

Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Benjamin Göbel, Malte Moos

Sommersemester 2013

Blatt 9

A: Präsenzaufgaben am 13. Juni 2013

- a) Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_0(x), \dots, T_7(x)$ von $f(x) = \cos x$ (an der Stelle $x_0 = 0$).
b) Benutzen Sie die in a) berechneten Taylorpolynome $T_1(x)$, $T_3(x)$, $T_5(x)$ und $T_7(x)$ zur Berechnung von schrittweise verbesserten Näherungswerten für $\cos(1)$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit $\cos(1) \approx 0.5403023$.
- Berechnen Sie

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \\ \text{(ii)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x + \ln x} \right) \\ \text{(iii)} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \\ \text{(iv)} & \lim_{x \rightarrow 0} x^x \quad (\text{für } x > 0) \end{array}$$

B: Hausaufgaben zum 20. Juni 2013

- a) Berechnen Sie in Ergänzung zu Präsenzaufgabe 1 die Taylorpolynome $T_8(x), \dots, T_{13}(x)$ und benutzen Sie $T_9(x)$, $T_{11}(x)$ und $T_{13}(x)$ zur Berechnung von weiter verbesserten Näherungswerten für $\cos(1)$.
b) Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_0(x), \dots, T_4(x)$ für $f(x) = \sqrt{1+x}$ und $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ an der Stelle $x_0 = 0$.
c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_5(x)$ von $f(x) = e^x \cdot \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$.
- Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) \\ \text{(ii)} & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) \\ \text{(iii)} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}} \\ \text{(iv)} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) \end{array}$$

3. Einige ALA-Klausuraufgaben aus dem Sommersemester 2012:

- Es sei $f(x) = 3^x$ und $t(x)$ sei die Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $(2, 9)$. Berechnen Sie die Steigung von $t(x)$ sowie den Schnittpunkt von $t(x)$ mit der x -Achse.
- Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_0(x)$, $T_1(x)$ und $T_2(x)$ für $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ (für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$).
- Die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0; \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob diese Funktion im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

- Wir betrachten die Menge \mathcal{B} aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen, die die folgende Eigenschaft (E) besitzen:

$$\begin{array}{l} \text{Es gibt eine reelle Zahl } \varepsilon > 0 \text{ sowie eine reelle Zahl } a \text{ und ein } N \in \mathbb{N}, \\ \text{so dass } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ gilt.} \end{array} \quad (\text{E})$$

- (i) Um welche Menge handelt es sich bei \mathcal{B} ?
 - (ii) Ist jede in \mathcal{B} enthaltene Folge konvergent?
- Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antworten.
4. In der Informatik spielt an vielen Stellen unterschiedliches Wachstumsverhalten von Funktionen („ f wächst schneller als g “) eine Rolle, beispielsweise, wenn es darum geht, die Laufzeit von Algorithmen zu vergleichen. Die dazugehörige präzise Definition haben wir im Skript auf Seite 65 kennengelernt, wo genau gesagt wird, was es bedeuten soll, dass $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ schneller wächst als $g(x)$. Im Folgenden werden drei Standardtypen von Funktionen betrachtet, für die das Wachstumsverhalten zu vergleichen ist.
- a) Es sei $f(x) = a^x$ für ein $a > 1$ und $g(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ schneller wächst als $g(x)$, d.h., weisen Sie nach, dass Folgendes gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \infty.$$

Hinweis: Regeln von de l'Hospital.

- b) Nun sei $g(x) = x^r$ für ein $r \in \mathbb{R}^+$ (d.h. $r > 0$) und $h(x) = (\ln x)^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Bei $h(x)$ handelt es sich also um die k -te Potenz des natürlichen Logarithmus; man schreibt meistens $\ln^k x$ anstelle von $(\ln x)^k$. Zeigen Sie, dass $g(x)$ für $x \rightarrow \infty$ schneller wächst als $h(x)$.
 - c) **Zusätze** (leichte Verallgemeinerungen von a) und b)):
- (i) Begründen Sie, weshalb a) richtig bleibt, wenn dort $g(x) = x^r$ für ein beliebiges $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ vorausgesetzt wird.
 - (ii) Bleibt b) richtig, wenn dort (anstelle von $\ln x$) $\log_a x$ für eine beliebige Basis $a > 1$ betrachtet wird?