Федеральное агентство по образованию
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет "ЛЭТИ"

Пояснительная записка к Курсовой работе по дисциплине "Информатика"

Вариант №4

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

2016

Содержание

1 Вступление

Цель кусовой работы: уметь применять математические пакеты прикладных программ в инженерной деятельности; уметь оформлять результаты работы согласно требованиям ЕСКД

Тема курсовой работы: решение математических задач с использованием математического пакета "Scilab".

2 Исследование функций

Описания задания: даны следующие функции:

$$f(x) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$$
$$g(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1 \qquad (1)$$

Необходимо:

- Решить уравнение $f(x) = g(x)$.
- Исследовать функцию $h(x) = f(x) - g(x)$ на промежутке $[0; \frac{5\pi}{6}]$

2.1 Решение уравнения $f(x) = g(x)$.

Запишем уравнение $f(x) = g(x)$:

$$\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1 \qquad (2)$$

Перенесем все в левую часть:

$$\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) - \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1 = 0 \qquad (3)$$

Получили уравнение вида $f(x) - g(x) = 0$. Чтобы решить это уравнение, можно воспользоваться функцией, встроенной в Scilab, которая называется **fsolve(x_0,f)**, где x_0 - начальное приближение, а f - функция, описывающая левую часть уравнения $f(x) = 0$.

Для удобства вычислений введем $h(x) = f(x) - g(x)$. Так как нам надо найти точку, в которой данная функция равна нулю, то $x_0 = 0$. Подставляем данные в функцию и получаем следующий результат:

$$h(x) = -0.523598... \qquad (4)$$

2.2 Исследование функции $h(x) = f(x) - g(x)$

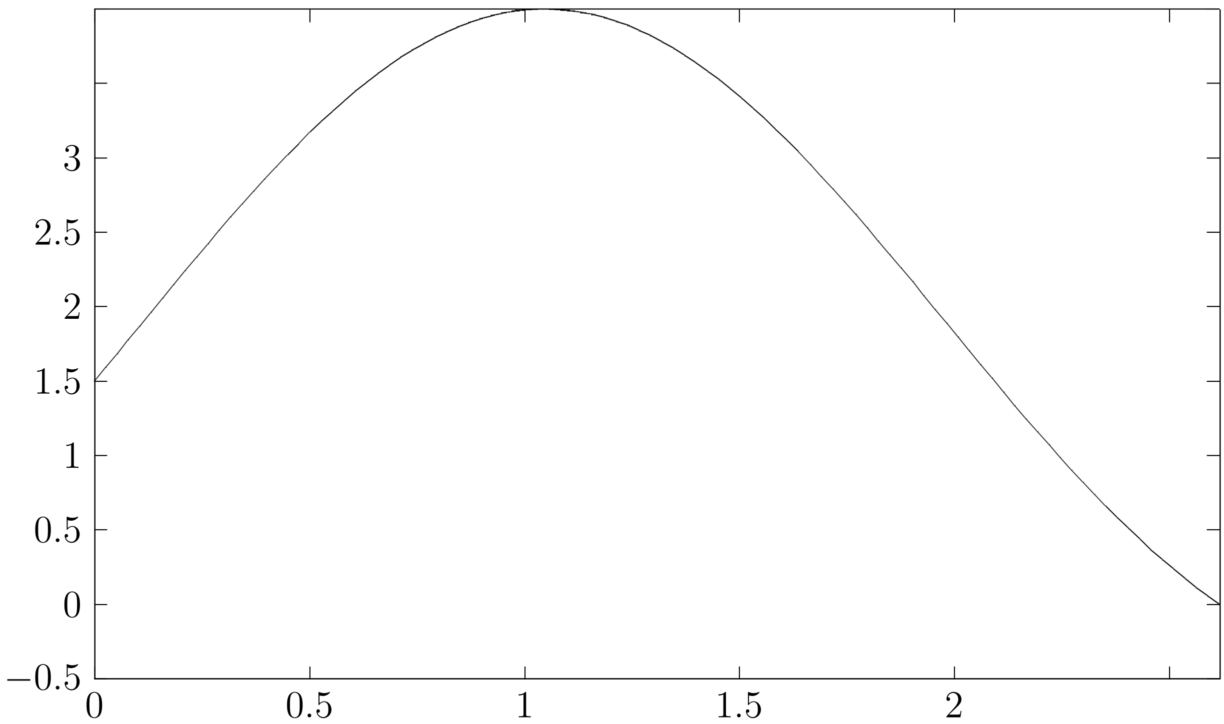
Алгоритм исследования функции состоит из следующих шагов.

