1.4. Cực trị của hàm nhiều biến

1.4.1. Cực trị địa phương, phương pháp tìm cực trị địa phương

Định nghĩa. Cho hàm số n biến $f(x_1, x_2,..., x_n)$ xác định trên tập mở D(f)$\subset\mathbf{R}^n$. điểm. Chúng ta nói rằng hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực trị địa phương tại điểm $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) \in D(f)$ nếu với mọi điểm $M(x_1, x_2,..., x_n)$ trong một lân cận nào đó của điểm M_0 nhưng khác M_0 và hiệu số $f(x_1, x_2,..., x_n) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ có dấu không đổi.

Nếu $f(x_1, x_2,..., x_n) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) > 0$ thì hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực tiểu địa phương tại điểm M_0, khi đó $f_{ct} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$; còn nếu $f(x_1, x_2,..., x_n) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) < 0$ thì hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực đại địa phương tại điểm M_0, đó $f_{cđ} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$.

Ví dụ **1.25.** Tìm cực trị của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x,y) = -x^2 - 2x + 14 + 6y - y^2$

(b) $z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

(c) $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 8$

(d) $u = f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$

Bài giải.

(a) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = -x^2 - 2x + 14 + 6y - y^2$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Vì $f(x,y) = -x^2 - 2x + 14 + 6y - y^2 = -(x + 1)^2 - (y - 3)^2 + 24 < 24 = f(-1,3)$ với $\forall(x,y) \neq (-1,3)$ nên theo định nghĩa thì hàm số $f(x,y) = -x^2 - 2x + 14 + 6y - y^2$ có cực đại địa phương tại điểm $(-1,3)\in D(f)$ và giá trị cực đại này là $f_{cđ} = f(-1,3) = 24$.

(b) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Vì $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y = (x - 3/2)^2 + (y - 3)^2 + xy - 45/4$ nên chưa thể xác định được cực trị của hàm số này bằng cách đơn giản như ở (a).

(c) Tập xác định của hàm số $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 8$ là $D(f) = \mathbf{R}^3$.

Vì $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 8 = (x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 + 3 > 3 = f(-1,0,2)$ với $\forall(x,y,z) \neq (-1,0,2)$ nên theo định nghĩa thì hàm số $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 8$ có cực tiểu địa phương tại điểm $(-1,0,2)\in D(f)$ và giá trị cực tiểu này là $f_{ct} = f(-1,0,2) = 3$.

(d) Tập xác định của hàm số $f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ là

$$D(f) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$$

Việc xác định cực trị của hàm số này không thể thực hiện được bằng cách đơn giản như ở (c).

Nhận xét. Không phải bài toán tìm cực trị của hàm số nào cũng giải được đơn giản như đối với các hàm số (a) và (c) trong Ví dụ 1.25.

Điều kiện cần của cực trị địa phương. Nếu hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ xác định trên tập mở D(f)$\in\mathbf{R}^n$, có cực trị địa phương tại điểm $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ thì tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của nó bằng không tại điểm đó, tức là $f'_{x_i}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) = 0$ $(1 \le i \le n)$.

Điểm mà tại đó, tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$, bằng không được gọi là điểm tới hạn hay điểm dừng.

- Đối với hàm số 2 biến z = f(x,y) xác định trên tập mở D(f)$\in\mathbf{R}^2$, có cực trị địa phương tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$ thì tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của nó bằng không tại điểm đó, tức là $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

- Đối với hàm số 3 biến $u = f(x,y,z)$ xác định trên tập mở $D(f)\in\mathbf{R}^3$, có cực trị địa phương tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D(f)$ thì tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của nó bằng không tại điểm đó, tức là
$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0,z_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0,z_0)=0 \\ f'_z(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}.$$

Trước khi nêu điều kiện đủ của cực trị địa phương, chúng ta định nghĩa Dạng toàn phương và phát biểu Định lý Sylvester trong Đại số.

Dạng toàn phương

Giả sử $x = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ là ma trận cấp $(1\times n)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp $(n\times n)$ đối xứng ($a_{ij} = a_{ji}$ với $\forall i,j$).

Biểu thức $\omega(x_1,x_2,\dots,x_n) = xAx^t$ (x^t là ma trận chuyển vị của ma trận x) được gọi là dạng toàn phương của n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$; còn ma trận đối xứng A được gọi là ma trận tương ứng của dạng toàn phương $\omega(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Vì ma trận A là ma trận đối xứng nên sau khi thực hiện phép nhân 3 ma trận trên chúng ta được
$$\omega(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_ix_j .$$

Như vậy, nếu cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ là một ma trận vuông đối xứng cấp $(n\times n)$ thì chúng ta xác định được một dạng toàn phương $\omega(x_1,x_2,\dots,x_n)$ bằng công thức trên; ngược lại, nếu cho một dạng toàn phương thì chúng ta xác định được một ma trận A tương ứng là ma trận đối xứng cấp $(n\times n)$.

Ví dụ về việc xác định dạng toàn phương nếu biết ma trận tương ứng của nó

(a) Xác định dạng toàn phương $\omega(x_1,x_2)$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ tương ứng.

(b) Xác định dạng toàn phương $\omega(x_1,x_2,x_3)$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ tương ứng.

Bài giải.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 3 \\ a_{12} = 6 \\ a_{22} = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \omega(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{2} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le 2} 2a_{ij}x_ix_j = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2.6x_1x_2 = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 12x_1x_2 .$$

(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -2 \\ a_{22} = 0 \\ a_{33} = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} a_{12} = 4 \\ a_{13} = 3 \\ a_{23} = -5 \end{cases}$

$\Rightarrow \omega(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le 3} 2a_{ij}x_i x_j = -2x_1^2 + 0.x_2^2 + 1.x_3^2 + 2.4x_1x_2 + 2.3x_1x_3 + 2.(-5)x_2x_3 =$

$-2x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3.$

Ví dụ về việc xác định ma trận tương ứng của dạng toàn phương đã biết

(a) Xác định ma trận A tương ứng của dạng toàn phương $\omega(x_1, x_2) = 5x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$.

(b) Xác định ma trận A tương ứng của dạng toàn phương
$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2 + 5x_1x_3 - 3x_2x_3$.

Bài giải.

(a) $\omega(x_1, x_2) = 5x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 = 5x_1^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)x_1x_2 - x_2^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2 + 5x_1x_3 - 3x_2x_3 =$

$x_1^2 - 4x_2^2 + 0.x_3^2 + 2.1.x_1x_2 + 2.\frac{5}{2}x_1x_3 + 2.\left(-\frac{3}{2}\right)x_2x_3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5/2 \\ 1 & -4 & -3/2 \\ 5/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$

Dạng toàn phương được gọi là:

(1) *xác định dương* nếu $\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 0$ với $\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ và $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq (0,0,\ldots,0)$;

(2) *xác định âm* nếu $\omega(x_1,x_2, \ldots,x_n) < 0$ với $\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ và $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq (0,0,\ldots,0)$;

(3) *không xác định dấu* (không xác định dương cũng không xác định âm) nếu $\omega(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ đổi dấu;

(4) *suy biến* nếu $\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ khi $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq (0,0,\ldots,0)$.

Định lý Sylvester.

Xét dạng toàn phương $\omega(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_i x_j$

có ma trận tương ứng $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng.

Ký hiệu $A_k = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & & a_{kk} \end{pmatrix}$ với $1 \le k \le n$ là các định thức con chính của ma trận A.

Khi đó

(1) $\omega(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ xác định dương $\Leftrightarrow A_k > 0$ với $\forall k$ $(1 \le k \le n)$,

(2) $\omega(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ xác định âm $\Leftrightarrow A_k < 0$ với $\forall k$ lẻ và $A_k > 0$ với $\forall k$ chẵn $(1 \le k \le n)$.

Định lý. *Dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương đều dương; dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương: có cấp lẻ đều âm và có cấp chẵn đều dương.*

Điều kiện đủ của cực trị địa phương. Nếu hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ xác định trên tập mở D(f)∈$\mathbf{R}^n$, có tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trong một lân cận nào đó của điểm dừng $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) \in D(f)$, thì vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ tại điểm M_0

$$d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}.dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}.dx_n\right)^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i^2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})dx_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2f''_{x_i x_j}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})dx_i dx_j$$

là dạng toàn phương của các biến dx_1, dx_2, ..., dx_n.

Khi đó:

(1) Nếu $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ xác định âm thì hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực đại địa phương tại điểm M_0; còn nếu $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ xác định dương thì hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực tiểu địa phương tại điểm M_0;

(2) Nếu $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ không xác định dấu thì hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ không có cực trị tại điểm M_0;

(3) Nếu $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ suy biến, tức là tồn tại dx_1, dx_2, ..., dx_n không đồng thời bằng 0 nhưng $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) = 0$, thì chưa thể kết luận được hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực trị địa phương tại điểm M_0 hay không, mà phải giải bài toán bằng cách khác.

Đối với các hàm số 2 biến z = f(x,y) xác định trên tập mở D(f)∈$\mathbf{R}^2$, có tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trên D(f), để tìm cực trị địa phương của nó, căn cứ vào điều kiện cần và đủ để hàm số nhiều biến có cực trị địa phương đã trình bày ở trên, chúng ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Tìm tập xác định D(f).

Bước 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số f(x,y): $\begin{cases} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{cases}$ và tìm các điểm dừng (x^*,y^*) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \\ (x,y) \in D(f) \end{cases}$.

