-L.19-

Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 6

B: Hausaufgaben zum 22. Mai 2014

3. Die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten steigt nach der Einnahme zunächst an, um dann wieder zu fallen: Das Medikament baut sich ab. Die Funktion $f : [0, 24] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = 9t \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$$

beschreibt für die ersten 24 Stunden nach der Einnahme die im Blut vorhandene Menge eines Medikaments in Milligramm pro Liter (in Abhängigkeit von der Zeit t).

a) Berechnen Sie die Konzentration im Blut des Patienten nach t Stunden für $t = 1, 2, 6, 12$ und 24.

b) Berechnen Sie die maximale Konzentration im Blut und geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt diese erreicht wird.

c) Berechnen Sie die mittlere Konzentration des Medikaments in den ersten 6 Stunden nach der Einnahme.

d) Berechnen Sie die mittlere Konzentration des Medikaments in den zweiten 6 Stunden nach der Einnahme.

a) $f(1) \approx 6.45$
$f(2) \approx 9.24$
$f(6) \approx 7.31$
$f(12) \approx 1.98$
$f(24) \approx 0.07$

b) $f'(t) = 9e^{-\frac{1}{3}t} - 3te^{-\frac{1}{3}t} = 0 \Leftrightarrow 3e^{-\frac{1}{3}t} = te^{-\frac{1}{3}t} \Leftrightarrow$

$t = 3$ (wegen $e^{-\frac{1}{3}t} \neq 0$).

$f''(t) = -3e^{-\frac{1}{3}t} - 3e^{-\frac{1}{3}t} + te^{-\frac{1}{3}t}$

$= (t-6)e^{-\frac{1}{3}t}$

$\Rightarrow f''(3) < 0$

Also liegt bei $t = 3$ ein Maximum vor, d.h., die maximale Konzentration wird nach 3 Stunden erreicht, sie beträgt (in Milligramm pro Liter)

$f(3) = 27 \cdot e^{-1} \approx 9.93$.

c) Die gesuchte mittlere Konzentration ist gleich

$\frac{1}{6}\int_0^6 9te^{-\frac{1}{3}t}dt = \frac{3}{2}\int_0^6 te^{-\frac{1}{3}t}dt$. Es gilt

$$\int te^{-\frac{1}{3}t}dt = t\cdot(-3)e^{-\frac{1}{3}t} - \int -3e^{-\frac{1}{3}t}dt =$$

$$-3te^{-\frac{1}{3}t} + 3\cdot(-3)e^{-\frac{1}{3}t} = (-3t-9)e^{-\frac{1}{3}t}.$$

Als Ergebnis erhält man $\frac{3}{2}\left[(-3t-9)e^{-\frac{1}{3}t}\right]_0^6 =$

$\frac{3}{2}(-27e^{-2}+9) \approx 8.02$

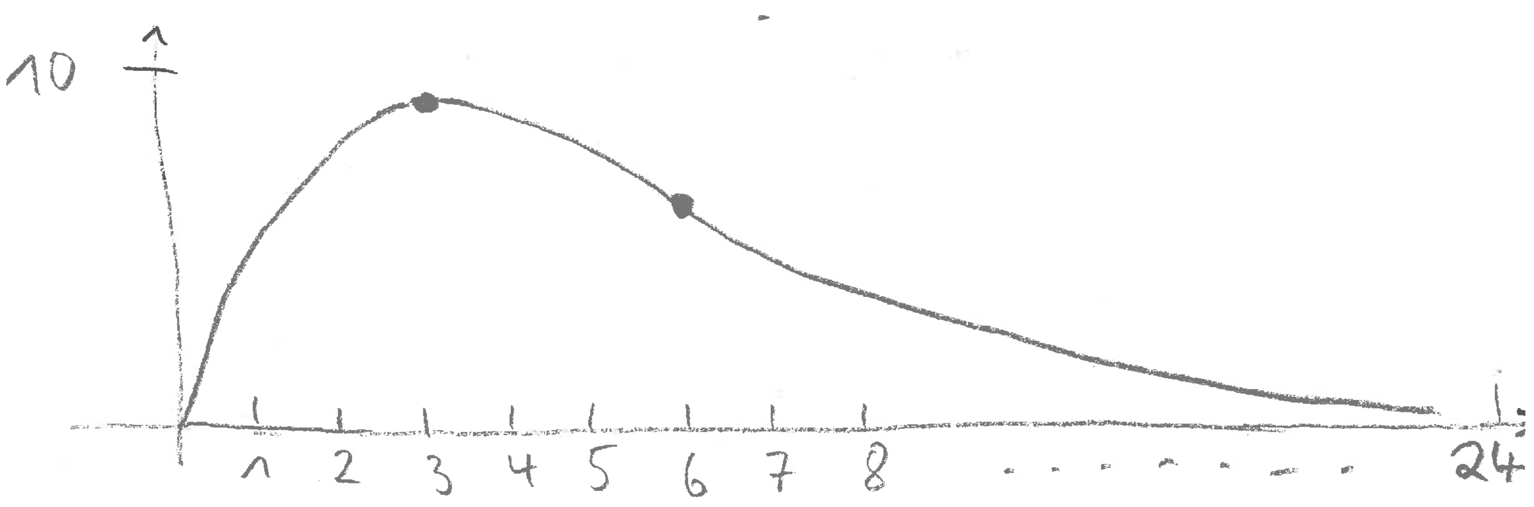
d) Diesmal ist $\frac{1}{6}\int_6^{12} 9te^{-\frac{1}{3}t}dt$ zu berechnen. Man erhält

