Mathematatik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 4

A: Präsenzaufgaben am 24. April 2014

1. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

(ii) $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)^5$

(iii) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x^2 + 3x + 1)$

2. Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = 3 \cdot e^x \cdot \sqrt{x}$

(ii) $g(x) = e^{x^2+1}$

(iii) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

3. Berechnen Sie $f'(x)$ für

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ (ii) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (iii) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt{x^3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^7}}$

4. Berechnen Sie die erste Ableitung der beiden Funktionen

$$f(x) = \sin(2x) \quad \text{und} \quad g(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right).$$

B: Hausaufgaben zum 8. Mai 2014

1. a) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = 7x^5 + 3x^3 + x + 1$

(ii) $f(x) = (3x^7 - 4x^3 + x^2 - 3x + 1)^8$

(iii) $f(x) = (3x^4 + 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

(iv) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \ln(x^4 + 3x^2 + 1)$

(v) $f(x) = e^{x^3+x^2+1} \cdot \sqrt{x}$

(vi) $f(x) = \sqrt{x^4 + 1} \cdot \ln x$

b) Berechnen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion

$$q(x) = \frac{5x^2 + 1}{x - 3}.$$

2. Man überprüfe anhand der Definition der Differenzierbarkeit (Skript, Abschnitt 2.1), ob die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 6$ differenzierbar ist:

$$f(x) = \left|3 - \frac{1}{2}x\right|.$$

Fertigen Sie außerdem eine Skizze des Graphen von $f(x)$ an.

3. a) In Abschnitt 2.3.8 des Skripts geht es um die häufig angewandte Methode des *Logarithmischen Differenzierens*. Arbeiten Sie diesen Abschnitt selbstständig durch und wenden Sie die beschriebene Methode zur Berechnung von $f'(x)$ auf die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ an, die gegeben ist durch:

$$f(x) = (x + 1)^{x+2}.$$

b) Leiten Sie auch die folgenden Funktionen mithilfe von Logarithmischer Differentiation ab:

(i) $g(x) = (x^2+5)^{x^4+3}$

(ii) $h(x) = (x^4+3)^{\sqrt{3x+1}}$ (für $x \geq -\frac{1}{3}$)

c) Stellen Sie sich vor, Sie könnten sich nicht mehr an die Formeln für die Ableitungen von $f(x) = 3^x$ und $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ erinnern. Leiten Sie sich die Formeln mit Hilfe von Logarithmischer Differentiation her.

4. Berechnen Sie $f'(x)$ für

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x^7}}$	(iv) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
(ii) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$	(v) $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$
(iii) $f(x) = \sin^2 x$	(vi) $f(x) = (x^3-1)^{\arctan x}$ (für $x > 1$).

5. Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

durch. Gehen Sie dabei nach dem Schema auf Seite 49 des Skripts vor.

6. a) In den Wirtschaftswissenschaften geht es häufig darum, gegebene Größen zu optimieren (Minimierung der Kosten, Maximierung des Gewinns etc.). Hier eine Aufgabe, die dies illustriert (aus S. Kurz, J. Rambau: Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler): Der McMoney Verlag bringt ein neues Buch auf den Markt. Jetzt überlegt die Geschäftsführung, zu welchem Preis p (in €) es verkauft werden soll. Der McMoney Verlag geht davon aus, dass die Zahl der verkauften Exemplare v wie folgt vom Preis abhängt:

$$v(p) = \frac{10^5}{p^2}.$$

Der Druck eines Buches kostet 3€. Der erwartete Gewinn g in Abhängigkeit vom Preis p ist also (in €):

$$g(p) = v(p) \cdot p - v(p) \cdot 3 = v(p) \cdot (p-3) = \frac{10^5}{p^2} \cdot (p-3) = 10^5 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p^2}\right).$$

Der Verkaufspreis muss selbstverständlich die Druckkosten decken, weshalb $p \geq 3$ angenommen werden darf. Außerdem wäre ein Preis oberhalb von 100€ glatter Wucher und ist somit ebenfalls ausgeschlossen. Der Preis p soll nun so festgesetzt werden, dass der Gewinn maximal wird. Ermitteln Sie diesen Preis, indem Sie das globale Maximum von $g(p)$ auf dem Intervall $[3, 100]$ bestimmen. Begründen Sie in der Rechnung auch, dass es sich bei Ihrer Lösung um das globale Maximum handelt.

b) Wo nehmen die folgenden Funktionen ihr globales Minimum und Maximum an?

(i) $f: [-10, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^7 + 5x^5 + 2x^3 + x$

(ii) $g: [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{2x-1} - e^{x+1}$

(iii) $h: [1, 6] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 4\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 4x$