«Бізнес аналітика»

Автор: Євген Пенцак

Виконав: Микола Трохимович

Домашнє завдання №8 (від 4.11.2020)

Заняття 11-12. Калібрування кривої доходності процентних ставок. Біноміальна модель ринку. Оцінка умовних вимог у біноміальній моделі. Повні та неповні ринки. Знаходження рівноважних цін на інвестиційні проекти. Модель Блека-Шоулза і Мертона оцінювання опціонів.

Завдання 1 (10 балів).

1.1 (5 балів) Нехай відомі процентні ставки доходності s в моменти часу, що описані вектором T: $T = (0.5 \quad 5 \quad 30)$, $s = (0.015 \quad 0.0194 \quad 0.032)$.

Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді многочлена третього степеня

$$s(0,\mathrm{T}) = \alpha_3 \mathrm{T}^3 + \alpha_2 \mathrm{T}^2 + \alpha_1 \mathrm{T} + \alpha_0$$

і зобразіть її графічно. Використайте додатково обмеження, що крива процентних ставок є плоскою в точці T=30 років, тобто $s'(0{,}30) = 0$.

<u>Розв’язання:</u>

Матриця T буде мати вигляд:

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_0^3 & \mathrm{T}_0^2 & \mathrm{T}_0 & 1 \\ \mathrm{T}_1^3 & \mathrm{T}_1^2 & \mathrm{T}_1 & 1 \\ \overline{\mathrm{T}}^3 & \overline{\mathrm{T}}^2 & \overline{\mathrm{T}} & 1 \\ 3\overline{\mathrm{T}}^2 & 2\overline{\mathrm{T}} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Позначивши