– Нахождение области определения функции.

– Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точек экстремума.

– Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.

Построим график функции $h(x) = f(x) - g(x)$ на промежутке $[0; \frac{5\pi}{6}]$ с помощью gnuplot.



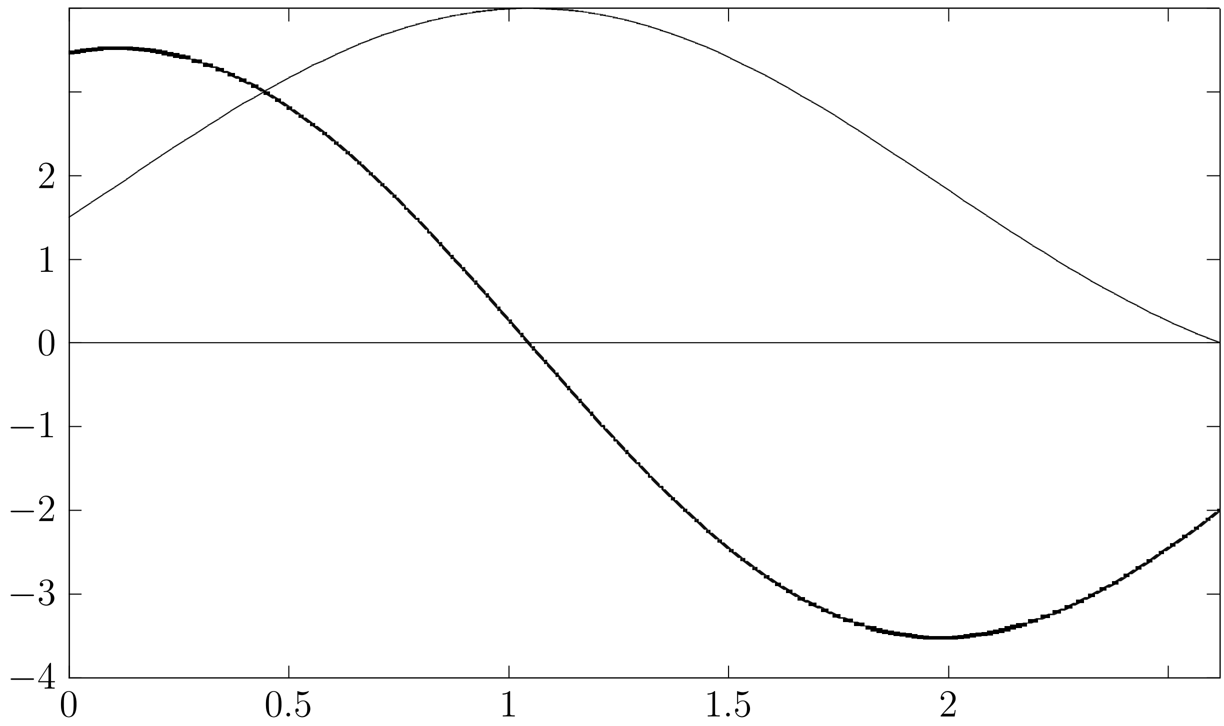
По условию задачи функция определена на промежутке $[0; \frac{5\pi}{6}]$. Следовательно, это и есть область ее определения в данном случае.

Найдем точку экстремума.

Точками экстремума функции являются точки, в которых функция определена и проходя через которые производная меняет знак.

