МГУ имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

О решении линеаризованной системы двумерной динамики вязкого газа

Выполнил аспирант
Назаров Владимир Сергеевич

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор **Корнев Андрей Алексеевич**

Современные проблемы математики и ее приложений
Международная (53-я Всероссийская) молодежная школа-конференция
31 января – 4 февраля 2022 г., г. Екатеринбург

Система уравнений

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\
\dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho uv}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu\Big(\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\Big) + \rho f_1, \\
\dfrac{\partial \rho v}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho uv}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = \mu\Big(\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 v}{\partial^2 y}\Big) + \rho f_2,
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

описывает нестационарное двумерное движение вязкого баротропного газа. Здесь μ - коэффициент вязкости газа (известная неотрицательная константа), $p = p(\rho)$ - давление газа (в работе рассматривается случай $p = C_\rho \rho$), $(f_1, f_2)^T$ - вектор внешних сил. Искомые функции, т.е. плотность ρ, скорость u вдоль оси OX, скорость v вдоль оси OY являются функциями переменных Эйлера $(t,\ x,\ y) \in [0,\ T] \times \Omega$.

Построим линеаризацию в окрестности стационарного состояния $(\rho_{st}, u_{st}, v_{st}) = (\rho_0, 0, 0)$ при нулевой правой части и запишем её с сохранением исходных обозначений. Отметим также, что $C_\rho = p'(\rho_{st})$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} + C_\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \mu \Big(\dfrac{4}{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Big), \\ \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} + C_\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \mu \Big(\dfrac{4}{3} \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big) \end{cases} \tag{2}$$

относительно вектор-функции $\mathbf{w}(t, x, y) = (\rho, u, v)^T$, удовлетворяющую начальным и периодически продолжаемым граничными условиям следующего вида:

$$\begin{gathered} (\rho, u, v)|_{t=0} = (\rho^0, u^0, v^0),\ (x,\ y) \in \Omega = [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]; \\ u(t,\ x,\ y)|_{x=0,2\pi} = 0,\ u_y(t,\ x,\ y)|_{y=0,2\pi} = 0, \\ v_x(t,\ x,\ y)|_{x=0,2\pi} = 0,\ v(t,\ x,\ y)|_{y=0,2\pi} = 0,\ t \in [0;\ T]. \end{gathered} \tag{3}$$

Теоретические результаты

Теорема 1

Пусть начальные функции $\rho^0 \in W_2^1(\Omega)$, $u^0, v^0 \in W_2^2(\Omega)$ *имеют следующий вид:*

$$\rho^0(x,y) = \sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty} P^0_{mn} \cos\tfrac{mx}{2}\cos\tfrac{ny}{2},\ u^0(x,y) = \sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty} C^0_{mn}\sin\tfrac{mx}{2}\cos\tfrac{ny}{2},\ v^0(x,y) = \sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty} D^0_{mn}\cos\tfrac{mx}{2}\sin\tfrac{ny}{2}.$$

Пусть $\forall m, n \geq 0$ *выполняется* $\frac{9C_\rho\rho_0^2}{\mu^2} \neq (m^2+n^2)$. *Тогда решение задачи (2), (3) можно представить в следующей форме:*

$$\mathbf{w}(t,x,y) = \begin{pmatrix}\rho(t,x,y)\\ u(t,x,y)\\ v(t,x,y)\end{pmatrix} = K_0 \bar{\ }_0 + \sum_{\substack{m,n=0\\m+n>0}}^{\infty}\sum_{l=1}^{3}\left(K_l^{nm}\exp(\lambda_l^{nm}t)\bar{\ }_l^{nm}\right), \qquad (4)$$

$$\text{где } \lambda_1^{mn} = -\frac{\mu(m^2+n^2)}{4\rho_0}, \quad \lambda_{2,3}^{mn} = \frac{2}{3}\lambda_1^{mn} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\lambda_1^{mn}\right)^2 - \frac{C_\rho(m^2+n^2)}{4}},$$

$$\bar{\ }_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \bar{\ }_l^{mn} = \begin{pmatrix}\xi_{l_1}^{mn}\cos\frac{mx}{2}\cos\frac{ny}{2}\\ \xi_{l_2}^{mn}\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{ny}{2}\\ \xi_{l_3}^{mn}\cos\frac{mx}{2}\sin\frac{ny}{2}\end{pmatrix}, \quad l = 1,2,3;$$

$$\xi_l^{mn} = \left(\xi_{l_1}^{mn}, \xi_{l_2}^{mn}, \xi_{l_3}^{mn}\right)^T, \quad \xi_1^{mn} = (0, n, -m)^T, \quad \xi_{2,3}^{mn} = (\lambda_{3,2}, -\frac{mC_\rho}{2\rho_0}, -\frac{nC_\rho}{2\rho_0})^T.$$

Здесь $K_0 = P^0_{00}$ *, а коэффициенты* $(K_1^{mn}, K_2^{mn}, K_3^{mn})^T$, $m+n>0$, *однозначно восстанавливаются из начальных условий* $\sum_{l=1}^{3} K_l^{nm}\xi_l^{mn} = (P^0_{mn}, C^0_{mn}, D^0_{mn})^T$.