$$\frac{1}{6}\int_6^{12} 9te^{-\frac{1}{3}t}dt = \frac{3}{2}\int_6^{12} te^{-\frac{1}{3}t}dt = \frac{3}{2}\left[(-3t-9)e^{-\frac{1}{3}t}\right]_6^{12} =$$

$\frac{3}{2}(-45e^{-4}+27e^{-2}) \approx 4.25$

e) Zur Ermittlung des Wendepunktes („Punkt stärksten Abbaus") setzen wir $f''(t) = 0$, d.h. $(t-6)e^{-\frac{1}{3}t} = 0$. Es folgt, dass dieser Punkt bei $t = 6$ liegt. (Man beachte: $f''(t) < 0$, falls $t < 6$ und $f''(t) > 0$, falls $t > 6$.)

Es gilt $f(6) = 54 \cdot e^{-2} \approx 7.3$; Skizze (grob):



Zu guter Letzt einige Klausuraufgaben aus dem Jahr 2013.

4 ~~5~~. a) Es sei $f(x) = (2x^4+3)^{\sin x}$. Berechnen Sie $f'(x)$.

b) Berechnen Sie $\int \sin\left(\sqrt{\frac{x}{4}+1}\right)\,dx$.

c) Berechnen Sie $\int \frac{2x+1}{x^2-4x-5}\,dx$.

d) Berechnen Sie $\int \frac{4x+1}{x^2-12x+36}\,dx$.

a) $f(x) = (2x^4+3)^{\sin(x)} = e^{\ln(2x^4+3)^{\sin(x)}} = e^{\sin(x)\cdot\ln(2x^4+3)} \Rightarrow$

$f'(x) = e^{\sin(x)\cdot\ln(2x^4+3)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(2x^4+3) + \sin(x)\,\frac{8x^3}{2x^4+3}\right)$

$= (2x^4+3)^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(2x^4+3)+\sin(x)\cdot\frac{8x^3}{2x^4+3}\right)$

b) $t = \sqrt{\frac{1}{4}x+1}$, $x = 4t^2-4$, $\frac{dx}{dt} = 8t$, $dx = 8t\,dt$. $\Rightarrow$

$\int \sin\left(\sqrt{\frac{x}{4}+1}\right)dx = 8\int t\sin t\,dt = 8\left(-t\cos t - \int -\cos t\,dt\right) = 8(-t\cos t+\sin t) =$

$8\left(-\sqrt{\frac{1}{4}x+1}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{1}{4}x+1}\right)+\sin\left(\sqrt{\frac{1}{4}x+1}\right)\right).$

c) $x^2-4x-5=0 \Rightarrow x_{1/2}=2\pm\sqrt{4+5} \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-1 \Rightarrow$

$$\frac{2x+1}{x^2-4x-5}=\frac{2x+1}{(x-5)(x+1)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+A-5B}{(x-5)(x+1)} \Rightarrow$$

$A+B=2,\ A-5B=1 \Rightarrow 1+5B+B=2 \Rightarrow B=\frac{1}{6},\ A=\frac{11}{6} \Rightarrow$

$$\int\frac{2x+1}{x^2-4x-5}dx=\frac{11}{6}\int\frac{1}{x-5}dx+\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{11}{6}\ln|x-5|+\frac{1}{6}\ln|x+1|$$

d) $$\frac{4x+1}{x^2-12x+36}=\frac{4x+1}{(x-6)^2}=\frac{A}{(x-6)^2}+\frac{B}{x-6}=$$

$$\frac{Bx+A-6B}{(x-6)^2} \Rightarrow B=4,\ A-6B=1,\ A=25 \Rightarrow$$

$$\int\frac{4x+1}{x^2-12x+36}dx=\int\frac{25}{(x-6)^2}dx+\int\frac{4}{x-6}dx=$$

$$25\cdot\left(-\frac{1}{x-6}\right)+4\ln|x-6|=\frac{25}{6-x}+4\ln|x-6|.$$