$$\alpha = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)'$$

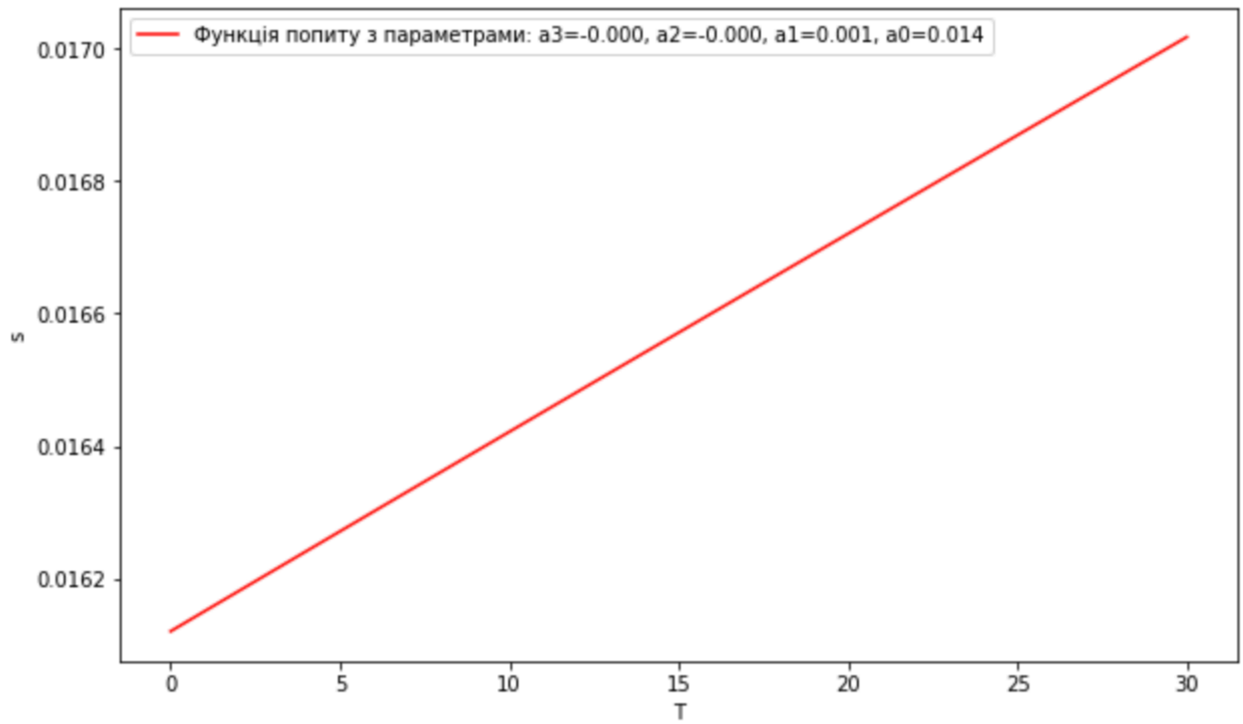
$$s = (s_0, s_1, \bar{s}, 0)'$$

$$\alpha = T^{-1} \cdot s$$

Обчислення та відповідь:

```
t = np.array([0.5, 5, 30])
s = np.array([0.015, 0.0194, 0.032, 0])

T = np.array([[t[0]**3, t[0]**2, t[0], 1],
             [t[1]**3, t[1]**2, t[1], 1],
             [t[2]**3, t[2]**2, t[2], 1],
             [3*t[2]**2, 2*t[2], 1, 0]])

np.linalg.inv(T).dot(s)
```

```
array([-1.38974113e-07, -1.11266826e-05,  1.04283106e-03,  1.44813835e-02])
```



Отже відкалібровані коефіцієнти кривої будуть: -1.38974113e-07, -1.11266826e-05, 1.04283106e-03, 1.44813835e-02

1.2 (5 балів) Нехай відомі процентні ставки доходності s в моменти часу, що описані вектором T: $T = (0.5 \;\; 5 \;\; 15 \;\; 30)$, $s = (0.015 \quad 0.0194 \quad 0.029 \;\; 0.032)$.

Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді многочлена четвертого степеня

$$s(0, T) = \alpha_4 T^4 + \alpha_3 T^3 + \alpha_2 T^2 + \alpha_1 T + \alpha_0$$

і зобразіть її графічно. Використайте додатково обмеження, що крива процентних ставок є плоскою в точці T=30 років, тобто $s'(0{,}30) = 0$.

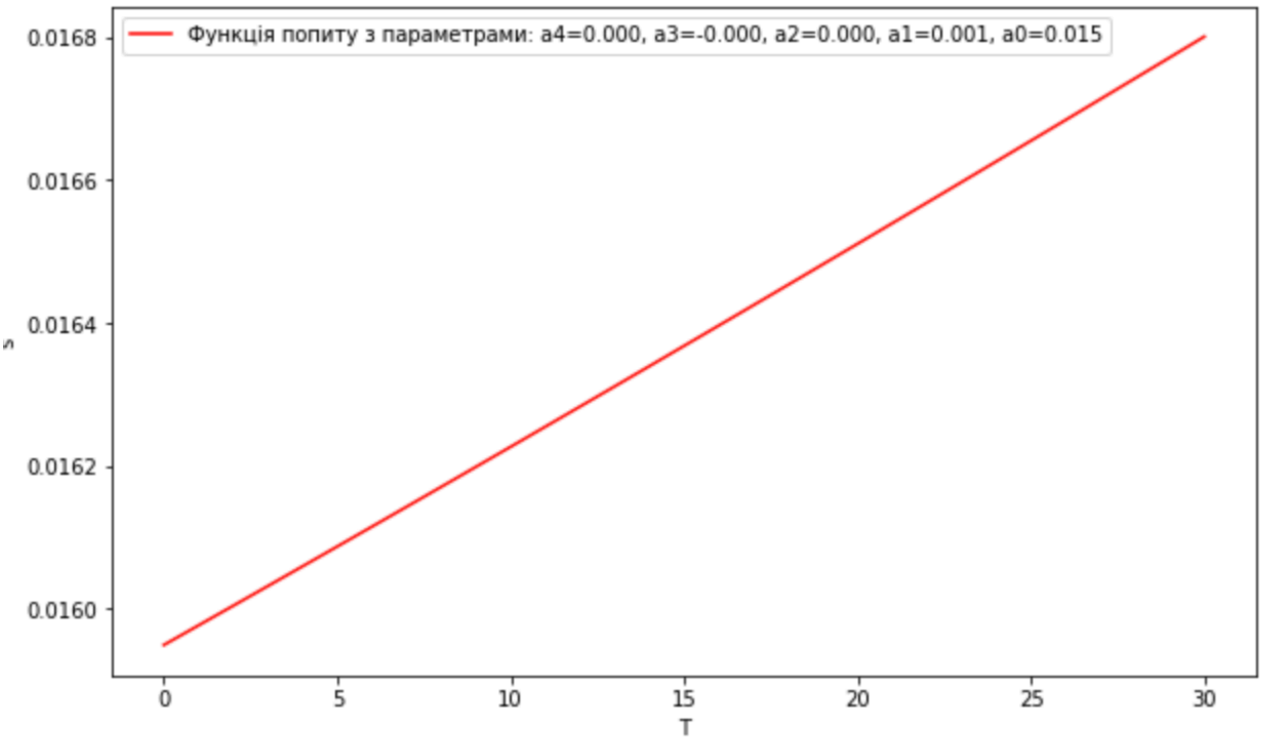
Розв'язання:

