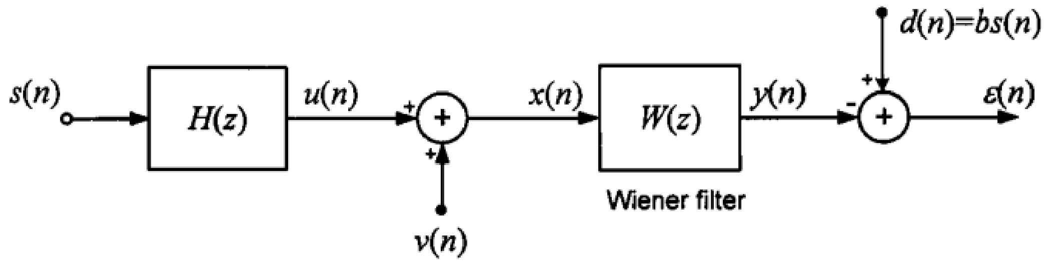
<u>Câu 1</u> (3đ)

Cho hệ thống xử lý tín hiệu ngẫu nhiên được mô tả như Hình 1 như sau:



Hình 1

Tất cả các tín hiệu và hệ số đều là số thực. Tín hiệu ngẫu nhiên $s(n)$ có tính chất trắng có trung bình bằng không và phương sai cho trước là σ_s^2, $v(n)$ là tín hiệu ngẫu nhiên trắng không tương quan với $s(n)$ có trung bình bằng không và phương sai cho trước là σ_v^2. Giả sử tín hiệu tham khảo $d(n) = bs(n)$. Giả sử mô hình AR (1) của hệ thống $H(z)$ được cho bởi:

$$a_1 u(n) + a_2 u(n-1) = s(n)$$

a) Tính hàm tự tương quan $r_u(k)$ ($k = 0, 1$) của tín hiệu $u(n)$.
   (<u>Gợi ý:</u> Dùng phương trình Yule-Walker).
b) Xác định trọng số tối ưu của bộ lọc Wiener (bộ lọc Wiener có đáp ứng xung hữu hạn) để cực tiểu trung bình bình phương của tín hiệu sai lệch $\varepsilon(n)$.
c) Cho nhận xét về ứng dụng của bộ lọc Wiener trong trường hợp ở câu b).

Giải:

a) Áp dụng phương trình Yule-Walker cho hệ H(z):

$$a_1 r_u(l) + a_2 r_u(l-1) = \begin{cases} \sigma_s^2\ ; l = 0 \\ 0\ ; l \neq 0 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} a_1 r_u(0) + a_2 r_u(-1) = \sigma_s^2\ ; l = 0 \\ a_1 r_u(1) + a_2 r_u(0) = 0\ \ ; l = 1 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} a_1 r_u(0) + a_2 r_u(1) = \sigma_s^2 \\ a_1 r_u(1) + a_2 r_u(0) = 0 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} a_1 r_u(0) - a_2^2 r_u(0)/a_1 = \sigma_s^2 \\ r_u(1) = -a_2 r_u(0)/a_1 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} r_u(0) = \dfrac{\sigma_s^2 a_1}{a_1^2 - a_2^2} \\ r_u(1) = -\dfrac{\sigma_s^2 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \end{cases}$$

b) $y(k) = \underline{W}^H \underline{x}(k)$

Áp dụng phương trình Wiener-Hopf:

$w_{opt} = \underline{R}_x^{-1}\underline{p}_{xd}$

Tính $\underline{R}_x$:

$\underline{R}_x = E[x(k)x^H(k)] = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x^*(1) & r_x(0) \end{bmatrix}$

Ta có: $x(k) = u(k) + v(k)$

$$=> r_x(l) = E[x(k)x^*(k-l)] = E[(u(k)+v(k))(u^*(k-l)+v^*(k-l))]$$

$$= E[u(k)u^*(k-l)] + E[v(k)v^*(k-l)] = r_u(l) + r_v(l)$$

$$=> \begin{cases} r_x(0) = r_u(0) + r_v(0) = \dfrac{\sigma_s^2 a_1}{a_1^2 - a_2^2} + \sigma_v^2 \\ r_x(1) = r_u(1) = -\dfrac{\sigma_s^2 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \end{cases}$$

$$=> \underline{R}_x = E[x(k)x^H(k)] = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_s^2 a_1}{a_1^2 - a_2^2} + \sigma_v^2 & -\dfrac{\sigma_s^2 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \\ -\dfrac{\sigma_s^2 a_2}{a_1^2 - a_2^2} & \dfrac{\sigma_s^2 a_1}{a_1^2 - a_2^2} + \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

