THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – NHẮC LẠI ĐỊNH NGHĨA

Hình chóp là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

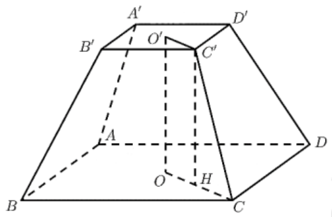
I – THỂ TÍCH

1. Công thức tính thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3}S.h$$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Công thức tính thể tích khối chóp cụt đều



Thể tích của hình chóp cụt là: $\boxed{V = \frac{1}{3}.h.\left(B + B' + \sqrt{B.B'}\right)}$

Trong đó:

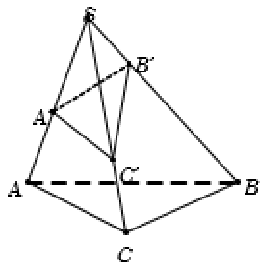
$B,\ B'$ lần lượt là diện tích của đáy lớn và đáy nhỏ của hình chóp cụt.

h: Độ dài chiều cao khối chóp cụt (khoảng cách giữa 2 mặt phẳng chứa 2 đáy; hay khoảng cách từ 1 điểm bất kì trên đáy này đến mặt phẳng chứa đáy kia).

II – TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.$$



Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác đinh được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.

- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.

Ngoài những cách tính thể tích trên, ta còn phương pháp chia nhỏ khối đa diện thành những đa diện nhỏ mà dễ dàng tính toán. Sau đó cộng lại.

Xác định góc giữa hai mặt phẳng.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Tính thể tích khối chóp biết góc giữa hai mặt phẳng..

Phương pháp:

Tìm đường cao của hình và khai thác được giả thiết góc của đề bài

2. Hướng giải:

B1: *Tìm đường cao của hình:* học sinh phải tìm đường cao bằng cách suy ra từ các quan hệ vuông góc giữa đường với đường để chứng minh được đường vuông góc với mặt, hay phục dựng hình ẩn để xác định đường cao.

B2: ● Để *khai thác được giả thiết góc* ta thường làm:

+ Xác định được góc. Trong quá trình xác định góc phải tránh bẫy khi đưa về góc giữa hai đường thẳng cắt nhau nó là góc không tù.

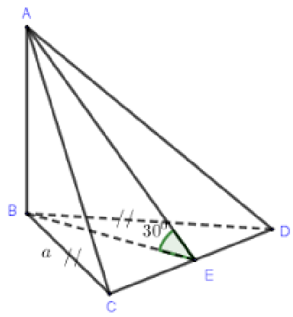
+ Cần chọn ẩn (Là chiều cao hay cạnh đáy nếu giả thiết chưa có) sau đó sử dụng giả thiết góc để tìm ẩn.

- Có thể sử dụng nhiều phương pháp khác ngoài hai cách truyền thống để tính góc giữa hai mặt bên.

Phương pháp khoảng cách:

Giả sử φ là góc giữa hai mặt bên (α) và (β)

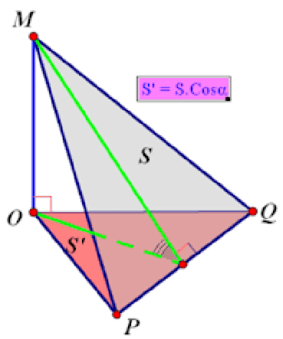
Khi đó: $\sin\varphi = \dfrac{d(M,(\alpha))}{d(M,d)}$ ở đây $d=(\alpha)\cap(\beta), M\in(\beta)$



Phương pháp diện tích hai mặt bên: giả sử φ là góc giữa hai mặt bên (ABC) và (ABD)

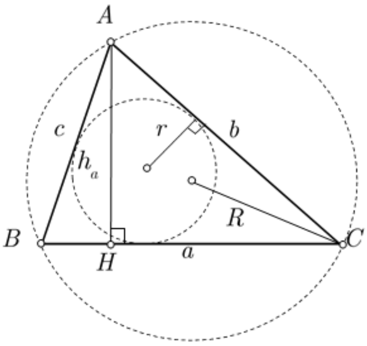
$$V_{ABCD} = \frac{2S_{\Delta ABC}\cdot S_{\Delta ABD}}{3AB}\cdot\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{3.V_{ABCD}\cdot AB}{2S_{\Delta ABC}\cdot S_{\Delta ABD}}$$

Công thức đa giác chiếu: $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$



Diện tích tam giác thường: Cho tam giác ABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi. Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó:

- $$S_{\Delta ABC} = \left| \begin{array}{l} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \\ = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B \\ = \dfrac{abc}{4R} = p.r \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{array} \right.$$



Ứng dụng tích có hướng tính diện tích tam giác

- Cho tam giác ABC có diện tích tam giác ABC tính theo công thức $S = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right\|$
- Ứng dụng tính chiều cao AH của tam giác ABC: $AH = \dfrac{2.S_{ABC}}{BC} = \dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right\|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

Ứng dụng tích có hướng tính thể tích hình chóp

- Thể tích hình chóp $ABCD$ được tính theo công thức $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- Ứng dụng tính chiều cao AH của hình chóp $ABCD$: $AH = \dfrac{3.V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]\right\|}$

Lệnh Casio

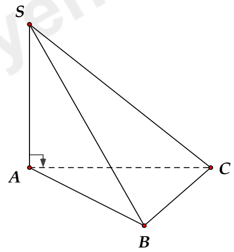
- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto: vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto: vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

a) Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy: Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.

Ví dụ: Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tức $SA \perp (ABC)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.



Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

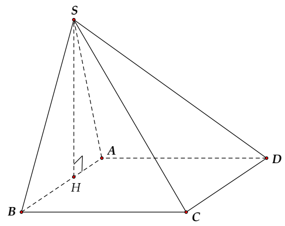
Câu 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 40$. **B.** $V = 192$. **C.** $V = 32$. **D.** $V = 24$.

