

At $t=0$ we have $i_1(0) = i_{10}$ and $i_2(0) = i_{20}$.

$$U = const$$

Lets get graphs for $i_1(t), i_2(t)$ from analitic solution of differencial equations for the circuit.

$$\begin{cases} U_1 = L \frac{\partial i_1}{\partial t} + R i_1 & \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 i_1}{\partial t^2} + R \frac{\partial i_1}{\partial t} \\ U_1 = L \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau & \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} + \frac{1}{C} i_2 \end{cases} \quad (1)$$

Из первого и второго уравнения системы (1) получаем:

$$R \frac{\partial i_1}{\partial t} = \frac{1}{C} i_2 \Rightarrow \frac{\partial i_1}{\partial t} = \frac{1}{RC} i_2 \quad (2)$$

из первого уравнения системы (1):

$$\frac{\partial i_1}{\partial t} + \frac{\partial i_2}{\partial t} = -\frac{R}{L} i_1 + \frac{U_1}{L}$$

В этом уравнении заменим $\frac{\partial i_1}{\partial t}$ из (2):

$$\frac{\partial i_2}{\partial t} = -\frac{R}{L} i_1 - \frac{1}{RC} i_2 + \frac{U_1}{L}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{RC} \\ -\frac{R}{L} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_1}{L} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Предполагая решение в виде $i(t) = e^{\lambda t}$ получаем характеристическое уравнение.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{RC} \\ -\frac{R}{L} & -\lambda - \frac{1}{RC} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega$$

$$i_1(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} + \frac{U_1}{R}$$

$$i_2(t) = (A \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 t}) \frac{1}{2\alpha}$$

При $t = 0$ получаем:

$$A + B + \frac{U_1}{R} = i_{10}$$

$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B = i_{20} \cdot 2\alpha$$

Для определения коэффициентов получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1(0) - \frac{U_1}{R} \\ i_2(0) \cdot 2\alpha \end{pmatrix}$$

решая в Reduce-algebra

```
1 m:=mat((1,1),(lambda_1,lambda_2));
2 mf:=mat((i_10-u/R),(i_20));
3 coef:= 1/m*mf;
```

$$\begin{aligned} A &= -\frac{i_1(0)\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{i_2(0) \cdot 2\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{U}{R} \\ B &= \frac{i_1(0)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{i_2(0) \cdot 2\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{U}{R} \end{aligned}$$

упростим

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}} = j\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}} = 2j \cdot \mathcal{I}m = 2j\omega$$

еще три упрощения:

$$\frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = -e^{-\alpha t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{-\alpha t} \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

$$\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = -e^{-\alpha t} \left(\cos(\omega t) - \frac{\alpha}{\omega} \right)$$

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{i_1(0) - \frac{U}{R}}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) + \frac{i_2(0) 2\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) + \frac{U}{R} = \\
&= e^{-\alpha t} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right) + i_2(0) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] + \frac{U}{R} = \\
&= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) (\omega \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)) + i_2(0) \sin(\omega t) \right] + \frac{U}{R} \\
i_2(t) &= RC \left\{ -\alpha e^{-\alpha t} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right) + i_2(0) \frac{2\alpha \cdot \sin(\omega t)}{\omega} \right] + \right. \\
&\quad \left. + e^{-\alpha t} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) (-\omega \sin(\omega t) + \alpha \cos(\omega t)) + i_2(0) 2\alpha \cos(\omega t) \right] \right\} = \\
&= e^{-\alpha t} \frac{1}{2\alpha} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \left(-\omega - \frac{\alpha^2}{\omega} \right) \sin(\omega t) + i_2(0) \cdot 2\alpha \left(\cos(\omega t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right]
\end{aligned}$$

здесь заметим, что

$$\alpha^2 + \omega^2 = \frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC} - \frac{1}{(2RC)^2} = \frac{1}{LC}; \quad \frac{1}{2\alpha} = RC; \quad \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} = \frac{R}{L}$$

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[- \left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \frac{R}{L} \sin(\omega t) + i_2(0) \frac{1}{2\alpha} (\omega \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)) \right] = \\
&\frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[- \left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \frac{R}{L} \sin(\omega t) + i_2(0) RC (\omega \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)) \right]
\end{aligned}$$