Tính $\underline{p}_{xd}$:

$$\underline{p}_{xd} = \mathrm{E}\left[\underline{x}(k)\mathrm{d}^*(\mathrm{k})\right] = \mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} x(k)d^*(k) \\ x(k-1)d^*(k) \end{bmatrix}\right\}$$

$$E\{x(k)d^*(k)\} = E\{x(k)bs^*(k)\} = bE\{(u(k)+v(k))(a_1u^*(k) + a_2u^*(k-1))\}$$

$$= bE\{u(k)a_1u^*(k)\} + bE\{u(k)a_2u^*(k-1)\} = a_1br_u(0) + a_2br_u(1)$$

$$E\{x(k-1)d^*(k)\} = E\{x(k-1)bs^*(k)\} = bE\{(u(k-1)+v(k-1))(a_1u^*(k) + a_2u^*(k-1))\}$$

$$= bE\{u(k-1)a_1u^*(k)\} + bE\{u(k-1)a_2u^*(k-1)\} = a_1br_u(1) + a_2br_u(0)$$

$$=> \underline{p}_{xd} = \begin{bmatrix} a_1br_u(0) + a_2br_u(1) \\ a_1br_u(1) + a_2br_u(0) \end{bmatrix}$$

Như vậy:

$$w_{opt} = \underline{R}_x^{-1}\underline{p}_{xd} = \cdots$$

~~c) Bộ lọc Wiener ở câu b để xác định đặc tính của hàm truyền H(z), dùng trong ứng dụng nhận diện hệ thống.~~ → Sai. W(z) mắc song song với H(z) mới được dùng để nhận diện hệ thống.

Bộ lọc Wiener lấy tín hiệu tham chiếu là d[n] = bs[n], do đó, bộ lọc sẽ cố gắng tối ưu tín hiệu x[n] thu được sao cho đầu ra y[n] càng giống bs[n] càng tốt → Ứng dụng bộ lọc Wiener để lọc nhiễu v[n] khỏi tín hiệu x[n] thu được.

Câu 3 (3đ)

Xét mô hình dữ liệu được cho bởi:

$$x[n] = A + B\cos 2\pi f n + w[n]$$

với $n = 0, 1, \dots, N$-1.

a) Giả sử $w[n]$ là tín hiệu nhiễu trắng có hàm mật độ xác suất (pdf) Gauss với trung bình bằng không và phương sai σ^2. Nếu f và σ^2 là biết trước, A và B là các tham số chưa biết và cần ước lượng, tìm ước lượng của A và B. Xác định các CRLB cho ước lượng của A và B.

b) Giả sử $w[n]$ là tín hiệu nhiễu trắng có hàm mật độ xác suất không biết trước với trung bình bằng không và phương sai σ^2. Nếu f và σ^2 là biết trước, $A = 0$, và B là tham số chưa biết và cần ước lượng, tìm ước lượng của B. Xác định CRLB cho ước lượng của B.

a) Vì $\mathrm{w} \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ đã biết trước, nên ta dùng pp Linear Model

Viết lại: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H\theta} + \boldsymbol{w}$

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \dots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\pi f \\ \dots & \dots \\ 1 & \cos 2\pi f\left(N-1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \dots \\ w[N-1] \end{bmatrix}$$

Lời giải của pp Linear Model cho ta

- $\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{H}\right)^{-1} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{x}$

- CRLB = $\left(\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{H}\right)^{-1}$

