Optimierung für Studierende der Informatik
Thomas Andreae

Wintersemester 2014/15
Blatt 6

A: Präsenzaufgaben am 17. November 2014

1. Wir greifen das 2. Beispiel („Second Example") aus Kapitel 2 auf (Skript, Seite 19) und nennen es (P).

(i) Stellen Sie das zugehörige duale Problem (D) auf.

(ii) Eine optimale Lösung (x_1^*, x_2^*, x_3^*) für (P) haben wir bereits mit dem Simplexverfahren bestimmt. Lesen Sie zusätzlich eine optimale Lösung $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ für (D) am letzten Tableau ab.

(iii) Überprüfen Sie, ob die von Ihnen abgelesene Lösung $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ tatsächlich eine *zulässige* Lösung von (D) ist.

(iv) Überprüfen Sie mithilfe des Dualitätssatzes, ob $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ tatsächlich eine *optimale* Lösung von (D) ist.

(v) Bestätigen Sie noch einmal, dass es sich bei (x_1^*, x_2^*, x_3^*) und $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ um optimale Lösungen von (P) bzw. (D) handelt, indem Sie zeigen, dass die komplementären Schlupfbedingungen erfüllt sind.

B: Hausaufgaben zum 24. November 2014

1. a) Wir greifen das Beispiel aus Hausaufgabe 1b) von Blatt 2 auf und nennen es (P).

(i) Stellen Sie das zugehörige duale Problem (D) auf.

(ii) Eine optimale Lösung (x_1^*, x_2^*, x_3^*) für (P) haben wir bereits mit dem Simplexverfahren bestimmt. Lesen Sie zusätzlich eine optimale Lösung $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ für (D) am letzten Tableau ab.

(iii) Überprüfen Sie, ob die von Ihnen abgelesene Lösung $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ tatsächlich eine *zulässige* Lösung von (D) ist.

(iv) Überprüfen Sie mithilfe des Dualitätssatzes, ob $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ tatsächlich eine *optimale* Lösung von (D) ist.

(v) Bestätigen Sie noch einmal, dass es sich bei (x_1^*, x_2^*, x_3^*) und $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ um optimale Lösungen von (P) bzw. (D) handelt, indem Sie zeigen, dass die komplementären Schlupfbedingungen erfüllt sind.

b) Wie a) für Hausaufgabe 2 von Blatt 2.

Hintergrund zur anschließenden Aufgabe 2: Eine bekannte **Faustregel** besagt (vgl. auch Skript, Abschnitt 5.1): Wendet man das Simplexverfahren auf ein LP-Problem in Standardform an, so benötigt man *häufig nicht mehr als m bis $\frac{3}{2}m$ Iterationen*; m bezeichnet dabei – wie üblich – die Anzahl der Nebenbedingungen ohne die Nichtnegativitätsbedingungen. Ist (wie in der folgenden Aufgabe 2) m recht groß, während die Anzahl n der Variablen relativ klein ist, so kann es demnach von Vorteil sein, (D) anstelle von (P) zu lösen.

2. Wir betrachten das folgende LP-Problem, dass wir (P) nennen:

$$
\begin{array}{l}
\text{maximiere} \quad -x_1 - 2x_2 \\
\text{unter den Nebenbedingungen}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
-3x_1 + x_2 &\le -1 \\
x_1 - x_2 &\le 1 \\
-2x_1 + 7x_2 &\le 6 \\
9x_1 - 4x_2 &\le 6 \\
-5x_1 + 2x_2 &\le -3 \\
7x_1 - 3x_2 &\le 6 \\
x_1, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Lösen Sie (P), indem Sie das zu (P) duale Problem (D) aufstellen und lösen.

Anleitung: Stellen Sie zunächst (D) auf. Verwandeln Sie sodann (D) in Standardform und bezeichnen Sie die erhaltene Standardform mit $(\widetilde{D})$. Lösen Sie $(\widetilde{D})$ mit dem Simplexverfahren und lesen Sie die Lösung von (P) am letzten Tableau ab.