

ALA 05 15.05.2014

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

14. Mai 2014

1.

$$\begin{aligned}f(x) &= 7x^3 - 42x^2 + 63x - 2 \\f'(x) &= 21x^2 - 84x + 63 \\f''(x) &= 42x - 84 \\F(x) &= \frac{7}{4}x^4 - \frac{42}{3}x^3 + \frac{63}{2}x^2 - 2x\end{aligned}$$

Globale Extrema von f finden wir an Stellen, für die gilt: $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 21x^2 - 84x + 63 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{84}{21}x + \frac{63}{21} &= 0 \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{84}{42} \pm \sqrt{\left(-\frac{84}{42}\right)^2 - \frac{63}{21}} \\ &\Rightarrow x = 1 \vee x = 3\end{aligned}$$

Die Extrema liegen also bei $x = 1$ und $x = 3$. Einsetzen in die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}f''(1) &= 42 \cdot 1 - 84 = -42 \\ f''(3) &= 42 \cdot 3 - 84 = 42\end{aligned}$$

Das Maximum, also die Höchsttemperatur liegt also an der Stelle 1, das Minimum, also die Tieftemperatur, an der Stelle 3.

Die Berechnung des Durchschnittswertes erfolgt folgendermaßen: errechne das

Integral von f im Intervall $[1,3]$ und teile es durch die Intervalllänge, also 2:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\int_1^3 f(x) dx}{2} \\
 = & \frac{F(3) - F(1)}{2} \\
 = & \frac{(\frac{567}{4} - \frac{1134}{3} + \frac{567}{2} - 6) - (\frac{7}{4} - \frac{42}{3} + \frac{63}{2} - 2)}{2} \\
 = & \frac{24}{2} = 12
 \end{aligned}$$

Die Tagesdurchschnittstemperatur ist also $12^\circ C$.

2. (i)

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 x^2 - x - 6 dx \\
 = & [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x]_1^3 \\
 = & (9 - \frac{9}{2} - 18) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6) \\
 = & -\frac{22}{3}
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 x^{\frac{1}{3}} dx \\
 = & [\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}]_1^3 \\
 = & \frac{3}{4}3^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}1^{\frac{4}{3}}
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx \\
 = & [-\frac{1}{x}]_1^3 \\
 = & -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 \ln x dx \\
 = & [x \cdot (\ln(x) - 1)]_1^3 \\
 = & 3(\ln(3) - 1) + 1 = 3\ln(3) - 2
 \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
& \int_1^3 e^{-x} dx \\
&= [-e^{-x}]_1^3 \\
&= (-e^{-3}) - (-e^{-1})
\end{aligned}$$

3. (i)

$$\begin{aligned}
& \int x^4 + 2x^3 - x + 5 dx \\
&= \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5x
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
& \int x^{-\frac{3}{2}} dx \\
&= 2x^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(iii)

$$dx$$

(iv)

$$dx$$

(v)

$$dx$$

4. Zunächst überprüfen wir, ob alle Voraussetzungen zur Ausführung des Newton-Verfahrens erfüllt sind:

(1) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 \neq 0$ für $x \in [1, 2]$

(2) $f''(x)$ ist ein Polynom, also im gegebenen Intervall ganz vorhanden und stetig.

(3) $f(a) \cdot f(b) < 0 \Leftrightarrow -13 \cdot 16 < 0$.

Nun können wir das eigentliche Verfahren anwenden.

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
 x_0 &= 1 \\
 \Rightarrow x_1 &= 1 - \frac{-13}{17} = 1.764705... \\
 \Rightarrow x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.409760... \\
 \Rightarrow x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.369288... \\
 \Rightarrow x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.368808...
 \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt also in der Nähe von 1.368808...