BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN 9

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHAN ĐỨC CHÍNH (Tổng Chủ biên)
TÔN THÂN (Chủ biên)
VŨ HỮU BÌNH – TRẦN PHƯƠNG DUNG – NGÔ HỮU DŨNG
LÊ VĂN HỒNG – NGUYỄN HỮU THẢO

TOÁN 9

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - HOÀNG XUÂN VINH**
Biên tập tái bản : **NGUYỄN THỊ THANH**
Biên tập kĩ thuật và trình bày : **NGUYỄN THANH THUÝ**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **NGUYỄN THỊ THANH**
Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

TOÁN 9 - TẬP MỘT
Mã số : 2H901T1
In 30.000 bản (QĐ 01GK), khổ 17 x 24cm.
In tại Công ty cổ phần in Sách giáo khoa tại TP - Hà Nội.
Số xuất bản: 01-2011/CXB/89-1235/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 01 năm 2011.

Phần ĐẠI SỐ

Chương I – CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. Căn bậc hai

Phép toán ngược của phép bình phương là phép toán nào ?

1. Căn bậc hai số học

Ở lớp 7, ta đã biết :

• Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

• Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau : Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

• Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.

?1 *Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau :*

a) 9 ; *b)* $\dfrac{4}{9}$; *c)* 0,25 ; *d)* 2.

ĐỊNH NGHĨA

Với số dương a, *số* $\sqrt{a}$ *được gọi là* ***căn bậc hai số học*** *của* a.
Số 0 *cũng được gọi là căn bậc hai số học của* 0.

Ví dụ 1. Căn bậc hai số học của 16 là $\sqrt{16}$ (= 4).
Căn bậc hai số học của 5 là $\sqrt{5}$.

➢ ***Chú ý.*** *Với* $a \geq 0$, *ta có :*

Nếu $x = \sqrt{a}$ *thì* $x \geq 0$ *và* $x^2 = a$;

Nếu $x \geq 0$ *và* $x^2 = a$ *thì* $x = \sqrt{a}$.

Ta viết

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = a. \end{cases}$$

?2 *Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau :*

a) 49 ; *b)* 64 ; *c)* 81 ; *d)* 1,21.

Giải mẫu

$\sqrt{49} = 7$, vì $7 \geq 0$ và $7^2 = 49$.

Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm gọi là *phép khai phương* (gọi tắt là khai phương). Để khai phương một số, người ta có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc dùng bảng số (xem §5).

Khi biết căn bậc hai số học của một số, ta dễ dàng xác định được các căn bậc hai của nó. Chẳng hạn, căn bậc hai số học của 49 là 7 nên 49 có hai căn bậc hai là 7 và −7.

?3 *Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau :*

a) 64 ; *b)* 81 ; *c)* 1,21.

2. So sánh các căn bậc hai số học

Ta đã biết :

Với hai số a và b không âm, nếu a < b thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ta có thể chứng minh được :

Với hai số a và b không âm, nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì a < b.

Như vậy ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

> *Với hai số* a *và* b *không âm, ta có*
>
> $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ví dụ 2. So sánh

a) 1 và $\sqrt{2}$; b) 2 và $\sqrt{5}$.

Giải

a) $1 < 2$ nên $\sqrt{1} < \sqrt{2}$. Vậy $1 < \sqrt{2}$.

b) $4 < 5$ nên $\sqrt{4} < \sqrt{5}$. Vậy $2 < \sqrt{5}$.

?4 *So sánh*

a) 4 *và* $\sqrt{15}$; *b)* $\sqrt{11}$ *và* 3.

Ví dụ 3. Tìm số x không âm, biết :

a) $\sqrt{x} > 2$; b) $\sqrt{x} < 1$.

Giải

a) $2 = \sqrt{4}$, nên $\sqrt{x} > 2$ có nghĩa là $\sqrt{x} > \sqrt{4}$.

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} > \sqrt{4} \Leftrightarrow x > 4$. Vậy $x > 4$.

b) $1 = \sqrt{1}$, nên $\sqrt{x} < 1$ có nghĩa là $\sqrt{x} < \sqrt{1}$.

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} < \sqrt{1} \Leftrightarrow x < 1$. Vậy $0 \leq x < 1$.

?5 *Tìm số* x *không âm, biết :*

a) $\sqrt{x} > 1$; *b)* $\sqrt{x} < 3$.

Bài tập

1. Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng :

121 ; 144 ; 169 ; 225 ; 256 ; 324 ; 361 ; 400.

2. So sánh

a) 2 và $\sqrt{3}$; b) 6 và $\sqrt{41}$; c) 7 và $\sqrt{47}$.

3. Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) :

a) $x^2 = 2$; b) $x^2 = 3$;

c) $x^2 = 3{,}5$; d) $x^2 = 4{,}12$.

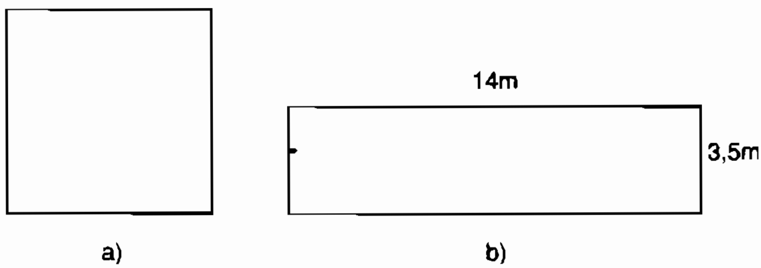
Hướng dẫn. Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ (với $a \geq 0$) là các căn bậc hai của a.

4. Tìm số x không âm, biết :

a) $\sqrt{x} = 15$; b) $2\sqrt{x} = 14$;

c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$; d) $\sqrt{2x} < 4$.

5. ***Đố.*** Tính cạnh một hình vuông, biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3,5m và chiều dài 14m (h.1).



Hình 1

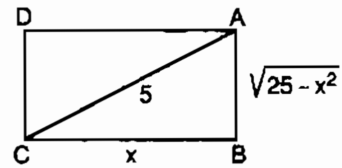
Có thể em chưa biết

Từ thời xa xưa, người ta đã thấy giữa Hình học và Đại số có mối liên quan mật thiết. Khái niệm căn bậc hai cũng có phần xuất phát từ Hình học. Khi biết độ dài cạnh hình vuông, ta tính được diện tích hình đó bằng cách bình phương (hay nâng lên luỹ thừa bậc hai) độ dài cạnh. Ngược lại, nếu biết diện tích hình vuông, ta tìm được độ dài cạnh của nó nhờ khai phương số đo diện tích. Người ta coi phép lấy căn bậc hai số học là phép toán ngược của phép bình phương và coi việc tìm căn một số là tìm "cái gốc, cái nguồn". Điều này hiện còn thấy trong ngôn ngữ một số nước. Chẳng hạn, ở tiếng Anh, từ *square* có nghĩa là *hình vuông* và cũng có nghĩa là *bình phương*, từ *root* có nghĩa là rễ, là nguồn gốc, còn từ *square root* là *căn bậc hai.*

§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1. Căn thức bậc hai

?1 *Hình chữ nhật* ABCD *có đường chéo* AC = 5 *cm và cạnh* BC = x *(cm) thì cạnh* AB = $\sqrt{25 - x^2}$ *(cm). Vì sao ? (h.2).*



Hình 2

Người ta gọi $\sqrt{25 - x^2}$ là căn thức bậc hai của $25 - x^2$, còn $25 - x^2$ là biểu thức lấy căn.

Một cách tổng quát :

Với A *là một biểu thức đại số, người ta gọi* $\sqrt{A}$ *là* ***căn thức bậc hai*** *của* A, *còn* A *được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.*

$\sqrt{A}$ *xác định (hay có nghĩa) khi* A *lấy giá trị không âm.*

Ví dụ 1. $\sqrt{3x}$ là căn thức bậc hai của 3x ; $\sqrt{3x}$ xác định khi $3x \geq 0$, tức là khi $x \geq 0$. Chẳng hạn, với x = 2 thì $\sqrt{3x}$ lấy giá trị $\sqrt{6}$; với x = 12 thì $\sqrt{3x}$ lấy giá trị $\sqrt{36} = 6$.

?2 *Với giá trị nào của* x *thì* $\sqrt{5 - 2x}$ *xác định ?*

2. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

?3 *Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :*

a	–2	–1	0	2	3
a^2					
$\sqrt{a^2}$					

ĐỊNH LÍ

> *Với mọi số* a, *ta có* $\sqrt{a^2} = |a|$.

Chứng minh

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối thì $|a| \geq 0$.

Ta thấy :

Nếu $a \geq 0$ thì $|a| = a$, nên $(|a|)^2 = a^2$;

Nếu $a < 0$ thì $|a| = -a$, nên $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$.

Do đó, $(|a|)^2 = a^2$ với mọi số a.

Vậy $|a|$ chính là căn bậc hai số học của a^2, tức là $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{12^2}$; b) $\sqrt{(-7)^2}$.

Giải

a) $\sqrt{12^2} = |12| = 12$.

b) $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$.

Ví dụ 3. Rút gọn

a) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$; b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$.

Giải

a) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ (vì $\sqrt{2} > 1$).

Vậy $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$.

b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$ (vì $\sqrt{5} > 2$).

Vậy $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$.

➢ ***Chú ý.*** *Một cách tổng quát, với* A *là một biểu thức ta có* $\sqrt{A^2} = |A|$, *có nghĩa là :*

$\sqrt{A^2} = A$ *nếu* $A \geq 0$ (tức là A lấy giá trị không âm) ;

$\sqrt{A^2} = -A$ *nếu* $A < 0$ (tức là A lấy giá trị âm).

Ví dụ 4. Rút gọn

a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$; b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.

Giải

a) $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$ (vì $x \geq 2$).

b) $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3|$.

Vì $a < 0$ nên $a^3 < 0$, do đó $|a^3| = -a^3$.

Vậy $\sqrt{a^6} = -a^3$ (với $a < 0$).

Bài tập

6. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$; b) $\sqrt{-5a}$; c) $\sqrt{4-a}$; d) $\sqrt{3a+7}$?

7. Tính

a) $\sqrt{(0,1)^2}$; b) $\sqrt{(-0,3)^2}$; c) $-\sqrt{(-1,3)^2}$; d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$.

8. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$; b) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$;

c) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$; d) $3\sqrt{(a-2)^2}$ với $a < 2$.

9. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{x^2} = 7$; b) $\sqrt{x^2} = |-8|$;

c) $\sqrt{4x^2} = 6$; d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$.

10. Chứng minh

a) $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.

Luyện tập

11. Tính

a) $\sqrt{16}.\sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$; b) $36 : \sqrt{2.3^2.18} - \sqrt{169}$;

c) $\sqrt{\sqrt{81}}$; d) $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

12. Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{2x + 7}$; b) $\sqrt{-3x + 4}$; c) $\sqrt{\dfrac{1}{-1 + x}}$; d) $\sqrt{1 + x^2}$.

13. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $2\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$; b) $\sqrt{25a^2} + 3a$ với $a \geq 0$;

c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$; d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$.

14. Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - 3$; b) $x^2 - 6$;

c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$; d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$.

