MMS

Vanessa Closius, Jonas Tietz, Tronje Krabbe

November 19, 2018

1. 1) a)

b) $f(t) = \cos(t)$

$$
\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)e^{-jm\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(e^{jt}+e^{-jt})e^{-jm\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jt-jm\omega_0 t} + e^{-jt-jm\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jt(1-m\omega_0)}dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jt(1+m\omega_0)}dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{j(1-m\omega_0)}e^{jt(1-m\omega_0)}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{1}{-j(1+m\omega_0)}e^{-jt(1+m\omega_0)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{j(1-m\omega_0)}(e^{j\pi(1-m\omega_0)} - e^{-j\pi(1-m\omega_0)}) \\
&+ \frac{1}{-j(1+m\omega_0)}(e^{-jpi(1+m\omega_0)} - e^{jpi(1+m\omega_0)})) \\
&= \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{j(1-m\omega_0)}\frac{2}{-j}\sin(\pi(1-m\omega_0)) + \frac{1}{-j(1+m\omega_0)}\frac{2}{-j}\sin(\pi(-1-m\omega_0))) \\
&= \frac{1}{4\pi}(\frac{2}{1-m\omega_0}\sin(\pi-\pi m\omega_0)) + \frac{2}{-1-m\omega_0}\sin(-\pi-\pi m\omega_0))) \\
&= \frac{2}{4\pi-4\pi m\omega_0}\sin(\pi-\pi m\omega_0)) + \frac{2}{-4\pi-4\pi m\omega_0}\sin(-\pi-\pi m\omega_0)) \\
&= \frac{-1}{2\pi-2\pi m\omega_0}\sin(-\pi m\omega_0)) + \frac{-1}{-2\pi-2\pi m\omega_0}\sin(-\pi m\omega_0)) \\
&= \frac{1}{2\pi-2\pi m\omega_0}\sin(\pi m\omega_0)) + \frac{1}{-2\pi-2\pi m\omega_0}\sin(\pi m\omega_0)) \\
&= \sin(\pi m\omega_0)(\frac{1}{2\pi-2\pi m\omega_0} + \frac{1}{-2\pi-2\pi m\omega_0}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sin(\pi m\omega_0)(\frac{1}{1-m\omega_0} + \frac{1}{-1-m\omega_0}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sin(\pi m\omega_0)\frac{(-1-m\omega_0)+(1-m\omega_0)}{(1-m\omega_0)(-1-m\omega_0)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\sin(\pi m\omega_0)\frac{-2m\omega_0}{(-1 - m\omega_0 + m\omega_0 + m^2\omega_0^2)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sin(\pi m\omega_0)\frac{-2m\omega_0}{(m^2\omega_0^2 - 1)} \\
&= \frac{-m\omega_0}{\pi m^2\omega_0^2 - \pi}\sin(\pi m\omega_0)
\end{aligned}$$

2) Die Fouriertransformation der Cosinus-Funktion sieht aus wie folgt:

$$\cos(\Omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}(\delta(\omega+\Omega) + \delta(\omega-\Omega))$$

AuSSerdem besagt das Verschiebungstheorem, dass

$$s(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet S(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$$

Da die Sinus-Funktion um $\frac{\pi}{2}$ von der Cosinus-Funktion verschoben ist, lässt sich das Verschiebungstheorem hier anwenden. Die Sinus-Funktion hat also die folgende Form:

$$\sin(\Omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet j\cdot\frac{1}{2}(\delta(\omega+\Omega) - \delta(\omega-\Omega))$$

3)

$$g(t) = rect(t) * rect(t) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(\tau - t)\cdot rect(t)dt$$

wobei $rect(t)$ der Rechteckimpuls ist:

$$rect(t) = \begin{cases} 1, \text{ für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{ für } |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Für die Faltung unterscheiden wir 2 Fälle.

Fall 1: $|\tau| \leq 1$

$$\begin{aligned}
rect(\tau - t)\cdot rect(t) = 0 \\
\Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 0dt = 0, \tau \notin [-1,1]
\end{aligned}$$

Fall 2: $|\tau| \geq 1$
Die Rechtecke überlappen sich, der Überlappungsbereich hat die Breite $\Delta t = 1 - \tau$. Es gilt:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(\tau - t)\cdot rect(t)dt = \int_{\Delta t} 1^2 = \Delta t \cdot 1$$

$$= \begin{cases} 1+\tau & ,\tau \in [-1,0] \\ 1-\tau & ,\tau \in [0,1] \end{cases}$$

Also gilt insgesamt:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & ,\tau \notin [-1,1] \\ 1+t & ,\tau \in [-1,0] \\ 1-t & ,\tau \in [0,1] \end{cases}$$

Dies entspricht dem Dreiecksimpuls.

2) **1)** Faltet man das Rechteckssignal mit sich selbst (also ist $n = 1$), erhält man ein Dreieckssignal. Geht n gegen ∞, konvergiert unser Ergebnis zu einem Dirac-StoSS. Tatsächlich tritt bei $n = 8$ schon ein Fehler auf, und unsere Visualisierung scheitert. In dem Fall erreicht $f(0)$ so einen hohen Wert, dass `pyplot` nicht mehr damit umgehen kann.

2) Das Faltungstheorem besagt, dass:

$$f * g = F^{-1}\left\{F\{f\} \cdot F\{g\}\right\}$$

wobei $f * g$ die Faltung zweier Funktionen f und g ist. F^{-1} sei die inverse Fouriertransformation, und F die Fouriertransformation. Wir haben die linke und die rechte Seite der Gleichung in Python implementiert, und zeigen durch das Zeichnen zweier Graphen, dass die Gleichung stimmt - denn die Graphen überlappen exakt.