C

Klausur zur Vorlesung „Mathematik II (ALA)"

Thomas Andreae **21. Juli 2012, 8:30 bis 10:00 Uhr**

Insgesamt sind 50 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für die Antwort gegeben werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Berechnen Sie $g'(x)$ für

a) $g(x) = e^{\sin(2x^2+1)} \cdot \arctan(x)$ (*4 Punkte*)

b) $g(x) = (x^4 + 1)^{x+2}$ (*4 Punkte*)

c) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{t\to\infty}(1 + \frac{1}{t})^{2t+3}$ (*2 Punkte*)

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie $\int e^{\sqrt{\frac{x}{4}+3}}\,dx$. (*4 Punkte*)

b) Berechnen Sie $\int \frac{x+1}{x^2+8x+16}\,dx$. (*4 Punkte*)

c) Entscheiden Sie, ob die folgende Reihe konvergiert oder divergiert:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{i-1}}.$$

Falls Konvergenz vorliegt, so ermittle man den Grenzwert. Falls Divergenz vorliegt, so begründe man, weshalb dies der Fall ist. (*2 Punkte*)

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1-e^{3x}}{2x}\right)$. (*2 Punkte*)

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ für $f(x,y) = e^{x^2y^5} + \ln(x)$. (*2 Punkte*)

c) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(x,y) = -2xy + 2x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$. Bestimmen Sie die kritischen Stellen und entscheiden Sie, ob lokale Minima oder lokale Maxima vorliegen. (*4 Punkte*)

d) Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ gelte $z = \frac{4+3i}{-2-i}$. Bestimmen Sie a und b. (*2 Punkte*)

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Es sollen die stationären Stellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 4y^2 - xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 2x + y - 1 = 0$ bestimmt werden. Lösen Sie diese Aufgabe auf zwei Arten:

(i) mit der Lagrange-Methode, (*3 Punkte*)

(ii) durch Variablensubstitution. (*1 Punkt*)

Entscheiden Sie auch (entweder mit der Methode (i) oder im Rahmen von (ii)), ob es sich bei den ermittelten stationären Stellen um Minima oder Maxima handelt. (*1 Punkt*)

b) Man berechne $\iint\limits_G x^2y\,d(x,y)$ für das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,2), (1,0), (1,2)$ und gebe eine (kurze!) anschauliche Erläuterung (geometrische Deutung) des Ergebnisses. (*5 Punkte*)

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $h(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Untersuchen Sie, ob diese Funktion im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist. (*6 Punkte*)

b) Beschreiben Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene durch geometrische Begriffe (wie z.B. Kreis, Mittelpunkt, Radius, Gerade ...):

$M = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = |1 + 2i - z|$. (*2 Punkte*)

c) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) = 4xy + x^2 - 2y^2 - x + 3y - 4$.

Den Graphen von f stellen wir uns als ein Gebirge vor. Ein Wanderer befindet sich im Punkt P mit den Koordinaten $\big(1, 1, f(1,1)\big)$. In welcher Richtung steigt das Gebirge in P am steilsten an? Berechnen Sie die Stärke des Anstiegs in dieser Richtung. (*2 Punkte*)