Với **C** là ma trận tương quan

$$C = \begin{bmatrix} \operatorname{var}\left(w[0]\right) & \operatorname{cov}\left(w[0], w[1]\right) & \dots & \operatorname{cov}\left(w[0], w[N-1]\right) \\ \operatorname{cov}\left(w[1], w[0]\right) & \operatorname{var}\left(w[1]\right) & \dots & \operatorname{cov}\left(w[1], w[N-1]\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cov}\left(w[N-1], w[0]\right) & \operatorname{cov}\left(w[N-1], w[1]\right) & \dots & \operatorname{var}\left(w[N-1]\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$\to C^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Bây giờ tính

$$H^T C^{-1} H = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cos 2\pi f & \dots & \cos 2\pi f\left(N-1\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\pi f \\ \dots & \dots \\ 1 & \cos 2\pi f\left(N-1\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} N & \sum_{k=0}^{N-1}\cos 2\pi kf \\ \sum_{k=0}^{N-1}\cos 2\pi kf & \sum_{k=0}^{N-1}\cos^2 2\pi kf \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N/2 \end{bmatrix} = \frac{N}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\to CRLB = \left(H^T C^{-1} H\right)^{-1} = \frac{\sigma^2}{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tính tiếp

$$\left(H^T C^{-1} H\right)^{-1} H^T C^{-1} x = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cos 2\pi f & \dots & \cos 2\pi f\left(N-1\right) \end{bmatrix} x$$

$$= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2\cos 2\pi f & \dots & 2\cos 2\pi f\left(N-1\right) \end{bmatrix} x$$

Suy ra các ước lượng của A, B

$$\widehat{A} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x\left[k\right]$$

$$\widehat{B} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x\left[k\right]\cos 2k\pi f$$

b) Vì ko bik pdf của w nên dùng pp BLUE

Vì A = 0 nên

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \dots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\pi f \\ \dots \\ \cos 2\pi f\left(N-1\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \dots \\ w[N-1] \end{bmatrix}$$, x = Bs + w

Theo BLUE ta có

- $\widehat{B} = \dfrac{s^T C^{-1} x}{s^T C^{-1} s}$
- $CRLB = \dfrac{1}{s^T C^{-1} s}$

Trước tiên tính

$$s^T C^{-1} s = \frac{1}{\sigma^2}\left[1 \quad \cos 2\pi f \quad \dots \quad \cos 2\pi f\left(N-1\right)\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\pi f \\ \dots \\ \cos 2\pi f\left(N-1\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}\cos^2 2k\pi f \approx \frac{N}{2\sigma^2}$$

Nên CRLB = $\dfrac{2\sigma^2}{N}$

Bây giờ tính

$$s^T C^{-1} x = \frac{1}{\sigma^2}\left[1 \quad \cos 2\pi f \quad \dots \quad \cos 2\pi f\left(N-1\right)\right]x$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1} x\left[k\right]\cos 2k\pi f$$

Nên

$\widehat{B} = \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x\left[k\right]\cos 2k\pi f$ (giống câu a lun)

<u>Câu 2</u> (4đ)

Khảo sát bộ tạo búp sóng (beamformer) dùng dãy anten tuyến tính đều (uniform linear array) với hai phần tử anten, kết hợp với bộ lọc số FIR và giải thuật LCMV (gọi tắt là bộ lọc LCMV). Giả sử có hai tín hiệu cùng tần số băng hẹp không tương quan ở trường xa đến dãy anten. Các phần tử anten đều là những phần tử bức xạ đẳng hướng (omni-directional). Khoảng cách tương đối giữa hai phần tử anten là $\nabla/\lambda = 0{,}5$ với λ là bước sóng của hai tín hiệu trên. Các hướng đến (directions of arrival) của hai tín hiệu trên lần lượt là $\theta_1 = 30°$ và $\theta_2 = -30°$. Hai tín hiệu trên có công suất trung bình lần lượt là $P_1 = 2$ và $P_2 = 1$. Ngoài hai tín hiệu trên, có thêm nhiễu tại ngõ vào bộ lọc LCMV. Giả sử nhiễu có tính chất trắng, có trung bình bằng không và phương sai là 0,1. Nhiễu không tương quan với hai tín hiệu trên.

a) Xác định các vector lái (steering vectors) $\mathbf{a}(\theta_i)$ ($i = 1, 2$) cho hai tín hiệu trên.

b) Tính ma trận tương quan tổng bao gồm hai tín hiệu trên và nhiễu tại ngõ vào bộ lọc LCMV.

c) Xác định vector trọng số tối ưu $\mathbf{w}_o = [w_1, w_2]^T$ của bộ lọc LCMV để cực tiểu công suất ngõ ra $\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$ của bộ tạo búp sóng đồng thời tạo ra độ lợi dãy bằng một tại hướng $\theta_1 = -30°$. Độ lợi dãy được định nghĩa là $\mathbf{w}^H\mathbf{a}(\theta)$.

d) Xác định các vector trọng số tối ưu của bộ lọc LCMV sao cho cực tiểu công suất ngõ ra $\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$ của bộ tạo búp sóng đồng thời tạo ra độ lợi dãy bằng một tại cả hai hướng θ_1 và θ_2.

e) Cho nhận xét về các ứng dụng của các bộ lọc LCMV ở các câu trên.

