

**Bài toán.** Tìm giới hạn của hàm số  $f(x,y)$  khi điểm  $M(x,y) \rightarrow M_0(x_0,y_0)$

Trước hết chúng ta phải biết việc điểm  $M(x,y) \rightarrow M_0(x_0,y_0)$  bằng cách như thế nào? Rõ ràng là có vô số cách, chúng ta quan tâm đến 2 cách sau đây:

(1) hoặc là  $x \rightarrow x_0$  trên một đường (cong/thẳng/zích zắc/...) nào đó, trong khi  $y$  không thay đổi, sau đó  $y \rightarrow y_0$  trên một đường (cong/thẳng/zích zắc/...); hoặc ngược lại, tức là  $y \rightarrow y_0$  trên một đường (cong/thẳng/zích zắc/...) trong khi  $x$  không thay đổi, sau đó  $x \rightarrow x_0$  trên một đường (cong/thẳng/zích zắc/...).

(2)  $x \rightarrow x_0$  đồng thời với  $y \rightarrow y_0$  (cũng vậy,  $y \rightarrow y_0$  đồng thời với  $x \rightarrow x_0$ ). Điều này tương đương với khoảng cách  $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  giữa hai điểm  $M(x,y)$  và  $M_0(x_0,y_0)$  dần về 0.

Tương ứng với 2 cách  $M(x,y) \rightarrow M_0(x_0,y_0)$  như trên, các Nhà toán học đã đưa ra định nghĩa giới hạn của hàm số  $f(x,y)$  khi điểm  $M(x,y) \rightarrow M_0(x_0,y_0)$  là

1. **Giới hạn lặp**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right]$  và tương tự  $\lim_{y \rightarrow y_0} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right]$

**Ví dụ.** Cho hàm số  $f(x,y) = \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2}$  và  $M_0(x_0,y_0)$  với  $(x_0,y_0) \equiv (0,1)$ , tính các giới hạn sau đây

$$(a) \lim_{y \rightarrow y_0} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right] \equiv \lim_{y \rightarrow 1} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} \right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right] \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} \right)$$

**Bài giải.** Tập xác định  $D(f) = ?$  **Coi như bài tập!**

$$(a) \text{ Tính } \lim_{y \rightarrow 1} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} \right)$$

Bước 1. Tính  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2}$ , giới hạn này có dạng vô định  $\frac{0}{0}$  khi  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{Chúng ta biến đổi } f(x,y) &= \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} = \frac{(\sqrt{2xy+1}-1)(\sqrt{2xy+1}+1)}{3xy^2(\sqrt{2xy+1}+1)} = \frac{2}{3} \frac{1}{y(\sqrt{2xy+1}+1)} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{1}{y(\sqrt{2xy+1}+1)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{y(\sqrt{2xy+1}+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2y} = \frac{1}{3y} \end{aligned}$$

$$\text{Bước 2. Tính } \lim_{y \rightarrow 1} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{3y} = \frac{1}{3}.$$

$$(b) \text{ Tính } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} \right)$$

$$\text{Bước 1. Tính } \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{3x}$$

$$\text{Bước 2. Tính } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2xy+1}-1}{3xy^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{3x}, \text{ giới hạn này có dạng vô định } \frac{0}{0} \text{ khi } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{Chúng ta biến đổi } \frac{\sqrt{2x+1}-1}{3x} &= \frac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{3x(\sqrt{2x+1}+1)} = \frac{2}{3(\sqrt{2x+1}+1)} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{2x+1}+1)} &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Từ kết quả của Ví dụ trên, xuất hiện câu hỏi:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right]$  có đúng với mọi hàm số  $f(x,y)$  không?

2. **Giới hạn kép**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ , cách viết khác  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y)$  như chúng ta đã học!

**Từ định nghĩa của Giới hạn lặp và Giới hạn kép xuất hiện câu hỏi:** Cùng một hàm số  $f(x,y)$  thì Giới hạn lặp có bằng Giới hạn kép không?