Введем новые переменные $\tilde{i}_1(t) = i_1(t) - \frac{U}{R}$, $\tilde{i}(t) = i(t) - \frac{U}{R}$
тогда:

$$\begin{aligned}
\tilde{i}_1(t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} [\tilde{i}_1(0) (\omega \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)) + i_2(0) \cdot 2\alpha \sin(\omega t)] \\
i_2(t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[-\tilde{i}_1(0) \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega t) + i_2(0) (\omega \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)) \right]
\end{aligned}$$

$$\tilde{i}(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[\omega \tilde{i}_1(0) \left(\omega \cos(\omega t) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega t) \right) + i_2(0) (\omega \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)) \right]$$

Построить графики аналитического решения для токов $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i(t)$ с помощью программы **gnuplot**. Пример построения в программе **gnuplot** представлен ниже:

```

1  u=24.
2  r=1200.
3  c=277.777/10000000000.
4  l=0.04
5  w= sqrt(1./l/c - 1./4./r/r/c/c)
6  a=1./2./r/c
7  i10=0.
8  i20=0.
9
10 set xrange [0:0.004]
11 plot exp(-a*x)*((i10-u/r)*(a/w*sin(w*x)+cos(w*x))+i20*2*a/w*sin(w*x))+u/r, \
12 exp(-a*x)/w*((i10-u/r)*(w*cos(w*x) + (a*a-w*w)/2/a*sin(w*x)) + \
13 i20*(w*cos(w*x) + a*sin(w*x)))

```

Получить численное решение дифференциальных уравнений с помощью программы **octave**. Пример численного решения в программе **octave** представлен ниже:

```

1  function xdot = f (x,t)
2  l=0.04;
3  c=0.0000002777;
4  r=1200;
5  u=24;
6  xdot(1) = 1/(r*c)*x(2);
7  xdot(2) = -r/l*x(1) - 1/(r*c)*x(2) + u/l;
8  endfunction
9  x = lsode("f", [0.0,0.0], (t = linspace(0,0.004,200000)'));
10 set term dumb;
11 plot(t,x);

```

Смоделировать решение дифференциальных уравнений с помощью программы **ngspice**. Пример моделирования решения с помощью **ngspice** представлен ниже:

```

1  check
2  *
3  V1 1 0 24
4  L1 1 2 0.04 ic=0
5  C1 2 0 0.2777u ic=0
6  R1 2 0 1200
7  .control

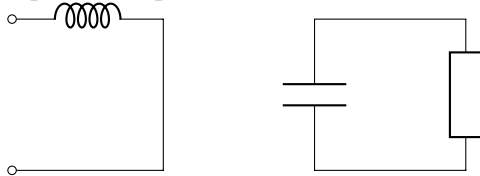
```

```

8 tran 0.0000000001 0.004 uic
9 .endc
10 .end

```

Сравнить решения.



уравнение цепи на интервале $(n + \gamma)T \leq t \leq (n + 1)T$

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

для уравнения получаем решение

$$U_C(t) = B_c e^{-\frac{1}{RC}t}$$

аналогично для тока через резистор

$$i_1(t) = i_1(n + \gamma) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$i_1(n + 1) = i_1(n + \gamma) e^{-\frac{1}{RC}(1-\gamma) \cdot T}$$

для цепи с индуктивностью

$$U = L \frac{di_L}{dt}$$

решение уравнения:

$$i(t) = i(n + \gamma) + \frac{U}{L} \cdot t$$

0.1 Laplace way

$$\begin{cases} Li'_1 + Li'_2 + Rx & = U \\ Li'_1 + Li'_2 + \frac{1}{C} \int i_2 d\tau & = U \end{cases}$$

$$\begin{cases} i'_1 & = \frac{1}{RC} i_2 \\ i'_2 & = \frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1 - \frac{1}{RC} i_2 \end{cases}$$

