

Optimierung 02 27.10.2014

Carolin Konietzny, 6523939, Gruppe 3
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 7
Julian Tobergte, 6414935, Gruppe 5

3. November 2014

1. a) Starttableau:

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & \frac{1}{2} - x_1 + 3x_2 \\ x_4 & = & 3 - x_1 + x_2 \\ x_5 & = & 1 + 2x_1 - \frac{1}{3}x_2 \\ \hline z & = & x_1 + 4x_2 \end{array}$$

1. Iteration:

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_5 , was leicht ersichtlich ist, da nur in der x_5 -Gleichung der x_2 -Faktor negativ ist.

Es folgt:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 + 6x_1 - 3x_5 \\ x_3 &= \frac{1}{2} - x_1 + 3(3 + 6x_1 - 3x_5) \\ &= \frac{19}{2} + 17x_1 - 9x_5 \\ x_4 &= 3 - x_1(3 + 6x_1 - 3x_5) \\ &= 6 + 5x_1 - 3x_5 \\ z &= x_1 + 4(3 + 6x_1 - 3x_5) \\ &= 12 + 25x_1 - 12x_5 \end{aligned}$$

Ergebnis der 1. Iteration:

$$x_2 = 3 + 6x_1 - 3x_5$$

$$x_3 = \frac{19}{2} + 17x_1 - 9x_5$$

$$x_4 = 6 + 5x_1 - 3x_5$$

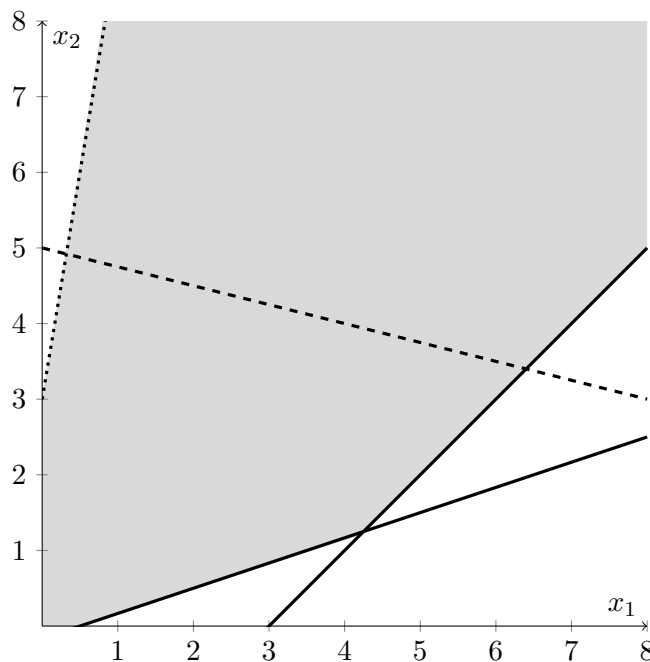
$$z = 12 + 25x_1 - 12x_5$$

Die nächste Eingangsvariable wäre x_1 , doch x_1 ist in keiner Schlupfvariablengleichung beschränkt. Also ist das Ergebnis "unbeschränkt".

Sei $x_1 = t$, $x_2 = 3+6t$, $x_5 = 0$. So ist die entsprechende Halbgerade, in Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) Folgender Graph ergibt sich:



Die gepunktete Halbgerade ist diejenige, die wir in Unteraufgabe a) ermittelt haben. Würde man das graphische Verfahren auf das LP-Problem aus Aufgabe a) anwenden, würde man die Lösungsgerade (hier gestrichelt) nicht einzeichnen können, da der Lösungsbereich unendlich groß ist.

- c) Zunächst machen wir uns klar, dass aus Unteraufgabe a) hervorgeht, dass: $z = 12 + 25t$. Zulässige Lösung für $z = 50$:

$$\begin{aligned} 50 &= 12 + 25t \\ 38 &= 25t \\ \frac{38}{25} &= t \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{38}{25} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{303}{25} \end{aligned}$$

Zulässige Lösung für $z = 200$:

$$\begin{aligned} 200 &= 12 + 25t \\ t &= \frac{188}{25} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{188}{25} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{1203}{25} \end{aligned}$$

Zulässige Lösung für $z = 1000$:

$$\begin{aligned} 1000 &= 12 + 25t \\ t &= \frac{988}{25} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{988}{25} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{6003}{25} \end{aligned}$$

2. a) Wir erstellen unser Hilfsproblem:

$$\begin{aligned} &\text{maximiere} && -x_0 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &-x_1 + x_2 - x_0 \leq 9 \\ &8x_1 - 2x_2 - x_0 \leq 3 \\ &-x_1 - x_2 - x_0 \leq -2 \\ &x_0, x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Tableau:

$$\begin{array}{rcl}
 x_3 & = & 9 + x_1 - x_2 + x_0 \\
 x_4 & = & 3 - 8x_1 + 2x_2 + x_0 \\
 x_5 & = & -2 + x_1 + x_2 + x_0 \\
 \hline
 w & = & - x_0
 \end{array}$$

