Домашнє завдання 4.
Виконав: Микола Трохимович

Завдання 1. (10 балів).

Нехай «свинки» на фермі розмножуються за таким «технологічним» правилом:

$$y_{n+3} = 3y_{n+2} + 2y_{n+1} - 8y_n$$

причому $y_1 = 5$, $y_2 = 18$, $y_3 = 35$

1.1 (5 балів) Знайдіть формулу n–ого члена цієї послідовності, що описує процес розмноження свинок на фермі.

1.2 (5 балів) Сформуйте, як таблицю з Ексель, 20 перших членів послідовності розмноження «свинок», заданих рекурентним способом і з допомогою отриманої формули. Порівняйте отримані значення.

<u>Розв'язок:</u>

Маємо таке рекурентне співвідношення:

$y_{n+3} - 3y_{n+2} - 2y_{n+1} + 8y_n = 0$

Запишемо характеристичне рівняння:

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 8$

Знайдемо корені цього рівняння з допомогою Wolfram:

Solutions: Approximate forms Step-by-step solution

$x = 2$

$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

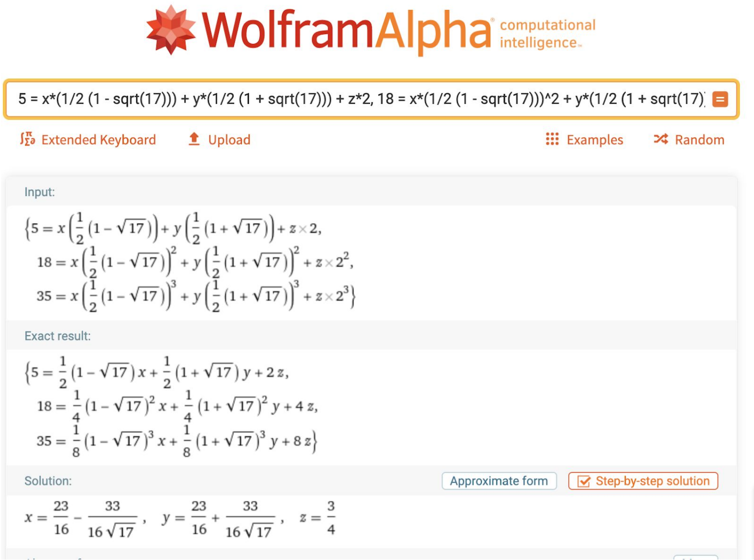
Отже загальне рішення матиме вигляд:

$y = c_1(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}))^n + c_2(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}))^n + c_3 2^n$

Використовуючи початкові умови отримаємо таку систему:

$$\begin{aligned}
5 &= c_1(\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17})) + c_2(\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17})) + c_3 2 \\
18 &= c_1(\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}))^2 + c_2(\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}))^2 + c_3 2^2 \\
35 &= c_1(\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}))^3 + c_2(\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}))^3 + c_3 2^3
\end{aligned}$$

Розв’язавши з допомогою Wolfram отримаємо таке загальне рівняння:



Відповідь: Формула n-го члена послідовності:

$$y = \left(\frac{23}{16} - \frac{33}{16\sqrt{17}}\right)\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})\right)^n + \left(\frac{23}{16} + \frac{33}{16\sqrt{17}}\right)\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\right)^n + \frac{3}{4}2^n$$

Сформував, таблицю з 20 перших членів послідовності розмноження «свинок», заданих рекурентним способом і з допомогою отриманої формули. **Отримав однакові значення.**

```python
import pandas as pd
import numpy as np

def f_1(y):
  return 3*y[-1] + 2*y[-2] - 8*y[-3]
def f_2(n):
  return (23/16-33/16/np.sqrt(17))*(1/2*(1-np.sqrt(17)))**n+(23/16+33/16/np.sqrt(17))*(1/2*(1+np.sqrt(17)))**n+3/4*(2**n)

y_1, y_2 = [5,18,35], [5,18,35]

for i in range(4,21):
  y_1.append(f_1(y_1[i-4:i-1]))
  y_2.append(f_2(i))

pd.DataFrame({'n':np.arange(1,21), 'Recurrent': y_1, 'By n-th equation':y_2})
```

	n	Recurrent	By n-th equation
0	1	5	5.0
1	2	18	18.0
2	3	35	35.0
3	4	101	101.0
4	5	229	229.0
5	6	609	609.0
6	7	1477	1477.0
7	8	3817	3817.0
8	9	9533	9533.0
9	10	24417	24417.0
10	11	61781	61781.0
11	12	157913	157913.0
12	13	401965	401965.0
13	14	1027473	1027473.0
14	15	2623045	2623045.0
15	16	6708361	6708361.0
16	17	17151389	17151389.0
17	18	43886529	43886529.0
18	19	112295477	112295477.0
19	20	287448377	287448377.0

Завдання 2. (20 балів).

