

Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2014/15

Blatt 1

A: Präsenzaufgaben am 13. Oktober 2014

1. Bei welchen der folgenden LP-Probleme handelt es sich nicht um ein Problem in Standardform?

(i)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ &\quad 6x_1 + x_2 - 6x_3 = 5 \\ &\quad x_1 + 8x_2 + 8x_3 \leq 21 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 7 \\ &\quad 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 8x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ &\quad 9x_1 + 5x_2 \leq -2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Für diejenigen LP-Probleme aus Aufgabe 1, die nicht in Standardform vorliegen: Überführen Sie diese Probleme in Standardform.
3. Handelt es sich bei den folgenden LP-Problemen um unlösbare Probleme? Ist eines der Probleme unbeschränkt?

(i)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ &\quad -4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 \leq -10 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq -1 \\ &\quad -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \leq -3 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Lösen Sie das folgende LP-Problem mithilfe der grafischen Methode:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximiere } x_1 + x_2 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &\quad 2x_1 - 5x_2 \leq 2 \\
 &\quad -x_1 + 4x_2 \leq 8 \\
 &\quad x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 &\quad x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

B: Hausaufgaben zum 20. Oktober 2014

1. a) Überführen Sie die folgenden Probleme in Standardform:

(i)

$$\begin{aligned}
 &\text{minimiere } x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &\quad 7x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\
 &\quad -5x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\
 &\quad 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 3 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 &\text{maximiere } x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &\quad 7x_1 - x_2 - 4x_3 \geq 2 \\
 &\quad 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 3 \\
 &\quad x_2 - 2x_4 = 7 \\
 &\quad x_4 \leq 5 \\
 &\quad x_1, x_2, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das folgende Problem mit der grafischen Methode:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximiere } 5x_1 + 3x_2 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &\quad 5x_1 - 2x_2 \leq 10 \\
 &\quad -2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
 &\quad x_1 + x_2 \leq 7 \\
 &\quad x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

2. a) Die folgende Aufgabe stammt aus einem bekannten Lehrbuch mit dem Titel „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“.

Ein Kantinenleiter hat folgendes Problem: Ein Erwachsener soll täglich mindestens 75g Protein, 90g Fett und 300g Kohlenhydrate aufnehmen. Nehmen Sie an, dass diese Forderungen erfüllt werden sollen und die folgenden Informationen beachtet werden sollen. Welche Waren sollten gekauft werden und wie viel sollte von jedem Gut gekauft werden, wenn die billigste Möglichkeit realisiert werden soll? Die Anzahl Gramm an Proteinen, Fett und Kohlenhydraten in 100g einer Reihe von Nahrungsmitteln ist in folgender Tabelle gegeben:

	Protein	Fett	Kohlenhydrate
Weißbrot	8	1	54
Käse	25	35	0
Hähnchen	30	8	0
Fisch	22	1	0
Backpflaumen	3	0	42
Nüsse	8	33	4
Schwarzbrot	6	13	63
Margarine	0	98	0

Außerdem soll eine Höchstgrenze von 80g Schwarzbrot pro Tag und pro Person berücksichtigt werden. Die Preise in Öre pro 100g werden für die verschiedenen Lebensmittel wie folgt angenommen:

W	K	H	F	B	N	S	M
67	120	100	90	97	124	98	62

Formulieren Sie die Aufgabe, vor der der Kantinenleiter steht, als LP-Problem.

- b) [Die Aufgabe stammt aus S. Dasgupta, Ch. Papadimitriou, U. Vazirani: Algorithms. McGraw Hill (2008).]

Ein *Salat* ist eine beliebige Kombination der folgenden Zutaten:

- (1) Tomaten,
- (2) Kopfsalat,
- (3) Spinat,
- (4) Möhren,
- (5) Öl.

Jeder Salat muss enthalten:

- (A) mindestens 15 Gramm Proteine,
- (B) mindestens 2 und höchstens 6 Gramm Fett,
- (C) mindestens 4 Gramm Kohlenhydrate,
- (D) höchstens 100 Milligramm Kochsalz.

Außerdem soll gelten:

- (E) Der Gewichtsanteil an grünem Blattgemüse darf nicht höher als 50% sein.

Es liege die folgende Nährwerttabelle zugrunde (Angaben pro 100g):

	Energie (kcal)	Proteine (g)	Fett (g)	Kohlenhydrate (g)	Kochsalz (mg)
Tomaten	21	0.85	0.33	4.64	9.00
Kopfsalat	16	1.62	0.20	2.37	8.00
Spinat	371	12.78	1.58	74.69	7.00
Möhren	346	8.39	1.39	80.70	508.20
Öl	884	0.00	100.0	0.00	0.00

Die Aufgabe ist es, einen Salat zusammenzustellen, der die genannten Bedingungen erfüllt und so wenig Kalorien wie möglich enthält. Formulieren Sie dieses Problem als LP-Problem.