

MMS

Vanessa Closius, Jonas Tietz, Tronje Krabbe

November 26, 2018

1. a) Da die Ableitung von Sinus Cosinus ist, wie man sich auch leicht am Einheitskreis veranschaulichen kann, gilt:

$$\begin{aligned}\cos(\Omega t) &= \frac{d}{dt} \sin(\Omega t) \circ \bullet (j\omega) \cdot \left(\frac{1}{2}j \cdot (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega))\right) \\ &= j^2 \omega \frac{1}{2} \cdot (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\delta(\omega + \Omega) \cdot \underbrace{(-\omega)}_{\omega = -\Omega} - \delta(\omega - \Omega) \cdot \underbrace{(-\omega)}_{\omega = \Omega})\end{aligned}$$

Und für $\Omega = 1$ folgt:

$$\cos(\Omega t) = \frac{d}{dt} \sin(\Omega t) \circ \bullet \frac{1}{2} \cdot (\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega))$$

- b) Sei

$$\begin{aligned}s(t) &= A_1 \cos(t) \\ g(t) &= A_2 \cos(t)\end{aligned}$$

und gelte

$$A_1 \neq A_2 \tag{1}$$

Es gilt weiterhin:

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2x)}{2}\right) \tag{2}$$

$$\int_{-T}^T \cos^2(t) dt = T + \frac{\sin(2T)}{2} \tag{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{x} = 0 \tag{4}$$

Wir berechnen die Korrelation von $s(t)$ und $g(t)$:

$$\rho_{sg} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_1 A_2 \cos^2(t) dt}{\sqrt{\rho_s \rho_g}}$$

$$\begin{aligned}
&= A_1 A_2 \cdot \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos^2(t) dt}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&\stackrel{(3)}{=} A_1 A_2 \cdot \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T + \frac{\sin(2T)}{2}}{2T}}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&= \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin(2T)}{2T}}{\sqrt{\rho_s \rho_g}} \\
&\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho_s \rho_g}}
\end{aligned}$$

Es bleibt, ρ_s und ρ_g zu berechnen.

$$\rho_s = A_1 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos^2(t) dt$$

- 2) a) Stimmen die beiden Sinus-Funktionen überein, so ist der Korrelationskoeffizient 1 — denn die Funktionen sind ja identisch. Um π verschoben, müsste der Koeffizient -1 sein, da

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

Die Funktionen stimmen sozusagen eigentlich überein, bis auf das Vorzeichen der einzelnen Werte.

Der Koeffizient ist (praktisch) 0 bei einer Verschiebung von $\frac{\pi}{2}$.