Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Stefan Geschke, Mathias Schacht, Fabian Schulenburg

Sommersemester 2014
Blatt 7

B: Hausaufgaben zum 5. Juni 2014

1. a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

für $x \in [0, \infty)$. Dabei sollen auch mögliche Wendepunkte bestimmt und an der richtigen Stelle eingezeichnet werden.

b) Berechnen Sie für die drei Funktionen aus a) jeweils den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion, der positiven x-Achse und der y-Achse eingeschlossen wird.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

gegeben ist. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f.

a) $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $g'(x) = -(1+x)^{-2}$,
$g''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f, g$ haben keine Wendepunkte.

$$h'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad h''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} =$$

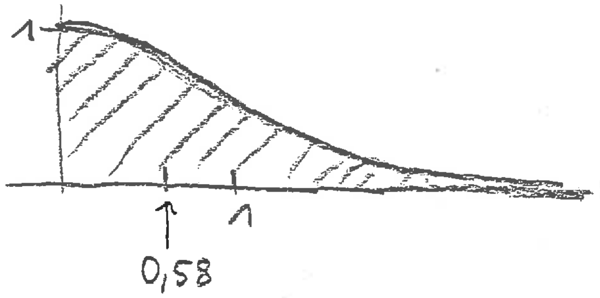
$$\frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^3)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$6x^2 - 2 = 0, x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \Rightarrow$
Bei $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$ ist ein Wendepunkt von h.

f: 

g: 

h:



b) $\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = 1 - e^{-b} \to 1$ für $b \to \infty$,

also $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.

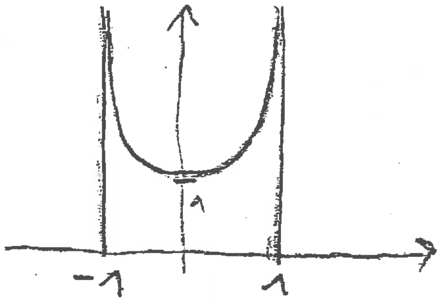
$\int_0^b \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^b = \ln(1+b) \to \infty$ für $b \to \infty$,

also $\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\,dx = \infty$.

$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^b = \arctan b \to \frac{\pi}{2}$ für $b \to \infty$,

also $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (siehe auch Skizze von $\arctan x$, Skript, Abschnitt 3.3).

c)



$$2\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\Big[\arcsin x\Big]_0^b = 2\arcsin b \to \pi$$

für $b \to 1$. Also:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi.$$

4. Entscheiden Sie, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt:

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{i+1}}$	(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2(i+1)}$	(v) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}$
(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i}{2(i+1)}$	(iv) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i}$	(vi) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i}$

Für (i) - (iv) gilt: Falls Konvergenz vorliegt, so ermittle man auch den Grenzwert. Falls Sie zu dem Ergebnis gekommen sind, dass im Fall (v) bzw. (vi) Konvergenz vorliegt: Haben Sie eine Idee, welches der Grenzwert ist?

(i) $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{i+1}} = -\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = -\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} =$$

$$1 + \frac{1}{2} - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

(ii) Die Reihe divergiert, da ihre Glieder keine Nullfolge bilden. (Würden die Glieder $a_i = \frac{(-1)^i \cdot i}{2(i+1)}$ eine Nullfolge bilden, so würde auch $|a_i| \to 0$ gelten, was aber nicht der Fall ist:

$$|a_i| = \frac{i}{2i+2} = \frac{1}{2+\frac{2}{i}} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ für } i \to \infty.)$$

(iii) Es gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2(i+1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i}$.

Diese Reihe divergiert, da die Reihe $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i}$ sich von der harmonischen Reihe nur dadurch unterscheidet, dass das erste Glied fehlt.

