

ALA BLATTNR. **ABGABEDATUM**

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

15. Juni 2014

1. a)

$$T_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

$$T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!}$$

$$T_9(x) = T_8(x)$$

$$T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

$$T_{11}(x) = T_{10}(x)$$

$$T_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!}$$

$$T_{13}(x) = T_{12}(x)$$

$$T_9(1) \approx 0,5403025$$

$$T_{11}(1) \approx 0,5403023$$

$$T_{13}(1) \approx 0,5403023$$

b)

f(x)

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$$

g(x)

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 - \frac{x}{3}$$

$$T_2(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

$$T_3(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \frac{35x^4}{243}$$

c) Am einfachsten ist es, einfach alle Taylorpolynome bis T_5 zu errechnen, da diese Arbeit sowieso getan werden muss.

$$T_0(x) = 0$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = x + x^2$$

$$T_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$T_4(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$T_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$$

Probe:

$$T_5(1) = \frac{69}{30} = 2,3$$

$$f(1) = 2,287355\dots$$

Das Ergebnis kommt also hin.

2. (i)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) = \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) \\ & \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 6x + 1}{2x - 5} \right) \\ & = -1 \end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iii)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{2x} \cdot \ln(1+3x)} \right) \\ & = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} \cdot \ln(1+3x) \right)} \end{aligned}$$

Wir errechnen zunächst nur die Potenz:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + 3x)}{2x} \right) \\ & \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{3}{3x+1}}{2} \right) \\ & = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Wir setzen dieses Zwischenergebnis ein und erhalten das Endergebnis:

$$\Rightarrow e^{\frac{3}{2}}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

(iv)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin(x)} \right) \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - e^x + 1}{e^x \sin(x) - \sin(x)} \right) \\ & \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - e^x}{e^x \sin(x) + (e^x - 1) \cos(x)} \right) \\ & \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-e^x - \sin(x)}{\sin(x) + 2e^x \cos(x)} \right) \\ & = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurden die Regeln von de l'Hospital verwendet.

3. a)
b)
c) Im Folgenden bilden wir die ersten drei Ableitungen von $\sqrt[5]{x+1}$ und berechnen die Funktionswerte für $x = 0$, die anschliessend in die Formel für Taylorpolynome eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[5]{x+1} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}} & f'(0) &= \frac{1}{5} \\ f''(x) &= -\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}} & f''(0) &= -\frac{4}{25} \\ f'''(x) &= \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}} & f'''(0) &= \frac{36}{125} \end{aligned}$$

Einsetzen in

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k :$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{5}x$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3$$

4. **TODO**

5. Wir berechnen im Folgenden die Näherungswerte für die Fälle
 $n = 4$, $n = 5$, $n = 10$:

$$\underline{n = 4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x \, dx &\approx \frac{1}{8} \left(\sin(0) + 2 \sin\left(\frac{1}{4}\right) + 2 \sin\left(\frac{2}{4}\right) + 2 \sin\left(\frac{3}{4}\right) + \sin(1) \right) \\ &\approx 0.45730093. \end{aligned}$$

$$\underline{n = 5}$$

$$\int_0^1 \sin x \, dx \approx \frac{1}{10} \left(\sin(0) + 2 \sin\left(\frac{1}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{2}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{3}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{4}{5}\right) + \sin(1) \right)$$

$$\approx 0.45816434$$

$$\underline{n = 10}$$

$$\int_0^1 \sin x \, dx \approx \frac{1}{20} \left(\sin(0) + 2 \sin\left(\frac{1}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{2}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{3}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{4}{10}\right) \right. \\ \left. + 2 \sin\left(\frac{5}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{6}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{7}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{8}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{9}{10}\right) + \sin(0) \right)$$

$$\approx 0.4593145488579763249099$$

6. **TODO**