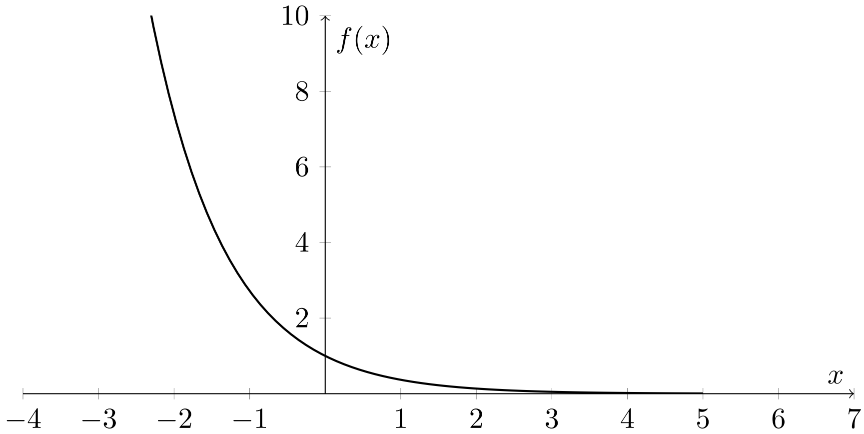
ALA 07 29.05.2014

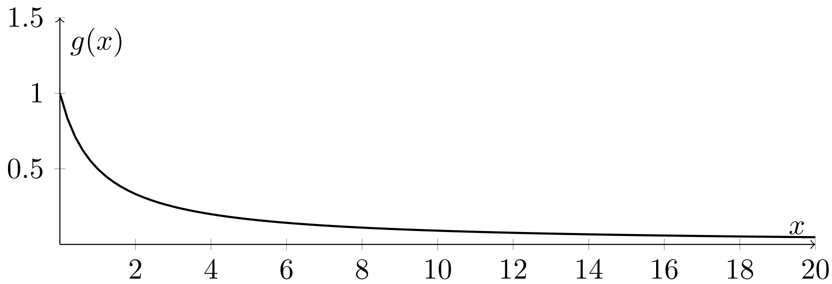
Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

4. Juni 2014

1. a)



Die e-Funktion besitzt keinen Wendepunkt, genauso wenig wie e^{-x}.

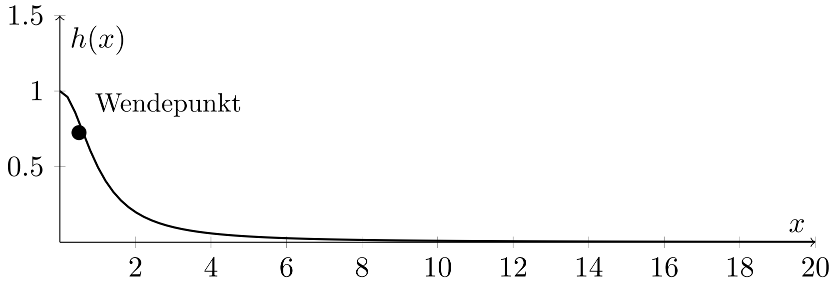


Wendepunktberechnung:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$g''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$0 = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$\Leftrightarrow 0 = 2$$

Auch $g(x)$ hat keinen Wendepunkt.



$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$h'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$h''(x) \stackrel{*}{=} \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

* Die Anwendungen der Quotienten- und Kettenregel wurden hier nicht ausgeführt.

$$0 = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$
$$\Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} = x$$

Der Wendepunkt von h liegt also bei $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $h(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

b) (i)

$$\int_0^\infty e^{-x} = \lim_{b\to\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} + 1 = 1$$

Der Flächeninhalt ist also 1.

