Mathematatik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 2

B: Hausaufgaben zum 17. April 2014

3. Welche der folgenden Reihen konvergieren und welche divergieren? Geben Sie kurze Begründungen und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(i) $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^i$ (iii) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{8}\right)^i$

(ii) $\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^i$ (iv) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{i+2}$

(i) $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^i \overset{(1.8)}{=} \frac{1}{1-\frac{5}{8}} = \frac{8}{3}.$

(ii) $\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^i = -\left(\frac{5}{8}\right)^0 - \left(\frac{5}{8}\right)^1 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^i = -1 - \frac{5}{8} + \frac{8}{3} = \frac{25}{24}$

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{8}\right)^i = -\left(-\frac{5}{8}\right)^0 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{8}\right)^i = -1 + \frac{1}{1-\left(-\frac{5}{8}\right)} = -\frac{5}{13}$

(iv) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{5}{8}\right)^{i+2} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{5}{8}\right)^i =$

$\left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{8}\right)^i \overset{(iii)}{=} \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{125}{832}.$

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5$ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+3}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$ (iv) $\sum\limits_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}$

Hinweis zu (i)-(iii): Verwenden Sie die Definition der Eulerschen Zahl e (siehe Skript, Seite 15) sowie die Rechenregeln für konvergente Folgen.

(i) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, woraus

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^5=1^5=1$ folgt.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\right)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=e\cdot 1=e.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right)=$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^3=e^2,$

da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$

(iv) Es gilt $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$. Wir betrachten zunächst nicht die Reihe $\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$, sondern die n-te Partialsumme dieser Reihe:

$$\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

Wir formen die n-te Partialsumme um:

$$\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=3}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i+1} =$$

$$\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=4}^{n+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}.$$

Es folgt

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$