D

Klausur zur Vorlesung „Mathematik II (ALA)“

T. Andreae **10. August 2013, 8:30 bis 10:00 Uhr**

Insgesamt sind 50 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für die Antwort gegeben werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Berechnen Sie $f'(x)$ für

a) $g(x) = e^{-2x} \cdot \sin(\sqrt{x^3})$ (*4 Punkte*)

b) $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^6 + 1}$ (*3 Punkte*)

c) $g(x) = (x^4 + 3)^{\sin(2x)}$ (*3 Punkte*)

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie $\int\limits_1^2 \dfrac{5x + 11}{1 + x^2}\, dx$ (*3 Punkte*)

b) Berechnen Sie $\int \sin\left(\sqrt{x+9}\right) dx$ (*4 Punkte*)

c) Entscheiden Sie, ob die folgende Reihe konvergiert oder divergiert:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{i+1}$$

Falls Konvergenz vorliegt, so ermittle man den Grenzwert. Falls Divergenz vorliegt, so begründe man, weshalb dies der Fall ist. (*3 Punkte*)

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Es sei $I := \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq 2\}$. Berechnen Sie das Doppelintegral $\iint\limits_I x^2 y^2 \, d(x,y)$. (*4 Punkte*)

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ für $f(x,y) = e^{y \sin(x^2)}$. (*2 Punkte*)

c) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $h(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - x - 2y - 4$. Bestimmen Sie die kritischen Stellen und entscheiden Sie, ob lokale Minima oder lokale Maxima vorliegen. (*4 Punkte*)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie (möglichst kurze) Begründungen für Ihre Antworten.

   (i) $5n^2 + n + 1 = O(n^2)$ (*1 Punkt*)

   (ii) $\log_2(n^3) = O\big(\log_2(n)\big)$ (*2 Punkte*)

   (iii) $10^{\sqrt{n}} = O(2^n)$ (*2 Punkte*)

b) Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = e^{x \ln(2x)}$ gegeben ist. Bestimmen Sie (falls vorhanden) die lokalen Minima und Maxima dieser Funktion. Bestimmen Sie eine möglichst große Teilmenge des Definitionsbereichs von f, auf der f konvex ist. (*3 Punkte*)

c) Beschreiben Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen durch geometrische Begriffe (wie z.B. Abstand, Punkt, Gerade, Ebene, Radius, ...):

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |3i - z| = |5i - z|\}$$

   (*2 Punkte*)

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Man berechne $\iint\limits_G f(x,y)\, d(x,y)$ für $f(x,y) = xy$ und das Dreieck G mit den Eckpunkten $(0,1), (0,2)$ und $(2,1)$. (*4 Punkte*)

b) Die folgende Aufgabe ist mit der **Lagrange-Methode** zu lösen: Ein Unternehmen produziert zwei Sorten eines Gutes. Beim Verkauf von x bzw. y Einheiten sei der Gewinn pro Tag gegeben durch

$$f(x,y) = -0,2x^2 - 0,2xy - 0,1y^2 + 48x + 26y - 600.$$

   Es ist eine Nebenbedingung zu berücksichtigen, die in Form einer Gleichung vorliegt:

$$2x + y = 50. \qquad (*)$$

   Gesucht sind x und y, so dass der Gewinn $f(x,y)$ maximal wird.

   (i) Stellen Sie die dazugehörige Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda)$ auf und bestimmen Sie die einzige kritische Stelle (x,y) von f unter der Nebenbedingung (*). (*4 Punkte*)

   (ii) Prüfen Sie mit Hilfe der geränderten Hesseschen Matrix, ob an der gefundenen Stelle ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt. (*2 Punkte*)