4. Метод вариации произвольных постоянных

$$y''(x) + p(x)y'(x) - q(x)y(x) = f(x) \qquad (1)$$

$$a \le x \le b; \quad p, q, f \in [a, b]$$

$$\begin{gathered} \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0 \qquad (2) \\ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1 \qquad (3) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \exists! \;\; y(x) \in C^2[a, b] \\ \begin{cases} |\alpha_0| + |\beta_0| > 0 \\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0 \end{cases} \end{gathered}$$

$$y(x) = Z(x) + C_1 Z_1(x) + C_2 Z_2(x) \quad (4)$$

$$\begin{cases} Z''(x) + p(x)Z'(x) - q(x)Z(x) = f(x) \\ Z(a) = 0, \;\; Z'(a) = 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1''(x) + p(x)Z_1'(x) - q(x)Z_1(x) = 0 \\ Z_1(a) = 0, \;\; Z_1'(a) = 1 \quad (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_2''(x) + p(x)Z_2'(x) - q(x)Z_2(x) = 0 \\ Z_2(a) = 1, \;\; Z_2'(a) = 0 \quad (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0[Z(a) + C_1 Z_1(a) + C_2 Z_2(a)] + \beta_0[Z'(a) + C_1 Z_1'(a) + C_2 Z_2'(a)] = \gamma_0 \\ \alpha_1[Z(b) + C_1 Z_1(b) + C_2 Z_2(b)] + \beta_1[Z'(b) + C_1 Z_1'(b) + C_2 Z_2'(b)] = \gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 C_2 + \beta_0 C_1 = \gamma_0 \\ C_1[\alpha_1 z_1(b) + \beta_1 z_1'(b)] + C_2[\alpha_1 z_2(b) + \beta_1 z_2'(b)] = \gamma_1 - \alpha_1 z(b) - \beta_1 z'(b) \qquad (8) \\ C_1, C_2 \to (4) \end{cases}$$

Сводим задачу Коши (5) к системе I-го порядка:

$$\begin{cases} z'(x) = S(x) \\ S'(x) + p(x)S(x) - q(x)z(x) = f(x) \qquad (5a) \\ z(a) = 0;\ S(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1'(x) = S_1(x) \\ S_1'(x) + p(x)S_1(x) - q(x)z_1(x) = 0 \qquad (6a) \\ z_1(a) = 0;\ S_1(a) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2'(x) = S_2(x) \\ S_2'(x) + p(x)S_2(x) - q(x)z_2(x) = 0 \qquad (7a) \\ z_2(a) = 1;\ S_2(a) = 0 \end{cases}$$

Задание

Методом вариации произвольных постоянных найти с шагом $h = 0.1$ решение граничной задачи:

ЗАДАЧИ

Методом вариации произвольных постоянных найти решение граничных задач в точках $x_k = 0{,}1k$. Для решения задачи Коши использовать метод Эйлера с шагом 0,1:

1. $y'' + \frac{1}{x}y'(x) - 2y(x) = x^2, \ 0{,}5 \le x \le 1, \ y'(0{,}5) = -0{,}5, \ y'(1) = -1.$
2. $y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2+2}y(x) = 8, \ 0{,}5 \le x \le 1, \ y'(0{,}5) = 0{,}5, \ y(1) + y'(1) = 1.$
3. $y''(x) + y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{x+1}{x}, \ 0{,}5 \le x \le 1, \ y(0{,}5) = -0{,}5\ln 2, \ y(1) = 0.$
4. $y''(x) + y'(x) - \frac{6x}{2x^2+1}y(x) = 6x + 0{,}5, \ 0{,}5 \le x \le 1, \ y(0{,}5) = 1{,}25, \ y(1) + y'(1) = 5.$
5. $y''(x) - \frac{1}{x}y'(x) = -\frac{2}{x^2}, \ 0{,}5 \le x \le 1, \ y'(0{,}5) = 2, \ y(1) = 0.$
6. $y''(x) + y'(x) - \frac{2}{\cos^2 x}y(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \ 0 \le x \le 0{,}5, \ y(0) = 0, \ y'(0{,}5) = \frac{1}{\cos^2 0{,}5}.$
7. $y''(x) - 2y'(x) - 2y(x) = -3xe^x, \ 0 \le x \le 0{,}5, \ y(0) = 0, \ y(0{,}5) = 0{,}824\,36.$
8. $y''(x) - (x+\alpha)^2 y'(x) - \frac{2}{(x+\alpha)^2}y(x) = \alpha, \ 0 \le x \le 0{,}5, \ y(0) - y'(0) = \frac{\alpha+1}{\alpha},$