Курс «Бізнес аналітика»
Домашнє завдання №2 (від 23.09.2020)

Моделювання і калібрування кривої попиту. Моделювання і калібрування функції витрат на виробництво. Максимізація функції прибутку компанії.

Виконав: Микола Трохимович

Завдання 1. (20 балів). Калібрування функції попиту.

Відомо, що споживачі реагують на зміну ринкових цін зміною обсягів своїх покупок. Відділ продаж компанії оцінив вплив ціни на обсяги продаж у вигляді Таблиці 1:

Таблиця 1

Ціна, тис. грн	1,65	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,4
Обсяг продаж, шт.	430	397	361	336	313	292	273	256

Потрібно побудувати криву попиту, що задається функцією вигляду

$$Q = \exp(a - b \times p - c \times p^2) + d \qquad (1)$$

де Q – обсяги продаж, p – ціна, а a, b, c, d – параметри, і найкраще наближає заданий масив значень.

1.1 **(10 балів)** Відкалібруйте модель (1), знайшовши значення параметрів a, b, c, d.

1.2 **(10 балів)** Побудуйте графік функції попиту (1) зі знайденими у п 1.1 параметрами, а також на цьому ж рисунку зобразіть значення ціни та обсягів продаж з Таблиці 1.

Вказівка. Можна використовувати готові оптимізаційні пакети в програмному забезпеченні або написати самостійно скрипт оптимізації в припущенні методу найменших квадратів (МНК).

МНК метод. Нехай (x_i, y_i) , $i = 1, \ldots, n$ – заданий масив точок, $f(x; a, b, c, d)$ – заданий клас функцій, тоді параметри $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ визначають оптимальне наближення заданого масиву точок, якщо вони є розв'язком проблеми

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i; a, b, c, d) - y_i)^2 \to min.$$

Розв’язок:

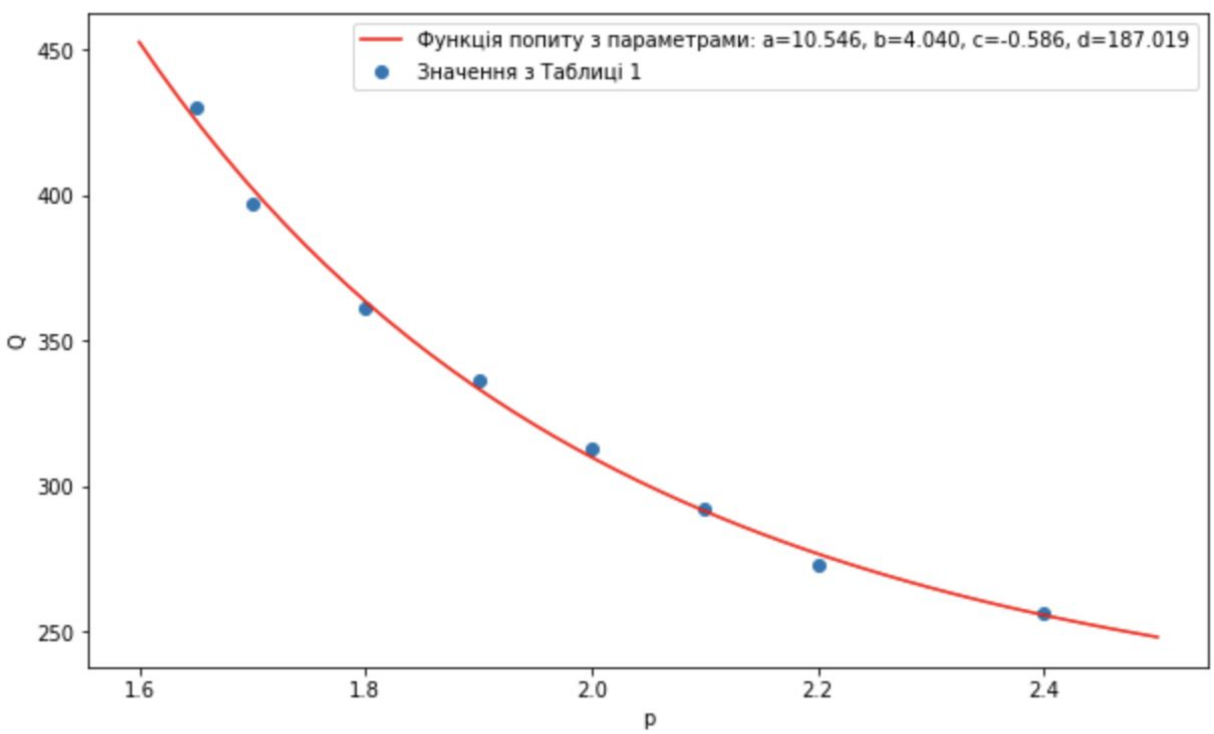
1) За допомогою Python а саме scipy.optimize.curve_fit, що є методом для знаходження параметрів функції використовуючи метод нелінійного методу найманших квадратів.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit

def func(x, a, b, c, d):
    return np.exp(a - b*x - c*x**2) + d

x = np.array([1.65, 1.7, 1.8, 1.9, 2, 2.1, 2.2, 2.4])
y = np.array([430, 397, 361, 336, 313, 292, 273, 256])

popt, pcov = curve_fit(func, x, y)

print('Знайдені параметри: a=%5.3f, b=%5.3f, c=%5.3f, d=%5.3f' % tuple(popt))
```

