-L. 8-

Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 4

B: Hausaufgaben zum 8. Mai 2014

3. a) In Abschnitt 2.3.8 des Skripts geht es um die häufig angewandte Methode des *Logarithmischen Differenzierens.* Arbeiten Sie diesen Abschnitt selbstständig durch und wenden Sie die beschriebene Methode zur Berechnung von $f'(x)$ auf die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ an, die gegeben ist durch:

$$f(x) = (x+1)^{x+2}.$$

b) Leiten Sie auch die folgenden Funktionen mithilfe von Logarithmischer Differentiation ab:

(i) $g(x) = (x^2+5)^{x^4+3}$

(ii) $h(x) = (x^4+3)^{\sqrt{3x+1}}$ (für $x \geq -\frac{1}{3}$)

c) Stellen Sie sich vor, Sie könnten sich nicht mehr an die Formeln für die Ableitungen von $f(x) = 3^x$ und $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ erinnern. Leiten Sie sich die Formeln mit Hilfe von Logarithmischer Differentiation her.

a) $f(x) = (x+1)^{x+2} = e^{\ln (x+1)^{x+2}} = e^{(x+2)\ln(x+1)} \Rightarrow$

$f'(x) = e^{(x+2)\ln(x+1)} \cdot \left(\ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1}\right)$

$= (x+1)^{x+2}\left(\ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1}\right).$

b) (i) $g(x)=(x^2+5)^{x^4+3}=e^{\ln(x^2+5)^{x^4+3}}=$
$e^{(x^4+3)\ln(x^2+5)} \Longrightarrow$

$$g'(x)=e^{(x^4+3)\ln(x^2+5)}\cdot\left(4x^3\ln(x^2+5)+\frac{x^4+3}{x^2+5}\cdot 2x\right)$$

$$=(x^2+5)^{x^4+3}\cdot\left(4x^3\ln(x^2+5)+\frac{2x^5+6x}{x^2+5}\right)$$

(ii) $h(x)=(x^4+3)^{\sqrt{3x+1}}=e^{\ln(x^4+3)^{\sqrt{3x+1}}}=e^{\sqrt{3x+1}\ln(x^4+3)} \Longrightarrow$

$$h'(x)=e^{\sqrt{3x+1}\ln(x^4+3)}\cdot\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\ln(x^4+3)+\frac{\sqrt{3x+1}\cdot 4x^3}{x^4+3}\right)$$

$$=(x^4+3)^{\sqrt{3x+1}}\cdot\left(\frac{3\ln(x^4+3)}{2\sqrt{3x+1}}+\frac{\sqrt{3x+1}\cdot 4x^3}{x^4+3}\right).$$

c) $f(x)=3^x=e^{\ln 3^x}=e^{x\ln 3} \Longrightarrow$

$$f'(x)=e^{x\ln 3}\cdot\ln 3=3^x\cdot\ln 3$$

$$g(x)=x^{\frac{1}{3}}=e^{\ln x^{\frac{1}{3}}}=e^{\frac{1}{3}\ln x} \Longrightarrow$$

$$g'(x)=e^{\frac{1}{3}\ln x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}=x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

4. Berechnen Sie $f'(x)$ für

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x^7}}$

(ii) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

(iii) $f(x) = \sin^2 x$

(iv) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

(v) $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$

(vi) $f(x) = \left(x^3 - 1\right)^{\arctan x}$ (für $x > 1$).

(i) $f(x) = x^{-\frac{5}{4}} \cdot \left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{5}{4}} \cdot x^{\frac{7}{6}} = x^{\frac{7}{6}-\frac{5}{4}} = x^{-\frac{1}{12}}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{12}\, x^{-\frac{13}{12}}$

(ii) $f'(x) = 2x\cos(x^2)$, (iii) $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$

(iv) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(v) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)x}}$.

(vi) $f(x) = (x^3-1)^{\arctan x} = e^{\arctan(x) \cdot \ln(x^3-1)} \Rightarrow$

$f'(x) = (x^3-1)^{\arctan x} \cdot \left(\frac{\ln(x^3-1)}{1+x^2} + \frac{3x^2 \cdot \arctan(x)}{x^3-1} \right)$

5. Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

durch. Gehen Sie dabei nach dem Schema auf Seite ~~49~~ des Skripts vor.

