Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 1

A: Präsenzaufgaben am 3. April 2014

1. Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, die die Ungleichung

$$\frac{3}{x+1} \leq 2$$

erfüllen. Mit L sei die Menge dieser x bezeichnet. Geben Sie L in Intervallschreibweise an.
Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie im Beispiel auf Seite 7 des Skripts.

2. Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|3x+1| < 3$ erfüllen. Geben Sie das Ergebnis in Intervallschreibweise an.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $x \geq -\frac{1}{3}$ und $x < -\frac{1}{3}$.

3. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Es sei $a = 0$.

a) Zeigen Sie durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript, Seite 9) dass $(a_n) \to a$ gilt.

b) Man gebe zu $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ sowie $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ein jeweils möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

4. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{3n+2}{n+4}$. Es sei $a = 3$.

a) Berechnen Sie zunächst $|a_n - a|$, d.h. den Abstand des Folgenglieds a_n von $a = 3$.

b) Zeigen Sie sodann durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript, Seite 9), dass $(a_n) \to a$ gilt.

5. a) Sind konstante Folgen konvergent? Ist beispielsweise die Folge $2, 2, 2, \ldots$ konvergent? Geben Sie eine spontane Antwort! Überprüfen Sie danach anhand der Definition der Konvergenz, ob Ihre Antwort richtig ist.

b) Ist die (nicht konstante) Folge $1, -2, 17, 9, 2, 2, 2, \ldots$ konvergent? Geben Sie auch in diesem Fall zunächst eine spontane Antwort, die Sie anschließend anhand der Definition der Konvergenz überprüfen.

6. Einer Ihrer Kommilitonen behauptet, dass die Definition der Konvergenz wie folgt lautet: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergiert gegen eine reelle Zahl* a, wenn es eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Was halten Sie von dieser Art, die Definition der Konvergenz wiederzugeben?

B: Hausaufgaben zum 10. April 2014

1. Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x+5} \geq 3$$

erfüllen. Mit L sei die Menge dieser x bezeichnet. Geben Sie L in Intervallschreibweise an.

2. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die

$$|3x - 4| \geq 2$$

gilt. Geben Sie das Ergebnis in Intervallschreibweise an.

3. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{4n-1}{n+5}$. Es sei $a = 4$.

a) Berechnen Sie zunächst $|a_n - a|$, d.h. den Abstand des Folgenglieds a_n von $a = 4$.

b) Zeigen Sie sodann durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript, Seite 9), dass $(a_n) \to a$ gilt.

c) Man gebe zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ sowie $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ein jeweils möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

4. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{3}; \\ a_{n+1} &= \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1. \end{aligned}$$

Weisen Sie die Konvergenz der Folge mit Hilfe des Satzes über monotone, beschränkte Folgen nach.

Hinweis: Man beginne mit dem Nachweis, dass (a_n) beschränkt ist. Man zeige die Beschränktheit, indem man durch vollständige Induktion beweist, dass $1 \leq a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zum Nachweis der Monotonie zeige man anschließend $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.