(ii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x} = [\log(1+x)]_0^\infty = \lim_{b\to\infty} \log(b+1) - \log(1) = \infty$$

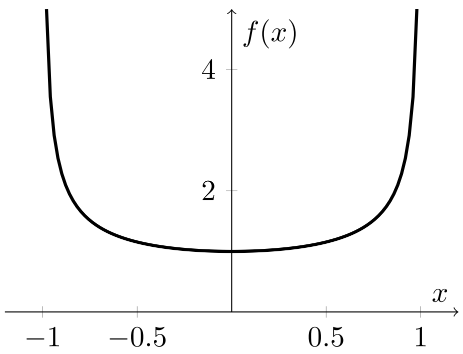
Der Flächeninhalt ist also unendlich groß.

(iii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = [\tan^{-1}(x)]_0^\infty = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

c)

Skizze:



Für ein bestimmtes Integral berechnen wir die Fläche zwischen x und dem Graphen:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[sin^{-1}(x)\Big]_{-1}^1 = sin^{-1}(1) - sin^{-1}(-1)$$

$$\approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058$$

2. a)

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{i}{2^i}$$

$$\stackrel{*}{=} \sum_{i=0}^\infty \frac{i}{2^i}$$

* Dies gilt, da $\frac{0}{2^0} = 0$.
Es gelte:

$$\lim_{i \to \infty} \sqrt[i]{\frac{i}{2^i}} < 1$$

Da $\sqrt[i]{i} \to 1$ für $i \to \infty$ und $2^i \geq 1$, ist diese Aussage korrekt. Somit konvergiert die Reihe.

b) gaaaaay

3. a)

Skript Seite 123f steht alles

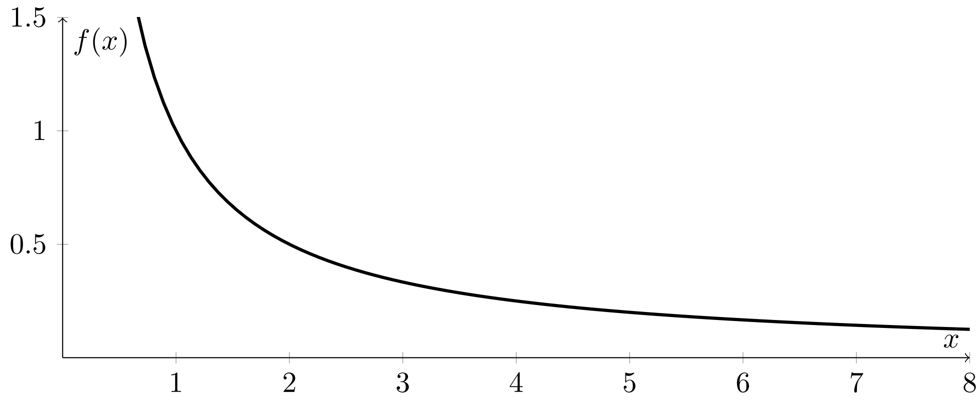
b)

4. TODO

5. a)

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \ \leq H_n \quad (n = 1, 2, ...). \quad \Big| \quad \text{Es gilt } n \in \mathbb{N}$$

.



Anhand der Skizze kann man erkennen,
dass für einen größeren x-Wert der Wert für $f(x)$ abnimmt,
da die Funktion für $x \to \infty$ gegen 0 geht.
Wir erhalten für jeden Wert ≥ 1 den wir für x einsetzen einen Wert ≤ 1.
Da wir bei der Berechnung eines bestimmten Integrals bei einem gleichen Wert für Integrationsober- und untergrenze immer 0 als Ergebnis erhalten würden, ist für die Obergrenze hier $n + 1$ gewählt.

Bei der Integration von $\int \frac{1}{x} dx$ erhalten wir $\Big[ln(x)\Big]$,
für die Untergrenze also $ln(1) = 0$.

Somit müssen wir für die Berechnung des Integrals $\left(ln(n+1) - \cancel{ln(1)}\right)$ lediglich den Wert der oberen Integrationsgrenze in $ln(x)$ einsetzen.
Man sieht, dass $ln(n+1)$ im Verhältnis zu n sehr langsam wächst.

Für jeden Wert von n gilt daher $\underline{\underline{ln(n+1) \leq n}}$

Ein Beweis ist in diesem Falle obsolet, man könne ihn aber mithilfe vollständiger Induktion erbringen.

6. TODO