/50

1. f ist auf $\mathbb{R}$ definiert.

2. $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$

$$f''(x) = \frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$$

Nullstelle von f: 0

Nullstellen von f': −1, 1

Nullstellen von f'': $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = 0$ und

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = 0$$

4. Wegen $f(-1) = -1 < 0$ gilt $f(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, 0)$; wegen $f(1) = 1 > 0$ gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.

Wegen $f'(-2) < 0$, $f'(0) > 0$ und $f'(2) < 0$ gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$

für alle $x \in (-1,1)$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in (1,\infty)$.

Wegen $f''(-2) < 0$, $f''(-1) > 0$, $f''(1) < 0$ und $f''(2) > 0$ gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $f''(x) > 0$ für alle $x \in (-\sqrt{3}, 0)$, $f''(x) < 0$ für alle $x \in (0, \sqrt{3})$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in (\sqrt{3}, \infty)$.

Es ergibt sich folgende Abgrenzung von Bereichen:

f ist negativ | f ist positiv

0

f ist streng monoton fallend | f ist streng monoton steigend | f ist streng monoton fallend

-1 | 1

f ist streng konkav | f ist streng konvex | f ist streng konkav | f ist streng konvex

$-\sqrt{3}$ | 0 | $\sqrt{3}$

5. Aus 4. ergibt sich: f hat ein Minimum bei $x = -1$ und ein Maximum bei $x = 1$; bei $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ und $x = \sqrt{3}$ hat f je einen Wendepunkt.

6. f hat für $x \to \infty$ die Asymptote $g(x) = 0$, da $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ (siehe 3.). Ebenso: f hat

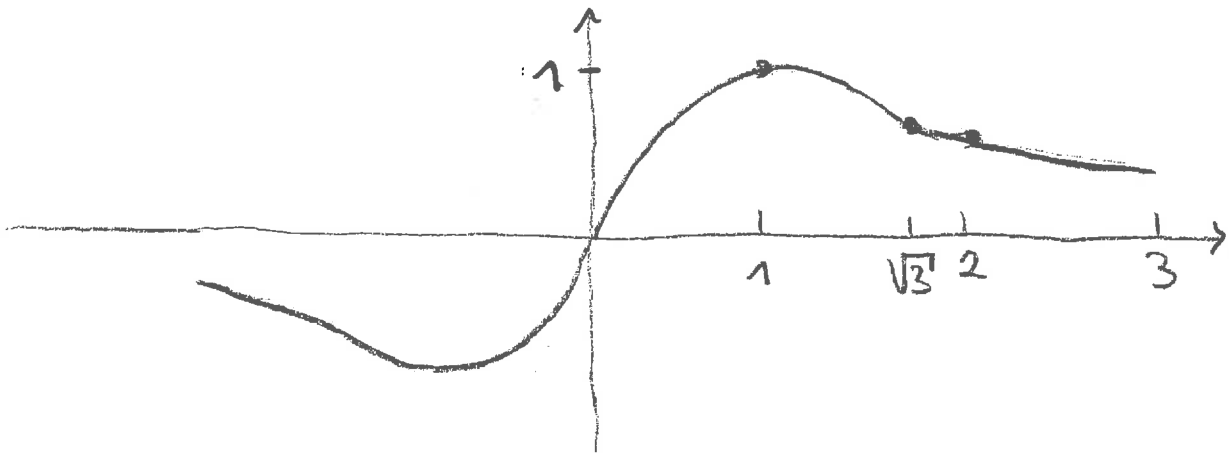
für $x \to -\infty$ die Asymptote $g(x)=0$. Außerdem sei der Vollständigkeit halber festgestellt, dass f bei $x=0$ den einzigen Schnittpunkt mit der Asymptote $g(x)=0$ hat

7. einige Funktionswerte:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-0{,}8$	-1	0	1	$0{,}8$