Нехай для заданих вибірок 1 та 2 нам потрібно відкалібрувати моделі зростання поголів'я свиней при умові розгляду трьох альтернативних моделей:

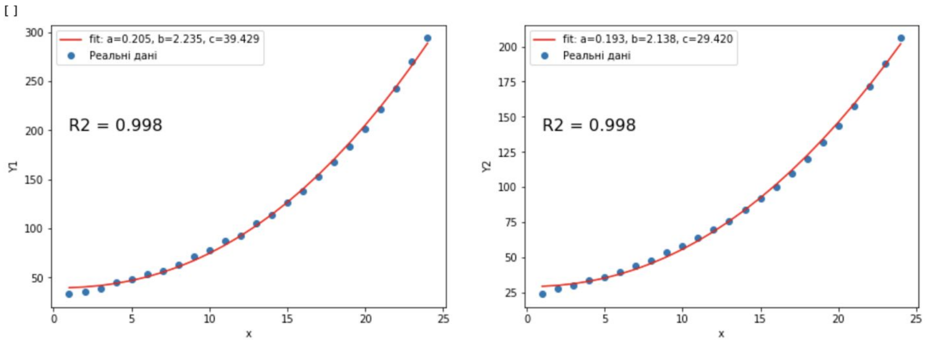
A) $y = ax^b + c$, де a, b і c параметри, які потрібно визначити;
B) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, де a, b, c і d параметри, які потрібно визначити;
C) $y = ab^x + c$, де a, b і c параметри, які потрібно визначити;

2.1 (15 балів) Відкалібруйте три моделі і результат апроксимації зобразіть графічно.

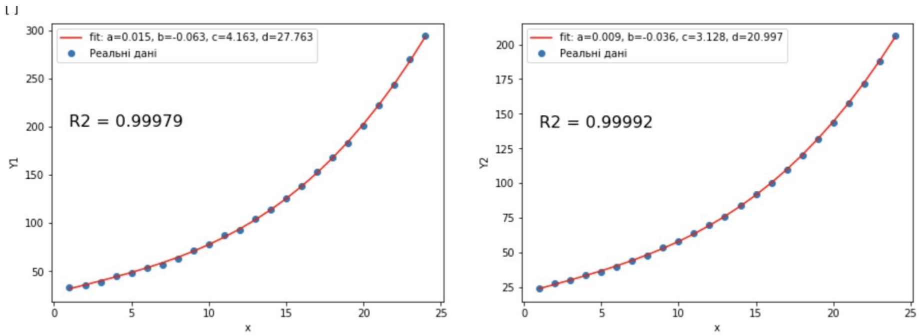
2.2 (5 балів) Знайдіть найкращу модель апроксимації для кожної вибірки.

<u>Розв'язок:</u>

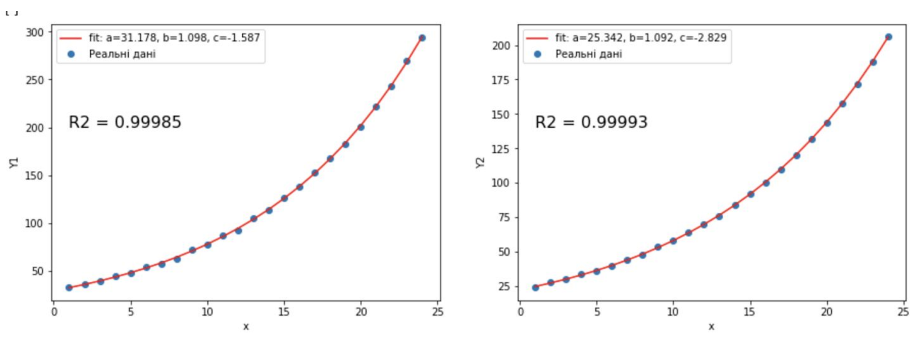
A) $y = ax^b + c$:



B) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:



C) $y = ab^x + c$:



Маємо такі візуалізації для відкаліброваних моделей для двох вибірок разом з знайденими параметрами. За значенням R^2 бачимо, що для першої і другої вибірки найкраща третя модель, найгірша перша. Хоча різниця є мізерною, всі моделі майже ідеально апроксимують залежність.

Завдання 3. (10 балів)

У файлі sales_alkazeltzer.xls показано помісячні продажі альказельтцеру протягом кількох років. Нам потрібно оцінити тренд, сезонність та зробити прогноз продаж на наступний рік.

Спочатку введемо змінні, що характеризують кожен місяць року:

JAN=1 – вказує, що це січень;

FEB=1 – вказує, що це лютий;

і т.д.

NOV=1 – вказує, що це листопад;

Якщо ж JAN=0, ..., NOV=0, то це грудень.

Щоб змоделювати і оцінити тренд введіть змінну TIM=1,2, ..., що вказує на місяць, в якому визначались обсяги продаж .

3.1 (5 балів) Використовуючи лінійну регресійну модель, оцініть фактори впливу кожного місяця та «тренду» на продажі альказельтцеру.

3.2 (5 балів) Зобразіть графічно історію продаж, результат апроксимації продаж з допомогою моделі та відповідний помісячний прогноз продаж альказельтцеру на рік.

Розв'язок:

Маючи дані, з файлу додамо дихотомізовані змінні місяців і отримаємо такі дані на яких і будемо далі навчати модель:

	Год	Месяц	t	Алка-зельтцер	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov
0	2003	1	1	27756.793752	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2003	2	2	17198.926264	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2003	3	3	20786.674302	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2003	4	4	25562.645106	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	2003	5	5	23282.538261	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
116	2012	9	117	19256.892325	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
117	2012	10	118	18718.042924	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
118	2012	11	119	17867.002908	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
119	2012	12	120	28815.543571	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
120	2013	1	121	20342.687432	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

