Optimierung 02 27.10.2014

Carolin Konietzny, 6523939, Gruppe 3
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 7
Julian Tobergte, 6414935, Gruppe 5

27. Oktober 2014

1. a) Starttableau:

$$\begin{aligned} x_4 &= 7 - x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_5 &= 4 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_6 &= 5 - 3x_2 - 2x_3 \\ \hline z &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

1. Iteration:
Eingangsvariable: x_2, da es den größten Koeffizienten in z hat
Ausgangsvariable: x_6, da:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_3 = 0 \\ &0 \leq x_4 = 7 - 3x_2 \Rightarrow x_2 \geq \frac{7}{3} \\ &0 \leq x_5 = 4 - 2x_2 \Rightarrow x_2 \leq 2 \\ &0 \leq x_6 = 5 - 3x_2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \text{stärkste Beschränkung} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
x_4 &= 7 - x_1 - 3\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6\right) - 2x_3 \\
&= 2 - x_1 + \frac{8}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \\
x_5 &= 4 - x_1 - 2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6\right) - x_3 \\
&= \frac{2}{3} - x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 \\
z &= 2x_1 + 4\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6\right) + 3x_3 \\
&= \frac{20}{3} + 2x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_6
\end{aligned}$$

Ergebnis der 1. Iteration:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{5}{3} && - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
x_4 &= 2 - x_1 && + \frac{8}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \\
x_5 &= \frac{2}{3} - x_1 && + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 \\
\hline
z &= \frac{20}{3} + 2x_1 && + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_6
\end{aligned}$$

2. Iteration:
Eingangsvariable: x_1
Ausgangsvariable: x_5, da:

$$\begin{aligned}
&x_3 = x_6 = 0 \\
&0 \leq 2 - x_1 \Rightarrow x_1 \leq 2 \\
&0 \leq \frac{2}{3} - x_1 \Rightarrow x_1 \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{stärkste Beschränkung}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_5 \\
x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
x_4 &= 2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_5\right) + \frac{8}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{7}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 - x_5 \\
z &= \frac{20}{3} + 2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_5\right) + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_6 \\
&= 8 + x_3 - 2x_5
\end{aligned}$$

Ergebnis der 2. Iteration:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_5 \\
x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
x_4 &= \frac{4}{3} + \frac{7}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 - x_5 \\
\hline
z &= 8 + x_3 - 2x_5
\end{aligned}$$

3. Iteration:
Eingangsvariable: x_3
Ausgangsvariable: x_2
Es folgt:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2 \\
x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2\right) + \frac{2}{3}x_6 - x_5 \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x_6 - x_5 - \frac{1}{2}x_2 \\
x_4 &= \frac{4}{3} + \frac{7}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2\right) - \frac{1}{3}x_6 - x_5 \\
&= \frac{43}{6} - \frac{3}{2}x_6 - x_5 - \frac{7}{2}x_2 \\
z &= 8 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2\right) - 2x_5 \\
&= \frac{21}{2} - 4x_6 - 2x_5 - 12x_2
\end{aligned}$$

Ergebnis der 3. Iteration:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_2 \\ x_1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x_6 - x_5 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_4 &= \frac{43}{6} - \frac{3}{2}x_6 - x_5 - \frac{7}{2}x_2 \\ \hline z &= \frac{21}{2} - 4x_6 - 2x_5 - 12x_2 \end{aligned}$$

Dieses Tableau liefert die optimale Lösung mit $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{5}{2}$ und $z = \frac{21}{2}$.

b) Starttableau:

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - 3x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_5 &= 6 - 5x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_6 &= 2 + x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_7 &= 2 - 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \hline z &= 9x_1 - 5x_2 - 4x_3 \end{aligned}$$

1. Iteration:
Eingangsvariable: x_1
Ausgangsvariable: x_7
Es folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7 \\ x_4 &= 4 - 3\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7\right) - 3x_2 + x_3 \\ &= 2 - 7x_2 + x_7 \\ x_5 &= 6 - 5\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7\right) - 3x_2 - x_3 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{29}{3}x_2 - \frac{8}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_7 \\ x_6 &= 2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7\right) - 3x_2 - x_3 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7 \\ z &= 9\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7\right) - 5x_2 - 4x_3 \\ &= 6 + 7x_2 - x_3 - 3x_7 \end{aligned}$$

