\ldots n$

- 1 και μοναδικό
- Βαθμός πολυωνύμου (n)
- Πολλές αναπαραστάσεις
- συντελεστές

Μονώνυμα (x^k)

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

Lagrange (L_k)

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Αναπαράσταση σε μονώνυμα

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vandermonde

$(n+1)\times(n+1)$

* Συνάρτηση παράγει τον πίνακα (με βάση τα σημεία)

* Συνάρτηση που υπολογίζει το p(x).

Συνάρτηση: $x \longrightarrow p(x)$

$a_0, a_1 \dots a_n$

```
function  y = evaluatepolynomial(synt, n , x)

y = synt(n+1);

for i=n:-1:1
   y = y.*x+synt(i);
end
```

συντελεστές του p. $[a_0, a_1, \dots a_n]$

Βαθμός του p.

x, p(x).

$\rightarrow a_n$

$\rightarrow a_n x + a_{n-1} = y$

$\rightarrow (\underbrace{\qquad}_{y})x + a_{n-2}$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

Σχήμα Horner

$$= ((\cdots(a_n x + a_{n-1})\cdots)x + a_1)x + a_0$$

→ Η .* μας επιτρέπει να έχουμε το x ως διάνυσμα με πολλές τιμές.

```
function a = matrixgenerator(x)

n = length(x);
a = ones(n);

for i=2:n
    a(:,i) = a(:,i-1).*x';
end
```

→ Παράγει τον Vandermonde από το x.

$= k+1$

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

```
end
```

$$a = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$

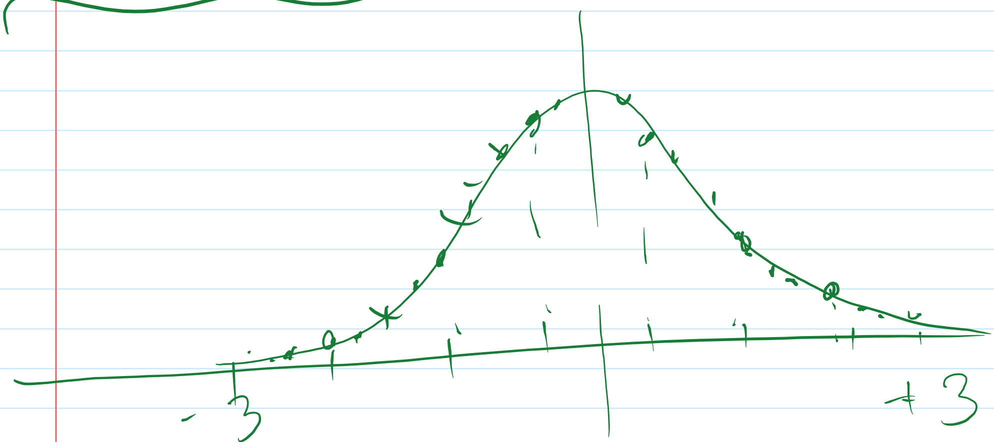
$a(:,2) = a(:,1).*x$ $(k+1)\times(k+1)$

$[x^n]$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^k \end{bmatrix}$$

$(k+1) \times (k+1)$

$.*x \quad .*x$



ΑΣΚΗΣΗ 3α

```
xplot = linspace(-3,3, 601); % tetmhmenes shmeiwn gia grafikh parastash
expplot = exp(-4*xplot.*xplot); % tetagmenes shmeiwn gia grafikh parastash
pause;
shmeia = [3 7 13 31 61];
for i = 1:5
   x = linspace(-3, 3,shmeia(i));
   n = shmeia(i);
   a = matrixgenerator(x);
   [l, u] = lu(a);
   y = exp(-4*x.^2);
   yi = u\(l\y');
   for k = 1:601
     yy(i,k) = evaluatepolynomial(yi, n-1, xplot(k));
   end
   error = max(abs(expplot-yy(i,:)));
   fprintf('To sfalma me polywnymo parembolhs se %2d shmeia einai %12.8f
\n',shmeia(i), error);

pause;
end
```

δημιουργώ πολλά σημ. για γραφική παράσταση

5 περιπτώσεις παρεμβολής

$3, \rightarrow x = [-3, 0, 3]$

$y = e^{-4x^2}$

πίνακας 3×3 Vandermonde

LU παραγοντοποίηση του a

υπολογίζω την f στο xplot.

δεξί μέλος του συστήματος

λύνω το σύστημα

```
pause;
end
subplot(2, 1, 1)
plot(xplot, yy(1,:), xplot, yy(2,:), xplot, yy(3,:),xplot, yy(4,:), xplot, yy(5,:)); hold on;
legend('3 shmeia','7 shmeia','13 shmeia','31 shmeia','61 shmeia');
plot(xplot, expplot,'k-','linewidth',2);
title('H synarthsh exp(-4x^2) kai ta polywnyma parembolhs');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -5 5]); hold off
subplot(2, 1, 2)
plot(xplot, expplot-yy(1,:), xplot, expplot-yy(2,:), xplot, expplot-yy(3,:),xplot, expplot-yy(4,:), xplot, expplot-yy(5,:)); hold on;
legend('3 shmeia','7 shmeia','13 shmeia','31 shmeia','61 shmeia');
title('To sfalma gia ola ta polywnyma parembolhs');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -5 5]); hold off
```

...λύνω το σύστημα y_i = συντελεστές του p. Στάδιο → συντελεστές πολυωνύμου

→ υπολογίζω το p στα xplot.