121 rows × 15 columns

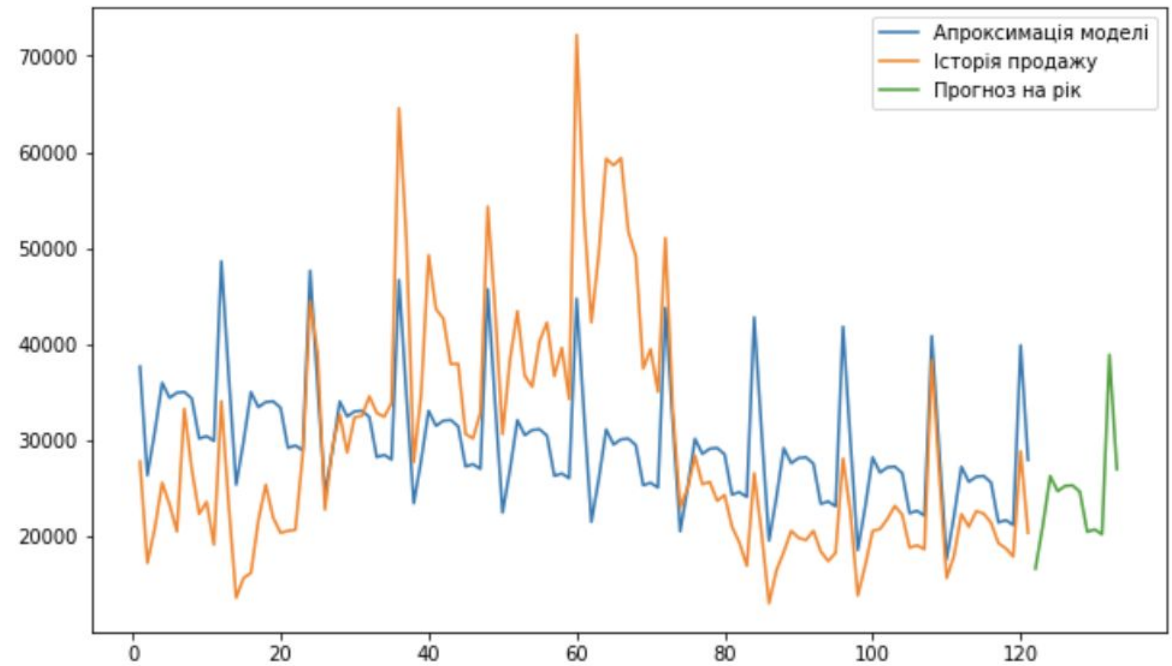
Навчаємо лінійну модель оцінимо вплив кожного місяця і тренду:

```
import statsmodels.api as sm
import numpy as np
Y = df['Алка-зельтцер'].values
X = df[['t','Jan', 'Feb', 'Mar', 'Apr', 'May','Jun', 'Jul', 'Aug', 'Sep', 'Oct', 'Nov']].values
X = sm.add_constant(X)
model = sm.OLS(Y,X)
results = model.fit()
print(results.summary())
```

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.249
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.166
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     2.991
Date:                Sun, 11 Oct 2020   Prob (F-statistic):            0.00121
Time:                        11:34:17   Log-Likelihood:                -1291.6
No. Observations:                 121   AIC:                             2609.
Df Residuals:                     108   BIC:                             2646.
Df Model:                          12
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const       4.958e+04   3988.677     12.431      0.000    4.17e+04    5.75e+04
x1           -80.9789     28.931     -2.799      0.006    -138.325     -23.633
x2         -1.185e+04   4840.792     -2.448      0.016   -2.14e+04   -2255.415
x3          -2.31e+04   4960.939     -4.656      0.000   -3.29e+04   -1.33e+04
x4         -1.852e+04   4959.336     -3.734      0.000   -2.84e+04   -8690.215
x5          -1.33e+04   4957.901     -2.682      0.008   -2.31e+04   -3469.416
x6         -1.479e+04   4956.635     -2.983      0.004   -2.46e+04   -4961.937
x7         -1.417e+04   4955.537     -2.860      0.005    -2.4e+04   -4348.164
x8         -1.401e+04   4954.608     -2.828      0.006   -2.38e+04   -4191.160
x9          -1.46e+04   4953.848     -2.947      0.004   -2.44e+04   -4779.267
x10         -1.87e+04   4953.256     -3.775      0.000   -2.85e+04   -8880.113
x11        -1.837e+04   4952.834     -3.709      0.000   -2.82e+04   -8552.081
x12        -1.879e+04   4952.581     -3.794      0.000   -2.86e+04   -8972.856
==============================================================================
Omnibus:                       15.084   Durbin-Watson:                   0.162
Prob(Omnibus):                  0.001   Jarque-Bera (JB):               16.938
Skew:                           0.901   Prob(JB):                     0.000210
Kurtosis:                       3.333   Cond. No.                         882.
==============================================================================
```

Бачимо, що модель має погане значення R^2. Висновок, що вона має погану прогностичну силу.

Як бачимо, за оцінкою лінійної модель всі фактори є значемими для моделі, також в таблиці наведена оцінка впливу кожного факторів а саме тренду і місяців.



Як ми бачимо, що історія має досить нетривіальну поведінку, яку складно змоделювати звичайною лінійною моделлю, тому ми і маємо погане значення коефіцієнту детермінації. Таку модель я б не використовував в реальному житті. Потрібно враховувати якісь додаткові фактори.

Завдання 4. (25 балів) Розглянемо продажі деякої мережі з п'яти магазинів протягом 30 місяців. Дані з продаж містяться у файлі sales_stores.xls.

4.1 (10 балів) Знайдіть коефіцієнти факторів впливу кожного місяця (Jan, …, Nov) і тренду (Time).

4.2 (10 балів) Побудуйте графіки реальних продаж і їх прогнозів на 1 рік для магазинів 1, 2, 3, 4 та 5.

4.3 (5 балів) Зробіть висновки стосовно отриманих результатів прогностичного аналізу для п'яти магазинів.

Розв'язок:

1) Знайдемо коефіцієнти впливу. Для цього побудую 5 лінійних моделей для кожного з магазинів:

