2.6. Анализ режимов взаимодействия сосредоточенных конкурирующих процессов

Во многих приложениях параллельных вычислений, прежде всего, связанных с принятием оперативных решений при разработке высокоэффективного системного и прикладного программного обеспечения, важное место занимают задачи сравнительного анализа асинхронного и синхронных режимов.

Пусть $[t_{ij}]$ – $n \times s$–матрица времен выполнения блоков программного ресурса $Q_1, Q_2, ..., Q_s$ каждым из конкурирующих процессов. Тогда имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.6. *Если накладные расходы на организацию параллельного выполнения блоков программного ресурса каждым из конкурирующих процессов в условиях сосредоточенной обработки совпадают для асинхронного и обоих синхронных режимов, то при* $p,\ n,\ s \geq 2$ *и матрице времен выполнения блоков, имеющей вид циркулянта, т.е.*

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_s \\ t_2 & t_3 & t_4 & \dots & t_1 \\ t_3 & t_4 & t_5 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ t_s & t_1 & t_2 & \dots & t_{s-1} \end{bmatrix},$$

$$T_{сн}^{ac}(p,n,s) = T_{сн}^{1}(p,n,s) = T_{сн}^{2}(p,n,s)\,.$$

Здесь $T_{сн}^{ac}(p,n,s)$, $T_{сн}^{1}(p,n,s)$, $T_{сн}^{2}(p,n,s)$ *определяются из теорем 2.1–2.5.*

Доказательство основывается на анализе времени простоев процессоров из–за занятости блоков и времен “пролеживания” блоков из–за занятости процессоров в каждом из трех базовых режимов с учетом структуры матрицы времен выполнения блоков.

Рассмотрим далее класс однородных конкурирующих процессов. Из множества всех допустимых структурирований программного ресурса $\alpha = (t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_s)$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,s}$, $T_c^s = \sum_{j=1}^{s} t_j$, выделим подмножество

$$\gamma_s = \{(t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_s) \mid t_1 \le t_2 \le \dots \le t_m \ge \dots \ge t_s\},\ m = \overline{1,s}\,.$$

Кроме того, для любого структурирования α введем величину $\sigma(\alpha)=t_1+\sum_{j=2}^{s}\max\{t_j-t_{j-1},0\}$, которая входит в качестве слагаемого в (2.14). В дальнейшем будем использовать свойство величины $\sigma(\alpha)$, устанавливаемое следующей леммой.

Лемма 2.1. *Если структурирование* $\gamma\in\gamma_s$, то $\sigma(\gamma)=\max_{1\le j\le s} t_j$, в противном случае $\sigma(\gamma)>\max_{1\le j\le s} t_j$.

Доказательство. Пусть $t_l=\max_{1\le j\le s} t_j$. Если максимальных элементов несколько или все элементы равны, то берем в качестве l минимальный из номеров этих элементов.

Для $\gamma\in\gamma_s$ непосредственной проверкой убеждаемся в равенстве $\sigma(\gamma)=t_1+\sum_{j=2}^{s}(t_j-t_{j-1})=t_l$.

Пусть теперь $\gamma\notin\gamma_s$, $s\ge 3$. Разобьем множество чисел $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s)$ на два упорядоченных подмножества $\theta_1=(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_l)$ и $\theta_2=(t_{l+1},\ t_{l+2},\ \ldots,\ t_s)$. Подмножество θ_1 всегда не пусто. Возможны два случая: либо в θ_1 все числа не убывают, и следовательно, в θ_2 есть такое число t_m, что $t_{m-1} < t_m < t_{m+1}$ при $l+1 \le m \le s-1$; либо в θ_1 есть по крайней мере одно такое число t_m, что $t_{m-1} > t_m < t_{m+1}$ при $2 \le m \le l-1$. Следовательно, для любого структурирования $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s) \notin \gamma_s$ всегда есть “овраг” за счет элемента t_m.

Кроме того, нетрудно заметить, что $\sigma(\gamma) = 0{,}5\sum_{j=0}^{s}\left|t_j - t_{j+1}\right|$, $t_0 = t_{s+1} = 0$, и совпадает с длиной пути коммивояжера (0, 1, 2, …, s) в полном графе с $(s+1)$–й вершиной и матрицей весов с элементами $\alpha_{ij} = \left|t_i - t_j\right|$, $i, j = \overline{0, s}$. Тогда, для любого структурирования, содержащего хотя бы один “овраг” имеет место строгое неравенство $\sigma(\gamma) > t_l$. Лемма доказана.

