1　べき乗法の大雑把な説明

ある正方行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D\times D}$ について、その固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_D \in \mathbb{R}$, 対応する固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_D \in \mathbb{R}^D$, とします。ここで、固有値はその絶対値が大きいものの順に並び替えてあるとします。すなわち $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_D|$ です。定義より、全ての $d \in \{1, \ldots, D\}$ について $\mathbf{A}\mathbf{u}_d = \lambda_d \mathbf{u}_d$ です。

ここで、ランダムに選んだベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ について、$\mathbf{A}$ を左から k 回乗じたものを $\mathbf{y}_k$ とします。

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x} \tag{1}$$

ここで、k が十分に大きいとき、絶対値最大の固有値 λ_1 は次の式で近似されます。これをべき乗法と呼びます。

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{y}_k^\top \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_k^\top \mathbf{y}_{k-1}} \tag{2}$$

2　大雑把な証明

証明は以下です。固有ベクトルは独立なので、適当な数 $c_1, c_2, \ldots, c_D \in \mathbb{R}$ を用いて、任意のベクトル $\mathbf{x}$ は次のように表されます

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_D\mathbf{u}_D \tag{3}$$

これに左から $\mathbf{A}$ を k 回乗じます

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{A}^k\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{u}_2 + \cdots + c_D\mathbf{A}^k\mathbf{u}_D \tag{4}$$

固有値固有ベクトルの定義より、これは次のようになります

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\lambda_1^k\mathbf{u}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{u}_2 + \cdots + c_D\lambda_D^k\mathbf{u}_D \\ &= \lambda_1^k\left(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}_2 + \cdots + c_D\left(\frac{\lambda_D}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}_D\right)\end{aligned} \tag{5}$$

ここで、k が十分に大きいとき、1 以外の全ての d について $\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_1}\right)^k$ は 0 に収束するため、$\mathbf{u}_2$ 以下の項は無視できます。さて、ここで $\mathbf{y}_k$ を $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ と定義します。以上をまとめると次のようになります。

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\lambda_1^k\mathbf{u}_1 \tag{6}$$

これを Eq. 2 の右辺に代入すると、左辺に等しくなります。証明終わり。