Аналогічно з попереднім пунктом проведемо відповідні обчислення:

$$\alpha = T^{-1} \cdot s$$

```
t = np.array([0.5, 5, 15, 30])
s = np.array([0.015, 0.0194, 0.029, 0.032,0])

T = np.array([[t[0]**4, t[0]**3, t[0]**2, t[0], 1],
              [t[1]**4, t[1]**3, t[1]**2, t[1], 1],
              [t[2]**4, t[2]**3, t[2]**2, t[2], 1],
              [t[3]**4, t[3]**3, t[3]**2, t[3], 1],
              [4*t[3]**3, 3*t[3]**2, 2*t[3], 1, 0]])

np.linalg.inv(T).dot(s)
```

```
array([ 5.66648814e-08, -3.85052384e-06,  5.87127837e-05,  7.53840169e-04,
        1.46088795e-02])
```



Отже відкалібровані коефіцієнти кривої будуть: 5.66648814e-08, -3.85052384e-06, 5.87127837e-05, 7.53840169e-04, 1.46088795e-02

Завдання 2 (20 балів). Нехай непараметрично оцінена з даних ринку державних облігацій крива процентних ставок задана з допомогою Таблиці 1.

Таблиця 1

t, роки	0,1	1	2	3	4	5	6	7	8
R	0,01	0,0175	0,024	0,035	0,039	0,042	0,043	0,044	0,043

2.1 Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді

$$NS(t) = \beta_1 + \beta_2 \times \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} + \beta_3 \times (\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t})$$

і зобразіть криву процентних ставок графічно. Візьміть параметр $\lambda = 0.004528$

