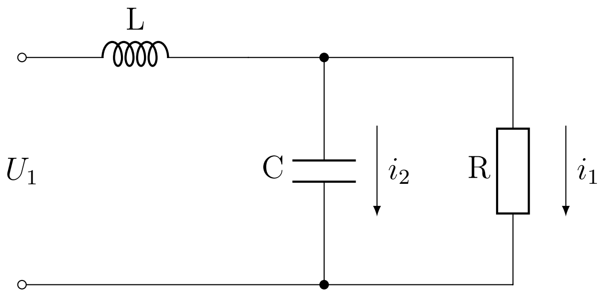


At t=0 we have $i_1(0) = i_{10}$ and $i_2(0) = i_{20}$.

$$U = const$$

Lets get graphs for $i_1(t), i_2(t)$ from analitic solution of differencial equations for the circuit.

$$\begin{cases} U_1 = L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri_1 & \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + R\frac{\partial i_1}{\partial t} \\ U_1 = L\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i_2(\tau)d\tau & \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{1}{C}i_2 \end{cases} \tag{1}$$

Из первого и второго уравнения системы (1) получаем:

$$R\frac{\partial i_1}{\partial t} = \frac{1}{C}i_2 \Rightarrow \frac{\partial i_1}{\partial t} = \frac{1}{RC}i_2 \tag{2}$$

из первого уравнения системы (1):

$$\frac{\partial i_1}{\partial t} + \frac{\partial i_2}{\partial t} = -\frac{R}{L}i_1 + \frac{U_1}{L}$$

В этом уравнении заменим $\frac{\partial i_1}{\partial t}$ из (2):

$$\frac{\partial i_2}{\partial t} = -\frac{R}{L}i_1 - \frac{1}{RC}i_2 + \frac{U_1}{L}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{RC} \\ -\frac{R}{L} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_1}{L} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Предполагая решение в виде $i(t) = e^{\lambda t}$ получаем характеристическое уравнение.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{RC} \\ -\frac{R}{L} & -\lambda - \frac{1}{RC} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega$$

$$i_1(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} + \frac{U_1}{R}$$

$$i_2(t) = \left(A \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right) \frac{1}{2\alpha}$$

При $t = 0$ получаем:

$$A + B + \frac{U_1}{R} = i_{10}$$

$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B = i_{20} \cdot 2\alpha$$

Для определения коэффициентов получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1(0) - \frac{U_1}{R} \\ i_2(0) \cdot 2\alpha \end{pmatrix}$$

решая в Reduce-algebra

```
m:=mat((1,1),(lambda_1,lambda_2));
mf:=mat((i_10-u/R),(i_20));
coef:= 1/m*mf;
```

$$\begin{aligned} A &= -\tfrac{i_1(0)\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} + \tfrac{i_2(0)\cdot 2\alpha}{\lambda_1-\lambda_2} + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\tfrac{U}{R} \\ B &= \tfrac{i_1(0)\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} - \tfrac{i_2(0)\cdot 2\alpha}{\lambda_1-\lambda_2} - \tfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\tfrac{U}{R} \end{aligned}$$

упростим

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}} = j\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}} = 2j \cdot \mathcal{I}m = 2j\omega$$

еще три упрощения:

$$\frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = -e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{-\alpha t}\frac{\sin \omega t}{\omega}$$

$$\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = -e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega t) - \frac{\alpha}{\omega}\right)$$

$$i_1(t) = \frac{i_1(0) - \frac{U}{R}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(-\lambda_2 e^{\lambda_1 \cdot t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 \cdot t}\right) + \frac{i_2(0)2\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 \cdot t} - e^{\lambda_2 \cdot t}\right) + \frac{U}{R} =$$

$$= e^{-\alpha t}\left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R}\right)\left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right) + i_2(0)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right] + \frac{U}{R} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega}\left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R}\right)(\omega\cos(\omega t) + \alpha\sin(\omega t)) + i_2(0)\sin(\omega t)\right] + \frac{U}{R}$$

$$i_2(t) = RC\left\{-\alpha e^{-\alpha t}\left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R}\right)\left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right) + i_2(0)\frac{2\alpha \cdot \sin(\omega t)}{\omega}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-\alpha t}\left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R}\right)(-\omega\sin(\omega t) + \alpha\cos(\omega t)) + i_2(0)2\alpha\cos(\omega t)\right]\right\} =$$

$$= e^{-\alpha t}\frac{1}{2\alpha}\left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R}\right)\left(-\omega - \frac{\alpha^2}{\omega}\right)\sin(\omega t) + i_2(0) \cdot 2\alpha\left(\cos(\omega t) - \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right]$$