Производная для исследуемой функции будет иметь следующий вид:

$$f'(x) = \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) + 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \tag{5}$$



Необходимо найти такое значение x, в котором производная будет равна 0. Для этого воспользуемся функцией fsolve. Для удобства в Scilab создадим функцию "firstderiv в которой будет находиться наша производная. На графике видно, что производная пересекает ось X примерно в точке $x = 1$. Подставляем в функцию $x_0 = 1$ и нашу "firstderiv". Получаем результат:

$$d_1 null = 1.047197... \tag{6}$$

Определим промежутки возрастания и убывания функции. Для начала разбиваем область определения критическими точками на интервалы. Следом определим знак производной на каждом из промежутков. Знак "+"будет соответствовать промежутку возрастания, знак "− промежутку убывания.

$$\begin{aligned} f'(0.8) &= 1.4383739 \\ f'(1.8) &= -3.3631248 \end{aligned} \tag{7}$$

Получаем следующий вывод:

- функция возрастает на промежутках $[0; 0.8]$ и $[0.8; 1.047197]$
- функция убывает на промежутках $[1.047197; 1.8]$ и $[1.8; \frac{5\pi}{6}]$

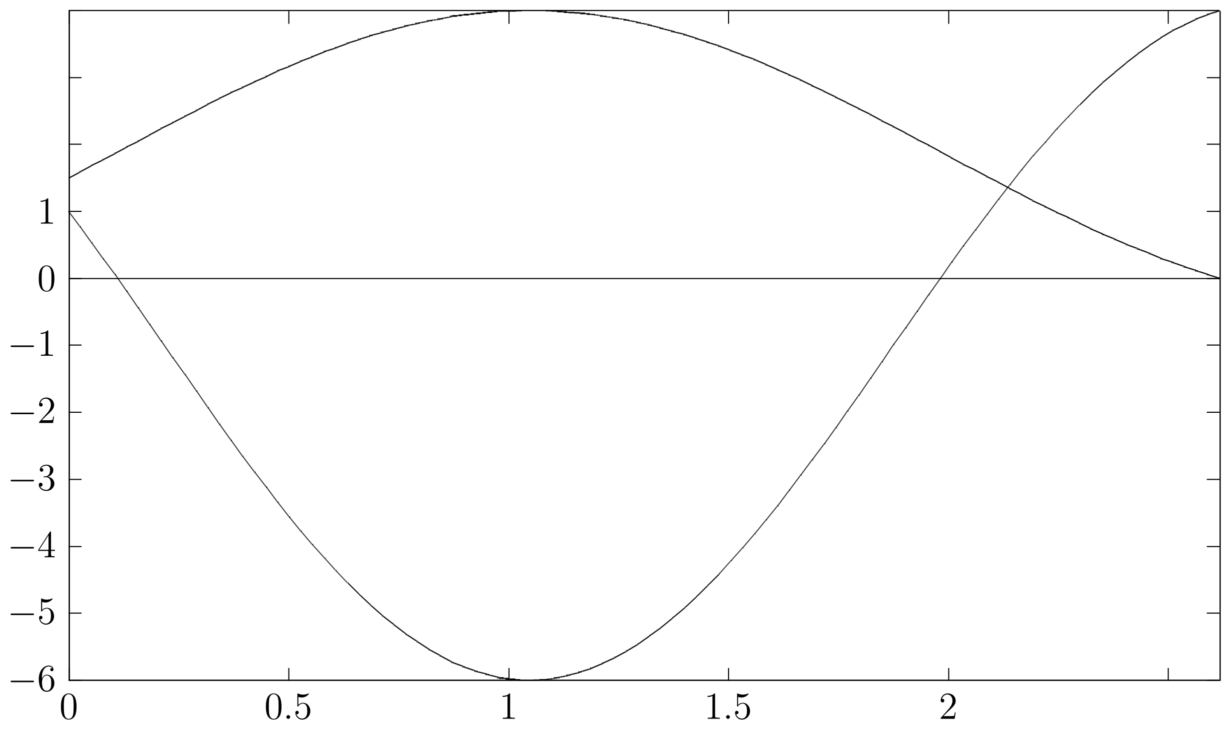
Определим промежутки выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба. Промежутки вогнутости и выпуклости функции находятся при решении неравенств

$$\begin{gathered} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Для того, чтобы определить промежутки вогнутости и выпуклости, необходимо найти вторую производную, найти точки, в которых она равна нулю, разбить область определения полученными точками на интервалы и определить знак второй производной на каждом из промежутков. Знак "+"будет соответствовать промежутку вогнутости, знак "− промежутку выпуклости.

