Оценка погрешности

Прокшин Артем
ЛЭТИ
taybola@gmail.com

1 разделённые разности

В ссылке [3] дается понятие разделённых разностей.

функция f задана на множестве попарно различных точек $x_0,\ \dots,\ x_n \in X$.

Тогда разделённой разностью нулевого порядка функции f в точке x_j называют значение $f(x_j)$, а разделённую разность порядка k для системы точек $(x_j,\ x_{j+1},\ \dots,\ x_{j+k})$ определяют через разделённые разности порядка $(k-1)$ по формуле

$$f(x_j;\ x_{j+1};\ \dots;\ x_{j+k-1};\ x_{j+k}) = \frac{f(x_{j+1};\ \dots;\ x_{j+k-1};\ x_{j+k}) - f(x_j;\ x_{j+1};\ \dots;\ x_{j+k-1})}{x_{j+k} - x_j}$$

в частности,

$$f(x_0;\ x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f(x_0;\ x_1;\ x_2) = \frac{f(x_1;\ x_2) - f(x_0;\ x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_0;\ x_1;\ \dots;\ x_{n-1};\ x_n) = \frac{f(x_1;\ \dots;\ x_{n-1};\ x_n) - f(x_0;\ x_1;\ \dots;\ x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Для разделённой разности верна формула

$$f(x_0;\ x_1;\ \dots;\ x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)},$$

в частности,

$$f(x_0;\ x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1},$$

$$f(x_0;\ x_1;\ x_2) = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)}.$$

2 интерполяционный полином Лагранжа

Лагранж, Жозеф Луи предложил для интерполяции использовать многочлен вида:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

где базисные полиномы определяются по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

где $l_i(x)$ обладают следующими свойствами:

- являются многочленами степени n
- $l_i(x_i) = 1$
- $l_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$

3 оценка погрешности при интерполяции полиномом Лагранжа

В работе [2] (стр.32) дается строгая оценка погрешнисти при интерполяции полиномом Лагранжа.

Погрешность удобно представить в следующем виде [1] :

$$y(x) - \mathcal{P}_n(x) = \omega_n(x) r(x), \qquad \omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{1}$$

ибо эта погрешность заведомо равна нулю во всех узлах интерполяции. Введем вспомогательную функцию $q(\xi) = y(\xi) - \mathcal{P}_n(x) - \omega_n(x) r(x)$, где x играет роль параметра и принимает любое фиксированное значение. Очевидно, $q(\xi) = 0$ при $\xi = x_0, x_1, ...x_n$ и при $\xi = x$, т.е. обращается в нуль в $n + 2$ точках.

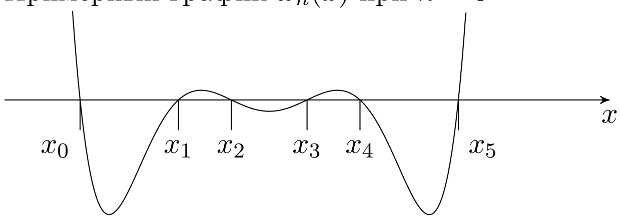
[1] $\mathcal{P}_n(x)$ – интерполяционный полином Лагранже

Предположим, что $y(x)$ имеет в $n+1$ непрерывную производную; тогда то же справедливо для $q(\xi)$. Между двумя нулями гладкой функции лежит нуль её производной. Последовательно применяя это правило, получим, что между крайними из $n+2$ нулей функции лежит $n+1$ нуль производной. Но $q^{(}n+1)(\xi) = y^{(}n+1)(\xi) - (n+1)!r(x)$, [2] и если в какой-то точке ξ^*, лежащей между указанными выше нулями, она обращается в нуль, то $r(x) = y^{(}n+1)(\xi^*)/(n+1)!$. Заменяя погрешность (1) максимально возможной, получаем оценку погрешности:

$$| y(x) - \mathcal{R}_n(x) | \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | \omega_n(x) |, \qquad M_{n+1} = max \mid y^{(n+1)}(\xi) \mid$$

Обратим внимание, что x не обязательно должно лежать в интервале $[x_0, x_n]$, а может лежать и вне интервала.

