2.3. Синхронный режим с непрерывным выполнением процессов

Рассмотрим *первый синхронный режим, который обеспечивает выполнение каждого из процессов с момента старта первого блока и до момента завершения последнего без внутренних “пролеживаний” блоков* и определяется условиями 1–4, 6 (см. раздел 2.1). Для этого режима минимальное общее время выполнения n конкурирующих процессов на p процессорах обозначим $T_{сн}^{1}(p,n,s)$.

Пусть $n=p$. В этом случае режим с непрерывным выполнением блоков внутри каждого из процессов совпадает с технологией выполнения операций в многостадийной задаче теории расписаний с непрерывным переходом по станкам. Следовательно, для вычисления $T_{сн}^{1}(p,n,s)$ можно воспользоваться функционалом этой задачи. Полагая в нем время обслуживания *j–й* операции на *i–м* станке равным t_{ij}, получим следующее соотношение:

$$T_{сн}^{1}(p,n=p,s)=\sum_{i=1}^{p-1}\max_{1\le u\le s}\left[\sum_{j=1}^{u}t_{ij}-\sum_{j=1}^{u-1}t_{i+1,\,j}\right]+\sum_{j=1}^{s}t_{pj}\,. \qquad (2.1)$$

Если $n<p$, то для вычисления $T_{сн}^{1}(p,n,s)$ достаточно взять n процессоров и воспользоваться соотношением (2.1),

заменив в нем *p* на *n*. Оставшиеся $p-n$ процессоров в этом случае не будут задействованы.

Пусть $n>p$. Тогда, при $n=kp$, $k>1$, произведем разбиение множества процессов на *k* групп по *p* процессов в каждой, что равносильно разбиению исходной матрицы времен выполнения блоков $[t_{ij}]_{p\times s}$ на *k* подматриц по *p* строк в каждой.

Взаимодействие процессов, процессоров и блоков с учетом времен их выполнения и технологических условий первого синхронного режима для каждой из *m–х* групп процессов, $m=\overline{1,k}$, можно отобразить в виде линейных диаграмм Ганта. При этом каждая из диаграмм Ганта будет отображать во времени выполнение очередных *p* процессов на *p* процессорах.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

- $t_{ij}^{m}=t_{(m-1)p+i,\,j}$ – время выполнения *j–го* блока *i–м* процессом для *m–й* группы процессов, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,s}$, $m=\overline{1,k}$;
- $B_i^m(s)$ – время начала выполнения *i–го* процесса в *m–й* группе процессов, $i=\overline{1,p}$, $m=\overline{1,k}$;

- $E_i^m(s)$ – время завершения выполнения *i–го* процесса в *m–й* группе процессов, $i = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, k}$;
- T_1^m – минимальное общее время выполнения *m–й* группы процессов на *p* процессорах с момента старта первого процесса и до завершения последнего из этой группы, $m = \overline{1, k}$;
- $b_i^m(s)$ – время начала выполнения *i–го* процесса из *m–й* группы, считая с момента старта первого процесса в первой группе, без учета времен совмещения диаграмм;
- $e_i^m(s)$ – время окончания выполнения *i–го* процесса из *m–й* группы, считая с момента старта первого процесса в первой группе, без учета времен совмещения диаграмм.

В силу (2.1) для T_1^m, $B_i^m(s)$, $E_i^m(s)$ имеют место следующие соотношения:

$$T_1^m = \sum_{i=1}^{p-1} \max_{1 \le u \le s} \left[\sum_{j=1}^{u} t_{ij}^m - \sum_{j=1}^{u-1} t_{i+1,j}^m \right] + \sum_{j=1}^{s} t_{pj}^m, \tag{2.2}$$

$$B_i^m(s) = \sum_{q=1}^{i-1} \max_{1 \le v \le s} \left[\sum_{w=1}^{v} t_{qw}^m - \sum_{w=1}^{v-1} t_{q+1,w}^m \right], \; E_i^m(s) = B_i^m(s) + \sum_{w=1}^{s} t_{iw}^m .$$