```
import statsmodels.api as sm
import numpy as np

df = pd.read_excel('/content/sales_stores.xlsx', skiprows=2)[:38]

Y_1 = df['STORE_1'].values
Y_2 = df['STORE_2'].values
Y_3 = df['STORE_3'].values
Y_4 = df['STORE_4'].values
Y_5 = df['STORE_5'].values
Y = [Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5]
X = df[['JAN', 'FEB', 'MAR', 'APR', 'MAY', 'JUN', 'JUL', 'AUG', 'SEP', 'OCT', 'NOV', 'TIME']].values
X = sm.add_constant(X)

models = [sm.OLS(y,X).fit() for y in Y]
```

```
for i in range(5):
  print('Summary for model STORE_'+str(i+1))
  print(models[i].summary())
```

```
Summary for model STORE_1
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.908
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.864
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     20.65
Date:                Sun, 11 Oct 2020   Prob (F-statistic):           4.99e-10
Time:                        12:28:54   Log-Likelihood:                -472.37
No. Observations:                  38   AIC:                             970.7
Df Residuals:                      25   BIC:                             992.0
Df Model:                          12
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const       5.594e+05    5.1e+04     10.962      0.000    4.54e+05    6.65e+05
x1         -1.038e+05   5.73e+04     -1.810      0.082   -2.22e+05    1.43e+04
x2         -1.224e+05   5.72e+04     -2.139      0.042    -2.4e+05   -4520.079
x3         -5.866e+04   6.18e+04     -0.948      0.352   -1.86e+05    6.87e+04
x4         -8.364e+04   6.17e+04     -1.356      0.187   -2.11e+05    4.34e+04
x5         -6.948e+04   6.15e+04     -1.130      0.269   -1.96e+05    5.72e+04
x6         -1.062e+05   6.14e+04     -1.731      0.096   -2.33e+05    2.02e+04
x7         -1.507e+05   6.13e+04     -2.460      0.021   -2.77e+05   -2.45e+04
x8         -1.494e+05   6.12e+04     -2.442      0.022   -2.75e+05   -2.34e+04
x9         -1.263e+05   6.11e+04     -2.067      0.049   -2.52e+05    -454.688
x10        -1.211e+05    6.1e+04     -1.984      0.058   -2.47e+05    4584.483
x11        -1.357e+05    6.1e+04     -2.225      0.035   -2.61e+05   -1.01e+04
x12         1.705e+04   1136.589     15.004      0.000    1.47e+04    1.94e+04
==============================================================================
Omnibus:                        2.791   Durbin-Watson:                   0.329
Prob(Omnibus):                  0.248   Jarque-Bera (JB):                2.562
Skew:                           0.571   Prob(JB):                        0.278
Kurtosis:                       2.439   Cond. No.                         290.
==============================================================================
```

```
Summary for model STORE_2
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.939
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.910
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     32.04
Date:                Sun, 11 Oct 2020   Prob (F-statistic):           3.62e-12
Time:                        12:28:54   Log-Likelihood:                -489.59
No. Observations:                  38   AIC:                             1005.
Df Residuals:                      25   BIC:                             1026.
Df Model:                          12
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const       8.588e+05   8.03e+04     10.696      0.000    6.93e+05    1.02e+06
x1         -1.217e+05   9.02e+04     -1.349      0.189   -3.08e+05    6.41e+04
x2         -3.382e+05      9e+04     -3.755      0.001   -5.24e+05   -1.53e+05
x3         -2.975e+05   9.73e+04     -3.057      0.005   -4.98e+05   -9.71e+04
x4         -2.817e+05    9.7e+04     -2.904      0.008   -4.82e+05   -8.19e+04
x5         -4.111e+04   9.68e+04     -0.425      0.675    -2.4e+05    1.58e+05
x6           3.34e+04   9.66e+04      0.346      0.732   -1.65e+05    2.32e+05
x7          3.178e+05   9.64e+04      3.297      0.003    1.19e+05    5.16e+05
x8          3.303e+05   9.62e+04      3.432      0.002    1.32e+05    5.28e+05
x9         -2.075e+05   9.61e+04     -2.159      0.041   -4.05e+05   -9582.660
x10        -1.798e+05    9.6e+04     -1.872      0.073   -3.78e+05     1.8e+04
x11        -2.403e+05    9.6e+04     -2.504      0.019   -4.38e+05   -4.27e+04
x12         2.758e+04   1788.147     15.426      0.000    2.39e+04    3.13e+04
==============================================================================
Omnibus:                        3.698   Durbin-Watson:                   0.810
Prob(Omnibus):                  0.157   Jarque-Bera (JB):                3.041
Skew:                           0.580   Prob(JB):                        0.219
Kurtosis:                       2.243   Cond. No.                         290.
==============================================================================
```

