# Mathematik II für Studierende der Informatik
# (Analysis und Lineare Algebra)

**Thomas Andreae, Benjamin Göbel, Malte Moos**

**Sommersemester 2013**

**Blatt 8**

## A: Präsenzaufgaben am 6. Juni 2013

**1.** a) Schreiben Sie die Reihe

$$1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots$$

und ebenfalls die $n$-te Partialsumme $s_n$ dieser Reihe mit dem Summenzeichen auf. Konvergiert diese Reihe? Geben Sie ggf. den Grenzwert an.

b) Wie a) für

$$1 - \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots.$$

c) Begründen Sie, weshalb für $q \in \mathbb{R}$ (mit $|q| < 1$) Folgendes gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \ .$$

d) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| \geq 1$: Begründen Sie, weshalb die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ divergiert.

**2.** Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

nennt man bekanntlich *Harmonische Reihe*; ihre $n$-te Partialsumme bezeichnet man mit $H_n$ und man nennt $H_n$ die *$n$-te harmonische Zahl*:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

a) Schreiben Sie sowohl $H_n$ als auch die Harmonische Reihe mit dem Summenzeichen auf und berechnen Sie $H_1, \dots, H_4$.

b) Begründen Sie (mündlich) anhand der folgenden Zeile, dass die Harmonische Reihe divergiert:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

**3.** Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i^2}$. Auf Seite 19/20 des Skripts wurde nachgewiesen, dass diese Reihe konvergiert – der Beweis war aber nicht sonderlich anschaulich. Nun soll mit Mitteln der Integralrechnung *auf eine besonders anschauliche Art* nachgewiesen werden, dass die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i^2}$ konvergiert.

**Anleitung**: Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x > 0$ und betrachten Sie geeignete Untersummen.

**4.** Weisen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mit dem Quotientenkriterium nach.

**Hinweis**: Es ist hier (wie in vielen Fällen) zweckmäßig, die Limes-Version des Quotientenkriteriums zu verwenden.

## B: Hausaufgaben zum 13. Juni 2013

**1.** a) In Präsenzaufgabe 4 haben wir die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mit dem Quotientenkriterium nachgewiesen. Führen Sie dasselbe mit dem Wurzelkriterium durch. (Es ist zweckmäßig, die Limes-Version des Wurzelkriteriums zu verwenden.)
**Hinweis**: Es gilt $\sqrt[i]{i} \to 1$ für $i \to \infty$ (siehe Skript, Abschnitt 2.7.2).

b) Weisen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i!}{i^i}$ mit der Limes-Version des Quotientenkriteriums nach.

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 2^i x^i$ auf zwei Arten:

(i) mit Hilfe der Limes-Version des Quotientenkriteriums;

(ii) mit Hilfe der Limes-Version des Wurzelkriteriums.

**Hinweis zu c)**: Gehen Sie ähnlich vor wie im Beispiel auf Seite 121 (unten).

**2.** Entscheiden Sie, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt:

| | | |
|---|---|---|
| (i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{i+1}}$ | (iii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2(i+1)}$ | (v) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}$ |
| (ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i}{2(i+1)}$ | (iv) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i}$ | (vi) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i}$ |

Für (i) - (iv) gilt: Falls Konvergenz vorliegt, so ermittle man auch den Grenzwert. Falls Sie zu dem Ergebnis gekommen sind, dass im Fall (v) bzw. (vi) Konvergenz vorliegt: Haben Sie eine Idee, welches der Grenzwert ist?

**3.** a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und erläutern Sie anhand der Skizze, weshalb Folgendes gilt:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le H_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{$\star$}$$

**Hinweis**: Betrachten Sie eine geeignete Obersumme.

b) Erläutern Sie, weshalb ($\star$) ebenfalls eine Begründung für die Divergenz der Harmonischen Reihe liefert.
**Hinweis**: Berechnen Sie das in ($\star$) linksstehende Integral.

**4.** Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f(n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. In der Informatik wird in vielen Zusammenhängen danach gefragt, *wie schnell* $f(n)$ gegen unendlich geht. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Funktion

$$f(n) = H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

die häufig bei der Analyse von Algorithmen auftritt, etwa bei der Laufzeitanalyse von QUICKSORT, in der das Resultat dieser Übungsaufgabe eine wichtige Rolle spielt (vgl. Cormen et al.: *Algorithmen - Eine Einführung*).

a) Zeigen Sie

$$H_n - 1 \le \ln(n) \le H_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

**Hinweis**: Die „Hälfte“ von (1) wurde im Wesentlichen bereits in Aufgabe 3 erledigt.

b) Folgern Sie aus (1):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1. \tag{2}$$

**Hinweis**: Wenn a) erledigt ist, so geht b) recht schnell.

(Das Ergebnis (1) (bzw. (2)) können wir auch so aussprechen: Die Funktion $f(n) = H_n$ wächst nur recht langsam, nämlich etwa so wie $\ln(n)$.)