

МГУ имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

О решении линеаризованной системы двумерной динамики вязкого газа

Назаров Владимир Сергеевич
Аспирант

Москва — 2022

Постановка задачи

Система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \rho f_1, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho f_2, \end{array} \right. \quad (1)$$

описывает нестационарное двумерное движение вязкого баротропного газа. Здесь μ - коэффициент вязкости газа (известная неотрицательная константа), $p = p(\rho)$ - давление газа (в работе рассматривается случай $p = C_p \rho$), $(f_1, f_2)^T$ - вектор внешних сил. Искомые функции, т.е. плотность ρ , скорость u вдоль оси OX , скорость v вдоль оси OY являются функциями переменных Эйлера $(t, x, y) \in [0, T] \times \Omega$.

Линеаризация

Построим линеаризацию в окрестности стационарного состояния $(\rho_{st}, u_{st}, v_{st}) = (\rho_0, 0, 0)$ при нулевой правой части и запишем её с сохранением исходных обозначений. Отметим также, что $C_\rho = p'(\rho_{st})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + C_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + C_\rho \frac{\partial \rho}{\partial y} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right. \quad (2)$$

относительно вектор-функции $\mathbf{w}(t, x, y) = (\rho, u, v)^T$, удовлетворяющей начальным и периодически продолжаемым граничными условиям следующего вида :

$$\begin{aligned} (\rho, u, v)|_{t=0} &= (\rho^0, u^0, v^0), \quad (x, y) \in \Omega = [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]; \\ u(t, x, y)|_{x=0, 2\pi} &= 0, \quad u_y(t, x, y)|_{y=0, 2\pi} = 0, \\ v_x(t, x, y)|_{x=0, 2\pi} &= 0, \quad v(t, x, y)|_{y=0, 2\pi} = 0, \quad t \in [0; T]. \end{aligned} \quad (3)$$

Теоретические результаты

Теорема

Теорема 1 Пусть начальные функции $\rho^0 \in W_2^1(\Omega)$, $u^0, v^0 \in W_2^2(\Omega)$ имеют следующий вид:

$$\rho^0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{mn}^0 \cos \frac{mx}{2} \cos \frac{ny}{2}, \quad u^0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}^0 \sin \frac{mx}{2} \cos \frac{ny}{2}, \quad v^0(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn}^0 \cos \frac{mx}{2} \sin \frac{ny}{2},$$

Пусть $\forall m, n \geq 0$ выполняется $\frac{9C_\rho \rho_0^2}{\mu^2} \neq (m^2 + n^2)$. Тогда решение задачи (2), (3) можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{w}(t, x, y) = \begin{pmatrix} \rho(t, x, y) \\ u(t, x, y) \\ v(t, x, y) \end{pmatrix} = K_0 \bar{v}_0 + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \left(K_l^{nm} \exp(\lambda_l^{nm} t) \bar{v}_l^{nm} \right), \quad (4)$$

$$\text{где } \lambda_1^{mn} = -\frac{\mu(m^2 + n^2)}{4\rho_0}, \quad \lambda_{2,3}^{mn} = \frac{2}{3}\lambda_1^{mn} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\lambda_1^{mn}\right)^2 - \frac{C_\rho(m^2 + n^2)}{4}},$$

$$\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_l^{mn} = \begin{pmatrix} \xi_{l_1}^{mn} \cos \frac{mx}{2} \cos \frac{ny}{2} \\ \xi_{l_2}^{mn} \sin \frac{mx}{2} \cos \frac{ny}{2} \\ \xi_{l_3}^{mn} \cos \frac{mx}{2} \sin \frac{ny}{2} \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, 3;$$

$$\xi_l^{mn} = (\xi_{l_1}^{mn}, \xi_{l_2}^{mn}, \xi_{l_3}^{mn})^T, \quad \xi_1^{mn} = (0, n, -m)^T, \quad \xi_{2,3}^{mn} = (\lambda_{3,2}, -\frac{mC_\rho}{2\rho_0}, -\frac{nC_\rho}{2\rho_0})^T.$$

