ALA BLATTNR. 08 19.06.2014

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

16. Juni 2014

1. a)

$$
\begin{aligned}
&T_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \\
&T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} \\
&T_9(x) = T_8(x) \\
&T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^10}{10!} \\
&T_{11}(x) = T_{10}(x) \\
&T_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^10}{10!} + \frac{x^12}{12!} \\
&T_{13}(x) = T_{12}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_9(1) \approx 0,5403025 \\
&T_{11}(1) \approx 0,5403023 \\
&T_{13}(1) \approx 0,5403023
\end{aligned}
$$

b)

$$\mathbf{f(x)}$$
$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$
$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$
$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$$

$$\mathbf{g(x)}$$
$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = 1 - \frac{x}{3}$$
$$T_2(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$
$$T_3(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}$$
$$T_4(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \frac{35x^4}{243}$$

c) Am einfachsten ist es, einfach alle Taylorpolynome bis T_5 zu errechnen, da diese Arbeite sowieso getan werden muss.

$$T_0(x) = 0$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = x + x^2$$
$$T_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$
$$T_4(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$
$$T_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$$

Probe:

$$T_5(1) = \frac{69}{30} = 2,3$$
$$f(1) = 2,287355...$$

Das Ergebnis kommt also hin.

2. (i)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-3x^2+x+2}{x^2-5x+6}\right)=\frac{1}{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-3x^2+x+2}{x^2-5x+6}\right)\\ \overset{*}{=}&\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-6x+1}{2x-5}\right)\\ =&-1\end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iii)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}\\ =&\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{2x}\cdot\ln(1+3x)}\right)\\ =&e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}\cdot\ln(1+3x)\right)}\end{aligned}$$

Wir errechnen zunächst nur die Potenz:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+3x)}{2x}\right)\\ \overset{*}{=}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3}{3x+1}}{2}\right)\\ =&\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Wir setzen dieses Zwischenergebnis ein und erhalten das Endergebnis:
$\Rightarrow e^{\frac{3}{2}}$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iv)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin(x)}\right)\\ =&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-e^x+1}{e^x\sin(x)-\sin(x)}\right)\\ \overset{*}{=}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-e^x}{e^x\sin(x)+(e^x-1)\cos(x)}\right)\\ \overset{*}{=}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^x-\sin(x)}{\sin(x)+2e^x\cos(x)}\right)\\ =&-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

3. a) Die Steigung von t ist die Steigung von f an der Stelle $(2, 9)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 + 3x - 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2x + 3 \\ f'(2) &= 11 \end{aligned}$$

Die Steigung von t ist also 11. Damit wissen wir $t(2) = 9$, sowie z.B. $t(3) = 20$. Also:

$$\begin{aligned} t(x) &= ax + b \\ 9 &= 2a + b \\ 20 &= 3a + b \\ b &= 9 - 2a \\ 20 &= 3a + 9 - 2a \\ 20 &= a + 9 \\ a &= 11 \\ b &= -13 \\ t(x) &= 11x - 13 \\ t(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{13}{11} \end{aligned}$$

t schneidet also die x-Achse an der Stelle $\frac{13}{11}$

b)

$$\begin{aligned} h(x) &= x^x \\ h'(x) &= x^x(\ln(x) + 1) \\ h''(x) &= x^x\left(\frac{1}{x}(\ln(x) + 1)^2\right) \\ h'(0) &= -\infty \end{aligned}$$

Well shit

c) Im Folgenden bilden wir die ersten drei Ableitungen von $\sqrt[5]{x+1}$ und berechnen die Funktionswerte für $x = 0$, die anschliessend in die Formel für

Taylorpolynome eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[5]{x+1} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}} & f'(0) &= \frac{1}{5} \\ f''(x) &= -\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}} & f''(0) &= -\frac{4}{25} \\ f'''(x) &= \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}} & f'''(0) &= \frac{36}{125} \end{aligned}$$

Einsetzen in

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k :$$

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= 1 + \frac{1}{5}x \\ T_2(x) &= 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 \\ T_3(x) &= 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3 \end{aligned}$$

4. a)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right) \\ =\ &\lim_{x\to\infty}\left(\frac{xa^{x-1}}{nx^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Nach de l'Hospital darf man auch die Ableitungen beider Funktionen vergleichen. Dies kann n-Mal fortgeführt werden, bis:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{p(x)\cdot a^{x-n}}{q(n)\cdot x^0}\right)$$

$p(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades, wobei das Gleid mit Grad n positiv ist (es “beginnt” also mit x^n). $q(n)$ ist ein Polynom n-ten Grades, ebenfalls positiv. Nun ist bereits eindeutig gezeigt, dass f schneller wächst als g, da der Zähler des obigen Bruches der Form $x^n + ...$ ist, was, mit $x \to \infty$, viel größer, nämlich unendlich, ist, als der Nenner, welcher lediglich der Form $n^n + ...$ ist. $\square$

b) Wir betrachten:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^r}{\ln^k x}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{rx^{r-1}}{\frac{k\cdot\ln^{k-1}x}{x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{rx^r}{k\cdot\ln^{k-1}x}\right)$$

Der "Trick", der hier angewandt wurde, ist, dass sich nach jedem durch de l'Hospital erlaubten Ableiten beider Funktionen, im Nenner von h' bzw h'', h''' usw. ein x befindet. Dies kann dann in den Zähler "hochgeschoben" werden. Nach der maximalen Anzahl Ableitungen ist der Zähler also bedeutend größer als der Nenner. g wächst also schneller als h.

c) (i) Die in a) angewandte Methode funktioniert auch mit $g(x) = x^r$. Sollte r nicht in $\mathbb{N}$ liegen, so wird einfach $\lceil r \rceil$ Male abgeleitet.

(ii)

5. Wir berechnen im Folgenden die Näherungswerte für die Fälle n = 4, n = 5, n = 10 :

n = 4

$$\int_0^1 sin\ x\ dx \approx \frac{1}{8}\left(sin(0) + 2\ sin\left(\frac{1}{4}\right) + 2\ sin\left(\frac{2}{4}\right) + 2\ sin\left(\frac{3}{4}\right) + sin\ (1)\right)$$
$$\approx 0.45730093.$$

n = 5

$$\int_0^1 sin\ x\ dx \approx \frac{1}{10}\left(sin(0) + 2sin\left(\frac{1}{5}\right) + 2sin\left(\frac{2}{5}\right) + 2sin\left(\frac{3}{5}\right) + 2sin\left(\frac{4}{5}\right) + sin(1)\right)$$
$$\approx 0.45816434$$

n = 10

$$\int_0^1 sin\ x\ dx \approx \frac{1}{20}\Bigg(sin(0) + 2\ sin\left(\frac{1}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{2}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{3}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$+ 2\ sin\left(\frac{5}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{6}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{7}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{8}{10}\right) + 2\ sin\left(\frac{9}{10}\right) + sin(0)\Bigg)$$

$$\approx 0.459314548857976324909$$

6. **TODO**