

# Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014

Blatt 8

## A: Präsenzaufgaben am 5. Juni 2014

- a) Berechnen Sie die Taylorpolynome  $T_0(x), \dots, T_7(x)$  von  $f(x) = \cos x$  (an der Stelle  $x_0 = 0$ ).  
b) Benutzen Sie die in a) berechneten Taylorpolynome  $T_1(x)$ ,  $T_3(x)$ ,  $T_5(x)$  und  $T_7(x)$  zur Berechnung von schrittweise verbesserten Näherungswerten für  $\cos(1)$ . Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit  $\cos(1) \approx 0.5403023$ .
- Berechnen Sie

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \\ \text{(ii)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x + \ln x} \right) \\ \text{(iii)} & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \\ \text{(iv)} & \lim_{x \rightarrow 0} x^x \quad (\text{für } x > 0) \end{array}$$

## B: Hausaufgaben zum 19. Juni 2014

- a) Berechnen Sie in Ergänzung zu Präsenzaufgabe 1 die Taylorpolynome  $T_8(x), \dots, T_{13}(x)$  und benutzen Sie  $T_9(x)$ ,  $T_{11}(x)$  und  $T_{13}(x)$  zur Berechnung von weiter verbesserten Näherungswerten für  $\cos(1)$ .  
b) Berechnen Sie die Taylorpolynome  $T_0(x), \dots, T_4(x)$  für  $f(x) = \sqrt{1+x}$  und  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .  
c) Berechnen Sie das Taylorpolynom  $T_5(x)$  von  $f(x) = e^x \cdot \sin x$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .
- Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) \\ \text{(ii)} & \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) \\ \text{(iii)} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}} \\ \text{(iv)} & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) \end{array}$$

- Einige ALA-Klausuraufgaben aus dem Sommersemester 2013:
  - Es sei  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$  und  $t(x)$  sei die Tangente an den Graphen von  $f(x)$  im Punkt  $(2, 9)$ . Berechnen Sie die Steigung von  $t(x)$  sowie den Schnittpunkt von  $t(x)$  mit der  $x$ -Achse.
  - Wir betrachten die Funktion  $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $h(x) = x^x$  gegeben ist. Bestimmen Sie (falls vorhanden) die lokalen Minima und Maxima dieser Funktion. Bestimmen Sie eine möglichst große Teilmenge des Definitionsbereichs von  $h$ , auf der  $h$  konvex ist.
  - Berechnen Sie die Taylorpolynome  $T_0(x)$ ,  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$  und  $T_3(x)$  für  $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$  (für den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ ).
  - Die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ für } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob diese Funktion im Punkt  $x_0 = 0$  differenzierbar ist.

4. In der Informatik spielt an vielen Stellen unterschiedliches Wachstumsverhalten von Funktionen („ $f$  wächst schneller als  $g$ “) eine Rolle, beispielsweise, wenn es darum geht, die Laufzeit von Algorithmen zu vergleichen. Die dazugehörige präzise Definition haben wir im Skript auf Seite 65 kennengelernt, wo genau gesagt wird, was es bedeuten soll, dass  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  schneller wächst als  $g(x)$ . Im Folgenden werden drei Standardtypen von Funktionen betrachtet, für die das Wachstumsverhalten zu vergleichen ist.

- a) Es sei  $f(x) = a^x$  für ein  $a > 1$  und  $g(x) = x^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  schneller wächst als  $g(x)$ , d.h., weisen Sie nach, dass Folgendes gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \infty.$$

**Hinweis:** Regeln von de l'Hospital.

- b) Nun sei  $g(x) = x^r$  für ein  $r \in \mathbb{R}^+$  (d.h.  $r > 0$ ) und  $h(x) = (\ln x)^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Bei  $h(x)$  handelt es sich also um die  $k$ -te Potenz des natürlichen Logarithmus; man schreibt meistens  $\ln^k x$  anstelle von  $(\ln x)^k$ . Zeigen Sie, dass  $g(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  schneller wächst als  $h(x)$ .
- c) **Zusätze** (leichte Verallgemeinerungen von a) und b)):
- (i) Begründen Sie, weshalb a) richtig bleibt, wenn dort  $g(x) = x^r$  für ein beliebiges  $r \in \mathbb{R}$  mit  $r > 0$  vorausgesetzt wird.
  - (ii) Bleibt b) richtig, wenn dort (anstelle von  $\ln x$ )  $\log_a x$  für eine beliebige Basis  $a > 1$  betrachtet wird?

5. Verbessern Sie die in Abschnitt 3.6 des Skript gefundene Näherungslösung für

$$\int_0^1 \sin x \, dx,$$

indem Sie zusätzlich die Fälle  $n = 4$ ,  $n = 5$  und  $n = 10$  betrachten.

6. Zu guter Letzt: Weitere ALA-Klausuraufgaben aus vergangenen Semestern.

a) Berechnen Sie  $\int_2^3 \frac{11x - 5}{x^2 + 1} \, dx$ .

- b) Entscheiden Sie, ob die folgende Reihe konvergiert oder divergiert:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{5^{i+1}}.$$

Falls Konvergenz vorliegt, so ermittle man den Grenzwert. Falls Divergenz vorliegt, so begründe man, weshalb dies der Fall ist.

- c) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 4x + 3}{x^4 + x^2 - x - 1} \right)$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 11x)^{\frac{1}{4x}}$

- d) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ . Berechnen Sie, falls vorhanden, die Wendepunkte von  $f$ .