здесь заметим, что

$$\alpha^2 + \omega^2 = \frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC} - \frac{1}{(2RC)^2} = \frac{1}{LC}; \quad \frac{1}{2\alpha} = RC; \quad \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2a} = \frac{R}{L}$$

$$i_2(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\omega}\left[-\left(i_1(0) - \frac{U}{R}\right)\frac{R}{L}\sin(\omega t) + i_2(0)\frac{1}{2\alpha}(\omega\cos(\omega t) - \alpha\sin(\omega t))\right] =$$

$$\frac{e^{-\alpha t}}{\omega}\left[-\left(i_1(0) - \frac{U}{R}\right)\frac{R}{L}\sin(\omega t) + i_2(0)RC(\omega\cos(\omega t) - \alpha\sin(\omega t))\right]$$

Введем новые переменные $\tilde{i}_1(t) = i_1(t) - \frac{U}{R}$, $\tilde{i}(t) = i(t) - \frac{U}{R}$
тогда:

$$\tilde{i}_1(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\omega}\left[\tilde{i}_1(0)(\omega\cos(\omega t) + \alpha\sin(\omega t)) + i_2(0) \cdot 2\alpha\sin(\omega t)\right]$$

$$i_2(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\omega}\left[-\tilde{i}_1(0)\frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha}\sin(\omega t) + i_2(0)(\omega\cos(\omega t) - \alpha\sin(\omega t))\right]$$

$$\tilde{i}(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\omega}\left[\tilde{i}_1(0)\left(\omega\cos(\omega t) + \frac{\alpha^2-\omega^2}{2\alpha}\sin(\omega t)\right) + i_2(0)\left(\omega\cos(\omega t) + \alpha\sin(\omega t)\right)\right]$$

Построить графики аналитического решения для токов $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i(t)$ с помощью программы **gnuplot**. Пример построения в программе **gnuplot** представлен ниже:

```
u=24.
r=1200.
c=277.777/1000000000.
l=0.04
w= sqrt(1./l/c - 1./4./r/r/c/c)
a=1./2./r/c
i10=0.
i20=0.

set xrange [0:0.004]
plot exp(-a*x)*((i10-u/r)*(a/w*sin(w*x)+cos(w*x))+i20*2*a/w*sin(w*x))+u/r, \
exp(-a*x)/w*((i10-u/r)*(w*cos(w*x) + (a*a-w*w)/2/a*sin(w*x)) + \
i20*(w*cos(w*x) + a*sin(w*x)))
```

Получить численное решение дифференциальных уравнений с помощью программы **octave**. Пример численного решения в программе **octave** представлен ниже:

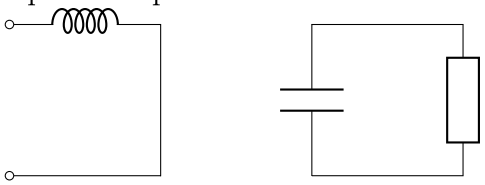
```
function xdot = f (x,t)
l=0.04;
c=0.0000002777;
r=1200;
u=24;
xdot(1) = 1/(r*c)*x(2);
xdot(2) = -r/l*x(1) - 1/(r*c)*x(2) + u/l;
endfunction
x = lsode("f", [0.0,0.0], (t = linspace(0,0.004,200000)'));
set term dumb;
plot(t,x);
```

Смоделировать решение дифференциальных уравнений с помощью программы **ngspice**. Пример моделирования решения с помощью **ngspice** представлен ниже:

```
check
*
V1 1 0 24
L1 1 2 0.04 ic=0
C1 2 0 0.2777u ic=0
R1 2 0 1200
.control
```

```
tran 0.000000001 0.004 uic
.endc
.end
```

Сравнить решения.



уравнение цепи на интервале $(n+\gamma)T \leq t \leq (n+1)T$

$$RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

Введем новую переменную – относительное время

$$\bar{t} = \frac{t}{T}$$

Введем новую переменную $\beta'' = \frac{T}{RC}$
тогда для уравнения

$$\frac{1}{\beta''}\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

получаем решение

$$U_C(t) = B_c e^{-\beta''(\bar{t}-n-\gamma)}$$

аналогично для тока через резистор

$$i_1(t) = i_1(n+\gamma)e^{-\beta''(\bar{t}-n-\gamma)}$$

для цепи с индуктивностью

$$U = L\frac{di_L}{dt}$$

решение уравнения:

$$i(t) = i(n+\gamma) + L \cdot t$$

0.1 Laplace way

$$\begin{cases} Li_1' + Li_2' + Rx & = & U \\ Li_1' + Li_2' + \frac{1}{C}\int i_2 d\tau & = & U \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1' &= \frac{1}{RC} i_2 \\ i_2' &= \frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1 - \frac{1}{RC} i_2 \end{cases}$$

