

ALA BLATTNR. 08 19.06.2014

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

19. Juni 2014

1. a)

$$T_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

$$T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!}$$

$$T_9(x) = T_8(x)$$

$$T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

$$T_{11}(x) = T_{10}(x)$$

$$T_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!}$$

$$T_{13}(x) = T_{12}(x)$$

$$T_9(1) \approx 0,5403025$$

$$T_{11}(1) \approx 0,5403023$$

$$T_{13}(1) \approx 0,5403023$$

b)

f(x)

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$$

g(x)

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 - \frac{x}{3}$$

$$T_2(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

$$T_3(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \frac{35x^4}{243}$$

c) Am einfachsten ist es, einfach alle Taylorpolynome bis T_5 zu errechnen, da diese Arbeit sowieso getan werden muss.

$$T_0(x) = 0$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = x + x^2$$

$$T_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$T_4(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$T_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$$

Probe:

$$T_5(1) = \frac{69}{30} = 2,3$$

$$f(1) = 2,287355\dots$$

Das Ergebnis kommt also hin.

2. (i)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) = \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) \\ & \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 6x + 1}{2x - 5} \right) \\ & = -1 \end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iii)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{2x} \cdot \ln(1+3x)} \right) \\ & = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} \cdot \ln(1+3x) \right)} \end{aligned}$$

Wir errechnen zunächst nur die Potenz:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+3x)}{2x} \right) \\ & \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{3}{3x+1}}{2} \right) \\ & = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Wir setzen dieses Zwischenergebnis ein und erhalten das Endergebnis:

$$\Rightarrow e^{\frac{3}{2}}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iv)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin(x)} \right) \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - e^x + 1}{e^x \sin(x) - \sin(x)} \right) \\ & \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - e^x}{e^x \sin(x) + (e^x - 1) \cos(x)} \right) \\ & \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-e^x - \sin(x)}{\sin(x) + 2e^x \cos(x)} \right) \\ & = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

3. a) Die Steigung von t ist die Steigung von f an der Stelle $(2, 9)$.

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$$

$$f'(2) = 11$$

Die Steigung von t ist also 11. Damit wissen wir $t(2) = 9$, sowie z.B. $t(3) = 20$. Also:

$$t(x) = ax + b$$

$$9 = 2a + b$$

$$20 = 3a + b$$

$$b = 9 - 2a$$

$$20 = 3a + 9 - 2a$$

$$20 = a + 9$$

$$a = 11$$

$$b = -13$$

$$t(x) = 11x - 13$$

$$t(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{11}$$

t schneidet also die x -Achse an der Stelle $\frac{13}{11}$

b)

$$h(x) = x^x$$

$$h'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$$

$$h''(x) = x^x \left(\frac{1}{x}(\ln(x) + 1)^2 \right)$$

$$h'(0) = -\infty$$

Well shit

- c) Im Folgenden bilden wir die ersten drei Ableitungen von $\sqrt[5]{x+1}$ und berechnen die Funktionswerte für $x = 0$, die anschliessend in die Formel für

Taylorpolynome eingesetzt werden:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sqrt[5]{x+1} & f(0) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}} & f'(0) = \frac{1}{5} \\ f''(x) = -\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}} & f''(0) = -\frac{4}{25} \\ f'''(x) = \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}} & f'''(0) = \frac{36}{125} \end{array}$$

Einsetzen in

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k :$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{5}x$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3$$

- d) Die Funktion h ist genau dann differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert (mit $x_0 = 0$):

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} + \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

*Anwendung von de l'Hospital

Demnach ist die Funktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar, da der Grenzwert zwischen $-\infty$ und ∞ schwankt.

