Задание 1. собственные числа и собственные вектора матрицы $\mathbb{A}$ удовлетворяют уравнению:

$$\mathbb{A} \cdot \vec{V}_i = \lambda_i \vec{V}_i \tag{1}$$

где $\vec{V}_i$ – вектор-столбец, соответствующий собственному числу λ_i.

Пояснение к заданию 2.

Умножим матрицу $\mathbb{A}$ на матрицу состоящую из вектор-столбцов собственных векторов

$$\mathbb{A} \cdot \begin{pmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{V}_1 & \lambda_2 \vec{V}_2 & \lambda_3 \vec{V}_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Возьмём вектора с тильдами $\tilde{\vec{V}}_1$, $\tilde{\vec{V}}_2$ и $\tilde{\vec{V}}_3$ такие что скалярные произведения векторов $(\tilde{\vec{V}}_i \cdot \vec{V}_k)$ записанные в виде "строка на столбец" удовлетворяют условию:

$$(\tilde{\vec{V}}_i \cdot \vec{V}_k) \ = \ \tilde{\vec{V}}_i \cdot \vec{V}_k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \tag{3}$$

Составим матрицу строки которой состоят из координат векторов $\tilde{\vec{V}}_i$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{V}}_1 \\ \tilde{\vec{V}}_2 \\ \tilde{\vec{V}}_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Из условий (3) очевидно, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{V}}_1 \\ \tilde{\vec{V}}_2 \\ \tilde{\vec{V}}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Произведение матриц равно единичной матрице. отсюда следует, что матрица $\begin{pmatrix} \tilde{\vec{V}}_1 \\ \tilde{\vec{V}}_2 \\ \tilde{\vec{V}}_3 \end{pmatrix}$ есть обратная матрица к матрице $\begin{pmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{V}}_1 \\ \tilde{\vec{V}}_2 \\ \tilde{\vec{V}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Из за того, что матрица (4) обратная к матрице составленной из собственных векторов-столбцов их можно переставлять местами:

$$\begin{pmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\vec{V}}_1 \\ \tilde{\vec{V}}_2 \\ \tilde{\vec{V}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Умножая обратную матрицу слева на левую и правую части уравнения (2) получаем

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{V}}_1 \\ \tilde{\vec{V}}_2 \\ \tilde{\vec{V}}_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{A} \cdot \begin{pmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\vec{V}}_1 \\ \tilde{\vec{V}}_2 \\ \tilde{\vec{V}}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{V}_1 & \lambda_2 \vec{V}_2 & \lambda_3 \vec{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Предъявим вектора $\tilde{\vec{V}}_i$.

Для этого заметим, что результат векторного произведения векторов перпендикулярен векторам из которых оно состоит. Это значит что $\tilde{\vec{V}}_i$ пропорционален векторному произведению $[\vec{V}_k \times \vec{V}_l]$, где $i \neq k$ и $i \neq l$.

$$\tilde{\vec{V}}_i \sim [\vec{V}_k \times \vec{V}_l]$$

Коэффициент пропорциональности выберем таким чтобы скалярное произведение равнялось $1 = (\tilde{\vec{V}}_i \cdot \vec{V}_i) = \tilde{\vec{V}}_i \cdot \vec{V}_i$ когда индексы i совпадают.

$$\vec{V}_i = \tilde{\vec{V}}_i = \frac{[\vec{V}_k \times \vec{V}_l]}{(\vec{V}_i \cdot [\vec{V}_k \times \vec{V}_l])} \tag{7}$$

Задание 2.

По уравнению (7) найти обратную матрицу матрице составленной из собвстенных вектор-столбцов.

Доказать, что верны соотношение (5) и соотношение (6).