

ALA BLATTNR. 05 08.05.2014

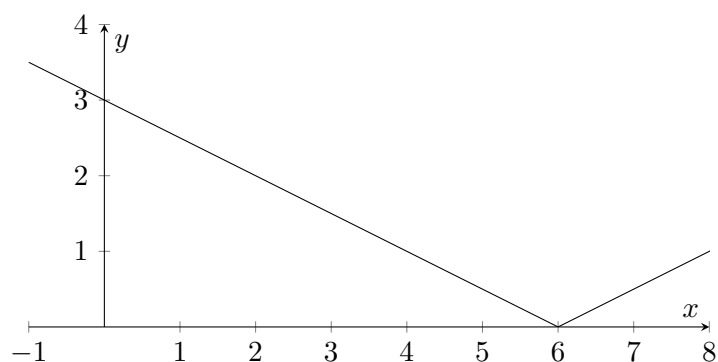
Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

8. Mai 2014

1. **TODO**

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{f(x) - f(6)}{x - 6} \right) &= \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{|3 - \frac{1}{2}x| - |3 - \frac{1}{2} \cdot 6|}{x - 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{|3 - \frac{1}{2}x|}{x - 6} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 6} \left(\sqrt{\frac{(3 - \frac{1}{2}x)^2}{(x - 6)^2}} \right) &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{9 - 3x + \frac{1}{4}x^2}{x^2 - 2x + 36} \right)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



3. a)

Umformen:

$$f(x) = (x + 1)^{x+2} = e^{\ln(x+1)^{x+2}} = e^{\ln(x+1)(x+2)}$$

Differenzieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\ln(x+1)(x+2)} \right)' \\ &= e^{\ln(x+1)(x+2)} \cdot ((x+2) \cdot \ln(x+1))' \\ &= e^{\ln(x+1)(x+2)} \cdot \left(x \cdot \ln(x+1) + (x+2) \cdot \frac{1}{(x+1)} \right) \\ &= (x+1)^{x+2} \cdot \left(x \cdot \ln(x+1) + \frac{x+2}{(x+1)} \right) \end{aligned}$$

b) (i)

Umformen:

$$g(x) = (x^2 + 5)^{x^4+3} = e^{\ln(x^2+5)^{x^4+3}} = e^{(x^4+3) \cdot \ln(x^2+5)}$$

Differenzieren:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(e^{(x^4+3) \cdot \ln(x^2+5)} \right)' \\ &= e^{(x^4+3) \cdot \ln(x^2+5)} \cdot \left((x^4+3) \cdot \ln(x^2+5) \right)' \\ &= e^{(x^4+3) \cdot \ln(x^2+5)} \cdot \left(4x^3 \cdot \ln(x^2+5) + (x^4+3) \cdot \frac{2x}{x^2+5} \right) \\ &= (x^2+5)^{x^4+3} \cdot \left(4x^3 \cdot \ln(x^2+5) + \frac{2x^5+6x}{x^2+5} \right) \end{aligned}$$

(ii)

Umformen:

$$h(x) = (x^4 + 3)^{\sqrt{3x+1}} = e^{\ln(x^4+3)^{\sqrt{3x+1}}} = e^{\sqrt{3x+1} \cdot \ln(x^4+3)}$$

Differenzieren:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\sqrt{3x+1} \cdot \ln(x^4+3)} \\ h'(x) &= e^{\sqrt{3x+1} \cdot \ln(x^4+3)} \cdot \left(\sqrt{3x+1} \cdot \ln(x^4+3) \right)' \\ &= e^{\sqrt{3x+1} \cdot \ln(x^4+3)} \cdot \left((\sqrt{3x+1})' \cdot \ln(x^4+3) + \sqrt{3x+1} \cdot \frac{4x^3}{x^4+3} \right) \\ &= (x^4+3)^{\sqrt{3x+1}} \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{1+3x}} \cdot \ln(x^4+3) + \frac{4x^3\sqrt{3x+1}}{x^4+3} \right) \end{aligned}$$

c)

Umformen:

$$f(x) = 3^x = e^{\ln(3^x)} = e^{x \cdot \ln 3}$$

Differenzieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x \cdot \ln 3})' \\ &= e^{x \cdot \ln 3} \cdot (x \cdot \ln 3)' \\ &= e^{x \cdot \ln 3} \cdot \left(1 \cdot \ln 3 + x \cdot \frac{0}{3}\right) \\ &= 3^x \cdot (\ln 3) \end{aligned}$$

Umformen:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{3}})} = e^{\frac{1}{3} \cdot \ln x}$$

Differenzieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\frac{1}{3} \cdot \ln x})' \\ f'(x) &= e^{\frac{1}{3} \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \ln x\right)' \\ &= e^{\frac{1}{3} \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\ln x + \frac{\frac{1}{3}x}{x}\right) \end{aligned}$$

4. (ii) $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

(iii) $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

(iv) $f'(x) = \cos(2x)$

(v) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-(-1+x)x}}$

(vi) $f'(x) = (x^3 - 1)^{\arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x^3 - 1) + \arctan(x) \cdot \left(\frac{1}{x^3-1} \cdot 3x^2\right)$

5. **TODO**

6. a)

$$g'(p) = 10^5 \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{6}{p^3} \right) = 10^5 \frac{6-p}{p^3}$$

Einsetzen der 0:

$$g'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 6$$

Die möglichen globalen Maxima liegen demnach bei $p = 3, p = 6, p = 100$. Jetzt muss nur noch eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} g(3) &= 0 \\ g(6) &= 10^5 \frac{1}{12} \\ g(100) &= 10^5 \frac{99}{10000} \end{aligned}$$

Also gilt: $g(6) > g(3)$ und $g(6) > g(100)$. Das bedeutet, dass das globale Maximum bei $p = 6$ liegt. Demnach ist der Gewinn bei einem Preis von 6 Euro maximal.

b) (i)

$$f'(x) = 21x^6 + 25x^4 + 6x^2 + 1 > 0$$

Die Funktion ist streng monoton steigend, d.h. das globale Maximum liegt bei $x = 10$ und das globale Minimum bei $x = -10$.

(ii)

$$g'(x) = 2e^{2x-1} - e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x-1} = e^{x+1} \Leftrightarrow x = 2 - \log(2)$$

Kandidaten für globale Extrema sind also $x = -2, x = 2, x = 2 - \log(2)$. Einsetzen ergibt: Das Maximum liegt bei $x = 2$, das Minimum bei $x = 2 - \log(2)$.

(iii)