2.2 Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді

$$s(t) = \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

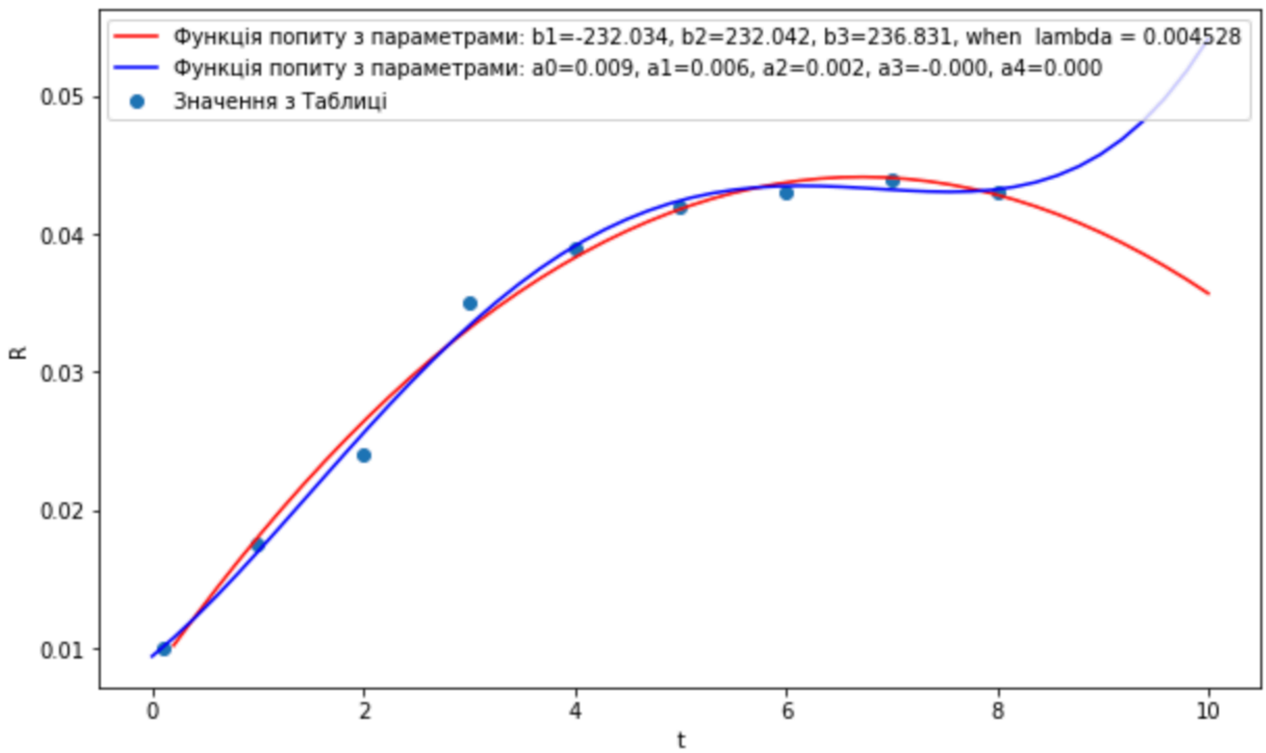
і зобразіть криву процентних ставок графічно.

2.3 Зобразіть дві кривих процентних ставок, отриманих в 2.1 та 2.2 на одному графіку. Зробіть висновок щодо можливості їх використання в якості апроксимації заданих значень процентних ставок.

Розв’язання:

```python
def func(x, b1,b2,b3):
    l = 0.004528
    return b1+b2*(1-np.exp(-l*x))/l/x + b3*((1-np.exp(-l*x))/l/x-np.exp(-l*x))

def func2(x, a0,a1,a2,a3,a4):
    return a4*x**4 + a3*x**3 + a2*x**2 + a1*x**1 + a0*x**0

t = np.array([0.1,1,2,3,4,5,6,7,8])
R = np.array([0.01, 0.0175, 0.024, 0.035, 0.039, 0.042, 0.043, 0.044, 0.043])


popt, pcov = curve_fit(func, t, R)

print('Знайдені параметри: b1=%5.3f, b2=%5.3f, b3=%5.3f, when  lambda = 0.004528' % tuple(popt))

plt.plot(np.linspace(0, 10, 50), func(np.linspace(0, 10, 50), *popt), 'r-',
         label='Функція попиту з параметрами: b1=%5.3f, b2=%5.3f, b3=%5.3f, when  lambda = 0.004528' % tuple(popt))

popt, pcov = curve_fit(func2, t, R)

print('Знайдені параметри: a0=%5.3f, a1=%5.3f, a2=%5.3f, a3=%5.3f, a4=%5.3f' % tuple(popt))

plt.plot(np.linspace(0, 10, 50), func2(np.linspace(0, 10, 50), *popt), 'r-',
         label='Функція попиту з параметрами: a0=%5.3f, a1=%5.3f, a2=%5.3f, a3=%5.3f, a4=%5.3f' % tuple(popt), color = 'b')

plt.scatter(t, R, label='Значення з Таблиці')

plt.xlabel('t')
plt.ylabel('R')
plt.legend()
plt.show()
```

```
Знайдені параметри: b1=-232.034, b2=232.042, b3=236.831, when  lambda = 0.004528
Знайдені параметри: a0=0.009, a1=0.006, a2=0.002, a3=-0.000, a4=0.000
```