Das korrigierte Tableau, mit Eingangsvariable x_0 und Ausgangsvariable x_5 ist:

$$\begin{array}{rcl}
 x_0 & = & 2 - x_1 - x_2 + x_5 \\
 x_3 & = & 11 - 2x_2 + x_5 \\
 x_4 & = & 5 - 9x_1 + x_2 + x_5 \\
 \hline
 w & = & -2 + x_1 + x_2 - x_5
 \end{array}$$

1. Iteration mit Eingangsvariable x_1 und Ausgangsvariable x_4 :

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \frac{5}{9} + \frac{1}{9}x_2 + \frac{1}{9}x_5 - \frac{1}{9}x_4 \\
 x_0 & = & \frac{13}{9} - \frac{10}{9}x_2 + \frac{8}{9}x_5 + \frac{1}{9}x_4 \\
 x_3 & = & 11 - 2x_2 + x_5 \\
 \hline
 w & = & -\frac{13}{9} + \frac{10}{9}x_2 - \frac{8}{9}x_5 - \frac{1}{9}x_4
 \end{array}$$

2. Iteration mit Eingangsvariable x_2 und Ausgangsvariable x_0 :

$$\begin{array}{rcl}
 x_2 & = & \frac{13}{10} + \frac{8}{10}x_5 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{9}{10}x_0 \\
 x_1 & = & \frac{7}{10} + \frac{1}{5}x_5 - \frac{1}{10}x_4 + x_0 \\
 x_3 & = & \frac{42}{5} - \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{9}{5}x_0 \\
 \hline
 w & = & - x_0
 \end{array}$$

Wir erhalten die optimale Lösung $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{7}{10}$, $x_2 = \frac{13}{10}$, $x_3 = \frac{42}{5}$, $x_4 = 0$, $w = 0$. Dem entsprechend ist $x_1 = \frac{7}{10}$, $x_2 = \frac{13}{10}$ eine zulässige Lösung für das ursprüngliche Problem. Wir erhalten außerdem das folgende Starttableau für das ursprüngliche Problem:

$$\begin{array}{rcl}
 x_2 & = & \frac{13}{10} + \frac{8}{10}x_5 + \frac{1}{10}x_4 \\
 x_1 & = & \frac{7}{10} + \frac{1}{5}x_5 - \frac{1}{10}x_4 \\
 x_3 & = & \frac{42}{5} - \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_4 \\
 \hline
 z & = & \frac{89}{5} + \frac{49}{5}x_5 + \frac{3}{5}x_4
 \end{array}$$

b) Wir erstellen unser Hilfsproblem:

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximiere} & -x_0 \\
 \text{unter den Nebenbedingungen} & \\
 & x_1 - x_2 - x_0 \leq -2 \\
 & -2x_1 - 2x_2 - x_0 \leq -9 \\
 & 2x_1 + x_2 - x_0 \leq 2 \\
 & x_0, x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Wir erhalten das folgende Tableau:

$$\begin{array}{rcl}
 x_3 & = & -2 - x_1 + x_2 + x_0 \\
 x_4 & = & -9 + 2x_1 + 2x_2 + x_0 \\
 x_5 & = & 2 - 2x_1 - x_2 + x_0 \\
 \hline
 w & = & -x_0
 \end{array}$$

Das korrigierte Tableau, mit Eingangsvariable x_0 und Ausgangsvariable x_4 ist:

$$\begin{array}{rcl}
 x_0 & = & 9 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
 x_3 & = & 7 - 3x_1 - x_2 + x_4 \\
 x_5 & = & 11 - 4x_1 - 3x_2 + x_4 \\
 \hline
 w & = & -9 + 2x_1 + 2x_2 - x_4
 \end{array}$$

1. Iteration mit Eingangsvariable x_1 und Ausgangsvariable x_3 :

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 \\
 x_0 & = & \frac{13}{3} - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_3 \\
 x_5 & = & \frac{5}{3} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_3
 \end{array}$$

$$w = -\frac{13}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_3$$

2. Iteration mit Eingangsvariable x_2 und Ausgangsvariable x_5 :

$$\begin{array}{rcl}
 x_2 & = & 1 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5 \\
 x_1 & = & 2 + \frac{2}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5 \\
 x_0 & = & 3 + \frac{3}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_5
 \end{array}$$

$$w = -3 - \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_5$$

3. Iteration mit Eingangsvariable x_3 und Ausgangsvariable x_1 :

$$\begin{array}{rcl}
 x_3 & = & \frac{10}{3} + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{9}x_5 - \frac{5}{3}x_1 \\
 x_2 & = & \frac{11}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{7}{45}x_5 - \frac{4}{3}x_1 \\
 x_0 & = & \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{34}{45}x_5 + \frac{2}{3}x_1
 \end{array}$$

$$w = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{34}{45}x_5 - \frac{2}{3}x_1$$

Aus diesem Tableau ist die optimale Lösung des Hilfsproblems ablesbar. Aber, da $w < 0$, besitzt das ursprüngliche Problem keine zulässige Lösung.