Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 9

B: Hausaufgaben zum 26. Juni 2014

3. Bestimmen Sie die kritischen Stellen und entscheiden Sie, ob lokale Minima oder lokale Maxima vorliegen.

(i) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + x + 6$

(ii) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - xy - 4x + y + 1$

(iii) $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 2$

(iv) $f(x,y) = x^3 + 4y^3 - 9x - 48y + 7$

<u>(i)</u> $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + y + 1 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + x = 0$. Aus der 2. Gleichung folgt $x = 2y$. Setzt man dies in die 1. Gleichung ein, so erhält man $3y = 1$. Also: $y = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{2}{3}$.

<u>Ergebnis</u>: $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ist die einzige kritische Stelle.

Es gilt außerdem:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$.
Für die Hessesche Matrix und deren Abschnitts-determinanten folgt
$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = \det H = 3$. Da $\Delta_1 < 0$ und $\Delta_2 > 0$ folgt, dass H negativ definit ist. Also liegt bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ein <u>lokales Maximum</u> vor.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - y - 4 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - x + 1 = 0$. Aus der 2. Gleichung folgt $x = 4y + 1$. Setzt man dies in die 1. Gleichung ein, so erhält man $24y + 6 - y - 4 = 0$. Es folgt $y = -\frac{2}{23}$ und $x = -\frac{8}{23} + 1 = \frac{15}{23}$. Die einzige kritische Stelle ist also $(x,y) = \left(\frac{15}{23}, -\frac{2}{23}\right)$.

Für die Hessesche Matrix H und deren Abschnitts-determinanten gilt

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \ \Delta_1 = 6 \text{ und } \Delta_2 = |H| = 23.$$

Wegen $\Delta_1 > 0$ und $\Delta_2 > 0$ ist H positiv definit, d.h., bei $\left(\frac{15}{23}, -\frac{2}{23}\right)$ liegt ein lokales Minimum vor.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x + 4y - 1 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 4x + 1 = 0$. Subtraktion des 2-fachen der 2. Gleichung von der ersten ergibt $-2x - 3 = 0$, d.h., $x = -\frac{3}{2}$. Es folgt $y = \frac{1}{2}(-4x - 1) = \frac{1}{2}(6 - 1) = \frac{5}{2}$. Die einzige kritische Stelle ist demnach $(x,y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Für die Hessesche Matrix H und deren Determinante gilt

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } |H| = 12 - 16 = -4 < 0.$$

H ist also indefinit (siehe Skript S. 14x) und folglich liegt kein lokales Extremum vor (Sattelpunkt bei $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$).

(iv) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 9 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y^2 - 48 = 0$. Es folgt $x^2 = 3$ und $y^2 = 4$. Folglich gibt es vier kritische Stellen: $(\sqrt{3},2)$, $(\sqrt{3},-2)$, $(-\sqrt{3},2)$, $(-\sqrt{3},-2)$. Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 24y.$$

Mit $H(x,y)$ sei die Hessesche Matrix an der Stelle (x,y) bezeichnet. Es gilt

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 24y \end{pmatrix}.$$

Die Abschnittsdeterminanten von $H(x,y)$ seien mit $\Delta_1(x,y)$ und $\Delta_2(x,y)$ bezeichnet; es gilt

$$\Delta_1(x,y) = 6x,\ \Delta_2(x,y) = |H(x,y)| = 144xy.$$

Für die kritischen Stellen gilt somit:

Bei $(\sqrt{3},2)$ liegt ein lokales Minimum vor, da $\Delta_1(\sqrt{3},2) = 6\sqrt{3} > 0$ und $\Delta_2(\sqrt{3},2) = 288\sqrt{3} > 0$.

Ähnlich findet man: Bei $(\sqrt{3},-2)$ und $(-\sqrt{3},2)$ liegen Sattelpunkte vor; bei $(-\sqrt{3},-2)$ liegt ein lokales Maximum vor.