Giải:

a) Chọn phần tử 1 làm gốc tọa độ.

$$\phi_i = \omega_0 T_n = \frac{2\pi f_0 \nabla \sin\theta_i}{c} = \frac{2\pi \nabla \sin\theta_i}{\lambda} = \pi \sin\theta_i$$

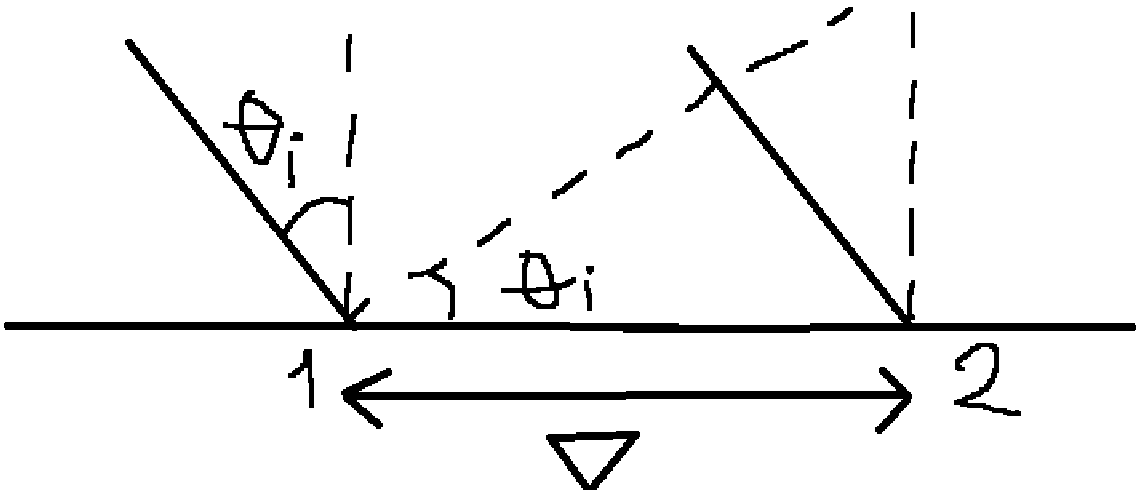
Vector lái:

$$\underline{a}(\phi_1) = \left[1, e^{-j\phi_1}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin\theta_1}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin 30^0}\right]^T = [1, -j]^T$$
$$\underline{a}(\phi_2) = \left[1, e^{-j\phi_2}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin\theta_2}\right]^T = \left[1, e^{j\pi\sin 30^0}\right]^T = [1, j]^T$$

b) Ma trận tương quan:

$$u(n) = s_1(n) + s_2(n) + v(n)$$
$$u(n-1) = s_1(n-1) + s_2(n-1) + v(n-1)$$

Với $v(n) \sim N(0, 0.1)$ là nhiễu.



Ta có: $\underline{u}(n) = [u(n) \quad u(n-1)]^T$

Ma trận tương quan:

$$\underline{R} = E\{\underline{u}(n)\underline{u}^H(n)\}$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} s_1(n) + s_2(n) + v(n) \\ s_1(n-1) + s_2(n-1) + v(n-1) \end{bmatrix} [s_1^*(n) + s_2^*(n) + v^*(n) \quad s_1^*(n-1) + s_2^*(n-1) + v^*(n-1)]\right\}$$

$$= E\left\{\left[\underline{s_1}(n) + \underline{s_2}(n) + \underline{v}(n)\right]\left[\underline{s_1^H}(n) + \underline{s_2^H}(n) + \underline{v^H}(n)\right]\right\}$$

$$= E\left\{\underline{s_1}(n)\underline{s_1^H}(n)\right\} + E\left\{\underline{s_2}(n)\underline{s_2^H}(n)\right\} + E\{\underline{v}(n)\underline{v^H}(n)\}$$

$$= \underline{R_1} + \underline{R_2} + \underline{V}$$

Tính $\underline{R_1}$:

$$\underline{R_1} = E\left\{\underline{s_1}(n)\underline{s_1}^H(n)\right\}$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_1(n-1) \end{bmatrix} [s_1^*(n) \quad s_1^*(n-1)]\right\}$$

$$= E\left\{s_1(n)s_1^*(n)\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\phi_1} \end{bmatrix} [1 \quad e^{j\phi_1}]\right\}$$

$$= P_1\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}[1 \quad j] = 2\begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