```
Summary for model STORE_3
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.928
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.893
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     26.81
Date:                Sun, 11 Oct 2020   Prob (F-statistic):           2.74e-11
Time:                        12:28:54   Log-Likelihood:                -487.72
No. Observations:                  38   AIC:                             1001.
Df Residuals:                      25   BIC:                             1023.
Df Model:                          12
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const       1.002e+06   7.64e+04     13.106      0.000    8.44e+05    1.16e+06
x1         -1.455e+05   8.59e+04     -1.694      0.103   -3.22e+05    3.14e+04
x2         -1.854e+05   8.57e+04     -2.163      0.040   -3.62e+05   -8896.888
x3         -6.509e+04   9.26e+04     -0.703      0.489   -2.56e+05    1.26e+05
x4         -1.843e+05   9.24e+04     -1.996      0.057   -3.75e+05    5872.233
x5         -1.864e+05   9.21e+04     -2.024      0.054   -3.76e+05    3277.186
x6          -2.89e+05   9.19e+04     -3.144      0.004   -4.78e+05   -9.97e+04
x7         -2.906e+05   9.17e+04     -3.168      0.004    -4.8e+05   -1.02e+05
x8          -2.67e+05   9.16e+04     -2.915      0.007   -4.56e+05   -7.83e+04
x9         -2.794e+05   9.15e+04     -3.054      0.005   -4.68e+05    -9.1e+04
x10        -2.292e+05   9.14e+04     -2.507      0.019   -4.17e+05   -4.09e+04
x11        -2.627e+05   9.14e+04     -2.876      0.008   -4.51e+05   -7.46e+04
x12         2.868e+04   1702.119     16.850      0.000    2.52e+04    3.22e+04
==============================================================================
Omnibus:                        0.416   Durbin-Watson:                   0.420
Prob(Omnibus):                  0.812   Jarque-Bera (JB):                0.572
Skew:                          -0.171   Prob(JB):                        0.751
Kurtosis:                       2.506   Cond. No.                         290.
==============================================================================
```

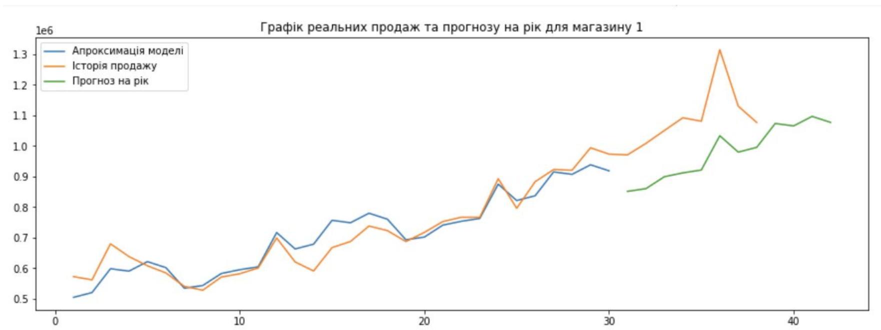
```
Summary for model STORE_4
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.835
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.755
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     10.51
Date:                Sun, 11 Oct 2020   Prob (F-statistic):           5.43e-07
Time:                        12:28:54   Log-Likelihood:                -489.85
No. Observations:                  38   AIC:                             1006.
Df Residuals:                      25   BIC:                             1027.
Df Model:                          12
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const       8.625e+05   8.08e+04     10.671      0.000    6.96e+05    1.03e+06
x1           -8.4e+04   9.08e+04     -0.925      0.364   -2.71e+05    1.03e+05
x2         -1.114e+05   9.07e+04     -1.229      0.231   -2.98e+05    7.53e+04