4. Aus einem Lehrbuch für Wirtschaftswissenschaftler:

a) Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Sorten A und B eines Gutes. Die täglichen Kosten der Produktion von x Einheiten des Gutes A und y Einheiten des Gutes B sind

$$C(x,y) = 0.04x^2 + 0.04xy + 0.16y^2 + 3x + 8y + 500.$$

Nehmen Sie an, dass das Unternehmen den ganzen Output verkauft – und zwar das Gut A zu einem Stückpreis von 14 Geldeinheiten und das Gut B zu einem Stückpreis von 36 Geldeinheiten. Bestimmen Sie die täglichen Produktionsniveaus x und y, die den Gewinn pro Tag maximieren.

b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass jede Produktion des Unternehmens eine Umweltbelastung hervorruft. Genauer gelte: Die Produktion einer Einheit von Gut B belastet die Umwelt viermal so hoch wie die Produktion einer Einheit von Gut A. Deshalb hat das Unternehmen die Auflage erhalten, dass $x + 4y \leq 320$ erfüllt sein muss. Ein Unterschreiten der erlaubten Höchstmenge kommt aus betrieblichen Gründen (Auslastung der Maschinen) nicht in Frage. Das Problem des Unternehmens ist dann, den Gewinn pro Tag zu maximieren – unter der Nebenbedingung

$$x + 4y = 320.$$

Welches sind jetzt die beiden optimalen Mengen des Outputs?
Hinweis: Verwenden Sie die *Methode der Variablensubstitution* (Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen mit anschließendem Einsetzen in die Zielfunktion).

c) Berechnen Sie sowohl für Fall a) als auch für Fall b) den maximalen Gewinn.

a) Der Gewinn pro Tag sei mit $g(x,y)$ bezeichnet; es gilt

$$g(x,y) = 14x + 36y - C(x,y)$$
$$= -0.04x^2 - 0.04xy - 0.16y^2 + 11x + 28y - 500.$$

Man erhält

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -0.08x - 0.04y + 11 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -0.04x - 0.32y + 28 = 0$$

Subtraktion des 2-fachen der 2. Gleichung von der ersten ergibt $0.6y - 45 = 0$. Es folgt $y = 75$, woraus durch Einsetzen in die erste Gleichung $x = 100$ folgt. Also: Die einzige kritische Stelle ist $(x,y) = (100, 75)$

Die Hessesche Matrix lautet

$$H = \begin{pmatrix} -0.08 & -0.04 \\ -0.04 & -0.32 \end{pmatrix}.$$

Für die Abschnittsdeterminanten von H gilt $\Delta_1 = -0.08 < 0$ und $\Delta_2 = 2.40 > 0$ Es folgt, dass H negativ definit ist. Für die Stelle

$$(x,y) = (100,75)$$

bedeutet dies (vergl. Skript, Abschnitt 5.2 sowie Ergänzungsskript E.5–9): Bei $(x,y) = (100,75)$ liegt ein lokales <u>und damit auch globales Maximum vor</u>.

b) Wir schränken den Definitionsbereich der Zielfunktion $g(x,y)$ ein, indem wir nur noch Paare (x,y) betrachten, für die $x+4y=320$ gilt. Setzt man $y = 80 - \frac{x}{4}$ in die Zielfunktion ein, so erhält man eine Darstellung der Zielfunktion, in der die Variable y nicht mehr vorkommt:

$$\tilde{g}(x) = -0.04x^2 - 0.04x(80-0.25x) - 0.16(80-0.25x)^2$$
$$+11x + 28(80-0.25x) - 500$$
$$= -0.04x^2 + 7.2x + 716.$$

Es folgt $\tilde{g}'(x) = -0.08x + 7.2$. Aus $\tilde{g}'(x) = 0$ erhält man $x = \frac{7.2}{0.08} = 90$ sowie $y = 80 - \frac{x}{4} = 57.5$.

Wegen $\tilde{g}''(x) = -0.08 < 0$ liegt bei $x = 90$ ein strenges lokales Maximum von $\tilde{g}$ vor (vergl. Satz 18 in Abschnitt 2.4) und dieses Maximum ist auch ein globales Maximum von $\tilde{g}$. (Man beachte: Bei dem Graphen von $\tilde{g}(x) = -0.04x^2 + 7.2x + 716$ handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel.)

c) Im Fall a) beträgt der maximale Gewinn

$g(100, 75) = 1100$ GE.

Im Fall b) beträgt der maximale Gewinn

$g(90, 57.5) = \tilde{g}(90) = 1040$ GE.