Домашнє завдання №7 (від 28.10.2020)

Виконав: Трохимович Микола

Заняття 9-10. Фінансова математика. Вартість грошей у часі та модель еквівалентних платежів. Персональне фінансове планування. Фінансові моделі з різними темпами зростання грошових потоків.

Завдання 9. (20 балів).

Нехай WACC – середньозважена вартість капіталу даної компанії у даний момент часу t_0. Нехай E – вартість власного капіталу, а D – ринкова величина боргу компанії, T – величина податку на прибуток компанії, які визначають структуру капіталу компанії та її WACC:

$$WACC = \frac{D}{E+D} \times (1-T) \times r_D + \frac{E}{E+D} \times r_E.$$

Припустимо, що для бізнесу компанії $WACC > g$.

Позначимо

$$PVIFA(WACC, t = \infty, g) = \frac{1+g}{WACC - g}$$

$$PVIFA(WACC, t, g) = \frac{1+g}{WACC - g} \times (1 - \frac{(1+g)^t}{(1+WACC)^t})$$

Розглянемо деякий бізнес, який генерує зростаючий $g > 0$ грошовий потік $C_A(t) = C_A(0) \times (1+g)^t$ протягом деякого часу t. Припустимо, що в моделі DCF (discounted cash flows) ринкова вартість активів компанії складає

$$AV(C_A) = C_A \times PVIFA(WACC, t, g)$$

Компанія розглядає інвестиційний проект з $I = 1000$, який дозволить компанії збільшити грошові потоки кожного періоду на k_I відсотків. Для компанії зараз $WACC = 0.25,\ t = 10,\ g = 0.05,\ C_A(0) = 1000$. Ми вважаємо, що структура капіталу компанії при реалізації цього проекту не зміниться.

Яким повинно бути мінімальне значення k_I, щоб цей проект був інвестиційно привабливим?

Розв’язання:

Для того, щоб проект був інвестиційно привабливим повинно Повинно справджуватися:

$$AV(C_{A+I}) - I = C_{A+I} \times PVIFA(WACC, t, g) - I =$$
$$C_A \times (1 + k_I) \times PVIFA(WACC, t, g) - I \geq AV(C_A) = C_A \times PVIFA(WACC, t, g)$$

Тобто, повинно виконуватися:

$C_A \times k_I \times PVIFA(WACC, t, g) \geq I$ or $k_I \geq \frac{I}{C_A \times PVIFA(WACC,t,g)}$

Враховуючи початкові умови $I = 1000,\ WACC = 0.25,\ t = 10,\ g = 0.05,\ C_A(0) = 1000$ знайдемо мінімальне значення k_I, для якого інвестиційний проект підвищення ефективності, що полягає у зростанні всіх грошових потоків на k_I процентів, буде інвестиційно привабливим:

$$PVIFA(WACC, t, g) = \frac{1+g}{WACC-g} \times (1 - \frac{(1-g)^t}{(1+WACC)^t}) = \frac{1+0.05}{0.25-0.05} \times (1 - \frac{(1-0.05)^{10}}{(1+0.25)^{10}}) = 4.91$$

$$k_I = \frac{I}{C_A \times PVIFA(WACC,t,g)} = \frac{1000}{1000 \times PVIFA(WACC,t,g)} = 0.2036 \approx 20.36\%$$

$$PVIFA(WACC, t = \infty, g) = \frac{1+g}{WACC-g} = \frac{1+0.05}{0.25-0.05} = 5.25$$

$$k_I = \frac{I}{C_A \times PVIFA(WACC,t=\infty,g)} = \frac{1000}{1000 \times PVIFA(WACC,t=\infty,g)} = \frac{1000}{1000 \times 5.25} = 0.1905 \approx 19.05\%$$

Завдання 8. (5 балів). Припустимо, що інвестор розглядає можливість інвестування у проект X, вартість якого наступного року оцінюється згідно до такої «лотереї»:

Стан ринку	1	2	3	4	5
Ймовірність, p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1
Вартість, X_i	10000	15000	25000	40000	50000

