

At $t=0$ we have $i_1(0) = i_{10}$ and $i_2(0) = i_{20}$.

$$U = const$$

Lets get graphs for $i_1(t), i_2(t)$ from analitic solution of differencial equations for the circuit.

$$\begin{cases} U_1 = L \frac{\partial i_1}{\partial t} + R i_1 & \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 i_1}{\partial t^2} + R \frac{\partial i_1}{\partial t} \\ U_1 = L \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau & \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} + \frac{1}{C} i_2 \end{cases} \quad (1)$$

Из первого и второго уравнения системы (1) получаем:

$$R \frac{\partial i_1}{\partial t} = \frac{1}{C} i_2 \Rightarrow \frac{\partial i_1}{\partial t} = \frac{1}{RC} i_2 \quad (2)$$

из первого уравнения системы (1):

$$\frac{\partial i_1}{\partial t} + \frac{\partial i_2}{\partial t} = -\frac{R}{L} i_1 + \frac{U_1}{L}$$

В этом уравнении заменим $\frac{\partial i_1}{\partial t}$ из (2):

$$\frac{\partial i_2}{\partial t} = -\frac{R}{L} i_1 - \frac{1}{RC} i_2 + \frac{U_1}{L}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{RC} \\ -\frac{R}{L} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_1}{L} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Предполагая решение в виде $i(t) = e^{\lambda t}$ получаем характеристическое уравнение.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{RC} \\ -\frac{R}{L} & -\lambda - \frac{1}{RC} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega$$

$$i_1(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} + \frac{U_1}{R}$$

$$i_2(t) = A \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

При $t = 0$ получаем:

$$A + B + \frac{U_1}{R} = i_{10}$$

$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B = i_{20}$$

Для определения коэффициентов получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1(0) - \frac{U_1}{R} \\ i_2(0) \end{pmatrix}$$

решая в Reduce-algebra

```
1 m:=mat((1,1),(lambda_1,lambda_2));
2 mf:=mat((i_10-u/R),(i_20));
3 coef:= 1/m*mf;
```

$$\begin{aligned} A &= -\frac{i_1(0)\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{i_2(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{U}{R} \\ B &= \frac{i_1(0)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{i_2(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{U}{R} \end{aligned}$$

упростим

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}} = j\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}} = 2j \cdot \mathcal{I}m = 2j\omega$$

еще два упрощения:

$$\frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = -e^{-\alpha t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{-\alpha t} \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

$$i_1(t) = \frac{i_1(0) - \frac{U}{R}}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) + \frac{i_2(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) + \frac{U}{R} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\alpha t} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right) + i_2(0) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] + \frac{U}{R} = \\
&= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) (\omega \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)) + i_2(0) \sin(\omega t) \right] + \frac{U}{R} \\
i_2(t) &= RC \left\{ -\alpha e^{-\alpha t} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right) + i_2(0) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] + \right. \\
&\quad \left. + e^{-\alpha t} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) (-\omega \sin(\omega t) + \alpha \cos(\omega t)) + i_2(0) \cos(\omega t) \right] \right\} = \\
&= e^{-\alpha t} \frac{1}{2\alpha} \left[\left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \left(-\omega - \frac{\alpha^2}{\omega} \right) \sin(\omega t) + i_2(0) \left(\cos(\omega t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right]
\end{aligned}$$

здесь заметим, что

$$\alpha^2 + \omega^2 = \frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC} - \frac{1}{(2RC)^2} = \frac{1}{LC}; \quad \frac{1}{2\alpha} = RC; \quad \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} = \frac{R}{L}$$

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[- \left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \frac{R}{L} \sin(\omega t) + i_2(0) \frac{1}{2\alpha} (\omega \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)) \right] = \\
&\frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[- \left(i_1(0) - \frac{U}{R} \right) \frac{R}{L} \sin(\omega t) + i_2(0) RC (\omega \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)) \right]
\end{aligned}$$

Введем новые переменные $\tilde{i}_1(t) = i_1(t) - \frac{U}{R}$, $\tilde{i}(t) = i(t) - \frac{U}{R}$
тогда:

$$\begin{aligned}
\tilde{i}_1(t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} [\tilde{i}_1(0) (\omega \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)) + i_2(0) \sin(\omega t)] \\
i_2(t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[-\tilde{i}_1(0) \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega t) + i_2(0) \frac{1}{2\alpha} (\omega \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)) \right] \\
\tilde{i}(t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \left[\tilde{i}_1(0) \left(\omega \cos(\omega t) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega t) \right) + i_2(0) (\omega \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)) \right]
\end{aligned}$$

Построить графики аналитического решения для токов $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i(t)$ с помощью программы **gnuplot**. Пример построения в программе **gnuplot** представлен ниже:

```

1 u=24.
2 r=1200.
3 c=277.777/1000000000.
4 l=0.04
5 w= sqrt(1./l/c - 1./4./r/r/c/c)
6 a=1./2./r/c
7 i10=0.
8 i20=0.
9
10 set xrange [0:0.004]
11 plot exp(-a*x)*((i10-u/r)*(a/w*sin(w*x)+cos(w*x))+i20/w*sin(w*x))+u/r

```

Получить численное решение дифференциальных уравнений с помощью программы **octave**. Пример численного решения в программе **octave** представлен ниже:

```

1 function xdot = f (x,t)
2 l=0.04;
3 c=0.0000002777;
4 r=1200;
5 u=24;
6 xdot(1) = 1/(r*c)*x(2);
7 xdot(2) = -r/l*x(1) - 1/(r*c)*x(2) + u/l;
8 endfunction
9 x = lsode("f", [0.0,0.0], (t = linspace(0,0.004,200000)'));
10 set term dumb;
11 plot(t,x);

```

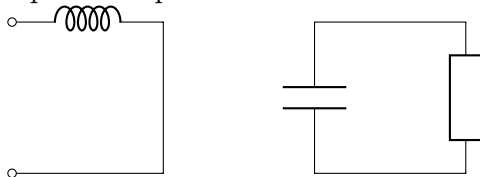
Смоделировать решение дифференциальных уравнений с помощью программы **ngspice**. Пример моделирования решения с помощью **ngspice** представлен ниже:

```

1 check
2 *
3 V1 1 0 24
4 L1 1 2 0.04 ic=0
5 C1 2 0 0.2777u ic=0
6 R1 2 0 1200
7 .control
8 tran 0.000000001 0.004 uic
9 .endc
10 .end

```

Сравнить решения.



