Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 3

Hinweis: Die Sinus- und die Cosinusfunktion werden als bekannt vorausgesetzt; grundlegende Eigenschaften dieser Funktionen findet man unter anderem in Abschnitt 2.5.1 des Skripts. Für das gesamte Übungsblatt wird insbesondere als bekannt vorausgesetzt, dass die Funktionen sin und cos auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Außerdem wird als bekannt angenommen, dass die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen stetig ist.

A: Präsenzaufgaben am 17. April 2014

1. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{, sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie die folgenden Grenzwerte an (Ergebnis genügt!) bzw. begründen Sie deren Nicht-Existenz.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) An welchen Stellen ist f unstetig?

2. Skizzieren Sie die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = |x| \qquad \text{und} \qquad g(x) = \lfloor x \rfloor$$

definiert sind. Ist f bzw. g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig? Geben Sie – falls vorhanden – die Unstetigkeitsstellen an.

3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, indem Sie ausnutzen, dass sowohl die Sinus- als auch die Wurzelfunktion stetig sind.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\left(\frac{5n^2+2n+1}{4n^2+n+3} \right) \right)$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{5n^2+2n+1}{4n^2+n+3}}$

4. Wahr oder falsch? Sind f und g an der Stelle x_0 unstetig, so ist auch stets $f+g$ an der Stelle x_0 unstetig.

B: Hausaufgaben zum 24. April 2014

1. a) Die Funktion $f : [0,10] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 2 & \text{, falls } 0 \le x < 2 \\ -x + 5 & \text{, falls } 2 \le x < 4 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{, falls } 4 \le x < 6 \\ x - 3 & \text{, falls } 6 \le x < 8 \\ 2x - 11 & \text{, falls } 8 \le x \le 10. \end{cases}$$

Zeichnen Sie den Graphen von f und geben Sie die Unstetigkeitsstellen von f an.

b) Skizzieren Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$ gegeben ist. Weisen Sie nach, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: g ist genau dann stetig in x, wenn $x \notin \mathbb{Z}$ gilt.

2. a) Es sei

$$a_n = \frac{\sqrt{3n^2 - 2n + 5} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 - n + 1} + 4n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. An welcher Stelle der Rechnung wird benutzt, dass die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist?

b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{10n^2 - n} - n}{2n + 3} \right) \right).$$

An welcher Stelle der Rechnung wird benutzt, dass die Cosinusfunktion stetig ist? Wo wird die Stetigkeit der Wurzelfunktion benutzt?

3. Gegeben seien zwei reelle Funktionen f und g. Es gelte: f ist an der Stelle x_0 stetig und g ist an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $g \circ f$ an der Stelle x_0 stetig ist. („Die Nacheinanderausführung zweier stetiger Funktionen ist wiederum stetig.“)

4. Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, für } x \neq 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, für } x \neq 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese Funktionen stetig sind. (Insbesondere ist also zu untersuchen, ob diese Funktionen im Punkt $x_0 = 0$ stetig sind.)