8.1 **(2 бали)** Знайдіть очікувану вартість проекту X наступного року, тобто

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} p_i \times X_i$$

8.2 **(3 бали)** Знайдіть стандартне відхилення вартості інвестиційного проекту X (міру ризиковості проекту X), тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} p_i \times (X_i - E(X))^2}$$

Розв’язання:

8.1. $E(X) = 0.2 * 10000 + 0.2 * 15000 + 0.3 * 25000 + 0.2 * 40000 + 0.1 * 50000 = 25500$

8.2. $\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} p_i \times (X_i - E(X))^2} =$

$$= \sqrt{0.2 * (10000 - 25000) + 0.2 * (15000 - 25000) + 0.3 * (25000 - 25000) + 0.2 * (40000 - 25000) + 0.2 * (10000 - 25000)} = 22.36$$

Завдання 7 (5 балів) Необхідно замінити потік платежів 50 тис. грн. через рік, 40 тис. грн. – через три роки, 80 тис. грн. – через вісім років еквівалентним потоком, що має дві виплати, рівні за величиною. Перша з цих виплат – через 3 роки, друга – через 7 років. Проценти нараховуються за ставкою 10% річних щокварталу.

Розв’язання:

Величиною потоку в момент T називають суму платежів потоку, дисконтованих до цього моменту часу:

$$R(T) = \sum_{k=1}^{T} R_k \times (1 + r)^{T - t_k}. \qquad (5.1)$$

Знайдемо теперішню вартість початкового грошового потоку:

$$PV_1 = 50000 * (1+0.025)^{-4} + 40000 * (1+0.025)^{-12} + 80000 * (1+0.025)^{-32} = 111341.41$$

Бажаний грошовий потік, що повинен бути еквівалентним буде задаватися такою формулою:

$$PV_2 = x * (1+0.025)^{-12} + x * (1+0.025)^{-28} = PV_1 = 111341.41$$

Розвяжемо дане рівняння за допомогою Wolfram і знайдемо x :

$x = 89471.6$ грн

Відповідь: 89471.6 грн

Завдання 6 (5 балів) Через який термін вклад на 500 грн. збільшиться втричі при ставці 9% річних при річному компаундуванні?

Розв'язання: Для розвязання даного завдання складемо і розвяжемо таке рівняння:

$$1500 = 500 * (1+0.09)^T \;=>\; 3 = 1.09^T \;=>\; T = 12.7482$$

Відповідь: 12.7482 років тобто по суті через 13 років, так як виплати здійснюються щороку.

Завдання 5 (5 балів) Припустимо, що вам запропонували кредитну картку з 3% місячною ставкою. Якою є справжня річна вартість такого кредиту, якщо ви не сплатили проценти за користування протягом року?

Розв'язання: Так як % нараховуються щомісяця, то будемо рахувати реальну ставку за формулою ефективної річної процентної ставки:

$$1 + r_e = (1 + r_p)^m \;=>\; r_e = (1+0.03)^{12} - 1 = 0.4257$$

Тобто справжня річна вартість становить 42.57% річних

Завдання 4 (5 балів) Нещодавно одна компанія подала рекламу вигляду «Приходьте та спробуйте наші продукти. Якщо Ви прийдете, то ми дамо Вам 1000 грн. просто за те, що ви прийшли!» Проте, коли ви прочитаєте написане дрібним шрифтом, то виявиться, що вам дадуть сертифікат, згідно до якого ви отримаєте 1000 грн. через 25 років. Скільки ж реально вам дадуть сьогодні грошей, якщо дисконтна ставка у гривні складає 20%?

Розв'язання: Для розвязання цього завдання потрібно знайти теперішню вартість грошей:

$PV = \frac{FV}{(1+r)^T} = \frac{1000}{(1+0.2)^{25}} = 10.48$ грн

Тобто реально нам сьогодні дадуть 10.48 грн а не 1000 як написано в рекламі)

Завдання 3 (5 балів) Знайти грошовий виграш, який отримає інвестор вкінці терміну, через три роки від початку інвестування, інвестувавши 50 тис. грн. за річною процентною ставкою 16%, якщо замість щомісячного нарахування процентів проводитиметься нарахування неперервних процентів. Тобто вам, потрібно обчислити прибуток інвестора у випадку неперервного нарахування відсотків та компаундування відсотків з інтервалом один місяць і порівняти отримані результати.