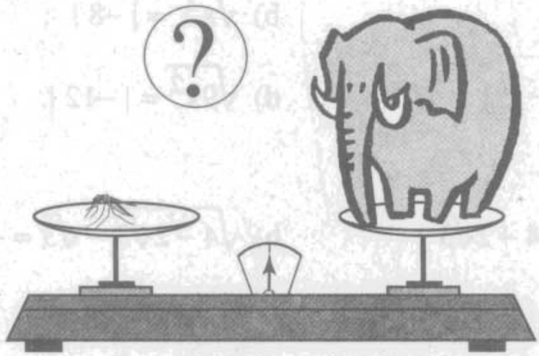
Hướng dẫn. Dùng kết quả :

Với $a \geq 0$ thì $a = (\sqrt{a})^2$.

15. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 5 = 0$; b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$.

16. ***Đố.*** Hãy tìm chỗ sai trong phép chứng minh "Con muỗi nặng bằng con voi" dưới đây.



Giả sử con muỗi nặng m (gam), còn con voi nặng V (gam). Ta có

$$m^2 + V^2 = V^2 + m^2.$$

Cộng cả hai vế với $-2mV$, ta có

$$m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2,$$

hay $$(m - V)^2 = (V - m)^2.$$

Lấy căn bậc hai mỗi vế của đẳng thức trên, ta được

$$\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2}.$$

Do đó $$m - V = V - m.$$

Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi (!).

§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

1. Định lí

?1 *Tính và so sánh :* $\sqrt{16 \cdot 25}$ *và* $\sqrt{16}.\sqrt{25}$.

ĐỊNH LÍ

> *Với hai số* a *và* b *không âm, ta có*
>
> $$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.$$

Chứng minh. Vì $a \geq 0$ và $b \geq 0$ nên $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ xác định và không âm.

Ta có $(\sqrt{a}.\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2.(\sqrt{b})^2 = a.b.$

Vậy $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ là căn bậc hai số học của a.b, tức là $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.$

➤ ***Chú ý.*** *Định lí trên có thể mở rộng cho tích của nhiều số không âm.*

2. Áp dụng

a) Quy tắc khai phương một tích

> *Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.*

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính :

a) $\sqrt{49.1{,}44.25}$; b) $\sqrt{810.40}$.

Giải

a) $\sqrt{49.1{,}44.25} = \sqrt{49}.\sqrt{1{,}44}.\sqrt{25} = 7.1{,}2.5 = 42.$

b) $\sqrt{810.40} = \sqrt{81.4.100} = \sqrt{81}.\sqrt{4}.\sqrt{100} = 9.2.10 = 180.$

?2 *Tính*

a) $\sqrt{0{,}16.0{,}64.225}$; *b)* $\sqrt{250.360}$.

b) Quy tắc nhân các căn bậc hai

> *Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.*

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{5}.\sqrt{20}$; b) $\sqrt{1{,}3}.\sqrt{52}.\sqrt{10}$.

Giải

a) $\sqrt{5}.\sqrt{20} = \sqrt{5.20} = \sqrt{100} = 10.$

b) $\sqrt{1{,}3}.\sqrt{52}.\sqrt{10} = \sqrt{1{,}3.52.10} = \sqrt{13.52} = \sqrt{13.13.4} = \sqrt{(13.2)^2} = 26.$

?3 *Tính*

a) $\sqrt{3}.\sqrt{75}$; *b)* $\sqrt{20}.\sqrt{72}.\sqrt{4,9}$.

➤ ***Chú ý.*** *Một cách tổng quát, với hai biểu thức* A *và* B *không âm ta có*

$$\sqrt{A.B} = \sqrt{A}\,.\,\sqrt{B}.$$

Đặc biệt, với biểu thức A *không âm ta có*

$$(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{3a}.\sqrt{27a}$ với $a \geq 0$; b) $\sqrt{9a^2b^4}$.

Giải

a) $\sqrt{3a}.\sqrt{27a} = \sqrt{3a.27a} = \sqrt{81a^2} = \sqrt{(9a)^2} = |9a| = 9a$ (vì $a \geq 0$).

b) $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{9}.\sqrt{a^2}.\sqrt{b^4} = 3.|a|.\sqrt{(b^2)^2} = 3|a|b^2$.

Ta còn có thể rút gọn như sau : $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{(3ab^2)^2} = |3ab^2| = 3|a|b^2$.

?4 *Rút gọn các biểu thức sau (với* a *và* b *không âm) :*

a) $\sqrt{3a^3}.\sqrt{12a}$; *b)* $\sqrt{2a\,.\,32ab^2}$.

Bài tập

17. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính

a) $\sqrt{0,09\,.\,64}$; b) $\sqrt{2^4.(-7)^2}$;

c) $\sqrt{12,1\,.\,360}$; d) $\sqrt{2^2.3^4}$.

18. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính

a) $\sqrt{7}.\sqrt{63}$; b) $\sqrt{2,5}.\sqrt{30}.\sqrt{48}$;

c) $\sqrt{0,4}.\sqrt{6,4}$; d) $\sqrt{2,7}.\sqrt{5}.\sqrt{1,5}$.

19. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{0{,}36a^2}$ với $a < 0$; b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$;

c) $\sqrt{27.48(1-a)^2}$ với $a > 1$; d) $\dfrac{1}{a-b}.\sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$.

20. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\dfrac{2a}{3}}.\sqrt{\dfrac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$; b) $\sqrt{13a}.\sqrt{\dfrac{52}{a}}$ với $a > 0$;

c) $\sqrt{5a}.\sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$; d) $(3-a)^2 - \sqrt{0{,}2}.\sqrt{180a^2}$.

21. Khai phương tích 12 . 30 . 40 được :

(A) 1200 ; (B) 120 ; (C) 12 ; (D) 240.

Hãy chọn kết quả đúng.

Luyện tập

22. Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi tính

a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$;

c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$; d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.

23. Chứng minh

a) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$;

b) $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})$ và $(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})$ là hai số nghịch đảo của nhau.

24. Rút gọn và tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) của các căn thức sau :

a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ tại $a = -2, b = -\sqrt{3}$.

25. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{16x} = 8$; b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$;

c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$; d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.

26. a) So sánh $\sqrt{25+9}$ và $\sqrt{25} + \sqrt{9}$;

b) Với a > 0 và b > 0, chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

27. So sánh

a) 4 và $2\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{5}$ và -2.

§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

1. Định lí

?1 *Tính và so sánh* $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ *và* $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

ĐỊNH LÍ

> *Với số* a *không âm và số* b *dương, ta có*
>
> $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Chứng minh. Vì $a \geq 0$ và $b > 0$ nên $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ xác định và không âm.

Ta có $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$.

Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ là căn bậc hai số học của $\dfrac{a}{b}$, tức là $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2. Áp dụng

a) Quy tắc khai phương một thương

Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó số a không âm và số b dương, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b, rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

a) $\sqrt{\frac{25}{121}}$;   b) $\sqrt{\frac{9}{16}:\frac{25}{36}}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11}$.

b) $\sqrt{\frac{9}{16}:\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{9}{16}}:\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{3}{4}:\frac{5}{6} = \frac{9}{10}$.

?2 *Tính*

a) $\sqrt{\frac{225}{256}}$;   b) $\sqrt{0,0196}$.

b) Quy tắc chia hai căn bậc hai

Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho căn bậc hai của số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

Ví dụ 2. Tính

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$;   b) $\sqrt{\frac{49}{8}}:\sqrt{3\frac{1}{8}}$.

Giải

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$.

b) $\sqrt{\frac{49}{8}}:\sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{49}{8}:\frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$.

?3 *Tính*

a) $\dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

➤ ***Chú ý.*** *Một cách tổng quát, với biểu thức* A *không âm và biểu thức* B *dương, ta có*

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}}$; b) $\dfrac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}} = \dfrac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{4}.\sqrt{a^2}}{5} = \dfrac{2}{5}|a|$.

b) $\dfrac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\dfrac{27a}{3a}} = \sqrt{9} = 3$ (với $a > 0$).

?4 *Rút gọn*

a) $\sqrt{\dfrac{2a^2b^4}{50}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ *với* $a \geq 0$.

Bài tập

28. Tính

a) $\sqrt{\dfrac{289}{225}}$; b) $\sqrt{2\dfrac{14}{25}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{0,25}{9}}$; d) $\sqrt{\dfrac{8,1}{1,6}}$.

29. Tính

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; b) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$; d) $\dfrac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3.3^5}}$.

30. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{y}{x}.\sqrt{\dfrac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0$, $y \neq 0$; b) $2y^2.\sqrt{\dfrac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$;

c) $5xy.\sqrt{\dfrac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0$, $y > 0$; d) $0,2x^3y^3.\sqrt{\dfrac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0$, $y \neq 0$.

31. a) So sánh $\sqrt{25-16}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16}$;

b) Chứng minh rằng, với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

Luyện tập

32. Tính

a) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}.5\dfrac{4}{9}.0,01}$; b) $\sqrt{1,44.1,21-1,44.0,4}$;

c) $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}$; d) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$.

33. Giải phương trình

a) $\sqrt{2}.x-\sqrt{50}=0$; b) $\sqrt{3}.x+\sqrt{3}=\sqrt{12}+\sqrt{27}$;

c) $\sqrt{3}.x^2-\sqrt{12}=0$; d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{5}}-\sqrt{20}=0$.

34. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $ab^2.\sqrt{\dfrac{3}{a^2b^4}}$ với $a < 0$, $b \neq 0$; b) $\sqrt{\dfrac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$;

c) $\sqrt{\dfrac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1{,}5$ và $b < 0$; d) $(a-b).\sqrt{\dfrac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

35. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$; b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$.

36. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $0{,}01 = \sqrt{0{,}0001}$;

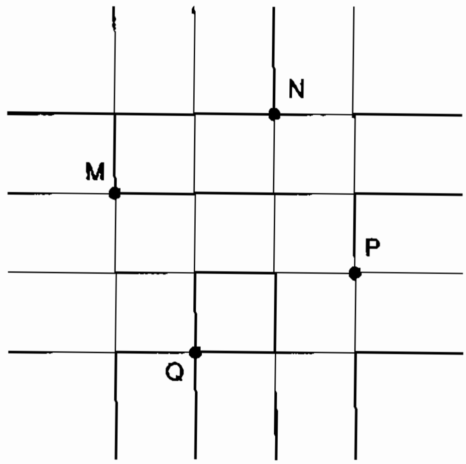
b) $-0{,}5 = \sqrt{-0{,}25}$;

c) $\sqrt{39} < 7$ và $\sqrt{39} > 6$;

d) $(4-\sqrt{13}).2x < \sqrt{3}(4-\sqrt{13})$

$\Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.

37. ***Đố.*** Trên lưới ô vuông, mỗi ô vuông cạnh 1cm, cho bốn điểm M, N, P, Q (h.3).
Hãy xác định số đo cạnh, đường chéo và diện tích của tứ giác MNPQ.



Hình 3

§5. Bảng căn bậc hai

Một công cụ tiện lợi để khai phương khi không có máy tính.

Để tìm căn bậc hai của một số dương, người ta có thể sử dụng bảng tính sẵn các căn bậc hai. Trong cuốn "Bảng số với 4 chữ số thập phân" của V.M. Bra-đi-xơ, bảng căn bậc hai là bảng IV dùng để khai căn bậc hai của bất cứ số dương nào có nhiều nhất bốn chữ số.