```
Знайдені параметри: a=10.546, b=4.040, c=-0.586, d=187.019
```

<u>Знайдені параметри: a=10.546, b=4.040, c=-0.586, d=187.019</u>

2) Функція попиту та значення з Таблиці 1



Завдання 2. (20 балів) Знаходження коефіцієнта еластичності попиту.

Розглянемо криву попиту, що моделюється з допомогою такої параметричної сім'ї функцій $d(p; a, b, c, d) = \exp(a - b \times p - c \times p^2) + d$, де p – ціна, а a, b, c, d – параметри.

2.1. (5 балів) Зобразіть графічно криві попиту на одному рисунку для

1) $a_1 = 3.7$, $b_1 = 1.9$, $c_1 = -0.2$, $d_1 = 1.5$
2) $a_2 = 3.8$, $b_2 = 2.2$, $c_2 = -0.25$, $d_2 = 1.55$
3) $a_3 = 3.6$, $b_3 = 1.6$, $c_3 = -0.15$, $d_3 = 1.45$

2.2. (5 балів) Обчисліть еластичність кривої попиту для $a_1 = 3.7$, $b_1 = 1.9$, $c_1 = -0.2$, $d_1 = 1.5$ при ціні $p_1 = 1.6$ та $p_2 = 1.8$.

Нагадаємо, що цінова еластичність кривої попиту в точці (P, Q) визначається за формулою

$$\varepsilon_P = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q} \qquad (2)$$

2.3. (5 балів) Нехай ціна одиниці товару зміниться з 1.8 до 1.6. Порахуйте при цьому як зміняться обсяги продаж (ΔQ) і виручка (ΔRev), якщо крива попиту описується функцією

$$d(p; a, b, c, d) = \exp(a - b \times p - c \times p^2) + d$$

для $a_1 = 3.7$, $b_1 = 1.9$, $c_1 = -0.2$, $d_1 = 1.5$. Знайдіть $\frac{\Delta Q}{Q}$.

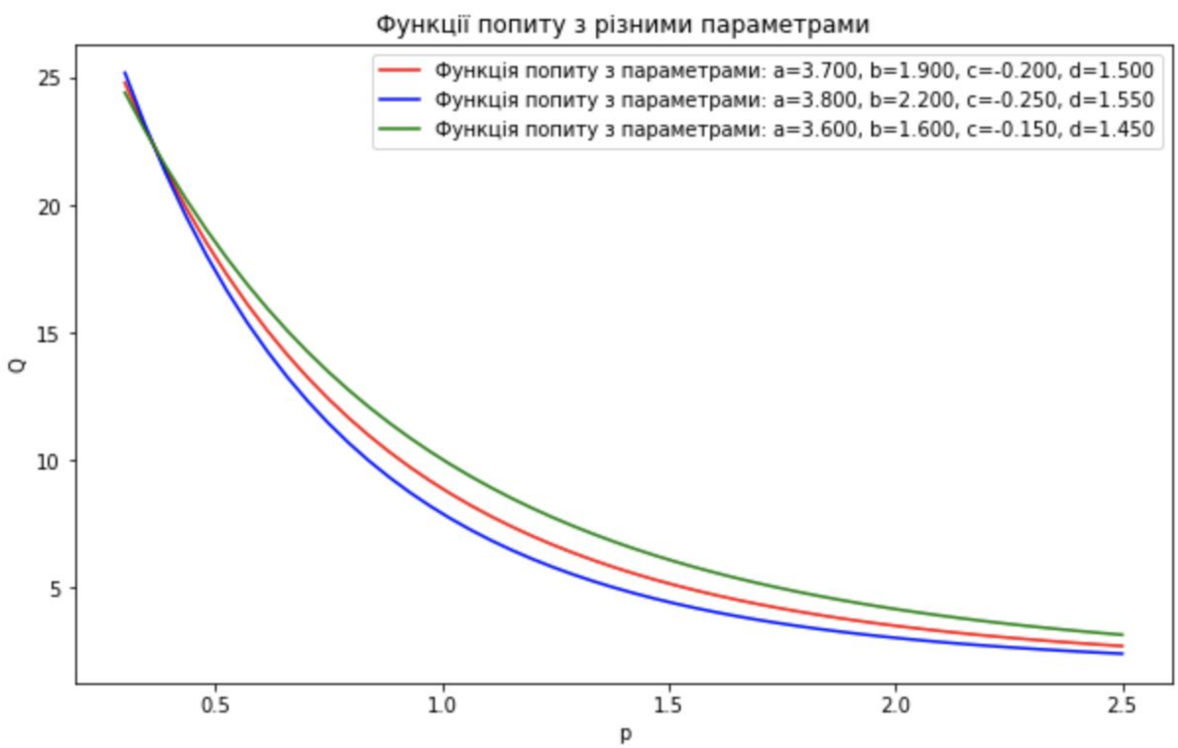
2.4. (5 балів) Нехай ціна одиниці товару зміниться з 1.8 до 1.6. Знайдіть $\frac{\Delta P}{P}$ і, враховуючи значення ε_P при ціні $p = 1.8$, знайдіть $\frac{\Delta Q}{Q}$. Порівняйте отримане значення $\frac{\Delta Q}{Q}$ зі значенням, знайденим в пункті 2.3.

Розв'язок:

1)

2.1. (5 балів) Зобразіть графічно криві попиту на одному рисунку для

1) $a_1 = 3.7$, $b_1 = 1.9$, $c_1 = -0.2$, $d_1 = 1.5$
2) $a_2 = 3.8$, $b_2 = 2.2$, $c_2 = -0.25$, $d_2 = 1.55$
3) $a_3 = 3.6$, $b_3 = 1.6$, $c_3 = -0.15$, $d_3 = 1.45$



2)

2.2. (5 балів) Обчисліть еластичність кривої попиту для $a_1 = 3.7$, $b_1 = 1.9$, $c_1 = -0.2$, $d_1 = 1.5$ при ціні $p_1 = 1.6$ та $p_2 = 1.8$.

Нагадаємо, що цінова еластичність кривої попиту в точці (P, Q) визначається за формулою

$$\varepsilon_P = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q} \qquad (2)$$

$$\frac{dQ}{dp} = \frac{d}{dp}\,(exp(a\ - b \times p - c \times p^2) + d)\ = (-\,b - 2c \times p) \times exp(a\ - b \times p - c \times p^2)$$

$$\varepsilon_P = \frac{dQ}{dp} \times \frac{P}{Q} = \frac{(-b-2c \times p) \times exp(a - b \times p - c \times p^2) \times p}{(exp(a - b \times p - c \times p^2) + d)}$$

Розрахунки:

```
a = 3.7
b = 1.9
c = -0.2
d = 1.5
p1 = 1.6
p2 = 1.8

def ep(p):
    up = (-b-2*c*p)*p*np.exp(a-b*p-c*p*p)
    down = np.exp(a-b*p-c*p*p)+d
    return up/down
```

```
ep(p1)
```

```
-1.3764660236156692
```

```
ep(p2)
```

```
-1.3333204344088225
```

Відповідь: За ціни p=1.6 маємо еластичність -1.376, за p=1.8 - еластичність -1.333

3)

2.3. (5 балів) Нехай ціна одиниці товару зміниться з **1.8** до **1.6**. Порахуйте при цьому як зміняться обсяги продаж (ΔQ) і виручка (ΔRev), якщо крива попиту описується функцією

$$d(p; a, b, c, d) = \exp(a - b \times p - c \times p^2) + d$$

для $a_1 = 3.7$, $b_1 = 1.9$, $c_1 = -0.2$, $d_1 = 1.5$. Знайдіть $\frac{\Delta Q}{Q}$.

$$a_1 = 3.7,\ b_1 = 1.9,\ c_1 = -0.2,\ d_1 = 1.5,\ p_1 = 1.8,\ p_2 = 1.6$$

$$\Delta Q = exp(3.7 - 1.9 \times 1.6 + 0.2 \times 1.6^2) + 1.5 - exp(3.7 - 1.9 \times 1.8 + 0.2 \times 1.8^2) + 1.5 = 0.7$$

$$\Delta Rev = 1.6 \times (exp(3.7 - 1.9 \times 1.6 + 0.2 \times 1.6^2) + 1.5) - 1.8 \times (exp(3.7 - 1.9 \times 1.8 + 0.2 \times 1.8^2) + 1.5) = 0.31$$

$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta Q}{exp(3.7 - 1.9 \times 1.8 + 0.2 \times 1.8^2) + 1.5} = 17.34\%$ - збільшення обсягів продажу

4)

2.4. (5 балів) Нехай ціна одиниці товару зміниться з **1.8** до **1.6**. Знайдіть $\frac{\Delta P}{P}$ і, враховуючи значення ε_P при ціні $p = 1.8$, знайдіть $\frac{\Delta Q}{Q}$. Порівняйте отримане значення $\frac{\Delta Q}{Q}$ зі значенням, знайденим в пункті 2.3.

$\frac{\Delta P}{P} = \frac{-0.2}{1.8} = -11.11\%$, за ціни $p = 1.8$ маємо $\varepsilon_P = -1.3333$.