Розв'язання:

1) Порахуємо виграш у випадку неперервного нарахування:
   $FV = PV \times e^R$, де $e^R = \lim_{m\to\infty}(1 + \frac{R}{m})^m$
   При цьому ефективна процентна ставка буде: $(e^{0.16} - 1) \times 100 = 17.35\%$
   Виграш через три роки буде: $FV = 50000 \times (1 + 0.1735)^3 = 80801.4745$
2) Порахуємо виграш у випадку компаундування відсотків з інтервалом в один місяць. У цьому випадку місячна ставка буде становити 16/12=1.33%
   Тоді виграш буде становити $FV = 50000 \times (1 + 0.0133)^{36} = 80452.5$

Відповідь: Тобто маємо, що при неперервному нарахування маємо більший виграш 80801.4745 грн, а при компаундування відсотків з інтервалом в один місяць маємо дещо менший виграш 80452.5

Завдання 2 (10 балів) Двоє близнюків вирішили відкладати на старість щороку по 2 тис. доларів. Один з близнюків це робив регулярно щороку протягом 6 років, а потім припинив це робити зовсім. Інший близнюк протягом перших 6 років не відкладав нічого, а потім відкладав щороку по 2 тис. доларів протягом 37 років. Доходність від вкладень кожного з близнюків – 12% річних. Який з близнюків мав більшу суму на своєму рахунку через 43 роки від прийняття ними рішення стосовно заощаджень? (з книги Регіни Бретт «Бог ніколи не моргає»).

Розв'язок: Зроблю відповідні розрахунки на Python:

```
# first 6 years:
# initial
first = 2000
# next 5 years after initial
for i in range(5):
    first = first * 1.12 + 2000

# next 37 years:
for i in range(37):
    first = first * 1.12
```

```
first
```

```
1074967.850003537
```

```
# initial
second = 2000
# next 36 years after initial
for i in range(36):
    second = second * 1.12 + 2000
```

```
second
```

```
1087197.380000541
```

Отже, бачимо, що перший близнюк отримає 1074967.85 на старість років, а другий 1087197.38. Тобто різниця між результатом складе всього 12229.53 грн. При цьому варто зазначити, що перший робив щорічні вклади в розмірі 2000грн всього 6 років, а інший аж 37 років. Бачимо, важливість почати раніше.

Завдання 1 (40 балів) (Персональне фінансове планування).

Вам 27 років, ваш місячний дохід складає 2000 доларів, і щороку ваш дохід зростатиме на 9%. На пенсію ви плануєте вийти у 65 років і прожити – до 100 років. Інфляція в доларах складатиме в середньому 3% річних. Всю частину доходу, яку ви не спожили протягом місяця, ви маєте можливість заощаджувати з номінальною доходністю 5% річних. Кредитна ставка для вас в комерційному банку – 7% річних.

1.1 **(20 балів)** Який максимальний сталий рівень споживання протягом життя ви можете досягнути від сьогодні до 100 років у заданих припущеннях?

Маємо номінальну ставку 5% при рівні інфляції 3% тоді реальна ставка буде становити 5%-3%=2% - реальна ставка.
При цьому реальна місячна ставка буде 2%/12 = 0,17%
Нехай С – це сталий рівень споживання. Тоді теперішня вартість споживання до 100 років складе: $\frac{C}{0.0017}(1-\frac{1}{1.0017^{73*12}})$
При цьому грошові надходження, що будуть забезпечувати такий рівень споживання знайдемо ітеративно з врахуванням реально ставки дохідності. Всі додаткові обчислення залишаю тут (https://docs.google.com/spreadsheets/d/1xWf5V0kiGWL4pNNUu2cCFne0smQeTJjMPKfc-1HwlfA/edit?usp=sharing)

Отже, людський капітал, згенерований за життя буде становити: 3951659,10 дол. З урахуванням реальної місячної процентної ставки та щорічним зростанням доходу.

Отже для знаходження сталого рівня споживання розвяжемо таке рівняння:
$\frac{C}{0.0017}(1-\frac{1}{1.0017^{73*12}}) = 3951659,10$
С = 8677.54 - а такої суми спочатку ми ще не заробляємо щоб споживати.