Делаем замену

$$\frac{U}{L} \doteq \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p}; \quad i_1 \doteq \tilde{I}_1; \quad i_2 \doteq \tilde{I}_2; \quad i'_1 = \tilde{I}_1 \cdot p - i_1(0); \quad i'_2 = p\tilde{I}_2 - i_2(0)$$

$$\begin{cases} p \cdot \tilde{I}_1 - i_1(0) &= \frac{1}{RC} \cdot \tilde{I}_2 \\ p \cdot \tilde{I}_2 - i_2(0) &= \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p} - \frac{R}{L} \cdot \tilde{I}_1 - \frac{1}{RC} \cdot \tilde{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \cdot I_1 - \frac{1}{RC} \cdot I_2 &= i_1(0) \\ \frac{R}{L} \cdot I_1 + \left(p + \frac{1}{RC}\right) I_2 &= i_2(0) + \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} p & -\frac{1}{RC} \\ \frac{R}{L} & p + \frac{1}{RC} \end{array} \right| = p \left(p + \frac{1}{RC} \right) = p^2 + \frac{1}{RC} \cdot p + \frac{1}{LC} = p^2 + \frac{1}{RC} \cdot p + \frac{1}{LC} =$$

$$= p^2 + 2 \cdot \frac{1}{2RC} p + \frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC} = \left(p + \frac{1}{2RC} \right)^2 - \frac{1}{4R^2C^2} \left(1 - \frac{4R^2C}{L} \right) =$$

$$= \left(p + \frac{1}{2RC} \right)^2 + \frac{1}{4R^2C^2} \left(\frac{4R^2C}{L} - 1 \right)$$

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{cc} i_1(0) & -\frac{1}{RC} \\ i_2(0) + \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p} & \left(p + \frac{1}{RC}\right) \end{array} \right| = i_1(0) \left(p + \frac{1}{RC} \right) + \frac{1}{RC} \left(i_2(0) + \frac{U}{L} \cdot 1p \right) =$$

$$= \frac{1}{RC} (i_1(0) + i_2(0)) + i_1(0) \cdot p + \frac{U}{RLC} \cdot 1p$$

$$\Delta_2 = \left| \begin{array}{cc} p & i_1(0) \\ \frac{R}{L} & i_2(0) + \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p} \end{array} \right| = p \left(i_2(0) + \frac{U}{L} \cdot 1p \right) - i_1(0) \frac{R}{L} = i_2(0)p + \frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0)$$

$$I_1(p) = \frac{\frac{1}{RC} (i_1(0) + i_2(0)) + i_1(0) \cdot p + \frac{U}{RLC} \cdot \frac{1}{p}}{\left(p + \frac{1}{2RC} \right)^2 + \frac{1}{4R^2C^2} \left(\frac{4R^2C}{L} - 1 \right)}$$

$$I_2(p) = \frac{\frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0) + i_2(0) \cdot p}{\left(p + \frac{1}{2RC} \right)^2 + \frac{1}{4R^2C^2} \left(\frac{4R^2C}{L} - 1 \right)}$$

разлагаем на множители знаменатель, и заменяем переменные

$$\alpha = \frac{1}{2RC}; \omega = \frac{1}{2RC} \sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}$$

$$\Delta = \left(p + \frac{1}{2RC} \right)^2 + \frac{1}{4R^2C^2} \left(\frac{4R^2C}{L} - 1 \right) = (p + \alpha)^2 - (-1) \cdot \omega^2 =$$

$$= (p + \alpha)^2 - (j \cdot \omega)^2 = (p + \alpha - j \cdot \omega)(p + \alpha + j \cdot \omega)$$

Разлагаем на множители по правилу:

$$\xi p + \zeta = \frac{A}{p + a} + \frac{B}{p + b}$$

если $p = -a$, то $-\xi a + \zeta = A(b - a)$

если $p = -b$, то $-\xi b + \zeta = B(b - a)$

В нашем случае:

$$b = \alpha + i\omega; a = \alpha - i\omega; \xi = i_2(0); \zeta = \frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) \Rightarrow$$

$$\zeta - \xi a = \frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) - i_2(0)(\alpha - j\omega)$$

$$\zeta - \xi b = \frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) - i_2(0)(\alpha + j\omega)$$