Bước 3. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số f(x,y): $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) \\ f''_{y^2}(x,y) \end{cases}$ và suy ra vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y) tại điểm (x,y): $d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2$.

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y) tại mỗi điểm (x^*,y^*):

$d^2f(x^*,y^*) = f''_{x^2}(x^*,y^*)dx^2 + 2f''_{xy}(x^*,y^*)dxdy + f''_{y^2}(x^*,y^*)dy^2$ là dạng toàn phương của 2 biến dx, dy. Khi đó:

(1) Nếu $d^2f(x^*,y^*)$ xác định dương thì hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*) và ⇒ $f_{ct} = f(x^*,y^*)$; còn nếu $d^2f(x^*,y^*)$ xác định âm thì hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*) và ⇒ $f_{cđ} = f(x^*,y^*)$.

(2) Nếu $d^2f(x^*,y^*)$ không xác định dấu thì hàm số f(x,y) không có cực trị tại điểm (x^*,y^*).

(3) Nếu $d^2f(x^*,y^*)$ suy biến, tức là tồn tại dx và dy không đồng thời bằng không, nhưng $d^2f(x^*,y^*) = 0$, thì chưa thể kết luận được hàm số f(x,y) có cực trị tại điểm (x^*,y^*) hay không, mà phải giải bài toán bằng cách khác.

Đối với các hàm số 3 biến z = f(x,y,z) xác định trên tập mở D(f)∈$\mathbf{R}^3$, có tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trên D(f), để tìm cực trị địa phương của nó, căn cứ vào điều kiện cần và đủ để hàm số nhiều biến có cực trị địa phương đã trình bày ở trên, chúng ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Tìm tập xác định D(f).

Bước 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số f(x,y,z): $\begin{cases} f'_x(x,y,z) \\ f'_y(x,y,z) \\ f'_z(x,y,z) \end{cases}$ và tìm các điểm dừng (x^*,y^*,z^*) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y,z)=0 \\ f'_y(x,y,z)=0 \\ f'_z(x,y,z)=0 \\ (x,y,z)\in D(f) \end{cases}$.

Bước 3. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số f(x,y,z): $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y,z) \\ f''_{y^2}(x,y,z) \\ f''_{z^2}(x,y,z) \end{cases}$, $\begin{cases} f''_{xy}(x,y,z) \\ f''_{yz}(x,y,z) \\ f''_{zx}(x,y,z) \end{cases}$ và suy ra vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y,z) là

$$d^2f(x,y,z) = f''_{x^2}(x,y,z)dx^2 + f''_{y^2}(x,y,z)dy^2 + f''_{z^2}(x,y,z)dz^2 +$$
$$2f''_{xy}(x,y,z)dxdy + 2f''_{yz}(x,y,z)dydz + 2f''_{zx}(x,y,z)dzdx \text{ với } \forall(x,y,z)\in D(f).$$

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y,z) tại mỗi điểm (x^*,y^*,z^*):

$$d^2f(x^*,y^*,z^*) = f''_{x^2}(x^*,y^*,z^*)dx^2 + f''_{y^2}(x^*,y^*,z^*)dy^2 + f''_{z^2}(x^*,y^*,z^*)dz^2 +$$
$$2f''_{xy}(x^*,y^*,z^*)dxdy + 2f''_{yz}(x^*,y^*,z^*)dydz + 2f''_{zx}(x^*,y^*,z^*)dzdx$$

là dạng toàn phương của 3 biến dx, dy, dz. Khi đó:

(1) Nếu $d^2f(x^*,y^*,z^*)$ xác định dương thì hàm số f(x,y,z) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*,z^*) và giá trị cực tiểu của hàm số tại điểm này là $f_{ct} = f(x^*,y^*,z^*)$; còn nếu $d^2f(x^*,y^*,z^*)$ xác định âm thì hàm số f(x,y,z) có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*,z^*) và giá trị cực đại của hàm số tại điểm này là $f_{cđ} = f(x^*,y^*,z^*)$.

(2) Nếu $d^2f(x^*,y^*,z^*)$ không xác định dấu thì hàm số f(x,y,z) không có cực trị tại điểm (x^*,y^*,z^*).

(3) Nếu $d^2f(x^*,y^*,z^*)$ suy biến, tức là tồn tại dx, dy và dz không đồng thời bằng không, nhưng $d^2f(x^*,y^*,z^*) = 0$, thì chưa thể kết luận được hàm số f(x,y,z) có cực trị tại điểm (x^*,y^*,z^*) hay không, mà phải giải bài toán bằng cách khác.

Ví dụ **1.26.** Tìm cực trị của các hàm số trong Ví dụ 1.25. bằng cách sử dụng điều kiện cần và đủ vừa trình bày ở trên.

Bài giải.

Bây giờ, chúng ta sử dụng điều kiện cần và đủ vừa trình bày ở trên để tìm cực trị của các hàm số (b) và (d); còn các hàm số (a) và (c) sinh viên tự giải bằng phương pháp này, sau đó so sánh kết quả với kết quả đã nhận được ở Ví dụ 1.25.

(b) Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 – 3x – 6y$

Bước 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 – 3x – 6y$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Bước 2. Tính $\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial(x^2+xy+y^2-3x-6y)}{\partial x} = 2x+y-3 \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial(x^2+xy+y^2-3x-6y)}{\partial y} = x+2y-6 \end{cases}$

Điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$

$\Rightarrow (x^*,y^*) = (0,3)\in D(f)$.

Bước 3. Tính $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(2x+y-3)}{\partial x} = 2 \\ f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2x+y-3)}{\partial y} = 1 \\ f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(x+2y-6)}{\partial y} = 2 \end{cases}$

Do đó, vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ tại điểm (x,y) là

$d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2 = 2dx^2 + 2.1dxdy + 2dy^2$ với $\forall(x,y)\in D(f)$.

Bước 4. Từ kết quả trên, chúng ta có $d^2f(0,3) = 2dx^2 + 2.1dxdy + 2dy^2$ là dạng toàn phương của các biến dx, dy có ma trận tương ứng là $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ma trận A có các định thức con chính $A_1 = \det(2) = 2 > 0$, $A_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$ nên dạng toàn phương tương ứng là xác định dương, do đó $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ giá trị cực tiểu tại điểm (0,3) và giá trị cực tiểu của hàm số tại điểm này là

$$f_{ct} = f(0,3) = (x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y)\Big|_{(x,y)=(0,3)} = 0^2 + 0.3 + 3^2 - 3.0 - 6.3 = -9.$$

(d) Tìm cực trị của hàm số $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$

Bước 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ là

$$D(f) = \{(x,y,z) \in R^3 \big| x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Bước 2. Tính $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}\right) = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} \\ f'_y(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}\right) = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} \\ f'_z(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}\right) = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} \end{cases}$

Điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 0 \\ f'_y(x,y,z) = 0 \\ f'_z(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0 \\ \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{y}{2x}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{y}{2x} - \left(\dfrac{z}{y}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{z}{y} - \dfrac{1}{z^2} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = z = 1 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \in D(f).$$

Bước 3. Tính $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_x(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(1 - \dfrac{y^2}{4x^2}\right) = \dfrac{y^2}{2x^3} \\ f''_{y^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_y(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2}\right) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{2z^2}{y^3} \\ f''_{z^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_z(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2}\right) = \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z^3} \end{cases}$

và $\begin{cases} f''_{xy}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_x(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1 - \dfrac{y^2}{4x^2}\right) = -\dfrac{y}{2x^2} \\ f''_{yz}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_y(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2}\right) = -\dfrac{2z}{y^2} \\ f''_{zx}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_z(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2}\right) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow d^2f(x,y,z) = f''_{x^2}(x,y,z)dx^2 + f''_{y^2}(x,y,z)dy^2 + f''_{z^2}(x,y,z)dz^2 +$

$2f''_{xy}(x,y,z)dxdy + 2f''_{yz}(x,y,z)dydz + 2f''_{zx}(x,y,z)dzdx$ với $\forall(x,y,z) \in D(f)$.

Bước 4. Tại điểm $(x^*, y^*, z^*) = (1/2,1,1)$ chúng ta có

$\begin{cases} f''_{x^2}(1/2,1,1) = \left.\dfrac{y^2}{2x^3}\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = 4 \\ f''_{y^2}(1/2,1,1) = \left.\left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2z^2}{y^3}\right)\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = 3 \\ f''_{z^2}(1/2,1,1) = \left.\left(\dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z^3}\right)\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = 6 \end{cases}$ và $\begin{cases} f''_{xy}(1/2,1,1) = -\left.\dfrac{y}{2x^2}\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = -2 \\ f''_{yz}(1/2,1,1) = -\left.\dfrac{2z}{y^2}\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = -2 \\ f''_{zx}(1/2,1,1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow d^2f(1/2,1,1) = f''_{x^2}(1/2,1,1)dx^2 + f''_{y^2}(1/2,1,1)dy^2 + f''_{y^2}(1/2,1,1)dz^2 +$

$2f''_{xy}(1/2,1,1)dxdy + 2f''_{yz}(1/2,1,1)dydz + 2f''_{zx}(1/2,1,1)dzdx =$

$4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 + 2.(-2)dxdy + 2.(-2)dydz + 2.0dzdx$ là dạng toàn phương của các biến dx, dy, dz có ma trận tương ứng là $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Ma trận A có các định thức con chính

$A_1 = \det(4) = 4 > 0$, $A_2 = \det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 8 > 0$, $A_3 = \det\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 32 > 0$ nên dạng toàn phương tương ứng là xác định dương, do đó hàm số f(x,y,z) có cực tiểu tại điểm $(1/2,1,1)$ và giá trị cực tiểu của hàm số tại điểm này là $f_{ct} = f(1/2,1,1) = \left.\left(x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}\right)\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1^2}{4.(1/2)} + \dfrac{1^2}{1} + \dfrac{2}{1} = 4.$

Lưu ý. Chỉ đối với hàm số 2 biến z = f(x,y), về phương diện thực hành, để đơn giản, chúng ta thực hiện việc tìm cực trị của hàm số f(x,y) như sau.