x3          2.603e+04    9.8e+04      0.266      0.793   -1.76e+05    2.28e+05
x4         -5.482e+04   9.77e+04     -0.561      0.580   -2.56e+05    1.46e+05
x5          -3.61e+04   9.74e+04     -0.371      0.714   -2.37e+05    1.65e+05
x6         -9.361e+04   9.72e+04     -0.963      0.345   -2.94e+05    1.07e+05
x7         -1.204e+05    9.7e+04     -1.241      0.226    -3.2e+05    7.94e+04
x8         -1.325e+05   9.69e+04     -1.368      0.184   -3.32e+05     6.7e+04
x9         -1.861e+05   9.68e+04     -1.924      0.066   -3.85e+05    1.31e+04
x10        -1.159e+05   9.67e+04     -1.199      0.242   -3.15e+05    8.32e+04
x11        -1.456e+05   9.66e+04     -1.507      0.144   -3.45e+05    5.34e+04
x12         1.947e+04   1800.141     10.818      0.000    1.58e+04    2.32e+04
==============================================================================
Omnibus:                        0.989   Durbin-Watson:                   0.252
Prob(Omnibus):                  0.610   Jarque-Bera (JB):                0.957
Skew:                          -0.214   Prob(JB):                        0.620
Kurtosis:                       2.350   Cond. No.                         290.
==============================================================================
```

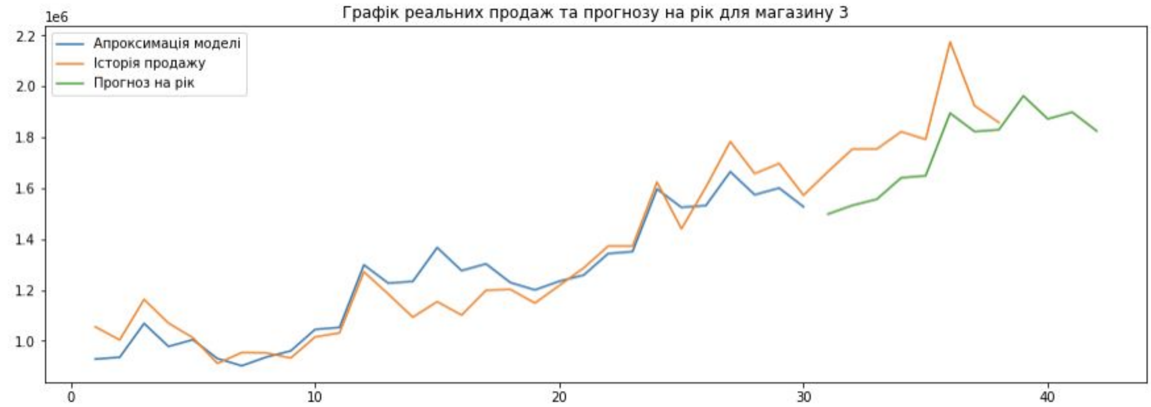
```
Summary for model STORE_5
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.973
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.960
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     75.74
Date:                Sun, 11 Oct 2020   Prob (F-statistic):           1.43e-16
Time:                        12:28:55   Log-Likelihood:                -473.81
No. Observations:                  38   AIC:                             973.6
Df Residuals:                      25   BIC:                             994.9
Df Model:                          12
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const       8.665e+05    5.3e+04     16.349      0.000    7.57e+05    9.76e+05
x1         -2.213e+05   5.95e+04     -3.716      0.001   -3.44e+05   -9.86e+04
x2         -2.974e+05   5.94e+04     -5.004      0.000    -4.2e+05   -1.75e+05
x3         -2.561e+05   6.42e+04     -3.987      0.001   -3.88e+05   -1.24e+05
x4         -2.638e+05    6.4e+04     -4.118      0.000   -3.96e+05   -1.32e+05
x5         -1.947e+05   6.39e+04     -3.048      0.005   -3.26e+05   -6.31e+04
x6            -2e+05    6.37e+04     -3.138      0.004   -3.31e+05   -6.88e+04
x7         -1.035e+05   6.36e+04     -1.626      0.116   -2.35e+05    2.76e+04
x8         -1.762e+04   6.35e+04     -0.277      0.784   -1.48e+05    1.13e+05
x9          -2.82e+05   6.34e+04     -4.444      0.000   -4.13e+05   -1.51e+05
x10        -2.223e+05   6.34e+04     -3.507      0.002   -3.53e+05   -9.18e+04
x11        -2.427e+05   6.34e+04     -3.831      0.001   -3.73e+05   -1.12e+05
x12         3.286e+04   1180.390     27.835      0.000    3.04e+04    3.53e+04
==============================================================================
