Matematiche elementari da un PVS
a.a. 2023-2024

Risolubilità per radicali delle equazioni algebriche. Aspetti storici e didattici - parte 2

Momenti di storia dell'algebra classica
fino alle equazioni di 3° grado

5 ottobre 2023

prof. Luigi Tomasi

Leonardo Pisano, detto Fibonacci (ca. 1170 – 1240)

2

Leonardo Pisano, detto Fibonacci
Fi(lius) Bonaccii:
l'algebra arriva in Italia (e in Europa)

A partire dall'XI secolo, grazie alla fine delle scorrerie barbariche, allo sviluppo dei commerci, a una consistente crescita demografica, si assiste in Italia, ma soprattutto a Genova, Pisa e Venezia, a uno sviluppo economico senza precedenti, basato sul commercio per mare tra i paesi dell'Islam e l'Europa continentale.

Guglielmo Bonacci, mercante pisano, decise di portare il figlio Leonardo a Bugia, nel nordest dell'attuale Algeria, per studiare i nuovi metodi aritmetici degli arabi e forse anche la lingua araba.

3

Leonardo Pisano, *Fi(lius) Bonaccii* (1170ca - 1240)
l'algebra arriva in Italia (e in Europa)

4

Leonardo Pisano, detto Fibonacci: l'algebra arriva in Italia (e in Europa); il *Liber abbaci*

Leonardo (1170ca - 1240) rapidamente e con entusiasmo si impadronì delle tecniche di calcolo basate sulle cifre indiane (dette da noi «arabe») e sulla cifra 0 in particolare, della scrittura posizionale dei numeri e degli algoritmi di calcolo per le quattro operazioni aritmetiche.

Dopo aver viaggiato in tutti i paesi del Mediterraneo, entrando in contatto con studiosi di estrazione diversa, di ritorno a Pisa, scrisse il suo capolavoro, il *Liber abbaci* (1202) oggi chiamato *Liber abaci.*

Il libro fu riscritto ed emendato nel 1228 ed ebbe un'enorme influenza sullo sviluppo della scienza in Italia e poi in Europa.

5

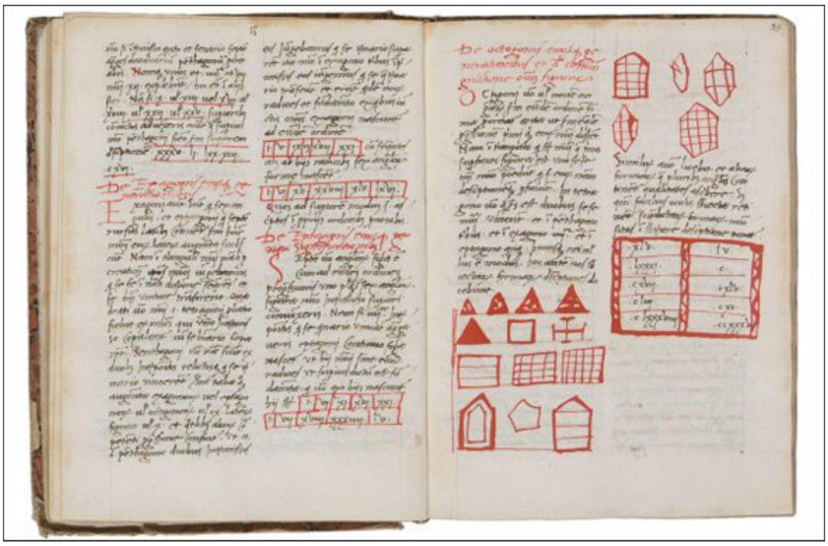
Il *Liber abaci* (1202), una ricchissima miscellanea matematica

L'opera è una ricchissima miscellanea di problemi di matematica, da quelli strettamente legati alla mercanzia, ai baratti e alle compagnie, a quelli puramente matematici.

Il livello matematico è molto accurato, completo di dimostrazioni, sia logiche sia geometriche, per giustificare le affermazioni fatte, con un metodo indubbiamente legato all'impostazione assiomatico -deduttiva che gli arabi avevano importato dai greci. L'opera nel suo complesso è un prolungamento latino della matematica araba, sulla scia di al-Khwarizmi.