Tính $\underline{R_2}$:

$$\underline{R_2} = E\left\{\underline{s_2}(n)\underline{s_2}^H(n)\right\}$$

$$= P_2\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}[1 \quad -j] = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix}$$

Tính $\underline{V}$:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\underline{R} = \underline{R_1} + \underline{R_2} + \underline{V} = 2\begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 & j \\ -j & 3.1 \end{bmatrix}$$

c) $\underline{R}^{-1} = \frac{1}{8.61}\begin{bmatrix} 3.1 & -j \\ j & 3.1 \end{bmatrix}$

Tại $\theta_1 = 30^0$, hệ số của bộ lọc Wiener:

$$\underline{w_{opt}} = \frac{g\underline{R}^{-1}\underline{a}(\phi_2)}{\underline{a^H}(\phi_2)\underline{R}^{-1}\underline{a}(\phi_2)} = \frac{1\frac{1}{8.61}\begin{bmatrix} 3.1 & -j \\ j & 3.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix}\frac{1}{8.61}\begin{bmatrix} 3.1 & -j \\ j & 3.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 4.1 \\ 4.1j \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4.1 \\ 4.1j \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 4.1 \\ 4.1j \end{bmatrix}}{8.2} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5j \end{bmatrix}$$

d) Cần tạo độ lợi bằng 1 tại θ_1 và θ_2 nghĩa là

$$w_0^H a(\Phi_1) = g_1^*$$

$$w_0^H a(\Phi_2) = g_2^*$$

Ta cần cực tiểu hàm sau

$$J = w^H R w + \lambda_1(w^H a(\Phi_1) - g_1^*) + \lambda_2(w^H a(\Phi_2) - g_2^*)$$

$$\frac{dJ}{dw} = 2Rw + \lambda_1 a(\Phi_1) + \lambda_2 a(\Phi_2) = 0$$

$$w_0 = -\frac{1}{2}R^{-1}[\lambda_1 a(\Phi_1) + \lambda_2 a(\Phi_2)]$$

$$w_0 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{8.61}\begin{bmatrix} 3.1 & -j \\ j & 3.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ j(-\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{17.22}\begin{bmatrix} 3.1(\lambda_1 + \lambda_2) + (-\lambda_1 + \lambda_2) \\ j(\lambda_1 + \lambda_2) + 3.1j(-\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \frac{1}{17.22}\begin{bmatrix} 2.1\lambda_1 + 4.2\lambda_2 \\ -2.1j\lambda_1 + 4.2j\lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{17.22}\begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -j\lambda_1 + 2j\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$w_0^H a(\Phi_1) = g_1^*$$

$$w_0^H a(\Phi_2) = g_2^*$$

$$\frac{1}{17.22}\begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 & j\lambda_1 - 2j\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{1}{17.22}\begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 & j\lambda_1 - 2j\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = 1$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 17.22$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 17.22$$

$$\lambda_1 = \frac{17.22}{2} = 8.61$$

$$\lambda_2 = \frac{17.22}{4} = 4.305$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} \\ -\frac{j1}{2} + \frac{2j}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Bộ lọc LCMV câu c: Tập trung thu sóng tín hiệu đến từ 1 góc -30° → Tín hiệu đến có góc 30^0 có độ lợi bằng 1, còn các góc khác thì <1 → Lọc tín hiệu theo không gian.
Bộ lọc LCMV câu d: Tập trung thu sóng tín hiệu đến từ 2 góc 30° và -30° → Tín hiệu đến có góc 30^0 và -30° có độ lợi bằng 1, còn các góc khác thì <1 → Lọc tín hiệu theo không gian, anten có thể thu được đồng thời tín hiệu đến từ 2 user khác nhau ở 2 góc đến khác nhau (MIMO).

f)

Câu 2 (5đ)

