Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 5

A: Präsenzaufgaben am 8. Mai 2014

1. Finden Sie jeweils eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ und machen Sie die Probe, d.h., überprüfen Sie, ob $F'(x) = f(x)$ gilt.

(i) $f(x) = 4x^2$ (ii) $f(x) = \sqrt{x}$ (iii) $f(x) = e^{3x+1}$

2. Berechnen Sie $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ sowie $\int \sin\big(3x+1\big)\, dx$.

Vergessen Sie nicht, die Probe zu machen!

3. Berechnen Sie $\int x \cdot \sin x\, dx$ und machen Sie die Probe.

4. a) Berechnen Sie $\int_1^3 \sqrt{x}\, dx$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und erläutern Sie die anschauliche Bedeutung Ihres Ergebnisses auf zwei Arten: erstens unter Verwendung des Begriffs „Flächeninhalt“, zweitens unter Verwendung des Begriffs „Durchschnittswert“.

b) Berechnen Sie $\int_1^3 \cos x\, dx$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \cos x$ und erläutern Sie den Zusammenhang zu den Begriffen „Flächeninhalt“ und „Durchschnittswert“.

B: Hausaufgaben zum 15. Mai 2014

1. Das Integral lässt sich – wie Sie wissen – zur Bestimmung von Flächeninhalten verwenden. In praktischen Anwendungen kommt es aber auch sehr häufig vor, dass das Integral der Berechnung von *Durchschnittswerten* dient. Hier eine Aufgabe, die dies illustriert: Die Funktion $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = 7x^3 - 42x^2 + 63x - 2.$$

Wir stellen uns vor, dass f auf dem Intervall $[0,3]$ die Lufttemperatur in $^\circ C$ an einem festen Ort und im Laufe eines Tages angibt. (1 Einheit auf der x-Achse entspricht also 8 Stunden.) Bestimmen Sie

(i) die Tageshöchsttemperatur;
(ii) die Tagestiefsttemperatur;
(iii) die Durchschnittstemperatur dieses Tages.

2. Berechnen Sie $\int_1^3 f(x)\, dx$, skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$ und verdeutlichen Sie anhand der Skizze, um welchen Flächeninhalt es geht.

(i) $f(x) = x^2 - x - 6$ (iv) $f(x) = \ln x$

(ii) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (v) $f(x) = e^{-x}$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale und machen Sie für (iii)-(v) die Probe.

(i) $\displaystyle\int \big(x^4 + 2x^3 - x + 5\big)\ dx$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\ dx \quad (\text{für } x > 0)$

(iii) $\displaystyle\int x \cdot \sin\big(3x\big)\ dx$

(iv) $\displaystyle\int x^3 \cdot \ln x\ dx$

(v) $\displaystyle\int x^2 e^x\ dx$

4. Es sei $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle besitzt, und berechnen Sie diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren, wobei der Startwert $x_0 = 1$ sein soll. Führen Sie einige Iterationsschritte aus: Berechnen Sie zumindest x_1, x_2, x_3 und x_4. Besser ist es jedoch, wenn Sie noch ein paar Schritte mehr durchführen, bis sich der erhaltene Wert „nicht mehr ändert“.