Таким чином знайшли апроксимації двох кривих процентних ставок кожну з яких можна використовувати в якості апроксимації заданих значень процентних ставок. Апроксимація з використанням сім'ї функцій Нельсона-Сігела виглядає більш природньою так як немає різкого зростання на екстраполяції, тому я вважаю вона є дещо кращої якості.

Завдання 3 (25 балів).

Розглянемо найпростішу модель фінансового ринку – біноміальну одно періодичну модель, в якій на ринку є доступними два активи: 1) безризиковий з фіксованою доходністю R; 2) ризиковий S, який може перебувати лише у двох станах ринку у момент T=1 – вгору (up), вниз (down).

Нехай $S_0 = 100$, $u = 1{,}3$, $d = 0{,}7$, ймовірність того, що ринок піде вгору - $p_u = 0{,}7$, а ймовірність того, що ринок піде вниз - $p_d = 0{,}3$, безризикова доходність $R = 5\%$.

Тоді цінову динаміку для активу S можна записати у вигляді

$$S_0 = 100$$

$$S_1 = \begin{cases} 130 & p_u = 0{,}7 \\ 70 & p_d = 0{,}3 \end{cases}.$$

Нагадаємо, оскільки актив S є ризиковим, а інвестори на ринку мають певний рівень несприйняття ризику, то дисконтоване очікуване значення виплат по активу S за безризиковою процентною ставкою R завжди буде більшим від ринкової ціни активу S. Перевіримо це:

$$\frac{1}{1+R}E^P[S_1] = \frac{0{,}7\cdot 130 + 0{,}3\cdot 70}{1+0{,}05} = 106{,}67 > S_0 = 100$$

Тому одним з загально прийнятих підходів у фінансовому менеджменті є врахування ризику для оцінки ризикових інструментів шляхом збільшення ставки дисконтування. Збільшуючи ставку дисконтування, ми зменшуємо вартість ризикового активу сьогодні. І саме теорія CAPM була покликана встановити рівновагу між ризиком та доходністю на фінансових ринках. Проте питання вимірювання ризиків кожного активу є доволі складним, а тим більше визначення для кожного з них адекватної ставки дисконтування.

Тоді фінансистами-науковцями було запропоновано інший підхід: чи можна знайти такі нейтральні до ризику ймовірності (risk neutral probabilities) q_u та $q_d = 1 - q_u$, для яких би виконувалась формула

$$\frac{1}{1+R}E^Q[S_1] = \frac{1}{1+R}[q_u S_0 u + q_d S_0 d] = S_0$$

Виявилось, що при деяких ринкових умовах такі ймовірності завжди існують. Зокрема, для нашої біноміальної моделі ринку повинно виконуватись

$$d \leq 1 + R \leq u \,.$$

У нашому випадку $0{,}7 < 1{,}05 < 1{,}3$. Тоді ймовірності q_u та $q_d = 1 - q_u$ знаходяться за формулою

$$\begin{cases} q_u = \dfrac{(1+R)-d}{u-d} \\ q_d = \dfrac{u-(1+R)}{u-d} \end{cases}$$

3.1 **(5 балів)** Знайдіть нейтральні до ризику ймовірності у цій біноміальній моделі.

