Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014

Blatt 7

A: Präsenzaufgaben am 22. Mai 2014

1. a) Schreiben Sie die Reihe

$$1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots$$

und ebenfalls die n-te Partialsumme s_n dieser Reihe mit dem Summenzeichen auf. Konvergiert diese Reihe? Geben Sie ggf. den Grenzwert an.

b) Wie a) für

$$1 - \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots.$$

c) Begründen Sie, weshalb für $q \in \mathbb{R}$ (mit $|q| < 1$) Folgendes gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \ .$$

d) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| \geq 1$: Begründen Sie, weshalb die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ divergiert.

2. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

nennt man bekanntlich *Harmonische Reihe*; ihre n-te Partialsumme bezeichnet man mit H_n und man nennt H_n die *n-te harmonische Zahl*:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

a) Schreiben Sie sowohl H_n als auch die Harmonische Reihe mit dem Summenzeichen auf und berechnen Sie $H_1, \ldots, H_4$.

b) Begründen Sie (mündlich) anhand der folgenden Zeile, dass die Harmonische Reihe divergiert:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots$$

3. Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Am Ende von Abschnitt 1.3 wurde im Skript nachgewiesen, dass diese Reihe konvergiert – der Beweis war aber nicht sonderlich anschaulich. Nun soll mit Mitteln der Integralrechnung *auf eine besonders anschauliche Art* nachgewiesen werden, dass die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert.

Anleitung: Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x > 0$ und betrachten Sie geeignete Untersummen.

4. Weisen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mit dem Quotientenkriterium nach.

Hinweis: Es ist hier (wie in vielen Fällen) zweckmäßig, die Limes-Version des Quotientenkriteriums zu verwenden.

B: Hausaufgaben zum 5. Juni 2014

1. a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

für $x \in [0, \infty)$. Dabei sollen auch mögliche Wendepunkte bestimmt und an der richtigen Stelle eingezeichnet werden.

b) Berechnen Sie für die drei Funktionen aus a) jeweils den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion, der positiven x-Achse und der y-Achse eingeschlossen wird.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

gegeben ist. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f.

2. a) In Präsenzaufgabe 4 haben wir die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mit dem Quotientenkriterium nachgewiesen. Führen Sie dasselbe mit dem Wurzelkriterium durch. (Es ist zweckmäßig, die Limes-Version des Wurzelkriteriums zu verwenden.)
Hinweis: Es gilt $\sqrt[i]{i} \to 1$ für $i \to \infty$ (vgl. Skript, Abschnitt 2.7.2).

b) Weisen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i!}{i^i}$ mit der Limes-Version des Quotientenkriteriums nach.

3. Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 2^i x^i$ auf zwei Arten:

a) mithilfe der Limes-Version des Quotientenkriteriums;

b) mithilfe der Limes-Version des Wurzelkriteriums.

Hinweis zu a): Gehen Sie vor wie in einem ähnlichen Beispiel in Abschnitt 4.2.

4. Entscheiden Sie, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt:

$$\text{(i)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{i+1}} \qquad \text{(iii)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2(i+1)} \qquad \text{(v)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}$$

$$\text{(ii)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i}{2(i+1)} \qquad \text{(iv)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i} \qquad \text{(vi)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i}$$

Für (i) - (iv) gilt: Falls Konvergenz vorliegt, so ermittle man auch den Grenzwert. Falls Sie zu dem Ergebnis gekommen sind, dass im Fall (v) bzw. (vi) Konvergenz vorliegt: Haben Sie eine Idee, welches der Grenzwert ist?

5. a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und erläutern Sie anhand der Skizze, weshalb Folgendes gilt:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le H_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (\star)$$

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Obersumme.

b) Erläutern Sie, weshalb $(\star)$ ebenfalls eine Begründung für die Divergenz der Harmonischen Reihe liefert.
Hinweis: Berechnen Sie das in $(\star)$ linksstehende Integral.

6. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f(n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. In der Informatik wird in vielen Zusammenhängen danach gefragt, *wie schnell* $f(n)$ gegen unendlich geht. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Funktion

$$f(n) = H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

die häufig bei der Analyse von Algorithmen auftritt, etwa bei der Laufzeitanalyse von QUICK-SORT, in der das Resultat dieser Übungsaufgabe eine wichtige Rolle spielt (vgl. Cormen et al.: *Algorithmen - Eine Einführung*).

a) Zeigen Sie

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Hinweis: Die „Hälfte“ von (1) wurde im Wesentlichen bereits in Aufgabe 3 erledigt.

b) Folgern Sie aus (1):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1. \tag{2}$$

Hinweis: Wenn a) erledigt ist, so geht b) recht schnell.

(Das Ergebnis (1) (bzw. (2)) können wir auch so aussprechen: Die Funktion $f(n) = H_n$ wächst nur recht langsam, nämlich etwa so wie $\ln(n)$.)