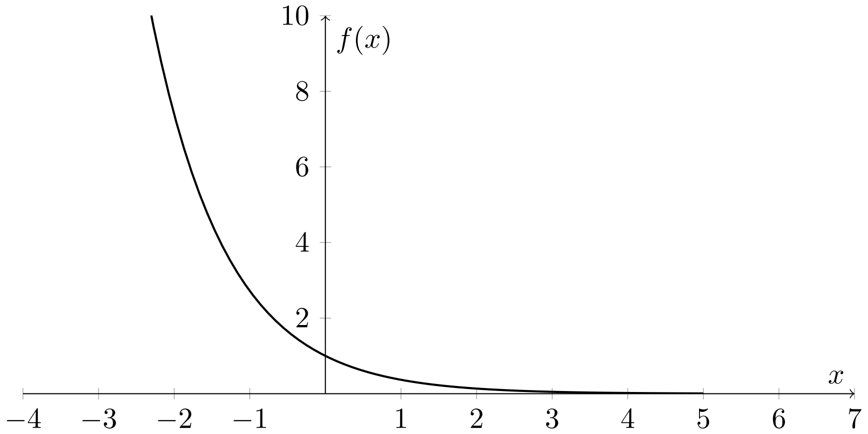
ALA 07 05.06.2014

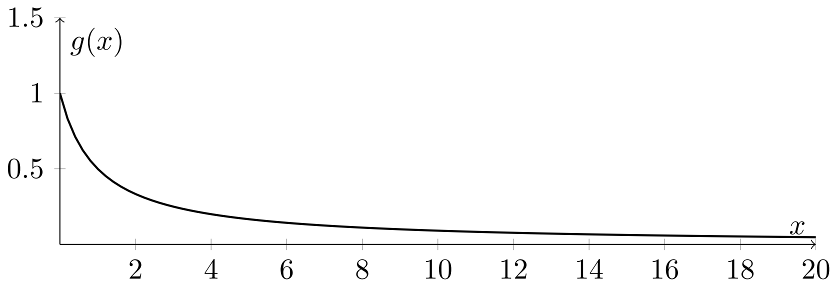
Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

5. Juni 2014

1. a)



Die e-Funktion besitzt keinen Wendepunkt, genauso wenig wie e^{-x}.

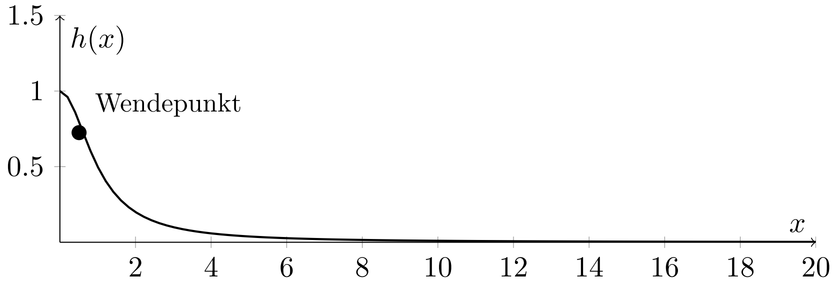


Wendepunktberechnung:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$g''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$0 = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$\Leftrightarrow 0 = 2$$

Auch $g(x)$ hat keinen Wendepunkt.



$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$h'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$h''(x) \overset{*}{=} \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

* Die Anwendungen der Quotienten- und Kettenregel wurden hier nicht ausgeführt.

$$0 = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$
$$\Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} = x$$

Der Wendepunkt von h liegt also bei $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $h(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

b) (i)

$$\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = \underset{b\to\infty}{lim}[-e^{-x}]_0^b = \underset{b\to\infty}{lim} - e^{-b} + 1 = 1$$

Der Flächeninhalt ist also 1.

(ii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\log(1+x)]_0^\infty = \underset{b\to\infty}{lim}\log(b+1) - \log(1) = \infty$$

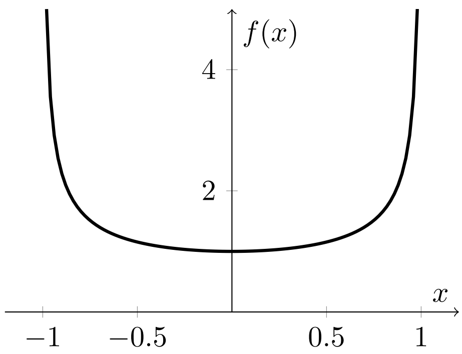
Der Flächeninhalt ist also unendlich groß.

(iii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\tan^{-1}(x)]_0^\infty = \underset{b\to\infty}{lim}\tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

c)

Skizze:



Für ein bestimmtes Integral berechnen wir die Fläche zwischen x und dem Graphen:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \Big[sin^{-1}(x)\Big]_{-1}^1 = sin^{-1}(1) - sin^{-1}(-1)$$

$$\approx 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 58$$

2. a)

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{i}{2^i}$$

$$\stackrel{*}{=} \sum_{i=0}^\infty \frac{i}{2^i}$$

* Dies gilt, da $\frac{0}{2^0} = 0$.
Es gelte:

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{\frac{i}{2^i}} < 1$$

Da $\sqrt[i]{i} \to 1$ für $i \to \infty$ und $2^i \geq 1$, ist diese Aussage korrekt. Somit konvergiert die Reihe.

b) Wir betrachten den folgenden Grenzwert:

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{i+1}\cdot(i+1)!}{(i+1)^{i+1}}}{\frac{(-1)^i\cdot i!}{i^i}} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{i+1}\cdot i!}{(i+1)^i}}{\frac{(-1)^i\cdot i!}{i^i}} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| \frac{(-1)^{i+1}\cdot i!\cdot i^i}{(i+1)^i(-1)^i\cdot i!} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| -\frac{i^i}{(i+1)^i} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \frac{i^i}{(i+1)^i} \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

* Weil das ja klar ist.
Da $\frac{1}{e} < 1$ ist die Konvergenz nachgewiesen.