1. Giới thiệu bảng

Bảng căn bậc hai được chia thành các hàng và các cột. Ta quy ước gọi tên của các hàng (cột) theo số được ghi ở cột đầu tiên (hàng đầu tiên) của mỗi trang. Căn bậc hai của các số được viết bởi không quá ba chữ số từ 1,00 đến 99,9 được ghi sẵn trong bảng ở các cột từ cột **0** đến cột **9**. Tiếp đó là chín cột hiệu chính được dùng để hiệu chính chữ số cuối của căn bậc hai của các số được viết bởi bốn chữ số từ 1,000 đến 99,99.

2. Cách dùng bảng

a) Tìm căn bậc hai của số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100

Ví dụ 1. Tìm $\sqrt{1,68}$.

Tại giao của hàng **1,6** và cột **8**, ta thấy số 1,296. Vậy $\sqrt{1,68} \approx 1,296$ (mẫu 1).

N	...	8	...
.			
1,6		1,296	
.			

Mẫu 1

Ví dụ 2. Tìm $\sqrt{39,18}$.

Tại giao của hàng **39,** và cột **1**, ta thấy số 6,253. Ta có $\sqrt{39,1} \approx 6,253$.

Tại giao của hàng **39,** và cột **8** hiệu chính, ta thấy số 6. Ta dùng số 6 này để hiệu chính chữ số cuối ở số 6,253 như sau :

$$6,253 + 0,006 = 6,259.$$

Vậy $\sqrt{39,18} \approx 6,259$ (mẫu 2).

N	...	1	...	8	...
.					
39,		6,253		*6*	
.					

Mẫu 2

?1 *Tìm*

a) $\sqrt{9,11}$; *b)* $\sqrt{39,82}$.

Bảng tính sẵn căn bậc hai của tác giả V.M. Bra-đi-xơ chỉ cho phép ta tìm trực tiếp căn bậc hai của số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100. Tuy nhiên, dựa vào tính chất của căn bậc hai, ta vẫn dùng bảng này để tìm được căn bậc hai của số không âm lớn hơn 100 hoặc nhỏ hơn 1.

b) Tìm căn bậc hai của số lớn hơn 100

Ví dụ 3. Tìm $\sqrt{1680}$.

Ta biết $1680 = 16,8 \,.\, 100$.

Do đó $\sqrt{1680} = \sqrt{16,8} \,.\, \sqrt{100} = 10 \,.\, \sqrt{16,8}$.

Tra bảng ta được $\sqrt{16,8} \approx 4,099$. Vậy $\sqrt{1680} \approx 10 \,.\, 4,099 = 40,99$.

?2 *Tìm*

a) $\sqrt{911}$; *b)* $\sqrt{988}$.

c) Tìm căn bậc hai của số không âm và nhỏ hơn 1

Ví dụ 4. Tìm $\sqrt{0,00168}$.

Ta biết $0,00168 = 16,8 : 10000$.

Do đó $\sqrt{0,00168} = \sqrt{16,8} : \sqrt{10000} \approx 4,099 : 100 = 0,04099$.

➢ ***Chú ý.*** *Để thực hành nhanh, khi tìm căn bậc hai của số không âm lớn hơn* 100 *hoặc nhỏ hơn* 1, *ta dùng hướng dẫn của bảng : "Khi dời dấu phẩy trong số* N *đi* 2, 4, 6,... *chữ số thì phải dời dấu phẩy theo cùng chiều trong số* $\sqrt{N}$ *đi* 1, 2, 3,... *chữ số" (ví dụ 3 minh hoạ trường hợp dời dấu phẩy ở số* 16,8 *sang phải* 2 *chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số* 4,099 *sang phải* 1 *chữ số ; ví dụ 4 minh hoạ trường hợp dời dấu phẩy ở số* 16,8 *sang trái* 4 *chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số* 4,099 *sang trái* 2 *chữ số).*

?3 *Dùng bảng căn bậc hai, tìm giá trị gần đúng của nghiệm phương trình*

$$x^2 = 0,3982.$$

Bài tập

Dùng bảng số để tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau đây rồi dùng máy tính bỏ túi kiểm tra và so sánh kết quả (từ bài 38 đến bài 40).

38. 5,4 ; 7,2 ; 9,5 ; 31 ; 68.

39. 115 ; 232 ; 571 ; 9691.

40. 0,71 ; 0,03 ; 0,216 ; 0,811 ; 0,0012 ; 0,000315.

41. Biết $\sqrt{9,119} \approx 3,019$. Hãy tính

$\sqrt{911,9}$; $\sqrt{91190}$; $\sqrt{0,09119}$; $\sqrt{0,0009119}$.

42. Dùng bảng căn bậc hai để tìm giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau :

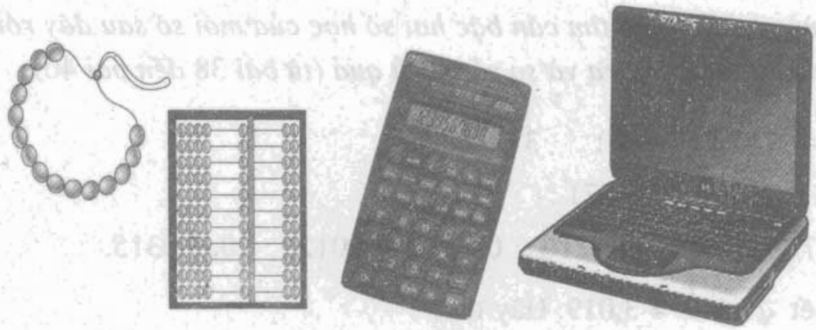
a) $x^2 = 3,5$; b) $x^2 = 132$.

Có thể em chưa biết

Thời xa xưa, con người làm tính bằng cách đếm ngón tay, ngón chân rồi đến đốt ngón tay, đốt ngón chân ; khi gặp các số lớn hơn, người ta dùng hòn sỏi, hạt cây. Sau đó, họ làm ra các bàn tính gảy (có thể bắt đầu do ghép xâu các hạt cây lại). Dùng bàn tính gảy, người ta có thể tính toán được với cả các số thập phân. Hiện nay, bàn tính gảy vẫn còn được sử dụng ngay cả ở các nước rất sẵn máy tính bỏ túi.

Sự phát triển của khoa học, kĩ thuật và nhu cầu thương mại đã đòi hỏi phải đặt ra các bảng tính sẵn. Các nhà thiên văn học, toán học Cô-péc-ních (Ba Lan), Kê-ple (Đức), Nê-pe (Anh) là những người đầu tiên xây dựng kĩ thuật tính toán và đã lập ra nhiều bảng tính sẵn. Bảng số với 4 chữ số thập phân là một dạng bảng tính sẵn như thế.

Ngày nay, những chiếc máy tính bỏ túi gọn nhẹ không chỉ thay thế các bảng tính sẵn để tính một cách nhanh chóng mà còn có độ chính xác cao hơn. Tuy nhiên, cũng như các bàn tính gảy, các bảng tính sẵn vẫn có những ưu thế riêng nên người ta vẫn tiếp tục dùng chúng. Mạnh hơn những chiếc máy tính bỏ túi và cũng dễ dàng mang theo bên người là những chiếc máy tính xách tay.



Chuỗi hạt cây để đếm, bàn tính gảy, chiếc máy tính bỏ túi và chiếc máy tính xách tay.

§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

?1 *Với* $a \geq 0$, $b \geq 0$, *hãy chứng tỏ* $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

• Đẳng thức $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ trong **?1** cho phép ta thực hiện phép biến đổi $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ (với $a \geq 0$, $b \geq 0$) Phép biến đổi này được gọi là phép *đưa thừa số ra ngoài dấu căn.*

• Đôi khi, ta phải biến đổi biểu thức dưới dấu căn về dạng thích hợp rồi mới thực hiện được phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1

a) $\sqrt{3^2.2} = 3\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = \sqrt{2^2.5} = 2\sqrt{5}$.

• Có thể sử dụng phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5}.$$

Giải

$$3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + \sqrt{2^2.5} + \sqrt{5}$$
$$= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5}$$
$$= (3 + 2 + 1)\sqrt{5}$$
$$= 6\sqrt{5}.$$

Các biểu thức $3\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ và $\sqrt{5}$ được gọi là *đồng dạng* với nhau.

?2 *Rút gọn biểu thức*

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$; *b)* $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$.

Một cách tổng quát :

Với hai biểu thức A, B *mà* $B \ge 0$, *ta có* $\sqrt{A^2.B} = |A|\sqrt{B}$, *tức là :*

Nếu $A \ge 0$ *và* $B \ge 0$ *thì* $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$;

Nếu $A < 0$ *và* $B \ge 0$ *thì* $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$.

Ví dụ 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{4x^2y}$ với $x \ge 0, y \ge 0$;

b) $\sqrt{18xy^2}$ với $x \ge 0, y < 0$.

Giải

a) $\sqrt{4x^2y} = \sqrt{(2x)^2y} = |2x|\sqrt{y} = 2x\sqrt{y}$ (với $x \ge 0, y \ge 0$).

b) $\sqrt{18xy^2} = \sqrt{(3y)^2 2x} = |3y|\sqrt{2x} = -3y\sqrt{2x}$ (với $x \ge 0, y < 0$).

?3 *Đưa thừa số ra ngoài dấu căn*

a) $\sqrt{28a^4b^2}$ *với* $b \ge 0$;

b) $\sqrt{72a^2b^4}$ *với* $a < 0$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

• Phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn có phép biến đổi ngược với nó là phép *đưa thừa số vào trong dấu căn.*

Với $A \geq 0$ *và* $B \geq 0$ *ta có* $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$.

Với $A < 0$ *và* $B \geq 0$ *ta có* $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

Ví dụ 4. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $3\sqrt{7}$;

b) $-2\sqrt{3}$;

c) $5a^2\sqrt{2a}$ với $a \geq 0$;

d) $-3a^2\sqrt{2ab}$ với $ab \geq 0$.

Giải

a) $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2.7} = \sqrt{63}$.

b) $-2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2.3} = -\sqrt{12}$.

c) $5a^2\sqrt{2a} = \sqrt{(5a^2)^2.2a} = \sqrt{25a^4.2a} = \sqrt{50a^5}$.

d) $-3a^2\sqrt{2ab} = -\sqrt{(3a^2)^2.2ab} = -\sqrt{9a^4.2ab} = -\sqrt{18a^5b}$.

?4 *Đưa thừa số vào trong dấu căn*

a) $3\sqrt{5}$;

b) $1,2\sqrt{5}$;

c) $ab^4\sqrt{a}$ *với* $a \geq 0$;

d) $-2ab^2\sqrt{5a}$ *với* $a \geq 0$.

• Có thể sử dụng phép đưa thừa số vào trong (hoặc ra ngoài) dấu căn để so sánh các căn bậc hai.

Ví dụ 5. So sánh $3\sqrt{7}$ với $\sqrt{28}$.

Giải

Cách 1. $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2.7} = \sqrt{63}$.

Vì $\sqrt{63} > \sqrt{28}$ nên $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

Cách 2. $\sqrt{28} = \sqrt{2^2.7} = 2\sqrt{7}$. Vì $3\sqrt{7} > 2\sqrt{7}$ nên $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

Bài tập

43. Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{54}$; b) $\sqrt{108}$; c) $0{,}1\sqrt{20000}$;

d) $-0{,}05\sqrt{28800}$; e) $\sqrt{7.63.a^2}$.

44. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$3\sqrt{5}\ ;\ -5\sqrt{2}\ ;\ -\frac{2}{3}\sqrt{xy} \text{ với } xy \geq 0\ ;\ x\sqrt{\frac{2}{x}} \text{ với } x > 0.$$

45. So sánh

a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$; b) 7 và $3\sqrt{5}$;

c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

46. Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$; b) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.

47. Rút gọn

a) $\frac{2}{x^2 - y^2}\sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x \neq y$;

b) $\frac{2}{2a-1}\sqrt{5a^2(1 - 4a + 4a^2)}$ với $a > 0{,}5$.

§7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

(tiếp theo)

1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Khi biến đổi biểu thức chứa căn thức bậc hai, người ta có thể sử dụng phép khử mẫu của biểu thức lấy căn. Dưới đây là một số trường hợp đơn giản.

Ví dụ 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; b) $\sqrt{\dfrac{5a}{7b}}$ với a.b > 0.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2.3}{3.3}} = \dfrac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

b) $\sqrt{\dfrac{5a}{7b}} = \sqrt{\dfrac{5a.7b}{7b.7b}} = \dfrac{\sqrt{5a.7b}}{\sqrt{(7b)^2}} = \dfrac{\sqrt{35ab}}{7|b|}$.

Một cách tổng quát :

Với các biểu thức A, B *mà* A.B ≥ 0 và B ≠ 0, *ta có*

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}.$$

?1 *Khử mẫu của biểu thức lấy căn*

a) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$; *b)* $\sqrt{\dfrac{3}{125}}$; *c)* $\sqrt{\dfrac{3}{2a^3}}$ *với* a > 0.

2. Trục căn thức ở mẫu

Trục căn thức ở mẫu cũng là một phép biến đổi đơn giản thường gặp. Dưới đây là một số trường hợp đơn giản.

Ví dụ 2. Trục căn thức ở mẫu

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{10}{\sqrt{3}+1}$; c) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2.3} = \dfrac{5}{6}\sqrt{3}$.

b) $\dfrac{10}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{10(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{10(\sqrt{3}-1)}{3-1} = 5(\sqrt{3}-1)$.

c) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = 3(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

Trong ví dụ trên ở câu b), để trục căn thức ở mẫu, ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức $\sqrt{3}-1$. Ta gọi biểu thức $\sqrt{3}+1$ và biểu thức $\sqrt{3}-1$ là *hai biểu thức liên hợp với nhau*. Tương tự, ở câu c), ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ là $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Một cách tổng quát :

a) Với các biểu thức A, B *mà* B > 0, *ta có*

$$\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

b) Với các biểu thức A, B, C *mà* $A \geq 0$ *và* $A \neq B^2$, *ta có*

$$\frac{C}{\sqrt{A}\pm B}=\frac{C(\sqrt{A}\mp B)}{A-B^2}.$$

c) Với các biểu thức A, B, C *mà* $A \geq 0$, $B \geq 0$ *và* $A \neq B$, *ta có*

$$\frac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\frac{C(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}.$$

?2 *Trục căn thức ở mẫu :*

a) $\dfrac{5}{3\sqrt{8}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{b}}$ *với* $b > 0$;

b) $\dfrac{5}{5-2\sqrt{3}}$, $\dfrac{2a}{1-\sqrt{a}}$ *với* $a \geq 0$ *và* $a \neq 1$;

c) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$, $\dfrac{6a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ *với* $a > b > 0$.

Bài tập

Khử mẫu của biểu thức lấy căn (các bài 48 và 49)

48. $\sqrt{\dfrac{1}{600}}$; $\sqrt{\dfrac{11}{540}}$; $\sqrt{\dfrac{3}{50}}$; $\sqrt{\dfrac{5}{98}}$; $\sqrt{\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$.

49. $ab\sqrt{\dfrac{a}{b}}$; $\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; $\sqrt{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b^2}}$; $\sqrt{\dfrac{9a^3}{36b}}$; $3xy\sqrt{\dfrac{2}{xy}}$.

(Giả thiết các biểu thức có nghĩa).

Trục căn thức ở mẫu với giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa (từ bài 50 đến bài 52)

50. $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$; $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$; $\dfrac{1}{3\sqrt{20}}$; $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}$; $\dfrac{y+b.\sqrt{y}}{b.\sqrt{y}}$.

51. $\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$; $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; $\dfrac{b}{3+\sqrt{b}}$; $\dfrac{p}{2\sqrt{p}-1}$.

52. $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$; $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; $\dfrac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Luyện tập

53. Rút gọn các biểu thức sau (giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa) :

a) $\sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$;   b) $ab\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2b^2}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{a}{b^4}}$;   d) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

54. Rút gọn các biểu thức sau (giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa) :

$\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}$; $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}$; $\dfrac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$; $\dfrac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$.

55. Phân tích thành nhân tử (với a, b, x, y là các số không âm)

a) $ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$;

b) $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$.

56. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

a) $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{6}$, $\sqrt{29}$, $4\sqrt{2}$;   b) $6\sqrt{2}$, $\sqrt{38}$, $3\sqrt{7}$, $2\sqrt{14}$.

57. $\sqrt{25x}-\sqrt{16x}=9$ khi x bằng

(A) 1 ;   (B) 3 ;   (C) 9 ;   (D) 81.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

Ví dụ 1. Rút gọn $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ với $a > 0$.

Giải. Ta có

$$5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5} = 5\sqrt{a} + \frac{6}{2}\sqrt{a} - a\sqrt{\frac{4a}{a^2}} + \sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt{5} = 6\sqrt{a} + \sqrt{5}.$$

?1 *Rút gọn* $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$ *với* $a \geq 0$.

Rút gọn biểu thức được áp dụng trong nhiều bài toán về biểu thức có chứa căn thức bậc hai.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}.$$

Giải. Biến đổi vế trái, ta có

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2}.$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

?2 *Chứng minh đẳng thức*

$$\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \text{ với } a > 0, b > 0.$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right) \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tìm giá trị của a để $P < 0$.

Giải

a) $P = \left(\dfrac{\sqrt{a}.\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \dfrac{(\sqrt{a}-1)^2-(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}$

$= \left(\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \dfrac{a-2\sqrt{a}+1-a-2\sqrt{a}-1}{a-1} = \dfrac{(a-1)(-4\sqrt{a})}{(2\sqrt{a})^2}$

$= \dfrac{(1-a).4\sqrt{a}}{4a} = \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}.$

Vậy $P = \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b) Do $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $P < 0$ khi và chỉ khi

$$\frac{1-a}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow 1-a < 0 \Leftrightarrow a > 1.$$

?3 *Rút gọn các biểu thức sau :*

a) $\dfrac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$; *b)* $\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ *với* $a \geq 0$ *và* $a \neq 1$.

Bài tập

58. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $5\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{5}$; b) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{4,5}+\sqrt{12,5}$;

c) $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}$; d) $0,1.\sqrt{200}+2\,.\sqrt{0,08}+0,4\,.\sqrt{50}$.

59. Rút gọn các biểu thức sau (với $a > 0$, $b > 0$) :

a) $5\sqrt{a}-4b\sqrt{25a^3}+5a\sqrt{16ab^2}-2\sqrt{9a}$;

b) $5a\sqrt{64ab^3}-\sqrt{3}\,.\sqrt{12a^3b^3}+2ab\sqrt{9ab}-5b\sqrt{81a^3b}$.

60. Cho biểu thức $B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$ với $x \ge -1$.

a) Rút gọn biểu thức B ;

b) Tìm x sao cho B có giá trị là 16.

61. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$;

b) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$.

Luyện tập

Rút gọn các biểu thức sau (các bài 62 và 63) :

62. a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$; b) $\sqrt{150} + \sqrt{1,6}.\sqrt{60} + 4,5.\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$;

c) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$; d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

63. a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$;

b) $\sqrt{\frac{m}{1 - 2x + x^2}}.\sqrt{\frac{4m - 8mx + 4mx^2}{81}}$ với $m > 0$ và $x \neq 1$.

64. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a}\right)^2 = 1$ với $a \ge 0$ và $a \neq 1$;

b) $\frac{a + b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2 + 2ab + b^2}} = |a|$ với $a + b > 0$ và $b \neq 0$.

65. Rút gọn rồi so sánh giá trị của M với 1, biết

$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

66. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$; (B) 1 ; (C) -4 ; (D) 4.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

§9. Căn bậc ba

Có gì khác căn bậc hai không ?

1. Khái niệm căn bậc ba

Bài toán : Một người thợ cần làm một thùng hình lập phương chứa được đúng 64 lít nước.

Hỏi người thợ đó phải chọn độ dài cạnh của thùng là bao nhiêu đêximét ?

Giải

Gọi x (dm) là độ dài cạnh của thùng hình lập phương. Theo bài ra ta có $x^3 = 64$. Ta thấy $x = 4$ vì $4^3 = 64$. Vậy độ dài cạnh của thùng là 4dm.

Từ $4^3 = 64$, người ta gọi 4 là căn bậc ba của 64.

ĐỊNH NGHĨA

> *Căn bậc ba của một số* a *là số* x *sao cho* $x^3 = a$.

Ví dụ 1. 2 là căn bậc ba của 8, vì $2^3 = 8$.

-5 là căn bậc ba của -125, vì $(-5)^3 = -125$.

Ta công nhận kết quả sau :

Mỗi số a *đều có duy nhất một căn bậc ba.*

Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Số 3 gọi là chỉ số của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

➢ ***Chú ý.*** *Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có* $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

?1 *Tìm căn bậc ba của mỗi số sau :*

a) 27 ; *b)* -64 ; *c)* 0 ; *d)* $\frac{1}{125}$.

Giải mẫu. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$.

Nhận xét

Căn bậc ba của số dương là số dương ;

Căn bậc ba của số âm là số âm ;

Căn bậc ba của số 0 là chính số 0.

2. Tính chất

Tương tự tính chất của căn bậc hai, ta có các tính chất sau của căn bậc ba :

a) $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$.

c) Với $b \neq 0$, ta có $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Dựa vào các tính chất trên, ta có thể so sánh, tính toán, biến đổi các biểu thức chứa căn bậc ba.

Ví dụ 2. So sánh 2 và $\sqrt[3]{7}$.

Giải. Ta có $2 = \sqrt[3]{8}$; $8 > 7$ nên $\sqrt[3]{8} > \sqrt[3]{7}$. Vậy $2 > \sqrt[3]{7}$.

Ví dụ 3. Rút gọn $\sqrt[3]{8a^3} - 5a$.

Giải. Ta có $\sqrt[3]{8a^3} - 5a = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{a^3} - 5a = 2a - 5a = -3a$.

?2 *Tính* $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64}$ *theo hai cách.*

Bài tập

67. Hãy tìm

$\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{-729}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $\sqrt[3]{-0,216}$; $\sqrt[3]{-0,008}$.

68. Tính

a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$; b) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54}.\sqrt[3]{4}$.

69. So sánh

a) 5 và $\sqrt[3]{123}$; b) $5\sqrt[3]{6}$ và $6\sqrt[3]{5}$.

