



Наклонная плоскость описывается уравнением (в декартовой системе ковариантные и контравариантные координаты вектора совпадают)

$$x_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = x_2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} F^1(x_1, x_2) = -\sin \alpha \cdot x_1 + \cos \alpha \cdot x_2 = 0 = q^1 - \text{уравнение связи,} \\ F^2(x_1, x_2) = x_2 = q^2 - \text{свободная переменная} \end{cases} \quad (2)$$

Импульсы в системе  $x_1, x_2$  обозначим через  $\xi_i = m\dot{x}_i$ , силы в системе обозначим через  $X_i$   
Уравнения движения запишутся:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = X_1 + \lambda_1 \frac{\partial F^1}{\partial x_1} - \text{частные производные только по связи } F^1 \\ \frac{d\xi_2}{dt} = X_2 + \lambda_1 \frac{\partial F^1}{\partial x_2} \end{cases} \quad (3)$$

Производные по времени:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial F^k}{\partial x_i} \dot{x}_i = \begin{cases} \dot{q}^k, -\text{свободная переменная} \\ 0 - \text{связь} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F^1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F^1}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -\sin \alpha \dot{x}_1 + \cos \alpha \dot{x}_2 = \dot{q}^1 = 0 - \text{из уравнения связи}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{q}^2 - \text{из уравнения для свободной переменной}$$

Из этих уравнений определяем  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \operatorname{ctg} \alpha \dot{q}^2 \\ \dot{x}_2 = \dot{q}^2 \end{cases}$$

Из независимости работы от системы координат

$$\delta A = \sum_{i=1}^2 X_i \delta x_i = \sum_{\text{по свободным}} Q_i \delta q^i$$

и затем перейдя к скоростям

$$\sum_{\text{по свободным}} Q_i \delta \dot{q}^i = \sum_{i=1}^2 X_i \delta \dot{x}_i$$

$$Q_2 \delta \dot{q}^2 = X_1 \operatorname{ctg} \alpha \delta \dot{q}^2 + X_2 \delta \dot{q}^2$$

подставляя  $X_1 = 0$  и  $X_2 = -F$

$$Q_2 = -F = Q^2$$

Заметим, что вектор, лежащий на оси, имеет совпадающие ковариантные и контравариантные координаты.

Найдем  $\lambda_1$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = X_1 + \lambda_1 \sin \alpha \\ \dot{\xi}_2 = X_2 - \lambda_1 \cos \alpha \end{cases} = \begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 + \lambda_1 \sin \alpha \\ \dot{\xi}_2 = -F - \lambda_1 \cos \alpha \end{cases}$$

Из уравнения связи

$$\dot{\xi}_2 / \operatorname{tg} \alpha = \lambda_1 \sin \alpha \Rightarrow \dot{\xi}_2 = \lambda_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\dot{\xi}_2 = X_2 - \lambda_1 \cos \alpha$$

$$\lambda_1 \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right) = X_2$$

$$\lambda_1 \frac{1}{\cos \alpha} = X_2$$

$$\lambda_1 = \underbrace{X_2 \cos \alpha}_{\text{это сила реакции опоры}} \quad (4)$$

Подставляя найденную  $\lambda_1$  в уравнения движения (3) получаем:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = 0 + X_2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = -F \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ \frac{d\xi_2}{dt} = X_2 - X_2 \cos \alpha \cdot \cos \alpha = X_2 \sin^2 \alpha = F \sin^2 \alpha \end{cases} \quad (5)$$

Импульсы преобразуются по формуле аналогичной силе  $Q$

$$p_2 = \xi_1 \operatorname{ctg} \alpha + \xi_2$$

Уравнения движения (3) преобразуются к виду

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = Q_2 + \lambda_1 \frac{\partial F^1}{\partial x_1} \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \lambda_1 \frac{\partial F^1}{\partial x_2} = Q_2 = -F$$

все члены с  $\lambda_1$  обнуляются.