$$b - a = 2j\omega$$

$$\begin{aligned} I_2(p) &= \frac{\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) + i_2(0) \cdot p}{\left(p + \frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{4R^2C^2} \left(\frac{4R^2C}{L} - 1\right)} = \frac{\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) + i_2(0) \cdot p}{(p + \alpha - j \cdot \omega)(p + \alpha + j \cdot \omega)} = \\ &= \frac{\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) - i_2(0)(\alpha - j\omega)}{2j\omega} \frac{1}{(p + \alpha - j\omega)} - \frac{\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) - i_2(0)(\alpha + j\omega)}{2j\omega} \frac{1}{(p + \alpha + j\omega)} = \\ &= \frac{\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) - i_2(0)\alpha}{2j\omega} \left[\frac{1}{p + \alpha - j\omega} - \frac{1}{p + \alpha + j\omega} \right] + \frac{i_2(0)}{2} \left[\frac{1}{p + \alpha - j\omega} + \frac{1}{p + \alpha + j\omega} \right] \doteq \end{aligned}$$

После обратного преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} &\doteq \frac{\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) - i_2(0)\alpha}{2j\omega} [e^{-\alpha t} \cdot e^{j\omega t} - e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}] + \frac{i_2(0)}{2} [e^{-\alpha t} \cdot e^{j\omega t} + e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}] = \\ &= \frac{\left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) - i_2(0)\alpha\right) e^{-\alpha t}}{\omega} \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] + i_2(0) e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] \\ i_2(t) &= \left[\left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i_1(0) - i_2(0)\alpha \right) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + i_2(0) \cos(\omega t) \right] e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

заменяя координаты $\tilde{i}_1(t) = i_1(t) - \frac{U}{R}$, а также $\frac{R}{L} = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha}$

$$i_2(t) = e^{-\alpha t} \left[\left(-\frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} \tilde{i}_1(0) - \alpha i_2(0) \right) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + i_2(0) \cos(\omega t) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} i_2(t) &= -\alpha e^{-\alpha t} \left[\left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0) - i_2(0) \alpha \right) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + i_2(0) \cos(\omega t) \right] + \\ &+ e^{-\alpha t} \left[\left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0) - i_2(0) \alpha \right) \cos(\omega t) - i_2(0) \omega \sin(\omega t) \right] = \\ &= e^{-\alpha t} \left[\left(-\left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0) - \alpha i_2(0) \right) \frac{\alpha}{\omega} - i_2(0) \omega \right) \sin(\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\alpha i_2(0) + \frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0) - \alpha i_2(0) \right) \cos(\omega t) \right] \end{aligned}$$

Из системы

$$\begin{cases} L(i_1' + i_2') + Ri_1 = U \\ i_1' = \frac{1}{RC} i_2 \end{cases} \Rightarrow i_1 = \frac{U}{R} - \frac{L}{R} \left(i_2' + \frac{1}{RC} i_2 \right)$$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{U}{R} - \frac{L}{R} \left[\left(-\left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0) - \alpha i_2(0) \right) \frac{\alpha}{\omega} - \omega i_2(0) \right) \sin(\omega t) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0) - 2\alpha i_2(0) \right) \cos(\omega t) + \frac{1}{RC} \left(\left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1(0) - \alpha i_2(0) \right) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + i_2(0) \cos(\omega t) \right) \right] = \\ &= \frac{U}{R} - \frac{L}{R} \left[\left(\left(-\frac{U - Ri_1(0)}{L} + \alpha i_2(0) \right) \frac{\alpha}{\omega} - \omega i_2(0) + 2\alpha \left(\frac{U - Ri_1(0)}{L} - \alpha i_2(0) \right) \frac{1}{\omega} \right) \sin(\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{U - Ri_1(0)}{L} - 2\alpha i_2(0) + 2\alpha i_2(0) \right) \cos(\omega t) \right] e^{-\alpha t} = \\ &= \frac{U}{R} - e^{-\alpha t} \frac{L}{R} \left[\frac{U - Ri_1(0)}{L} \cos(\omega t) + \left(\frac{\alpha}{\omega} \left(\frac{2(U - Ri_1(0))}{L} - 2\alpha i_2(0) + \alpha i_2(0) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{U - Ri_1(0)}{L} \right) - \alpha i_2(0) \right) \sin(\omega t) \right] = \\ &= \frac{U}{R} - e^{-\alpha t} \frac{L}{R} \left[\frac{U - Ri_1(0)}{L} \cos(\omega t) + \left(\frac{\alpha}{\omega} \left(\frac{U - Ri_1(0)}{L} - i_2(0) \alpha \right) - i_2(0) \omega \right) \sin(\omega t) \right] \\ i_1(t) &= \frac{U}{R} - e^{-\alpha t} \left[-\tilde{i}_1(0) \cos(\omega t) + \left(\frac{\alpha}{\omega} (-\tilde{i}_1(0)) - i_2(0) \frac{\alpha^2 L}{\omega R} - i_2(0) \omega \frac{L}{R} \right) \sin(\omega t) \right] \\ \tilde{i}_1(t) &= e^{-\alpha t} \left[\tilde{i}_1(0) \cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \tilde{i}_1(0) + \frac{2\alpha}{\omega} i_2(0) \sin(\omega t) \right] \end{aligned}$$