3. Für $\sum_{i=0}^{\infty} i^2 2^i x^i$ soll der Konvergenzradius ermittelt werden.

a) Mithilfe der Limes-Version des Quotientenkriteriums:
Wir betrachten den folgenden Grenzwert. Ist dieser kleiner als 1, so liegt Konvergenz vor. Ist er größer, so divergiert die Reihe. Wir wählen ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$; in der folgenden Rechnung ist x also fest gewählt.

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \left| \frac{(i+1)^2 2^{i+1} x^{i+1}}{i^2 2^i x^i} \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \cdot 2x \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left(\left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \right| \cdot |2x| \right) \\
&\overset{*}{=} 2|x| \cdot \lim_{i\to\infty} \left| \frac{(i+1)^2}{i^2} \right| \\
&= 2|x|
\end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurde genutzt, dass x fest gewählt wurde. Ausserdem gilt:

$$2|x| \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

Daraus folgt: $R = \frac{1}{2}$

b) Mithilfe der Limes-Version des Wurzelkriteriums:
Wir betrachten abermals einen Grenzwert, und es gilt abermals, dass die Reihe konvergiert, wenn der besagt Grenzwert kleiner als 1 ist. Es sei wieder $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest gewählt.

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|i^2 2^i x^i|} \\
&= \lim_{i\to\infty} \left(\sqrt[i]{i^2} \cdot \sqrt[i]{2^i} \cdot \sqrt[i]{x^i}\right) \\
&\overset{*}{=} 2x \cdot \lim_{i\to\infty} \left(\sqrt[i]{i} \cdot \sqrt[i]{i}\right) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

* An dieser Stelle wurde genutzt, dass x fest gewählt wurde. Weiterhin gilt:

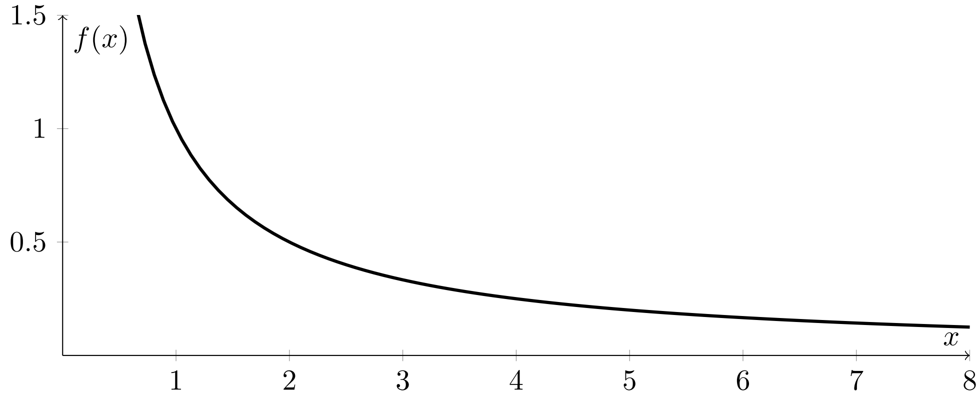
$$2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Dementsprechend gilt $R = \frac{1}{2}$.

4. **TODO**

5. a)

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \; \leq H_n \quad (n = 1, 2, ...). \quad \Big| \quad \text{Es gilt } n \in \mathbb{N}$$



Anhand der Skizze kann man erkennen,
dass für einen größeren x-Wert der Wert für $f(x)$ abnimmt,

da die Funktion für $x \to \infty$ gegen 0 geht.
Wir erhalten für jeden Wert ≥ 1 den wir für x einsetzen einen Wert ≤ 1.
Da wir bei der Berechnung eines bestimmten Integrals bei einem gleichen Wert für Integrationsober- und untergrenze immer 0 als Ergebnis erhalten würden, ist für die Obergrenze hier $n+1$ gewählt.

Bei der Integration von $\int \frac{1}{x}dx$ erhalten wir $\Big[ln(x)\Big]$,
für die Untergrenze also $ln(1) = 0$.
Somit müssen wir für die Berechnung des Integrals $\Big(ln(n+1) - \cancel{ln(1)}\Big)$ lediglich den Wert der oberen Integrationsgrenze in $ln(x)$ einsetzen.
Man sieht, dass $ln(n+1)$ im Verhältnis zu n sehr langsam wächst.

Für jeden Wert von n gilt daher $\underline{\underline{ln(n+1) \leq n}}$

Ein Beweis ist in diesem Falle obsolet, man könne ihn aber mithilfe vollständiger Induktion erbringen.

6. a) Wir unterteilen die Aufgabe, und zeigen zuerst, dass $H_n - 1 \leq \ln(n)$. Wir benutzen dazu vollständige Induktion.

$$\begin{aligned} H_1 - 1 &\leq \ln(1) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 0 \end{aligned}$$

Die Aussage gilt also für $n = 1$. Sie gelte auch für ein beliebiges, fest gewähltes n. Dann muss sie auch für $n+1$ gelten:

$$\begin{aligned} H_{n+1} - 1 &\leq \ln(n+1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + H_n - 1 &\leq \int_1^n \frac{1}{x}dx + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + H_n - 1 &\leq \ln(n) + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

Dass $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$, ist trivial. Die Aussage ist damit bewiesen.
Es bleibt zu beweisen, dass $\ln(n) \leq H_n$. Dass $\ln(n+1) \leq H_n$ wurde bereits in Aufgabe 5 angegeben, d.h. Aussage muss gelten, da $\ln(n) < \ln(n+1)$.

b)