MMS

Vanessa Closius, Jonas Tietz, Tronje Krabbe

November 6, 2018

1. Für Aufgabe 1 haben wir die folgenden Formeln aus der Vorlesung verwendet.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(k\omega_0 x)\cos(m\omega_0 x))dx = 0, \text{ für } k, m \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(mx)\sin(nx))dx = \delta_{m,n}\pi \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(mx)\cos(nx))dx = \delta_{m,n}\pi \tag{3}$$

Des weiteren noch:

$$\int \cos(kt)dt = \frac{\sin(kt)}{k} \tag{4}$$

$$\cos(t+\pi) = -\cos(t) \tag{5}$$

$$\sin(-t) = -\sin(t) \tag{6}$$

$$\cos(-t) = \cos(t) \tag{7}$$

a) $f(t) = \sin(t)$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(t)\cos(kt))dt \underbrace{=}_{(1)} 0$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(t)\sin(kt))dt$$

Hier gilt wegen (2):

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1$$

$$\beta_k = 0, \text{ für } k > 1$$

b) $f(t) = \cos(2t)$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2t)\cos(kt))dt$$

Hier gilt wegen (3):

$$\alpha_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$
$$\alpha_k = 0, \text{ für } k \neq 2$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2t)\sin(kt))dt \underbrace{=}_{(1)} 0$$

c) $f(t) = 1$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kt))dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(k\pi)}{k} - \frac{\sin(-k\pi)}{k}\right) \\
&\underbrace{=}_{(6)} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(k\pi)}{k} + \frac{\sin(k\pi)}{k}\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(2\frac{\sin(k\pi)}{k}\right) \\
&= \frac{2\sin(k\pi)}{k\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(kt))dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(k\pi)}{k} - \frac{\cos(-k\pi)}{k}\right) \\
&\underbrace{=}_{(7)} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(k\pi)}{k} - \frac{\cos(k\pi)}{k}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d) $f(t) = \cos(5t + \pi) + 3\sin(9t)$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\cos(5t+\pi) + 3\sin(9t))\cos(kt))dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(5t+\pi)\cos(kt) + 3\sin(9t)\cos(kt))dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(5t+\pi)\cos(kt))dt\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \int_{-\pi}^{\pi}(3\sin(9t)\cos(kt))dt\right) \\
&\underbrace{=}_{(1)} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(5t+\pi)\cos(kt))dt \\
&\underbrace{=}_{(5)} -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(5t)\cos(kt))dt
\end{aligned}$$

Und dann gilt aufgrund von (3):

$$\alpha_5 = -\frac{1}{\pi}\cdot\pi = -1$$
$$\alpha_k = 0, \text{ für } k \neq 5$$

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\cos(5t+\pi) + 3\sin(9t))\sin(kt))dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(5t+\pi)\sin(kt) + 3\sin(9t)\sin(kt))dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(5t+\pi)\sin(kt))dt\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \int_{-\pi}^{\pi}(3\sin(9t)\sin(kt))dt\right) \\
&\underbrace{=}_{(5)} \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(5t)\sin(kt))dt\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \int_{-\pi}^{\pi}(3\sin(9t)\sin(kt))dt\right) \\
&\underbrace{=}_{(1)} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3\sin(9t)\sin(kt))dt \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(9t)\sin(kt))dt
\end{aligned}$$

Und dann gilt aufgrund von (2):

$$\beta_9 = \frac{3}{\pi}\cdot\pi = 3$$
$$\beta_k = 0, \text{ für } k \neq 9$$

2) 1) Wir wollen eine Rechteckschwingung mit Amplitude 1 synthetisieren. Dazu lautet die Fourierreihe, wie im Code in der Aufgabe beschrieben:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\pi t)}{k}$$

Es wäre noch korrekter, bis Unendlich zu summieren, nicht nur bis n — aber n zu variieren ist ja der Witz der Aufgabe. Bei $n \leq 1$ sehen wir bloSS eine eine Gerade entlang der X-Achse, da ja der Loop gar nicht ausgeführt wird. Steigern wir n, so nähert sich unser Graph immer weiter der Rechteckschwingung an. Bei $n = 2$ haben wir einen einfachen Sinus-Graph. Bei $n = 4$ ist schon eine gewissen Ähnlichkeit mit der Rechteckschwingung zu erkennen. Bei $n = 10$ erkennt man schon eine recht deutliche Annäherung — solche Bilder sieht man auch des öfteren im Zusammenhang mit der Signalverarbeitung! Bei $n = 100$ sind nur noch kleine Abweichungen von der Rechteckschwingung zu sehen, und ab $n = 2000$ treten keine weiteren Verbesserungen auf. Wir haben mit diesem Wert also die Rechteckschwingung ziemlich gut synthetisiert.

2) Wir hören ehrlich gesagt keinen Unterschied zwischen den beiden Abtastraten von 6kHz und 12kHz — im Prinzip müsste eine höhere Abtastrate einen "besseren" Ton erzeugen, da mehr Klanginformation gespeichert ("abgetastet") wird. Eine sehr niedrige Abtastrate von 500Hz erzeugt einen sehr dunklen bzw. dumpfen Ton, und bei noch niedrigeren Raten hört man irgendwann eben gar nichts mehr. Eine Abtastrate von 50kHz, ungefähr das Maximum was einem Menschen noch hörbare Klanginformationen bereitstellt, klingt für uns genau wie die 6kHz und 12kHz Töne.

3) Die additiv überlagerten Töne klingen verzerrt - dies liegt wohl an Interferenz zwischen den beiden Schwingungen. Da die Cosinusschwingungen nicht die gleiche Periode haben, wird nicht einfach eine cosinus-ähnliche Schwingung mit anderer Amplitude erzeugt, sondern eine wahrscheinlich eher "zackige" Funktion, welche also einen verzerrten Ton generiert.