υπολογίζω το σφάλμα του p.

Σημεία Chebychev

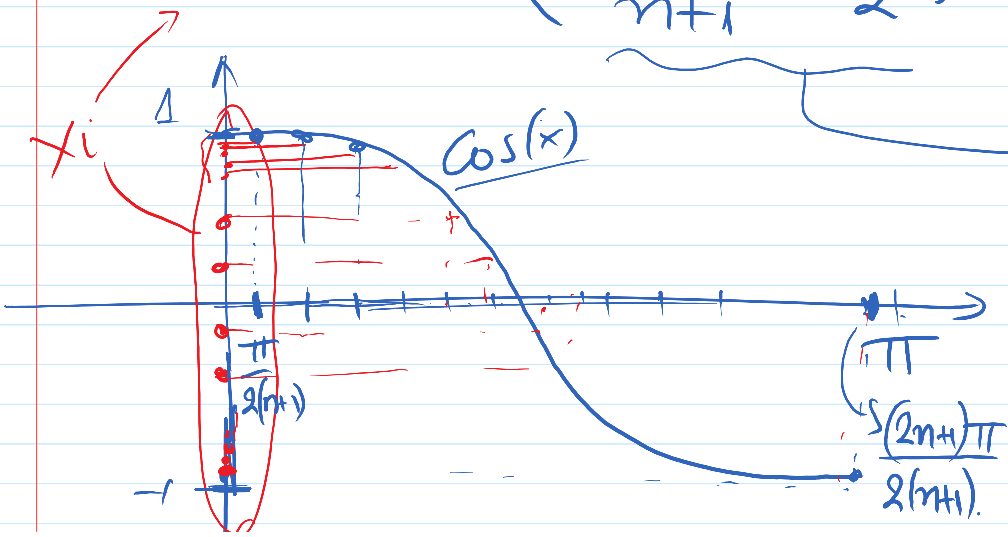
$$x_i = \cos\left(\underbrace{\frac{2i+1}{n+1}}\frac{\pi}{2}\right) \quad i=0,1,2,\dots,n$$

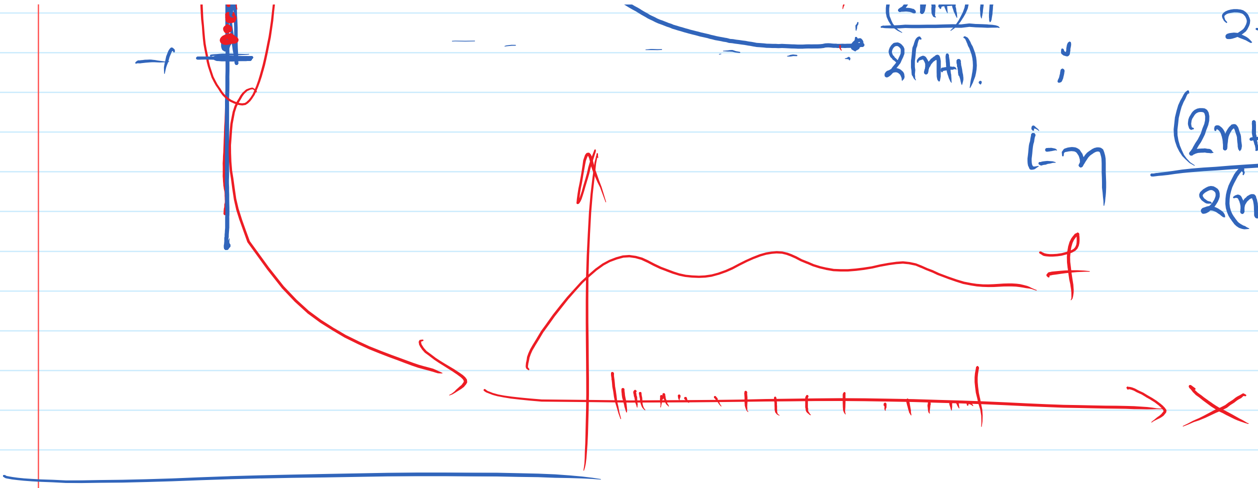
$i=0 \to \dfrac{\pi}{2(n+1)}$

$i=1 \to \dfrac{3\pi}{2(n+1)}$

$i=2 \to \dfrac{5\pi}{2(n+1)}$

$\vdots$





$2(n+1)$

$$i=n \quad \frac{(2n+1)\pi}{2(n+1)}$$

Παρατήρηση 1

Τα $x_i \in [-1,1]$. !

Παρατήρηση 2

Το πρόβλημα που έχω να λύσω: έχει Π.Ο. $[-3,3]$

Άσκηση 1

Ποιος μετασχηματισμός πάει τα $\{x_i\}$ από το $[-1,1]$ στο $[-a,a]$;

Άσκηση 2

Ποιος μετασχηματισμός πάει ~~τα~~ $\{x_i\}$ από το $[-1,1]$ ~~στο~~ $[-1+b, 1+b]$;

Άσκηση 3

Ποιος μετασχηματισμός πάει τα $\{x_i\}$ από το $[-1,1]$ στο $[c,d]$