Вторая производная для исследуемой функции будет иметь следующий вид:

$$f''(x) = 4\cos(2x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} * \sin(x) - \cos(x) \tag{9}$$



Так же воспользуемся функцией fsolve. На графике видно, что вторая производная пересекается ось X в двух разных точках. Поэтому используем функцию fsolve в двух разных точках:

$$\begin{aligned} d_2null1 &= 0.111268... \text{ при } x_0 = 0 \\ d_2null2 &= 1.983127... \text{ при } x_0 = 2 \end{aligned} \tag{10}$$

Разобьем область определения на интервалы и определим знак производной на каждом:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 1 \\ f''(1) &= -5.9799 \end{aligned} \tag{11}$$

Из этого следует, что:

– функция вогнутая на промежутке $[0; 0.111268) \cup (1.983127; \frac{5\pi}{6}]$

– функция выпуклая на промежутке $(0.111268; 1.983127)$

3 Сплайн-интерполяция. Вычисление погрешности сплайна

3.1 Описание задания

Найти коэффициенты кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах V_x и V_y. Построить на одном графике: функцию f(x) и функцию f1(x), полученную после нахождения коэффициентов кубического сплайна. Представить графическое изображение результатов интерполяции исходных данных

Вектор V_x имеет следующие значения:

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 1.25 \\ 2.125 \\ 3.25 \end{vmatrix}$$

Вектор V_y имеет следующие значения:

$$\begin{vmatrix} 5 \\ 4.6 \\ 5.7 \\ 5.017 \\ 4.333 \end{vmatrix}$$

Необходимо оценить погрешность в точке $x = 2.2$.

Найдем уравнение сплайна, проходящего через пять точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$. Представим сплайн полиномом третьей степени на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

$$F_i(x) = A_{i0} + A_{i1}x + A_{i2}x^2 + A_{i3}x^3, \text{ где } x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{12}$$

Найдем коэффициенты A_{ij} исходя из того, что в точках склейки функция не имеет разрывов, изломов и изгиб ее слева и справа совпадает. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ график $F_i(x)$ проходит через точки y_i, y_{i+1}.

$$y_i = A_{i0} + A_{i1}x_i + A_{i2}x_i^2 + A_{i3}x_i^3 \tag{13}$$

Получаем 8 уравнений:

$$\begin{aligned}
y_1 &= A_{10} + A_{11}x_1 + A_{12}x_1^2 + A_{13}x_1^3\\
y_2 &= A_{10} + A_{11}x_2 + A_{12}x_2^2 + A_{13}x_2^3\\
y_2 &= A_{20} + A_{21}x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{23}x_2^3\\
y_3 &= A_{20} + A_{21}x_3 + A_{22}x_3^2 + A_{23}x_3^3\\
y_3 &= A_{30} + A_{31}x_3 + A_{32}x_3^2 + A_{33}x_3^3\\
y_4 &= A_{30} + A_{31}x_4 + A_{32}x_4^2 + A_{33}x_4^3\\
y_4 &= A_{40} + A_{41}x_4 + A_{42}x_4^2 + A_{43}x_4^3\\
y_5 &= A_{40} + A_{41}x_5 + A_{42}x_5^2 + A_{43}x_5^3
\end{aligned} \tag{14}$$