$$\begin{cases} q_u = \dfrac{(1+R)-d}{u-d} \\ q_d = \dfrac{u-(1+R)}{u-d} \end{cases}$$

Відповідно маємо:

$$q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d} = \frac{(1+0.05)-0.7}{1.3-0.7} = \frac{0.35}{0.6} = 0.583$$
$$q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d} = \frac{1.3-(1+0.05)}{1.3-0.7} = \frac{0.25}{0.6} = 0.417$$

3.2 **(5 балів)** Покажіть, що, використовуючи нейтральні до ризику ймовірності, справді виконується рівність

$$\frac{1}{1+R}E^Q[S_1] = \frac{1}{1+R}[q_u S_0 u + q_d S_0 d] = S_0$$

Показуємо це:

$\frac{1}{1+R}E^Q[S_1] = \frac{1}{1+R}[q_u S_0 u + q_d S_0 d] = \frac{1}{1.05}[0.58333 * 100 * 1.3 + 0.41666 * 100 * 0.7] = \frac{104.999}{1.05} = 99.999 \cong 100 = S_0$

Отже показали, що дана рівність справджується.

Нагадаємо, що фінансовим деривативом чи похідним фінансовим інструментом називається стохастична змінна X вигляду $X = \Phi(Z)$, де Z є стохастична змінна, що визначає процес для S. Для нашої біноміальної моделі ринку деривативом X назвемо будь-яку функцію, виплати якої в момент часу T=1 залежать від виплат базового активу (*underlying asset*) S, тобто $X = \Phi(S_1)$.

При цьому функція Φ називається *контрактною* функцією. Типовим прикладом похідного фінансового інструменту може бути Європейський кол чи пут зі страйковою ціною K. Зокрема, для Європейського колу

$$\Phi(u) = S_0 u - K$$

$$\Phi(d) = 0.$$

3.3 **(5 балів)** Розглянемо кол опціон зі страйковою ціною K=100. Запишіть функцію виплат по цьому опціону в момент часу T=1 і знайдіть його вартість, використовуючи біноміальну модель ринку.

Розв'язання:

Дериватив X описується як:

$$\begin{cases} S_0 u - K = 30, & S_1 = 130 \\ 0, & S_1 = 70 \end{cases}$$

Згідно до формули обчислення нейтральних до ризику ймовірностей ми знайшли q_u і q_d. Тоді коректна теоретична ціна за X складає

$$\Pi(0; \mathrm{X}) = \frac{1}{1 + 0.05}(0.583 * 30) = 16.667$$

Виявляється, використовуючи нейтральні до ризику ймовірності, можна оцінити не тільки базовий актив, але й усі деривативи, виплати по яких відомі в момент часу T=1.

3.4 **(5 балів)** Знайдіть вартість пут опціону зі страйком К=100, використовуючи біноміальну модель ринку.

$$\Pi(0;\mathrm{X}) = \frac{1}{1+0.05}(0.417 * 30) = 11.9$$

Кажуть, що дериватив *X* є ***репліковним***, якщо існує такий портфель з двох активів: безризикового B з доходністю R та ризикового S, що повністю реплікує (відтворює) виплати деривативa X в момент T=1. Якщо всі деривативи є репліковними, то такий фінансовий ринок називається ***повним***.

У біноміальній моделі фондового ринку ми маємо два активи і два стани ринку (up та down). Тому нам слід очікувати, що цей ринок є повним. Перевіримо це, тобто знайдемо портфель, який повністю відтворює виплати по деякому деривативу. Візьмемо для прикладу кол опціон зі страйком К=100.