Nützliche Feststellung: Es gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Skizze (grob):



6. a) In den Wirtschaftswissenschaften geht es häufig darum, gegebene Größen zu optimieren (Minimierung der Kosten, Maximierung des Gewinns etc.). Hier eine Aufgabe, die dies illustriert (aus S. Kurz, J. Rambau: Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler): Der McMoney Verlag bringt ein neues Buch auf den Markt. Jetzt überlegt die Geschäftsführung, zu welchem Preis p (in €) es verkauft werden soll. Der McMoney Verlag geht davon aus, dass die Zahl der verkauften Exemplare v wie folgt vom Preis abhängt:

$$v(p) = \frac{10^5}{p^2}.$$

Der Druck eines Buches kostet 3€. Der erwartete Gewinn g in Abhängigkeit vom Preis p ist also (in €):

$$g(p) = v(p) \cdot p - v(p) \cdot 3 = v(p) \cdot (p-3) = \frac{10^5}{p^2} \cdot (p-3) = 10^5 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p^2}\right).$$

Der Verkaufspreis muss selbstverständlich die Druckkosten decken, weshalb $p \geq 3$ angenommen werden darf. Außerdem wäre ein Preis oberhalb von 100€ glatter Wucher und ist somit ebenfalls ausgeschlossen. Der Preis p soll nun so festgesetzt werden, dass der Gewinn maximal wird. Ermitteln Sie diesen Preis, indem Sie das globale Maximum von $g(p)$ auf dem Intervall $[3, 100]$ bestimmen. Begründen Sie in der Rechnung auch, dass es sich bei Ihrer Lösung um das globale Maximum handelt.

b) Wo nehmen die folgenden Funktionen ihr globales Minimum und Maximum an?

(i) $f : [-10, 10] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^7 + 5x^5 + 2x^3 + x$

(ii) $g : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ g(x) = e^{2x-1} - e^{x+1}$

(iii) $h : [1, 6] \to \mathbb{R},\ h(x) = 4\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 4x$

a) $g'(p) = 10^5\left(-\frac{1}{p^2} + \frac{6}{p^3}\right) = 10^5\,\frac{6-p}{p^3}$

$g'(p) = 0 \Rightarrow p = 6$

Damit stehen die Kandidaten für das Vorliegen eines globalen Maximums fest: $p=3$, $p=6$ und $p=100$. Man braucht nur noch einzusetzen: $g(3) = 0$, $g(6) = 10^5 \cdot \frac{1}{12}$, $g(100) = 10^5 \cdot \frac{99}{10000}$. Es gilt also $g(6) > g(3)$ und $g(6) > g(100)$. Bei $p=6$ liegt demnach ein globales Maximum vor, d.h., bei einem Preis von 6€ ist der Gewinn maximal.

b) (i) $f'(x) = 21x^6 + 25x^4 + 6x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Da $f(10) > f(-10)$ gilt, liegt das globale Maximum bei $x = 10$, und bei $x = -10$ befindet sich das globale Minimum.

(ii) $g'(x) = 2e^{2x-1} - e^{x+1} = 0 \Rightarrow 2e^{2x-1} = e^{x+1}$

$\Rightarrow \ln(2) + 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = 2 - \ln(2) \approx 1.3.$

Damit gibt es drei Kandidaten für das Vorliegen eines globalen Maximums bzw. Minimums: -2, 2 und $2-\ln(2)$. Die Entscheidung fällt durch Einsetzen in g: $g(-2) = e^{-5} - e^{-1} \approx -0.36$, $g(2) = 0$, $g(2-\ln(2)) \approx -5.02$. Also: globales Minimum bei $x = 2 - \ln(2)$, globales Maximum bei $x = 2$.

(iii) $h'(x) = \frac{4}{x} + x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$
Es gilt $h(1) = -3.5$, $h(2) = 4\ln(2) - 6 \approx -3.2$, $h(6) = 4\ln(6) - 6 \approx 1.167.$

Also: globales Minimum bei $x = 1$, globales Maximum bei $x = 6$.