Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 9

A: Präsenzaufgaben am 19. Juni 2014

1. a) Zum Aufwärmen: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 5.$$

Den Graphen von f, d.h. die Menge aller Punkte $\big(x, f(x)\big)$, können wir uns als eine Kurve vorstellen. Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $\big(1, f(1)\big) = (1, 7)$.

b) Nun sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 4x + 2y + 10.$$

Den Graphen von f, d.h. die Menge aller Punkte $\big(x, y, f(x, y)\big)$, können wir uns als ein Gebirge vorstellen. Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $\big(1, 2, f(1, 2)\big) = (1, 2, 13)$:

(i) in Richtung der x-Achse;
(ii) in Richtung der y-Achse.

2. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ für die folgenden Funktionen:

(i) $f(x, y) = e^{x^3 y^2}$ (ii) $f(x, y) = \sin(x) \cdot \ln(x^2 y)$

3. Bilden Sie für $f(x, y) = x^4 y^2 - 2xy^3$ die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung und verifizieren Sie die Rechenregel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

4. Bestimmen Sie die kritischen Stellen der Funktion

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 - y^2 + xy + 2x + y + 3$$

und entscheiden Sie für jede dieser Stellen, ob ein lokales Extremum vorliegt und, falls ja, ob es sich um ein lokales Minimum oder um ein lokales Maximum handelt.

B: Hausaufgaben zum 26. Juni 2014

1. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung für

(i) $f(x, y) = 2x^2y^2 - 3xy + 4x + 2$ (iii) $f(x, y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{x^2 + y^2}$

(ii) $f(x, y) = \cos(x^2 y) \cdot e^{xy}$ (iv) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2. Wie Präsenzaufgabe 3 für die Funktion $f(x, y) = x^2y^3 + ye^{x^2 y}$.

3. Bestimmen Sie die kritischen Stellen und entscheiden Sie, ob lokale Minima oder lokale Maxima vorliegen.

(i) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + xy + x + 6$ (iii) $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 2$

(ii) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - xy - 4x + y + 1$ (iv) $f(x, y) = x^3 + 4y^3 - 9x - 48y + 7$

4. Aus einem Lehrbuch für Wirtschaftswissenschaftler:

a) Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Sorten A und B eines Gutes. Die täglichen Kosten der Produktion von x Einheiten des Gutes A und y Einheiten des Gutes B sind

$$C(x, y) = 0.04x^2 + 0.04xy + 0.16y^2 + 3x + 8y + 500.$$

Nehmen Sie an, dass das Unternehmen den ganzen Output verkauft – und zwar das Gut A zu einem Stückpreis von 14 Geldeinheiten und das Gut B zu einem Stückpreis von 36 Geldeinheiten. Bestimmen Sie die täglichen Produktionsniveaus x und y, die den Gewinn pro Tag maximieren.

b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass jede Produktion des Unternehmens eine Umweltbelastung hervorruft. Genauer gelte: Die Produktion einer Einheit von Gut B belastet die Umwelt viermal so hoch wie die Produktion einer Einheit von Gut A. Deshalb hat das Unternehmen die Auflage erhalten, dass $x + 4y \leq 320$ erfüllt sein muss. Ein Unterschreiten der erlaubten Höchstmenge kommt aus betrieblichen Gründen (Auslastung der Maschinen) nicht in Frage. Das Problem des Unternehmens ist dann, den Gewinn pro Tag zu maximieren – unter der Nebenbedingung

$$x + 4y = 320.$$

Welches sind jetzt die beiden optimalen Mengen des Outputs?
Hinweis: Verwenden Sie die *Methode der Variablensubstitution* (Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen mit anschließendem Einsetzen in die Zielfunktion).

c) Berechnen Sie sowohl für Fall a) als auch für Fall b) den maximalen Gewinn.