уравнение цепи на интервале $(n + \gamma)T \leq t \leq (n + 1)T$

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

Введем новую переменную – относительное время

$$\bar{t} = \frac{t}{T}$$

Введем новую переменную $\beta'' = \frac{T}{RC}$

тогда для уравнения

$$\frac{1}{\beta''} \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

получаем решение

$$U_C(t) = B_c e^{-\beta''(\bar{t}-n-\gamma)}$$

аналогично для тока через резистор

$$i_1(t) = i_1(n + \gamma) e^{-\beta''(\bar{t}-n-\gamma)}$$

для цепи с индуктивностью

$$U = L \frac{di_L}{dt}$$

решение уравнения:

$$i(t) = i(n + \gamma) + L \cdot t$$

0.1 Laplace way

$$\begin{cases} Li'_1 + Li'_2 + Rx & = U \\ Li'_1 + Li'_2 + \frac{1}{C} \int i_2 d\tau & = U \end{cases}$$

$$\begin{cases} i'_1 & = \frac{1}{RC} i_2 \\ i'_2 & = \frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_1 - \frac{1}{RC} i_2 \end{cases}$$

Делаем замену

$$\frac{U}{L} \doteq \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p}; \quad i_1 \doteq \tilde{I}_1; \quad i_2 \doteq \tilde{I}_2; \quad i'_1 = \tilde{I}_1 \cdot p - i_1(0); \quad i'_2 = p\tilde{I}_2 - i_2(0)$$

0.2 Дискретное преобразование Лапласа

$$i_1(n+1) = U_c(n+1)/R$$

$$i_2(n+1) = i(n+1) - i_1(n+1)$$

$$U_c(n+1) = U_c(n+\gamma)e^{-\beta'(\bar{t}-n-\gamma)}$$

$$i_1(n+1) = i_1(n+\gamma)e^{-\beta(1-\gamma)}$$

$$i(n+1) = i(n+\gamma) + L \cdot (1-\gamma)$$

$$U_c(n+\gamma) = R \cdot i_1(n+\gamma)$$

$$\tilde{i}(n+\gamma) = \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1(n) \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + i_2(n) (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) \right]$$

Выразим $n+1$ через n :

$$\tilde{i}[n+1] = L \cdot (1-\gamma) +$$

$$+ \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + i_2[n] (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) \right] =$$

$$= L \cdot (1-\gamma) + \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[\tilde{i}_1[n] \left(\omega \cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \right) + \right.$$

$$\left. + (\tilde{i}[n] - \tilde{i}_1[n]) (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) \right]$$

$$\tilde{i}_1[n+1] + \frac{U}{R} = \left(\frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} [\tilde{i}_1[n] (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) + i_2[n] \sin(\omega\gamma T)] + \frac{U}{R} \right) e^{-\beta(1-\gamma)} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha\gamma T - \beta(1-\gamma)}}{\omega} (\tilde{i}_1[n] (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) + (\tilde{i}[n] - \tilde{i}_1[n]) \sin(\omega\gamma T)) + \frac{U}{R} e^{-\beta(1-\gamma)}$$

На основании теоремы сдвига:

$$\left. \begin{aligned} D \{i[n+1]\} &= e^q I^*(q) - e^q i[0] \\ D \{i_1[n+1]\} &= e^q I_1^*(q) - e^q i_1[0] \end{aligned} \right\}$$

$$e^q I^*(q) - e^q i[0] - L \cdot (1-\gamma) \frac{e^q}{e^q - 1} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \left[-\tilde{I}_1^*(q) \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) + I^*(q) (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) \right]$$

$$e^q \tilde{I}_1^*(q) - e^q i_1[0] + \frac{U}{R} (1 - e^{-\beta(1-\gamma)}) \frac{e^q}{e^q - 1} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha\gamma T - \beta(1-\gamma)}}{\omega} \left(\tilde{I}_1^*(q) (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) + \left(I^*(q) - \tilde{I}_1^*(q) \right) \sin(\omega\gamma T) \right)$$

получаем систему уравнений относительно $I(q)$ и $\tilde{I}_1(q)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} (\omega \cos(\omega\gamma T) + \alpha \sin(\omega\gamma T)) - e^q & -\frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} \sin(\omega\gamma T) \\ \frac{e^{-\alpha\gamma T - \beta(1-\gamma)}}{\omega} \sin(\omega\gamma T) & \frac{e^{-\alpha\gamma T - \beta(1-\gamma)}}{\omega} (\omega \cos(\omega\gamma T) + (\alpha - 1) \sin(\omega\gamma T)) - e^q \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} I^*(q) \\ \tilde{I}_1^*(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^q i[0] - L \cdot (1 - \gamma) \frac{e^q}{e^q - 1} \\ -e^q i_1[0] + \frac{U}{R} (1 - e^{-\beta(1-\gamma)}) \frac{e^q}{e^q - 1} \end{pmatrix}$$