Производная первого пордка во внутренних точках x_i должны совпадать, т.е. производная слева $F_i^{'}(x_i) = A_{i1} + 2A_{i2}x_i + 3A_{i3}x_i^2$ должна быть равна производной справа $F_{i+1}^{'}(x_i) = A_{(i+1)1} + 2A_{(i+1)2}x_i + 3A_{(i+1)3}x_i^2$. Физический смысл равенства производных состоит в том, что в точках склейки у нас нет излома сплайна.

$$\begin{aligned}
A_{11} + 2A_{12}x_2 + 3A_{13}x_2^2 &= A_{21} + 2A_{22}x_2 + 3A_{23}x_2^2\\
A_{21} + 2A_{22}x_3 + 3A_{23}x_3^2 &= A_{31} + 2A_{32}x_3 + 3A_{33}x_3^2\\
A_{31} + 2A_{32}x_4 + 3A_{33}x_4^2 &= A_{41} + 2A_{42}x_4 + 3A_{43}x_4^2
\end{aligned} \tag{15}$$

Производные второго порядка в точках склейки x_i должны совпадать, вторая производная слева должна быть равна второй производной справа. Физический смысл равенства вторых производных в том, что в точках склейки изгиб

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Вариант №4

сплайна справа и слева должен быть одинаковым.

$$
\begin{aligned}
2A_{12} + 6A_{13}x_2 &= 2A_{22} + 6A_{23}x_2 \\
2A_{22} + 6A_{23}x_3 &= 2A_{32} + 6A_{33}x_3 \\
2A_{32} + 6A_{33}x_4 &= 2A_{42} + 6A_{43}x_4
\end{aligned} \tag{16}
$$

Найдем график сплайна в случае, когда концы сплайна оставлены свободными в граничных точках $(x_1, y_1), (x_5, y_5)$. Это даст нам уравнения:

$$
\begin{aligned}
2A_{12} + 6A_{13}x_1 &= 0 \\
2A_{42} + 6A_{43}x_5 &= 0
\end{aligned} \tag{17}
$$

Тем самым, у нас получилось 16 уравнений для определения 16 коэффициентов A_{ij}.

Найдем коэффициенты A_{ij}:

$$
\begin{vmatrix} A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{20} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{30} \\ A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \\ A_{40} \\ A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5.0 \\ -1.93 \\ 0.0 \\ 5.40 \\ 5.11 \\ -3.33 \\ 5.57 \\ -2.02 \\ -4.90 \\ 18.63 \\ 1.77 \\ 13.16 \\ -6.20 \\ 1.19 \\ -0.03 \end{vmatrix}
$$

Окончательное уравнение для сплайна получаем в виде:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = 5.0x^3 - 1.93x^2 + 0.0x + 5.40 = 0, \text{ где } x \in [0, 0.25]. \\ F_2(x) = 5.11x^3 - 3.33x^2 + 5.57x - 2.02 = 0, \text{ где } x \in [0.25, 1.25]. \\ F_3(x) = -4.90x^3 + 18.63x^2 - 10.33x + 1.77 = 0, \text{ где } x \in [1.25, 2.125]. \\ F_4(x) = 13.16x^3 - 6.20x^2 + 1.19x - 0.03 = 0, \text{ где } x \in [2.125, 3.25]. \end{cases} \quad (18)$$

4 Оптимальное распределение неоднородных ресурсов

На предприятии постоянно возникают задачи определения оптимального плана производства продукции при наличии конкретных ресурсов (сырья, полуфабрикатов, оборудования, финансов, рабочей силы и др.) или проблемы оптимизации распределения неоднородных ресурсов на производстве.

Для изготовления n видов изделий И1, И2 ,... , Иn необходимы ресурсы m видов: трудовые, материальные, финансовые и др. Известно требуемое количество отдельного i-го ресурса для изготовления каждого j-го изделия. Назовем эту величину нормой расхода C_{ij}. Пусть определено количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент, - a_i. Известна прибыль P_j, получаемая предприятием от изготовления каждого j-го изделия. Требуется определить, какие изделия и в каком количестве должны производиться предприятием, чтобы прибыль была максимальной.

