–L.27–

Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2014/15
Blatt 4

B: Hausaufgaben zum 10. November 2014

1. a) Wir veranstalten einen Wettbewerb zwischen zwei bekannten Pivotierungsregeln:
   - Regel vom größten Koeffizienten;
   - Regel vom größten Zuwachs.

   Zu diesem Zweck betrachten wir das folgende LP-Problem:

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad x_1 + x_2 \le 10 \\ &\qquad x_1 \le 8 \\ &\qquad x_2 \le 3 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

   (i) Lösen Sie dieses Problem mit dem Simplexverfahren auf zwei Arten: zunächst mit der Regel vom größten Koeffizienten, danach mit der Regel vom größten Zuwachs. Vergleichen Sie die Anzahl der Iterationen. Welche Regel schneidet besser ab?

   (ii) Stellen Sie für das genannte LP-Problem den zulässigen Bereich durch eine Zeichnung dar und geben Sie allen Ecken dieses Bereichs einen Namen (etwa P, Q, R, ...). Geben Sie für beide Varianten an, in welcher Reihenfolge die Ecken durchlaufen wurden.

   b) Wiederholen Sie den Vergleich der beiden Pivotierungsregeln, diesmal anhand des folgenden LP-Problems:

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 3x_1 + x_2 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad 5x_1 + x_2 \le 10 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

   Bearbeiten Sie wieder die Punkte (i) und (ii).

a) (i) Lösung auf zwei Arten

Erstens: mit der Regel vom größten Koeffizienten

Starttableau

$x_3 = 10 - x_1 - x_2$

$x_4 = 8 - x_1$

$x_5 = 3 \quad - x_2$

$z = \quad 2x_1 + 3x_2$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_5

Es folgt

$x_2 = 3 - x_5$

$x_3 = 10 - x_1 - (3 - x_5) = 7 - x_1 + x_5$

$z = 2x_1 + 3(3 - x_5) = 9 + 2x_1 - 3x_5$

Neues Tableau

$x_2 = 3 \quad - x_5$

$x_3 = 7 - x_1 + x_5$

$x_4 = 8 - x_1$

$z = 9 + 2x_1 - 3x_5$

2. Iteration

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: x_3

Es folgt

$x_1 = 7 + x_5 - x_3$

$x_4 = 8 - (7 + x_5 - x_3) = 1 - x_5 + x_3$

$z = 9 + 2(7 + x_5 - x_3) - 3x_5 = 23 - x_5 - 2x_3$

Neues Tableau

$$\begin{array}{l} x_1 = 7 + x_5 - x_3 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ x_4 = 1 - x_5 + x_3 \\ \hline z = 23 - x_5 - 2x_3 \end{array}$$

Optimale Lösung: $x_1 = 7,\ x_2 = 3$ mit $z = 23$

Zweitens: mit der Regel vom größten Zuwachs

Starttableau: wie zuvor

1. Iteration: Wählt man x_1 als Eingangsvariable, so ergibt sich ein Zuwachs von 16, während sich bei der Wahl von x_2 nur ein Zuwachs von 9 ergibt.

Also:

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: x_4

Es folgt

$x_1 = 8 - x_4$

$x_3 = 10 - (8 - x_4) - x_2 = 2 - x_2 + x_4$

$z = 2(8 - x_4) + 3x_2 = 16 + 3x_2 - 2x_4$

<u>Neues Tableau</u>

$$\begin{array}{l} x_1 = 8 \qquad\quad - x_4 \\ x_3 = 2 - x_2 + x_4 \\ x_5 = 3 - x_2 \\ \hline z = 16 + 3x_2 - 2x_4 \end{array}$$

<u>2. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_3

Es folgt

$x_2 = 2 + x_4 - x_3$

$x_5 = 3 - (2 + x_4 - x_3) = 1 - x_4 + x_3$

$z = 16 + 3(2 + x_4 - x_3) - 2x_4 = 22 + x_4 - 3x_3$

<u>Neues Tableau</u>

$$\begin{array}{l} x_2 = 2 + x_4 - x_3 \\ x_1 = 8 - x_4 \\ x_5 = 1 - x_4 + x_3 \\ \hline z = 22 + x_4 - 3x_3 \end{array}$$

