

ALA 01 10.04.2014

Jonathan Siems, Matr.-Nr.

Lina Matr.-Nr.

Tronje Krabbe, Matr.-Nr.

7. April 2014

1. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall $x > -5$:

$$\frac{2}{x+5} \geq 3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 3x + 15 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x \leq \left(-\frac{13}{3}\right) \quad (3)$$

Fall $x < -5$:

In diesem Fall ist die gesamte Linke Seite der Ungleichung immer negativ, da der Nenner des Bruches negativ ist. Das bedeutet, dass für x kleiner -5 keine Lösung existiert. Daraus folgt:

$$L = \left(-5, -\frac{13}{3}\right]$$

2. Wir unterscheiden abermals zwei Fälle:

Fall $x \geq \frac{4}{3}$:

$$|3x - 4| \geq 2 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \quad (5)$$

Fall $x < \frac{4}{3}$:

$$|3x - 4| \geq 2 \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow -(3x - 4) \geq 2 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3} \quad (8)$$

Daraus folgt:

$$L = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup (2, \infty)$$

3. a)

$$|a_n - a| = \left| \frac{4n-1}{n+5} - 4 \right| \quad (9)$$

$$= \left| \frac{4n-1}{n+5} - \frac{4(n+5)}{n+5} \right| \quad (10)$$

$$= \left| \frac{4n-1}{n+5} - \frac{4n+20}{n+5} \right| \quad (11)$$

$$= \left| \frac{-21}{n+5} \right| \quad (12)$$

$$= -\frac{21}{n+5} \quad (13)$$

b) Gesucht ist:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{21}{n+5} < \epsilon \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow n > -\frac{21}{\epsilon} - 5 \quad (16)$$

Nun setze man $N > -\frac{21}{\epsilon} - 5$. Daraus folgt:

$|a_n - a| < \epsilon$ gilt für alle $n \geq N$. Somit ist gezeigt, dass die Folge a_n gegen a konvergiert.

c)

$$\epsilon = \frac{1}{10} \Rightarrow N = -214 \quad (17)$$

$$\epsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow N = -2104 \quad (18)$$

$$\epsilon = \frac{1}{1000} \Rightarrow N = -21004 \quad (19)$$

$$(20)$$

4. Beschränktheit

(1) Behauptung: $1 \leq a_n < 2$

(1) gilt für $n = 1$: $1 \leq a_1 = \frac{5}{3} < 2$

Angenommen, (1) gilt für ein beliebiges, fest gewähltes n . Dann muss auch gelten:

$$1 \leq a_{n+1} < 2 \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 < 2 \quad (22)$$

Zeige zuerst, dass gilt: $1 \leq a_{n+1}$

$$1 \leq \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{a_n}{2} \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a_n \quad (26)$$

Dies entspricht unserer Annahme (1).

Zeige nun, dass gilt: $a_{n+1} < 2$

$$\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 < 2 \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 < 1 \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_n}{2} < 1 \quad (29)$$

$$\Leftrightarrow a_n < 2 \quad (30)$$

Dies fügt sich ebenfalls (1). Somit ist durch vollständige Induktion gezeigt, dass (a_n) beschränkt ist.

Monotonie

Zu zeigen: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

Wir verwenden abermals vollständige Induktion um diese Aufgabe zu lösen:

(2) gilt für $n = 1$: $\frac{61}{36} \geq \frac{5}{3}$.

Angenommen, (2) gilt für ein beliebiges, fest gewähltes n . Dann muss auch gelten:

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_{n+1}}{2}\right)^2 + 1 \geq \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_n}{2} \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n \quad (34)$$

Hiermit ist nun auch die Monotonie der Folge bewiesen.