Giả sử (x^*, y^*) là điểm dừng của hàm số f(x,y), ký hiệu $\begin{cases} f''_{x^2}(x^*, y^*) \equiv A \\ f''_{xy}(x^*, y^*) \equiv B \\ f''_{y^2}(x^*, y^*) \equiv C \end{cases}$ thì dạng toàn phương

$d^2f(x^*, y^*) = f''_{x^2}(x^*, y^*)dx^2 + 2f''_{xy}(x^*, y^*)dxdy + f''_{y^2}(x^*, y^*)dy^2 = Adx^2 + 2Bdxdy + Bdy^2$ có ma trận tương ứng là $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Ma trận $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ có hai định thức con chính là $\det(A) = A$ và $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 \equiv -\Delta$.

(1) Khi $\Delta < 0$ thì hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*) nếu $A > 0$, hoặc có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*) nếu $A < 0$.

(2) Khi $\Delta > 0$ thì hàm số f(x,y) không có cực trị tại điểm (x^*,y^*).

(3) Khi $\Delta = 0$ thì hàm số f(x,y) có thể có hoặc không có cực trị tại điểm (x^*,y^*), tức là chưa thể kết luận được hàm số f(x,y) có cực trị tại điểm (x^*,y^*) hay không, mà phải giải bài toán bằng cách khác.

Bước 1. Tìm tập xác định D(f).

Bước 2. Tìm các điểm dừng (x^*,y^*) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \\ (x, y) \in D(f) \end{cases}$.

Bước 3. Tính $\begin{cases} f''_{x^2}(x, y) = A(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) = B(x, y) \Rightarrow \Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) \\ f''_{y^2}(x, y) = C(x, y) \end{cases}$ với $\forall(x,y) \in D(f)$.

Bước 4. Tại mỗi điểm (x^*,y^*)

Giá trị		**Kết luận**
$\Delta(x^*,y^*)$	**$A(x^*,y^*)$**	
< 0	> 0	(x^*,y^*) là điểm cực tiểu địa phương và $f_{ct} = f(x^*,y^*)$
	< 0	(x^*,y^*) là điểm cực đại địa phương và $f_{cđ} = f(x^*,y^*)$
> 0		(x^*,y^*) không phải là điểm cực trị
= 0		Giải bài toán bằng cách khác

Ví dụ **1.27.** Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$.

Bài giải. Chúng ta dùng cách tìm cực trị của hàm số 2 biến f(x,y) vừa trình bày ở trên để giải bài toán này.

Bước 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y) = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Bước 2. Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x, y) = 16x - 2(2x^2 + y^2 + 1)4x = 8x - 16x^3 - 8xy^2 = 8x(1 - 2x^2 - y^2) \\ f'_y(x, y) = 6y - 2(2x^2 + y^2 + 1)2y = 2y - 8x^2y - 4y^3 = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2) \end{cases}$

Nên các điểm dừng (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ 2y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$ hệ thỏa mãn, hệ có 1 nghiệm là $(x_1, y_1) = (0,0)$.

+ Trường hợp 2. $\begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-y^2) = 0 \\ y(1-4x^2-2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-2y^2 = 0 \end{cases}$ hệ có 2 nghiệm là $(x_2, y_2) = (0, -1/\sqrt{2})$, $(x_3, y_3) = (0, 1/\sqrt{2})$.

+ Trường hợp 3. $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-y^2) = 0 \\ y(1-4x^2-2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hệ có 2 nghiệm là $(x_4, y_4) = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $(x_5, y_5) = (1/\sqrt{2}, 0)$.

+ Trường hợp 4. $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-y^2) = 0 \\ y(1-4x^2-2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x^2-y^2 = 0 \\ 1-4x^2-2y^2 = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Như vậy, hàm số có 5 điểm dừng $(x_1, y_1) = (0,0)$, $(x_2, y_2) = (0, -1/\sqrt{2})$, $(x_3, y_3) = (0, 1/\sqrt{2})$, $(x_4, y_4) = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $(x_5, y_5) = (1/\sqrt{2}, 0)$ đều thuộc D(f).

Bước 3. Tính $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(8x-16x^3-8xy^2)}{\partial x} = 8-48x^2-8y^2 = A(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(8x-16x^3-8xy^2)}{\partial y} = -16xy = B(x,y) \\ f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2y-8x^2y-4y^3)}{\partial y} = 2-8x^2-12y^2 = C(x,y) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) = (-16xy)^2 - (8-48x^2-8y^2)(2-8x^2-12y^2) =$
$16(1-10x^2-7y^2+56x^2y^2+24x^4+6y^4)$ với $\forall(x,y) \in D(f)$.

Bước 4.

1.Tại điểm $(x_1, y_1) = (0,0)$

$\Delta(0,0) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(0,0)} = 16 > 0 \Rightarrow (x_1, y_1) = (0,0)$ không phải là điểm cực trị.

2. Tại điểm $(x_2, y_2) = (0, -1/\sqrt{2})$

$\begin{cases} \Delta(0,-1/\sqrt{2}) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(0,-1/\sqrt{2})} = -16 < 0 \\ A(0,-1/\sqrt{2}) = A(x,y)\big|_{(x,y)=(0,-1/\sqrt{2})} = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_2, y_2) = (0, -1/\sqrt{2})$ là điểm cực tiểu địa phương và $f_{ct} = f(x,y)\big|_{(x,y)=(0,-1/\sqrt{2})} = f(0, -1/\sqrt{2}) = 1/4$.

3. Tại điểm $(x_3, y_3) = (0, 1/\sqrt{2})$

$\begin{cases} \Delta(0,1/\sqrt{2}) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(0,1/\sqrt{2})} = -16 < 0 \\ A(0,1/\sqrt{2}) = A(x,y)\big|_{(x,y)=(0,1/\sqrt{2})} = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_3, y_3) = (0, 1/\sqrt{2})$ là điểm cực tiểu địa phương và $f_{ct} = f(x,y)\big|_{(x,y)=(0,1/\sqrt{2})} = f(0, 1/\sqrt{2}) = 1/4$.

4. Tại điểm $(x_4, y_4) = (-1/\sqrt{2}, 0)$

$\Delta(-1/\sqrt{2}, 0) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(-1/\sqrt{2},0)} = 16 > 0 \Rightarrow (x_4, y_4) = (-1/\sqrt{2}, 0)$ không phải là điểm cực trị.

5. Tại điểm $(x_4, y_4) = (1/\sqrt{2}, 0)$

$\Delta(1/\sqrt{2}, 0) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(1/\sqrt{2},0)} = 16 > 0 \Rightarrow (x_5, y_5) = (1/\sqrt{2}, 0)$ không phải là điểm cực trị.

1.4.2. Cực trị có điều kiện

Bài toán tìm cực trị của hàm số nhiều biến ở phần trên là tìm cực trị của hàm số không có điều kiện, tức là không có điều kiện ràng buộc nào giữa các biến của hàm số cần tìm giá trị cực đại hoặc giá trị cực tiểu hoặc cả giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số. Tuy nhiên, trong ứng dụng thực tế, chúng ta thường gặp các bài toán tìm cực trị của một hàm số với *điều kiện ràng buộc nào đó giữa các biến,* các bài toán này được gọi là bài toán tìm cực trị có điều kiện.

Thông thường, có hai cách giải quyết bài toán tìm cực trị có điều kiện. *Cách thứ nhất*: Nếu từ điều kiện ràng buộc đã cho giữa các biến mà có thể biểu diễn tường minh và duy nhất một biến qua các biến còn lại thì có thể đưa bài toán tìm cực trị có điều kiện về bài toán tìm cực trị không có điều kiện với *số biến giảm xuống một.* Tuy nhiên, không phải bao giờ cũng làm được như vậy, khi đó chúng ta sử dụng *Cách thứ hai*: Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để đưa bài toán tìm cực trị có điều kiện về bài toán tìm cực trị không có điều kiện với *số biến tăng lên một.*

Ví dụ **1.28.** Khi sản xuất hộp đựng sữa, để tiết kiệm chi phí bao bì, người ta cần phải giải quyết bài toán: Tìm hình trụ tròn có thể tích lớn nhất trong các hình trụ tròn có cùng diện tích toàn phần S không đổi.

Bài giải.

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ tròn tương ứng là $h > 0$ và $r > 0$.

