3.2. Критерии эффективности и оптимальности структурирования программных ресурсов при ограниченном числе процессоров

Пусть $\theta_s = (t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s)$ структурирование программного ресурса на s, $s \ge 2$, блоков. Выше в разделе 3.1 показано, что с учетом параметра $\tau > 0$, характеризующего время дополнительных системных расходов на организацию параллельного использования блоков множеством конкурирующих процессов, вычисление минимального общего времени $T_{co}^{ac,1}(p,n,s,\tau)$ в асинхронном и первом синхронном режимах для класса однородных конкурирующих процессов осуществляется по формулам:

$$T_{co}^{ac,1}(p,n,s,\tau) = \begin{cases} T_c^\tau + (n-1)t_{\max}^\tau, \\ при\ \ p = n\ \ или\ \ p < n,\ \ но\ \ T_c^\tau \le p t_{\max}^\tau, \\ (k+1)T_c^\tau + (r-1)t_{\max}^\tau, \\ при\ \ n > p\ \ и\ \ T_c^s > p t_{\max}^s. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь $T_c^\tau = \sum\limits_{j=1}^{s} t_j^\tau$, $t_{\max}^\tau = \max\limits_{1 \le j \le s} t_j^\tau$, $t_j^\tau = t_j + \tau$, $n = kp + r$, t_j – время выполнения *j–го* блока каждым из однородных процессов, $j = \overline{1,s}$.

Согласно определению 3.3 структурирование $\theta_s = (t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s)$ программного ресурса для системы однородных конкурирующих процессов называется эффективным при фиксированных p, $n \ge 2$, если величина

$$\Delta(s) = nT_c^s - T_{co}^{ac,1,2}(p,n,s,\tau) \ge 0,$$

где nT_c^s – время выполнения n процессов на одном процессоре такой же производительности, $T_c^s = \sum_{j=1}^{s} t_j$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3.5. *Если* p, n, $s \geq 3$, $p = s \neq 3$ *и* $\tau \leq \min\limits_{1 \leq j \leq s} t_j$, *то структурирование программного ресурса* $(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ *будет эффективным при выполнении n конкурирующих процессов на МС с p процессорами тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

$$sn \geq \begin{cases} 2(s+n-1), \ \textit{если} \ n \leq p, \\ 2[(k+1)s + r - 1] \ \textit{если} \ n > p, \ n = kp + r, \ 1 \leq r \leq p. \end{cases}$$

Доказательство теоремы в случае $n \leq p$ основывается на анализе следующих неравенств. Условие эффективности равносильно следующему:

$$\frac{T_c^s - t_{\max}^\tau}{\tau} \geq \frac{n+s-1}{n-1}, \quad t_{\max}^\tau = \max_{1 \leq j \leq s} t_j^\tau.$$

В силу условия теоремы $\tau \leq \min\limits_{1 \leq j \leq s} t_j$ имеет место неравенство:

$$\frac{T_c^s - t_{\max}^\tau}{\tau} \geq s - 1.$$

Кроме того, условие теоремы $sn \geq 2(s+n-1)$ равносильно следующему:

$$s - 1 \geq \frac{n+s-1}{n-1}.$$

Аналогично доказываются и остальные случаи, т.е. когда $n > p$ $(n = kp,\ k > 1,\ n = kp + r,\ 1 \le r \le p - 1)$.

Сформулируем далее критерий оптимальности структурирования программных ресурсов в общем случае, т.е. при ограниченном числе процессоров ($n > p$).

