Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 10

A: Präsenzaufgaben am 26. Juni 2014

1. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = 3xy + 2x^2 - y^2 - x + 4y - 5.$$

Den Graphen von f stellen wir uns als ein Gebirge vor. Ein Wanderer befindet sich im Punkt P mit den Koordinaten $\big(1, 1, f(1,1)\big)$.

a) Aufwärm-Frage: Auf welcher Höhe befindet sich der Wanderer? (1 Einheit = 1km)

b) Berechnen Sie die Steigung des Gebirges im Punkt P in Richtung der x-Achse und in Richtung der y-Achse.

c) In welcher Richtung steigt das Gebirge in P am steilsten an? Berechnen Sie die Stärke des Anstiegs in dieser Richtung.

2. a) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -2 + 5i$: Stellen Sie $z_3 = z_1 \cdot z_2$ sowie $z_4 = \dfrac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + ib$ dar.

b) Für z_1 und z_2 wie in a): Berechnen Sie Betrag und Argument von z_1 und z_2.

3. Beschreiben Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene durch geometrische Begriffe (wie z.B. Kreis, Mittelpunkt, Radius, Gerade, ...):

$$M = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \big|z - i\big| = \big|z\big| \Big\}.$$

B: Hausaufgaben zum 3. Juli 2014

1. a) Bestimmen Sie die stationären Stellen für die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob lokale bzw. globale Minima oder Maxima vorliegen:

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2yz - 2x - 6y + 8.$$

b) Stellen Sie sich vor, dass die Funktion f aus a) eine räumliche Temperaturverteilung beschreibt: Für jeden Punkt (x,y,z) gibt $f(x,y,z)$ die Temperatur zu einem festen Zeitpunkt an. Wir betrachten den Punkt $P = (1,1,1)$. In welcher Richtung steigt in P die Temperatur am stärksten an? Berechnen Sie auch die Größe des Anstiegs in dieser Richtung! Welche Richtung ist die des steilsten Abstiegs?

2. a) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $x^2 + 2x - 35 = 0$;

(ii) $x^2 + 2x + 10 = 0$;

(iii) $x^2 - 18x + 81 = 0$.

b) Es seien $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 3 + 2i$ und $z = \frac{z_1}{z_2}$. Stellen Sie z in der Form $a + ib$ dar.

c) Die komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_4$ seien gegeben durch

$$z_1 = -1 - i, \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad z_3 = z_1 \cdot z_2 \quad \text{sowie} \quad z_4 = \overline{z_1}.$$

Geben Sie in einer Skizze die Lage von $z_1, \ldots, z_4$ in der Gaußschen Zahlenebene an.

d) Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene durch geometrische Begriffe (wie z.B. Kreis, Mittelpunkt, Radius, Gerade, ...):

(i) $M_1 = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \big| z - (2+3i) \big| = 2 \Big\}$;

(ii) $M_2 = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \big| z - i \big| = \big| z - (1+2i) \big| \Big\}$.

3. Eine zu Aufgabe 4 von Blatt 9 ähnliche Aufgabe, die diesmal jedoch mit der *Lagrange-Methode* gelöst werden soll: Ein Unternehmen produziert zwei Sorten eines Gutes. Beim Verkauf von x bzw. y Einheiten sei der Gewinn pro Tag gegeben durch

$$f(x,y) = -0.2x^2 - 0.2xy - 0.1y^2 + 48x + 47y - 500.$$

Ähnlich wie in Aufgabe 4 von Blatt 9 ist eine Nebenbedingung zu berücksichtigen, die in Form einer Gleichung vorliegt:

$$x + y = 200. \tag{$\star$}$$

Gesucht sind x und y, so dass der Gewinn $f(x,y)$ maximal wird.

a) Stellen Sie die dazugehörige Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda)$ auf und bestimmen Sie die einzige kritische Stelle (x,y) von f unter der Nebenbedingung $(\star)$.

b) Zeigen Sie mithilfe der geränderten Hesseschen Matrix, dass an der gefundenen Stelle ein lokales Maximum vorliegt.

4. Bestätigen Sie das in Aufgabe 3 gefundene Ergebnis, indem Sie die Aufgabe mit *Variablensubstitution* lösen.