Примерный график $\omega_n(x)$ при $n = 5$



4 теорема о среднем(вариант)

Для непрерывных функций если $f(x) \in C[a, b]$ и величины α и β имеют одинаковые знаки, то

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(\xi), \qquad a \le \xi \le b$$

При $f(a) = f(b)$ это очевидно. Если $f(a) \neq f(b)$, то функция $\psi(x) = \alpha f(a) + \beta f(b) - (\alpha + \beta) f(x))$ принимает на концах отрезка $[a,\ b]$ значения разных знаков и, следовательно, существует точка $\xi \in [a,\ b]$, в которой $\psi(x) = 0$.

5 разложение по формуле Тейлора

Будем рассматривать класс $C_k[a, b]$ функций, имеющих на $[a, b]$ непрерывную производную $k-$го порядка. Такие функции разложимы по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + ... + \frac{f^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{f^{(k)}(\xi)(x-a)^k}{k!}$$

где ξ – некоторая точка из промежутка $[a, x]$.

[2] выражение $y^{(n)}(x)$ означает $n-$ую производную функции $y(x)$

6 линейная аппроксимация

вопрос: для чего мы находили полином Лагранжа.

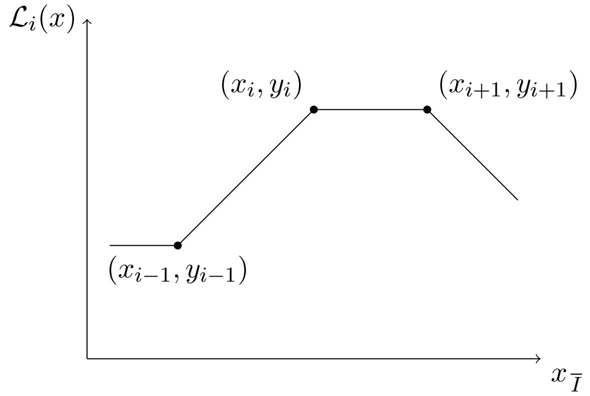
ответ: для оценки погрешности при интерполяции полиномом $n-$ой степени, где полином проходит через все точки $(x_i,\ y_i)$, $i \in 1,...,n+1$. В случае сплайн-интерполяции интерполяция проводится полиномом третьей степени, и есть отличие: на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}$ полином проходит только через две точки $(x_i,\ y_i)$ и $(x_{i+1},\ y_{i+1})$

Функция $\mathcal{L}$ - кусочно-линейная функция, со значениями f_i в точках с координатами x_i, иначе эта функция называется *интерполяциолнный сплайн первой степени*

Интерполяционный сплайн определяется условиями

$$\mathcal{L}(x_i) = f_i, \quad i = 0, ..., N \tag{2}$$

Геометрически он представляет собой ломанную, проходящую через точки $(x_i,\ y_i)$, где $y_i = f_i$



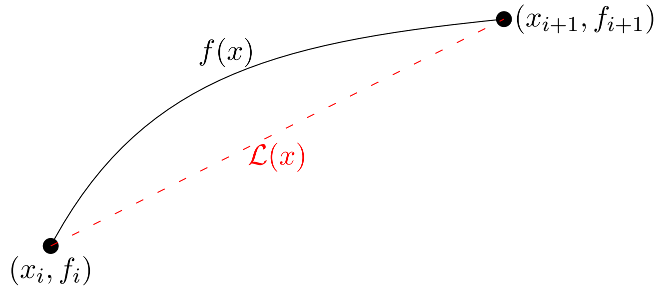
Если обозначить $h_i = x_{i+1} - x_i$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ уравнение сплайна первой степени будет иметь вид

$$\mathcal{L}(x) = f_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \tag{3}$$

или

$$\mathcal{L}(x) = f_i + \frac{x - x_i}{h_i}(f_{i+1} - f_i) \tag{4}$$

вернемся к предпоследнему рисунку на доске:



Получим оценку разности $\mathcal{R}(x) =\mid \mathcal{L}(x) - f(x) \mid$.

