

Optimierung 02 27.10.2014

Carolin Konietzny, 6523939, Gruppe 3

Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 7

Julian Tobergte, 6414935, Gruppe 5

27. Oktober 2014

1. a) Starttableau:

$$x_4 = 7 - x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

$$x_5 = 4 - x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$x_6 = 5 - 3x_2 - 2x_3$$

$$z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

1. Iteration:

Eingangsvariable: x_2 , da es den größten Koeffizienten in z hat

Ausgangsvariable: x_6 , da:

$$x_1 = x_3 = 0$$

$$0 \leq x_4 = 7 - 3x_2 \Rightarrow x_2 \geq \frac{7}{3}$$

$$0 \leq x_5 = 4 - 2x_2 \Rightarrow x_2 \leq 2$$

$$0 \leq x_6 = 5 - 3x_2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \text{stärkste Beschränkung}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
 x_4 &= 7 - x_1 - 3\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6\right) - 2x_3 \\
 &= 2 - x_1 + \frac{8}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \\
 x_5 &= 4 - x_1 - 2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6\right) - x_3 \\
 &= \frac{2}{3} - x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 \\
 z &= 2x_1 + 4\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6\right) + 3x_3 \\
 &= \frac{20}{3} + 2x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_6
 \end{aligned}$$

Ergebnis der 1. Iteration:

$$\begin{array}{rcl}
 x_2 & = & \frac{5}{3} \quad \quad - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
 x_4 & = & 2 \quad - x_1 \quad + \frac{8}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \\
 x_5 & = & \frac{2}{3} \quad - x_1 \quad + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 \\
 \hline
 z & = & \frac{20}{3} + 2x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_6
 \end{array}$$

2. Iteration:

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: x_5 , da:

$$\begin{aligned}
 x_3 &= x_6 = 0 \\
 0 &\leq 2 - x_1 \Rightarrow x_1 \leq 2 \\
 0 &\leq \frac{2}{3} - x_1 \Rightarrow x_1 \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{stärkste Beschränkung}
 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_5 \\
 x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
 x_4 &= 2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_5 \right) + \frac{8}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{7}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 - x_5 \\
 z &= \frac{20}{3} + 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_5 \right) + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_6 \\
 &= 8 + x_3 - 2x_5
 \end{aligned}$$

Ergebnis der 2. Iteration:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_5 \\
 x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
 x_4 &= \frac{4}{3} + \frac{7}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 - x_5 \\
 \hline
 z &= 8 + x_3 - 2x_5
 \end{aligned}$$

3. Iteration:

Eingangsvariable: x_3

Ausgangsvariable: x_2

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2 \\
 x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2 \right) + \frac{2}{3}x_6 - x_5 \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x_6 - x_5 - \frac{1}{2}x_2 \\
 x_4 &= \frac{4}{3} + \frac{7}{3} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2 \right) - \frac{1}{3}x_6 - x_5 \\
 &= \frac{43}{6} - \frac{3}{2}x_6 - x_5 - \frac{7}{2}x_2 \\
 z &= 8 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2 \right) - 2x_5 \\
 &= \frac{21}{2} - 4x_6 - 2x_5 - 12x_2
 \end{aligned}$$

Ergebnis der 3. Iteration:

$$\begin{array}{rcl}
 x_3 & = & \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2 \\
 x_1 & = & \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x_6 - x_5 - \frac{1}{2}x_2 \\
 x_4 & = & \frac{43}{6} - \frac{3}{2}x_6 - x_5 - \frac{7}{2}x_2 \\
 \hline
 z & = & \frac{21}{2} - 4x_6 - 2x_5 - 12x_2
 \end{array}$$

Dieses Tableau liefert die optimale Lösung mit $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{5}{2}$ und $z = \frac{21}{2}$.

b) Starttableau:

$$\begin{array}{rcl}
 x_4 & = & 4 - 3x_1 - 3x_2 + x_3 \\
 x_5 & = & 6 - 5x_1 - 3x_2 - x_3 \\
 x_6 & = & 2 + x_1 - 3x_2 - x_3 \\
 x_7 & = & 2 - 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\
 \hline
 z & = & 9x_1 - 5x_2 - 4x_3
 \end{array}$$

1. Iteration:

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: x_7

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7 \\
 x_4 &= 4 - 3\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7\right) - 3x_2 + x_3 \\
 &= 2 - 7x_2 + x_7 \\
 x_5 &= 6 - 5\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7\right) - 3x_2 - x_3 \\
 &= \frac{8}{3} - \frac{29}{3}x_2 - \frac{8}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_7 \\
 x_6 &= 2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7\right) - 3x_2 - x_3 \\
 &= \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7 \\
 z &= 9\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7\right) - 5x_2 - 4x_3 \\
 &= 6 + 7x_2 - x_3 - 3x_7
 \end{aligned}$$

Ergebnis der 1. Iteration:

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7$$

$$x_4 = 2 - 7x_2 + x_7$$

$$x_5 = \frac{8}{3} - \frac{29}{3}x_2 - \frac{8}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_7$$

$$x_6 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7$$

$$z = 6 + 7x_2 - x_3 - 3x_7$$

2. Iteration:

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_5

Es folgt:

$$x_2 = \frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5$$

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \left(\frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5 \right) + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7$$

$$= \frac{30}{29} - \frac{1}{29}x_3 - \frac{3}{29}x_7 - \frac{4}{29}x_5$$

$$x_4 = 2 - 7 \left(\frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5 \right) + x_7$$

$$= \frac{2}{29} + \frac{56}{29}x_3 - \frac{6}{29}x_7 + \frac{21}{29}x_5$$

$$x_6 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \left(\frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5 \right) - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7$$

$$= \frac{64}{29} - \frac{6}{29}x_3 - \frac{18}{29}x_7 + \frac{5}{29}x_5$$

$$z = 6 + 7 \left(\frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5 \right) - x_3 - 3x_7$$

$$= \frac{230}{29} - \frac{85}{29}x_3 - \frac{52}{29}x_7 - \frac{21}{29}x_5$$

Ergebnis der 2. iteration:

$$\begin{array}{rcl}
 x_2 & = & \frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5 \\
 x_1 & = & \frac{30}{29} - \frac{1}{29}x_3 - \frac{3}{29}x_7 - \frac{4}{29}x_5 \\
 x_4 & = & \frac{2}{29} + \frac{56}{29}x_3 - \frac{6}{29}x_7 + \frac{21}{29}x_5 \\
 x_6 & = & \frac{64}{29} - \frac{6}{29}x_3 - \frac{18}{29}x_7 + \frac{5}{29}x_5 \\
 \hline
 z & = & \frac{230}{29} - \frac{85}{29}x_3 - \frac{52}{29}x_7 - \frac{21}{29}x_5
 \end{array}$$

Dieses Tableau liefert die optimale Lösung mit $x_1 = \frac{30}{29}$, $x_2 = \frac{8}{29}$, $x_3 = 0$ und $z = \frac{230}{29}$.

2. Starttableau:

$$\begin{array}{rcl}
 x_5 & = & 4 - x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \\
 x_6 & = & 1 - x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 \hline
 z & = & 4x_1 - 13x_2 - 9x_3 + x_4
 \end{array}$$

1. Iteration:

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: x_6

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6 \\
 x_5 &= 4 - (1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6) - 3x_2 - x_3 - x_4 \\
 &= 3 - 10x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_6 \\
 z &= 4(1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6) - 13x_2 - 9x_3 + x_4 \\
 &= 4 + 15x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_6
 \end{aligned}$$

Ergebnis der 1. Iteration:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & 1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6 \\
 x_5 & = & 3 - 10x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_6 \\
 \hline
 z & = & 4 + 15x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_6
 \end{array}$$

2. Iteration:

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_5

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{3}{10} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_6 - \frac{1}{10}x_5 \\
 x_1 &= 1 + 7 \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_6 - \frac{1}{10}x_5 \right) + 3x_3 + x_4 - x_6 \\
 &= \frac{31}{10} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_6 - \frac{7}{10}x_5 \\
 z &= 4 + 15 \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_6 - \frac{1}{10}x_5 \right) + 3x_3 + 5x_4 - 4x_6 \\
 &= \frac{17}{2} - 3x_3 + 2x_4 - \frac{5}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_5
 \end{aligned}$$

Ergebnis der 2. Iteration:

$$\begin{array}{rcl}
 x_2 &= & \frac{3}{10} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_6 - \frac{1}{10}x_5 \\
 x_1 &= & \frac{31}{10} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_6 - \frac{7}{10}x_5 \\
 \hline
 z &= & \frac{17}{2} - 3x_3 + 2x_4 - \frac{5}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_5
 \end{array}$$

3. Iteration:

Eingangsvariable: x_4

Ausgangsvariable: x_2

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= \frac{3}{2} - 2x_3 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_5 - 5x_2 \\
 x_1 &= \frac{31}{10} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} - 2x_3 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_5 - 5x_2 \right) - \frac{3}{10}x_6 - \frac{7}{10}x_5 \\
 &= \frac{5}{2} + x_3 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_5 - 2x_2 \\
 z &= \frac{17}{2} - 3x_3 + 2 \left(\frac{3}{2} - 2x_3 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_5 - 5x_2 \right) - \frac{5}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_5 \\
 &= \frac{23}{2} - 7x_3 - \frac{3}{2}x_6 - \frac{5}{2}x_5 - 10x_2
 \end{aligned}$$

Ergebnis der 3. Iteration:

$$\begin{array}{rcl}
 x_4 &= & \frac{3}{2} - 2x_3 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_5 - 5x_2 \\
 x_1 &= & \frac{5}{2} + x_3 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_5 - 2x_2 \\
 \hline
 z &= & \frac{23}{2} - 7x_3 - \frac{3}{2}x_6 - \frac{5}{2}x_5 - 10x_2
 \end{array}$$

Dieses Tableau ist die optimale Lösung mit $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{3}{2}$ und $z = \frac{23}{2}$.