Функція виплат (payoff function) по кол опціону матиме вигляд

$$X = \begin{cases} 30 & S_1 = 130 \\ 0 & S_1 = 70 \end{cases}$$

Для знаходження компонент реплікованого портфеля скористаємось твердженням:

Твердження. Якщо для біноміальної моделі ринку виконується

$$d \le 1 + R \le u\,,$$

то модель ринку є повною. При цьому реплікований портфель $h = (x, y)$ для деривативу $X = \Phi(Z)$ визначається згідно до формул:

$$x = \frac{1}{1+R} \cdot \frac{u\Phi(d) - d\Phi(u)}{u-d}$$

$$y = \frac{1}{S_0} \cdot \frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u-d}.$$

Тут x – інвестиція (деінвестиція) у актив з фіксованою доходністю R, а y – кількість придбаних акцій, що відповідають активу S.

3.5 **(5 балів)** Знайдіть компоненти реплікованого портфеля для деривативу – кол опціон на S зі страйком 100. Знайдіть вартість реплікованого портфеля в момент часу T=0.

За умов повного ринку ринкова вартість реплікованого портфеля і відповідного деривативу повинні бути однаковими. Це і є основним безарбітражним (arbitrage free) принципом оцінювання фінансових інструментів.

Перевірте, що вартість кол опціону, що порахована з використанням нейтральних до ризику ймовірностей у пункті 3.3, співпадає з вартістю кол опціону, що порахована через реплікацію портфелем безризиковим та ризиковим активами.

Розв’язання:

$$\mathrm{x} = \frac{1}{1.05} \cdot \frac{1.3 * 0 - 0.7 * 30}{1.3 - 0.7} = -33.33$$

$$\mathrm{y} = \frac{1}{100} \cdot \frac{30 - 0}{1.3 - 0.7} = 0.5$$

Це означає, що репліковний портфель можна сформувати, позичивши 33.33 у.о. в банку, і інвестувати їх у половину акції. Тоді

$$V_1^h = \begin{cases} -33.33 + 0.5 * 130 = 31.67, S = 130 \\ -33.33 + 0.5 * 70 = 1.67, S = 70 \end{cases}$$

Ринкова вартість реплікованого портфеля і відповідного деривативу є майже однаковими, хоча повинні бути однаковими.

Завдання 4. (35 балів)

Припустимо, маємо 3 можливих стани ринку (природи) і 3 наступних інвестиційних проекти є доступними на ринку:

	S=1	S=2	S=3
Фермерство, F	4	2	1
Деревообробка, C	3	1	2
Торгівля, T	5	3	5

4.1 **(5 балів)** Чи є даний ринок повним?

Для цього нам потрібно знайти ранг матриці (кількість лінійно незалежних рядків у матриці):

rang(A) = 3, а тому існує однозначного представлення Ероу-Дебрю зобов'язань через задані інвестиційні проекти. Тобто даний фінансовий ринок є повним.

4.2 **(5 балів)** Припустимо, що на ринок увійшов «банк» з такими виплатами в трьох станах ринку (1, 1, 1). Реплікуйте банківський продукт через існуючі продукти (проекти) на ринку.