$b_i^m(s)$ и $e_i^m(s)$ определяются по формулам:

$$b_i^m(s) = B_i^m(s) + \sum_{m=1}^{k} T_1^{m-1}, \; e_i^m(s) = E_i^m(s) + \sum_{m=1}^{k} T_1^{m-1}, \; T_1^0 = 0,$$

$$i = \overline{1, p}, \quad m = \overline{1, k}.$$

Из анализа диаграмм Ганта, соответствующих каждой из групп процессов, нетрудно заметить, что минимальное общее время выполнения $n = kp$, $k > 1$, конкурирующих процессов определяется как сумма длин всех k диаграмм с учетом их максимально допустимого совмещения по оси времени, т.е.

$$T_{сн}^1(p, n = kp, s) = \sum_{m=1}^{k} T_1^m - \delta,$$

где

$$\delta \geq \sum_{m=1}^{k-1} \min\{\delta_1^m, \delta_2^m\} \quad (2.3)$$

и обозначает длину отрезка максимально возможного совмещения двух соседних диаграмм Ганта по оси времени.

Здесь δ_1^m представляет собой наименьшую из разностей между моментами начала выполнения *i–го* процесса в *(m+1)–й* группе процессов, т.е.

$$\delta_1^m = \min_{1 \leq i \leq p} \{b_i^{m+1}(s) - e_i^m(s)\}, \quad m = \overline{1, k-1}, \quad (2.4)$$

а δ_2^m также представляет собой наименьшую из разностей между началом выполнения *j–го* блока для первого процесса в *(m+1)–й* группе процессов и временем завершения выполнения этого же блока для *p–го* процесса в *m–й* группе, т.е.

$$\delta_2^m = \min_{1 \le j \le s} \{b_1^{m+1}(j) - e_p^m(j)\}, \quad m = \overline{1, k-1}. \tag{2.5}$$

Знак неравенства в (2.3) объясняется тем, что каждое значение $\min\{\delta_1^m, \delta_2^m\}$, $m = \overline{1, k-1}$, учитывает только величину максимально допустимого совмещения по оси времени между парами соседних диаграмм Ганта, но при этом не всегда учитываются возможно допустимые совмещения между подряд идущими процессами, выполняющимися на одном и том же процессоре в двух соседних группах. Пример такой ситуации будет приведен ниже.

Если число процессов *n* не кратно *p*, т.е. $n = kp + r$, $1 \le r \le p-1$, то минимальное общее время выполнения *n* конкурирующих процессов определяется по формуле:

$$T_{сн}^1(p, n = kp + r, s) = T_{сн}^1(p, n = kp, s) + T_1^{k+1}(r) - \delta(r),$$

где $T_1^{k+1}(r)$ – время выполнения *(k+1)–й* группы из *r* процессов, а $\delta(r)$ – величина максимально допустимого совмещения по оси времени *k–й* и *(k+1)–й* диаграмм. Значения $T_1^{k+1}(r)$ и $\delta(r)$ определяются по формулам:

$$T_1^{k+1} = \sum_{i=1}^{r-1} \max_{1 \le u \le s} \left[\sum_{j=1}^{u} t_{ij}^{k+1} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{i+1,j}^{k+1} \right] + \sum_{j=1}^{s} t_{rj}^{k+1}, \qquad (2.6)$$

$$\delta(r) = \min\{\delta_1^k(r), \delta_2^k(r)\}, \qquad (2.7)$$

$$\delta_1^k(r) = \min_{1 \le i \le r} \{b_i^{k+1}(s) - e_i^k(s)\}, \; \delta_2^k(r) = \min_{1 \le j \le s} \{b_1^{k+1}(j) - e_r^k(j)\}.$$

Таким образом, имеет место теорема.