Khảo sát bộ tạo búp sóng (beamformer) dùng dãy anten tuyến tính đều (uniform linear array) với hai phần tử anten, kết hợp với bộ lọc số FIR và giải thuật LCMV (gọi tắt là bộ lọc LCMV). Giả sử có một tín hiệu băng hẹp ở trường xa đến dãy anten với hướng đến (directions of arrival) là θ= 30°. Các phần tử anten đều là những phần tử bức xạ đẳng hướng (omni-directional). Khoảng cách tương đối giữa hai phần tử anten là $\nabla/\lambda = 0{,}5$ với λ là bước sóng của tín hiệu trên. Tín hiệu trên có công suất trung bình là $P_1 = 1$.

Ngoài tín hiệu trên, có thêm nhiễu tại ngõ vào bộ lọc LCMV. Giả sử nhiễu có tính chất trắng, có trung bình bằng không, phương sai là 0,1 và không tương quan với tín hiệu.

a) Xác định các vector lái (steering vectors) $\mathbf{a}(\theta)$ cho nguồn tín hiệu trên.

b) Tính ma trận tương quan tổng bao gồm tín hiệu và nhiễu tại ngõ vào bộ lọc LCMV.

c) Xác định vector trọng số tối ưu $\mathbf{w}_o = [w_1, w_2]^T$ của bộ lọc LCMV để cực tiểu công suất ngõ ra $\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$ của bộ tạo búp sóng đồng thời tạo ra độ lợi dãy bằng một tại hướng tín hiệu θ= 30°. Độ lợi dãy được định nghĩa là $\mathbf{w}^H\mathbf{a}(\theta)$.

Giả sử có thêm một nguồn can nhiễu băng hẹp ở trường xa đến dãy anten với hướng đến là γ = -30°. Nguồn can nhiễu có tần số trùng với nguồn tín hiệu, nhưng không tương quan với nguồn tín hiệu và nguồn nhiễu ở trên. Công suất trung bình của nguồn can nhiễu là $P_2 = 2$.

d) Xác định vector trọng số tối ưu mới của bộ lọc LCMV sao cho cực tiểu công suất ngõ ra $\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$ của bộ tạo búp sóng đồng thời vẫn tạo ra độ lợi dãy bằng một tại hướng nguồn tín hiệu θ = 30°.

e) Cho nhận xét về ứng dụng của bộ lọc LCMV ở các câu trên.

Giải:

a) Chọn phần tử 1 làm gốc tọa độ.

$$\phi_i = \omega_0 T_n = \frac{2\pi f_0 \nabla \sin\theta_i}{c} = \frac{2\pi\nabla\sin\theta_i}{\lambda} = \pi\sin\theta_i$$

Vector lái:

$$\underline{a}(\phi) = \left[1, e^{-j\phi}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin\theta}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin 30^0}\right]^T = [1, -j]^T$$

b) Ma trận tương quan:

$$u(n) = s(n) + v(n)$$
$$u(n-1) = s(n-1) + v(n-1)$$

Với $v(n) \sim N(0, 0.1)$ là nhiễu.

Ta có: $\underline{u}(n) = [u(n) \quad u(n-1)]^T$

Ma trận tương quan:

$$\underline{R} = E\{\underline{u}(n)\underline{u}^H(n)\}$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} s(n) + v(n) \\ s(n-1) + v(n-1) \end{bmatrix} [s^*(n) + v^*(n) \quad s_1^*(n-1) + v^*(n-1)]\right\}$$

$$= E\{[\underline{s}(n) + \underline{v}(n)][\underline{s^H}(n) + \underline{v^H}(n)]\}$$

$$= E\{\underline{s}(n)\underline{s^H}(n)\} + +E\{\underline{v}(n)\underline{v^H}(n)\}$$

$$= \underline{R_s} + \underline{V}$$

Tính $\underline{R_1}$:

$$\underline{R_s} = E\{\underline{s}(n)\underline{s^H}(n)\}$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} s(n) \\ s(n-1) \end{bmatrix} [s^*(n) \quad s^*(n-1)]\right\}$$

$$= E\left\{s(n)s^*(n)\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\theta_1} \end{bmatrix} [1 \quad e^{j\theta_1}]\right\}$$

$$= P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} [1 \quad j] = 2\begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