Khi đó, chu vi ($C_đ$) và diện tích đáy ($S_đ$) của hình trụ tròn là $C_đ = \pi.2r = 2\pi r$ và $S_đ = \pi r^2$ và diện tích xung quanh (S_{xq}) của hình trụ tròn là $S_{xq} = h\times C_đ = h.2\pi r = 2\pi hr$, suy ra diện tích toàn phần (S_{tp}) và thể tích (V) của hình trụ tròn là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi hr + 2\pi r^2 = 2\pi(h + r)r = S$ và $V = h\times S_đ = h.\ \pi r^2 = \pi hr^2$.

Như vậy, bài toán cần giải quyết là: Tìm giá trị cực đại của hàm số 2 biến $V(h,r) \equiv \pi hr^2$ với điều kiện ràng buộc giữa các biến $h > 0$ và $r > 0$ là $2\pi(h + r)r = S$ (S là hằng số dương).

Bây giờ chúng ta sử dụng Cách thứ nhất để giải bài toán này. Từ điều kiện $2\pi(h + r)r = S$ (S là hằng số) chúng ta biểu diễn tường minh được biến h qua biến r, cụ thể là $h = \frac{S}{2\pi r} - r$, tiếp theo, thay giá trị h này vào biểu thức của V(r,h) chúng ta được $V(h,r) = \pi\left(\frac{S}{2\pi r} - r\right)r^2 = \frac{S}{2}r - \pi r^3 \equiv f(r)$.

Chúng ta có $f'(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{S}{2}r - \pi r^3\right) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$ nên điểm dừng của hàm số f(r) là nghiệm của phương trình $f'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$. Phương trình $\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$ với điều kiện $r > 0$ có nghiệm $r_0 = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} > 0$ là điểm dừng của hàm số f(r) $\Rightarrow h_0 = \frac{S}{2\pi r_0} - r_0 = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2r_0 > 0$.

Chúng ta có $f''(r) = \frac{df'(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{S}{2} - 3\pi r^2\right) = -6\pi r \Rightarrow f''(r_0) = -6\pi r\big|_{r=r_0} = -6\pi r_0 < 0$ nên hàm số f(r) có cực đại tại $r_0 = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \Rightarrow f_{cđ} = f(r_0) = \left(\frac{S}{2}r - \pi r^3\right)\Big|_{r=r_0} = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$.

Như vậy, hình trụ tròn có chiều cao bằng đường kính đáy của nó là hình trụ tròn có thể tích lớn nhất trong các hình trụ tròn có cùng diện tích toàn phần.

Phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến

Bài toán. Tìm cực trị của hàm số n biến $f(x_1, x_2,..., x_n)$ xác định trên tập mở $D(f)\subset\mathbf{R}^n$ và các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bị ràng buộc bởi điều kiện $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$.

Nhà toán học Lagrange đã giải bài toán này như sau.

Bước 1. Tìm tập xác định D(f) của hàm số n biến $f(x_1, x_2,..., x_n)$ và lập hàm số Lagrange (n + 1) biến $L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \lambda g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, trong đó λ (được gọi là nhân tử Lagrange) là tham số chưa xác định.

Bước 2. Tìm các điểm $(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*) \in D(f)$ và λ^* tương ứng, là nghiệm $(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*, \lambda^*)$ của hệ (n + 1) phương trình:

$$\begin{cases} L'_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n,\lambda) = f'_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n) + \lambda g'_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \\ L'_{\lambda}(x_1,x_2,...,x_n,\lambda) = g(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \qquad\qquad (1 \le i \le n) \\ (x_1,x_2,...,x_n) \in D(f) \end{cases}$$

Bước 3. Với mỗi λ^* tìm được ở Bước 2 thì hàm số $L(x_1,x_2,...,x_2,\lambda^*)$ là hàm số n biến $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ và tiếp theo, tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số này tại điểm $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$

$$d^2L\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}.dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}.dx_n\right)^2 L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L''_{x_ix_j}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)dx_idx_j = \sum_{i=1}^{n} L''_{x_i^2}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)dx_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2L''_{x_ix_j}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)dx_idx_j$$

là dạng toàn phương của n biến dx_1, dx_2, ..., dx_n.

Tiếp theo, chúng ta xét dấu của dạng toàn phương $d^2L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)$, có hai trường hợp xảy ra:

- Trường hợp thứ nhất. Nếu dạng toàn phương $d^2L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)$ xác định dương, hoặc xác định âm thì kết luận: Hàm số $f(x_1,x_2,...,x_n)$ có cực tiểu địa phương tại điểm $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ và $f_{ct} = f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$, hoặc hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ có cực đại địa phương tại điểm $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ và $f_{cđ} = f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$. Bài toán được giải xong.

- Trường hợp thứ hai. Dạng toàn phương $d^2L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)$ không xác định dấu thì thực hiện sang Bước 4.

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số $g(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$

$$dg(x_1,x_2,...,x_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} g'_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n)dx_i = 0 \text{ với } \forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D(f)$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} g'_{x_i}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)dx_i = 0$, vì $g'_{x_i}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ $(1 \le i \le n)$ là các hằng số, nên từ đẳng thức này có thể biểu diễn tường minh, chẳng hạn biến dx_i qua các biến còn lại $dx_1, dx_2,\dots, dx_{i-1}, dx_{i+1},\dots, dx_n$ là $dx_i = \varphi(dx_1,dx_2,\dots,dx_{i-1},dx_{i+1},\dots,dx_n)$.

Bước 5. Thay $dx_i = \varphi(dx_1,dx_2,\dots,dx_{i-1},dx_{i+1},\dots,dx_n)$ vào $d^2L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)$, sau đó xét dấu của biểu thức nhận được là dạng toàn phương $d^2L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)$ của (n–1) biến $dx_1, dx_2,\dots, dx_{i-1}, dx_{i+1}, \dots, dx_n$

TT	$d^2L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda^*)$	**Kết luận**
1	> 0	Hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ có cực tiểu địa phương tại điểm $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ và $f_{ct} = f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$
2	< 0	Hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ có cực đại địa phương tại điểm $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ và $f_{cđ} = f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$
3	Không xác định dấu	Hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ không có cực trị tại điểm $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$

Về mặt thực hành, chúng ta trình bày Phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện của hàm số 2 biến f(x,y) như sau.

Bài toán. Tìm cực trị của hàm số z = f(x,y) xác định trên tập mở $D(f)\subset\mathbf{R}^2$ và các biến x, y bị ràng buộc bởi điều kiện g(x,y) = 0.

Bước 1. Tìm tập xác định D(f) của hàm số f(x,y) và lập hàm số Lagrange 3 biến $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, trong đó λ (được gọi là nhân tử Lagrange) là tham số chưa xác định.

Bước 2. Tìm các điểm $(x^*,y^*)\in D(f)$ và λ^* tương ứng, là nghiệm (x^*,y^*,λ^*) của hệ 3 phương trình

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 \\ (x,y) \in D(f) \end{cases}$$

Hệ phương trình này có thể vô nghiệm, có nghiệm (1 nghiệm hay nhiều nghiệm). Trong trường hợp hệ vô nghiệm, chúng ta kết luận là hàm số f(x,y) không có cực trị và bài toán giải xong. Trong trường hợp hệ có nghiệm thì chúng ta thực hiện Bước 3.

Bước 3. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số L(x,y,λ) khi coi λ là hằng số

$$d^2L(x,y,\lambda) = L''_{x^2}(x,y,\lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy + L''_{y^2}(x,y,\lambda)dy^2 =$$

$$\frac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial x}dx^2 + 2\frac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial y}dxdy + \frac{\partial L'_y(x,y,\lambda)}{\partial y}dy^2$$

Với mỗi nghiệm (x^*,y^*,λ^*) chúng ta có

$$d^2L(x^*,y^*,\lambda^*) = L''_{x^2}(x^*,y^*,\lambda^*)dx^2 + 2L''_{xy}(x^*,y^*,\lambda^*)dxdy + L''_{y^2}(x^*,y^*,\lambda^*)dy^2$$

TT	$d^2L(x^*,y^*,\lambda^*)$	Kết luận	Ghi chú
1	Xác định dương	Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{ct} = f(x^*,y^*)$	Bài toán giải xong
2	Xác định âm	Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{cd} = f(x^*,y^*)$	
3	Không xác định dấu	Thực hiện Bước 4	

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số g(x,y): $dg(x,y) = g'_x(x,y)dx + g'_y(x,y)dy = 0$ $\forall(x,y)\in D(f)$ $\Rightarrow g'_x(x^*,y^*)dx + g'_y(x^*,y^*)dy = 0$. Vì $g'_x(x^*,y^*)$ và $g'_y(x^*,y^*)$ là các hằng số, nên từ đẳng thức này có thể biểu diễn tường minh, chẳng hạn dy qua dx là $dy = -\frac{g'_x(x^*,y^*)}{g'_y(x^*,y^*)}dx$ nếu $g'_y(x^*,y^*) \neq 0$.

Thay $dy = -\frac{g'_x(x^*,y^*)}{g'_y(x^*,y^*)}dx$ vào dạng toàn phương $d^2L(x^*,y^*,\lambda^*)$ và xét dấu của biểu thức này

TT	$d^2L(x^*,y^*,\lambda^*)$	Kết luận
1	Xác định dương	Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{ct} = f(x^*,y^*)$
2	Xác định âm	Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{cd} = f(x^*,y^*)$
3	Không xác định dấu	Hàm số f(x,y) không có cực trị tại điểm (x^*,y^*)

Ví dụ **1.29.** Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 4$.

Bài giải.

Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y là $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Bước 1. Lập hàm số Lagrange $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

Bước 2. Chúng ta có $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 2x - 2 + 2\lambda x \\ L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 2y - 2 + 2\lambda y \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$

Hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2+2\lambda x=0 \\ 2y-2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda+1)x=1 \\ (\lambda+1)y=1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ có 2 nghiệm

$\begin{cases} (x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}/2) \\ (x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1+\sqrt{2}/2) \end{cases}$ trong đó $\begin{cases} (x_1^*, y_1^*) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \in D(f) \\ (x_2^*, y_2^*) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in D(f) \end{cases}$

Bước 3. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ khi coi λ là hằng số

Chúng ta có $\begin{cases} L''_{x^2}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{\partial(2x-2+2\lambda x)}{\partial x} = 2+2\lambda \\ L''_{xy}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2x-2+2\lambda x)}{\partial y} = 0 \\ L''_{y^2}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_y(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2y-2+2\lambda y)}{\partial y} = 2+2\lambda \end{cases}$ với $\forall(x,y)\in D(f)$

$\Rightarrow d^2L(x,y,\lambda) = L''_{x^2}(x,y,\lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy + L''_{y^2}(x,y,\lambda)dy^2 =$

$(2+2\lambda)dx^2 + 2.0.dxdy + (2+2\lambda)dy^2 = 2(1+\lambda)dx^2 + 2(1+\lambda)dy^2$ với $\forall(x,y)\in D(f)$

1. Khi $(x,y,\lambda) = (x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}/2)$

$d^2L(x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx^2 + 2(1+\lambda_1^*)dy^2 = -\sqrt{2}dx^2 - \sqrt{2}dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_1^*) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_1^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_1^*) = \det(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0$, $A_2(\lambda_1^*) = \det\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow dL^2(x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*)$ xác định âm, do đó hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ có cực đại địa phương tại điểm $(x,y) = (x_1^*, y_1^*) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ và $f_{cd} = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (x^2+y^2-2x-2y+1)\big|_{(x,y)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})} = 5+4\sqrt{2}.$

2. Khi $(x,y,\lambda) = (x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1+\sqrt{2}/2)$

$d^2L(x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = 2(1+\lambda_2^*)dx^2 + 2(1+\lambda_2^*)dy^2 = \sqrt{2}dx^2 + \sqrt{2}dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_2^*) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_2^*)$ có các định thức con chính

$A(\lambda_2^*) = \det(\sqrt{2}) = \sqrt{2} > 0$, $A_2(\lambda_2^*) = \det\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow dL^2(x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*)$ xác định dương, do đó hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ có cực tiểu địa phương tại điểm $(x,y) = (x_2^*, y_2^*) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ và $f_{ct} = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (x^2+y^2-2x-2y+1)\big|_{(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{2})} = 5-4\sqrt{2}.$

Nhận xét. Ở Ví dụ này, bài toán đã được giải mà chưa cần thực hiện Bước 4.

Ví dụ **1.30.** Tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y) = (x+2y)^2 - (x-y)^2$ với điều kiện $(x+2y)^2 + (x-y)^2 = 9$.

Bài giải.

Tập xác định của hàm số $f(x,y) = (x+2y)^2 - (x-y)^2$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y là $g(x,y) = (x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9 = 0$.

Lưu ý. Chúng ta không nên biến đổi biểu thức của hàm số f(x,y) và điều kiện g(x,y) về dạng tổng của các số hạng vì muốn giữ nguyên các nhóm biến (x + 2y), (x – y) để việc giải hệ phương trình khi xác định điểm dừng được thuận lợi.

Bước 1. Lập hàm số Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = (x+2y)^2 - (x-y)^2 + \lambda[(x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9]$$

Bước 2. Chúng ta có

$$L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) =$$

$$\frac{\partial[(x+2y)^2 - (x-y)^2]}{\partial x} + \lambda\frac{\partial[(x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9]}{\partial x} = 2(\lambda+1)(x+2y) + 2(\lambda-1)(x-y)$$

$$L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) =$$

$$\frac{\partial[(x+2y)^2 - (x-y)^2]}{\partial y} + \lambda\frac{\partial[(x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9]}{\partial y} = 4(\lambda+1)(x+2y) - 2(\lambda-1)(x-y)$$

$$L'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = (x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9$$

Hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\lambda+1)(x+2y) + 2(\lambda-1)(x-y) = 0 \\ 4(\lambda+1)(x+2y) - 2(\lambda-1)(x-y) = 0 \\ (x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (\lambda+1)(x+2y) + (\lambda-1)(x-y) = 0 \\ 2(\lambda+1)(x+2y) - (\lambda-1)(x-y) = 0 \\ (x+2y)^2 + (x-y)^2 = 9 \end{cases}$$

Để giải hệ phương trình này, chúng ta đổi biến phụ $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - y \end{cases}$, khi đó hệ phương trình này trở thành $\begin{cases} (\lambda+1)u + (\lambda-1)v = 0 \\ 2(\lambda+1)u - (\lambda-1)v = 0 \\ u^2 + v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda+1)u = 0 \\ (\lambda-1)v = 0 \\ u^2 + v^2 = 9 \end{cases}$. Từ hai phương trình $\begin{cases} (\lambda+1)u = 0 \\ (\lambda-1)v = 0 \end{cases}$ suy ra u và v không thể đồng thời khác 0, còn từ phương trình $u^2 + v^2 = 9$ suy ra u và v không thể đồng thời bằng 0. Do đó, chỉ có thể có 2 trường hợp:

Trường hợp 1. $u = 0 \Rightarrow 0^2 + v^2 = 9 \Leftrightarrow v^2 = 9 \Leftrightarrow v = \pm 3 \neq 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, khi đó hệ phương trình $\begin{cases} (\lambda+1)u = 0 \\ (\lambda-1)v = 0 \\ u^2 + v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = \pm 3 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y = \pm 3 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \mp 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$.

Trường hợp 2. $v = 0 \Rightarrow u^2 + 0^2 = 9 \Leftrightarrow u^2 = 9 \Leftrightarrow u = \pm 3 \neq 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$, khi đó hệ phương trình $\begin{cases} (\lambda+1)u = 0 \\ (\lambda-1)v = 0 \\ u^2 + v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \pm 3 \\ v = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = \pm 3 \\ x - y = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$.

Như vậy, hệ phương trình trên có 4 nghiệm

$\begin{cases} (x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = (-1,-1,-1) \\ (x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = (1,1,-1) \\ (x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*) = (-2,1,1) \\ (x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*) = (2,-1,1) \end{cases}$ trong đó, cả 4 điểm dừng $\begin{cases} (x_1^*, y_1^*) = (-1,-1) \\ (x_2^*, y_2^*) = (1,1) \\ (x_3^*, y_3^*) = (-2,1) \\ (x_4^*, y_4^*) = (2,-1) \end{cases}$ đều thuộc D(f).

Bước 3. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số

$L(x,y,\lambda) = (x+2y)^2 - (x-y)^2 + \lambda[(x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9]$ khi coi λ là hằng số

Chúng ta có

$$\begin{cases} L''_{x^2}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{\partial[2(\lambda+1)(x+2y)+2(\lambda-1)(x-y)]}{\partial x} = 4\lambda \\ L''_{xy}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial[2(\lambda+1)(x+2y)+2(\lambda-1)(x-y)]}{\partial y} = 2(\lambda+3) \quad \text{với } \forall(x,y)\in D(f) \\ L''_{y^2}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_y(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial[4(\lambda+1)(x+2y)-2(\lambda-1)(x-y)]}{\partial y} = 2(5\lambda+3) \end{cases}$$

$\Rightarrow dL^2(x,y,\lambda) = L''_{x^2}(x,y,\lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy + L''_{y^2}(x,y,\lambda)dy^2 =$

$4\lambda dx^2 + 2.2(\lambda+3)dxdy + 2(5\lambda+3)dy^2$ với $\forall(x,y)\in D(f)$

1. Khi $(x,y,\lambda) = (x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = (-1,-1,-1)$

$d^2L(x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = 4\lambda_1^* dx^2 + 2.2(\lambda_1^*+3)dxdy + 2(5\lambda_1^*+3)dy^2 = -4dx^2 + 2.4dxdy - 4dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_1^*) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_1^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_1^*) = \det(-4) = -4 < 0$, $A_2(\lambda_1^*) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow dL^2(x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*)$ không xác định dấu.

2. Khi $(x,y,\lambda) = (x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = (1,1,-1)$

$d^2L(x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = 4\lambda_2^* dx^2 + 2.2(\lambda_2^*+3)dxdy + 2(5\lambda_2^*+3)dy^2 = -4dx^2 + 2.4dxdy - 4dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_2^*) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_2^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_2^*) = \det(-4) = -4 < 0$, $A_2(\lambda_2^*) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow dL^2(x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*)$ không xác định dấu.

3. Khi $(x,y,\lambda) = (x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*) = (-2,1,1)$

$d^2L(x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*) = 4\lambda_3^* dx^2 + 2.2(\lambda_3^*+3)dxdy + 2(5\lambda_3^*+3)dy^2 = 4dx^2 + 2.8dxdy + 16dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_3^*) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_3^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_3^*) = \det(4) = 4 > 0$, $A_2(\lambda_3^*) = \det\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow dL^2(x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*)$ không xác định dấu.

