Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 11

B: Hausaufgaben zum 10. Juli 2014

3. a) Wir betrachten die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n^{2.5} \\ f_2(n) &= \sqrt{2n} \\ f_3(n) &= n+10 \\ f_4(n) &= 10^n \\ f_5(n) &= 100^n \\ f_6(n) &= n^2 \log_2 n. \end{aligned}$$

Diese Funktionen sollen bezüglich ihres Wachstumsverhaltens in aufsteigende Reihenfolge gebracht werden, d.h., für die Reihenfolge soll Folgendes erfüllt sein: *Steht $f(n)$ unmittelbar vor $g(n)$, so soll $f(n) = O(g(n))$ gelten.*

b) Wie a) für die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} g_1(n) &= 2^{\sqrt{\log_2 n}} \\ g_2(n) &= 2^n \\ g_3(n) &= n(\log_2 n)^3 \\ g_4(n) &= n^{\frac{4}{3}} \\ g_5(n) &= n^{\log_2 n} \\ g_6(n) &= 2^{2^n} \\ g_7(n) &= 2^{n^2}. \end{aligned}$$

a) Für die ersten drei Funktionen ist die gewünschte Reihenfolge unmittelbar klar, da es sich im Wesentlichen um Potenzfunktionen handelt. („Im Wesentlichen" soll heißen, dass für $f_2(n) = \sqrt{2} \cdot n^{\frac{1}{2}}$ die multiplikative Konstante $\sqrt{2}$ keine Rolle spielt, ebenso wenig wie bei $f_3(n)$ die additive Konstante 10.) Bei $f_4(n)$ und $f_5(n)$ handelt es sich um Exponentialfunktionen. Man erhält, dass die gesuchte Reihenfolge für die ersten fünf Funktionen wie folgt lautet:

$f_2, f_3, f_1, f_4, f_5.$

Übrig bleibt die Einordnung von f_6, die ebenfalls nicht schwerfällt: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_3(n)}{f_6(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+10}{n^2\log_2 n}=0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_6(n)}{f_1(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\log_2 n}{n^{2.5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}=0,$$

also lautet die gesuchte Reihenfolge

$$f_2, f_3, f_6, f_1, f_4, f_5.$$

b) g_4 ist eine Potenzfunktion und g_2 eine Exponentialfunktion, also gilt $g_4(n)=O(g_2(n))$. Außerdem gilt (vergl. Blatt 8, Aufgabe 4 b))

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_3(n)}{g_4(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\log_2 n)^3}{n^{4/3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\log_2 n)^3}{n^{1/3}}=0.$$

Also hat man $g_3(n)=O(g_4(n))$. Ferner gilt für $n\geq 2$

$$g_1(n)=2^{\sqrt{\log_2 n}}\leq 2^{\log_2 n}=n\leq n(\log_2 n)^3=g_3(n),$$

also $g_1(n)=O(g_3(n))$.

Zwischenergebnis: g_1, g_3, g_4, g_2.

Klar ist (wegen $n \leq n^2 \leq 2^n$ für $n \geq 4$):

$g_2(n) = O(g_7(n))$ und $g_7(n) = O(g_6(n))$.

Neues Zwischenergebnis: $g_1, g_3, g_4, g_2, g_7, g_6$.

Es bleibt also die Frage: Wo ordnet sich $g_5(n) = n^{\log_2 n}$ ein?

Klar ist (wegen $\log_2 n \geq \frac{4}{3}$ für $n \geq 4$):

$g_4(n) = O(g_5(n))$.

Vermutung: Es gilt $g_5(n) = O(g_2(n))$.

Zum Beweis dieser Vermutung betrachten wir $\log_2(g_5(n))$ und $\log_2(g_2(n))$ („Trick mit dem Logarithmus"); es gilt

$$\log_2(g_5(n)) = (\log_2 n)^2 \text{ und } \log_2(g_2(n)) = n.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_2(g_2(n))}{\log_2(g_5(n))} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(\log_2 n)^2} = \infty$ gibt

es ein n_0, so dass $\log_2(g_5(n)) \leq \log_2(g_2(n))$

für alle $n \geq n_0$. Da $\log_2$ eine streng monoton steigende

Funktion ist, folgt $g_5(n) \leq g_2(n)$ für alle $n \geq n_0$. Also: $g_5(n) = O(g_2(n))$.

Die gewünschte Reihenfolge lautet also

$g_1, g_3, g_4, g_5, g_2, g_7, g_6$.

4. a) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $n^2 = \Theta(2^n)$

(ii) $3^n = \Omega(2^n)$

(iii) $3^n = O(2^n)$

(iv) $3^{\sqrt{n}} = O(2^n)$

(v) $\log_2 n = O\left(\log_2\left(\sqrt{n}\right)\right)$

(vi) $\log_2 n = O\left(\sqrt{\log_2 n}\right)$.

b) Geben Sie zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, so dass weder $f(n) = O(g(n))$ noch $g(n) = O(f(n))$ gilt.

a) <u>(i) ist falsch</u>, da zwar $n^2 = O(2^n)$ gilt, aber nicht $n^2 = \Omega(2^n)$: Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ kann es kein $C > 0$ geben, so dass $n^2 \geq C \cdot 2^n \; \forall n \geq n_0$.

<u>(ii) ist wahr</u>, da $3^n \geq 2^n$ für alle $n \geq 1$ bzw. (alternative Begründung) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$.

<u>(iii) ist falsch</u>: Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$ kann es kein $C > 0$ geben, so dass $3^n \leq C \cdot 2^n$ für alle $n \geq n_0$.

(iv) ist wahr. Um dies zu erkennen setzen wir $f(n) = 3^{\sqrt{n}}$ und $g(n) = 2^n$ und verwenden den „Trick mit dem Logarithmus": Es gilt $\log_2(f(n)) = \sqrt{n} \cdot \log_2 3$ und $\log_2(g(n)) = n$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(g(n))}{\log_2(f(n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}\log_2 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log_2 3} = \infty$$

gibt es ein n_0, so dass $\log_2(f(n)) \leq \log_2(g(n))$ für alle $n \geq n_0$. Da $\log_2 n$ eine streng monoton steigende Funktion ist, folgt $f(n) \leq g(n)$ für alle $n \geq n_0$, also $f(n) = O(g(n))$.[1]

(v) ist wahr, da $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\log_2(\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\frac{1}{2}\log_2 n} = 2$.

(vi) ist falsch. Begründung: Es gilt
$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{\log_2 n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\log_2 n} = \infty$. Also kann es kein C geben, so dass $\log_2 n \leq C\sqrt{\log_2 n}$ für alle $n \geq n_0$.

b) $$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für gerades } n \\ n & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} n & \text{für gerades } n \\ 1 & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

---

1) Wir haben für den „Trick mit dem Logarithmus" den Logarithmus zur Basis 2 verwendet. Ebenso gut wäre es mit jeder anderen Basis $a > 1$ gegangen.