ALA BLATTNR. 08 19.06.2014

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

15. Juni 2014

1. a)

$$T_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$
$$T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!}$$
$$T_9(x) = T_8(x)$$
$$T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^10}{10!}$$
$$T_{11}(x) = T_{10}(x)$$
$$T_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^10}{10!} + \frac{x^12}{12!}$$
$$T_{13}(x) = T_{12}(x)$$

$$T_9(1) \approx 0,5403025$$
$$T_{11}(1) \approx 0,5403023$$
$$T_{13}(1) \approx 0,5403023$$

b)

f(x)

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$
$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$
$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$$

g(x)

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = 1 - \frac{x}{3}$$
$$T_2(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$
$$T_3(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}$$
$$T_4(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \frac{35x^4}{243}$$

c) Am einfachsten ist es, einfach alle Taylorpolynome bis T_5 zu errechnen, da diese Arbeite sowieso getan werden muss.

$$T_0(x) = 0$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = x + x^2$$
$$T_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$
$$T_4(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$
$$T_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$$

Probe:

$$T_5(1) = \frac{69}{30} = 2,3$$
$$f(1) = 2,287355...$$

Das Ergebnis kommt also hin.

2. (i)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-3x^2+x+2}{x^2-5x+6}\right)=\frac{1}{2}$$

(ii)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-3x^2+x+2}{x^2-5x+6}\right)$$
$$\overset{*}{=}\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-6x+1}{2x-5}\right)$$
$$=-1$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iii)

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{2x}\cdot\ln(1+3x)}\right)$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}\cdot\ln(1+3x)\right)}$$

Wir errechnen zunächst nur die Potenz:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+3x)}{2x}\right)$$
$$\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3}{3x+1}}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

Wir setzen dieses Zwischenergebnis ein und erhalten das Endergebnis:
$\Rightarrow e^{\frac{3}{2}}$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iv)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-e^x+1}{e^x\sin(x)-\sin(x)}\right)$$
$$\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-e^x}{e^x\sin(x)+(e^x-1)\cos(x)}\right)$$
$$\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^x-\sin(x)}{\sin(x)+2e^x\cos(x)}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

3. a)

b)

c) Im Folgenden bilden wir die ersten drei Ableitungen von $\sqrt[5]{x+1}$ und berechnen die Funktionswerte für $x = 0$, die anschliessend in die Formel für Taylorpolynome eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[5]{x+1} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}} & f'(0) &= \frac{1}{5} \\
f''(x) &= -\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}} & f''(0) &= -\frac{4}{25} \\
f'''(x) &= \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}} & f'''(0) &= \frac{36}{125}
\end{aligned}
$$

Einsetzen in

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k :$$

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= 1 + \frac{1}{5}x \\
T_2(x) &= 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 \\
T_3(x) &= 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3
\end{aligned}
$$

4. a)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^x}{x^n}\right) \\
= &\lim_{x\to\infty} \left(\frac{xa^{x-1}}{nx^{n-1}}\right)
\end{aligned}
$$

Nach de l'Hospital darf man auch die Ableitungen beider Funktionen vergleichen. Dies kann n-Mal fortgeführt werden, bis:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{p(x) \cdot a^{x-n}}{q(n) \cdot x^0}\right)$$

$p(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades, wobei das Gleid mit Grad n positiv ist (es "beginnt" also mit x^n). $q(n)$ ist ein Polynom n-ten Grades, ebenfalls positiv. Nun ist bereits eindeutig gezeigt, dass f schneller wächst als g, da der Zähler des obigen Bruches der Form $x^n + ...$ ist, was, mit $x \to \infty$, viel größer, nämlich unendlich, ist, als der Nenner, welcher lediglich der Form $n^n + ...$ ist. $\square$

b) Wir betrachten:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^r}{\ln^k x}\right) \\ = &\lim_{x\to\infty} \left(\frac{rx^{r-1}}{\frac{k\cdot\ln^{k-1} x}{x}}\right) \\ = &\lim_{x\to\infty} \left(\frac{rx^r}{k\cdot\ln^{k-1} x}\right) \end{aligned}$$

Der "Trick", der hier angewandt wurde, ist, dass sich nach jedem durch de l'Hospital erlaubten Ableiten beider Funktionen, im Nenner von h' bzw h'', h''' usw. ein x befindet. Dies kann dann in den Zähler "hochgeschoben" werden. Nach der maximalen Anzahl Ableitungen ist der Zähler also bedeutend größer als der Nenner. g wächst also schneller als h.

c) (i) Die in a) angewandte Methode funktioniert auch mit $g(x) = x^r$. Sollte r nicht in $\mathbb{N}$ liegen, so wird einfach $\lceil r \rceil$ Male abgeleitet.

(ii)

5. Wir berechnen im Folgenden die Näherungswerte für die Fälle n = 4, n = 5, n = 10 :

<u>n = 4</u>

$$\int_0^1 sin\ x\ dx \approx \frac{1}{8}\left(sin(0) + 2\ sin\left(\frac{1}{4}\right) + 2\ sin\left(\frac{2}{4}\right) + 2\ sin\left(\frac{3}{4}\right) + sin\ (1)\right)$$

$$\approx 0.45730093.$$

<u>n = 5</u>

$$\int_0^1 sin\, x\, dx \approx \frac{1}{10}\left(sin(0) + 2sin\left(\frac{1}{5}\right) + 2sin\left(\frac{2}{5}\right) + 2sin\left(\frac{3}{5}\right) + 2sin\left(\frac{4}{5}\right) + sin(1)\right)$$

$$\approx 0.45816434$$

n = 10

$$\int_0^1 sin\ x\ dx \approx \frac{1}{20}\Bigg(sin(0) + 2\ sin\left(\frac{1}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{2}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{3}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{4}{10}\right)$$

$$+ 2\ sin\left(\frac{5}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{6}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{7}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{8}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{9}{10}\right) + sin(0)\Bigg)$$

$$\approx 0.4593145488579763249099$$

6. TODO