



1. Метод Рунге-Кутты

Дано следующее:

$$y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0$$
$$\exists! y(x) \in \mathbb{C}^{r+1}[x_0, X]$$

Весь отрезок $[x_0, X]$ разбивается на части с шагом h .

Положим, что для некоторого $x_i \in \mathbb{C}^{r+1}$ значение $y(x_i)$ уже определено.

Тогда $x_{i+1} = x_i + h$

Значение для $y(x_{i+1})$ выводится из разложения функции в ряд Тейлора:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \dots + \frac{h^r}{r!}y^{(r)}(x_i) + O(h^{r+1})$$

Приращение значения функции вычисляется из первых r членов:

$$\Delta y_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_r k_r$$

где

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + \alpha_{21} h k_1)$$
$$\dots$$
$$k_s = f(x_i + c_s h, y_i + \alpha_{s1} h k_1 + \alpha_{s2} h k_2 + \dots + \alpha_{s, s-1} h k_{s-1})$$

Числа s, c_i, α_{ij} определяют каждый конкретный метод. А в целом - это семейство явных методов Рунге-Кутты.

Метод Эйлера

$$r = 1$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y_i) + O(h^2)$$

Метод Эйлера-Коши

$$r = 2$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] + O(h^3)$$
$$\tilde{y}_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y_i)$$

Традиционный метод Рунге-Кутты

$$r = 4$$

$$\Delta y_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Задание

Даны системы $\begin{cases} y' = ay - t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} z' = -z + at \\ z(0) = \alpha \end{cases}$

Найти α , когда известно, что $y(0.5) = z(0.5)$ аналитически и используя методы Рунге-Кутты при заданном шаге $h = 0.1$ и $r \in \{1, 2, 4\}$