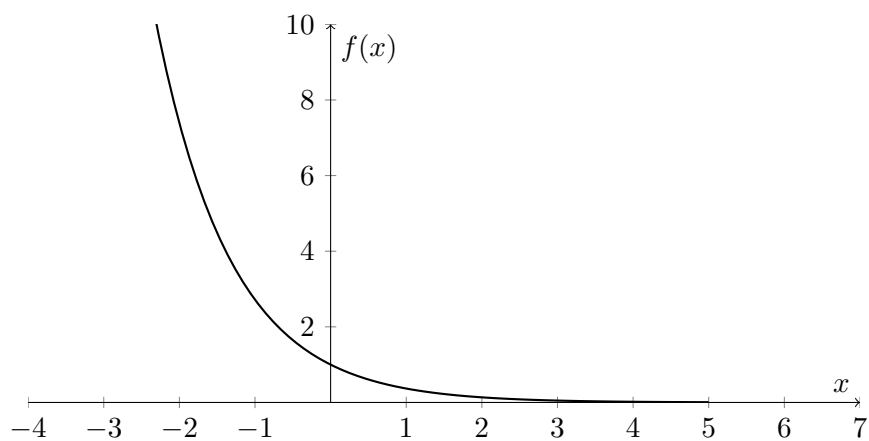


ALA 07 29.05.2014

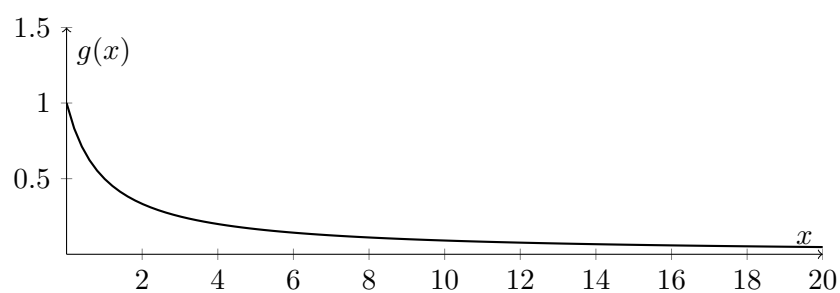
Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

5. Juni 2014

1. a)



Die e -Funktion besitzt keinen Wendepunkt, genauso wenig wie e^{-x} .



Wendepunktberechnung:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

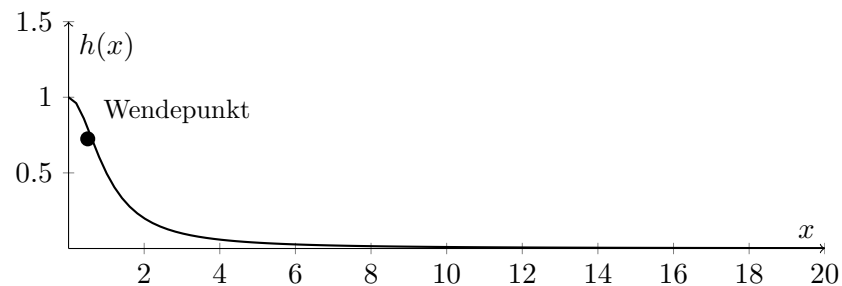
$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$g''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$0 = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2$$

Auch $g(x)$ hat keinen Wendepunkt.



$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$h''(x) \stackrel{*}{=} \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

* Die Anwendungen der Quotienten- und Kettenregel wurden hier nicht ausgeführt.

$$0 = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} = x$$

Der Wendepunkt von h liegt also bei $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $h(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

b) (i)

$$\int_0^\infty e^{-x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} + 1 = 1$$

Der Flächeninhalt ist also 1.

(ii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x} = [\log(1+x)]_0^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} \log(b+1) - \log(1) = \infty$$

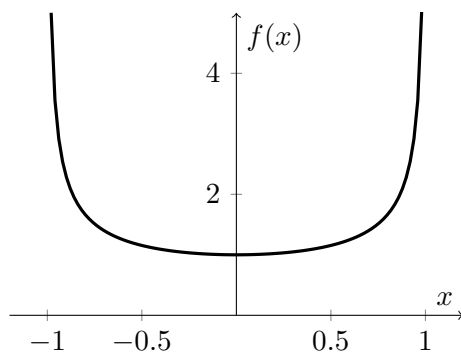
Der Flächeninhalt ist also unendlich groß.

(iii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = [\tan^{-1}(x)]_0^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

c)

Skizze:



Für ein bestimmtes Integral berechnen wir die Fläche zwischen x und dem Graphen:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1}(x)]_{-1}^1 = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)$$

$$\approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058$$

2. a)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^i}$$

* Dies gilt, da $\frac{0}{2^0} = 0$.