В силу леммы 2.1 и формул для вычисления точных значений $T_{co}^{ac}(p,n,s)$, $T_{co}^{1}(p,n,s)$, $T_{co}^{2}(p,n,s)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2.7. *Если накладные расходы на организацию параллельного выполнения блоков программного ресурса каждым из конкурирующих процессов в условиях* *сосредоточенной обработки совпадают для асинхронного и обоих синхронных режимов, то:*

1) для любого структурирования $\alpha = (t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s)$

$$T_{co}^{ac}(p,n,s) = T_{co}^{1}(p,n,s) \le T_{co}^{2}(p,n,s);$$

2) для любого структурирования γ_s и $p,\ n,\ s \ge 2$, $n \le p$

$$T_{co}^{ac}(p,n,s) = T_{co}^{1}(p,n,s) = T_{co}^{2}(p,n,s);$$

3) для любого структурирования $\alpha \notin \gamma_s$ и $p,\ n,\ s \ge 2$

$$T_{co}^{ac}(p,n,s) > T_{co}^{1}(p,n,s) = T_{co}^{2}(p,n,s).$$

Структурирование программного ресурса на s блоков $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s)$, $T_c^s = \sum_{j=1}^{s} t_j$, будем называть *равномерным*, если $t_1 = t_2 = \ldots = t_s = t$.

Следствие 2.3. *Для всех трех базовых режимов взаимодействия конкурирующих процессов при равномерном структурировании и заданных* $p,\ n,\ s \ge 2$

$$\overline{T}_c = \begin{cases} (n+s-1)t \ \textit{если} \ \ p \ge \min(n,s), \\ [(k+1)s + r - 1]t \ \textit{если} \ \ p < \min(n,s), \ \ n = kp + r, \ 1 \le r \le p. \end{cases} \tag{2.16}$$

В заключении данной главы хотелось бы отметить, что рассмотренная математическая модель реализации сосредоточенных конкурирующих процессов включает также такие прикладные аспекты параллельных вычислений, как циклический конвейер, синхронность и асинхронность процессов, конвейеризация вычислений и ряд других.

Полученные формулы вычислений минимального общего времени в асинхронном и синхронных режимах позволяют построить расписания моментов запуска и окончания каждого из конкурирующих процессов, что позволяет не только наиболее эффективно решить проблему синхронизации процессов, но и существенно минимизировать системные затраты и непроизводительные простои процессоров. Особенно наглядно это можно проследить на примере первого синхронного режима, который обеспечивает непрерывное выполнение каждого из конкурирующих процессов с момента их старта.

Полученные математические соотношения позволяют кроме базовых режимов анализировать смешанные режимы взаимодействия параллельных процессов, а также служат основой для решения оптимизационных задач, в том числе и при решении проблем динамического распараллеливания.

Вопросы

1. Сосредоточенные параллельные процессы и режимы их взаимодействия (асинхронный, первый и второй синхронные).
2. Первый синхронный режим. Использование линейных диаграмм для вычисления минимального общего времени выполнения синхронных процессов.
3. Второй синхронный режим. Использование линейных диаграмм для вычисления минимального общего времени выполнения синхронных процессов.
4. Основные формулы вычисления минимального общего времени выполнения синхронных процессов.
5. Однородные конкурирующие процессы и формулы нахождения минимального общего времени.
6. Анализ режимом взаимодействия сосредоточенных параллельных процессов. Равномерное структурирование.
7. Роль матриц циркулянтов при анализ режимом взаимодействия сосредоточенных параллельных процессов.
8. Основное свойство структурирований из γ-класса.
9. А
10.

Задачи

Задача 1

Представить с помощью линейных диаграмм процесс выполнения 4-х процессов на 4-х процессорах в асинхронном и 2-х синхронных режимов если матрица времен выполнения блоков имеет вид.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти величину общего времени выполнения задолго числа процессов в каждом из режимов (асинхронный и два синхронных). Выполнить сравнительный анализ.