Тоді $\frac{\Delta Q}{Q} = \varepsilon_P \cdot \frac{\Delta P}{P} = -1.3333 \cdot -11.11\% = 14.81\%$ - не зійшлося

Завдання 3. (10 балів). Для прийняття ефективних економічних рішень важливо вміти моделювати функцію загальних витрат компанії на виробництво продукції. Припустимо, що середні витрати компанії на виробництво 1 од. продукції в залежності від обсягів виробництва, а також загальні витрати виражено з допомогою наступної Таблиці 2:

Таблиця 2

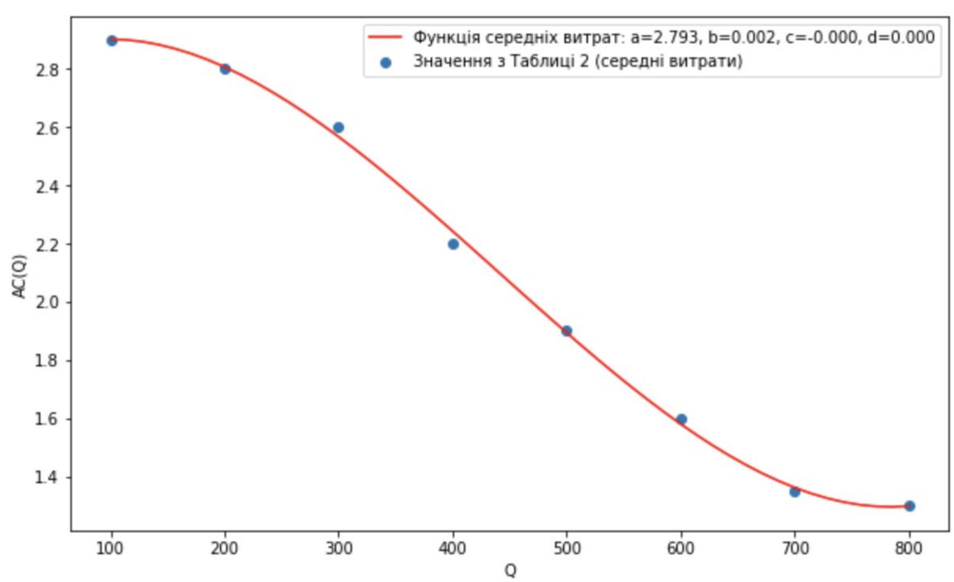
Обсяги виробництва, Q	100	200	300	400	500	600	700	800
Середні витрати, AC	2,9	2,8	2,6	2,2	1,9	1,6	1,35	1,3
Загальні витрати, TC	290	560	780	880	950	960	945	1040

Здійсніть інтерполяцію середніх витрат компанії з допомогою многочлена третього степеня: $AC(Q) = a + b \times Q + c \times Q^2 + d \times Q^3$, а також інтерполяцію загальних витрат компанії з допомогою многочлена четвертого степеня: $TC(Q) = a + b \times Q + c \times Q^2 + d \times Q^3 + e \times Q^4$. Результати інтерполяції зобразіть графічно.

Розв'язок: Код для розв'язку даного завдання представлений в додатку.

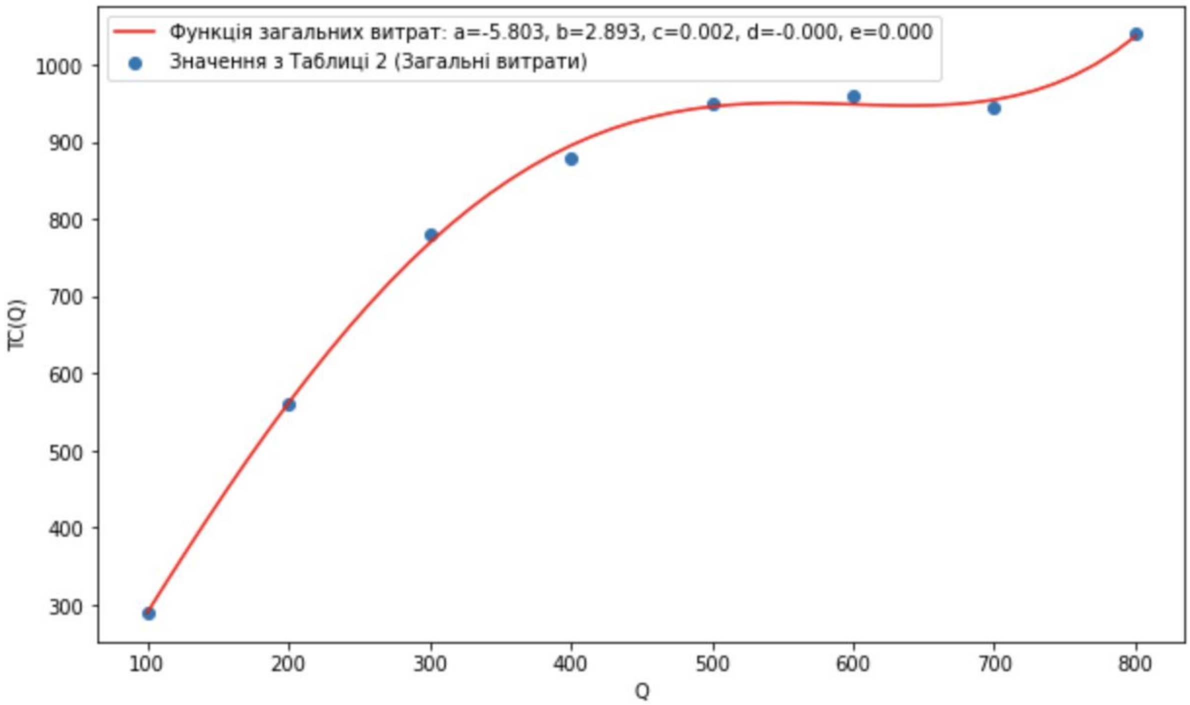
1) $AC(Q) = a + b \times Q + c \times Q^2 + d \times Q^3$

Знайдені параметри: a=2.793, b=0.002, c=-0.000, d=0.000



2) $TC(Q) = a + b \times Q + c \times Q^2 + d \times Q^3 + e \times Q^4$

Знайдені параметри: a=-5.803, b=2.893, c=0.002, d=-0.000, e=0.000



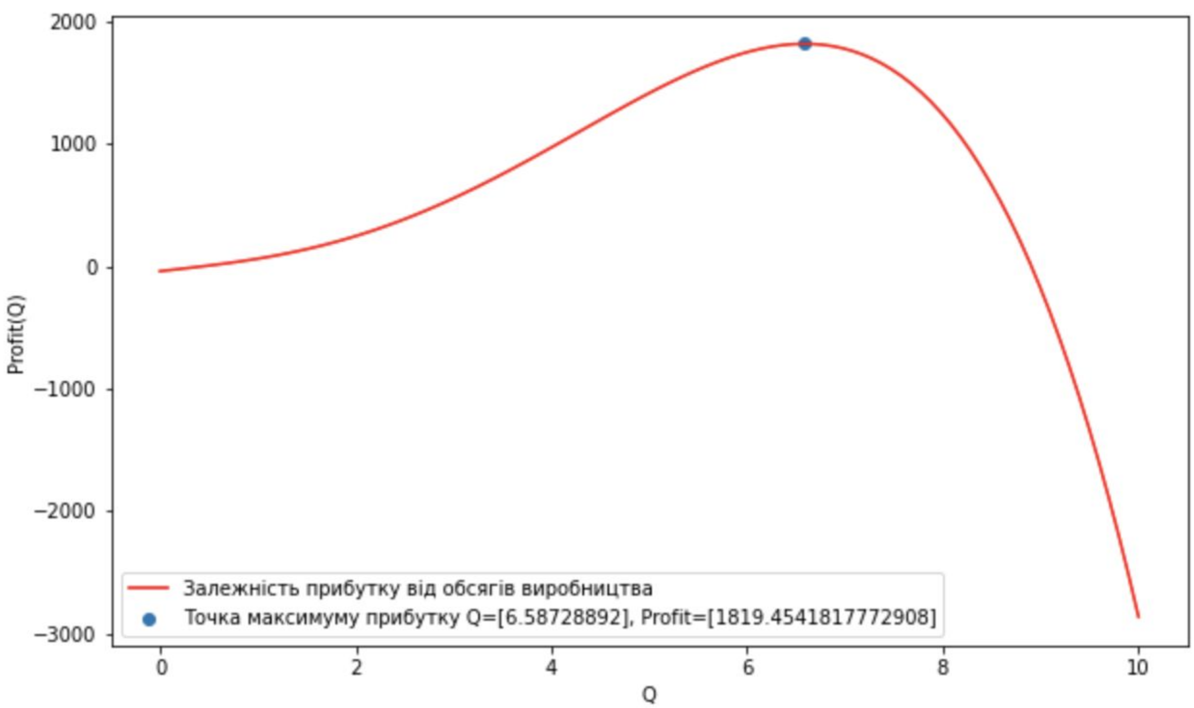
Завдання 4. (10 балів).

Економісти компанії дослідили залежність між обсягами виробництва Q (в тис. шт.) та прибутком компанії Profit (в тис. у.о.), і виразили її з допомогою формули:

