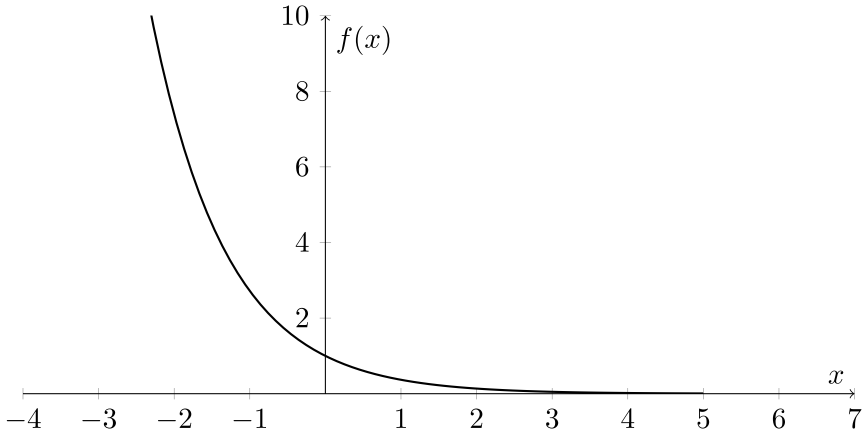
ALA 07 05.06.2014

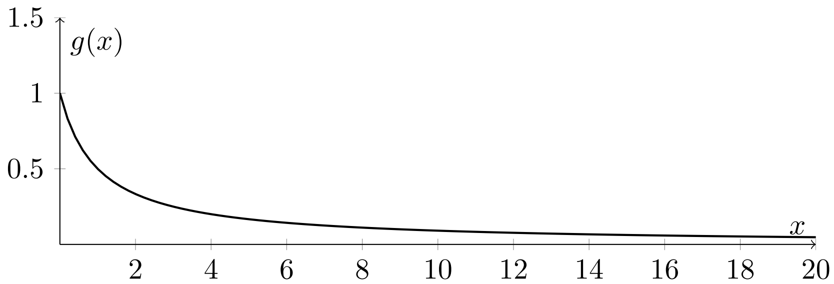
Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

5. Juni 2014

1. a)



Die e-Funktion besitzt keinen Wendepunkt, genauso wenig wie e^{-x}.

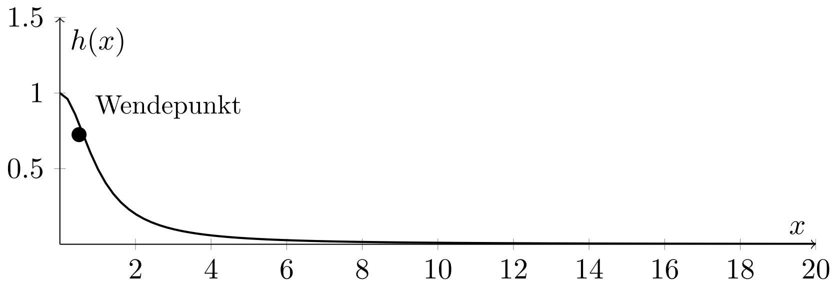


Wendepunktberechnung:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$g''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$0 = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$\Leftrightarrow 0 = 2$$

Auch $g(x)$ hat keinen Wendepunkt.



$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$h'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$h''(x) \overset{*}{=} \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

* Die Anwendungen der Quotienten- und Kettenregel wurden hier nicht ausgeführt.

$$0 = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$
$$\Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} = x$$

Der Wendepunkt von h liegt also bei $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $h(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

b) (i)

$$\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = \underset{b\to\infty}{lim}[-e^{-x}]_0^b = \underset{b\to\infty}{lim} - e^{-b} + 1 = 1$$

Der Flächeninhalt ist also 1.

(ii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\log(1+x)]_0^\infty = \underset{b\to\infty}{lim} \log(b+1) - \log(1) = \infty$$

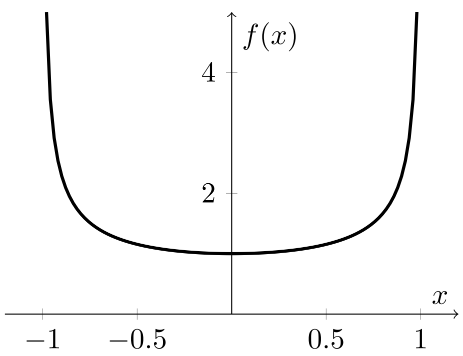
Der Flächeninhalt ist also unendlich groß.

(iii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\tan^{-1}(x)]_0^\infty = \underset{b\to\infty}{lim} \tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

c)

Skizze:



Für ein bestimmtes Integral berechnen wir die Fläche zwischen x und dem Graphen:
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \left[sin^{-1}(x)\right]_{-1}^{1} = sin^{-1}(1) - sin^{-1}(-1)$

$\approx 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105 8$

2. a)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$$
$$\overset{*}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^i}$$

* Dies gilt, da $\frac{0}{2^0} = 0$.
Es gelte:

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{\frac{i}{2^i}} < 1$$

Da $\sqrt[i]{i} \to 1$ für $i \to \infty$ und $2^i \geq 1$, ist diese Aussage korrekt. Somit konvergiert die Reihe.

b) Wir betrachten den folgenden Grenzwert:

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{i+1}\cdot(i+1)!}{(i+1)^{i+1}}}{\frac{(-1)^i\cdot i!}{i^i}} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{i+1}\cdot i!}{(i+1)^i}}{\frac{(-1)^i\cdot i!}{i^i}} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| \frac{(-1)^{i+1}\cdot i!\cdot i^i}{(i+1)^i(-1)^i\cdot i!} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| -\frac{i^i}{(i+1)^i} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \frac{i^i}{(i+1)^i} \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

* Weil das ja klar ist.
Da $\frac{1}{e} < 1$ ist die Konvergenz nachgewiesen.