Es gelte:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\frac{i}{2^i}} < 1$$

Da $\sqrt[i]{i} \rightarrow 1$ für $i \rightarrow \infty$ und $2^i \geq 1$, ist diese Aussage korrekt. Somit konvergiert die Reihe.

b) Wir betrachten den folgenden Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{i+1} \cdot (i+1)!}{(i+1)^{i+1}}}{\frac{(-1)^i \cdot i!}{i^i}} \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{i+1} \cdot i!}{(i+1)^i}}{\frac{(-1)^i \cdot i!}{i^i}} \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{i+1} \cdot i! \cdot i^i}{(i+1)^i \cdot (-1)^i \cdot i!} \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| - \frac{i^i}{(i+1)^i} \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i^i}{(i+1)^i} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{e} \end{aligned}$$

* Weil das ja klar ist.

Da $\frac{1}{e} < 1$ ist die Konvergenz nachgewiesen.

3. Für $\sum_{i=0}^{\infty} i^2 2^i x^i$ soll der Konvergenzradius ermittelt werden.

a) Mithilfe der Limes-Version des Quotientenkriteriums:

Wir betrachten den folgenden Grenzwert. Ist dieser kleiner als 1, so liegt Konvergenz vor. Ist er größer, so divergiert die Reihe. Wir wählen ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$; in der folgenden Rechnung ist x also fest gewählt.

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{(i+1)^2 2^{i+1} x^{i+1}}{i^2 2^i x^i} \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \cdot 2x \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \right| \cdot |2x| \right) \\ &\stackrel{*}{=} 2|x| \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \right| \\ &= 2|x| \end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurde genutzt, dass x fest gewählt wurde. Ausserdem gilt:

$$2|x| \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

Daraus folgt: $R = \frac{1}{2}$

b) Mithilfe der Limes-Version des Wurzelkriteriums:

Wir betrachten abermals einen Grenzwert, und es gilt abermals, dass die Reihe konvergiert, wenn der besagt Grenzwert kleiner als 1 ist. Es sei wieder $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest gewählt.

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|i^2 2^i x^i|} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sqrt[i]{i^2} \cdot \sqrt[i]{2^i} \cdot \sqrt[i]{x^i} \right) \\ &\stackrel{*}{=} 2x \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sqrt[i]{i} \cdot \sqrt[i]{i} \right) \\ &= 2x \end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurde genutzt, dass x fest gewählt wurde. Weiterhin gilt:

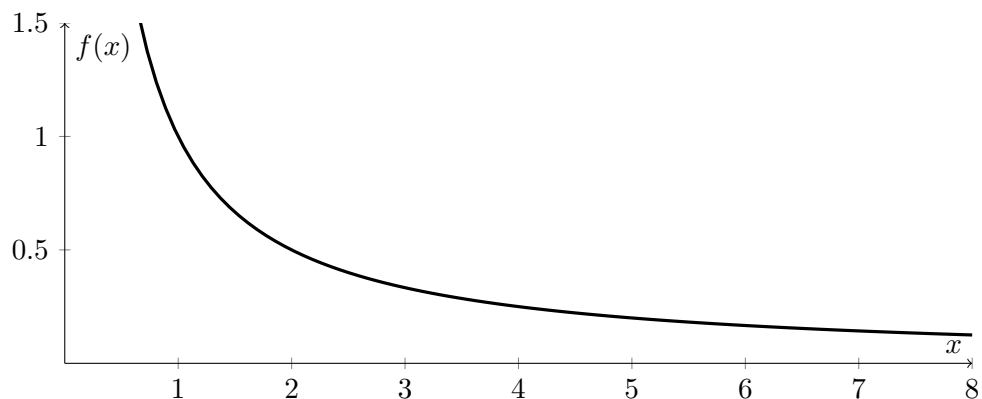
$$2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Dementsprechend gilt $R = \frac{1}{2}$.

4. **TODO**

5. a)

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad \Bigg| \quad \text{Es gilt } n \in \mathbb{N}$$



Anhand der Skizze kann man erkennen, dass für einen größeren x -Wert der Wert für $f(x)$ abnimmt,

da die Funktion für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Wir erhalten für jeden Wert ≥ 1 den wir für x einsetzen einen Wert ≤ 1 .

Da wir bei der Berechnung eines bestimmten Integrals bei einem gleichen Wert für Integrationsober- und untergrenze immer 0 als Ergebnis erhalten würden, ist für die Obergrenze hier $n + 1$ gewählt.

Bei der Integration von $\int \frac{1}{x} dx$ erhalten wir $\left[\ln(x) \right]$,

für die Untergrenze also $\ln(1) = 0$.

Somit müssen wir für die Berechnung des Integrals $\left(\ln(n+1) - \ln(1) \right)$

lediglich den Wert der oberen Integrationsgrenze in $\ln(x)$ einsetzen.

Man sieht, dass $\ln(n+1)$ im Verhältnis zu n sehr langsam wächst.

Für jeden Wert von n gilt daher $\ln(n+1) \leq n$

Ein Beweis ist in diesem Falle obsolet, man könne ihn aber mithilfe vollständiger Induktion erbringen.

6. **TODO**