$$Profit(Q) = -2{,}5 \times Q^4 + 22 \times Q^3 - 7{,}25 \times Q^2 + 90 \times Q - 40.$$

При яких обсягах виробництва Q прибуток компанії буде найбільшим? Зобразіть графічно функцію прибутку компанії від обсягів виробництва.

Розв'язок: Розв'язок представлений в додатку Python код.



Відповідь: При обсягах виробництва $Q = 6587$ шт. прибуток компанії буде найбільшим

Завдання 5 (20 балів). Нехай крива попиту для монополіста описується функцією

$$d(p; a, b) = \exp(-a \times p - b),$$

де $a = 0.1$ та $b = -3$.

Функцію загальних витрат менеджмент компанії менеджер оцінив, як

$$TC = 2 + 9 \times Q + 0.1 \times Q^2$$

5.1 (5 балів) Зобразіть графічно функцію залежності прибутку від ціни для даної компанії.

5.2 (5 балів) Знайдіть оптимальну ціну продажу для компанії.

5.3 (10 балів) Компанія роздумує над рекламною активністю вартістю 10. При цьому компанія оцінює, що крива попиту зміститься вправо і буде виражатись формулою

$$d(p; a, b) = \exp(-a \times p - b),$$

де $a = 0.1$ та $b = -3.4$.

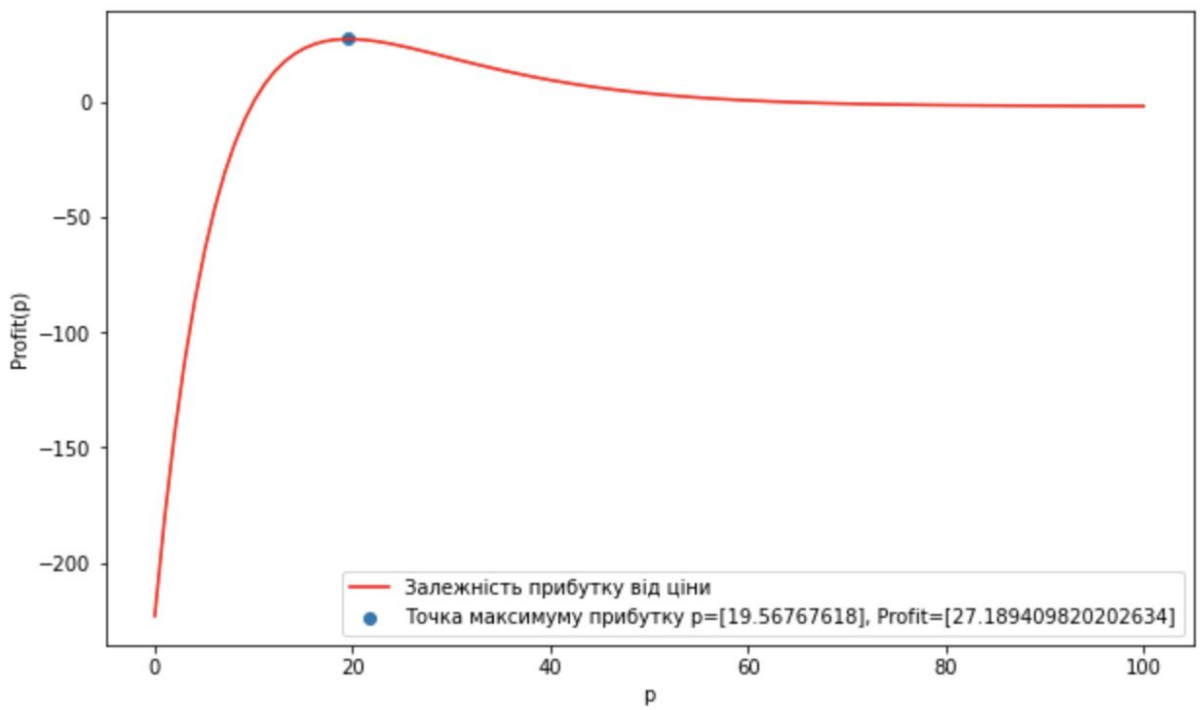
Яка цінова політика компанії при цьому оптимальна? Як зміниться прибуток компанії з врахуванням витрат на рекламу? Обґрунтуйте доцільність витрат на цю рекламну кампанію.

Розв’язок:

1) , 2)

$$Profit(p) = Rev(p) - TC(Q) = exp(-a \times p - b) \times p - (2 + 9 \times Q + 0.1 \times Q^2) =$$
$$= exp(-a \times p - b) \times p - (2 + 9 \times exp(-a \times p - b) + 0.1 \times (exp(-a \times p - b))^2)$$

Де $a = 0.1,\ b =- 3$