0.2 Дискретное преобразование Лапласа

$$i_1(n+1) = U_c(n+1)/R$$

$$i_2(n+1) = i(n+1) - i_1(n+1)$$

$$U_c(n+1) = U_c(n+\gamma)e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}}$$

$$i_1(n+1) = i_1(n+\gamma)e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}}$$

$$i(n+1) = i(n+\gamma) + \frac{U}{L} \cdot (1-\gamma)T$$

$$U_c(n+\gamma) = R \cdot i_1(n+\gamma)$$

$$\tilde{i}(n+\gamma) = \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1(n) \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + i_2(n) (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) \right]$$

Выразим $n+1$ через n :

$$\begin{aligned} \tilde{i}[n+1] &= \frac{U}{L} \cdot (1-\gamma)T + \\ &+ \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + i_2[n] (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) \right] = \\ &= \frac{U}{L} \cdot (1-\gamma)T + \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{i}[n] - \tilde{i}_1[n]) (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) \right] \\ \tilde{i}_1[n+1] + \frac{U}{R} &= \left(\frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} [\tilde{i}_1[n] (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) + i_2[n] 2\alpha \sin(\omega\gamma T)] + \frac{U}{R} \right) e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}} = \\ &= \frac{e^{-\alpha\gamma T - \frac{(1-\gamma)T}{RC}}}{\omega} (\tilde{i}_1[n] (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) + (\tilde{i}[n] - \tilde{i}_1[n]) 2\alpha \sin(\omega\gamma T)) + \frac{U}{R} e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}} \end{aligned}$$

На основании теоремы сдвига:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} D \{i[n+1]\} &= e^q I^*(q) - e^q i[0] \\ D \{i_1[n+1]\} &= e^q I_1^*(q) - e^q i_1[0] \end{aligned} \right\} \\ e^q I^*(q) - e^q i[0] - \frac{U}{L} \cdot (1-\gamma)T \frac{e^q}{e^q - 1} = \\ = \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[-\tilde{I}_1^*(q) \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) + I^*(q) (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^q \tilde{I}_1^*(q) - e^q i_1[0] + \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}} \right) \frac{e^q}{e^q - 1} = \\
& = \frac{e^{-\alpha\gamma T - \frac{(1-\gamma)T}{RC}}}{\omega} \left(\tilde{I}_1^*(q) (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) + \left(I^*(q) - \tilde{I}_1^*(q) \right) \cdot 2\alpha \sin(\omega\gamma T) \right)
\end{aligned}$$

получаем систему уравнений относительно $I(q)$ и $\tilde{I}_1(q)$:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) - e^q & -\frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \\ 2\alpha \frac{e^{-\alpha\gamma T - \frac{(1-\gamma)T}{RC}}}{\omega} \sin(\omega\gamma T) & \frac{e^{-\alpha\gamma T - \frac{(1-\gamma)T}{RC}}}{\omega} (\omega \cos(\omega\gamma T) - \alpha \sin(\omega\gamma T)) - e^q \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} I^*(q) \\ \tilde{I}_1^*(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^q i_1[0] - \frac{U}{L} \cdot (1-\gamma)T \frac{e^q}{e^q - 1} \\ -e^q i_1[0] + \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}} \right) \frac{e^q}{e^q - 1} \end{pmatrix} \\
& -\alpha\gamma T - \frac{1-\gamma}{RC} T = -\alpha\gamma T - 2\alpha(1-\gamma)T = -\alpha(2-\gamma)T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) - e^q & -\frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \\ 2\alpha \frac{e^{-\alpha(2-\gamma)T}}{\omega} \sin(\omega\gamma T) & \frac{e^{-\alpha(2-\gamma)T}}{\omega} (\omega \cos(\omega\gamma T) - \alpha \sin(\omega\gamma T)) - e^q \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} I^*(q) \\ \tilde{I}_1^*(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^q i_1[0] - \frac{U}{L} \cdot (1-\gamma)T \frac{e^q}{e^q - 1} \\ -e^q i_1[0] + \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}} \right) \frac{e^q}{e^q - 1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

