-L.33-

Mathematatik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 8

B: Hausaufgaben zum 19. Juni 2014

3. Einige ALA-Klausuraufgaben aus dem Sommersemester 2013:

a) Es sei $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ und $t(x)$ sei die Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $(2, 9)$. Berechnen Sie die Steigung von $t(x)$ sowie den Schnittpunkt von $t(x)$ mit der x-Achse.

b) Wir betrachten die Funktion $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch $h(x) = x^x$ gegeben ist. Bestimmen Sie (falls vorhanden) die lokalen Minima und Maxima dieser Funktion. Bestimmen Sie eine möglichst große Teilmenge des Definitionsbereichs von h, auf der h konvex ist.

c) Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ und $T_3(x)$ für $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$ (für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$).

d) Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{für } x \neq 0 \\ 0 & , \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob diese Funktion im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

a) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f'(2) = 11$ ist die gesuchte Steigung. Es gilt $t(x) = 11(x-2) + 9$ und aus $t(x) = 0$ erhält man $11x = 13$. $\Rightarrow \left(\frac{13}{11}, 0\right)$ ist der gesuchte Schnittpunkt.

b) $h(x) = x^x = e^{x\ln(x)} \Rightarrow h'(x) = x^x(\ln(x)+1)$.
Nullstellen von $h'(x)$: $x^x(\ln(x)+1) = 0 \underset{\text{wegen } x^x = e^{x\ln(x)} > 0}{\Longleftrightarrow}$
$\ln(x)+1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.
$x_0 = \frac{1}{e}$ ist also die einzige Nullstelle von $h'(x)$.

$$h''(x) = x^x(\ln(x)+1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x\left((\ln(x)+1)^2 + \frac{1}{x}\right)$$

Wegen $x^x > 0$ und $(\ln(x)+1)^2 + \frac{1}{x} > 0$ gilt:

– h hat an der Stelle $x_0 = \frac{1}{e}$ ein Minimum
– h ist auf dem gesamten Definitionsbereich $(0,\infty)$ konvex.

c) $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=\frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{5}$

$f''(x)=-\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}} \Rightarrow f''(0)=-\frac{4}{25}$

$f'''(x)=\frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}} \Rightarrow f'''(0)=\frac{36}{125}$

$\Rightarrow T_0(x)=1,\ T_1(x)=1+\frac{1}{5}x,\ T_2(x)=1+\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}x^2,$

$T_3(x)=1+\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}x^2+\frac{6}{125}x^3.$

d) Die Funktion h ist an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar.

<u>Begründung</u>: Für $x_0=0$ und $x \neq x_0$ gilt

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\cos(\frac{1}{x})-0}{x-0}=\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Es sei $x_n=\frac{1}{n\cdot 2\pi}$ $(n=1,2,\ldots)$; man erhält

$$\frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0}=\cos(n\cdot 2\pi)=1.$$

Außerdem betrachten wir die Folge $x_n'=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})2\pi}$ $(n=1,2,\ldots)$. Für diese Folge gilt

$$\frac{h(x_n')-h(x_0)}{x_n'-x_0}=\cos((n+\tfrac{1}{2})2\pi)=-1 \quad (n=1,2,\ldots)$$

Man beachte, dass $x_n \to 0$ und $x_n' \to 0$ gilt. Es folgt, dass $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$ nicht existiert, d.h., h ist nicht differenzierbar.

4. In der Informatik spielt an vielen Stellen unterschiedliches Wachstumsverhalten von Funktionen („f wächst schneller als g") eine Rolle, beispielsweise, wenn es darum geht, die Laufzeit von Algorithmen zu vergleichen. Die dazugehörige präzise Definition haben wir im Skript auf Seite 65 kennengelernt, wo genau gesagt wird, was es bedeuten soll, dass $f(x)$ für $x \to \infty$ schneller wächst als $g(x)$. Im Folgenden werden drei Standardtypen von Funktionen betrachtet, für die das Wachstumsverhalten zu vergleichen ist.

a) Es sei $f(x) = a^x$ für ein $a > 1$ und $g(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ für $x \to \infty$ schneller wächst als $g(x)$, d.h., weisen Sie nach, dass Folgendes gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \infty.$$

Hinweis: Regeln von de l'Hospital.

b) Nun sei $g(x) = x^r$ für ein $r \in \mathbb{R}^+$ (d.h. $r > 0$) und $h(x) = (\ln x)^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Bei $h(x)$ handelt es sich also um die k-te Potenz des natürlichen Logarithmus; man schreibt meistens $\ln^k x$ anstelle von $(\ln x)^k$. Zeigen Sie, dass $g(x)$ für $x \to \infty$ schneller wächst als $h(x)$.

c) **Zusätze** (leichte Verallgemeinerungen von a) und b)):

(i) Begründen Sie, weshalb a) richtig bleibt, wenn dort $g(x) = x^r$ für ein beliebiges $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ vorausgesetzt wird.