Omnibus:                        4.185   Durbin-Watson:                   0.971
Prob(Omnibus):                  0.123   Jarque-Bera (JB):                3.808
Skew:                           0.766   Prob(JB):                        0.149
Kurtosis:                       2.759   Cond. No.                         290.
==============================================================================
```

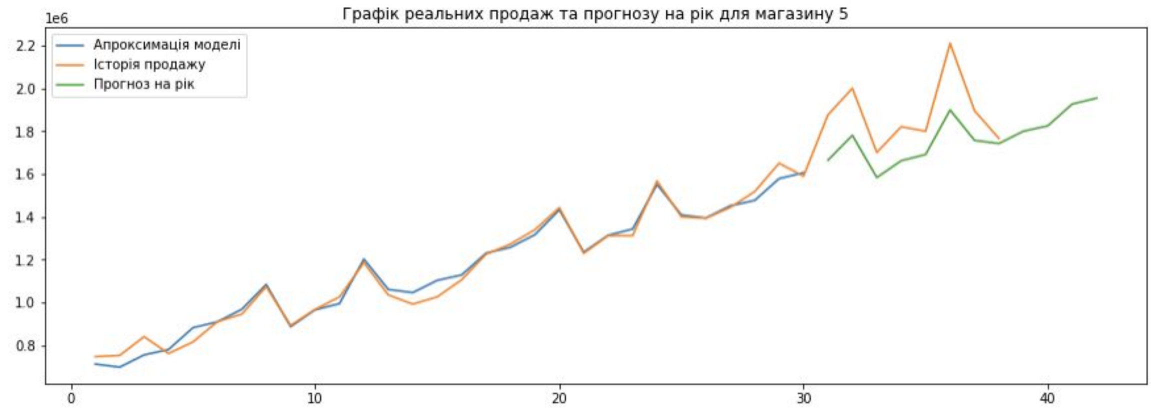
Як ми бачимо, результати для кожного з магазинів є різними, тобто маємо дуже різні параметри в кожній з моделей. Також можемо спостерігати, що деякі параметри є незначущими. Далі побудуємо графіки реальних продажів та прогнозів на рік:

Як ми бачимо, у всіх магазинів спостерігається чіткий тренд до зростання продажів і прогноз показує зберігання цього тренду. Найбільш виражений тренд зростання має магазин 5, що має найбільший показник параметра, що відповідає тренду. Також бачимо вплив сезонності на продажі. Найбільш виражений цей вплив у магазина 2. Ми бачимо, що сезонність впливає на певну волатильність продажів залежно від періоду, що більша в порівнянні з іншими магазинами. Кожен з прогнозів має достатньо хорошу прогностичну силу, на них можна оператися, згідно з показниками R^2. Найкращий показник для модель магазину 5 (0.97), найгірший для магазину 4 (0.83). При чому для магазину 4 можемо бачити з графіку, що проглядається не лінійна природа тренду, через що наша звичайна лінійна модель може дещо бути дещо неточна.

Також був використаний і дещо інший підхід, після уважнішого прочитання умови, і для моделювання було взято тільки перших 8 місяців. Прогноз ж робився на рік, перших 8 місяців якого ми фактично знали реальні значення. Отримали такі результати:







Як бачимо, моделі досить добре показують себе при прогнозуванні, особливо добре показує очікувано модель 5 і 2. Також можемо спостерігати певний занижений прогноз в порівнянні з реальними значеннями.

Завдання 5 (15 балів). Нехай крива попиту для монополіста описується функцією

$$d(p; a, b) = \exp(-a \times p - b),$$

де $a = 0.1$ та $b = -3$.

Функцію загальних витрат менеджмент компанії менеджер оцінив, як

$$TC = 2 + 9 \times Q + 0.1 \times Q^2$$

5.1 (5 балів) Зобразіть графічно функцію залежності прибутку від ціни для даної компанії.

5.2 (5 балів) Знайдіть оптимальну ціну продажу для компанії.

5.3 (5 балів) Компанія роздумує над рекламною активністю вартістю 10. При цьому оцінює, що крива попиту зміститься вправо і буде виражатись формулою

$$d(p; a, b) = \exp(-a \times p - b),$$

де $a = 0.1$ та $b = -3.4$. Яка цінова політика компанії при цьому оптимальна?

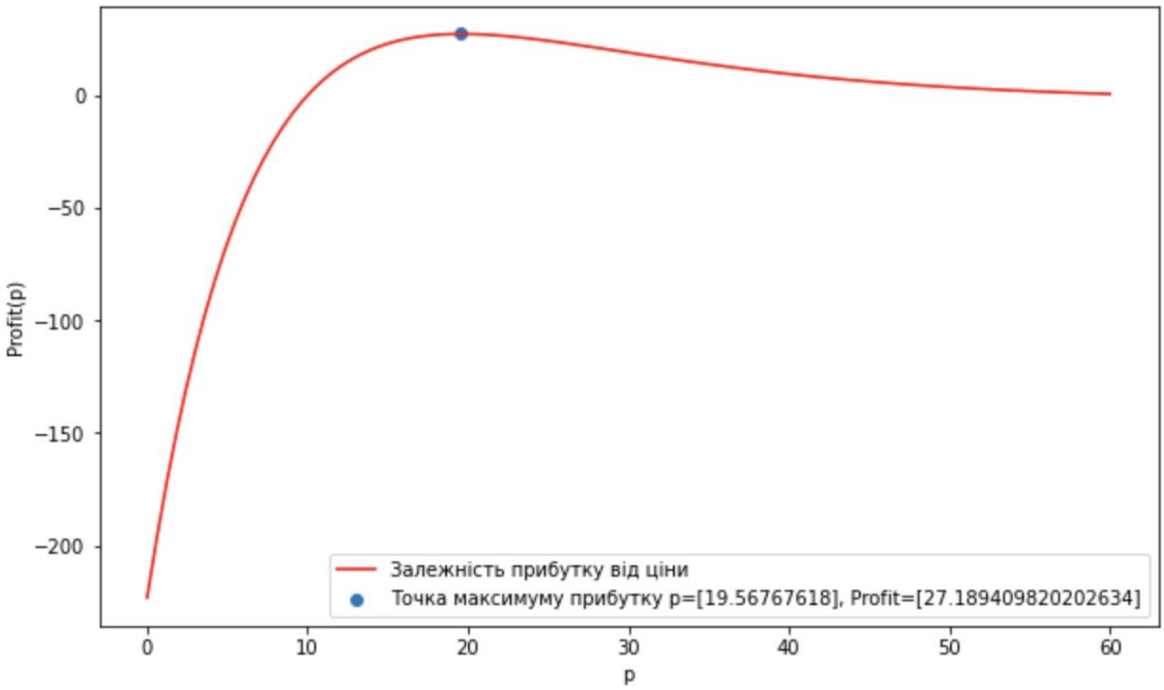
Обґрунтуйте доцільність витрат на цю рекламну кампанію.

<u>Розв'язок:</u>

Запишемо функцію прибутку компанії:

$$Profit(P) = Rev(P) - TC(Q) = P \times Q - (2 + 9 \times Q + 0.1 \times Q^2) =$$
$$= P \times (exp(-a \times p - b)) - (2 + 9 \times (exp(-a \times p - b)) + 0.1 \times (exp(-a \times p - b))^2)$$

де $a = 0.1,\ b = -3$



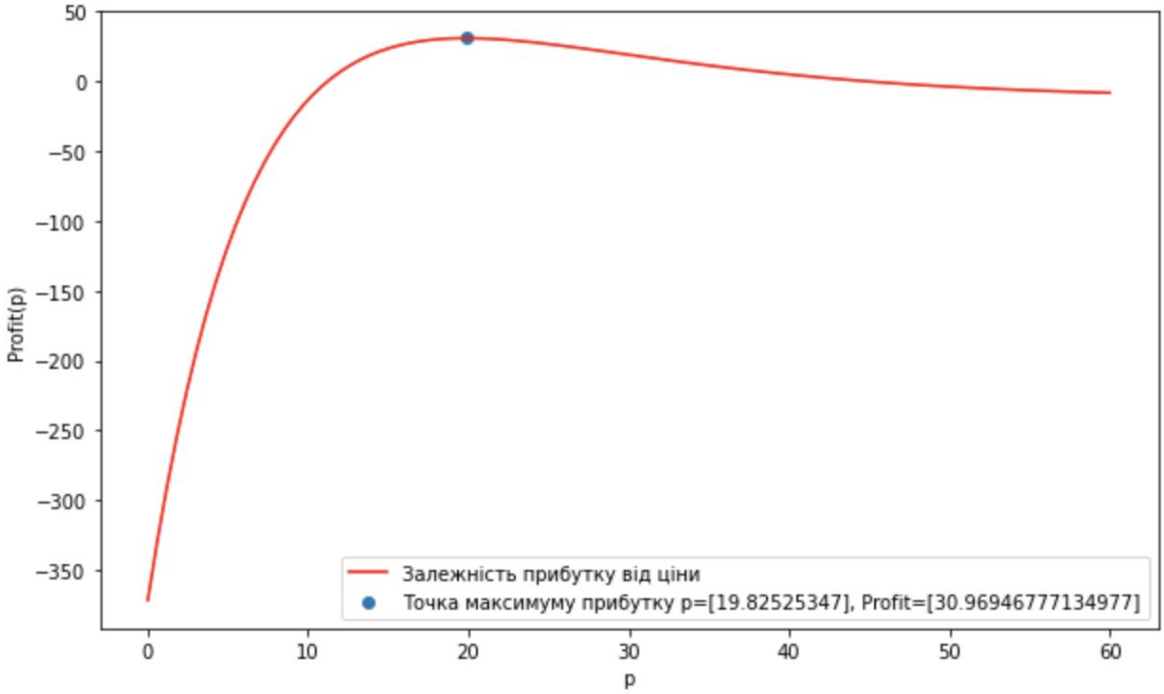
