MMS

Vanessa Closius, Jonas Tietz, Tronje Krabbe

November 26, 2018

1. a) Da die Ableitung von Sinus Cosinus ist, wie man sich auch leicht am Einhaltskreis veranschaulichen kann, gilt:

$$\begin{aligned}\cos(\Omega t) = \frac{d}{dt}\sin(\Omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet (j\omega)\cdot(\frac{1}{2}j\cdot(\delta(\omega+\Omega)-\delta(\omega-\Omega))\\ = j^2\omega\frac{1}{2}\cdot(\delta(\omega+\Omega)-\delta(\omega-\Omega))\\ = \frac{1}{2}\cdot(\delta(\omega+\Omega)\cdot\underbrace{(-\omega)}_{\omega=-\Omega}-\delta(\omega-\Omega)\cdot\underbrace{(-\omega)}_{\omega=\Omega})\end{aligned}$$

Und für $\Omega = 1$ folgt:

$$\cos(\Omega t) = \frac{d}{dt}\sin(\Omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\cdot(\delta(\omega+\Omega)+\delta(\omega-\Omega))$$

b) Sei

$$\begin{aligned}s(t) = A_1\cos(t)\\ g(t) = A_2\cos(t)\end{aligned}$$

und gelte

$$A_1 \neq A_2 \tag{1}$$

Es gilt weiterhin:

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x+\frac{\sin(2x)}{2}) \tag{2}$$

$$\int_{-T}^{T}\cos^2(t)dt = T + \frac{\sin(2T)}{2} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(nx)}{x} = 0 \tag{4}$$

Wir berechnen die Korrelation von $s(t)$ und $g(t)$:

$$\rho_{sg} = \frac{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A_1A_2\cos^2(t)dt}{\sqrt{\rho_s\rho_g}}$$

$$
\begin{aligned}
&= A_1 A_2 \cdot \frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2(t) dt}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&\overset{(3)}{=} A_1 A_2 \cdot \frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{T + \frac{\sin(2T)}{2}}{2T}}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&= \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot \frac{\lim\limits_{T\to\infty} 1 + \frac{\sin(2T)}{2T}}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho_s \rho_g}}
\end{aligned}
$$

Es bleibt, ρ_s und ρ_g zu berechnen.

$$
\begin{aligned}
\rho_s &= A_1 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2(t) dt \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{2} A_1 \lim_{T\to\infty} 1 + \frac{\sin(2T)}{2T} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{1}{2} A_1
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$\rho_g = \frac{1}{2} A_2$$

Wir setzen ein:

$$
\begin{aligned}
\rho_{sg} &= \frac{1}{2} \frac{A_1 A_2}{\sqrt{\frac{1}{4} A_1 A_2}} \\
&= \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1 A_2}} \\
&= \sqrt{A_1 A_2}
\end{aligned}
$$

2) a) Stimmen die beiden Sinus-Funktionen überein, so ist der Korrelationzkoeffizient 1 — denn die Funktionen sind ja identisch. Um π verschoben, müsste der Koeffizient -1 sein, da

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

Die Funktionen stimmen sozusagen eigentlich überein, bis auf das Vorzeichen der einzelnen Werte.
Der Koeffizient ist (praktisch) 0 bei einer Verschiebung von $\frac{\pi}{2}$.