ALA BLATTNR. 08 19.06.2014

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

19. Juni 2014

1. a)

$$
\begin{aligned}
&T_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\\
&T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!}\\
&T_9(x) = T_8(x)\\
&T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^10}{10!}\\
&T_{11}(x) = T_{10}(x)\\
&T_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^10}{10!} + \frac{x^12}{12!}\\
&T_{13}(x) = T_{12}(x)\\
&\\
&T_9(1) \approx 0,5403025\\
&T_{11}(1) \approx 0,5403023\\
&T_{13}(1) \approx 0,5403023
\end{aligned}
$$

b)

f(x)

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$
$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$
$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$$

g(x)

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = 1 - \frac{x}{3}$$
$$T_2(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$
$$T_3(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}$$
$$T_4(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \frac{35x^4}{243}$$

c) Am einfachsten ist es, einfach alle Taylorpolynome bis T_5 zu errechnen, da diese Arbeite sowieso getan werden muss.

$$T_0(x) = 0$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = x + x^2$$
$$T_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$
$$T_4(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$
$$T_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$$

Probe:

$$T_5(1) = \frac{69}{30} = 2,3$$
$$f(1) = 2,287355...$$

Das Ergebnis kommt also hin.

2. (i)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-3x^2+x+2}{x^2-5x+6}\right)=\frac{1}{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-3x^2+x+2}{x^2-5x+6}\right)\\ \overset{*}{=}&\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-6x+1}{2x-5}\right)\\ =&-1\end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iii)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}\\ =&\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{2x}\cdot\ln(1+3x)}\right)\\ =&e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}\cdot\ln(1+3x)\right)}\end{aligned}$$

Wir errechnen zunächst nur die Potenz:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+3x)}{2x}\right)\\ \overset{*}{=}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3}{3x+1}}{2}\right)\\ =&\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Wir setzen dieses Zwischenergebnis ein und erhalten das Endergebnis:
$\Rightarrow e^{\frac{3}{2}}$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iv)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin(x)}\right)\\ =&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-e^x+1}{e^x\sin(x)-\sin(x)}\right)\\ \overset{*}{=}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-e^x}{e^x\sin(x)+(e^x-1)\cos(x)}\right)\\ \overset{*}{=}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^x-\sin(x)}{\sin(x)+2e^x\cos(x)}\right)\\ =&-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

3. a) Die Steigung von t ist die Steigung von f an der Stelle $(2, 9)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 + 3x - 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2x + 3 \\ f'(2) &= 11 \end{aligned}$$

Die Steigung von t ist also 11. Damit wissen wir $t(2) = 9$, sowie z.B. $t(3) = 20$. Also:

$$\begin{aligned} t(x) &= ax + b \\ 9 &= 2a + b \\ 20 &= 3a + b \\ b &= 9 - 2a \\ 20 &= 3a + 9 - 2a \\ 20 &= a + 9 \\ a &= 11 \\ b &= -13 \\ t(x) &= 11x - 13 \\ t(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{13}{11} \end{aligned}$$

t schneidet also die x-Achse an der Stelle $\frac{13}{11}$

b)

$$\begin{aligned} &h(x) = x^x \\ &h'(x) = x^x(\ln(x) + 1) \\ &h''(x) = x^x \left(\frac{1}{x}(\ln(x) + 1)^2\right) \\ &h'(0) = -\infty \end{aligned}$$

Well shit

c) Im Folgenden bilden wir die ersten drei Ableitungen von $\sqrt[5]{x+1}$ und berechnen die Funktionswerte für $x = 0$, die anschliessend in die Formel für Taylorpolynome eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[5]{x+1} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}} & f'(0) &= \frac{1}{5} \\
f''(x) &= -\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}} & f''(0) &= -\frac{4}{25} \\
f'''(x) &= \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}} & f'''(0) &= \frac{36}{125}
\end{aligned}$$

Einsetzen in

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k :$$

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= 1 + \frac{x}{5} \\
T_2(x) &= 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} \\
T_3(x) &= 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + \frac{6x^3}{125}
\end{aligned}$$

d) Die Funktion h ist genau dann differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert (mit $x_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cos(\frac{1}{x})}{x} \\
&\overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} + \cos\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

*Anwendung von de l'Hospital

Demnach ist die Funktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar, da der Grenzwert zwischen $-\infty$ und ∞ schwankt.