Bài đọc thêm

TÌM CĂN BẬC BA NHỜ BẢNG SỐ VÀ MÁY TÍNH BỎ TÚI

1. Tìm căn bậc ba nhờ bảng số

Trong "Bảng số với 4 chữ số thập phân" của V.M. Bra-đi-xơ không có bảng tính sẵn căn bậc ba, nhưng ta có thể dùng bảng lập phương (bảng V) để tìm căn bậc ba của một số cho trước.

a) Giới thiệu bảng lập phương

Bảng lập phương được chia thành các hàng và các cột. Ta cũng quy ước gọi tên của các hàng (cột) theo số được ghi ở cột đầu tiên (hàng đầu tiên) của mỗi trang.

Dùng bảng lập phương ta có thể tìm được lập phương của số từ 1,000 đến 10,00. Với những số được viết bởi không quá ba chữ số, lập phương của nó được tìm trực tiếp từ bảng. Với những số được viết bởi bốn chữ số, ta phải dùng thêm các số ở cột hiệu chính.

b) Cách dùng bảng lập phương tìm căn bậc ba

Ví dụ 1. Tìm $\sqrt[3]{344,5}$.

Ta tìm số 344,5 ở trong bảng. Số 344,5 nằm ở giao của hàng **7,0** và cột **1**, có nghĩa $(7,01)^3 \approx 344,5$.

Vậy $\sqrt[3]{344,5} \approx 7,01$ (mẫu 3).

N	**0**	**1**	...
.			
.			
.			
7,0		344,5	
.			
.			
.			

Mẫu 3

Ví dụ 2. Tìm $\sqrt[3]{103}$.

Do không tìm thấy số 103 ở trong bảng, ta chọn số gần nhất với nó.

Đó là số 103,16 nằm ở giao của hàng **4,6** và cột **9** nên $(4,69)^3 \approx 103,16$. Do đó $\sqrt[3]{103,16} \approx 4,69$. Trên hàng **4,6** ta tìm trong các cột hiệu chính số nào gần với số 16 nhất, ta thấy số 13 (hoặc số 19), nằm ở cột **2** (hoặc cột **3**) hiệu chính. Ta hiệu chính $\sqrt[3]{103,16}$ để xác định $\sqrt[3]{103}$ như sau :

N	...	**9**	**1**	**2**	**3**	...
.						
.						
.						
4,6		103,16		*13*	*19*	
.						
.						
.						

Mẫu 4

$$4,69 - 0,002 = 4,688 \text{ (hoặc } 4,69 - 0,003 = 4,687).$$

Vậy $\sqrt[3]{103} \approx 4,688$ (hoặc $\sqrt[3]{103} \approx 4,687$) (mẫu 4).

Ví dụ 3. Tìm $\sqrt[3]{0,103}$.

Ta biết $0,103 = 103 : 1000$.

Do đó $\sqrt[3]{0,103} = \sqrt[3]{103} : \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{103} : 10$.

Tra bảng tìm $\sqrt[3]{103} \approx 4{,}688$. Vậy $\sqrt[3]{0{,}103} \approx 4{,}688 \times 0{,}1 = 0{,}4688$.

➢ ***Chú ý.*** *Bảng lập phương có nêu hướng dẫn "Khi dời dấu phẩy trong số N đi 1 chữ số thì phải dời dấu phẩy trong số N^3 đi 3 chữ số" nên khi tìm căn bậc ba, ta thực hành như sau :*

Khi dời dấu phẩy trong số N đi 3, 6, 9,... chữ số, ta dời dấu phẩy theo cùng chiều ở số $\sqrt[3]{N}$ đi 1, 2, 3,... chữ số (ví dụ 3 minh hoạ trường hợp dời dấu phẩy ở số 103 sang trái 3 chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số 4,688 sang trái 1 chữ số).

2. Tìm căn bậc ba bằng máy tính bỏ túi

Có thể dùng máy tính bỏ túi có nút bấm $\sqrt[3]{\ }$ để tìm căn bậc ba như sau.

Ví dụ 4. (Trên máy CASIO *fx-220*).

Tính	Nút bấm	Kết quả
$\sqrt[3]{1728}$	$\boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}$	12
$\sqrt[3]{11390{,}625}$	$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{0}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}$	22,5
$\sqrt[3]{-12{,}167}$	$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}$	–2,3

Ví dụ 5. (Trên máy SHARP *EL–500M*)

Tính	Nút bấm	Kết quả
$\sqrt[3]{1728}$	$\boxed{3}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$	12
$\sqrt[3]{11390{,}625}$	$\boxed{3}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{0}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	22,5
$\sqrt[3]{-12{,}167}$	$\boxed{3}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{(-)}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$	–2,3

Ôn tập chương I

Câu hỏi

1. Nêu điều kiện để x là căn bậc hai số học của số a không âm. Cho ví dụ.

2. Chứng minh $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số a.

3. Biểu thức A phải thoả mãn điều kiện gì để $\sqrt{A}$ xác định ?

4. Phát biểu và chứng minh định lí về mối liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương. Cho ví dụ.

5. Phát biểu và chứng minh định lí về mối liên hệ giữa phép chia và phép khai phương. Cho ví dụ.

Các công thức biến đổi căn thức

1) $\sqrt{A^2} = |A|$.

2) $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$).

3) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0$ và $B > 0$).

4) $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).

5) $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$).

$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0$ và $B \geq 0$).

6) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (với $AB \geq 0$ và $B \neq 0$).

7) $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$).

8) $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$ (với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$).

9) $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$ (với $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$).

Bài tập

70. Tìm giá trị các biểu thức sau bằng cách biến đổi, rút gọn thích hợp :

a) $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{196}{9}}$; b) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot2\frac{14}{25}\cdot2\frac{34}{81}}$;

c) $\frac{\sqrt{640}.\sqrt{34,3}}{\sqrt{567}}$; d) $\sqrt{21,6}.\sqrt{810}.\sqrt{11^2-5^2}$.

71. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $(\sqrt{8}-3.\sqrt{2}+\sqrt{10})\sqrt{2}-\sqrt{5}$; b) $0,2\sqrt{(-10)^2.3}+2\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$;

c) $\left(\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}.\sqrt{2}+\frac{4}{5}.\sqrt{200}\right):\frac{1}{8}$; d) $2\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{2.(-3)^2}-5\sqrt{(-1)^4}$.

72. Phân tích thành nhân tử (với các số x, y, a, b không âm và $a \geq b$)

a) $xy-y\sqrt{x}+\sqrt{x}-1$; b) $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}$;

c) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a^2-b^2}$; d) $12-\sqrt{x}-x$.

73. Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $\sqrt{-9a}-\sqrt{9+12a+4a^2}$ tại $a=-9$; b) $1+\frac{3m}{m-2}\sqrt{m^2-4m+4}$ tại $m=1,5$;

c) $\sqrt{1-10a+25a^2}-4a$ tại $a=\sqrt{2}$; d) $4x-\sqrt{9x^2+6x+1}$ tại $x=-\sqrt{3}$.

74. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{(2x-1)^2}=3$;

b) $\frac{5}{3}\sqrt{15x}-\sqrt{15x}-2=\frac{1}{3}\sqrt{15x}$.

75. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}-\frac{\sqrt{216}}{3}\right).\frac{1}{\sqrt{6}}=-1,5$;

b) $\left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-2$;

c) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}:\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a-b$ với a, b dương và $a \neq b$;

d) $\left(1+\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=1-a$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

76. Cho biểu thức

$$Q=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}-\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \text{ với } a>b>0.$$

a) Rút gọn Q ;

b) Xác định giá trị của Q khi $a = 3b$.

Chương II – HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

1. Khái niệm hàm số

• Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x, ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x, và x được gọi là *biến số*.

• Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc bằng công thức,...

Ví dụ 1

a) y là hàm số của x được cho bằng bảng sau :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	6	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

b) y là hàm số của x được cho bằng công thức :

$y = 2x$; $\quad y = 2x + 3$; $\quad y = \frac{4}{x}$.

• Khi hàm số được cho bằng công thức $y = f(x)$, ta hiểu rằng biến số x chỉ lấy những giá trị mà tại đó $f(x)$ xác định. Chẳng hạn, ở các ví dụ trên, giá trị của các biểu thức $2x$, $2x + 3$ luôn luôn xác định với mọi giá trị của x nên trong các hàm số $y = 2x$ và $y = 2x + 3$, biến số x có thể lấy những giá trị tuỳ ý ; còn trong hàm số $y = \frac{4}{x}$, biến số x chỉ lấy những giá trị khác 0, vì giá trị của biểu thức $\frac{4}{x}$ không xác định khi $x = 0$.

• Khi y là hàm số của x, ta có thể viết y = f(x), y = g(x),... Ví dụ, đối với hàm số $y = 2x + 3$, ta còn có thể viết $y = f(x) = 2x + 3$; khi đó, thay cho câu "Khi x bằng 3 thì giá trị tương ứng của y là 9", ta viết f(3) = 9.

• Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y được gọi là *hàm hằng*.

?1 *Cho hàm số* $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

Tính f(0) ; f(1) ; f(2) ; f(3) ; f(−2) ; f(−10).

2. Đồ thị của hàm số

?2 *a) Biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng toạ độ* Oxy :

$A\left(\frac{1}{3}; 6\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, C(1 ; 2), D(2 ; 1), $E\left(3; \frac{2}{3}\right)$, $F\left(4; \frac{1}{2}\right)$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số y = 2x.

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x ; f(x)) trên mặt phẳng toạ độ được gọi là *đồ thị của hàm số* y = f(x). Chẳng hạn, tập hợp các điểm A, B, C, D, E, F vẽ được trong **?2** *a)* là đồ thị của hàm số được cho bằng bảng ở ví dụ 1a) ; tập hợp các điểm của đường thẳng vẽ được trong **?2** *b)* là đồ thị của hàm số y = 2x.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

?3 *Tính giá trị* y *tương ứng của các hàm số* y = 2x + 1 *và* y = −2x + 1 *theo giá trị đã cho của biến* x *rồi điền vào bảng sau :*

x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5
y = 2x + 1									
y = −2x + 1									

a) Xét hàm số $y = 2x + 1$.

Dễ thấy $2x + 1$ xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Qua bảng trên ta thấy : Khi cho x các giá trị tuỳ ý tăng lên thì các giá trị tương ứng của $y = 2x + 1$ cũng tăng lên. Ta nói rằng hàm số $y = 2x + 1$ đồng biến trên **R**.

b) Xét hàm số $y = -2x + 1$, ta thấy :

$-2x + 1$ xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Khi cho x các giá trị tuỳ ý tăng lên thì các giá trị tương ứng của $y = -2x + 1$ lại giảm đi. Ta nói rằng hàm số $y = -2x + 1$ nghịch biến trên **R**.

Một cách tổng quát :

Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định với mọi giá trị của x thuộc* **R**

a) Nếu giá trị của biến x *tăng lên mà giá trị tương ứng* f(x) *cũng tăng lên thì hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là* ***hàm số đồng biến*** *trên* **R** *(gọi tắt là hàm số đồng biến).*

b) Nếu giá trị của biến x *tăng lên mà giá trị tương ứng* f(x) *lại giảm đi thì hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là* ***hàm số nghịch biến*** *trên* **R** *(gọi tắt là hàm số nghịch biến).*

Nói cách khác, với x_1, x_2 *bất kì thuộc* **R** :

Nếu $x_1 < x_2$ *mà* $f(x_1) < f(x_2)$ *thì hàm số* $y = f(x)$ ***đồng biến*** *trên* **R** ;

Nếu $x_1 < x_2$ *mà* $f(x_1) > f(x_2)$ *thì hàm số* $y = f(x)$ ***nghịch biến*** *trên* **R**.