Теорема 2

В условиях теоремы 1 верна оценка:
$\|\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}_{st}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{A}e^{\delta t}\|\mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_{st}\|_{L_2(\Omega)}$, *где*
$\delta = \max\{-\frac{\mu}{6\rho_0},\ -\frac{\mu k_1^2}{6\rho_0} + \frac{\mu k_1^2}{6\rho_0}\sqrt{1 - \frac{9C_\rho \rho_0^2}{\mu^2 k_1^2}}, -\frac{3C_\rho \rho_0}{4\mu}\}$, *при* $k_1 = \min(k) : k^2 \geq \dfrac{9C_\rho \rho_0^2}{\mu^2}$.
Здесь

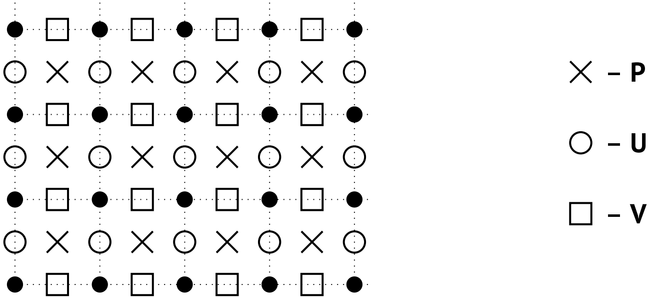
$$\mathbf{w}_{st} = (p_{st},\, u_{st},\, v_{st}),\ p_{st} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p^0 dxdy = K_0,\ u_{st} = 0,\ v_{st} = 0.$$

Конечно–разностная аппроксимация

Для решения исходной задачи будем использовать полностью неявную схему

$$
\begin{cases}
P_t + \rho_0 \hat{U}_x + \rho_0 \hat{V}_y = 0, \\
\rho_0 U_t + C_\rho \hat{P}_{\bar{x}} = \mu\left(\frac{4}{3}\hat{U}_{x\bar{x}} + \hat{U}_{y\bar{y}} + \frac{1}{3}\hat{V}_{xy}\right), \\
\rho_0 V_t + C_\rho \hat{P}_{\bar{y}} = \mu\left(\frac{4}{3}\hat{V}_{y\bar{y}} + \hat{V}_{x\bar{x}} + \frac{1}{3}\hat{U}_{xy}\right),
\end{cases} \tag{5}
$$

построенную на смещенных сетках В.И. Лебедева:



Общая картина динамики выхода на стационар решений дифференциальных задач для начальных возмущений типа скачок скорости

$$p_1^0(x,y) = 1, \quad 0 \le x, y \le 2\pi, \quad u_1^0(x,y) = v_1^0(x,y) = \begin{cases} 1 & 4\pi/5 \le x, y \le 6\pi/5, \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$$

и скачок плотности

$$p_2^0(x,y) = \begin{cases} 2 & 4\pi/5 \le x, y \le 6\pi/5, \\ 1 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad u_2^0(x,y) = v_2^0(x,y) = 0, \quad 0 \le x, y \le 2\pi.$$

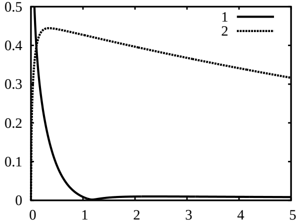


Рис. 1. Графики функций $\|(u_i(t), v_i(t)\|_{L_2(\Omega)}$ при $\mu = C_\rho = 1, \rho_0 = 0,1$.
i=1 — скачок скорости; *i=2* — скачок плотности.

Скачок плотности. Табл. 1.

K_2^{mn}	n=0	n=1	n=2
m=0	0.08206	0.01525	-0.13711
m=1	-0.01275	-0.00194	0.01525
m=2	0.00000	-0.01275	0.08206

Скачок скорости. Табл. 2.

K_2^{mn}	n=0	n=1	n=2
m=0	0.00014	-0.00052	-0.00023
m=1	0.00230	0.00034	-0.00052
m=2	0.00000	0.00230	0.00014

Наличие аналитических формул для решения позволяет объяснить данный эффект. В Табл. 1,2 приведены приближенные значения старших коэффициентов K_2^{mn}, $m, n = 0, 1, 2$, при разложении указанных начальных возмущений.

Спасибо за внимание!