Оптимальна ціна, це та, яка максимізує прибуток компанії. За допомогою Python знайшли таку ціну і зобразили на графіку. $P^* = 19.57$, при такій ціні прибуток компанії буде становити $Profit = 27.19$

Тепер оцінимо оптимальну ціну і прибуток у разі запровадження рекламної компанії ціною 10. Функцію прибутку запишемо у вигляді

$$Profit(P) = Rev(P) - TC(Q) = P \times Q - (10 + 2 + 9 \times Q + 0.1 \times Q^2) =$$

$$= P \times (exp(-a \times p - b)) - (10 + 2 + 9 \times (exp(-a \times p - b)) + 0.1 \times (exp(-a \times p - b))^2)$$

де тепер $a = 0.1,\ b = -3.4$



Як бачимо, тепер оптимальна ціна, це та, яка максимізує прибуток компанії адаптованої функції. За допомогою Python знайшли таку ціну і зобразили на графіку. $P^* = 19.83$, при такій ціні прибуток компанії буде становити $Profit = 30.97$

Як ми можемо бачити, що у разі запровадження рекламної компанії, прибуток зростає на 3.78, або у віцодковому відношенні на 13.9%, тому така рекламна компанія є обгрунтованою.
Код використаний для розв’язку та візуалізації у додаткую.

Завдання 6. (20 балів)

Компанія *J* винайшла новий хімічний препарат, який можна виробляти зі сталими граничними затратами 15 у.о. за одиницю продукції на підприємствах компанії. Дві галузі, А та В, вважають вигідним його (хлоропікрин) використання у своїх виробничих процесах. Можна припустити, що власник патенту *J* користується монопольною владою. Попит галузі А на хлоропікрин записується рівнянням q_A=120−3.6p_A, а для галузі - В: q_B=75−2.8p_B.

6.1 (10 балів) Якщо *J* здатна запобігти перепродажу препарату між галузями А та В, то які ціни вона повинна встановити для кожної з них?

6.2 (10 балів) Які кількості препарату продаватимуться у кожній з галузей і яким буде загальний маржинальний прибуток компанії *J*?

Розв'язок:

Оскільки компанія J користується монопольною владою і може застосовувати для галузей А та В різні ціни (диференційоване ціноутворення), то запишемо функцію маржинального прибутку компанії від реалізації хімічного препарату у галузі А:

$$MProfit_A = Q_A \times P - c \times Q_A = Q_A(P) \times (P - c) = (120 - 3.6P_A) \times (P_A - 15)$$

і у галузі В:

$$MProfit_B = Q_B \times P - c \times Q_B = Q_B(P) \times (P - c) = (75 - 2.8P_B) \times (P_B - 15)$$

Знайшовши похідну функції маржинального прибутку відносно ціни Р у кожній з галузей і прирівнявши її до нуля:

$$MProfit'_A(P) = 120 + 3.6 \times 15 - 7.2P_A = 174 - 7.2P_A = 0$$

$$MProfit'_B(P) = 75 + 2.8 \times 15 - 5.6P_B = 117 - 5.6P_B = 0$$

ми отримаємо значення оптимальної ціни для обох галузей $P^*_A = 24.17$, $P^*_B = 20.89$

Тоді максимальний маржинальний прибуток буде:

$$MProfit^* = (120 - 3.6 \times 24.27) \times (24.27 - 15) + (75 - 2.8 \times 20.89) \times (20.89 - 15) = 399.7 \text{ у.о.}$$

При цьому обсяги продаж препарату в кожній з галузей будуть:

$$Q_A = 120 - 3.6 \times 24.17 = 32.63$$

$$Q_B = 75 - 2.8 \times 20.89 = 16.51$$

Відповідь: $P^*_A = 24.17$, $P^*_B = 20.89$, $MProfit^* = 399.7$ у.о., $Q_A = 32.63$, $Q_B = 16.51$