Используемы ресурсы, a_i	Изготавливаемые изделия				Наличие ресурсов, a_j
	И1	И2	И3	И4	
Трудовые	8	5	5	7	18
Материальные	4	4	9	5	12
Финансовые	5	7	4	3	34
Прибыль, P_j	45	55	60	32	

Составим математическую модель для решения данной задачи.

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи начинается с ответов на следующие вопросы:

– Для определения каких величин должна быть построена модель, т. е. как идентифицировать переменные данной задачи?

– Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

– В чем состоит цель задачи, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Ответы на вышеперечисленные вопросы могут быть сформулированы для данной задачи так: фирме требуется определить объемы производства каждого вида продукции в тоннах, максимизирующие доход в д. е. от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Для построения математической модели остается только идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных. Предположим, что предприятие изготовит x1 единиц продукции П1 и x2 единиц продукции П2.

Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$
\begin{cases}
8x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 18 \\
4x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 5x_4 \leq 12 \\
5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 34 \\
x_1 - x_2 \leq 1 \\
x_2 - x_3 \leq 1 \\
x_3 - x_4 \leq 1 \\
x_2 \leq 8 \\
x_3 \leq 5 \\
x_4 \leq 5 \\
x_2 \leq 4 \\
x_3 \leq 4 \\
x_4 \leq 9 \\
x_2 \leq 5 \\
x_3 \leq 7 \\
x_4 \leq 4 \\
x_1 \geq 0 \\
x_2 \geq 0 \\
x_3 \geq 0 \\
x_4 \geq 0
\end{cases} \tag{19}
$$

Доход от реализации x1 единиц продукции П1 и x2 единиц продукции П2 составит:

$$F_{max} = 45x_1 + 55x_2 + 60x_3 + 32x_4 \tag{20}$$

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значения F_{max}.

Для решения задач линейного программирования в Scilab предназначена функция **linpro** следующего вида:

[x,lagr,f]=linpro(p,C,b[,ci,cs]), где

- **p** – массив(вектор-столбец) коэффициентов при неизвестных целевой функции, длина вектора n совпадает с количеством неизвестных x.

- **C** – матрица при неизвестных из левой части системы ограничений, количество строк матрицы равно количеству ограничений, а количество столбцов совпадает с количеством неизвестных.

- **b** – массив (вектор-столбец), содержит свободные члены системы ограничений.

- **ci** - массив (вектор-столбец) содержит нижнюю границу переменных ($c_{ij} \leq xj$); если таковая отсутствует, указывают [ ].

- **cs** - массив (вектор-столбец) содержит верхнюю границу переменных ($c_{sj} \geq xj$); если таковая отсутствует, указывают [ ].

Функция linpro возвращает массив неизвестных **x**, минимальное значение функции **f** и массив множителей Лагранжа **lagr**.

Для корректной работы функции linpro необходимо загрузить Quapro Toolbox.

Матричная форма записи:

$$C=\begin{vmatrix}8&5&5&7\\4&4&9&5\\5&7&4&3\\1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix},\ b=\begin{vmatrix}18\\12\\34\\1\\1\\1\\8\\5\\5\\4\\4\\9\\5\\7\\7\end{vmatrix},\ p=\begin{vmatrix}45\\55\\60\\32\end{vmatrix},\ ci=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\end{vmatrix}$$

Внесем переменные в функцию linpro. Получаем следующие результаты: Максимальная прибыль в размере 139д.е. будет получена, если объем производства продукции П1 составит 1.3906ед., продукции П2 - 1.1875ед., продукции П3 - 0.1875ед., а продукции П4 - 1.6664ед.

$$\begin{aligned}F_{max} &= 139\\P_1 &= 1.3906\\P_2 &= 1.1875\\P_3 &= 0.1875\\P_4 &= 1.6664\end{aligned}\tag{21}$$

5 Заключение

В данной курсовой работе было рассмотрено решение трех задач из разных областей математики. В ходе работы использовались математические пакеты прикладных программ, которые существенно упростили и ускорили ход вычислений. Работа была оформлена согласно требованиями ЕСКД.