4. a)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^x}{x^n}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{xa^{x-1}}{nx^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

Nach de l'Hospital darf man auch die Ableitungen beider Funktionen vergleichen. Dies kann n-Mal fortgeführt werden, bis:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{p(x)\cdot a^{x-n}}{q(n)\cdot x^0}\right)$$

$p(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades, wobei das Gleid mit Grad n positiv ist (es "beginnt" also mit x^n). $q(n)$ ist ein Polynom n-ten Grades, ebenfalls positiv. Nun ist bereits eindeutig gezeigt, dass f schneller wächst als g, da der Zähler des obigen Bruches der Form $x^n + ...$ ist, was, mit $x \to \infty$, viel größer, nämlich unendlich, ist, als der Nenner, welcher lediglich der Form $n^n + ...$ ist. $\square$

b) Wir betrachten:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^r}{\ln^k x}\right)\\ =&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{rx^{r-1}}{\frac{k\cdot\ln^{k-1}x}{x}}\right)\\ =&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{rx^r}{k\cdot\ln^{k-1}x}\right)\end{aligned}$$

Der "Trick", der hier angewandt wurde, ist, dass sich nach jedem durch de l'Hospital erlaubten Ableiten beider Funktionen, im Nenner von h' bzw h'', h''' usw. ein x befindet. Dies kann dann in den Zähler "hochgeschoben" werden. Nach der maximalen Anzahl Ableitungen ist der Zähler also bedeutend größer als der Nenner. g wächst also schneller als h.

c) (i) Die in a) angewandte Methode funktioniert auch mit $g(x) = x^r$. Sollte r nicht in $\mathbb{N}$ liegen, so wird einfach $\lceil r \rceil$ Male abgeleitet.

(ii)

5. Wir berechnen im Folgenden die Näherungswerte für die Fälle n = 4, n = 5, n = 10 :

<u>n = 4</u>

$$\int_0^1 sin\ x\ dx \approx \frac{1}{8}\left(sin(0) + 2\ sin\left(\frac{1}{4}\right) + 2\ sin\left(\frac{2}{4}\right) + 2\ sin\left(\frac{3}{4}\right) + sin\ (1)\right)$$

$$\approx 0.45730093.$$

<u>n = 5</u>

$$\int_0^1 sin\ x\ dx \approx \frac{1}{10}\left(sin(0) + 2sin\left(\frac{1}{5}\right) + 2sin\left(\frac{2}{5}\right) + 2sin\left(\frac{3}{5}\right) + 2sin\left(\frac{4}{5}\right) + sin(1)\right)$$

$$\approx 0.45816434$$

<u>n = 10</u>

$$\int_0^1 sin\ x\ dx \approx \frac{1}{20}\Bigg(sin(0) + 2\ sin\left(\frac{1}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{2}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{3}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{4}{10}\right)$$

$$+ 2\ sin\left(\frac{5}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{6}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{7}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{8}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{9}{10}\right) + sin(0)\Bigg)$$

$$\approx 0.45931454885797632490 99$$

Wir kommen damit dem exakten Wert (≈ 0.4596976941) schon relativ nahe.

6. d)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2+1) - 1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \underline{\underline{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}}$$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (x^2+1)^2 - (-2x)4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1)^2 - (-8x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+1)}(-2(x^2+1) - (-8x^2))}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \underline{\underline{\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}}}$$

$$f'''(x) = \frac{12x(x^2+1)^3 - (6x^2-2)6x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^6} = \frac{\cancel{(x^2+1)^2}(12x(x^2+1) - (36x^3-12x))}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{12x^3 + 12x - (36x^3 - 12x)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-24x^3 + 24x}{(x^2+1)^4}}}$$

Wir setzen $f''(x)$ gleich Null, um die Wendepunkte zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3} \\ 0 &= 6x^2 - 2 \\ 2 &= 6x^2 \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Demnach gibt es zwei Wendepunkte, und zwar bei $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Zur Probe setzen wir die beiden x-Werte noch in die dritte Ableitung ein, die dann nicht gleich 0 sein darf:

$$\frac{-24(\frac{1}{\sqrt{3}}))^3 + \frac{24}{\sqrt{3}}}{((\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1)^4} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$$

$$\frac{-24(\frac{-1}{\sqrt{3}}))^3 + \frac{-24}{\sqrt{3}}}{((\frac{-1}{\sqrt{3}})^2+1)^4} = -\frac{27\sqrt{3}}{16}$$