(ii) Bleibt b) richtig, wenn dort (anstelle von $\ln x$) $\log_a x$ für eine beliebige Basis $a > 1$ betrachtet wird?

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x\cdot(\ln a)^n}{n!}\right) = \infty.$$

n-fache Anwendung der Regeln von de l'Hospital

b) Der Fall $k=1$ wurde bereits im Skript behandelt; um zu erkennen, wie der Hase läuft, betrachten wir zusätzlich noch den Fall $k=2$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^r}{(\ln x)^2}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{r\,x^{r-1}}{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}\right) =$$

l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tau x^{\tau}}{2\ln x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tau^2 \cdot x^{\tau-1}}{2\cdot\frac{1}{x}}\right) \underset{\uparrow}{=}$$

l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tau^2 x^{\tau}}{2}\right) = \infty .$$

Allgemeiner Fall:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{\tau}}{(\ln x)^k}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tau^k x^{\tau}}{k!}\right) = \infty .$$

k-fache Anwendung
der Regel von de l'Hospital

c) (i) Es sei $n = \lceil \tau \rceil$. Für $x \geq 1$ gilt dann $x^\tau \leq x^n$ und folglich

$$(*) \quad \frac{a^x}{x^n} \leq \frac{a^x}{x^\tau} \text{ für alle } x \geq 1.$$

Wir haben bereits $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right) = \infty$ gezeigt, woraus man wegen $(*)$ erhält:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^\tau}\right) = \infty.$$

(ii) Ja, weil sich $\ln x$ und $\log_a x$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden: Für $c = \frac{1}{\ln a}$ gilt

$$(**) \quad \log_a x = c \cdot \ln x \text{ für alle } x > 0.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\tau}{(\log_a x)^k}\right) \overset{(**)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\tau}{c^k(\ln x)^k}\right) = \frac{1}{c^k}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\tau}{(\ln x)^k}\right) = \infty.$$

5. Verbessern Sie die in Abschnitt 3.6 des Skript gefundene Näherungslösung für

$$\int_0^1 \sin x \, dx,$$

indem Sie zusätzlich die Fälle $n = 4$, $n = 5$ und $n = 10$ betrachten.

$\underline{\underline{n=4}}$: Man erhält $\frac{1}{8}\left(\sin(0)+2\sin(\frac{1}{4})+2\sin(\frac{1}{2})+2\sin(\frac{3}{4})+\sin(1)\right) \approx \underline{\underline{0.4573009376}}$.

$\underline{\underline{n=5}}$: $\frac{1}{10}\left(\sin(0)+2\sin(\frac{1}{5})+2\sin(\frac{2}{5})+2\sin(\frac{3}{5})+2\sin(\frac{4}{5})+\sin(1)\right) \approx \underline{\underline{0.458164346}}$.

$\underline{\underline{n=10}}$: $\frac{1}{20}\left(\sin(0)+2\sin(\frac{1}{10})+\ldots+2\sin(\frac{9}{10})+\sin(1)\right) \approx \underline{\underline{0.4593145489}}$.

6. Zu guter Letzt: Weitere ALA-Klausuraufgaben aus vergangenen Semestern.

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_2^3 \frac{11x-5}{x^2+1}\, dx$.

b) Entscheiden Sie, ob die folgende Reihe konvergiert oder divergiert:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{5^{i+1}}.$$

Falls Konvergenz vorliegt, so ermittle man den Grenzwert. Falls Divergenz vorliegt, so begründe man, weshalb dies der Fall ist.

c) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^4+x^2-x-1}\right)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+11x)^{\frac{1}{4x}}$

d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Berechnen Sie, falls vorhanden, die Wendepunkte von f.

a) $\int \frac{11x-5}{x^2+1}dx = \frac{11}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx - 5\int\frac{1}{x^2+1}dx =$

$\frac{11}{2}\ln(x^2+1) - 5\arctan x \Rightarrow$

b) $\int_2^3 \frac{11x-5}{x^2+1}dx = \frac{11}{2}\ln(10) - 5\arctan(3) - \frac{11}{2}\ln(5) + 5\arctan(2)$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{5^{i+1}} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^i = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{5}} - 1\right) =$$

$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}-1\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{30}}}$$

c) (i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^4+x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-4}{4x^3+2x-1} = \frac{-2}{5}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+11x)^{\frac{1}{4x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+11x)}{4x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+11x)}{4x}\right)}$

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+11x)}{4x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{11}{4(1+11x)}\right) = \frac{11}{4}$.

Also: $\lim\limits_{x\to 0}(1+11x)^{\frac{1}{4x}} = e^{\frac{11}{4}}$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

Es folgt $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$.

Die Nullstellen der 2. Ableitung sind also $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Einsetzen von -1, 0 und 1 in f'' ergibt $f''(-1) = \frac{1}{2} > 0$, $f''(0) = -2 < 0$ und $f''(1) = \frac{1}{2} > 0$, d.h., dass an den Stellen x_1 und x_2 ein Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung vorliegt. Also: x_1 und x_2 sind die gesuchten Wendepunkte.