0.3 Предельное значение

Предельное значение $t \rightarrow \infty$ определяется по формуле:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{q \rightarrow 0} (e^q - 1) F^*(q)$$

Предельное значение можно найти с помощью reduce-algebra

```

1 m:=mat((e^(-a*g*T)/w*(w*cos(w*g*T) + a*sin(w*g*T)) - e^q,
2 -e^(-a*g*T)/w*(a^2+w^2)/2/a*sin(w*g*T)),
3 (e^(-a*(2-g)*t)*2*a/w*sin(w*g*t),
4 e^(-a*(2-g)*t)/w*(w*cos(w*g*T) - a*sin(w*g*T))-e^q));
5

```

```

6 f:=mat(( -e^q*i0 -U/L*(1-g)*t*e^q/(e^q-1) ),
7 (-e^q*i20+U/R*(1-e^(-2*a*(1-g)*t))*e^q/(e^q-1)));
8
9 mm:=1/m*f;
10
11 IL:=limit(mm(1,1)*(e^q-1),q,0); // current through L
12 Ir:=limit(mm(2,1)*(e^q-1),q,0); // current through R

```

reduce-algebra дает решение для $\lim_{q \rightarrow 0} (e^q - 1)F^*(q)$

```

1      2*a*g*t      2*a*g*t
2 IL:=(u*(2*e      *cos(g*t*w)*a*g*r*t*w - 2*e      *cos(g*t*w)*a*r*t*w
3
4      2*a*g*t      2      2*a*g*t      2
5 - 2*e      *sin(g*t*w)*a *g*r*t - e      *sin(g*t*w)*a *l
6
7      2*a*g*t      2      2*a*g*t      2
8 + 2*e      *sin(g*t*w)*a *r*t - e      *sin(g*t*w)*l*w
9
10      a*g*t + 2*a*t      a*g*t + 2*a*t
11 - 2*e      *a*g*r*t*w + 2*e      *a*r*t*w
12
13      2*a*t      2      2*a*t      2
14 + e      *sin(g*t*w)*a *l + e      *sin(g*t*w)*l*w ))/(2*a*l*r*(
15
16      a*g*t      2      2*a*g*t      2*a*t
17 e      *cos(g*t*w) *w - e      *cos(g*t*w)*w - e      *cos(g*t*w)*w
18
19      2*a*g*t      a*g*t+2*a*t      a*g*t      2
20 + e      *sin(g*t*w)*a + e      *w + e      *sin(g*t*w) *w
21
22      2*a*t
23 - e      *sin(g*t*w)*a))

```

Знаменатель

$$2\alpha LR \cdot (e^{\alpha\gamma T}\omega - \cos(\gamma\omega T)\omega (e^{2\alpha\gamma T} + e^{2\alpha T}) + \sin(\gamma\omega T) (e^{2\alpha\gamma T} - e^{2\alpha T}) \alpha)$$

Числитель

$$\begin{aligned}
& 2e^{2\alpha\gamma T} \cos(\gamma\omega T) \alpha \omega RT (\gamma - 1) + e^{2\alpha\gamma T} \alpha^2 RT (1 - \gamma) \sin(\gamma\omega T) - e^{2\alpha\gamma T} \sin(\gamma\omega T) L (\alpha^2 + \omega^2) \\
& + 2e^{\alpha\gamma T + 2\alpha T} \alpha R \omega T (1 - \gamma) + e^{2\alpha T} \sin(\gamma\omega T) L (\alpha^2 + \omega^2)
\end{aligned}$$