<u>3. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_4

Ausgangsvariable: x_5

Es folgt

$x_4 = 1 + x_3 - x_5$

$x_2 = 2 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 3 - x_5$

$x_1 = 8 - (1 + x_3 - x_5) = 7 - x_3 + x_5$

$z = 22 + (1 + x_3 - x_5) - 3x_3 = 23 - 2x_3 - x_5$

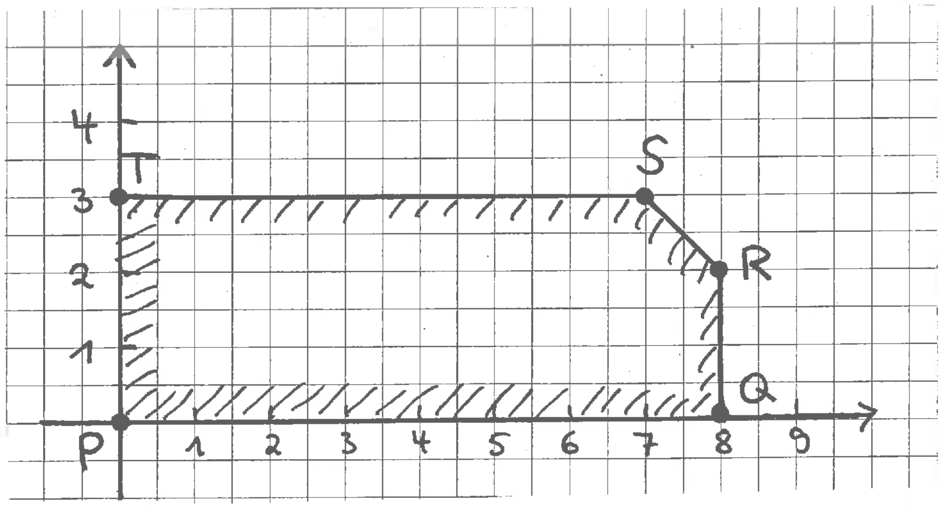
Neues Tableau

$$\begin{array}{l}
x_4 = 1 + x_3 - x_5 \\
x_2 = 3 \qquad\; - x_5 \\
x_1 = 7 - x_3 + x_5 \\
\hline
z = 23 - 2x_3 - x_5
\end{array}$$

Optimale Lösung: $x_1 = 7, x_2 = 3$ mit $z = 23$

Vergleich: Die Regel vom größten Koeffizienten benötigt 2 Iterationen – die Regel vom größten Zuwachs jedoch 3 Iterationen.

(ii)



Die optimale Lösung wird im Punkt $S = (7,3)$ angenommen. Mit der Regel vom größten Koeffizienten gelangt man von P über T zu S. Bei der Regel vom größten Zuwachs wird der Pfad $P \to Q \to R \to S$ gewählt.

b) (i) Lösung auf zwei Arten:

Erstens: mit der Regel vom größten Koeffizienten

Starttableau

$$\begin{array}{l} x_3 = 10 - 5x_1 - x_2 \\ \hline z = \qquad 3x_1 + x_2 \end{array}$$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_1
Ausgangsvariable: x_3
Es folgt

$$x_1 = 2 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3$$

$$z = 3\left(2 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3\right) + x_2 = 6 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3$$

Neues Tableau

$$\begin{array}{l} x_1 = 2 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 \\ \hline z = 6 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 \end{array}$$

2. Iteration

Eingangsvariable: x_2
Ausgangsvariable: x_1
Es folgt

$$x_2 = 10 - x_3 - 5x_1$$

$$z = 6 + \frac{2}{5}(10 - x_3 - 5x_1) - \frac{3}{5}x_3 = 10 - x_3 - 2x_1$$

Neues Tableau

$$\begin{array}{l} x_2 = 10 - x_3 - 5x_1 \\ \hline z = 10 - x_3 - 2x_1 \end{array}$$

