лаб. N2

Схема единственного деления метода Гаусса для вычисления A^{-1}.

$A = \{a_{ij}\}_1^n$, $a_{ij} \in R$; $\det A \neq 0 \Rightarrow$

$\exists A^{-1} = \{x_{ij}\}_1^n$.

$AA^{-1} = E$ (1); n СЛАУ

$$\begin{array}{cccc|c|c|c|c}
 & & & & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

1) $(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41})^T$;

2) $(x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42})^T$;

3) $(x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43})^T$;

4) $(x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{44})^T$.

Понятие обусловленности матрицы и СЛАУ. Число обусловленности.

$A\bar{x} = \bar{f}$ (2), $A = \{a_{ij}\}_1^n$, $a_{ij} \in R$; $\det A \neq 0$,

$\bar{f} = (f_1 ..., f_n)^T$.

$$\tilde{A}\tilde{\bar{x}} = \tilde{\bar{f}} \quad (3), \quad \text{где } \tilde{A} = A + \delta;$$
$$\tilde{\bar{f}} = \bar{f} + \bar{\eta} \Rightarrow$$
$$\tilde{\bar{x}} = \bar{x} + \bar{\tau}.$$

Как зависит погрешность решения от погрешности матрицы и вектора правых частей СЛАУ?

Пусть $\delta \equiv 0$ и

$\dfrac{\|\bar{\tau}\|}{\|\bar{x}\|} \to$ аналог относительной погрешн. решения;

$\dfrac{\|\bar{\eta}\|}{\|\bar{f}\|} \to$ аналог относительной погрешн. вектора правых частей СЛАУ (2).

Тогда $\dfrac{\|\tau\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond} A \dfrac{\|\bar{\eta}\|}{\|\bar{f}\|}$ (3),

где $\operatorname{cond} A = \|A\| \|A^{-1}\|$ (4).

Пусть $A = A^T$; $\|\cdot\|_2 \Rightarrow$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^* \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^2)} = \max|\lambda(A)|;$$

$$A^{-1} = (A^{-1})^T; \quad \lambda(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda(A)} \Rightarrow$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}[(A^{-1})^* \cdot A]} = \sqrt{\lambda_{max}(A^{-1})^2} = \frac{1}{\min|\lambda(A)|};$$

$$\operatorname{cond} A = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max|\lambda(A)|}{\min|\lambda(A)|}.$$

Задание к лаб. N2.

1. Применяя схему единственного деления метода Гаусса, найти A^{-1} (матрица A из лаб. N1) и проверить $AA^{-1} = E$.

2. Вычислить $\operatorname{cond} A = \|A\|_{\infty, 1} \|A^{-1}\|_{\infty, 1}$.