Tính $\underline{V}$:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\underline{R} = \underline{R_s} + \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & j \\ -j & 1.1 \end{bmatrix}$$

c) $\underline{R}^{-1} = \frac{1}{0.21}\begin{bmatrix} 1.1 & -j \\ j & 1.1 \end{bmatrix}$

Tại $\theta = 30^0$, độ lợi của bộ lọc Wiener:

$$\underline{w_{opt}} = \frac{g\underline{R}^{-1}\underline{a}(\phi)}{\underline{a}^H(\phi)\underline{R}^{-1}\underline{a}(\phi)} = \frac{1\frac{1}{0.21}\begin{bmatrix} 1.1 & -j \\ j & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}}{[1 \quad j]\frac{1}{0.21}\begin{bmatrix} 1.1 & -j \\ j & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1j \end{bmatrix}}{[0.1 \quad 0.1j]\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1j \end{bmatrix}}{0.2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5j \end{bmatrix}$$

d) Làm giống như câu 2 bên trên.

Câu 3 (2đ)

Xem xét mô hình dữ liệu ngẫu nhiên được cho bởi:

$$x[n] = A + w[n].$$

Các kết quả ngẫu nhiên nhận được từ các thí nghiệm được cho bởi bảng sau

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$	4.9	4.8	5.0	5.1	5.0	5.2	5.0	4.7	5.1	5.0

a) Giả sử $w[n]$ là quá trình ngẫu nhiên trắng có phân bố Gauss với trung bình bằng 0 và phương sai σ^2=1. Thông số A là chưa biết và cần ước lượng. Tìm ước lượng của A và CRLB của ước lượng của A.

b) Trong câu này, giả sử $w[n]$ là quá trình ngẫu nhiên trắng với trung bình bằng 0 và phương sai σ^2=1. Hàm mật độ xác suất (probability density function) của $w[n]$ là không biết. Thông số A là chưa biết và cần ước lượng. Tìm ước lượng của A và CRLB của ước lượng của A.

Giải:

a) Vì $\mathrm{w} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ đã biết trước, nên ta dùng pp Linear Model

Viết lại: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{w}$

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \ldots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} [A] + \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \ldots \\ w[N-1] \end{bmatrix}$$

Lời giải của pp Linear Model cho ta

- $\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{H}\right)^{-1} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{x}$

- CRLB = $\left(\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{H}\right)^{-1}$

Với **C** là ma trận tương quan

$$C=\begin{bmatrix} \mathrm{var}(w[0]) & \mathrm{cov}(w[0],w[1]) & \dots & \mathrm{cov}(w[0],w[N-1]) \\ \mathrm{cov}(w[1],w[0]) & \mathrm{var}(w[1]) & \dots & \mathrm{cov}(w[1],w[N-1]) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{cov}(w[N-1],w[0]) & \mathrm{cov}(w[N-1],w[1]) & \dots & \mathrm{var}(w[N-1]) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$\to C^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Bây giờ tính

$$H^T C^{-1} H=\frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}N$$

$$\to CRLB=\left(H^T C^{-1} H\right)^{-1}=\frac{\sigma^2}{N}$$

Tính tiếp

$$\left(H^T C^{-1} H\right)^{-1} H^T C^{-1} x=\frac{\sigma^2}{N}\frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} x$$

$$=\frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} x$$

Suy ra các ước lượng của A,

$$A=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]=\frac{1}{10}(4.9+4.8+5+5.1+5+5.2+5+4.7+5.1+5)=4.98$$

c) Vì ko bik pdf của w nên dùng pp BLUE

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \dots \\ x[N-1] \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \dots \\ w[N-1] \end{bmatrix}$$, x = Bs + w

Theo BLUE ta có

- $A = \frac{s^T C^{-1} x}{s^T C^{-1} s}$

- $CRLB = \frac{1}{s^T C^{-1} s}$

Trước tiên tính

$$s^T C^{-1} s = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{\sigma^2}$$

Nên CRLB = $\frac{\sigma^2}{N}$ (giống câu a)

Bây giờ tính

$$s^T C^{-1} x = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} x$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]$$

Nên

$A = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] = \frac{1}{10}(4.9 + 4.8 + 5 + 5.1 + 5 + 5.2 + 5 + 4.7 + 5.1 + 5) = 4.98$ (giống câu a lun)

