

ALA BLATTNR. 06 22.05.2014

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

22. Mai 2014

1. (i)

$$\begin{aligned}\int \sin(\sqrt{3x+7}) dx &= \frac{1}{3} \int \sin(\sqrt{3x+7}) dx = \frac{2}{3} \int (\sqrt{3x+7}) \cdot \sin(\sqrt{3x+7}) dx \\&= \frac{2}{3} \int \cos((\sqrt{3x+7})) dx - \frac{2}{3} \sqrt{3x+7} \cdot \cos(\sqrt{3x+7}) \\&= \frac{2 \sin((\sqrt{3x+7}))}{3} - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{3x+7}) \cdot \cos((\sqrt{3x+7})) + C \\&\quad \Downarrow \\&= \frac{2 \cdot (\sin(\sqrt{3x+7}) - \sqrt{3x+7} \cdot \cos(\sqrt{3x+7}))}{3} + C\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int \cos(\sqrt[3]{x}) dx &= 3 \int (\sqrt[3]{x})^2 \cdot \cos(\sqrt[3]{x}) dx = 3(\sqrt[3]{x})^2 \cdot \sin(\sqrt[3]{x}) - 6 \int \sqrt[3]{x} \cdot \sin(\sqrt[3]{x}) dx \\&= 3(\sqrt[3]{x})^2 \cdot \sin(\sqrt[3]{x}) - 6 \sin(\sqrt[3]{x}) + 6 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \cos(\sqrt[3]{x}) + C \\&\quad \Downarrow \\&= 3 \left(x^{\frac{2}{3}} - 2 \right) \sin(\sqrt[3]{x}) + 6 \sqrt[3]{x} \cos(\sqrt[3]{x}) + C\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 & \int e^{\sqrt{5x+3}} dx \\
 & \quad \Downarrow \\
 & = \frac{2}{5} e^{\sqrt{5x+3}} (\sqrt{5x+3} - 1) + C
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & \int \ln(4x+3) dx \left(\text{für } x > -\frac{3}{4} \right) \\
 & \quad \Downarrow \\
 & = \frac{(4x+3) \cdot \ln(4x+3) - 4x - 3}{4} + C
 \end{aligned}$$

2. (i)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x+1}{x^2-x-6} dx \\
 & \quad \Downarrow \\
 \int f(x) dx & = \frac{1}{5} (4 \log(3-x) + \log(x+2)) + C
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{2x+1}{x^2-4x+4} dx \\
 & \quad \Downarrow \\
 \int f(x) dx & = 2 \cdot \log(x-2) - \frac{5}{x-2} + C
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4x+1}{x^2+4x+8} dx \\
 & \quad \Downarrow \\
 \int f(x) dx & = 2 \cdot \log(x^2+4x+8) - \frac{7}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{2} \right) + C
 \end{aligned}$$

3. a) $f(1) = 9 \cdot e^{-\frac{1}{3}} \approx 6,45$
 $f(2) = 18 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \approx 9,24$
 $f(6) = 54 \cdot e^{-2} \approx 7,31$
 $f(12) = 108 \cdot e^{-4} \approx 1,98$
 $f(24) = 216 \cdot e^{-8} \approx 0,07$
- b) $f'(t) = 9t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \cdot -\frac{1}{3} + 9e^{-\frac{1}{3}t} = 9e^{-\frac{1}{3}t} - 3e^{-\frac{1}{3}t} \cdot t = 0 \Leftrightarrow 9e^{-\frac{1}{3}t} = 3e^{-\frac{1}{3}t} \cdot t \Leftrightarrow t = 3$
 $f'(3) = 27e^{-1} \approx 9,93$
 Die maximale Konzentration wird also nach 3 Stunden erreicht und beträgt circa 9,93 Milligramm pro Liter.
- c) Hierfür berechnen wir das Integral von f zwischen 0 und 6, und teilen das Ergebnis durch $6 - 0 = 6$.

$$\begin{aligned} & \int_0^6 9t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} dt \\ &= [-27e^{-\frac{1}{3}t} \cdot (t+3)]_0^6 \\ &= -243e^{-2} + 81 \\ &= 48,11... \\ &\frac{48,11...}{6} \approx 8,02 \end{aligned}$$

Die durchschnittliche Konzentration in den ersten 6 Stunden liegt demnach bei circa 8,02 Milligramm pro Liter.

Als, wenn auch nur sehr grobe, Probe kann man die ersten drei Werte aus Aufgabenteil a addieren und durch drei teilen, was $7, \bar{6}$ ergibt.

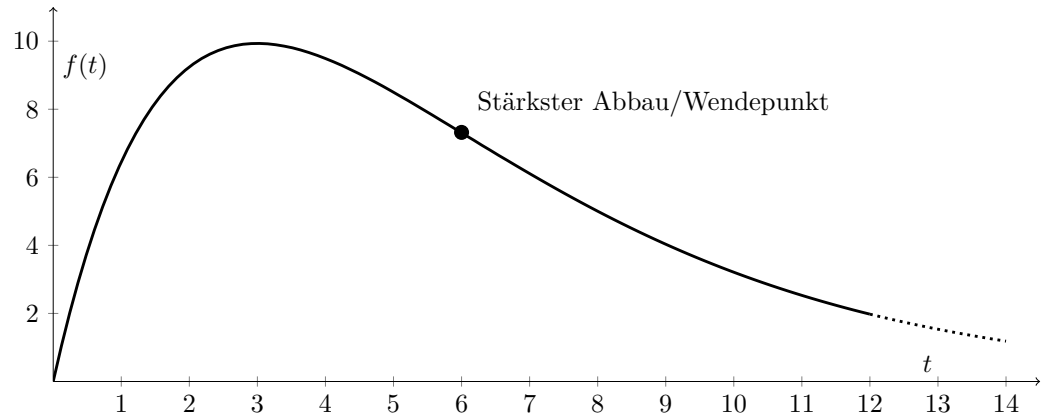
- d) Analog zu Aufgabenteil c):

$$\begin{aligned} & \int_6^{12} 29t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} dt \\ &= [-27e^{-\frac{1}{3}t} \cdot (t+3)]_6^{12} \\ &= -405e^{-4} + 243e^{-2} \\ &= 25,46... \\ &\frac{25,46...}{6} \approx 4,24 \end{aligned}$$

In den zweiten 6 Stunden liegt die Durchschnittliche Konzentration also bei 4,24 mg/l.

Auch hier kann wieder, als grobe Probe, Aufgabenteil a herangezogen werden.
 $\frac{7,31+1,98}{2} \approx 4,65$.

e) Skizze:



$$f'(t) = 9e^{-\frac{1}{3}t} - 3e^{-\frac{1}{3}t} \cdot t$$

$$f''(t) = e^{-\frac{1}{3}t} \cdot x - 6e^{-\frac{1}{3}t} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{3}t} \cdot x = 6e^{-\frac{1}{3}t} \Leftrightarrow x = 6$$

4. a) $f(x) = (2x^4 + 3)^{\sin x} = e^{\ln(2x^4+3)\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(2x^4+3)}$

$$f'(x) = (2x^4 + 3)^{\sin x} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(2x^4 + 3) + \sin(x) \cdot \frac{8x^3}{2x^4+3} \right)$$

b)

c)

d)