4. Khi $(x,y,\lambda) = (x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*) = (2,-1,1)$

$d^2L(x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*) = 4\lambda_4^* dx^2 + 2.2(\lambda_4^*+3)dxdy + 2(5\lambda_4^*+3)dy^2 = 4dx^2 + 2.8dxdy + 16dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_4^*) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_4^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_4^*) = \det(4) = 4 > 0$, $A_2(\lambda_4^*) = \det\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow dL^2(x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*)$ không xác định dấu.

Cả 4 dạng toàn phương $dL^2(x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*)$, $dL^2(x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*)$, $dL^2(x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*)$, $dL^2(x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*)$ đều không xác định dấu, do đó chúng ta cần thực hiện Bước 4.

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số g(x,y) = $(x + 2y)^2 + (x – y)^2 – 9 = 0$

$$dg(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial[(x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9]}{\partial x}dx + \frac{\partial[(x+2y)^2 + (x-y)^2 - 9]}{\partial y}dy = 0 \Leftrightarrow 2(2x+y)dx + 2(x+5y)dy = 0$$

$\Rightarrow dy = -\dfrac{2x+y}{x+5y}dx$ với $x+5y \neq 0$, cả 4 điểm dừng (x^*,y^*) tìm được ở trên đều thỏa mãn điều kiện này.

Bây giờ, thay $dy = -\dfrac{2x+y}{x+5y}dx$ vào vi phần toàn phần cấp 2 biểu thức

$$d^2L(x,y,\lambda) = 4\lambda dx^2 + 2.2(\lambda+3)dxdy + 2(5\lambda+3)dy^2$$

$$\Rightarrow d^2L(x,y,\lambda) = 4\lambda dx^2 + 4(\lambda+3)dx\left(-\frac{2x+y}{x+5y}dx\right) + 2(5\lambda+3)\left(-\frac{2x+y}{x+5y}dx\right)^2 =$$

$$\left[4\lambda - 4(\lambda+3)\frac{2x+y}{x+5y} + 2(5\lambda+3)\left(\frac{2x+y}{x+5y}\right)^2\right]dx^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dL^2(x_1^*,y_1^*,\lambda_1^*) = dL^2(-1,-1,-1) = -9dx^2 \\ dL^2(x_2^*,y_2^*,\lambda_2^*) = dL^2(1,1,-1) = -9dx^2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} dL^2(x_3^*,y_3^*,\lambda_3^*) = dL^2(-2,1,1) = 36dx^2 \\ dL^2(x_4^*,y_4^*,\lambda_4^*) = dL^2(2,-1,1) = 36dx^2 \end{cases}$$

TT	(x^*,y^*,λ^*)	$d^2L(x^*,y^*,\lambda^*)$	**Kết luận**
1	$(-1,-1,-1)$	$-9dx^2 < 0$	Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm $(-1,-1)$ và $f_{cđ} = f(-1,-1) = [-1+2(-1)^2]^2 - [-1-(-1)]^2 = 9$
2	$(1,1,-1)$	$-9dx^2 < 0$	Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm $(1,1)$ và $f_{cđ} = f(1,1) = (1+2.1)^2 - (1-1)^2 = 9$
3	$(-2,1,1)$	$36dx^2 > 0$	Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm $(-2,1)$ và $f_{ct} = f(-2,1) = (-2+2.1)^2 - (-2-1)^2 = -9$
4	$(2,-1,1)$	$36dx^2 > 0$	Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm $(2,-1)$ và $f_{ct} = f(2,-1) = [2+2(-1)]^2 - [2-(-1)]^2 = -9$

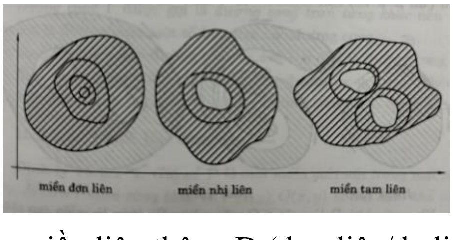
Nhận xét. Ở Ví dụ này, để giải bài toán, chúng thực hiện đủ cả 4 bước.

1.4.3. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

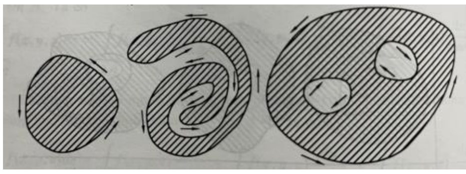
Một số khái niệm về miền đóng trong $\mathbf{R}^2$.

(1) Miền liên thông. Miền phẳng đóng $D \in \mathbf{R}^2$ được gọi là *miền liên thông* nếu chúng ta có thể nối 2 điểm bất kỳ thuộc D bằng một đường thẳng (hoặc/và) cong liên tục nằm hoàn toàn trong D.

(2) Miền đơn liên và miền đa liên. Miền liên thông được gọi là *miền đơn liên* nếu mọi đường cong kín nằm hoàn toàn trong D đều bao bọc một miền nằm hoàn toàn trong D. Miền liên thông không đơn liên được gọi là *miền đa liên*.



(3) Chiều dương của biên của miền liên thông D (đơn liên/đa liên) là chiều sao cho khi một người đi trên biên của miền D theo chiều ấy sẽ thấy các điểm trong của miền D luôn luôn ở bên tay trái.



Định nghĩa. Cho hàm số z = f(x,y) xác định và liên tục trên miền đóng $D(f) \subset \mathbf{R}^2$. Nếu $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ với $\forall (x,y) \in D(f)$ thì giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là *Giá trị nhỏ nhất* (GTNN) hay *Giá trị cực tiểu toàn* *cục* của hàm số f(x,y) trên miền đóng D(f) và ký hiệu là GTNN(f_D); còn nếu $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ với $\forall(x,y)\in D(f)$ thì giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là *Giá trị lớn nhất* (GTLN) hay *Giá trị cực đại toàn cục* của hàm số f(x,y) trên miền đóng D(f) và ký hiệu là GTLN(f_D).

Các nhà toán học đã chứng minh rằng: Mọi hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ xác định và liên tục trên miền đóng $D(f)\subset\mathbf{R}^n$ ($n\in\mathbf{N}^*$) đều tồn tại GTNN và GTLN trên D(f).

Bài toán. Tìm GTNN(f_D) và GTLN(f_D) của hàm số z = f(x,y) xác định và liên tục trên miền đóng $D(f)\subset\mathbf{R}^2$.

Chúng ta ký hiệu $D_t \equiv \{(x,y)\in D(f)$ là các điểm trong của D(f)} (D_t là miền mở trong $\mathbf{R}^2$) và $D_b \equiv \{(x,y)\in D(f)$ là các điểm biên của D(f)} (D_b là các đường thẳng/cong liền nét và khép kín trong $\mathbf{R}^2$).

Rõ ràng là $\begin{cases} D_t \cap D_b = \varnothing \\ D_t \cup D_b = D(f) \end{cases}$.

– Xét hàm số f(x,y) trên D_t: Nếu f(x,y) có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại điểm nào thì điểm đó phải là điểm cực trị của hàm số trên D_t, theo điều kiện cần của điểm cực trị, điểm đó phải là điểm dừng.

– Xét hàm số f(x,y) trên D_b, khi đó, các điểm $(x,y)\in D_b$ là liên tục và có hai trường hợp sau đây.

+ Trường hợp 1: Tại các điểm $(x,y)\in D_b$ tồn tại $\dfrac{df[x,y(x)]}{dx}$ hoặc $\dfrac{df[x(y),y]}{dy}$, khi đó D_b là một (nếu D(f) là đơn liên) hoặc nhiều (nếu D(f) là đa liên) đường cong liền nét, khép kín và trơn toàn bộ hoặc trơn từng khúc. Khi đó, nếu hàm số có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại điểm nào thì điểm đó phải là điểm cực trị của hàm số trên D_b, theo điều kiện cần của điểm cực trị, điểm đó phải là điểm dừng.

+ Trường hợp 2: Nếu ngoài các điểm $(x,y)\in D_b$ tồn tại $\dfrac{df[x,y(x)]}{dx}$ hoặc $\dfrac{df[x(y),y]}{dy}$, còn có một số hữu hạn các điểm $(x,y)\in D_b$ mà tại đó, không tồn tại $\dfrac{df[x,y(x)]}{dx}$ hoặc $\dfrac{df[x(y),y]}{dy}$. Khi đó, hàm số f(x,y) có thể có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại các điểm này.

Chú ý. (1) Cần phải vẽ hình miền đóng D(f); (2) Tại các điểm dừng thuộc D_t hoặc D_b, chúng ta không cần phải xác định rõ điểm nào là điểm cực đại hay là điểm cực tiểu của hàm số, mà chỉ tính giá trị của hàm số; (3) Tại các điểm (x,y) thuộc D_b mà tại đó, không tồn tại $\dfrac{df[x,y(x)]}{dx}$ hoặc $\dfrac{df[x(y),y]}{dy}$, chúng ta tính giá trị của hàm số f(x,y).

Như vậy, để tìm GTNN(f_D) và GTLN(f_D) của hàm số z = f(x,y) xác định và liên tục trên miền đóng $D(f)\subset\mathbf{R}^2$, chúng ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Vẽ hình miền đóng $D(f) = D_t\cup D_b$ đã cho.

Bước 2. Tìm các điểm dừng thuộc D_t (nếu có) và tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này.

Bước 3. Tìm các điểm dừng thuộc D_b (nếu có) và tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này.

