ALA 01 (HA) zum 10.04.2014

Jonathan Siems, Lina, Tronje Krabbe

7. April 2014

1. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall $x > -5$:

$$\frac{2}{x+5} \geq 3 \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow 2 \geq 3x + 15 \tag{2}$$
$$\Leftrightarrow x \leq (-\frac{13}{3}) \tag{3}$$

Fall $x < -5$:
In diesem Fall ist die gesamte Linke Seite der Ungleichung immer negativ, da der Nenner des Bruches negativ ist. Das bedeutet, dass für x kleiner -5 keine Lösung existiert. Daraus folgt:

$L = (-5, -\frac{13}{3}]$

2. Wir unterscheiden abermals zwei Fälle:
Fall $x \geq \frac{4}{3}$:

$$|3x - 4| \geq 2 \tag{4}$$
$$\Leftrightarrow x \geq 2 \tag{5}$$

Fall $x < \frac{4}{3}$:

$$|3x - 4| \geq 2 \tag{6}$$
$$\Leftrightarrow -(3x - 4) \geq 2 \tag{7}$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3} \tag{8}$$

Daraus folgt:

$L = (-\infty, \frac{2}{3}] \cup (2, \infty)$

3. a)

$$|a_n - a| = |\frac{4n-1}{n+5} - 4| \tag{9}$$
$$= |\frac{4n-1}{n+5} - \frac{4(n+5)}{n+5}| \tag{10}$$
$$= |\frac{4n-1}{n+5} - \frac{4n+20}{n+5}| \tag{11}$$
$$= |\frac{-21}{n+5}| \tag{12}$$
$$= -\frac{21}{n+5} \tag{13}$$

b) Gesucht ist:

$$|a_n - a| < \epsilon \tag{14}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{21}{n+5} < \epsilon \tag{15}$$
$$\Leftrightarrow n > -\frac{21}{\epsilon} - 5 \tag{16}$$

Nun setze man $N > -\frac{21}{\epsilon} - 5$. Daraus folgt:
$|a_n - a| < \epsilon$ gilt für alle $n \geq N$. Somit ist gezeigt, dass die Folge a_n gegen a konvergiert.

c)

$$\epsilon = \frac{1}{10} \Rightarrow N = -214 \tag{17}$$
$$\epsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow N = -2104 \tag{18}$$
$$\epsilon = \frac{1}{1000} \Rightarrow N = -21004 \tag{19}$$
$$\tag{20}$$

4. Beschränktheit

(1) Behauptung: $1 \leq a_n < 2$
(1) gilt für $n = 1$: $1 \leq a_1 = \frac{5}{3} < 2$
Angenommen, (1) gilt für ein beliebiges, fest gewähltes n. Dann muss auch gelten:

$$1 \leq a_{n+1} < 2 \tag{21}$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq (\frac{a_n}{2})^2 + 1 < 2 \tag{22}$$

Zeige zuerst, dass gilt: $1 \leq a_{n+1}$

$$1 \leq (\frac{a_n}{2})^2 + 1 \tag{23}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq (\frac{a_n}{2})^2 \tag{24}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{a_n}{2} \tag{25}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq a_n \tag{26}$$

Dies entspricht unserer Annahme (1).
Zeige nun, dass gilt: $a_{n+1} < 2$

$$(\frac{a_n}{2})^2 + 1 < 2 \tag{27}$$
$$\Leftrightarrow (\frac{a_n}{2})^2 < 1 \tag{28}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_n}{2} < 1 \tag{29}$$
$$\Leftrightarrow a_n < 2 \tag{30}$$

Dies fügt sich ebenfalls (1). Somit ist durch vollständige Induktion gezeigt, dass (a_n) beschränkt ist.

Monotonie
Zu zeigen: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)
Wir verwenden abermals vollständige Induktion um diese Aufgabe zu lösen:
(2) gilt für $n = 1$: $\frac{61}{36} \geq \frac{5}{3}$.
Angenommen, (2) gilt für ein beliebiges, fest gewähltes n. Dann muss auch gelten:

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \tag{31}$$
$$\Leftrightarrow (\frac{a_{n+1}}{2})^2 + 1 \geq (\frac{a_n}{2})^2 + 1 \tag{32}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_n}{2} \tag{33}$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n \tag{34}$$

Hiermit ist nun auch die Monotonie der Folge bewiesen.