Задача 2

Представить с помощью линейных диаграмм процесс выполнения 5 процессов на 5 процессорах в асинхронном и 2-х синхронных режимах если, матрица времен выполнения блоков имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти величину общего времени выполнения задолго числа процессов в каждом из режимов (асинхронный и два синхронных). Провести сравнительный анализ общего времени в каждом из режимов.

Задача 3

Пусть число процессоров многопроцессорной системы $p = 3$, число блоков структурированного программного ресурса $s = 4$ и число конкурирующих процессов $n = 12$. Матрица времен выполнения блоков программного ресурса $T^C = [t_{ij}]$, $i = \overline{1,12}$, $j = \overline{1,4}$, имеет вид:

$$T^c = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Построить результирующею матрицу времен выполнения блоков T_*^c. Найти в условиях первого асинхронного режима минимальное общее время выполнения двенадцати процессов на четырех процессорах с заданной матрицей T^c методом критического пути и с помощью линейных диаграмм.

Задача 4

Пусть число процессоров многопроцессорной системы $p = 3$, число блоков структурированного программного ресурса $s = 4$ и число конкурирующих процессов $n = 11$. Матрица времен выполнения блоков программного ресурса $T^C = [t_{ij}]$, $i = \overline{1,11}$, $j = \overline{1,4}$, имеет вид:

$$T^c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Построить результирующею матрицу времен выполнения блоков T_*^c. Найти в условиях первого асинхронного режима минимальное общее время выполнения одиннадцати процессов на четырех процессорах с заданной матрицей T^c методом критического пути и с помощью линейных диаграмм.

Задача 5

Пусть число процессоров многопроцессорной системы $p = 3$, число блоков структурированного программного ресурса $s = 4$ и число конкурирующих процессов $n = 11$. Матрица времен выполнения блоков программного ресурса $T^C = [t_{ij}]$, $i = \overline{1,11}$, $j = \overline{1,4}$, имеет вид:

$$T^c = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти в условиях первого синхронного режима минимальное общее время выполнения одиннадцати процессов на четырех процессорах с заданной матрицей T^c по формулам из теоремы 2.3 и с помощью линейных диаграмм. Построить не совмещённые и совмещенную диаграммы.

Задача 6

Пусть число процессоров многопроцессорной системы $p = 3$, число блоков структурированного программного ресурса $s = 4$ и число конкурирующих процессов $n = 11$. Матрица времен выполнения блоков программного ресурса $T^C = [t_{ij}]$, $i = \overline{1,11}$, $j = \overline{1,4}$, имеет вид:

$$T^c = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти в условиях второго синхронного режима минимальное общее время выполнения одиннадцати процессов на четырех процессорах с заданной матрицей T^c по формулам из теоремы 2.5 и с помощью линейных диаграмм. Построить не совмещённые и совмещенную диаграммы.

Задача 7

Пусть число процессоров p=3, число процессов n=7 и число блоков s=7, а времена выполнения блоков каждым из процессов равны соответственно (3,1,4,1,5,2,3) тактов. Используя формулы (2.13-2.15) найти минимальное общее время выполнения однородных процессов в условиях асинхронного и двух синхронных режимов. Сравнить результаты.

Задача 8

Пусть число процессоров p=3, число процессов n=7 и число блоков s=7, а времена выполнения блоков каждым из процессов равны соответственно (1,3,4,5,3,2,1) тактов. Используя формулы (2.13-2.15) найти минимальное общее время выполнения однородных процессов в условиях асинхронного и двух синхронных режимов. Сравнить результаты.

Задача 9

Пусть число процессоров p=3, число процессов n=7 и число блоков s=7, а времена выполнения блоков каждом из процессов заданы матрицей размерности 7x7

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Используя формулы (2.13-2.15) найти минимальное общее время выполнения однородных процессов в условиях асинхронного и двух синхронных режимов. Сравнить результаты.

Задача 10

Пусть число процессоров p=3, число процессов n=7 и число блоков s=5, а времена выполнения блоков каждым из процессов равны соответственно (3,4,7,4,2) тактов. Используя формулы (2.13-2.15) найти минимальное общее время выполнения однородных процессов в условиях асинхронного и двух синхронных режимов, а также с использованием линейных диаграмм. Сравнить результаты. Построить равномерное структурирование и вычислить точное значение минимального общего времени для всех трех базовых режимов (используя следствие 2.3). Построить линейную диаграмму Ганта тля равномерного структурирования.