Ergebnis der 1. Iteration:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7 \\
x_4 &= 2 - 7x_2 + x_7 \\
x_5 &= \frac{8}{3} - \frac{29}{3}x_2 - \frac{8}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_7 \\
x_6 &= \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7 \\
\hline
z &= 6 + 7x_2 - x_3 - 3x_7
\end{aligned}$$

2. Iteration:
Eingangsvariable: x_2
Ausgangsvariable: x_5
Es folgt:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5 \\
x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(\frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5\right) + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7 \\
&= \frac{30}{29} - \frac{1}{29}x_3 - \frac{3}{29}x_7 - \frac{4}{29}x_5 \\
x_4 &= 2 - 7\left(\frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5\right) + x_7 \\
&= \frac{2}{29} + \frac{56}{29}x_3 - \frac{6}{29}x_7 + \frac{21}{29}x_5 \\
x_6 &= \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5\right) - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_7 \\
&= \frac{64}{29} - \frac{6}{29}x_3 - \frac{18}{29}x_7 + \frac{5}{29}x_5 \\
z &= 6 + 7\left(\frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5\right) - x_3 - 3x_7 \\
&= \frac{230}{29} - \frac{85}{29}x_3 - \frac{52}{29}x_7 - \frac{21}{29}x_5
\end{aligned}$$

Ergebnis der 2. iteration:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_3 + \frac{5}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_5 \\
x_1 &= \frac{30}{29} - \frac{1}{29}x_3 - \frac{3}{29}x_7 - \frac{4}{29}x_5 \\
x_4 &= \frac{2}{29} + \frac{56}{29}x_3 - \frac{6}{29}x_7 + \frac{21}{29}x_5 \\
x_6 &= \frac{64}{29} - \frac{6}{29}x_3 - \frac{18}{29}x_7 + \frac{5}{29}x_5 \\
\hline
z &= \frac{230}{29} - \frac{85}{29}x_3 - \frac{52}{29}x_7 - \frac{21}{29}x_5
\end{aligned}$$

Dieses Tableau liefert die optimale Lösung mit $x_1 = \frac{30}{29}$, $x_2 = \frac{8}{29}$, $x_3 = 0$ und $z = \frac{230}{29}$.

2. Starttableau:

$$\begin{aligned}
x_5 &= 4 - x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \\
x_6 &= 1 - x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\hline
z &= 4x_1 - 13x_2 - 9x_3 + x_4
\end{aligned}$$

1. Iteration:
Eingangsvariable: x_1
Ausgangsvariable: x_6
Es folgt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6 \\
x_5 &= 4 - (1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6) - 3x_2 - x_3 - x_4 \\
&= 3 - 10x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_6 \\
z &= 4\,(1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6) - 13x_2 - 9x_3 + x_4 \\
&= 4 + 15x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_6
\end{aligned}$$

Ergebnis der 1. Iteration:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6 \\
x_5 &= 3 - 10x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_6 \\
\hline
z &= 4 + 15x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_6
\end{aligned}$$

2. Iteration:
Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_5
Es folgt:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{3}{10} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_6 - \frac{1}{10}x_5 \\
x_1 &= 1 + 7\left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_6 - \frac{1}{10}x_5\right) + 3x_3 + x_4 - x_6 \\
&= \frac{31}{10} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_6 - \frac{7}{10}x_5 \\
z &= 4 + 15\left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_6 - \frac{1}{10}x_5\right) + 3x_3 + 5x_4 - 4x_6 \\
&= \frac{85}{10} + 3x_3 + 2x_4 - \frac{5}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_5
\end{aligned}$$

Ergebnis der 2. Iteration:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{3}{10} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_6 - \frac{1}{10}x_5 \\
x_1 &= \frac{31}{10} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_6 - \frac{7}{10}x_5 \\
\hline
z &= \frac{85}{10} + 3x_3 + 2x_4 - \frac{5}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_5
\end{aligned}$$

3. Iteration:
Eingangsvariable: x_3
Ausgangsvariable: x_2
Es folgt:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{5}{2}x_2 \\
x_1 &= \frac{31}{10} + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{5}{2}x_2\right) - \frac{2}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_6 - \frac{7}{10}x_5 \\
&= \frac{13}{4} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_6 - \frac{3}{4}x_5 - \frac{1}{2}x_2 \\
z &= \frac{85}{10} + 3\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{5}{2}x_2\right) + 2x_4 - \frac{5}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_5 \\
&= \frac{43}{4}
\end{aligned}$$