Bài tập

1. a) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x$.

Tính : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$.

b) Cho hàm số $y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$.

Tính : $g(-2)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(3)$.

c) Có nhận xét gì về giá trị của hai hàm số đã cho ở trên khi biến x lấy cùng một giá trị ?

2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

a) Tính các giá trị tương ứng của y theo các giá trị của x rồi điền vào bảng sau :

x	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y = -\frac{1}{2}x + 3$											

b) Hàm số đã cho là hàm số đồng biến hay nghịch biến ? Vì sao ?

3. Cho hai hàm số $y = 2x$ và $y = -2x$.

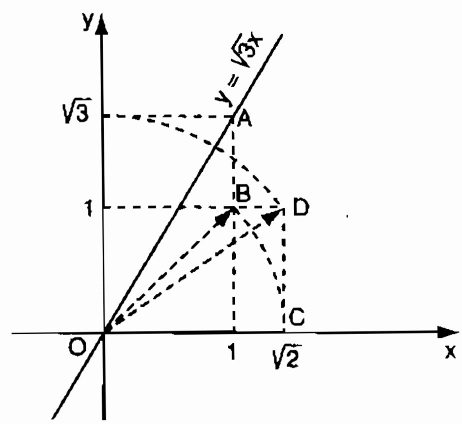
a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Trong hai hàm số đã cho, hàm số nào đồng biến ? Hàm số nào nghịch biến ? Vì sao ?

Luyện tập

4. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x$ được vẽ bằng compa và thước thẳng ở hình 4.

Hãy tìm hiểu và trình bày lại các bước thực hiện vẽ đồ thị đó.

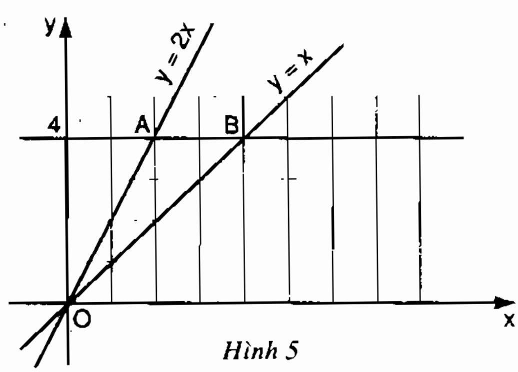


Hình 4

5. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x$ và $y = 2x$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy (h.5).

b) Đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y = 4$ lần lượt cắt các đường thẳng $y = 2x$, $y = x$ tại hai điểm A và B.

Tìm toạ độ của các điểm A, B và tính chu vi, diện tích của tam giác OAB theo đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét.



Hình 5

6. Cho các hàm số $y = 0,5x$ và $y = 0,5x + 2$.

a) Tính giá trị y tương ứng của mỗi hàm số theo giá trị đã cho của biến x rồi điền vào bảng sau :

x	$-2,5$	$-2,25$	$-1,5$	-1	0	1	$1,5$	$2,25$	$2,5$
$y = 0,5x$									
$y = 0,5x + 2$									

b) Có nhận xét gì về các giá trị tương ứng của hai hàm số đó khi biến x lấy cùng một giá trị ?

7. Cho hàm số $y = f(x) = 3x$.

Cho x hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$.

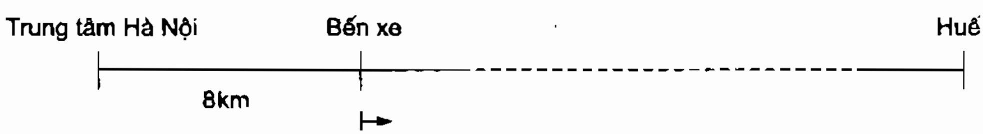
Hãy chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đã cho đồng biến trên **R**.

§2. Hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất có dạng như thế nào ?

1. Khái niệm về hàm số bậc nhất

Bài toán : Một xe ôtô chở khách đi từ bến xe Phía nam Hà Nội vào Huế với vận tốc trung bình 50km/h. Hỏi sau t giờ xe ôtô đó cách trung tâm Hà Nội bao nhiêu kilômét ? Biết rằng bến xe Phía nam cách trung tâm Hà Nội 8km.



?1 *Hãy điền vào chỗ trống (...) cho đúng*

Sau 1 *giờ, ôtô đi được : ...*

Sau t *giờ, ôtô đi được : ...*

Sau t *giờ, ôtô cách trung tâm Hà Nội là :* s = ...

?2 *Tính các giá trị tương ứng của* s *khi cho* t *lần lượt lấy các giá trị* 1 *giờ* ; 2 *giờ* ; 3 *giờ* ; 4 *giờ... rồi giải thích tại sao* s *là hàm số của* t ?

ĐỊNH NGHĨA

> ***Hàm số bậc nhất*** *là hàm số được cho bởi công thức*
> $$y = ax + b$$
> *trong đó* a, b *là các số cho trước và* $a \neq 0$.

➢ ***Chú ý.*** *Khi* $b = 0$, *hàm số có dạng* $y = ax$ *(đã học ở lớp 7).*

2. Tính chất

Để tìm hiểu tính chất của hàm số bậc nhất, trước tiên ta xét ví dụ sau đây :

Ví dụ. Xét hàm số $y = f(x) = -3x + 1$.

Hàm số $y = -3x + 1$ luôn xác định với mọi giá trị của x thuộc **R** vì biểu thức $-3x + 1$ luôn xác định với mọi giá trị của x thuộc **R**.

Khi cho biến x lấy hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ hay $x_2 - x_1 > 0$, ta có

$f(x_2) - f(x_1) = (-3x_2 + 1) - (-3x_1 + 1) = -3(x_2 - x_1) < 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số $y = -3x + 1$ là hàm số nghịch biến trên **R**.

?3 *Cho hàm số bậc nhất* $y = f(x) = 3x + 1$.

Cho x *hai giá trị bất kì* x_1, x_2, *sao cho* $x_1 < x_2$. *Hãy chứng minh* $f(x_1) < f(x_2)$ *rồi rút ra kết luận hàm số đồng biến trên* **R**.

• ***Tổng quát***

> *Hàm số bậc nhất* $y = ax + b$ *xác định với mọi giá trị của* x *thuộc* **R** *và có tính chất sau :*
> *a) Đồng biến trên* **R**, *khi* $a > 0$.
> *b) Nghịch biến trên* **R**, *khi* $a < 0$.

?4 *Cho ví dụ về hàm số bậc nhất trong các trường hợp sau :*

a) Hàm số đồng biến ; *b) Hàm số nghịch biến.*

Bài tập

8. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ? Hãy xác định các hệ số a, b của chúng và xét xem hàm số bậc nhất nào đồng biến, nghịch biến.

a) $y = 1 - 5x$;

b) $y = -0{,}5x$;

c) $y = \sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{3}$;

d) $y = 2x^2 + 3$.

9. Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 2)x + 3$. Tìm các giá trị của m để hàm số :

a) Đồng biến ;

b) Nghịch biến.

10. Một hình chữ nhật có các kích thước là 20cm và 30cm. Người ta bớt mỗi kích thước của hình đó đi x (cm) được hình chữ nhật mới có chu vi là y (cm). Hãy lập công thức tính y theo x.

Luyện tập

11. Hãy biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng toạ độ : A(–3 ; 0), B(–1 ; 1), C(0 ; 3), D(1 ; 1), E(3 ; 0), F(1 ; –1), G(0 ; –3), H(–1 ; –1).

12. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$. Tìm hệ số a, biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2{,}5$.

13. Với những giá trị nào của m thì mỗi hàm số sau là hàm số bậc nhất ?

a) $y = \sqrt{5 - m}\,(x - 1)$;

b) $y = \dfrac{m + 1}{m - 1}x + 3{,}5$.

14. Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{5})\,x - 1$.

a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên **R** ? Vì sao ?

b) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{5}$;

c) Tính giá trị của x khi $y = \sqrt{5}$.

§3. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ như thế nào ?

1. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

?1 *Biểu diễn các điểm sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :*

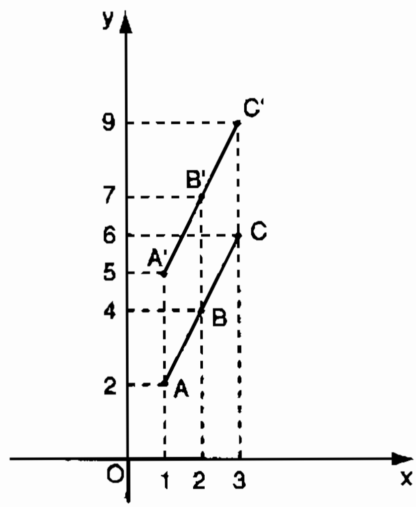
$A(1 ; 2)$, $B(2 ; 4)$, $C(3 ; 6)$,

$A'(1 ; 2 + 3)$, $B'(2 ; 4 + 3)$, $C'(3 ; 6 + 3)$.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy (h.6), với cùng hoành độ thì tung độ của mỗi điểm A', B', C' đều lớn hơn tung độ của mỗi điểm tương ứng A, B, C là 3 đơn vị.

Ta có A'B'//AB và B'C'//BC (vì các tứ giác AA'B'B và BB'C'C đều là hình bình hành).

Từ đó suy ra : Nếu A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng (d) thì A', B', C' cùng nằm trên một đường thẳng (d') song song với (d).



Hình 6

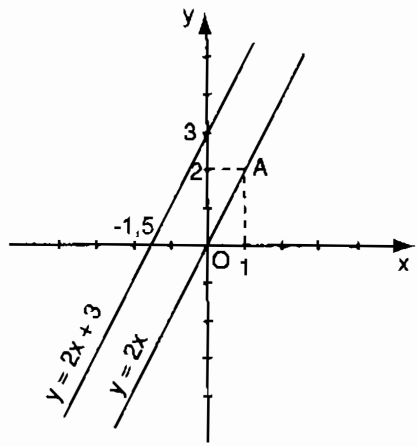
?2 *Tính giá trị y tương ứng của các hàm số* $y = 2x$ *và* $y = 2x + 3$ *theo giá trị đã cho của biến* x *rồi điền vào bảng sau :*

x	–4	–3	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2	3	4
y = 2x											
y = 2x + 3											

Ta thấy rằng :

Với bất kì hoành độ x nào thì tung độ y của điểm thuộc đồ thị hàm số y = 2x + 3 cũng lớn hơn tung độ y tương ứng của điểm thuộc đồ thị hàm số y = 2x là 3 đơn vị.

Ta đã biết, đồ thị của hàm số y = 2x là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O(0 ; 0) và điểm A(1 ; 2). Qua nhận xét ở trên, ta thấy rằng đồ thị của hàm số y = 2x + 3 là một đường thẳng song song với đường thẳng y = 2x và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 (h.7).