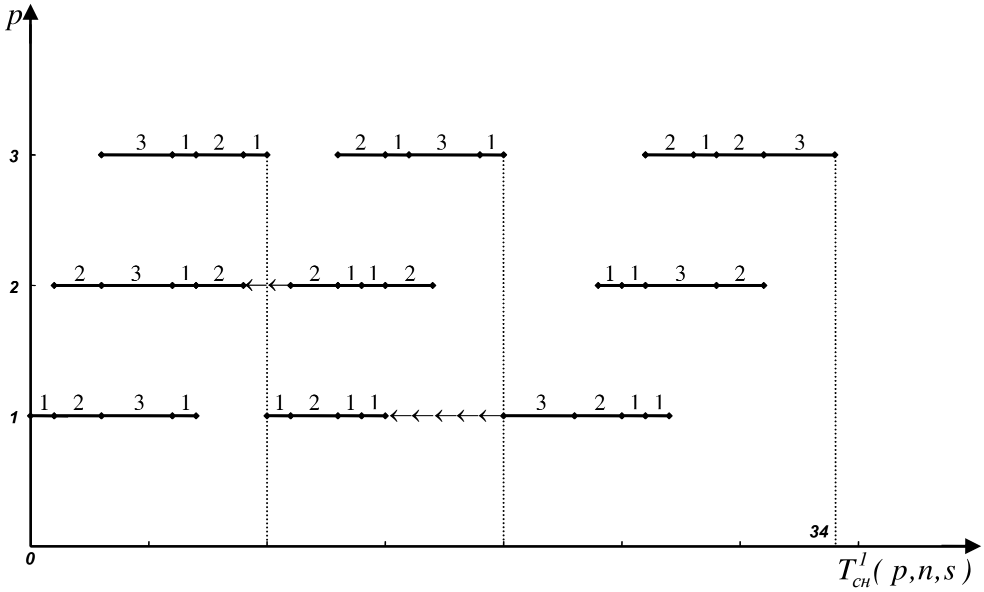
Т е о р е м а 2.3. *Для синхронного режима с непрерывным выполнением процессов при* $p, n, s \ge 2$*, минимальное общее время выполнения* n *неоднородных сосредоточенных конкурирующих процессов определяется из соотношений:*

$$T_{сн}^1(p,n,s) = \sum_{i=1}^{p-1} \max_{1 \le u \le s} \left[\sum_{j=1}^{u} t_{ij} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{i+1,j} \right] + \sum_{j=1}^{s} t_{pj} \;\; \textit{при} \;\; n \le p,$$

$$T_{сн}^1(p,n,s) \le \begin{cases} \sum_{m=1}^{k} T_1^m - \sum_{m=1}^{k-1} \min\{\delta_1^m, \delta_2^m\} \;\; \textit{при} \;\; n = kp, \\ \sum_{m=1}^{k} T_1^m + T_1^{k+1}(r) - \sum_{m=1}^{k-1} \min\{\delta_1^m, \delta_2^m\} - \\ - \min\{\delta_1^k, \delta_2^k\} \;\; \textit{при} \;\; n = kp + r, \; 1 \le r < p. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Здесь T_1^m, δ_1^m, δ_2^m, $T_1^{k+1}(r)$, $\delta_1^k(r)$, $\delta_2^k(r)$ *определяются по формулам (2.2), (2.4)–(2.7) соответственно.*

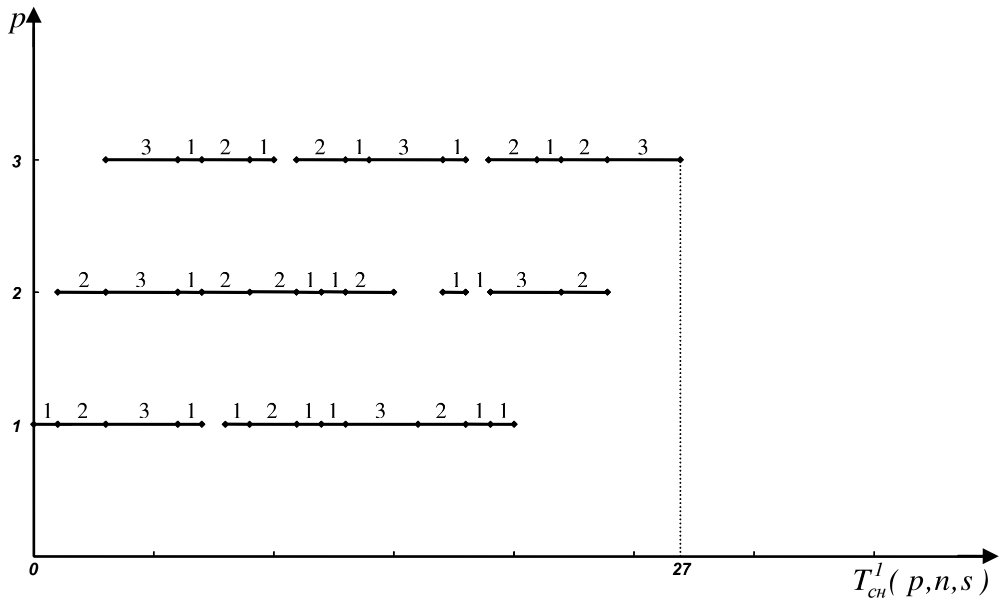
На рис.2.4 и рис.2.5 приведен пример совмещения последовательных диаграмм при $n = 9$, $p = 3$, $s = 4$, что соответствует случаю $n = kp$. Величины времен выполнения блоков указаны на диаграммах. Расчетное значение



