Optimierung 09

Carolin Konietzny, 6523939, Gruppe 3
Tronje Krabbe, 6435002, Gruppe 7
Julian Tobergte, 6414935, Gruppe 5

15. Dezember 2014

1. a) Die Eingangsdaten sind gegeben durch

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } c^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Das Verfahren startet mit

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Iteration

1. Schritt:
$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, da B in dieser Iteration noch die Einheitsmatrix, und c_B^T der Nullvektor ist.

2. Schritt:
Für alle Spalten von A_N gilt $y^T a = 0$, und die entsprechenden Komponenten von c^T lauten 2 und 1, weshalb alle Spalten von A_N als Eingangsspalte a infrage kommen; wir wählen $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Unsere Eingangsvariable ist demnach x_1.

3. Schritt:
Wir lösen das Gleichungssystem $Bd = a$ und erhalten, da B die Einheitsmatrix ist, $d = a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Schritt:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem und erhalten $t = 5$ als größtes t. Daraus folgt:

$$x_B^* - td = \begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix}$$

5. Schritt:
Update:

$$x_B^* = \begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\\5\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Iteration
1. Schritt:

$$y^T \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. Schritt:
Nun lässt sich keine Spalte in A_N mehr finden, für die die Bedingung gilt. Die aktuelle Lösung ist also optimal und lautet:
$x_1 = 5$, $x_2 = 1$ und $z = 11$.

b) Die Eingangsdaten sind gegeben durch

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix}-2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array},\ b = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} \text{ und } c^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix}-4 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Das Verfahren startet mit

$$x_B^* = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}.$$

1. Iteration:

1. Schritt:

$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, da B in dieser Iteration noch die Einheitsmatrix, und c_B^T der Nullvektor ist.

2. Schritt:

Wir können aus der x_2 und der x_3 Zeile frei wählen, und nehmen $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Eingangsvariable ist also x_2.

3. Schritt:

$d = a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Schritt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das Gleichungssystem und erhalten $t = \frac{5}{2}$. Also:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da $x_B^* = \begin{pmatrix} x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix}$, ist x_5^* unsere Ausgangsvariable.

5. Schritt:

Update:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_4 & x_2 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Iteration:

1. Schritt:

$$y^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>*2. Schritt:*</u>

$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt, dass unsere Eingangsvariable x_3 ist.

<u>*3. Schritt:*</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot d = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>*4. Schritt:*</u>

$$\begin{pmatrix} 4.5 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Es folgt:

$$\begin{pmatrix} 4.5 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Da $x_B^* = \begin{pmatrix} x_4^* \\ x_2^* \\ x_6^* \end{pmatrix}$, ist die Ausgangsvariable x_4.

<u>*5. Schritt:*</u>
Update:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_2^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_2 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>***3. Iteration:***</u>
<u>*1. Schritt:*</u>

$$y^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^T = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ 0.5 \\ -\frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

Hier terminiert der Algorithmus, mit der optimalen Lösung: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 1.5$ und $z = \frac{23}{2}$.

2.