4. a)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x}{x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xa^{x-1}}{nx^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

Nach de l'Hospital darf man auch die Ableitungen beider Funktionen vergleichen. Dies kann n -Mal fortgeführt werden, bis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p(x) \cdot a^{x-n}}{q(n) \cdot x^0} \right)$$

$p(x)$ ist ein Polynom n -ten Grades, wobei das Glied mit Grad n positiv ist (es "beginnt" also mit x^n). $q(n)$ ist ein Polynom n -ten Grades, ebenfalls positiv. Nun ist bereits eindeutig gezeigt, dass f schneller wächst als g , da der Zähler des obigen Bruches der Form $x^n + \dots$ ist, was, mit $x \rightarrow \infty$, viel größer, nämlich unendlich, ist, als der Nenner, welcher lediglich der Form $n^n + \dots$ ist. \square

b) Wir betrachten:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^r}{\ln^k x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{rx^{r-1}}{\frac{k \cdot \ln^{k-1} x}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{rx^r}{k \cdot \ln^{k-1} x} \right) \end{aligned}$$

Der "Trick", der hier angewandt wurde, ist, dass sich nach jedem durch de l'Hospital erlaubten Ableiten beider Funktionen, im Nenner von h' bzw h'' , h''' usw. ein x befindet. Dies kann dann in den Zähler "hochgeschoben" werden. Nach der maximalen Anzahl Ableitungen ist der Zähler also bedeutend größer als der Nenner. g wächst also schneller als h .

- c) (i) Die in a) angewandte Methode funktioniert auch mit $g(x) = x^r$. Sollte r nicht in \mathbb{N} liegen, so wird einfach $\lceil r \rceil$ Male abgeleitet.
(ii)

5. Wir berechnen im Folgenden die Näherungswerte für die Fälle

$n = 4$, $n = 5$, $n = 10$:

$n = 4$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x \, dx &\approx \frac{1}{8} \left(\sin(0) + 2 \sin\left(\frac{1}{4}\right) + 2 \sin\left(\frac{2}{4}\right) + 2 \sin\left(\frac{3}{4}\right) + \sin(1) \right) \\ &\approx 0.45730093. \end{aligned}$$

$n = 5$

$$\int_0^1 \sin x \, dx \approx \frac{1}{10} \left(\sin(0) + 2 \sin\left(\frac{1}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{2}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{3}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{4}{5}\right) + \sin(1) \right)$$

$$\approx 0.45816434$$

$$\underline{n = 10}$$

$$\int_0^1 \sin x \, dx \approx \frac{1}{20} \left(\sin(0) + 2 \sin\left(\frac{1}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{2}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{3}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{4}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{5}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{6}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{7}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{8}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{9}{10}\right) + \sin(0) \right)$$

$$\approx 0.4593145488579763249099$$

6. d)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0 \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2 \cdot (x^2 + 1)^2 - (-2x)4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-2(x^2 + 1)^2 - (-8x^2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{\cancel{(x^2 + 1)}(-2(x^2 + 1) - (-8x^2))}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{12x(x^2 + 1)^3 - (6x^2 - 2)6x(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^6} \\ &= \frac{\cancel{(x^2 + 1)^2}(12x(x^2 + 1) - (36x^3 - 12x))}{(x^2 + 1)^4} = \frac{12x^3 + 12x - (36x^3 - 12x)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-24x^3 + 24x}{(x^2 + 1)^4} \end{aligned}$$

Wir setzen $f''(x)$ gleich Null, um die Wendepunkte zu bestimmen:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} \\0 &= 6x^2 - 2 \\2 &= 6x^2 \\x &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Demnach gibt es zwei Wendepunkte, und zwar bei $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Zur Probe setzen wir die beiden x-Werte noch in die dritte Ableitung ein, die dann nicht gleich 0 sein darf:

$$\begin{aligned}\frac{-24(\frac{1}{\sqrt{3}})^3 + \frac{24}{\sqrt{3}}}{((\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1)^4} &= \frac{27\sqrt{3}}{16} \\ \frac{-24(\frac{-1}{\sqrt{3}})^3 + \frac{-24}{\sqrt{3}}}{((\frac{-1}{\sqrt{3}})^2 + 1)^4} &= -\frac{27\sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$