минимального общего времени $T^{1}_{сн}(p,n,s)$, полученное по формулам (2.8), является точным.

Рис. 2.4 – Несовмещенная диаграмма Ганта

На рис.2.6–рис.2.8 приведен случай, когда при вычислении $T^{1}_{сн}(p,n,s)$ непосредственно по формулам 2.8 имеет место неравенство. Действительно, с учетом исходных данных, приведенных на рис. 2.6, значение величины δ, определяемое из неравенства (2.3), равно *6* единицам. Но, учитывая возможное совмещение процессов из первой и второй групп, выполняющихся на первом процессоре, появляется дополнительный резерв времени на одну единицу для последующего совмещения третьей и второй диаграмм. В результате величина δ суммарного максимально допустимого совмещения составит *7* единиц. Резервы



времени для допустимых совмещений соседних диаграмм на рис. 2.4, рис. 2.6 и рис. 2.7 показаны “←”.

Рис. 2.5 – Совмещенная диаграмма Ганта

Очевидно, что знак равенства в соотношениях (2.3) и (2.8) зависит от структуры матрицы времен выполнения блоков $[t_{ij}]$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$.

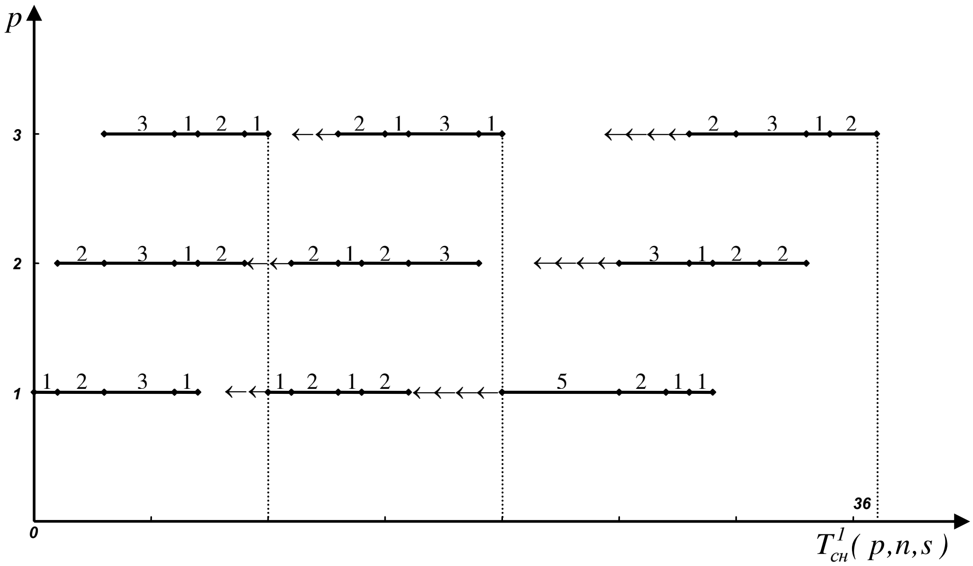


Рис. 2.6

