Mathematatik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 1

B: Hausaufgaben zum 10. April 2014

3. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{4n-1}{n+5}$. Es sei $a = 4$.

a) Berechnen Sie zunächst $|a_n - a|$, d.h. den Abstand des Folgenglieds a_n von $a = 4$.

b) Zeigen Sie sodann durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript, Seite 9), dass $(a_n) \to a$ gilt.

c) Man gebe zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ sowie $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ein jeweils möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

a) $|a_n - a| = \left|\frac{4n-1}{n+5} - 4\right| = \left|\frac{-21}{n+5}\right| = \frac{21}{n+5}$.

b) Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Mit a) erhält man

(*) $|a_n - a| < \varepsilon \iff \frac{21}{n+5} < \varepsilon \iff \frac{21}{\varepsilon} - 5 < n$.

Wählt man $N > \frac{21}{\varepsilon} - 5$, so gilt demnach $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Dies zeigt $(a_n) \to a$.

c) Für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ gilt $\frac{21}{\varepsilon} - 5 = 205$. Wegen (*) ist also $N = 206$ die kleinstmögliche Wahl von N, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$ gilt.

Analog: $N = 2096$ für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ und

$N = 20996$ für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

4. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = \frac{5}{3};$$
$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1.$$

Weisen Sie die Konvergenz der Folge mit Hilfe des Satzes über monotone, beschränkte Folgen nach.

Hinweis: Man beginne mit dem Nachweis, dass (a_n) beschränkt ist. Man zeige die Beschränktheit, indem man durch vollständige Induktion beweist, dass $1 \le a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zum Nachweis der Monotonie zeige man anschließend $a_{n+1} \ge a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nachweis von $1 \le a_n < 2$ durch vollst. Ind.:

(I) <u>Induktionsanfang</u>: Wegen $a_1 = \frac{5}{3}$ gilt die Behauptung für $n=1$.

(II) <u>Induktionsschritt</u>: Für ein $n \ge 1$ gelte $1 \le a_n < 2$. Es folgt $\frac{1}{2} \le \frac{a_n}{2} < 1$, woraus man durch quadrieren $\frac{1}{4} \le \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 < 1$ erhält. Es folgt $\frac{5}{4} \le \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 < 2$, also $1 \le a_{n+1} < 2$.

Damit ist die Beschränktheit der Folge (a_n) gezeigt. Die Monotonie ergibt sich aus

$$a_{n+1} \ge a_n \Leftrightarrow \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \ge a_n \Leftrightarrow \left(\frac{a_n}{2} - 1\right)^2 \ge 0.$$

Aus dem Satz über monotone, beschränkte Folgen erhält man die Konvergenz von (a_n).