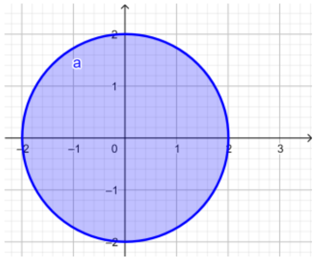
Bước 4. Tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm thuộc D_b mà tại đó, không tồn tại $\dfrac{df[x,y(x)]}{dx}$ hoặc $\dfrac{df[x(y),y]}{dy}$.

Bước 5. Xác định GTNN(f_D) = min{các giá trị của hàm số tìm được ở các Bước 2, 3, 4} và xác định GTLN(f_D) = max{các giá trị của hàm số tìm được ở các Bước 2, 3, 4}.

Ví dụ **1.31.** Tìm GTLN(f_D) và GTNN(f_D) của hàm số $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ trên miền đóng D(f) là hình tròn có tâm tại điểm O(0,0) và bán kính r = 2.

Bài giải.

Bước 1. Miền đóng D(f) là hình tròn có tâm tại điểm O(0,0) và bán kính r = 2



Bước 2. Chúng ta có hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x = 0 \\ f'_y(x,y) = -2y = 0 \end{cases}$ để xác định các điểm dừng thuộc các điểm trong của D(f). Hệ phương trình này có nghiệm (x,y) = (0,0), suy ra hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_1, y_1) = (0,0)$ thuộc các điểm trong của D(f). Giá trị của hàm số f(x,y) tại điểm dừng này là $f(0,0) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(0,0)} = 0^2 - 0^2 = 0$.

Bây giờ, chúng ta xét các điểm trên biên của D(f), tức là các điểm (x,y) nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ với $-2 \le x \le 2$.

Khi đó $f(x,y) = f(x, \pm\sqrt{4-x^2}) = x^2 - (\pm\sqrt{4-x^2})^2 = 2x^2 - 4 \equiv g(x)$ với $-2 \le x \le 2$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad x = -2 \\ 2x^2 - 4 & \text{khi} \quad -2 < x < 2 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 2 \end{cases}$$

Bước 3. Các điểm trong trên biên của D(f) thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ $(-2 < x < 2)$

Chúng ta có g'(x) = 4x ⇒ g'(x) = 0 ⇔ 4x = 0 ⇔ x = 0 ⇒ y = ±2, suy ra hàm số f(x,y) có 2 điểm dừng $(x_2, y_2) = (0,-2)$, $(x_3, y_3) = (0,2)$ thuộc các điểm trong trên biên của D(f). Giá trị của hàm số tại các điểm dừng này là $\begin{cases} f(0,-2) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(0,-2)} = 0^2 - (-2)^2 = -4 \\ f(0,2) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(0,2)} = 0^2 - 2^2 = -4 \end{cases}$.

Bước 4. Vì $\begin{cases} g'(-2+0) = \lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = \lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{(2x^2 - 4) - 0}{x + 2} = 2 \lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{x^2 - 2}{x + 2} = +\infty \\ g'(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{(2x^2 - 4) - 0}{x - 2} = 2 \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2 - 2}{x - 2} = -\infty \end{cases}$ nên tại x = ±2 không tồn tại g'(x), tức là tại các điểm $(x_4, y_4) = (-2,0)$, $(x_5, y_5) = (2,0)$ không tồn tại $\dfrac{df[x, y(x)]}{dx}$ với $y = y(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$. Giá trị của hàm số tại các điểm này là $\begin{cases} f(-2,0) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(-2,0)} = (-2)^2 - 0^2 = 4 \\ f(2,0) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(2,0)} = 2^2 - 0^2 = 4 \end{cases}$

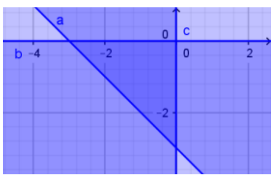
Bước 5. $\text{GTNN}(f_D) = \min\{0,-4,-4,4,4\} = -4$ tại các điểm $(0,\pm 2)$

và $\text{GTNN}(f_D) = \max\{0,-4,-4,4,4\} = 4$ tại các điểm $(\pm 2,0)$.

Ví dụ **1.32.** Tìm GTLN(f_D) và GTNN(f_D) của hàm số $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trên miền đóng D(f) là tam giác được tạo bởi các đường thẳng x = 0, y = 0 và x + y + 3 = 0.

Bài giải.

Bước 1. Miền đóng D(f) là hình ΔAOB (đây là miền đơn liên có biên trơn từng khúc) có các đỉnh A(–3,0), O(0,0) và B(0,–3)



Bước 2. Chúng ta có hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x - y + 1 = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$ để xác định các điểm dừng thuộc các điểm trong của D(f). Hệ phương trình này có nghiệm là $(-1,-1)$ nên hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_1, y_1) = (-1,-1)$ là điểm trong của D(f).

$$\Rightarrow f(x_1, y_1) = f(-1,-1) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=(-1,-1)} = (-1)^2 + (-1)^2 - (-1)(-1) - 1 - 1 = -1.$$

Bước 3. Các điểm trong trên biên của D(f) là các điểm nằm trên các cạnh AO, OB và BA của ΔAOB, không kể các đỉnh A(–3,0), O(0,0), B(0,–3).

– Các điểm trong trên cạnh AO có phương trình y = 0 với –3 < x < 0 ứng với hàm số f(x,0) = x^2 + x ≡ g(x) với –3 < x < 0. Chúng ta có g'(x) = 2x + 1, nên điểm dừng là nghiệm của phương trình g'(x) = 0. Phương trình g'(x) = 0 ⇔ 2x + 1 = 0 có nghiệm $x = -1/2$, trong trường hợp này, hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_2, y_2) = (-1/2, 0)$.

$$\Rightarrow f(x_2, y_2) = f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=\left(-\frac{1}{2},0\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\right).0 - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

– Các điểm trong trên cạnh OB có phương trình x = 0 với –3 < y < 0 ứng với hàm số f(0,y) = y^2 + y ≡ h(y) với –3 < y < 0. Chúng ta có h'(y) = 2y + 1, nên điểm dừng là nghiệm của phương trình h'(y) = 0. Phương trình h'(y) = 0 ⇔ 2y + 1 = 0 có nghiệm $y = -1/2$, trong trường hợp này, hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_3, y_3) = (0, -1/2)$.

$$\Rightarrow f(x_3, y_3) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=\left(0,-\frac{1}{2}\right)} = 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 0.\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

– Các điểm trong trên cạnh BA có phương trình y = –x – 3 với –3 < x < 0 ứng với hàm số f(x,–x – 3) = $3x^2$ + 9x + 6 ≡ k(x) với –3 < x < 0. Chúng ta có k'(x) = 6x + 9, nên điểm dừng là nghiệm của phương trình k'(x) = 0. Phương trình k'(x) = 0 ⇔ 6x + 9 = 0 có nghiệm $x = -3/2$, trong trường hợp này, hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_4, y_4) = (-3/2, -3/2)$.

$$\Rightarrow f(x_4, y_4) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)} =$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Bước 4. Các đỉnh A(–3,0), O(0,0), B(0,–3) của tam giác AOB là các điểm trên biên của D(f) mà tại đấy, không tồn tại $\frac{df[x, y(x)]}{dx}$. Tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này, chúng ta được:

$$\begin{cases} f(-3,0) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=(-3,0)} = (-3)^2 + 0^2 - (-3).0 - 3 + 0 = 6 \\ f(0,0) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0^2 + 0^2 - 0.0 + 0 + 0 = 0 \\ f(0,-3) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=(0,-3)} = 0^2 + (-3)^2 - 0.(-3) + 0 - 3 = 6 \end{cases}$$

Bước 5. $\text{GTNN}(f_D) = \min\{-1, -1/4, -1/4, -3/4, 6, 0, 6\} = -1$ tại điểm $(-1,-1)$

và $\text{GTLN}(f_D) = \max\{-1, -1/4, -1/4, -3/4, 6, 0, 6\} = 6$ tại các điểm (–3,0), (0,–3).

1.5. Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

1.5.1. Đường và tiếp tuyến của đường

1.5.1.1. Đường và tiếp tuyến của đường trong mặt phẳng

Ở Trường THPT chúng ta đã biết rằng, trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy, nếu đường L là đồ thị của hàm số y = f(x) thì phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0,y_0) \in L$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Tuy nhiên, không phải khi nào đường L cũng được biểu diễn bằng hàm số y = f(x), mà trong trường hợp tổng quát, đường L được biểu diễn, nói chung bằng phương trình f(x,y) = 0.

Điểm $M_0(x_0,y_0)\in L$ được gọi là điểm chính quy nếu $f'_x(x_0,y_0)$ và $f'_y(x_0,y_0)$ không đồng thời bằng không, được gọi là điểm kỳ dị nếu $f'_x(x_0,y_0)$ và $f'_y(x_0,y_0)$ đồng thời bằng không.

Giả sử điểm $M_0(x_0,y_0)$ là một điểm chính quy của đường L, khi đó phương trình tiếp tuyến của đường L tại điểm M_0 là $(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0)=0$.

Nếu đường L được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ với $\alpha \le t \le \beta$, trong đó x(t), y(t) là các hàm số liên tục và có các đạo hàm x'(t), y'(t) trên $[\alpha,\beta]$ và các đạo hàm này không đồng thời bằng 0 tại mỗi điểm $t\in[\alpha,\beta]$ thì phương trình tiếp tuyến của đường L tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ với $\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$ là $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}$.