Перевіримо, що "банк" можна реплікувати через інші проекти. Відповідний розв'язок визначається зі співвідношення:

```
np.linalg.inv(np.array([[4,2,1], [3,1,2], [5,3,5]]).T).dot(np.array([1,1,1]))
array([ 0.2, -0.6,  0.4])
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{T^{-1}} \times \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.2 \\ -0.6 \\ 0.4 \end{matrix}$$

4.3 **(5 балів)** Розгляньте кол опціон на проект C зі страйком 1. Зобразіть виплати по цьому кол опціону. Реплікуйте даний кол опціон з допомогою трьох проектів, які є на ринку.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{T^{-1}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & -0.4 \\ 0.7 & -1.5 & 0.2 \\ -0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

4.4 **(5 балів)** Реплікуйте (виразіть у вигляді лінійної комбінації) Ероу-Дебрю зобов'язання:

Ероу-Дебрю 1: Q_1=(1, 0, 0)

Ероу-Дебрю 2: Q_2=(0, 1, 0)

Ероу-Дебрю 3: Q_3=(0, 0, 1)

Нехай на ринку торгується три проекти з наступними виплатами

Таблиця 2

	S=1	S=2	S=3	Вартість
Фермерство, F	4	2	1	2.7
Деревообробка, C	3	1	2	2
Торгівля, T	5	3	5	3.9

Знайдемо тепер реплікацію Ероу-Дебрю зобов'язань через задані інвестиційні проекти:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{T\ -1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & -0.4 \\ 0.7 & -1.5 & 0.2 \\ -0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

4.5. **(5 балів)** Знайдіть вартість кожного Ероу-Дебрю зобов'язання.

Тоді вартість кожного Ероу-Дебрю зобов'язання дорівнюватиме:

$$(2.7 \quad 2 \quad 3.9) \times \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & -0.4 \\ 0.7 & -1.5 & 0.2 \\ -0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} = (0.5 \quad 0.3 \quad 0.1)$$

Отже, найціннішою є 1 одиниця в стані 1, тобто Ероу-Дебрю зобов'язання (1, 0, 0), за яке сьогодні потрібно заплатити 0,5.

4.6 **(5 балів)** Знайдіть вартість кол опціону на проект C зі страйком 1.

4.7 **(5 балів)** Знайдіть вартість банківського продукту з виплатами (1, 1, 1).

Розв'язання:

Використовуючи пункт 4.2 знайдемо вартість банківського продукту з виплатами (1, 1, 1):

$$\begin{matrix} & & & 0.2 & \\ 2.7 & 2 & 3.9 \times & -0.6 & = 0.9 \\ & & & 0.4 & \end{matrix}$$

Завдання 5 (10 балів). Розглянемо європейський кол-опціон на 1 тройську унцію золота з ціною виконання $1900, поточна ціна 1 тр. ун. золота складає $1880, волатильність базового активу золота складає 12%, безризикова процентна ставка R=1,25%, опціон виконується через 3 місяці. Знайдіть вартість кол-опціону, використовуючи формулу Блека-Шоулза і Мертона - **blsprice** .

Використовуючи Python та
https://github.com/MaximumBeings/public/blob/master/CDF_blackScholes.py

Знайшли вартість call аукціону за нашими заданими умовами.

```python
import math
import scipy
import scipy.stats
import numpy as np

strike = 1900
spot = 1880
volatility = 0.12
i_r = 0.0125


result = 0.0
cdf = 0.0
"""
Implementation to calculate CDF using scipy.
"""
def cumm_dens_function_scipy(t):
    return scipy.stats.norm.cdf(t)
"""
Black-Scholes for European Call and Put
"""
def blackScholes(t,S,K,T,a,r,q,Type):
    #t = beginning time
    #S = Spot Price
    #K = Strike
    #T = Maturity
    #a = volatility
    #r = constant interest rate
    #q = continous dividend rate of the underlying asset
    #Type can be call or put - enter as strings e.g. 'call' or 'put'
    call = 0.0
    put = 0.0
    d1 =0.0
    d2 = 0.0
    S = float(S)
    K = float(K)

    d1 = (np.log(S/K) +(r - q + a**2/2)*(T - t))/(a*math.sqrt(T-t))
    d2 = d1 - (a*math.sqrt(T-t))

    call = S*math.exp(-q*(T-t))*cumm_dens_function_scipy(d1) - K*math.exp(-r*(T-t))*cumm_dens_function_scipy(d2)
    put = K*math.exp(-r*(T-t))*cumm_dens_function_scipy(-d2) - S*math.exp(-q*(T-t))*cumm_dens_function_scipy(-d1)

    if Type == 'call':
        return call
    else:
        return put

#Sample Calls
print ("")
print ("The value of a call with the given parameters is : " + \
      str(blackScholes(0,spot,strike,0.25,volatility,i_r,0.00,'call')))
```

```
The value of a call with the given parameters is : 38.47469754501583
```

Відповідь: $38.47