Лаб. № 3. Метод квадратных корней (метод Холецкого).

Рассмотрим СЛАУ

$A\bar{x} = \bar{f}$ (1), где $A = A^T > 0$,

$f = (f_1, \dots, f_n)^T$.

Представим $A = LL^T$ (2), где

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (3), \quad l_{ii} > 0, \quad i = \overline{1,n}$$

Тогда решение СЛАУ (1) сводится к последовательному решению 2-х систем с треугольными матрицами

$L\bar{y} = \bar{f}$; $L^T\bar{x} = \bar{y}$ (4), где

$$\begin{aligned}
& l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \\
& l_{i1} = a_{i1}/l_{11}, \quad i = \overline{2,n} \\
& l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}, \qquad\qquad (5) \\
& l_{i2} = (a_{i2} - l_{i1}l_{21})/l_{22}, \quad i = \overline{3,n} \\
& \dots\dots\dots\dots \\
& l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l_{k1}^2 - l_{k2}^2 - \dots - l_{k,k-1}^2}, \\
& l_{ik} = (a_{ik} - l_{i1}l_{k1} - l_{i2}l_{k2} - \dots - l_{i,k-1}l_{k,k-1})/l_{kk}, \quad i = \overline{k+1,n}
\end{aligned}$$

Достоинства метода:

1. Для $A=A^T>0$ требует вдвое меньше вычислит. затрат по сравнению с м-дом Гаусса.

2. Требует вдвое меньшего объёма оперативной памяти по сравнению с м-дом Гаусса.

3. Гарантированная устойчивость к вычислит. погрешности для положительно определённых матриц и матриц с диагональным преобладанием.

Дополнение.

① $A=A^T\not>0 \Rightarrow$

$$\underbrace{A^2}_{\overset{\shortparallel}{\mathrm{def}}\, B}\bar{x}=\underbrace{A\bar{f}}_{\overset{\shortparallel}{\mathrm{def}}\, \bar{g}}$$

(*) $B\bar{x}=\bar{g} \Leftrightarrow (1)$,

где $B=B^T>0$.

К СЛАУ (*) применяем м-д квадратных корней.

②. $A\neq A^T\not>0$,

$\det A\neq 0 \Rightarrow$

$$\underbrace{A^TA}_{\overset{\shortparallel}{\mathrm{def}}\, K}\bar{x}=\underbrace{A^T\bar{f}}_{\overset{\shortparallel}{\mathrm{def}}\, \bar{e}}$$

(*) $K\bar{x}=\bar{e} \Leftrightarrow (1)$

$K=K^T\overset{?}{>}0$

$$\underbrace{K^2}_{\overset{\shortparallel}{\mathrm{def}}\, B}\bar{x}=\underbrace{K\bar{e}}_{\overset{\shortparallel}{\mathrm{def}}\, \bar{g}}$$

(**) $B\bar{x}=\bar{g} \Leftrightarrow (1)$

$B=B^T>0$

Задание к лаб. № 3.

1. Для СЛАУ

гр. 2^a

$$1{,}65x_1 - 1{,}76x_2 + 0{,}77x_3 = 2{,}15,$$
$$-1{,}76x_1 + 1{,}04x_2 - 2{,}61x_3 = 0{,}82,$$
$$0{,}77x_1 - 2{,}61x_2 - 3{,}18x_3 = -0{,}73,$$

гр. 9^a

$$0{,}53x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}83x_3 = 0{,}68$$
$$-0{,}75x_1 + 0{,}68x_2 - 1{,}19x_3 = 0{,}95$$
$$1{,}83x_1 - 1{,}19x_2 + 2{,}15x_3 = 1{,}27$$

проверить $A = A^T > 0$.

2. Разложить $A = LL^T$.

3. К решению СЛАУ

$L\bar{y} = \bar{f}$; $L^T\bar{x} = \bar{y}$

применить обратный ход м-да Гаусса.

4. Вычислить

$$\|\bar{z}\|_{\infty,1,2} = \|A\bar{x}^* - \bar{f}\|_{\infty,1,2}.$$