Optimale Lösung: $x_1 = 0, x_2 = 10$ mit $z = 10$

Zweitens: mit der Regel vom größten Zuwachs

Starttableau: siehe oben

1. Iteration: Wählt man x_2 als Eingangsvariable, so ergibt sich ein Zuwachs der Zielfunktion um 10 (siehe unten), während der Zuwachs nur 6 beträgt, wenn x_1 als Eingangsvariable gewählt wird. Hier ist die Rechnung mit x_2 als Eingangsvariable:

Eingangsvariable: x_2
Ausgangsvariable: x_3
Es folgt

$$x_2 = 10 - 5x_1 - x_3$$

$$z = 3x_1 + (10 - 5x_1 - x_3) = 10 - 2x_1 - x_3$$

Neues Tableau

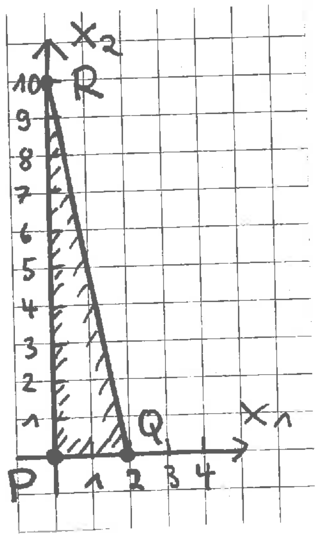
$$x_2 = 10 - 5x_1 - x_3$$

$$z = 10 - 2x_1 - x_3$$

Optimale Lösung: $x_1 = 0,\ x_2 = 10$ mit $z = 10$

Vergleich: Diesmal war die Regel vom größten Zuwachs die bessere.

(ii)



Die optimale Lösung ist $R = (0, 10)$. Bei der Regel vom größten Koeffizienten gelangt man von P über Q zu R; bei der Regel vom größten Zuwachs gelangt man direkt von P zu R.

2. Wir betrachten das folgende LP-Problem:

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad x_2 \le 2 \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 - 12x_3 \le 6 \\ &\qquad -x_1 + 2x_2 + 9x_3 \le 4 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Problem mit dem Simplexverfahren, wobei Folgendes zu beachten ist:

- Die Schlupfvariablen sollen wie üblich bezeichnet werden (z.B. $x_4 = 2 - x_2$).
- Die Wahl der Eingangsvariablen soll nach der Regel vom größten Koeffizienten erfolgen.
- Gibt es in einem Schritt die Möglichkeit, verschiedene Ausgangsvariablen zu wählen, so soll der Index der ausgewählten Variable so klein wie möglich sein.

Geben Sie am Ende jeder Iteration die erhaltene zulässige Basislösung an und geben Sie außerdem für jede Iteration an, ob es sich um einen *degenerierten Schritt* handelt.

<u>Starttableau</u>

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 - x_2 \\ x_5 &= 6 - 2x_1 - 3x_2 + 12x_3 \\ x_6 &= 4 + x_1 - 2x_2 - 9x_3 \\ \hline z &= 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 \end{aligned}$$

Startlösung („zulässige Basislösung am Anfang"):

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 6, x_6 = 4.$

<u>1. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_4

es folgt

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - x_4 \\ x_5 &= 6 - 2x_1 - 3(2 - x_4) + 12x_3 = -2x_1 + 3x_4 + 12x_3 \\ x_6 &= 4 + x_1 - 2(2 - x_4) - 9x_3 = x_1 + 2x_4 - 9x_3 \\ z &= 2x_1 + 8(2 - x_4) - 3x_3 = 16 + 2x_1 - 8x_4 - 3x_3 \end{aligned}$$

Neues Tableau

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 2 \qquad\qquad - x_4 \\
x_5 &= \quad -2x_1 + 3x_4 + 12x_3 \\
x_6 &= \qquad\; x_1 + 2x_4 - 9x_3 \\
\hline
z &= 16 \; + 2x_1 - 8x_4 - 3x_3
\end{aligned}
$$

Zulässige Basislösung nach der 1. Iteration:

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$ mit $z = 16$.

