ALA BLATTNR. 06 22.05.2014

Jonathan Siems, 6533519, Gruppe 12
Jan-Thomas Riemenschneider, 6524390, Gruppe 12
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 9

22. Mai 2014

1. (i)

$$\int sin\left(\sqrt{3x+7}\right)dx = \frac{1}{3}\int sin(\sqrt{3x+7})dx = \frac{2}{3}\int(\sqrt{3x+7})\cdot sin(\sqrt{3x+7})dx$$

$$= \frac{2}{3}\int cos((\sqrt{3x+7}))dx - \frac{2}{3}\sqrt{3x+7}\cdot cos(\sqrt{3x+7})$$

$$= \frac{2sin((\sqrt{3x+7}))}{3} - \frac{2}{3}\cdot(\sqrt{3x+7})\cdot cos((\sqrt{3x+7})) + C$$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{2\cdot(sin(\sqrt{3x+7}) - \sqrt{3x+7}\cdot cos(\sqrt{3x+7}))}{3} + C$$

(ii)

$$\int cos\left(\sqrt[3]{x}\right)dx = 3\int(\sqrt[3]{x})^2\cdot cos(\sqrt[3]{x})dx = 3(\sqrt[3]{x})^2\cdot sin(\sqrt[3]{x}) - 6\int\sqrt[3]{x}\cdot sin(\sqrt[3]{x})dx$$

$$= 3(\sqrt[3]{x})^2\cdot sin(\sqrt[3]{x}) - 6sin(\sqrt[3]{x}) + 6\cdot\sqrt[3]{x}\cdot cos(\sqrt[3]{x}) + C$$

$$\Downarrow$$

$$= 3\left(x^{\frac{2}{3}} - 2\right)sin\left(\sqrt[3]{x}\right) + 6\sqrt[3]{x}\,cos\left(\sqrt[3]{x}\right) + C$$

(iii)

$$\int e^{\sqrt{5x+3}} dx$$
$$\Downarrow$$
$$= \frac{2}{5} e^{\sqrt{5x+3}} (\sqrt{5x+3} - 1) + C$$

(iv)

$$\int ln(4x+3)dx \left(\text{für } x > -\frac{3}{4} \right)$$
$$\Downarrow$$
$$= \frac{(4x+3) \cdot ln(4x+3) - 4x - 3}{4} + C$$

2. (i)

$$\int \frac{x+1}{x^2 - x - 6} dx$$
$$\Downarrow$$
$$\int f(x)dx = \frac{1}{5}(4log(3-x) + log(x+2)) + C$$

(ii)

$$\int \frac{2x+1}{x^2 - 4x + 4} dx$$
$$\Downarrow$$
$$\int f(x)dx = 2 \cdot log(x-2) - \frac{5}{x-2} + C$$

(iii)

$$\int \frac{4x+1}{x^2 + 4x + 8} dx$$
$$\Downarrow$$
$$\int f(x)dx = 2 \cdot log(x^2 + 4x + 8) - \frac{7}{2} tan^{-1} \left(\frac{x+2}{2} \right) + C$$

3. a) $f(1) = 9 \cdot e^{-\frac{1}{3}} \approx 6,45$
$f(2) = 18 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \approx 9,24$
$f(6) = 54 \cdot e^{-2} \approx 7,31$
$f(12) = 108 \cdot e^{-4} \approx 1,98$
$f(24) = 216 \cdot e^{-8} \approx 0,07$

b) $f'(t) = 9t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \cdot -\frac{1}{3} + 9e^{-\frac{1}{3}t} = 9e^{-\frac{1}{3}t} - 3e^{-\frac{1}{3}t} \cdot t = 0 \Leftrightarrow 9e^{-\frac{1}{3}t} = 3e^{-\frac{1}{3}t} \cdot t \Leftrightarrow t = 3$
$f'(3) = 27e^{-1} \approx 9,93$
Die maximale Konzentration wird also nach 3 Stunden erreicht und beträgt circa 9,93 Milligramm pro Liter.

c) Hierfür berechnen wir das Integral von f zwischen 0 und 6, und teilen das Ergebnis durch $6 - 0 = 6$.

$$\begin{aligned} &\int_0^6 9t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \mathrm{d}t \\ &= [-27e^{-\frac{1}{3}t} \cdot (t+3)]_0^6 \\ &= -243e^{-2} + 81 \\ &= 48,11... \\ &\frac{48,11...}{6} \approx 8,02 \end{aligned}$$

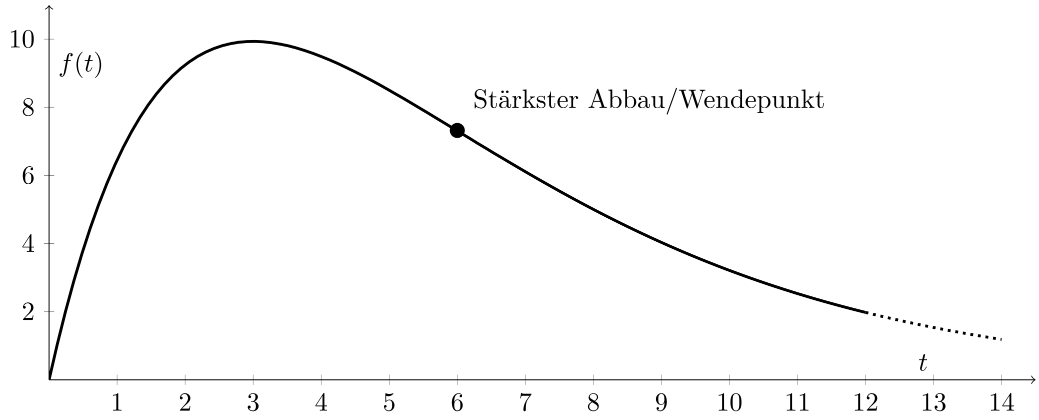
Die durchschnittliche Konzentration in den ersten 6 Stunden liegt demnach bei circa 8,02 Milligramm pro Liter.
Als, wenn auch nur sehr grobe, Probe kann man die ersten drei Werte aus Aufgabenteil a addieren und durch drei Teilen, was $7,\overline{6}$ ergibt.

d) Analog zu Aufgabenteil c):

$$\begin{aligned} &\int_6^1 29t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \mathrm{d}t \\ &= [-27e^{-\frac{1}{3}t} \cdot (t+3)]_6^1 2 \\ &= -405e^{-4} + 243e^{-2} \\ &= 25,46... \\ &\frac{25,46...}{6} \approx 4,24 \end{aligned}$$

In den zweiten 6 Stunden liegt die Durchschnittliche Konzentration also bei 4,24 mg/l.
Auch hier kann wieder, als grobe Probe, Aufgabenteil a herangezogen werden. $\frac{7,31+1,98}{2} \approx 4,65$.

e) Skizze:



$f'(t) = 9e^{-\frac{1}{3}t} - 3e^{-\frac{1}{3}t} \cdot t$

$f''(t) = e^{-\frac{1}{3}t} \cdot x - 6e^{-\frac{1}{3}t} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{3}t} \cdot x = 6e^{-\frac{1}{3}t} \Leftrightarrow x = 6$

4. a) $f(x) = (2x^4+3)^{\sin x} = e^{\ln(2x^4+3)^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln(2x^4+3)}$

$f'(x) = (2x^4+3)^{\sin x} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(2x^4+3) + \sin(x)\frac{8x^3}{2x^4+3}\right)$

b)

c)

d)