Оптимальна ціна продажу $p = 19.57$**, Очікуваний прибуток Profit = 27.1894**

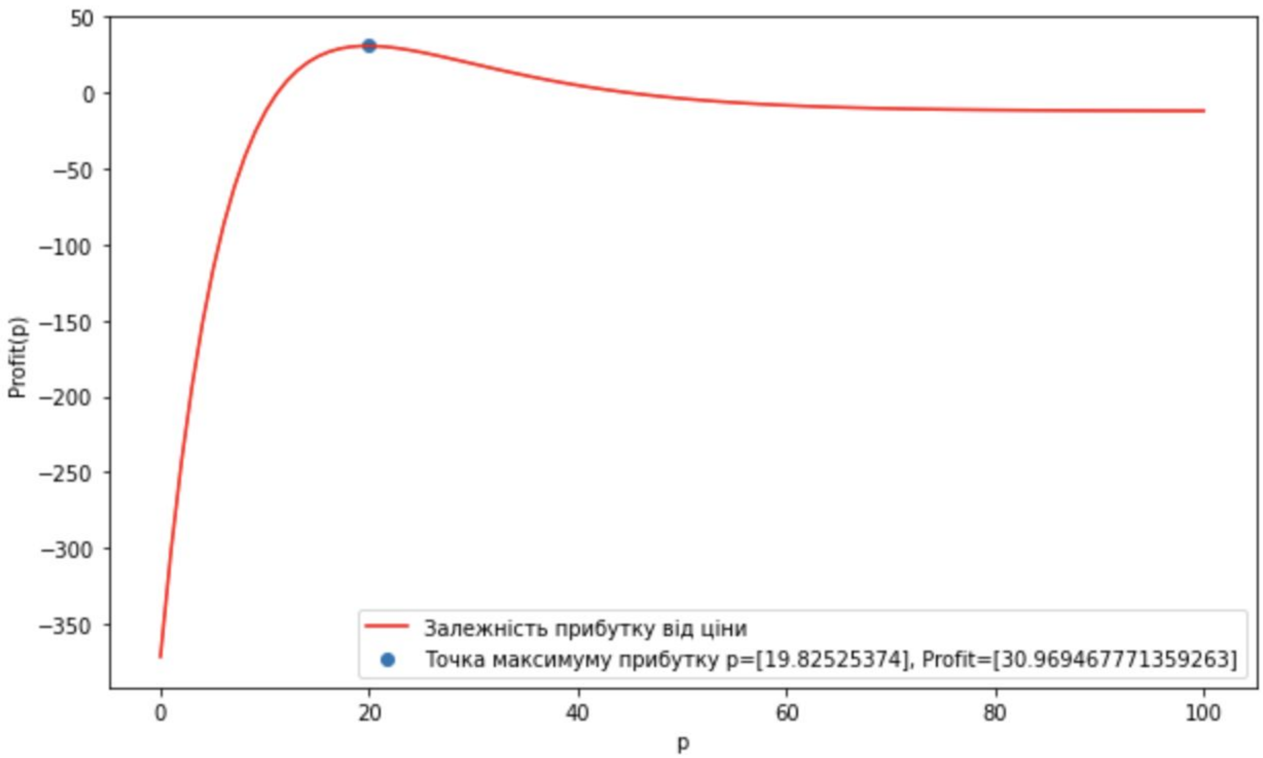
3)

З врахуванням реклами (ціна 10 врахована у витратах) функція прибутку буде виглядати так:

$$Profit(p) = Rev(p) - TC(Q) = exp(-a \times p - b) \times p - (2 + 9 \times Q + 0.1 \times Q^2 + 10) =$$
$$= exp(-a \times p - b) \times p - (2 + 9 \times exp(-a \times p - b) + 0.1 \times (exp(-a \times p - b))^2 + 10)$$

Де $a = 0.1,\ b =- 3.4$

Як можна бачити на наступному графіку **оптимальна ціна продажу зросла до p=19.83,** при цьому **очікуваний прибуток Profit = 30.97.** Як ми бачимо, очікуваний прибуток виріс, отже витрати на рекламну компанію є **доцільними.**



50
0
−50
−100
−150
−200
−250
−300
−350
Profit(p)
0
20
40
60
80
100
p
Залежність прибутку від ціни
Точка максимуму прибутку p=[19.82525374], Profit=[30.969467771359263]

Завдання 6. (20 балів). Максимізація прибутку компанії

Компанія А, виробник товару А, має технологію виробництва, яка визначає функцію сукупних витрат на виробництво Q_A (тис. шт.) продукції:

Таблиця 3

Q_A тис. шт.	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
TC, тис. у.о.	**18,0**	**19,0**	**19,3**	**19,9**	**20,3**	**21,5**	**23,0**	**25,1**	**26,2**	**27,3**

Для калібрування функції витрат на виробництво використайте функцію

$$TC(Q_A) = B + C \times Q_A + D \times Q_A^2 \qquad (3)$$

Компанія реалізує свій товар через дистриб'ютора і роздрібну мережу. Відомо, що націнка дистриб'ютора становить 20%, а націнка мережі - 30%. Компанія А має інформацію, як кінцева ціна для споживача впливає на обсяги продажів Q_A товару А:

