B

Klausur zur Vorlesung „Mathematik II (ALA)"

T. Andreae **9. August 2014, 8:30 bis 10:00 Uhr**

Insgesamt sind 50 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für die Antwort gegeben werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Es sei $f(x) = (x^4 + x^2 + 1)^3$. Berechnen Sie $f'(x)$ sowie die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$. (*2 Punkte*)

b) Berechnen Sie $g'(x)$ für $g(x) = \sqrt[3]{x^5} \cdot e^{\cos(x^3)}$ (*4 Punkte*)

c) Berechnen Sie $h'(x)$ für $h(x) = (2x^3 + 6)^{\sin x}$ (*4 Punkte*)

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie $\int e^{\sqrt{\frac{6}{7}x+7}}\, dx$ (*4 Punkte*)

b) Berechnen Sie $\int \dfrac{3x-1}{x^2 - 16x + 64}\, dx$ (*4 Punkte*)

c) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung für $h(x,y) = e^y \cdot ln(x+2y)$. (*2 Punkte*)

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die stationären Stellen für die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob lokale Minima oder Maxima vorliegen:

$$f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xz + 6x + 2y - 3.$$

(*4 Punkte*)

b) Es seien $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 6 + 2i$ und $z = \frac{z_1}{z_2}$. Stellen Sie z in der Form $a + ib$ dar. (*2 Punkte*)

c) Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie (möglichst kurze) Begründungen für Ihre Antworten.

(i) $\ln(\sqrt{n}) = O\big(\log_3(n)\big)$ (*1 Punkt*)

(ii) $\ln(\sqrt{n}) = \Omega\big(\log_3(n)\big)$ (*1 Punkt*)

(iii) $3^{\log_2(n)} = O(2^{\sqrt{n}})$ (*2 Punkte*)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie $\iint_G xy\, d(x,y)$ für das Dreieck G mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(1,2)$ und $(1,3)$. (*5 Punkte*)

b) Eine Aufgabe, die mit der *Lagrange-Methode* gelöst werden soll: Ein Unternehmen produziert zwei Sorten eines Gutes. Beim Verkauf von x Einheiten von Sorte A und y Einheiten von Sorte B sei der Gewinn pro Tag gegeben durch

$$f(x,y) = -0.2x^2 - xy - 2.5y^2 + 48x + 235y + 57.$$

Es ist eine Nebenbedingung zu berücksichtigen, die in Form einer Gleichung vorliegt:

$$0.2x + y = 40. \qquad (\star)$$

Gesucht sind x und y, so dass der Gewinn $f(x,y)$ maximal wird.

(i) Stellen Sie die dazugehörige Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda)$ auf und bestimmen Sie die einzige kritische Stelle (x,y) von f unter der Nebenbedingung $(\star)$. (*3 Punkte*)

(ii) Zeigen Sie mithilfe der geänderten Hesseschen Matrix, dass an der gefundenen Stelle ein lokales Maximum vorliegt. (*2 Punkte*)

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

Untersuchen Sie, ob g im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist. (*4 Punkte*)

b) Leiten Sie die Quotientenregel für das Differenzieren mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel her. (*4 Punkte*)

c) Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_0(x)$, $T_1(x)$ und $T_2(x)$ für $f(x) = \sqrt[9]{(x+1)^2}$ (für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$). (*2 Punkte*)