Hình 7

• ***Tổng quát***

Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0) *là một đường thẳng :* – *Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng* b ; – *Song song với đường thẳng* y = ax, *nếu* b ≠ 0 ; *trùng với đường thẳng* y = ax, *nếu* b = 0.

➢ ***Chú ý.*** *Đồ thị của hàm số* y = ax + b (a ≠ 0) *còn được gọi là đường thẳng* y = ax + b ; b *được gọi là tung độ gốc của đường thẳng.*

2. Cách vẽ đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0)

• Khi b = 0 thì y = ax. Đồ thị của hàm số y = ax là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O(0 ; 0) và điểm A(1 ; a).

• Xét trường hợp y = ax + b với a ≠ 0 và b ≠ 0.

Ta đã biết đồ thị của hàm số y = ax + b là một đường thẳng. Do đó, để vẽ đồ thị hàm số y = ax + b, ta chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt nào đó thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Trong thực hành, ta thường xác định hai điểm đặc biệt là giao điểm của đồ thị với hai trục toạ độ.

Bước 1. Cho x = 0 thì y = b, ta được điểm P(0 ; b) thuộc trục tung Oy.

Cho y = 0 thì $x = -\frac{b}{a}$, ta được điểm $Q\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ thuộc trục hoành Ox.

Bước 2. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P và Q ta được đồ thị của hàm số y = ax + b.

?3 *Vẽ đồ thị của các hàm số sau :*

a) y = 2x − 3 ;

b) y = −2x + 3.

Bài tập

15. a) Vẽ đồ thị của các hàm số y = 2x ; y = 2x + 5 ; $y = -\frac{2}{3}x$ và $y = -\frac{2}{3}x + 5$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Bốn đường thẳng trên cắt nhau tạo thành tứ giác OABC (O là gốc toạ độ). Tứ giác OABC có phải là hình bình hành không ? Vì sao ?

16. a) Vẽ đồ thị của các hàm số y = x và y = 2x + 2 trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị nói trên, tìm toạ độ điểm A.

c) Vẽ qua điểm B(0 ; 2) một đường thẳng song song với trục Ox, cắt đường thẳng y = x tại điểm C. Tìm toạ độ của điểm C rồi tính diện tích tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét).

Luyện tập

17. a) Vẽ đồ thị của các hàm số y = x + 1 và y = −x + 3 trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

c) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét).

18. a) Biết rằng với $x = 4$ thì hàm số $y = 3x + b$ có giá trị là 11. Tìm b. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị b vừa tìm được.

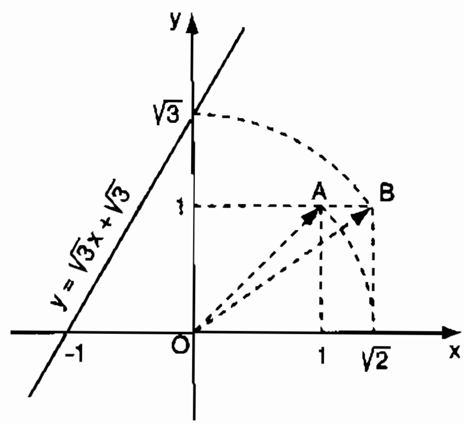
b) Biết rằng đồ thị của hàm số $y = ax + 5$ đi qua điểm $A(-1 ; 3)$. Tìm a. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a vừa tìm được.

19. Đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ được vẽ bằng compa và thước thẳng (h.8).

Hãy tìm hiểu cách vẽ đó rồi nêu lại các bước thực hiện.

Áp dụng. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}$ bằng compa và thước thẳng.

Hướng dẫn. Tìm điểm trên trục tung có tung độ bằng $\sqrt{5}$.



Hình 8

§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Khi nào thì hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ song song với nhau ? Trùng nhau ? Cắt nhau ?

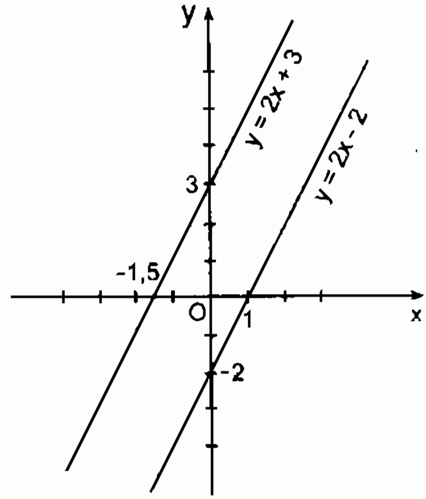
Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ có thể song song, có thể cắt nhau và cũng có thể trùng nhau.

1. Đường thẳng song song

?1 *a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :*

$$y = 2x + 3 \; ; \; y = 2x - 2.$$

b) Giải thích vì sao hai đường thẳng $y = 2x + 3$ *và* $y = 2x - 2$ *song song với nhau ? (h.9).*



Hình 9

• Xét hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$).

Khi $a = a'$ và $b \neq b'$ thì hai đường thẳng đó song song với nhau, vì chúng không trùng nhau và mỗi đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng $y = ax$.

Khi $a = a'$ và $b = b'$ thì hai đường thẳng đó trùng nhau, vì thực chất chúng chỉ là một.

Vậy ta có kết luận sau :

> *Hai đường thẳng* $y = ax + b$ ($a \neq 0$) *và* $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) *song song với nhau khi và chỉ khi* $a = a'$, $b \neq b'$ *và trùng nhau khi và chỉ khi* $a = a'$, $b = b'$.

2. Đường thẳng cắt nhau

?2 *Tìm các cặp đường thẳng cắt nhau trong các đường thẳng sau :*

$y = 0{,}5x + 2$; $\qquad y = 0{,}5x - 1$; $\qquad y = 1{,}5x + 2$.

Khi $a = a'$ thì hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$($a' \neq 0$) song song với nhau hoặc trùng nhau và ngược lại. Do đó, khi $a \neq a'$ thì hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ cắt nhau và ngược lại.

Vậy ta có kết luận sau :

> *Hai đường thẳng* $y = ax + b$ ($a \neq 0$) *và* $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) *cắt nhau khi và chỉ khi* $a \neq a'$.

➢ ***Chú ý.*** *Khi* $a \neq a'$ *và* $b = b'$ *thì hai đường thẳng có cùng tung độ gốc, do đó chúng cắt nhau tại một điểm trên trục tung có tung độ là* b.

3. Bài toán áp dụng

Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2mx + 3$ và $y = (m + 1)x + 2$.

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là :

a) Hai đường thẳng cắt nhau ;

b) Hai đường thẳng song song với nhau.

Giải

Hàm số $y = 2mx + 3$ có các hệ số $a = 2m$ và $b = 3$.

Hàm số $y = (m + 1)x + 2$ có các hệ số $a' = m + 1$ và $b' = 2$.

Các hàm số đã cho là hàm số bậc nhất, do đó các hệ số a và a' phải khác 0, tức là

$$2m \neq 0 \text{ và } m + 1 \neq 0 \text{ hay } m \neq 0 \text{ và } m \neq -1.$$

a) Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$, tức là

$$2m \neq m + 1 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Kết hợp với điều kiện trên, ta có $m \neq 0$, $m \neq -1$ và $m \neq 1$.

b) Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$ và $b \neq b'$.

Theo đề bài, ta có $b \neq b'$ (vì $3 \neq 2$).

Vậy đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$, tức là

$$2m = m + 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Kết hợp với điều kiện trên, ta thấy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Ghi chú. Khi trình bày lời giải, để cho ngắn gọn, có thể không ghi phần nhận xét các hệ số.

Bài tập

20. Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song với nhau trong số các đường thẳng sau :

a) $y = 1,5x + 2$; b) $y = x + 2$; c) $y = 0,5x - 3$;

d) $y = x - 3$; e) $y = 1,5x - 1$; g) $y = 0,5x + 3$.

21. Cho hai hàm số bậc nhất $y = mx + 3$ và $y = (2m + 1)x - 5$.

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là :

a) Hai đường thẳng song song với nhau ;

b) Hai đường thẳng cắt nhau.

22. Cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$.

b) Khi $x = 2$ thì hàm số có giá trị $y = 7$.

Luyện tập

23. Cho hàm số $y = 2x + b$. Hãy xác định hệ số b trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 ;

b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $A(1 ; 5)$.

24. Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$.

Tìm điều kiện đối với m và k để đồ thị của hai hàm số là :

a) Hai đường thẳng cắt nhau ;

b) Hai đường thẳng song song với nhau ;

c) Hai đường thẳng trùng nhau.

25. a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$$y = \frac{2}{3}x + 2 \;; \qquad\qquad y = -\frac{3}{2}x + 2\,.$$

b) Một đường thẳng song song với trục hoành Ox, cắt trục tung Oy tại điểm có tung độ bằng 1, cắt các đường thẳng $y = \frac{2}{3}x + 2$ và $y = -\frac{3}{2}x + 2$ theo thứ tự tại hai điểm M và N. Tìm toạ độ của hai điểm M và N.

26. Cho hàm số bậc nhất $y = ax - 4$ (1). Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

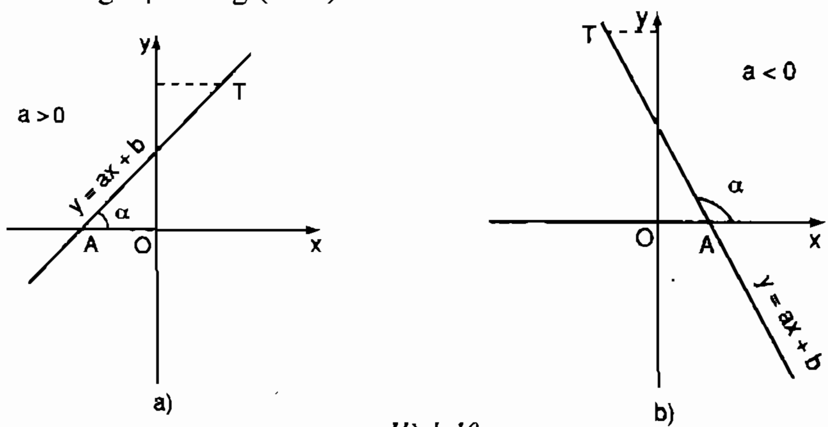
b) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 5.

§5. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

1. Khái niệm hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

a) Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, khi nói góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox (hoặc nói đường thẳng $y = ax + b$ tạo với trục Ox một góc α), ta hiểu đó là góc tạo bởi tia Ax và tia AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng y = ax + b với trục Ox, T là điểm thuộc đường thẳng y = ax + b và có tung độ dương (h.10).