Bei der 1. Iteration hat es sich nicht um einen degenerierten Schritt gehandelt, da sich die zulässige Basislösung geändert hat.

2. Iteration

Eingangsvariable: x_1
Ausgangsvariable: x_5
Es folgt

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{3}{2}x_4 + 6x_3 - \tfrac{1}{2}x_5 \\
x_6 &= \tfrac{3}{2}x_4 + 6x_3 - \tfrac{1}{2}x_5 + 2x_4 - 9x_3 \\
&= \tfrac{7}{2}x_4 - 3x_3 - \tfrac{1}{2}x_5 \\
z &= 16 + 2\left(\tfrac{3}{2}x_4 + 6x_3 - \tfrac{1}{2}x_5\right) - 8x_4 - 3x_3 \\
&= 16 - 5x_4 + 9x_3 - x_5
\end{aligned}
$$

Neues Tableau:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \qquad \tfrac{3}{2}x_4 + 6x_3 - \tfrac{1}{2}x_5 \\
x_2 &= 2 - \; x_4 \\
x_6 &= \qquad \tfrac{7}{2}x_4 - 3x_3 - \tfrac{1}{2}x_5 \\
\hline
z &= 16 - 5x_4 + 9x_3 - \; x_5
\end{aligned}
$$

Zulässige Basislösung nach der 2. Iteration:

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$ mit $z = 16$

Die 2. Iteration war <u>degeneriert</u>, da sich die zulässige Basislösung nicht geändert hat (, sondern nur das Tableau).

<u>3. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_3
Ausgangsvariable: x_6
Es folgt

$$x_3 = \frac{7}{6}x_4 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6$$

$$x_1 = \frac{3}{2}x_4 + 6\left(\frac{7}{6}x_4 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6\right) - \frac{1}{2}x_5$$

$$= \frac{17}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 - 2x_6$$

$$z = 16 - 5x_4 + 9\left(\frac{7}{6}x_4 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6\right) - x_5$$

$$= 16 + \frac{11}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_5 - 3x_6$$

<u>Neues Tableau</u>

$$x_3 = \frac{7}{6}x_4 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6$$

$$x_1 = \frac{17}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 - 2x_6$$

$$x_2 = 2 - x_4$$

$$z = 16 + \frac{11}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_5 - 3x_6$$

Zulässige Basislösung nach der 3. Iteration:

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$ mit $z = 16$.

Bei der 3. Iteration handelte es sich ebenfalls um einen <u>degenerierten</u> Schritt.

4. Iteration

Eingangsvariable: x_4
Ausgangsvariable: x_2
Es folgt

$x_4 = 2 - x_2$

$x_3 = \frac{7}{6}(2 - x_2) - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6 = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6 - \frac{7}{6}x_2$

$x_1 = \frac{17}{2}(2 - x_2) - \frac{3}{2}x_5 - 2x_6 = 17 - \frac{3}{2}x_5 - 2x_6 - \frac{17}{2}x_2$

$z = 16 + \frac{11}{2}(2 - x_2) - \frac{5}{2}x_5 - 3x_6 = 27 - \frac{5}{2}x_5 - 3x_6 - \frac{11}{2}x_2$

Neues Tableau

$$
\begin{array}{l}
x_4 = 2 \qquad\qquad\qquad - x_2 \\
x_3 = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6 - \frac{7}{6}x_2 \\
x_1 = 17 - \frac{3}{2}x_5 - 2x_6 - \frac{17}{2}x_2 \\
\hline
z = 27 - \frac{5}{2}x_5 - 3x_6 - \frac{11}{2}x_2
\end{array}
$$

Optimale Lösung („zulässige Basislösung nach der 4. Iteration"):

$x_1 = 17,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{7}{3},\ x_4 = 2,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$ mit $z = 27$.

Die 4. Iteration war <u>nicht degeneriert</u>.