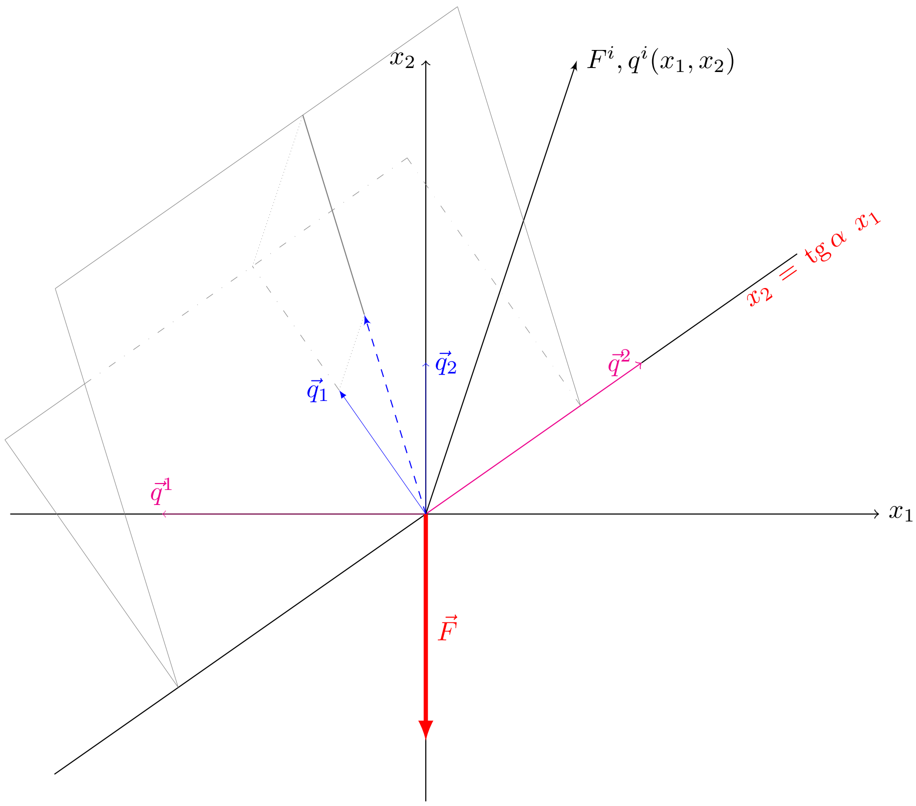

Наклонная плоскость описывается уравнением (в декартовой системе ковариантные и контравариантные координаты вектора совпадают)

$$x_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha = x_2 + const \tag{1}$$

$$\begin{cases} F^1(x_1,x_2) = -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 + q_0^1 = 0 = q^1(x_1,x_2) - \text{уравнение связи}, \\ F^2(x_1,x_2) = x_2 + q_0^2 = q^2(x_1,x_2) - \text{свободная переменная} \end{cases} \tag{2}$$

Импульсы в системе x_1, x_2 обозначим через $\xi_i = m\dot{x}_i$, силы в системе обозначим через X_i

Уравнения движения запишутся:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = X_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial F^1}{\partial x_1} - \text{частные производные только по связи } F^1 \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = X_2 + \lambda_1 \dfrac{\partial F^1}{\partial x_2} \end{cases} \tag{3}$$

Производные по времени:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F^k}{\partial x_i}\dot{x}_i = \begin{cases} \dot{q}^k, -\text{свободная переменная} \\ 0 - \text{связь} \end{cases}$$

В развернутом виде для выбранной системы координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial q^1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial q^1}{\partial x_2}\dot{x}_2 & = & 0 \\ \frac{\partial q^1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial q^1}{\partial x_2}\dot{x}_2 & = & \dot{q}^2 \end{cases} \tag{4}$$

И если уравнения для координат (2) является «точечным» преобразованием, то уравнение для скоростей является линейным.

в наших обозначениях

$$\frac{\partial F^1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial F^1}{\partial x_2}\dot{x}_2 = -\sin\alpha\,\dot{x}_1 + \cos\alpha\,\dot{x}_2 = \dot{q}^1 = 0 - \text{из уравнения связи}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{q}^2 - \text{из уравнения для свободной переменной}$$

Из этих уравнений определяем $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \operatorname{ctg}\alpha\,\dot{q}^2 \\ \dot{x}_2 = \dot{q}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial x_1}{\partial q^2}\dot{q}^2 & = & \dot{x}_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial x_2}{\partial q^2}\dot{q}^2 & = & \dot{x}_2 \end{cases}$$

Из независимости работы от системы координат

$$\delta A = \sum_{i=1}^{2} X_i \delta x_i = \sum_{\text{по свободным}} Q_i \delta q^i$$

и затем перейдя к скоростям

$$\sum_{\text{по свободным}} Q_i \delta\dot{q}^i = \sum_{i=1}^{2} X_i \delta\dot{x}_i$$

$$Q_2 \delta\dot{q}^2 = X_1 \operatorname{ctg}\alpha\,\delta\dot{q}^2 + X_2 \delta\dot{q}^2$$

подставляя $X_1 = 0$ и $X_2 = -F$

$$Q_2 = -F = Q^2$$

Заметим, что вектор, лежащий на оси, имеет совпадающие ковариантные и контравариантные координаты.

Найдем λ_1

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = X_1 + \lambda_1 \sin\alpha \\ \dot{\xi}_2 = X_2 - \lambda_1 \cos\alpha \end{cases} = \begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 + \lambda_1 \sin\alpha \\ \dot{\xi}_2 = -F - \lambda_1 \cos\alpha \end{cases}$$

Из уравнения связи

$$\dot{\xi}_2 / \operatorname{tg}\alpha = \lambda_1 \sin\alpha \Rightarrow \dot{\xi}_2 = \lambda_1 \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\dot{\xi}_2 = X_2 - \lambda_1 \cos\alpha$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha \right) = X_2$$

$$\lambda_1 \frac{1}{\cos\alpha} = X_2$$

$$\lambda_1 = \underbrace{X_2 \cos\alpha}_{\text{это сила реакции опоры}} \tag{5}$$

Подставляя найденную λ_1 в уравнения движения (3) получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = 0 + X_2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha = -F \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = X_2 - X_2 \cos\alpha \cdot \cos\alpha = X_2 \sin^2\alpha = F \sin^2\alpha \end{cases} \tag{6}$$

Импульсы преобразуются по формуле аналогичной силе Q

$$p_2 = \xi_1 \operatorname{ctg}\alpha + \xi_2$$

Уравнения движения (3) преобразуются к виду

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = Q_2 + \lambda_1 \frac{\partial F^1}{\partial x_1} \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \lambda_1 \frac{\partial F^1}{\partial x_2} = Q_2 = -F$$

все члены с λ_1 обнуляются.