Mathematatik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 3

B: Hausaufgaben zum 24. April 2014

3. Gegeben seien zwei reelle Funktionen f und g. Es gelte: f ist an der Stelle x_0 stetig und g ist an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $g \circ f$ an der Stelle x_0 stetig ist. („Die Nacheinanderausführung zweier stetiger Funktionen ist wiederum stetig.“)

Es sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_0$; es gelte $x_n \in D(g\circ f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in D(g \circ f)$.

Zu zeigen ist $(g\circ f)(x_n) \to (g\circ f)(x_0)$. Aus $x_n \in D(g\circ f)$ folgt $x_n \in D(f)$ $(n=0,1,2,...)$ und nach Voraussetzung gilt $x_n \to x_0$. Also folgt wegen der Stetigkeit von f in x_0, dass $f(x_n) \to f(x_0)$ gilt. Aus $x_n \in D(g\circ f)$ folgt ferner $f(x_n) \in D(g)$ $(n=0,1,2,...)$. Also folgt wegen der Stetigkeit von g in $f(x_0)$, dass $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ gilt, was zu zeigen war.

<u>Kurzfassung</u>:

$$x_n \to x_0 \xrightarrow[\substack{\text{wegen der}\\ \text{Stetigkeit}\\ \text{von } f \text{ in } x_0}]{} f(x_n) \to f(x_0) \xrightarrow[\substack{\text{wegen der}\\ \text{Stetigkeit}\\ \text{von } g \text{ in } f(x_0)}]{} g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$$

4. Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, für } x \neq 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, für } x \neq 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese Funktionen stetig sind. (Insbesondere ist also zu untersuchen, ob diese Funktionen im Punkt $x_0 = 0$ stetig sind.)

Ist $x \neq 0$, so sind beide Funktionen in x stetig. Dies ergibt sich aus der Stetigkeit der beteiligten Funktionen unter Anwendung von Hausaufgabe 3 und den Sätzen 10(a) und 11(b) im Skript (Abschnitt 1.5).

Wir zeigen, dass f in $x = 0$ unstetig ist: Für $x_n = \frac{1}{n 2\pi}$ gilt $x_n \to 0$ und $f(x_n) = \cos(n 2\pi) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt also $f(x_n) \to 1 \neq f(0)$, da $f(0) = 0$. Also ist f in $x = 0$ unstetig.

Wir zeigen, dass g in $x = 0$ stetig ist. Zu diesem Zweck sei x_n eine Folge, für die $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und außerdem $x_n \to 0$ gilt.

Die Behauptung ist bewiesen, wenn wir $g(x_n) \to g(0)$ zeigen. Es gilt

$$0 \leq |g(x_n)| = \left|x_n \cdot \cos\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| = |x_n| \cdot \left|\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \leq$$

$$|x_n| \cdot 1 = |x_n| \to 0 \text{ (wegen } x_n \to 0).$$

Es folgt nach dem Einschließungssatz (Skript Seite 17): $|g(x_n)| \to 0$. Also gilt auch $g(x_n) \to 0$. Wegen $g(0) = 0$ folgt $g(x_n) \to g(0)$, was zu zeigen war.