Таблиця 4

P	**15,29**	**13,66**	**15,71**	**16,62**	**14,31**	**15,86**	**16,25**	**13,41**	**13,56**	**15,57**
Q_A тис. шт.	**6,89**	**9,79**	**6,57**	**5,48**	**8,74**	**6,36**	**5,99**	**9,92**	**9,85**	**6,56**

Для калібрування функції попиту використайте функцію

$$Q = \exp(a - b \times p) + c \qquad (4)$$

6.1 (10 балів) При якій ціні товару А прибуток компанії буде максимальним?

6.2 (10 балів) Зобразіть графічно функцію прибутку компанії в залежності від ціни.

Розв'язок:

1) Відкаліброуємо та знайдемо параметри для функцій витрат та функції попиту обчислення цього пункту в додатку з кодом:
   а) B=18.051, C=-0.192, D=0.083
   б) a=4.727, b=0.175, c=-0.691

Таким чином маємо: $TC(Q_A) = 18.051 - 0.192 \times Q_A + 0.083 \times Q_A^{\ 2}$

$$Q(p) = exp(4.727 - 0.175 \times p) - 0.691$$

2) Запишемо функцію виручки компанії А, використовуючи інформацію про націнку дистриб'ютора і роздрібної мережі, а також результат калібрування з функції попиту:

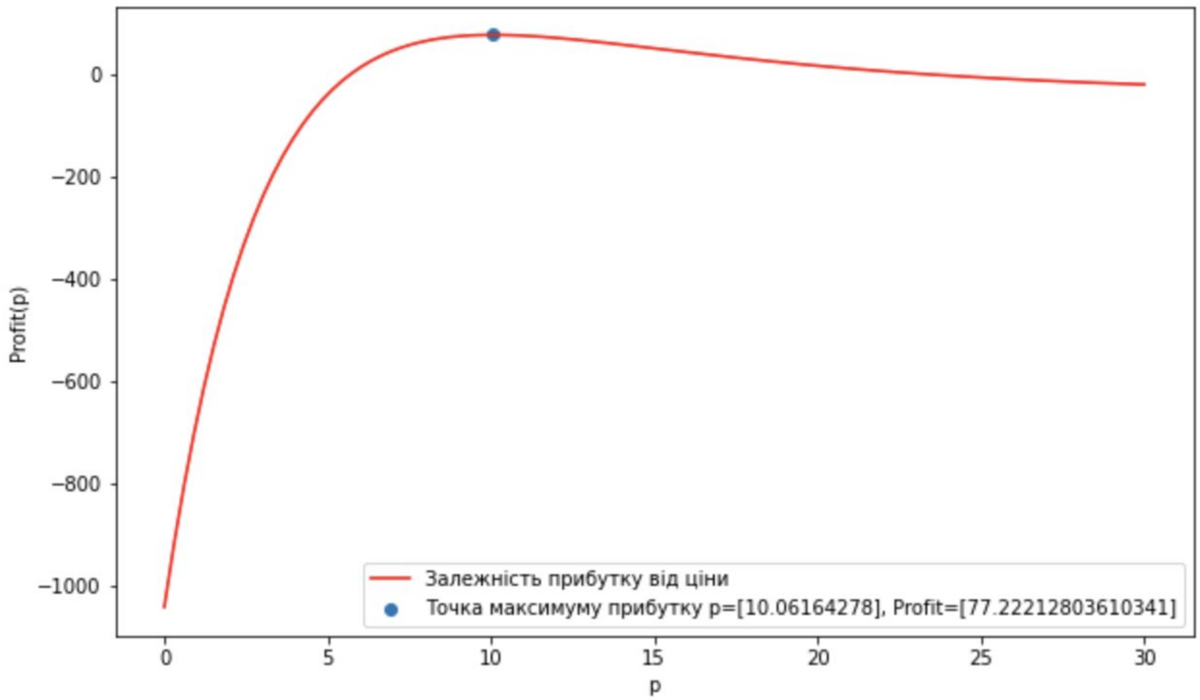
$$Rev(p_A) = \frac{(exp(4.727-0.175\times p_A)-0.691)\times p_A}{(1+0.2)(1+0.3)}$$

3) Запишемо функцію прибутку компанії А, використовуючи формулу сукупних витрат і функцію виручки:

$$Profit(p) = Rev(p_A) - TC(Q_A) = \frac{(exp(4.727-0.175\times p_A)-0.691)\times p_A}{(1+0.2)(1+0.3)} - (18.051 - 0.192 \times Q_A + 0.083 \times Q_A{}^2)$$

Де $Q_A = exp(4.727 - 0.175 \times p) - 0.691$

4) Знайдемо оптимальну ціну виробника p_A - компанії А на свій товар А, тобто максимізуємо його функцію прибутку за допомогою Python:



Відповідь:

1) При ціні товару А $p_A = 10.06$ прибуток компанії буде максимальним

Завдання 7*. (20 балів). Додаткове творче завдання.

Придумайте клас параметричних функцій з двома-трьома параметрами, який би можна було використовувати для калібрування функції попиту. Покажіть на конкретному прикладі графічний результат відповідного калібрування.

Запропонований клас параметричних функцій не має співпадати з класами функцій, які вже нами розглядались.

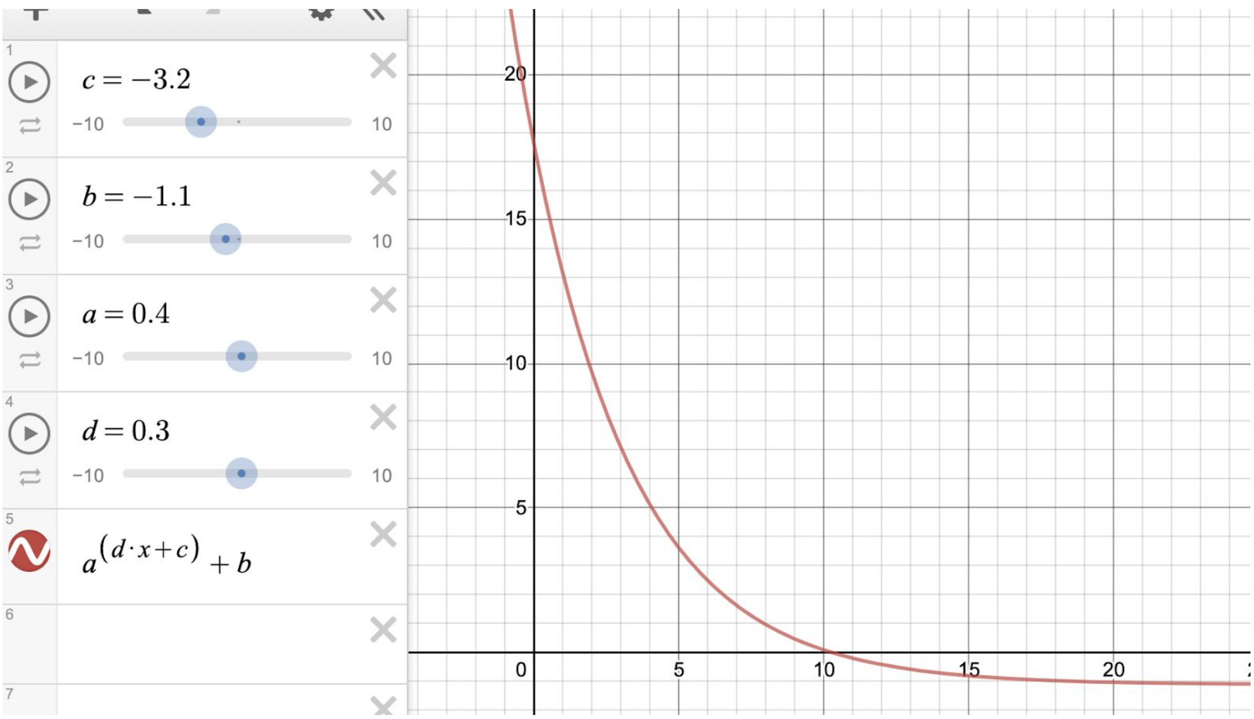
1) $d(p; a, b, c, d) = \exp(a - b \times p - c \times p^2) + d$
2) $Q = -\log(p^a) + b$
3) $Q = ((\frac{p}{b})^{-a} - 1)/a$

Розв’язок:

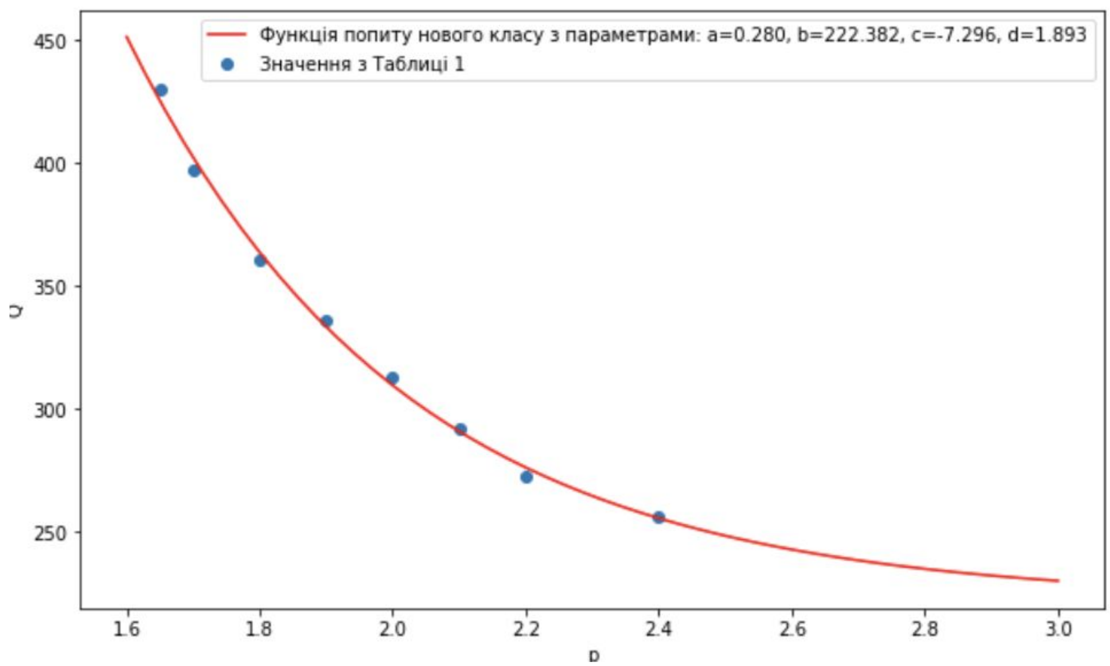
Наприклад візьмемо такий клас параметричних функцій:

$Q(p; a, b, c, d) = a^{(d \cdot p + c)} + b$ **,** де за основу взята степенева функція. Такий клас функцій відрізняється від тих, що розглядали ра

Приклад такої функції:



Покажемо на конкретному прикладі Задачі 1, як дана функція придатна для калібрування функції попиту:



Як можемо бачити даний клас функцій забезпечує хорошу апроксимацію кривої попиту, Якість апроксимації дуже хороша і схожа на клас функцій, який використовували раніше для цієї задачі ((1) з умови задачі). Проте як ми можемо бачити на дещо екстрапольованій ділянці, новий клас поводить себе краще в плані відповідності властивості функції попиту, а саме те, що вона повинна мати спадний характер, тоді як раніше розглянутий клас функцій не має такої властивості на розширеному проміжку.