Optimierung für Studierende der Informatik
Thomas Andreae

Wintersemester 2014/15
Blatt 8

A: Präsenzaufgaben am 1. Dezember 2014

1. Konstruieren Sie das duale Problem:

a) Gegeben sei das folgende LP-Problem, das wir (P) nennen wollen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximiere} & x_1 + x_2 + x_3 & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\
 & 2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & -1 \\
 & x_1 + 5x_2 + x_3 & = & 16 \\
 & x_1 \qquad + x_3 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 + 4x_2 - x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 - 3x_2 + x_3 & \leq & 0 \\
 & -4x_1 + 3x_2 \qquad & \leq & 4 \\
 & 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 & \leq & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 9 \\
 & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Konstruieren Sie das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden.

b) Nun sei mit (P) das folgende Problem bezeichnet:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimiere} & x_1 - x_2 & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\
 & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 & \leq & 0 \\
 & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 & \geq & 3 \\
 & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \\
 & x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Bilden Sie das zu (P) duale Problem, indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden (diesmal allerdings „von rechts nach links“).

2. In Matrixnotation lautet ein LP-Problem in Standardform bekanntlich so:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximiere } c^T x & & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\
 & Ax & \leq & b \\
 & x & \geq & 0.
\end{array}
$$

Das Duale hierzu lautet in Matrixnotation:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimiere } b^T y & & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\
 & A^T y & \geq & c \\
 & y & \geq & 0.
\end{array}
$$

Geben Sie das Duale der folgenden beiden Probleme in Matrixnotation an:

a)

$$\begin{aligned}&\text{maximiere } c^T x\\&\text{unter den Nebenbedingungen}\\&\qquad\qquad Ax \le b\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\text{maximiere } c^T x\\&\text{unter den Nebenbedingungen}\\&\qquad\qquad Ax = b\\&\qquad\qquad\ \ x \ge 0\end{aligned}$$

B: Hausaufgaben zum 8. Dezember 2014

1. a) Gegeben sei das folgende LP-Problem, das wir (P) nennen wollen:

$$\begin{array}{ll}\text{maximiere} & x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5\\ \multicolumn{2}{l}{\text{unter den Nebenbedingungen}}\\ & x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 \ge 1\\ & 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 2\\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \le -3\\ & x_3, x_4, x_5 \ge 0.\end{array}$$

Bilden Sie das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden.

b) Nun sei mit (P) das folgende Problem bezeichnet:

$$\begin{array}{ll}\text{minimiere} & 5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4\\ \multicolumn{2}{l}{\text{unter den Nebenbedingungen}}\\ & x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 \le 3\\ & x_1 + 4x_2 + x_3 = 9\\ & x_1 + x_3 \ge 5\\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 8\\ & x_1 - 3x_2 + x_3 = 4\\ & -4x_1 + 3x_2 \le 1\\ & 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 \le 10\\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 \ge 9\\ & x_1, x_2 \ge 0.\end{array}$$

Bilden Sie wieder das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden (diesmal „von recht nach links“).

2. Arbeiten Sie das Beispiel zu den *Schattenpreisen* („Forstunternehmerin“; Skript, Seite 67f.) selbstständig durch und prüfen bzw. ergänzen Sie die folgenden Details:

a) Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass $x_1^* = 25$, $x_2^* = 75$ und $y_1^* = 32.5$, $y_2^* = 0.75$ tatsächlich optimale Lösungen von (7.21) bzw. des zu (7.21) dualen Problems sind:

(i) durch Anwendung des Simplexalgorithmus;

(ii) durch Überprüfen der komplementären Schlupfbedingungen.

b) Es sei t eine beliebig gewählte reelle Zahl, für die $0 \le t \le 1000$ gilt. Zeigen Sie, dass man tatsächlich (7.24) erhält, wenn man (7.22) für ein solches t mit dem Simplexverfahren löst. Weisen Sie deutlich darauf hin, an welchen Stellen Ihrer Rechnung von der Voraussetzung $t \le 1000$ bzw. von der Voraussetzung $t \ge 0$ Gebrauch gemacht wird. Zeigen Sie auch, dass tatsächlich ein zusätzlicher Gewinn von $0.75t$ erzielt wird.