Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 5

B: Hausaufgaben zum 15. Mai 2014

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale und machen Sie für (iii)-(v) die Probe.

(i) $\int (x^4 + 2x^3 - x + 5)\, dx$

(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$ (für $x > 0$)

(iii) $\int x \cdot \sin(3x)\, dx$

(iv) $\int x^3 \cdot \ln x\, dx$

(v) $\int x^2 e^x\, dx$

(i) $\int (x^4+2x^3-x+5)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5x$

(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -2x^{-\frac{1}{2}}$

(iii) $\int x \cdot \sin(3x)\,dx = x \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right) - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\,dx$

$= -\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)\,dx$

Probe: $\left(-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)\right)' =$

$-\frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{1}{3}x \cdot 3(-\sin(3x)) + \frac{1}{3}\cos(3x) =$

$x\sin(3x)$.

(iv) $\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\, dx =$

$\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 = x^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{16}\right).$

Probe: $\left[x^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{16}\right)\right]' = 4x^3\left(\frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{16}\right) +$

$x^4 \cdot \frac{1}{4x} = x^3 \ln x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^3 = x^3 \ln x$

(v) $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx$

$= x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx$

$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \, dx\right)$

$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x)$

$= e^x(x^2 - 2x + 2).$

Probe: $\left[e^x(x^2 - 2x + 2)\right]' =$

$e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) =$

$e^x x^2 - e^x 2x + e^x \cdot 2 + e^x 2x - e^x \cdot 2 = x^2 e^x.$

4. Es sei $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle besitzt, und berechnen Sie diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren, wobei der Startwert $x_0 = 1$ sein soll. Führen Sie einige Iterationsschritte aus: Berechnen Sie zumindest x_1, x_2, x_3 und x_4. Besser ist es jedoch, wenn Sie noch ein paar Schritte mehr durchführen, bis sich der erhaltene Wert „nicht mehr ändert".

Es gilt $f(1) = -7 < 0$ und $f(2) = 16 > 0$. Da f stetig ist, hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $[1,2]$.

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}.$$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1 - \frac{-7}{17} = 1 + \frac{7}{17} \approx 1.411764706$

$x_2 \approx 1.369336471$

$x_3 \approx 1.368808189$

$x_4 \approx 1.368808108$

$x_5 \approx 1.368808108.$

Zur Durchführung mit dem Taschenrechner, etwa mit CASIO fx-991ES. Man beginnt mit Ans $= 1$ und gibt

Ans$-$(Ans^3+2×Ans^2+10×Ans−20)÷(3×Ans^2+4×Ans+10)

ein. Für jede Iteration braucht man dann nur noch "=" zu drücken.