6

Il *Liber abaci* (1202), di Fibonacci



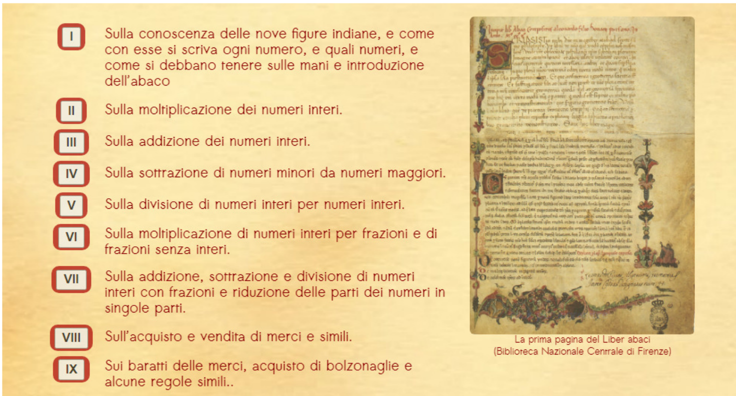
7

Sito «Progetto Fibonacci» con la traduzione italiana del *Liber abaci* www.progettofibonacci.it/

Libro monumentale, suddiviso in 15 capitoli.

Vedere in particolare l'indice:

www.progettofibonacci.it/libab_indice.html



8

Sito «Progetto Fibonacci» con la traduzione italiana del *Liber abaci* www.progettofibonacci.it/

- I Sulla conoscenza delle nove figure indiane, e come con esse si scriva ogni numero, e quali numeri, e come si debbano tenere sulle mani e introduzione dell'abaco
- II Sulla moltiplicazione dei numeri interi.
- III Sulla addizione dei numeri interi.
- IV Sulla sottrazione di numeri minori da numeri maggiori.
- V Sulla divisione di numeri interi per numeri interi.
- VI Sulla moltiplicazione di numeri interi per frazioni e di frazioni senza interi.
- VII Sulla addizione, sottrazione e divisione di numeri interi con frazioni e riduzione delle parti dei numeri in singole parti.
- VIII Sull'acquisto e vendita di merci e simili.
- IX Sui baratti delle merci, acquisto di bolzonaglie e alcune regole simili..

La prima pagina del Liber abaci (Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze)

9

Sito «Progetto Fibonacci» con la traduzione italiana del *Liber abaci* www.progettofibonacci.it/

- X Sulle società fatte fra consoci.
- XI Sulla fusione di monete e delle loro regole, pertinenti alla fusione.
- XII Sulla soluzione di questioni di varia natura dette erratiche.
- XIII Sulla regola della doppia falsa posizione, come per essa si possano risolvere quasi tutte le varie questioni erratiche.
- XIV Sulla determinazione delle radici quadrate e cubiche e la moltiplicazione e divisione e somma e estrazione di queste radici tra di loro e dei recisi e delle loro radici.
- XV Sulle regole e proporzioni pertinenti alla geometria: questioni di algebra e almuchabala.

10

Gli algebristi italiani del Cinquecento

Gli algebristi italiani del Cinquecento

Il XVI secolo in Italia vede il pieno sviluppo del Rinascimento ed anche in matematica, soprattutto nelle ricerche algebriche, si hanno dei risultati molto significativi.

Viene infatti trovata la formula risolutiva per radicali delle equazioni di 3°grado e in seguito quella delle equazioni di 4° grado.

Gli algebristi italiani del Cinquecento

Numerose ed aspre furono le polemiche, sorte già nel Cinquecento, su chi debba essere l'autore della "scoperta".

Ad oggi si può affermare che gli autori della formula risolutiva di 3° grado furono:

Scipione dal Ferro, *Niccolò Fontana*, detto *Tartaglia,* e *Gerolamo Cardano*.

Ognuno di essi, infatti, ha contribuito diversamente alla risoluzione del problema.

13

Scipione dal Ferro (1465-1526)

L'equazione trattata da *Scipione dal Ferro,* lettore di «Aritmetica e Geometria» all'Università di Bologna, è del tipo $ax^3 + bx = c$, che viene da lui subito ricondotta alla forma $x^3 + px = q$ (p e q positivi).