(iv) $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i} = -\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i =$$

$$-\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} - 1\right) = \frac{1}{3}$$

(v) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Es gilt (vergl. (4.12') in Abschnitt 4.2)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(vi) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Es gilt (vergl. (4.11') in Abschnitt 4.2)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \underset{(4.11')}{=} -\frac{\ln 2}{2}.$$

5. a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und erläutern Sie anhand der Skizze, weshalb Folgendes gilt:

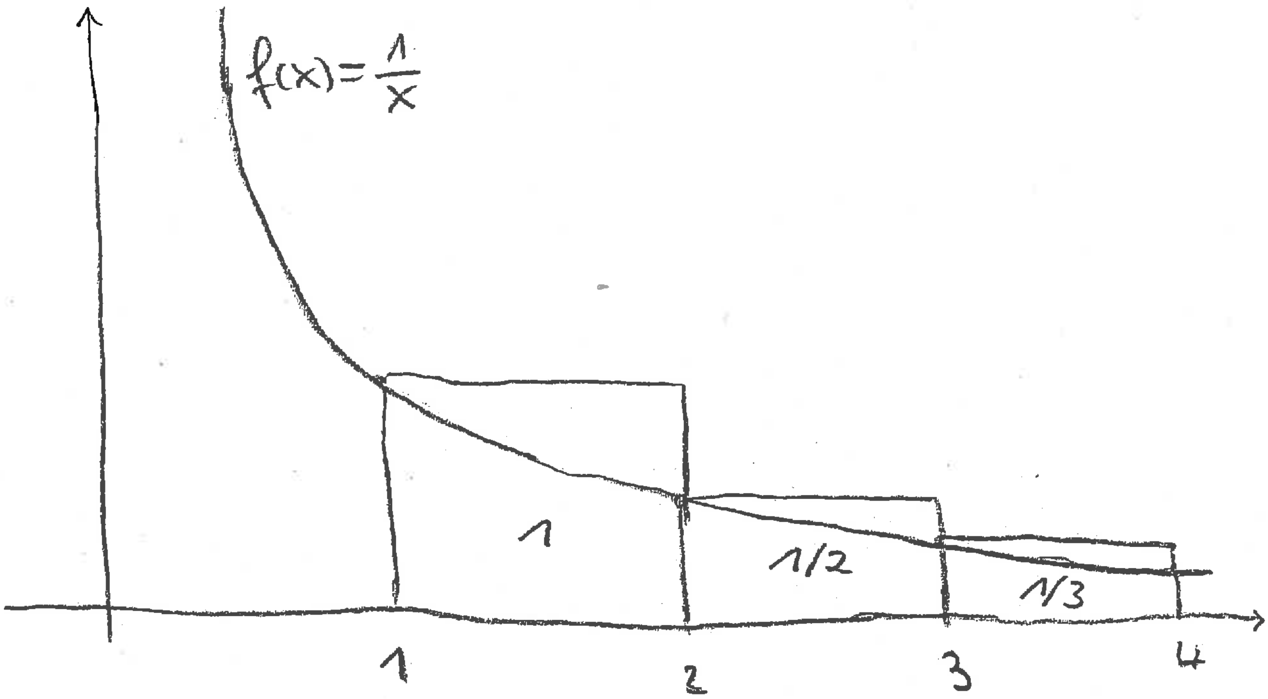
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le H_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (\star)$$

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Obersumme.

b) Erläutern Sie, weshalb $(\star)$ ebenfalls eine Begründung für die Divergenz der Harmonischen Reihe liefert.

Hinweis: Berechnen Sie das in $(\star)$ linksstehende Integral.

a)



In der Skizze wird der Fall $n = 3$ betrachtet: Wie man der Skizze entnimmt, ist $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ eine Obersumme zum Integral $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$. Es gilt also $\int_1^4 \frac{1}{x} dx \le H_3$. Verallgemeinerung dieser Beobachtung ergibt die Ungleichung $(*)$ (für alle $n \in \mathbb{N}$).

b) $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$.

Es folgt wegen $(*)$: $H_n \to \infty$. Also $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$.

6. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f(n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. In der Informatik wird in vielen Zusammenhängen danach gefragt, *wie schnell* $f(n)$ gegen unendlich geht. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Funktion

$$f(n) = H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

die häufig bei der Analyse von Algorithmen auftritt, etwa bei der Laufzeitanalyse von QUICKSORT, in der das Resultat dieser Übungsaufgabe eine wichtige Rolle spielt (vgl. Cormen et al.: *Algorithmen - Eine Einführung*).

a) Zeigen Sie

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Hinweis: Die „Hälfte" von (1) wurde im Wesentlichen bereits in Aufgabe 5 erledigt.

b) Folgern Sie aus (1):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1. \tag{2}$$

Hinweis: Wenn a) erledigt ist, so geht b) recht schnell.