Dạng 2: Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

b) Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy: Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy.

Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SH là chiều cao của ΔSAB.



Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

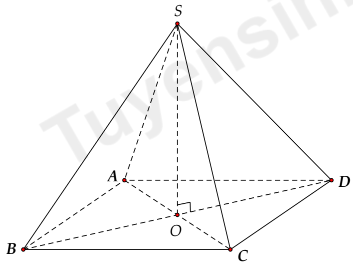
A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

Dạng 3: Khối chóp đều

d) Hình chóp đều:

Chiều cao của hình chóp là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy. Đối với hình chóp đều đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm G của tam giác đều.

__Ví dụ__: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tâm đa giác đáy là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$ thì có đường cao là SO.



Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

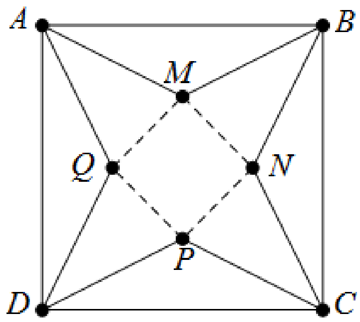
Dạng 4: Khối chóp có hình chiếu lên mặt phẳng đáy

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Dạng 5: Một số dạng khác

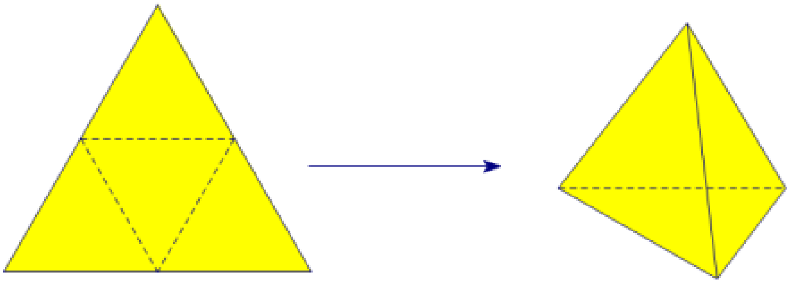
Câu 8. Hình chóp từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $5dm$, người ta muốn cắt bỏ bốn tam giác bằng nhau là AMB, BNC, CPD và DQA sao cho với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành khối chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất.



STT	Phát biểu	Đúng	Sai
1	Độ dài cạnh bên của khối chóp tứ giác đều bằng $2,5\ dm$		
2	Diện tích phần bị cắt bỏ bằng $10dm^2$		
3	Diện tích toàn phần của hình chóp bằng $20dm^2$		
4	Chiều cao của hình chóp bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}dm$		
5	Thể tích của hình chóp bằng $\frac{4\sqrt{10}}{3}dm^3$		

Câu 9. Trong tiết học về hình đa diện đều, cô giáo Hạnh hướng dẫn học sinh tạo ra hình tứ diện đều như sau:

Đầu tiên, cô giáo lấy một miếng bìa hình tam giác đều có cạnh dài $10cm$. Tiếp đó, gấp miếng bìa theo các đường kẻ nối trung điểm giữa các cạnh của miếng bìa *(tham khảo hình vẽ)*. Sau đó, cô giáo dán các mép lại, chúng ta sẽ có một hình tứ diện đều *(giả sử phần bìa tại các mép dán không đáng kể)*.



Mỗi phát biểu sau là **đúng** hay **sai**?

STT	Phát biểu	Đúng	Sai
1	Độ dài cạnh bên của tứ diện đều được tạo ra bằng $10\ cm$		
2	Diện tích toàn phần của hình tứ diện đều được tạo ra bằng $25\sqrt{3}cm^2$		
3	Chiều cao của tứ diện bằng $\frac{5\sqrt{3}}{3}cm$		
4	Thể tích của hình chóp bằng $\frac{4\sqrt{10}}{3}cm^3$		
5	Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều bằng $\frac{5\sqrt{6}}{4}cm$		
6	Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều bằng $75\pi cm^3$		

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.IJKH$ bằng 1.

A. 16. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

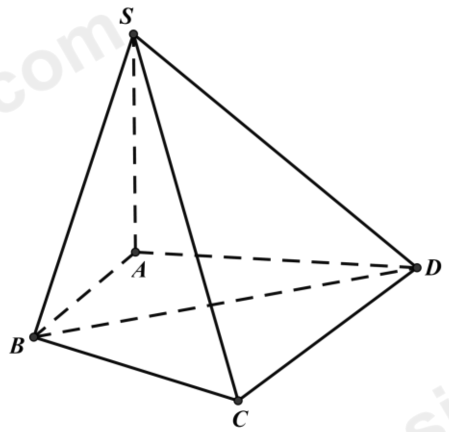
Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 3a^3$ **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V = a^3$ **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60°$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB = 5\sqrt{3}, BC = 3\sqrt{3}$, góc $BAD = BCD = 90°$, $SA = 9$ và SA vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $66\sqrt{3}$, tính cotang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy.



A. $\dfrac{20\sqrt{273}}{819}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{91}}{9}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{273}}{20}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{91}}{9}$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng $\left(SCD\right)$ tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên $\left(SAD\right)$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$

A. $h=\frac{3}{4}a$ **B.** $h=\frac{2}{3}a$ **C.** $h=\frac{4}{3}a$ **D.** $h=\frac{8}{3}a$

Câu 8. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Thể tích tứ diện $SGCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{36}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến $\left(SBC\right)$ là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến $\left(SCA\right)$ là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến $\left(SAB\right)$ là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

A. $\frac{1}{36}$ **B.** $\frac{1}{48}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$