Problem 3

There uncorrelated narrowband signals located in far-field are impinging at a uniform linear array with two antennas. The antenna elements are omni-directional. The relative distance between two antennas is $\nabla/\lambda = 0.5$, where λ is the wavelength of the signals. The directions of arrival are $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 0°$, $\theta_3 = -30°$. The signals are with the receive powers P_1=1, P_2=2 and P_3=1.

a) Determine the array steering vectors $\mathbf{a}(\theta_i)$ (i =1, 2, 3) for three signals above.
b) Calculate the correlation matrix $\mathbf{R}_i$ of three signals above (i =1, 2, 3).
c) Calculate the total receive correlation matrix $\mathbf{R}$.
d) Compute the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the total receive correlation matrix $\mathbf{R}$.
e) Calculate the beamforming vector $\mathbf{w}$ that minimizes the output power $\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$ of the LCMV filter, while providing an array gain of one in the direction $\theta_1 = 30°$, where the array gain is defined by $\mathbf{w}^H\mathbf{a}(\theta)$.

Giải:

a) Chọn phần tử 1 làm gốc tọa độ.

$$\phi_i = \omega_0 T_n = \frac{2\pi f_0 \nabla \sin\theta_i}{c} = \frac{2\pi\nabla\sin\theta_i}{\lambda} = \pi\sin\theta_i$$

Vector lái:

$$\underline{a}(\phi_1) = \left[1, e^{-j\phi_1}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin\theta_1}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin 30^0}\right]^T = [1, -j]^T$$
$$\underline{a}(\phi_2) = \left[1, e^{-j\phi_2}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin\theta_2}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin 0^0}\right]^T = [1, 1]^T$$
$$\underline{a}(\phi_3) = \left[1, e^{-j\phi_2}\right]^T = \left[1, e^{-j\pi\sin\theta_2}\right]^T = \left[1, e^{j\pi\sin 30^0}\right]^T = [1, j]^T$$

b)

Ma trận tương quan:

$$u(n) = s_1(n) + s_2(n) + s_3(n)$$
$$u(n-1) = s_1(n-1) + s_2(n-1) + s_3(n-1)$$

Ma trận tương quan:

$$\underline{R} = E\{\underline{u}(n)\underline{u}^H(n)\}$$

$$= E\left\{\underline{s_1}(n)\underline{s_1^H}(n)\right\} + E\left\{\underline{s_2}(n)\underline{s_2^H}(n)\right\} + E\{\underline{v}(n)\underline{v^H}(n)\}$$

$$= \underline{R_1} + \underline{R_2} + \underline{R_3}$$

Tính $\underline{R_1}$:

$$\underline{R_1} = E\left\{\underline{s_1}(n)\underline{s_1}^H(n)\right\}$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_1(n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^*(n) & s_1^*(n-1) \end{bmatrix}\right\}$$

$$= E\left\{s_1(n)s_1^*(n)\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\theta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\theta_1} \end{bmatrix}\right\}$$

$$= P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

Tính $\underline{R_2}$:

$$\underline{R_2} = E\left\{\underline{s_2}(n)\underline{s_2}^H(n)\right\}$$

$$= P_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính $\underline{R_3}$:

$$\underline{R_3} = E\left\{\underline{s_3}(n)\underline{s_3}^H(n)\right\}$$

$$= P_3 \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix}$$

c) Ma trận tương quan tổng:

$$\underline{R} = E\{\underline{u}(n)\underline{u}^H(n)\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

d) Tính trị riêng và vector riêng của ma trận tương quan tổng:

$$\left|\underline{R} - \lambda\underline{I}\right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$=> \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$$

Với $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 => X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Chuẩn hóa:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Với $\lambda_2 = 6$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 => X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chuẩn hóa:

$$X_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e) $\underline{R}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Tại $\theta_1 = 30^0$, độ lợi của bộ lọc Wiener:

$$\underline{w_{opt}} = \frac{g\underline{R}^{-1}\underline{a}(\phi_1)}{\underline{a}^H(\phi_1)\underline{R}^{-1}\underline{a}(\phi_1)} = \frac{1\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}}{[1 \quad j]\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 4+2j \\ -2-4j \end{bmatrix}}{[4-2j \quad -2+4j]\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 4+2j \\ -2-4j \end{bmatrix}}{4-2j+2j+4} = \begin{bmatrix} 0.5+0.25j \\ -0.25-0.5j \end{bmatrix}$$