(Das Ergebnis (1) (bzw. (2)) können wir auch so aussprechen: Die Funktion $f(n) = H_n$ wächst nur recht langsam, nämlich etwa so wie $\ln(n)$.)

a) In Aufgabe 5 wurde gezeigt:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq H_n.$$

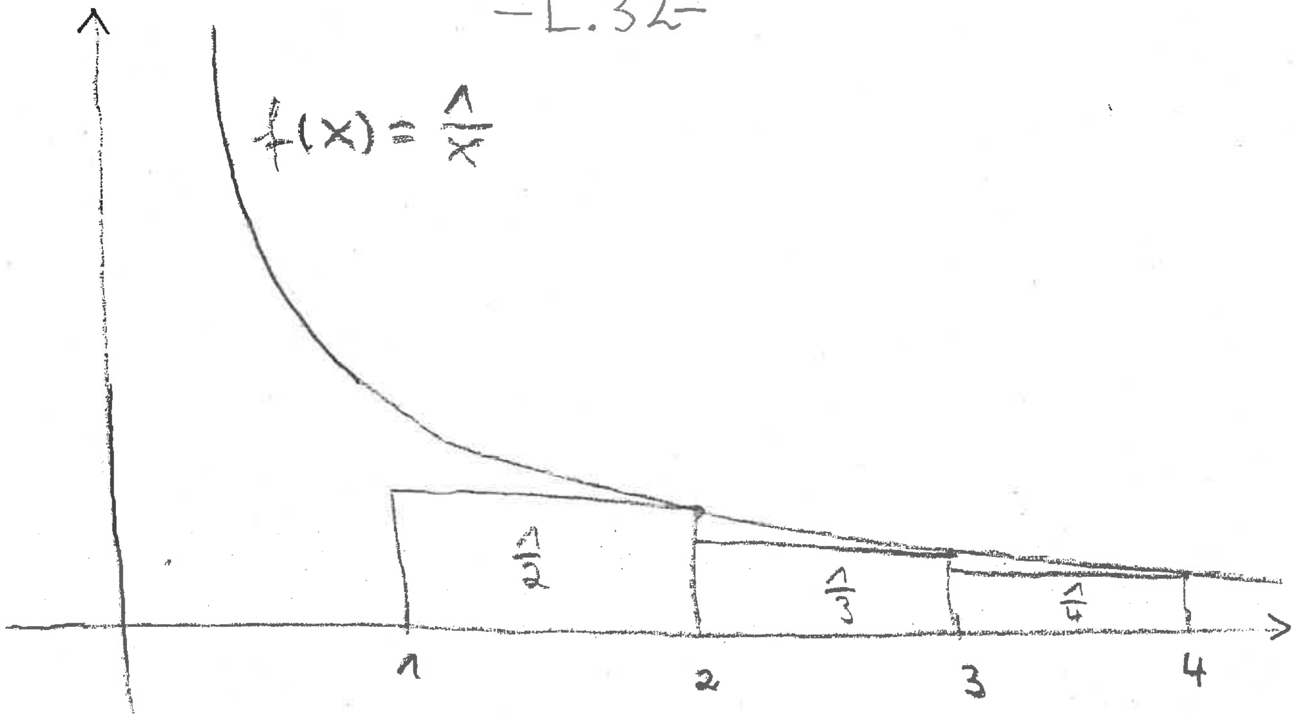
Für das linksstehende Integral gilt

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

Folglich: $\ln(n) \leq \ln(n+1) \leq H_n$. Damit ist die rechte Ungleichung aus (1) gezeigt. Es bleibt zu zeigen

$$H_n - 1 \leq \ln(n).$$

Diese Ungleichung erhält man durch Betrachtung einer Untersumme für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$:



$H_n - 1$ ist also eine Untersumme für das Integral $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^n = \ln(n)$.

Also gilt $H_n - 1 \leq \ln(n)$. Damit ist auch die linke Ungleichung aus (1) gezeigt.

b) Aus (1) erhält man mittels Division durch H_n:

$$1 - \frac{1}{H_n} \leq \frac{\ln(n)}{H_n} \leq 1.$$

Da $H_n \to \infty$ gilt, folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{H_n}\right) = 1$.
Nach dem Einschließungssatz (Skript Seite 16) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1$.