МГУ имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

О решении линеаризованной системы двумерной динамики вязкого газа

Назаров Владимир Сергеевич
Аспирант

Москва — 2022

Постановка задачи

Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho uv}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu\Big(\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\Big) + \rho f_1, \\ \dfrac{\partial \rho v}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho uv}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = \mu\Big(\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 v}{\partial^2 y}\Big) + \rho f_2, \end{cases} \tag{1}$$

описывает нестационарное двумерное движение вязкого баротропного газа. Здесь μ - коэффициент вязкости газа (известная неотрицательная константа), $p = p(\rho)$ - давление газа (в работе рассматривается случай $p = C_\rho \rho$), $(f_1, f_2)^T$ - вектор внешних сил. Искомые функции, т.е. плотность ρ, скорость u вдоль оси OX, скорость v вдоль оси OY являются функциями переменных Эйлера $(t,\ x,\ y) \in [0,\ T] \times \Omega$.

Линеаризация

Построим линеаризацию в окрестности стационарного состояния $(\rho_{st}, u_{st}, v_{st}) = (\rho_0, 0, 0)$ при нулевой правой части и запишем её с сохранением исходных обозначений. Отметим также, что $C_\rho = p'(\rho_{st})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} + C_\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \mu\Big(\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\Big), \\ \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} + C_\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \mu\Big(\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big) \end{cases} \tag{2}$$

относительно вектор-функции $\mathbf{w}(t, x, y) = (\rho, u, v)^T$, удовлетворяющей начальным и периодически продолжаемым граничными условиям следующего вида :

$$\begin{gathered} (\rho, u, v)|_{t=0} = (\rho^0, u^0, v^0),\ (x,\ y) \in \Omega = [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]; \\ u(t,\ x,\ y)|_{x=0,2\pi} = 0,\ u_y(t,\ x,\ y)|_{y=0,2\pi} = 0, \\ v_x(t,\ x,\ y)|_{x=0,2\pi} = 0,\ v(t,\ x,\ y)|_{y=0,2\pi} = 0,\ t \in [0;\ T]. \end{gathered} \tag{3}$$

Теоретические результаты

Теорема

Теорема 1 Пусть начальные функции $\rho^0 \in W_2^1(\Omega)$, $u^0, v^0 \in W_2^2(\Omega)$ имеют следующий вид:

$\rho^0(x, y) = \sum\limits_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty} P_{mn}^0 \cos\frac{mx}{2}\cos\frac{ny}{2},\ u^0(x, y) = \sum\limits_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty} C_{mn}^0 \sin\frac{mx}{2}\cos\frac{ny}{2},\ v^0(x, y) = \sum\limits_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty} D_{mn}^0 \cos\frac{mx}{2}\sin\frac{ny}{2},$

Пусть $\forall m, n \geq 0$ *выполняется* $\frac{9C_\rho\rho_0^2}{\mu^2} \neq (m^2 + n^2)$. *Тогда решение задачи (2), (3) можно представить в следующей форме:*

$$\mathbf{w}(t, x, y) = \begin{pmatrix} \rho(t, x, y) \\ u(t, x, y) \\ v(t, x, y) \end{pmatrix} = K_0 \bar{\ }_0 + \sum_{\substack{m,n=0\\m+n>0}}^{\infty} \sum_{l=1}^{3} \left(K_l^{nm} \exp(\lambda_l^{nm} t) \bar{\ }_l^{nm} \right), \tag{4}$$

$$\text{где } \lambda_1^{mn} = -\frac{\mu(m^2+n^2)}{4\rho_0}, \quad \lambda_{2,3}^{mn} = \frac{2}{3}\lambda_1^{mn} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\lambda_1^{mn}\right)^2 - \frac{C_\rho(m^2+n^2)}{4}},$$

$$\bar{\ }_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\ }_l^{mn} = \begin{pmatrix} \xi_{l_1}^{mn} \cos\frac{mx}{2}\cos\frac{ny}{2} \\ \xi_{l_2}^{mn} \sin\frac{mx}{2}\cos\frac{ny}{2} \\ \xi_{l_3}^{mn} \cos\frac{mx}{2}\sin\frac{ny}{2} \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, 3;$$

$$\xi_l^{mn} = \left(\xi_{l_1}^{mn}, \xi_{l_2}^{mn}, \xi_{l_3}^{mn}\right)^T, \quad \xi_1^{mn} = (0, n, -m)^T, \quad \xi_{2,3}^{mn} = (\lambda_{3,2}, -\frac{mC_\rho}{2\rho_0}, -\frac{nC_\rho}{2\rho_0})^T.$$

Здесь $K_0 = P_{00}^0$ *, а коэффициенты* $(K_1^{mn}, K_2^{mn}, K_3^{mn})^T$*,* $m + n > 0$*, однозначно восстанавливаются из условий*
$\sum\limits_{l=1}^{3} K_l^{nm}\xi_l^{mn} = (P_{mn}^0, C_{mn}^0, D_{mn}^0)^T.$

Теорема

В условиях теоремы 1 верна оценка:

$\|\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}_{st}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{A}e^{\delta t}\|\mathbf{w}(0)-\mathbf{w}_{st}\|_{L_2(\Omega)}$, *где*

$\delta = \max\{-\frac{\mu}{6\rho_0},\ -\frac{\mu k_1^2}{6\rho_0}+\frac{\mu k_1^2}{6\rho_0}\sqrt{1-\frac{9C_\rho\rho_0^2}{\mu^2k_1^2}}, -\dfrac{3C_\rho\rho_0}{4\mu}\}$, *при* $k_1=\min(k)$:

$k^2 \geq \dfrac{9C_\rho\rho_0^2}{\mu^2}$.

Здесь $\mathbf{w}_{st}=(p_{st},\, u_{st},\, v_{st})$, $p_{st}=\dfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}p^0dxdy=K_0,\ u_{st}=0,\ v_{st}=0.$