Пусть структурирование $\theta_s = (t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_s)$ является равномерным, т.е. $t_1 = t_2 = \dots = t_s = t$. В этом случае в силу формул (3.2) и с учетом параметра $\tau > 0$ для вычисления минимального времени $\overline{T}_c^{\tau}$ для всех трех базовых режимов имеют место формулы:

$$\overline{T}_c^{\tau} = \begin{cases} (n + s - 1)t^{\tau} \ \text{\textit{если}} \ \ p \ge \min(n, s), \\ (ks + p - 1]t^{\tau} \ \text{\textit{если}} \ \ p < \min(n, s), \ \ n = kp, \\ [(k + 1)s + r - 1]t^{\tau} \ \text{\textit{если}} \ \ p < \min(n, s), \ \ n = kp + r, \ 1 \le r < p. \end{cases} \tag{3.3}$$

Здесь $t^{\tau} = T_c^s \big/ s + \tau$, $T_c^s = st$.

В соответствии с определением 3.3 и формулами (3.3) функцию $\Delta(s)$, которая определяет эффективность структурирования, можно преобразовать к одному из следующих видов:

$$\Delta_1(s) = \alpha^2 \tau \left[1 - \frac{n-1}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{s} + s\frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \text{ при } 2 \le s \le p, \tag{3.4}$$

где $\alpha = \left(\dfrac{n-1}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}$;

$$\Delta_2(s) = k\beta^2\tau\left[\frac{n-k}{p-1} - \frac{p-1}{k\beta^2} - \left(\frac{1}{s} + s\frac{1}{\beta^2}\right)\right] \text{ при } s > p, \qquad (3.5)$$

где $n = kp + r$, $k > 1$, $r = 0$, $\beta = \left[\dfrac{(p-1)T_c^s}{k\tau}\right]^{\frac{1}{2}}$;

$$\Delta_3(s) = (n-k-1)T_c^s - (r-1)\tau - (k+1)\left(s + \frac{1}{s}\gamma^2\right)\tau \text{ при } s > p, \qquad (3.6)$$

где $n = kp + r$, $k \ge 1$, $1 \le r < p$, $\gamma = \left[\dfrac{(r-1)T_c^s}{(k+1)\tau}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Далее, на основании свойств выпуклости функций $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$ и $\Delta_3(s)$ имеют место следующие леммы.

Лемма 3.1. *$\Delta_1(s)$ достигает своего наибольшего значения на $[2, p]$ в одной из точек множества $\{p, [[\alpha],[\alpha]+1] \cap [2, p]\}$, которую обозначим через s_1^*.*

Лемма 3.2. *$\Delta_2(s)$ достигает своего наибольшего значения при $s \ge p$ в одной из точек множества $\{p, [[\beta],[\beta]+1] \cap [p,+\infty]\}$, которую обозначим через s_2^*.*

Лемма 3.3. *$\Delta_3(s)$ достигает своего наибольшего значения при $s \ge p$ в одной из точек множества $\{p, [[\gamma],[\gamma]+1] \cap [p,+\infty]\}$, которую обозначим через s_3^*.*

Тогда решение задачи об оптимальном структурировании программного ресурса для всех трех базовых режимов взаимодействия процессов, процессоров и блоков при фиксированных p, n, T_c^s, τ вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.6. *Для того, чтобы эффективное структурирование программного ресурса на s,* $s \ge 2$*, блоков было оптимальным при* $n = kp + r$, $1 \le r < p$*, необходимо и достаточно, чтобы*

во–первых, оно было равномерным;

во–вторых, выполнялось одно из следующих условий:

- *при* $r = 0$ *s равняется тому значению из* $\{s_1^*, s_2^*\}$*, при котором функция* $\Delta(s)$ *принимает большее значение;*

- *при* $r > 0$ *s равняется тому значению из* $\{s_1^*, s_3^*\}$*, при котором функция* $\Delta(s)$ *принимает большее значение.*

Доказательство теоремы следует из формул (3.3)–(3.6) и лемм 3.1–3.3.

Доказанные теоремы 3.5 и 3.6 устанавливают необходимые и достаточные условия (критерии) эффективности и оптимальности структурирования программных ресурсов по числу блоков и процессов с учетом накладных расходов при ограниченном числе процессоров многопроцессорной системы.