Ví dụ **1.33.** Viết phương trình tiếp tuyến với đường ellip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a > 0, b > 0) tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nằm trên đường ellip.

Bài giải.

Chúng ta giải bài toán này bằng 2 cách.

Cách 1. Viết phương trình biểu diễn đường ellip dưới dạng $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right) = \dfrac{2x}{a^2} \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right) = \dfrac{2y}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = \left.\dfrac{2x}{a^2}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \dfrac{2x_0}{a^2} \\ f'_y(x_0,y_0) = \left.\dfrac{2y}{a^2}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \dfrac{2y_0}{b^2} \end{cases}$$

Vì điểm $M_0(x_0,y_0)$ nằm trên đường ellip nên nó thỏa mãn phương trình $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$, suy ra x_0 và y_0 không đồng thời bằng không, tức là $f'_x(x_0,y_0)=\dfrac{2x_0}{a^2}$, $f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{2y_0}{b^2}$ không đồng thời bằng không, do đó điểm $M_0(x_0,y_0)$ là điểm chính quy.

Vì $M_0(x_0,y_0)$ là điểm chính quy nên theo định nghĩa, phương trình tiếp tuyến với đường ellip tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nằm trên đường ellip là

$$(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0)=(x-x_0)\frac{2x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{2y_0}{b^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\right)-2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} \quad \text{vì} \quad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$$ là phương trình đường tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2. Phương trình tham số của đường ellip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ là $\begin{cases} x = x(\varphi) = a\cos\varphi \\ y = y(\varphi) = b\sin\varphi \end{cases}$ với $0 \le \varphi \le 2\pi$, khi đó phương trình tiếp tuyến của đường ellip tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ với $\begin{cases} x_0 = x(\varphi_0) \\ y_0 = y(\varphi_0) \end{cases}$ là $\dfrac{x-x_0}{x'(\varphi_0)} = \dfrac{y-y_0}{y'(\varphi_0)}$

Chúng ta có

$$\begin{cases} x'(\varphi) = \dfrac{d(a\cos\varphi)}{d\varphi} = -a\sin\varphi \\ y'(\varphi) = \dfrac{d(b\sin\varphi)}{d\varphi} = b\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\varphi_0) = -a\sin\varphi\big|_{\varphi=\varphi_0} = -a\sin\varphi_0 = -\dfrac{a}{b}(b\sin\varphi_0) = -\dfrac{ay_0}{b} \\ y'(\varphi_0) = b\cos\varphi\big|_{\varphi=\varphi_0} = b\cos\varphi_0 = \dfrac{b}{a}(a\cos\varphi_0) = \dfrac{bx_0}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{-\frac{ay_0}{b}} = \frac{y-y_0}{\frac{bx_0}{a}} \Leftrightarrow \frac{bx_0}{a}(x-x_0) = -\frac{ay_0}{b}(y-y_0) \Leftrightarrow b^2x_0(x-x_0) = -a^2y_0(y-y_0) \Leftrightarrow$$

$$b^2x_0x - b^2x_0^2 = -a^2y_0y + a^2y_0^2 \Leftrightarrow b^2x_0x + a^2y_0y = a^2y_0^2 + b^2x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{b^2x_0x + a^2y_0y}{a^2b^2} = \frac{a^2y_0^2 + b^2x_0^2}{a^2b^2} \Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \quad \text{vì} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$$ là phương trình đường tiếp tuyến cần tìm.

1.5.1.2. Đường và tiếp tuyến của đường trong không gian

Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, đường L thường được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ với $\alpha \le t \le \beta$, trong đó x(t), y(t), z(t) là các hàm số liên tục và có các đạo hàm x'(t), y'(t), z'(t) trên $[\alpha,\beta]$ và các đạo hàm này không đồng thời bằng 0 tại mỗi điểm $t \in [\alpha,\beta]$ thì phương trình tiếp tuyến của đường L tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ với $\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \\ z_0 = z(t_0) \end{cases}$ là $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

Ví dụ **1.34.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường L trong không gian $\mathbf{R}^3$ được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = t^2 \\ z = z(t) = t^3 \end{cases}$ với $-3 \le t \le 10$ tại điểm (x_0,y_0,z_0) ứng với $t_0 = 3$.

Bài giải.

Ta có $\begin{cases} x_0 = x(t_0) = x(3) = 3 \\ y_0 = y(t_0) = y(3) = 3^2 = 9 \\ z_0 = z(t_0) = z(3) = 3^3 = 27 \end{cases}$ và $\begin{cases} x'(t) = t' = 1 \\ y'(t) = (t^2)' = 2t \\ z'(t) = (t^3)' = 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(3) = 1 \\ y'(3) = 2.3 = 6 \\ z'(3) = 3.3^2 = 27 \end{cases}$ do đó phương trình tiếp tuyến của đường L là $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z-z_0}{z'(t_0)} \Rightarrow \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-9}{6} = \dfrac{z-27}{27}$.

1.5.2. Mặt và tiếp tuyến của mặt, mặt phẳng tiếp xúc

Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, mặt S được biểu diễn bởi phương trình f(x,y,z) = 0. Giả sử $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$, khi đó đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của mặt S tại điểm M_0 nếu nó là tiếp tuyến của một đường nào đó trên mặt S tại điểm M_0. Tại mỗi điểm M_0 trên mặt S, nói chung có vô số đường thuộc mặt S đi qua, do đó tại điểm M_0 có thể có vô số tiếp tuyến của mặt S.

Điểm $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$ được gọi là điểm chính quy nếu $f'_x(x_0,y_0,z_0)$, $f'_y(x_0,y_0,z_0)$ và $f'_z(x_0,y_0,z_0)$ không đồng thời bằng 0, được gọi là điểm kỳ dị nếu $f'_x(x_0,y_0,z_0)$, $f'_y(x_0,y_0,z_0)$ và $f'_z(x_0,y_0,z_0)$ đồng thời bằng 0.

Định lý. Tập hợp tất cả các tiếp tuyến của mặt S tại một điểm chính quy $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$ là một mặt phẳng đi qua điểm M_0.

Định nghĩa. Mặt phẳng chứa mọi tiếp tuyến của mặt S tại điểm $M_0 \in S$ được gọi là mặt phẳng tiếp xúc của mặt S tại điểm M_0.

Phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của mặt S được biểu diễn bởi phương trình f(x,y,z) = 0 tại điểm chính quy $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$ là

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Ví dụ **1.35.** Viết phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của mặt S được cho bởi phương trình $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm $M_0(2,2,3)$.

Bài giải.

Viết phương trình của mặt S dưới dạng $f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$.

Vì $f(2,2,3) = (x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6)\big|_{(x,y,z)=(2,2,3)} = 2^2 - 4.2^2 + 2.3^2 - 6 = 0$ nên điểm $M_0(2,2,3)$ thuộc mặt S.

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 2x \\ f'_y(x,y,z) = -8y \\ f'_z(x,y,z) = 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(2,2,3) = 2x\big|_{(x,y,z)=(22,3)} = 2.2 = 4 \\ f'_y(2,2,3) = -8y\big|_{(x,y,z)=(22,3)} = -8.2 = -16 \\ f'_z(2,2,3) = 4z\big|_{(x,y,z)=(22,3)} = 4.3 = 12 \end{cases}$

Vì $f'_x(2,2,3) = 4 \neq 0$, $f'_y(2,2,3) = -16 \neq 0$ và $f'_z(2,2,3) = 12 \neq 0$ nên điểm $M_0(2,2,3)$ là điểm chính quy của mặt $f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$ nên theo định nghĩa, phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt S tại điểm $M_0(2,2,3)$ là

$$f'_x(2,2,3)(x-2) + f'_y(2,2,3)(y-2) + f'_z(2,2,3)(z-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(x-2) - 16(y-2) + 12(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 3z - 3 = 0.$$

Bài tập

1.24. Tìm cực trị của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x,y) = x + y - xe^y$

(b) $z = f(x,y) = xy(3 - x - y)$ (đề thi học phần Giải tích 2 cuối kỳ năm học 2018-2019)

(c) $z = f(x,y) = 3x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 (x < 0,\ y < 0)$ (đề thi học phần Giải tích 2 cuối kỳ năm học 2019-2020)

(d) $z = f(x,y) = e^{y-x}(y^2 + 2x^2)$ (đề thi học phần Giải tích 2 cuối kỳ năm học 2020-2021)

1.25. Giải bài toán ở Ví dụ 1.28. bằng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến.

1.26. Tìm cực trị của hàm số $u = f(x,y,z) = x + y + z$ với điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

1.27. Tìm tam giác có diện tích lớn nhất trong tất cả các tam giác nội tiếp trong đường tròn bán kính R cho trước.

Gợi ý. Ký hiệu các góc của tam giác nội tiếp trong đường tròn bán kính R cho trước là α, β, γ và độ dài các cạnh đối diện với các góc α, β, γ tương ứng là a, b, c. Sau đó, áp dụng công thức tính diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ và định lý sin $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

1.28. Tìm GTNN(f_D) và GTLN(f_D) của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$ trên miền đóng D(f) giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, y = 0 và x + y = 6.

(b) $z = f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trên miền đóng D(f) giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, x = 1, y = 0 và y = 2.