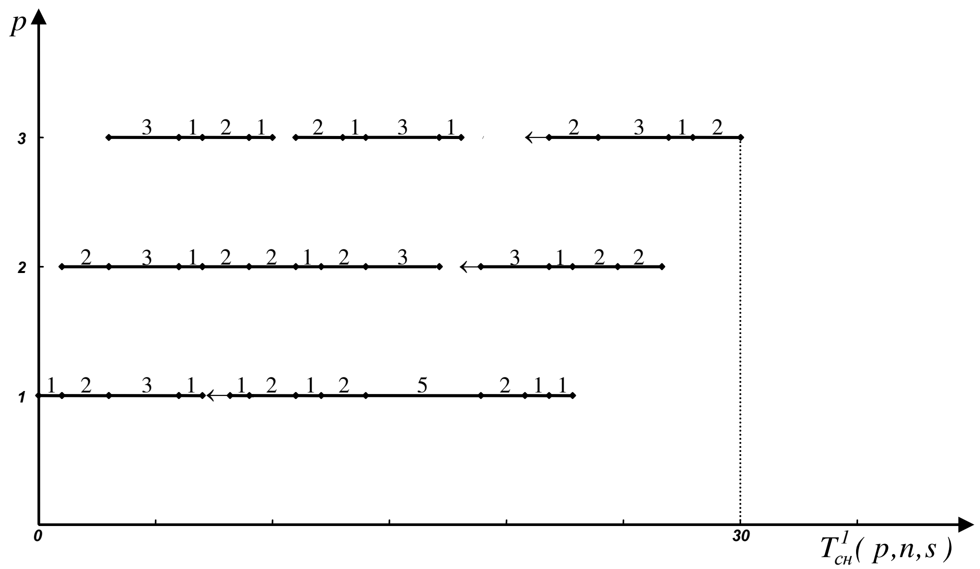


Рис. 2.7

В частности, имеет место теорема.

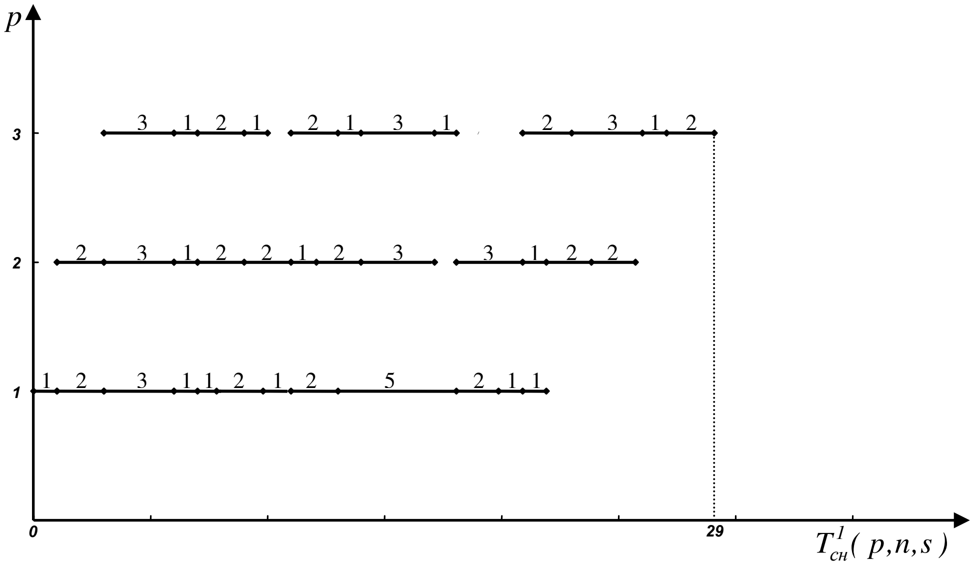


Рис. 2.8

Т е о р е м а 2.4. *Если в условиях теоремы 2.3 для всех* $m=\overline{1,k-2}$ *(при* $n=kp$*) и* $m=\overline{1,k-1}$ *(при* $n=kp+r$*) величина максимально возможного совмещения любых двух соседних диаграмм Ганта достигается только между процессами, выполняющимися на первом процессоре, то в соотношениях (2.3), (2.8) будет иметь место точное равенство.*

Доказательство следует из того факта, что величина максимально допустимого совмещения любых двух процессов из соседних групп, выполняющихся на одном и том же процессоре, за исключением первого, зависит от величины совмещения предыдущей пары процессов.

Следует заметить, что для системы однородных сосредоточенных конкурирующих процессов в соотношениях (2.8) для вычисления $T_{co}^{1}(p,n,s)$ всегда будет достигаться знак равенства, при этом сами формулы значительно упрощаются (см. раздел 2.5). В разделе 2.6 будут выделены другие классы структурирований, для которых в (2.3), (2.8) достигается знак равенства.