Здесь $K_0 = P_{00}^0$, а коэффициенты $(K_1^{mn}, K_2^{mn}, K_3^{mn})^T$, $m + n > 0$, однозначно восстанавливаются из условий

$$\sum_{l=1}^3 K_l^{nm} \xi_l^{mn} = (P_{mn}^0, C_{mn}^0, D_{mn}^0)^T.$$

Теорема

В условиях теоремы 1 верна оценка:

$$\|\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}_{st}\|_{L_2(\Omega)} \leq \mathcal{A}e^{\delta t} \|\mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_{st}\|_{L_2(\Omega)}, \text{ где}$$

$$\delta = \max\left\{-\frac{\mu}{6\rho_0}, -\frac{\mu k_1^2}{6\rho_0} + \frac{\mu k_1^2}{6\rho_0} \sqrt{1 - \frac{9C_\rho \rho_0^2}{\mu^2 k_1^2}}, -\frac{3C_\rho \rho_0}{4\mu}\right\}, \text{ при } k_1 = \min(k) :$$

$$k^2 \geq \frac{9C_\rho \rho_0^2}{\mu^2}.$$

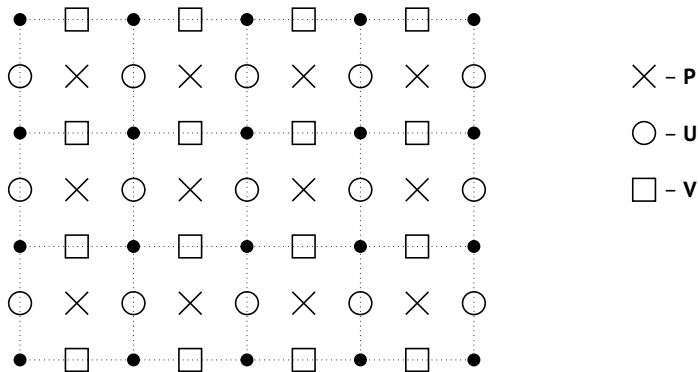
$$\text{Здесь } \mathbf{w}_{st} = (p_{st}, u_{st}, v_{st}), p_{st} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p^0 dx dy = K_0, u_{st} = 0, v_{st} = 0.$$

Конечно-разностная аппроксимация

Для решения исходной задачи будем использовать полностью неявную схему

$$\begin{cases} P_t + \rho_0 \hat{U}_x + \rho_0 \hat{V}_y = 0, \\ \rho_0 U_t + C_\rho \hat{P}_{\bar{x}} = \mu \left(\frac{4}{3} \hat{U}_{x\bar{x}} + \hat{U}_{y\bar{y}} + \frac{1}{3} \hat{V}_{xy} \right), \\ \rho_0 V_t + C_\rho \hat{P}_{\bar{y}} = \mu \left(\frac{4}{3} \hat{V}_{y\bar{y}} + \hat{V}_{x\bar{x}} + \frac{1}{3} \hat{U}_{xy} \right), \end{cases} \quad (5)$$

построенную на смещенных сетках В.И. Лебедева:



Численные результаты

Общая картина динамики выхода на стационар решений дифференциальных задач для начальных возмущений типа скачков скорости

$$\rho_1^0(x, y) = 1, \quad 0 \leq x, y \leq 2\pi, \quad u_1^0(x, y) = v_1^0(x, y) = \begin{cases} 1 & 4\pi/5 \leq x, y \leq 6\pi/5, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

и скачок плотности

$$\rho_2^0(x, y) = \begin{cases} 2 & 4\pi/5 \leq x, y \leq 6\pi/5, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \quad u_2^0(x, y) = v_2^0(x, y) = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 2\pi.$$

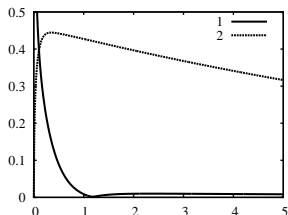


Рис. 1. Графики функций $\|(u_i(t), v_i(t))\|_{L_2(\Omega)}$ при $\mu = C_\rho = 1, \rho_0 = 0, 1$.

$i=1$ — скачок скорости; $i=2$ — скачок плотности.

Наличие аналитических формул для решения позволяет объяснить данный эффект. В Табл. 1,2 приведены приближенные значения старших коэффициентов $K_2^{mn}, m, n = 0, 1, 2$, при разложении указанных начальных возмущений.

Скачок плотности. Табл. 1.

K_2^{mn}	n=0	n=1	n=2
m=0	0.08206	0.01525	-0.13711
m=1	-0.01275	-0.00194	0.01525
m=2	0.00000	-0.01275	0.08206

Скачок скорости. Табл. 2.

K_2^{mn}	n=0	n=1	n=2
m=0	0.00014	-0.00052	-0.00023
m=1	0.00230	0.00034	-0.00052
m=2	0.00000	0.00230	0.00014

Спасибо за внимание!