MMS

Vanessa Closius, Jonas Tietz, Tronje Krabbe

November 26, 2018

1. a) Da die Ableitung von Sinus Cosinus ist, wie man sich auch leicht am Einhaltskreis veranschaulichen kann, gilt:

$$
\begin{aligned}
\cos(\Omega t) = \frac{d}{dt}\sin(\Omega t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet (j\omega) \cdot (\frac{1}{2} j \cdot (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega))
&= j^2 \omega \frac{1}{2} \cdot (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\delta(\omega + \Omega) \cdot \underbrace{(-\omega)}_{\omega = -\Omega} - \delta(\omega - \Omega) \cdot \underbrace{(-\omega)}_{\omega = \Omega})
\end{aligned}
$$

Und für $\Omega = 1$ folgt:

$$
\cos(\Omega t) = \frac{d}{dt}\sin(\Omega t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2} \cdot (\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega))
$$

b) Sei

$$
\begin{aligned}
s(t) &= A_1 \cos(t) \\
g(t) &= A_2 \cos(t)
\end{aligned}
$$

und gelte

$$
A_1 \neq A_2 \tag{1}
$$

Es gilt weiterhin:

$$
\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(x + \frac{\sin(2x)}{2}) \tag{2}
$$

$$
\int_{-T}^{T} \cos^2(t) dt = T + \frac{\sin(2T)}{2} \tag{3}
$$

$$
\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(nx)}{x} = 0 \tag{4}
$$

Wir berechnen die Korrelation von $s(t)$ und $g(t)$:

$$
\rho_{sg} = \frac{\lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A_1 A_2 \cos^2(t) dt}{\sqrt{\rho_s \rho_g}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= A_1 A_2 \cdot \frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2(t) dt}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&\overset{(3)}{=} A_1 A_2 \cdot \frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{T + \frac{\sin(2T)}{2}}{2T}}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&= \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot \frac{\lim\limits_{T\to\infty} 1 + \frac{\sin(2T)}{2T}}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho_s \rho_g}}
\end{aligned}
$$

Es bleibt, ρ_s und ρ_g zu berechnen.

$$
\begin{aligned}
\rho_s &= A_1 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2(t) dt \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{2} A_1 \lim_{T\to\infty} 1 + \frac{\sin(2T)}{2T} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{1}{2} A_1
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$\rho_g = \frac{1}{2} A_2$$

Wir setzen ein:

$$
\begin{aligned}
\rho_{sg} &= \frac{1}{2} \frac{A_1 A_2}{\sqrt{\frac{1}{4} A_1 A_2}} \\
&= \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1 A_2}} \\
&= \sqrt{A_1 A_2}
\end{aligned}
$$

2) a) Stimmen die beiden Sinus-Funktionen überein, so ist der Korrelationzkoeffizient 1 — denn die Funktionen sind ja identisch. Um π verschoben, müsste der Koeffizient -1 sein, da

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

Die Funktionen stimmen sozusagen eigentlich überein, bis auf das Vorzeichen der einzelnen Werte.
Der Koeffizient ist (praktisch) 0 bei einer Verschiebung von $\frac{\pi}{2}$, da $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ ist und Sinus und Cosinus orthogonal zueinander sind.