Взяв для $\mathcal{L}$ представление при $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\mathcal{L}(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1}, \qquad \text{где } t = (x - x_i)/h_i$$

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{L}(x) - f(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1} - f(x) \tag{5}$$

Пусть $f(x) \in C[a, b]$ непрерывна.

применяя к выражению $(1-t)f_i + tf_{i+1}$ теорему о среднем, получаем

$$\mathcal{R}(x) = f(\xi) - f(x), \qquad \xi \in [x_i, x_{i+1}].$$

Следовательно,

$$\mid \mathcal{R}(x) \mid \leq \omega(f),$$

где $\omega(f) = \max\limits_{0<i<N-1} \omega_i f, \qquad$ и $\omega_i(f) = \max\limits_{x',x'' \in [x_i, x_{i+i}]} \mid f(x') - f(x'') \mid$

Пусть $f(x)$ достаточно гладкая (производные нужных нам порядков непрерывны). По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f_i = f(x) - th_i f'(\xi), \qquad f_{i+1} = f(x) + (1-t)h_i f'(\eta)$$

где $\xi, \eta \in [x_i, x_{i+1}]$ и $t = (x - x_i)/h_i$

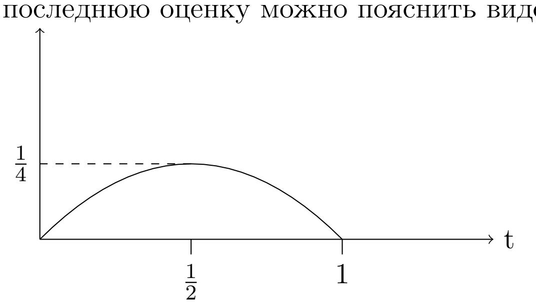
Подставив эти выражения в (5), получаем

$$\mathcal{R}(x) = t(1-t)h_i \left[f'(\eta) - f'(\xi)\right]$$

Следовательно,

$$\mid \mathcal{R}(x) \mid \leqslant t(1-t)h_i\omega_i(f') \leqslant \frac{1}{4}\bar{h}\omega(f')$$

последнюю оценку можно пояснить видом графика $t(1-t)$:



Наконец, если функция имеет вторую непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. По формуле Тейлора

$$f_i = f(x) - th_i f'(x) + \frac{t^2 x_i^2}{f}'' (\xi),$$

$$f_{i+1} = f(x) + (1-t)h_i f'(x) + \frac{(1-t)^2 x_i^2}{f}''(\eta),$$

Из формулы (5) следует, что

$$\mathcal{R}(x) = (1-t)\frac{t^2 h_i^2}{2} f''(\xi) + t\frac{(1-t)^2 x_i^2}{f}''(\eta)$$

по теореме о среднем

$$\mid \mathcal{R}(x) \mid \leqslant \frac{1}{2} h_i^2 t(1-t) \mid f''(\xi) \mid \leqslant \frac{1}{8}\bar{h}^2 \mid f''(\xi) \mid$$

7 Оценки погрешности интерполяции эрмитовыми кубическими сплайнами

В работе [1] приводятся оценки для функций разных классов. Если $S_3(x)$ эрмитов кубический сплайн интерполирует на сетке функцию f(x) то имеют место оценки

$$\mid S_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \mid \leqslant \mathcal{R}_r, r = 0, 1, 2, 3$$

Если функция достаточно гладкая, то

$$\mid S_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \mid \leqslant \frac{1}{384}\bar{h}^4 \mid f^{IV}(x) \mid$$

где, $\bar{h} = \left| x_{\substack{\text{точка, в которой}\\ \text{вычисляется}\\ \text{погрешность}}} - x_{\text{ближайшее } i} \right|$

Список литературы

[1] Ю.С. Завьялов. *Методы сплайн-функций.* М.Наука, 1980.

[2] Калиткин. *Численные методы.* М.,Мир, 1980.

[3] *Разделённая разность.* 2015. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%91%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C.