ALA 05 15.05.2014

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

15. Mai 2014

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= 7x^3 - 42x^2 + 63x - 2 \\ f'(x) &= 21x^2 - 84x + 63 \\ f''(x) &= 42x - 84 \\ F(x) &= \frac{7}{4}x^4 - \frac{42}{3}x^3 + \frac{63}{2}x^2 - 2x \end{aligned}$$

Globale Extrema von f finden wir an Stellen, für die gilt: $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 21x^2 - 84x + 63 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{84}{21}x + \frac{63}{21} &= 0 \\ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{84}{42} &\pm \sqrt{\left(-\frac{84}{42}\right)^2 - \frac{63}{21}} \\ \Rightarrow x = 1 &\vee x = 3 \end{aligned}$$

Die Extrema liegen also bei $x = 1$ und $x = 3$. Einsetzen in die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(1) &= 42 \cdot 1 - 84 = -42 \\ f''(3) &= 42 \cdot 3 - 84 = 42 \end{aligned}$$

Das Maximum, also die Höchsttemperatur liegt also an der Stelle 1, das Minimum, also die Teifsttemperatur, an der Stelle 3.
Die Berechnung des Durchschnittswertes erfolgt folgendermaßen: errechne das

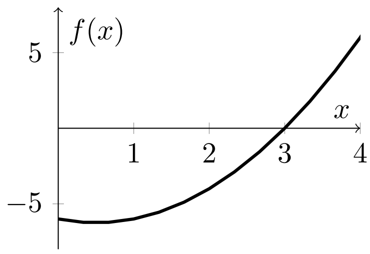
Integral von f im Interval [1,3] und teile es durch die Intervallänge, also 2:

$$\begin{aligned} & \frac{\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x}{2} \\ = & \frac{F(3)-F(1)}{2} \\ = & \frac{(\frac{567}{4}-\frac{1134}{3}+\frac{567}{2}-6)-(\frac{7}{4}-\frac{42}{3}+\frac{63}{2}-2)}{2} \\ = & \frac{24}{2}=12 \end{aligned}$$

Die Tagesdurchschnittstemperatur ist also $12°C$.

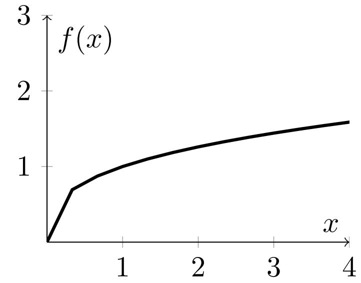
2. (i)

$$\begin{aligned} & \int_1^3 x^2-x-6\mathrm{d}x \\ = & [\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x]_1^3 \\ = & (9-\frac{9}{2}-18)-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6) \\ = & -\frac{22}{3} \end{aligned}$$



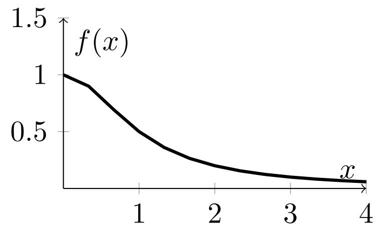
(ii)

$$\begin{aligned} & \int_1^3 x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x \\ = & [\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}]_1^3 \\ = & \frac{3}{4}3^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}1^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$



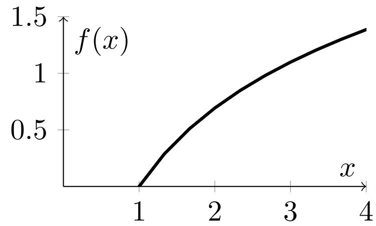
(iii)

$$
\begin{aligned}
& \int_1^3 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \\
= & \left[\tan^{-1}(x)\right]_1^3 \\
= & \tan^{-1}(3) - \tan^{-1}(1)
\end{aligned}
$$



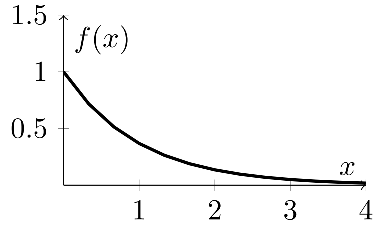
(iv)

$$
\begin{aligned}
& \int_1^3 lnx \ \mathrm{d}x \\
= & \left[x \cdot (ln(x) - 1)\right]_1^3 \\
= & 1 + 3(ln(3) - 1)
\end{aligned}
$$



(v)

$$
\begin{aligned}
& \int_1^3 e^{-x} \mathrm{d}x \\
= & \left[-e^{-x}\right]_1^3 \\
= & (-e^{-3}) - (-e^{-1})
\end{aligned}
$$



3. (i)

$$\begin{aligned} &\int x^4 + 2x^3 - x + 5\mathrm{d}x \\ = &\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5x \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\int x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x \\ = &2x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} &\int x \cdot \sin(3x)\mathrm{d}x \\ = &-\frac{1}{3}\cos(3x) \cdot x - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\mathrm{d}x \\ = &-\frac{1}{3}\cos(3x) \cdot x + \frac{1}{9}\sin(3x) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} &\int x^3 \cdot \ln x\mathrm{d}x \\ = &\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} \\ = &\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4 \end{aligned}$$

(v)

4. Zunächst überprüfen wir, ob alle Voraussetzungen zur Ausführung des Newton-Verfahrens erfüllt sind:
(1) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 \neq 0$ für $x \in [1, 2]$
(2) $f''(x)$ ist ein Polynom, also im gegebenen Interval ganz vorhanden und stetig.

(3) $f(a) \cdot f(b) < 0 \Leftrightarrow -13 \cdot 16 < 0$.
Nun können wir das eigentliche Verfahren anwenden.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 &= 1 \\ \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{-13}{17} &= 1.764705... \\ \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= 1.409760... \\ \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} &= 1.369288... \\ \Rightarrow x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} &= 1.368808... \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt also in der Nähe von 1.368808...