1. Метод Рунге-Кутты

Дано следующее:

$$y'(x) = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$
$$\exists! y(x) \in \mathbb{C}^{r+1}[x_0, X]$$

Весь отрезок $[x_0, X]$ разбивается на части с шагом h.

Положим, что для некоторого $x_i \in \mathbb{C}^{r+1}$ значение $y(x_i)$ уже определено.

Тогда $x_{i+1} = x_i + h$

Значение для $y(x_{i+1})$ выводится из разложения функции в ряд Тейлора:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + ... + \frac{h^r}{r!}y^{(r)}(x_i) + O(h^{r+1})$$

Приращение значения функции вычисляется из первых r членов:

$$\Delta y_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) = p_1 k_1 + p_2 k_2 + ... + p_r k_r$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + c_2 h, y_i + \alpha_{21} h k_1) \\ ... \\ k_s &= f(x_i + c_s h, y_i + \alpha_{s1} h k_1 + \alpha_{s2} h k_2 + ... + a_{s,s-1} h k_{s-1} \end{aligned}$$

Числа s, c_i, α_{ij} определяют каждый конкретный метод. А в целом - это семейство явных методов Рунге-Кутты.

Метод Эйлера

$r = 1$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y_i) + O(h^2)$$

Метод Эйлера-Коши

$r = 2$

$$\begin{aligned} &y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}] + O(h^3) \\ &\tilde{y}_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Традиционный метод Рунге-Кутты

$r = 4$

$$\Delta y_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i,\ y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(x_i + h,\ y_i + k_3) \end{aligned}$$

Задание

Даны системы $\begin{cases} y' = ay - t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} z' = -z - at \\ z(0) = \alpha \end{cases}$

Найти α, когда известно, что $y(0.5) = z(0.5)$ аналитически и используя методы Рунге-Кутты при заданном шаге $h = 0.1$ и $r \in \{1, 2, 4\}$