Делаем замену

$$\frac{U}{L} \doteqdot \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p}; \quad i_1 \doteqdot \tilde{I}_1; \quad i_2 \doteqdot \tilde{I}_2; \quad i_1' = \tilde{I}_1 \cdot p - i_1(0); \quad i_2' = p\tilde{I}_2 - i_2(0)$$

0.2 Дискретное преобразование Лапласа

$$i_1(n+1) = U_c(n+1)/R$$

$$i_2(n+1) = i(n+1) - i_1(n+1)$$

$$U_c(n+1) = U_c(n+\gamma) e^{-\beta'(\bar{t}-n-\gamma)}$$

$$i_1(n+1) = i_1(n+\gamma) e^{-\beta(1-\gamma)}$$

$$i(n+1) = i(n+\gamma) + L \cdot (1-\gamma)$$

$$U_c(n+\gamma) = R \cdot i_1(n+\gamma)$$

$$\tilde{i}(n+\gamma) = \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1(n) \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + i_2(n) \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T) \right) \right]$$

Выразим $n+1$ через n:

$$\tilde{i}[n+1] = L \cdot (1-\gamma) +$$

$$+ \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + i_2[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T) \right) \right] =$$

$$= L \cdot (1-\gamma) + \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\tilde{i}[n] - \tilde{i}_1[n] \right) \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T) \right) \right]$$

$$\tilde{i}_1[n+1] + \frac{U}{R} = \left(\frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T) \right) + i_2[n] 2\alpha \sin(\omega\gamma T) \right] + \frac{U}{R} \right) e^{-\beta(1-\gamma)} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha\gamma T - \beta(1-\gamma)}}{\omega} \left(\tilde{i}_1[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T) \right) + \left(\tilde{i}[n] - \tilde{i}_1[n] \right) 2\alpha \sin(\omega\gamma T) \right) + \frac{U}{R} e^{-\beta(1-\gamma)}$$

На основании теоремы сдвига:

$$\left.\begin{array}{rcl} D\left\{i[n+1]\right\} & = & e^q I^*(q) - e^q i[0] \\ D\left\{i_1[n+1]\right\} & = & e^q I_1^*(q) - e^q i_1[0] \end{array}\right\}$$

$$e^q I^*(q) - e^q i[0] - L\cdot(1-\gamma)\frac{e^q}{e^q-1} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega}\left[-\tilde{I}_1^*(q)\frac{\alpha^2+\omega^2}{2\alpha} sin(\omega\gamma T) + I^*(q)\left(\omega\cos(\omega\gamma T)+\alpha\sin(\omega\gamma T)\right)\right]$$

$$e^q \tilde{I}_1^*(q) - e^q i_1[0] + \frac{U}{R}\left(1-e^{-\beta(1-\gamma)}\right)\frac{e^q}{e^q-1} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha\gamma T-\beta(1-\gamma)}}{\omega}\left(\tilde{I}_1^*(q)\left(\omega\cos(\omega\gamma T)+\alpha\sin(\omega\gamma T)\right) + \left(I^*(q)-\tilde{I}_1^*(q)\right)\cdot 2\alpha\sin(\omega\gamma T)\right)$$

получаем систему уравнений относительно $I(q)$ и $\tilde{I}_1(q)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega}\left(\omega\cos(\omega\gamma T)+\alpha\sin(\omega\gamma T)\right) - e^q & -\frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega}\frac{\alpha^2+\omega^2}{2\alpha}\sin(\omega\gamma T) \\ 2\alpha\frac{e^{-\alpha\gamma T-\beta(1-\gamma)}}{\omega}\sin(\omega\gamma T) & \frac{e^{-\alpha\gamma T-\beta(1-\gamma)}}{\omega}\left(\omega\cos(\omega\gamma T)-\alpha\sin(\omega\gamma T)\right) - e^q \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} I^*(q) \\ \tilde{I}_1^*(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^q i[0] - L\cdot(1-\gamma)\frac{e^q}{e^q-1} \\ -e^q i_1[0] + \frac{U}{R}\left(1-e^{-\beta(1-\gamma)}\right)\frac{e^q}{e^q-1} \end{pmatrix}$$

0.3 Предельное значение

Предельное значение $t\to\infty$ определяется по формуле:

$$\lim_{n\to\infty}(e^q-1)F^*(q)$$