Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 10

B: Hausaufgaben zum 3. Juli 2014

2. a) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $x^2 + 2x - 35 = 0$;

(ii) $x^2 + 2x + 10 = 0$;

(iii) $x^2 - 18x + 81 = 0$.

b) Es seien $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 3 + 2i$ und $z = \frac{z_1}{z_2}$. Stellen Sie z in der Form $a + ib$ dar.

c) Die komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_4$ seien gegeben durch

$$z_1 = -1 - i, \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad z_3 = z_1 \cdot z_2 \quad \text{sowie} \quad z_4 = \overline{z_1}.$$

Geben Sie in einer Skizze die Lage von $z_1, \ldots, z_4$ in der Gaußschen Zahlenebene an.

d) Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene durch geometrische Begriffe (wie z.B. Kreis, Mittelpunkt, Radius, Gerade, ...):

(i) $M_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - (2 + 3i)| = 2\right\}$;

(ii) $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = |z - (1 + 2i)|\right\}$.

a) (i) $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+35} \Rightarrow x_1 = -7,\ x_2 = 5$

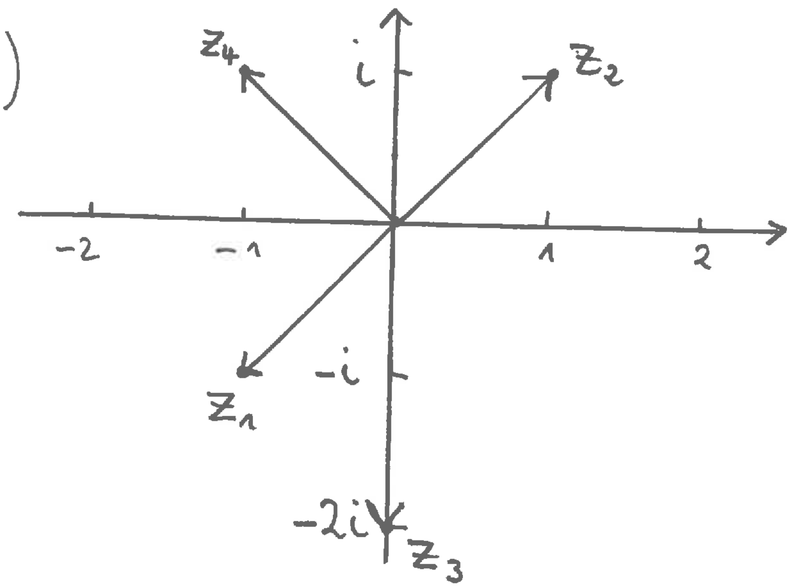
(ii) $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-10} \Rightarrow x_1 = -1 + i3,$
$x_2 = -1 - i3.$

(iii) $x_{1/2} = 9 \pm \sqrt{9-9} \Rightarrow x_1 = x_2 = 9$

b) $$z = \frac{4-3i}{3+2i} = \frac{(4-3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-8i-9i-6}{13}$$

$$= \frac{6-17i}{13} = \frac{6}{13} + \frac{-17}{13}i$$

c)



d) (i) M_1 ist die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^2$, deren Abstand vom Punkt $(2,3)$ gleich 2 ist. Es handelt sich also um den Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $(2,3)$.

(ii) Bei M_2 handelt es sich um die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^2$, die denselben Abstand von den Punkten $(0,1)$ und $(1,2)$ haben. Es handelt sich also um die Gerade durch die beiden Punkte $(0,2)$ und $(1,1)$.

3. Eine zu Aufgabe 4 von Blatt 9 ähnliche Aufgabe, die diesmal jedoch mit der *Lagrange-Methode* gelöst werden soll: Ein Unternehmen produziert zwei Sorten eines Gutes. Beim Verkauf von x bzw. y Einheiten sei der Gewinn pro Tag gegeben durch

$$f(x,y) = -0.2x^2 - 0.2xy - 0.1y^2 + 48x + 47y - 500.$$

Ähnlich wie in Aufgabe 4 von Blatt 9 ist eine Nebenbedingung zu berücksichtigen, die in Form einer Gleichung vorliegt:

$$x + y = 200. \tag{$\star$}$$

Gesucht sind x und y, so dass der Gewinn $f(x,y)$ maximal wird.

a) Stellen Sie die dazugehörige Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda)$ auf und bestimmen Sie die einzige kritische Stelle (x,y) von f unter der Nebenbedingung $(\star)$.

b) Zeigen Sie mithilfe der geänderten Hesseschen Matrix, dass an der gefundenen Stelle ein lokales Maximum vorliegt.

a) $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ für $g(x,y) = x + y - 200$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = -0.4x - 0.2y + 48 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = -0.2x - 0.2y + 47 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x + y - 200 = 0$$

Eindeutig bestimmte Lösung:

$(x,y,\lambda) = (5, 195, -7)$.

Es folgt, dass die einzige kritische Stelle von f unter der Nebenbedingung $(\star)$ wie folgt lautet: $(x,y) = (5, 195)$.

b) Die geränderte Hessesche Matrix $\bar{H}$ lautet:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0.4 & -0.2 \\ 1 & -0.2 & -0.2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det \bar{H} = -\begin{vmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & -0.2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -0.4 \\ 1 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.2 > 0$,
also liegt ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung $(*)$ vor.