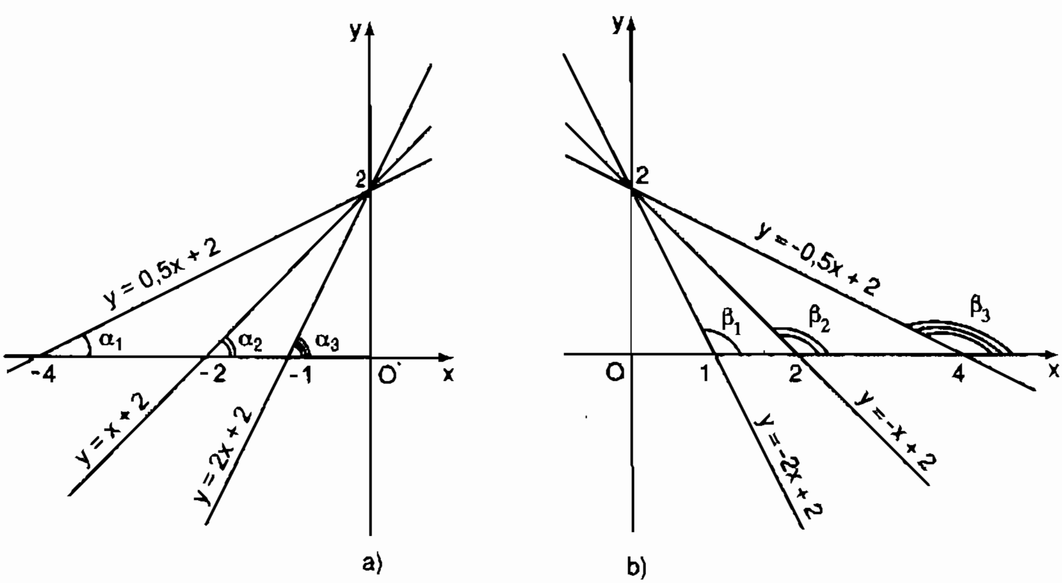


Hình 10

b) Hệ số góc

Với cách hiểu góc tạo bởi đường thẳng y = ax + b và trục Ox như trên, ta thấy rằng : Các đường thẳng song song với nhau sẽ tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

Từ đó suy ra : *Các đường thẳng có cùng hệ số* a *(*a *là hệ số của* x*) thì tạo với trục* Ox *các góc bằng nhau.*



Hình 11

? *Hình 11a) biểu diễn đồ thị của các hàm số (với hệ số* a > 0*) :*

y = 0,5x + 2 ; y = x + 2 ; y = 2x + 2.

Hình 11b) biểu diễn đồ thị của các hàm số (với hệ số $a < 0$*) :*

$y = -2x + 2$; $y = -x + 2$; $y = -0{,}5x + 2$.

a) Hãy so sánh các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *và so sánh các giá trị tương ứng của hệ số* a *trong các hàm số (trường hợp* $a > 0$*) rồi rút ra nhận xét.*

b) Cũng làm tương tự như câu a) với trường hợp $a < 0$.

Qua việc xét đồ thị của các hàm số đã nêu ở trên, ta có thể nói :

– Khi hệ số a dương ($a > 0$) thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc nhọn. Hệ số a càng lớn thì góc càng lớn nhưng vẫn nhỏ hơn 90^o.

– Khi hệ số a âm ($a < 0$) thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc tù. Hệ số a càng lớn thì góc càng lớn nhưng vẫn nhỏ hơn 180^o.

Vì có sự liên quan giữa hệ số a với góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox nên người ta gọi a là *hệ số góc* của đường thẳng $y = ax + b$.

➢ ***Chú ý.*** *Khi* $b = 0$, *ta có hàm số* $y = ax$. *Trong trường hợp này, ta cũng nói rằng* a *là hệ số góc của đường thẳng* $y = ax$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = 3x + 2$.

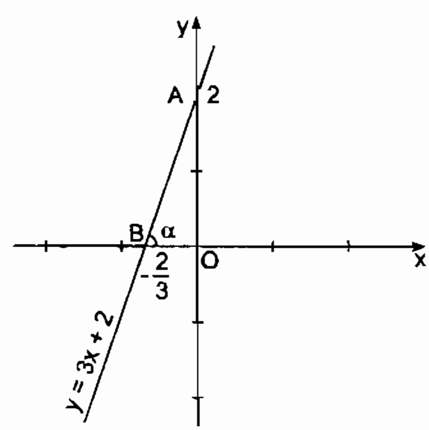
a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = 3x + 2$ và trục Ox (làm tròn đến phút).

Giải

a) Khi $x = 0$ thì $y = 2$, ta được điểm $A(0 ; 2)$.

Khi $y = 0$ thì $x = -\frac{2}{3}$, ta được điểm $B\left(-\frac{2}{3} ; 0\right)$.



Hình 12

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B, ta được đồ thị của hàm số đã cho (h.12).

b) Gọi góc tạo bởi đường thẳng $y = 3x + 2$ và trục Ox là α, ta có $\widehat{ABO} = \alpha$. Xét tam giác vuông OAB, ta có $\text{tg}\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$ (3 chính là hệ số góc của đường thẳng $y = 3x + 2$). Bằng cách tra bảng hoặc tính trên máy tính, ta được $\alpha \approx 71^o34'$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -3x + 3$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

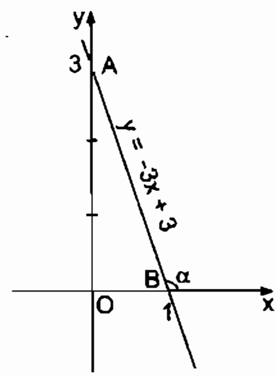
b) Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = -3x + 3$ và trục Ox (làm tròn đến phút).

Giải

a) Khi $x = 0$ thì $y = 3$, ta được điểm A(0 ; 3).

Khi $y = 0$ thì $x = 1$, ta được điểm B(1 ; 0).

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B, ta được đồ thị của hàm số đã cho (h.13).



Hình 13

b) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = -3x + 3$ và trục Ox, ta có $\alpha = \widehat{ABx}$.

Xét tam giác vuông OAB, ta có

$\text{tg}\,\widehat{OBA} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{3}{1} = 3$ (3 chính là giá trị tuyệt đối của hệ số góc -3 của đường thẳng $y = -3x + 3$).

Bằng cách tra bảng hoặc tính trên máy tính, ta được $\widehat{OBA} \approx 71^o34'$.

Vậy $\alpha = 180^o - \widehat{OBA} \approx 108^o26'$.

Bài tập

27. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$.

a) Xác định hệ số góc a, biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm A(2 ; 6).

b) Vẽ đồ thị của hàm số.

28. Cho hàm số $y = -2x + 3$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục Ox (làm tròn đến phút).

Luyện tập

29. Xác định hàm số bậc nhất $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $a = 2$ và đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1,5.

b) $a = 3$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(2 ; 2)$.

c) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ và đi qua điểm $B(1 ; \sqrt{3} + 5)$.

30. a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của các hàm số sau :

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \; ; \qquad\qquad y = -x + 2.$$

b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2$ và $y = -x + 2$ với trục hoành theo thứ tự là A, B và gọi giao điểm của hai đường thẳng đó là C. Tính các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

c) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét).

31. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + 1$; $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

b) Gọi α, β, γ lần lượt là các góc tạo bởi các đường thẳng trên và trục Ox.

Chứng minh rằng $\text{tg}\alpha = 1$, $\text{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{tg}\gamma = \sqrt{3}$.

Tính số đo các góc α, β, γ.

Ôn tập chương II

Câu hỏi

1. Cho hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

a) Khi nào thì hàm số đồng biến ?

b) Khi nào thì hàm số nghịch biến ?

2. Khi nào thì hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ cắt nhau ? Song song với nhau ? Trùng nhau ?

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

1. Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.

2. Hàm số thường được cho bằng bảng hoặc bằng công thức.

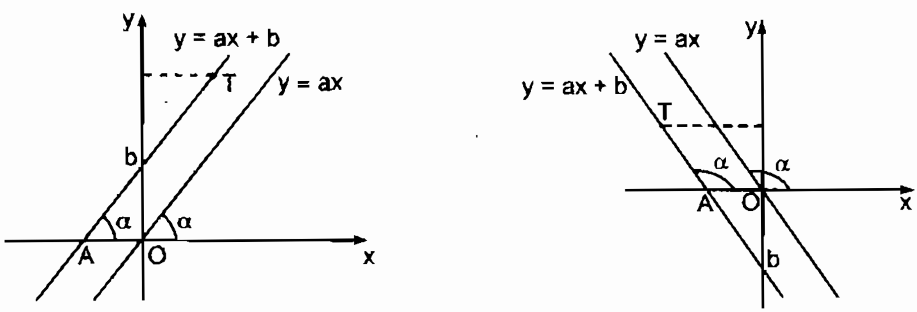
3. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x ; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

4. Hàm số có dạng $y = ax + b$ với $a \neq 0$ được gọi là hàm số bậc nhất đối với biến số x.

5. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của x và có tính chất :

Hàm số đồng biến trên **R** khi $a > 0$, nghịch biến trên **R** khi $a < 0$.

6. Góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và trục Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox, T là điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương (h.14).



Trường hợp $a > 0$ *Trường hợp* $a < 0$

Hình 14

7. a được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

8. Với hai đường thẳng $y = ax + b$ (d) và $y = a'x + b'$ (d'), trong đó a và a' khác 0, ta có :

$a \neq a' \Leftrightarrow$ (d) và (d') cắt nhau ;

$a = a'$ và $b \neq b' \Leftrightarrow$ (d) và (d') song song với nhau ;

$a = a'$ và $b = b' \Leftrightarrow$ (d) và (d') trùng nhau.

Bài tập

32. a) Với những giá trị nào của m thì hàm số bậc nhất $y = (m - 1)x + 3$ đồng biến ?

b) Với những giá trị nào của k thì hàm số bậc nhất $y = (5 - k)x + 1$ nghịch biến ?

33. Với những giá trị nào của m thì đồ thị các hàm số $y = 2x + (3 + m)$ và $y = 3x + (5 - m)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung ?

34. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng $y = (a - 1)x + 2$ $(a \neq 1)$ và $y = (3 - a)x + 1$ $(a \neq 3)$ song song với nhau.

35. Xác định k và m để hai đường thẳng sau đây trùng nhau :

$y = kx + (m - 2)$ $(k \neq 0)$; $y = (5 - k)x + (4 - m)$ $(k \neq 5)$.

36. Cho hai hàm số bậc nhất $y = (k + 1)x + 3$ và $y = (3 - 2k)x + 1$.

a) Với giá trị nào của k thì đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng song song với nhau ?

b) Với giá trị nào của k thì đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng cắt nhau ?

c) Hai đường thẳng nói trên có thể trùng nhau được không ? Vì sao ?

37. a) Vẽ đồ thị hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$y = 0{,}5x + 2$ (1) ; $y = 5 - 2x$ (2).

b) Gọi giao điểm của các đường thẳng $y = 0{,}5x + 2$ và $y = 5 - 2x$ với trục hoành theo thứ tự là A, B và gọi giao điểm của hai đường thẳng đó là C. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC và BC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét) (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

d) Tính các góc tạo bởi các đường thẳng có phương trình (1) và (2) với trục Ox (làm tròn đến phút).

38. a) Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$y = 2x \quad (1)$; $\qquad y = 0{,}5x \quad (2)$; $\qquad y = -x + 6 \quad (3)$.

b) Gọi các giao điểm của đường thẳng có phương trình (3) với hai đường thẳng có phương trình (1) và (2) theo thứ tự là A và B. Tìm toạ độ của hai điểm A và B.

c) Tính các góc của tam giác OAB.

Hướng dẫn câu c)

Tính OA, OB rồi chứng tỏ tam giác OAB là tam giác cân.

Tính $\widehat{AOB} = \widehat{AOx} - \widehat{BOx}$.