3. Für $\sum_{i=0}^{\infty} i^2 2^i x^i$ soll der Konvergenzradius ermittelt werden.

a) Mithilfe der Limes-Version des Quotientenkriteriums:
Wir betrachten den folgenden Grenzwert. Ist dieser kleiner als 1, so liegt Konvergenz vor. Ist er größer, so divergiert die Reihe. Wir wählen ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$; in der folgenden Rechnung ist x also fest gewählt.

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \left| \frac{(i+1)^2 2^{i+1} x^{i+1}}{i^2 2^i x^i} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \cdot 2x \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left(\left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \right| \cdot |2x| \right) \\
&\overset{*}{=} 2|x| \cdot \lim_{i\to\infty} \left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \right| \\
&= 2|x|
\end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurde genutzt, dass x fest gewählt wurde. Ausserdem gilt:

$$2|x| \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

Daraus folgt: $R = \frac{1}{2}$

b) Mithilfe der Limes-Version des Wurzelkriteriums:
Wir betrachten abermals einen Grenzwert, und es gilt abermals, dass die Reihe konvergiert, wenn der besagt Grenzwert kleiner als 1 ist. Es sei wieder $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest gewählt.

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|i^2 2^i x^i|} \\
&= \lim_{i\to\infty} \left(\sqrt[i]{i^2} \cdot \sqrt[i]{2^i} \cdot \sqrt[i]{x^i}\right) \\
&\overset{*}{=} 2x \cdot \lim_{i\to\infty} \left(\sqrt[i]{i} \cdot \sqrt[i]{i}\right) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurde genutzt, dass x fest gewählt wurde. Weiterhin gilt:

$$2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

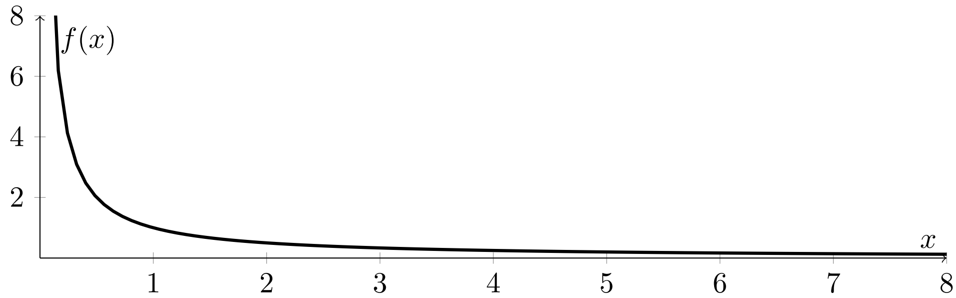
Dementsprechend gilt $R = \frac{1}{2}$.

4. TODO

5. a)

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \ \leq H_n \quad (n = 1, 2, ...). \quad \Big| \quad \text{Es gilt } n \in \mathbb{N}$$

Skizze:



Anhand der Skizze kann man erkennen,
dass für einen größeren x-Wert der Wert für $f(x)$ abnimmt,
da die Funktion für $x \to \infty$ gegen 0 geht.
Wir erhalten für jeden Wert ≥ 1 den wir für x einsetzen einen Wert ≤ 1.

Da wir bei der Berechnung eines bestimmten Integrals bei einem gleichen Wert für Integrationsober- und untergrenze immer 0 als Ergebnis erhalten würden, ist für die Obergrenze hier $n+1$ gewählt.

Bei der Integration von $\int \frac{1}{x}dx$ erhalten wir $\Big[ln(x)\Big]$,
für die Untergrenze also $ln(1) = 0$.
Somit müssen wir für die Berechnung des Integrals $\Big(ln(n+1) - \cancel{ln(1)}\Big)$ lediglich den Wert der oberen Integrationsgrenze in $ln(x)$ einsetzen.
Man sieht, dass $ln(n+1)$ im Verhältnis zu H_n sehr langsam und vorallem immer alngsamer wächst.

Für jeden Wert von n gilt daher $\underline{\underline{ln(n+1) \leq H_n}}$

Ein Beweis ist in diesem Falle obsolet (da der Logarithmus zu n immer kleiner ist als die Partialsumme von n), man könne ihn aber mithilfe vollständiger Induktion erbringen.

b) Genau wie bei der harmonischen Reihe nimmt die Geschwindigkeit mit der die Funktion wächst ab, da wir zwar die Partialsumme berechnen, aber jedes Folgeglied kleiner ist als das vorherige. Die Funktion wächst immer langsamer.

6. a) Wir unterteilen die Aufgabe, und zeigen zuerst, dass $H_n - 1 \leq \ln(n)$. Wir benutzen dazu vollständige Induktion.

$$\begin{aligned} H_1 - 1 &\leq \ln(1) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 0 \end{aligned}$$

Die Aussage gilt also für $n = 1$. Sie gelte auch für ein beliebiges, fest gewähltes n. Dann muss sie auch für $n+1$ gelten:

$$\begin{aligned} H_{n+1} - 1 &\leq \ln(n+1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + H_n - 1 &\leq \int_1^n \frac{1}{x}dx + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + H_n - 1 &\leq \ln(n) + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

Dass $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$, ist trivial. Die Aussage ist damit bewiesen.
Es bleibt zu beweisen, dass $\ln(n) \leq H_n$. Dass $\ln(n+1) \leq H_n$ wurde bereits in Aufgabe 5 angegeben, d.h. Aussage muss gelten, da $\ln(n) < \ln(n+1)$.

b)