Sembra che già nel 1515 Scipione dal Ferro avesse trovato la formula risolutiva, ma è morto (nel 1526) senza divulgarla. L'ha però rivelata ad alcuni suoi allievi e a suo genero Annibale della Nave (anche lui matematico a Bologna) in punto di morte, trasferendogli i suoi appunti.

Egli viene indicato come uno degli autori della formula risolutiva da Gerolamo Cardano nell'*Ars Magna* (1545).

14

La «formula segreta» di Scipione dal Ferro

Il fatto che Scipione dal Ferro non avesse divulgato la formula è in perfetto accordo con il costume dell'epoca; infatti i «lettori» all'università (una sorta di «professori incaricati») non erano impiegati pubblici ed il loro contratto veniva rinnovato di anno in anno, per la loro «bravura».

Quindi, era uso sfidarsi pubblicamente nella risoluzione di problemi.

Per questo motivo, chi trovava una formula generale, la teneva per sé, in modo da vincere le «disfide matematiche».

15

La «formula segreta» di Scipione dal Ferro

Merito principale di Scipione dal Ferro è di aver scoperto la risoluzione algebrica delle equazioni di III grado, problema che era stato posto fin dall'antichità e che ancora Luca Pacioli giudicava insolubile.

Il nome di fu al centro dell'aspra contesa che a partire dal 1545 oppose Cardano (e Ludovico Ferrari, allievo di Cardano) da un lato e Tartaglia dall'altro.

16

La «formula segreta» di Scipione dal Ferro

A proposito della equazione

$$x^3 + px = q$$

(cioè «cubo e cose eguali a numero») Cardano ha scritto nell'*Ars Magna, cap. I*: "Scipio Ferreus Bononiensis" aveva scoperto "rem sane pulchram et admirabilem" ed aggiungeva che il Tartaglia, definito ancora "amicus noster", aveva appreso da Antonio Maria Fiore, discepolo di Dal Ferro, la notizia di tale scoperta e, spinto da "emulazione", aveva cercato di risolvere il problema (*Artis magnae, sive de reguli algebraicis*, Norimbergae, per Ioh. Petreium, 1545).

17

Tartaglia rivela la «formula» a Cardano

Tale risoluzione era stata confidata da Tartaglia (nel 1539), in tutta segretezza, allo stesso Cardano, dopo molta insistenza di quest'ultimo, il quale però si accingeva a diffonderla e a completarla con l'aiuto del suo brillante allievo Ludovico Ferrari (*ibid*., f. 3r).

Cardano ricordava inoltre nel cap. I dell' *Ars Magna* che Dal Ferro era giunto a tale scoperta trent'anni prima, cioè intorno al 1515 (*ibid*., f. 29v).

18

La «matematica disfida» tra Antonio Maria del Fiore e Tartaglia

Antonio Maria Del Fiore (Venezia, 1480 - ?), detto anche **Fior,** era stato allievo di Scipione dal Ferro a Bologna, e da lui aveva imparato un metodo di risoluzione (prima ignoto) dell'equazione cubica $x^3 + px = q$.

Del Fiore, avendo saputo che Niccolò Tartaglia affermava di saper risolvere l'equazione cubica del tipo:

$$x^3 + x^2 = r$$

credette fosse un impostore e gli inviò un cartello di "matematica disfida«, ossia un elenco di problemi da risolvere tramite delle equazioni di III grado.

19

Tartaglia e Antonio Maria del Fiore (allievo veneziano di Scipione dal Ferro a Bologna)

Da parte sua Tartaglia confermava che Antonio Maria del Fiore nel 1535 si serviva, senza saperla dimostrare, di una formula segreta comunicatagli da un "gran mathematico" (N. Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse,* 1554), ma aggiungeva che già nel 1530 egli aveva risposto ai quesiti presentatigli da un certo Maestro Zuanne de Tonini da Coi, maestro d'abaco a Brescia .

20

La «formula segreta» di Scipione dal Ferro

Inoltre nel 1547 Ludovico Ferrari (allievo di Cardano) dichiarava di aver visto a Bologna insieme con Cardano, presso il Della Nave (genero di), un "*libellum manu Scipionis Ferrei soceri sui iam diu conscriptum, in, quo istud inventum eleganter et docte explicatum tradebatur*" (*Secondo cartello*, p. 3);

in ogni caso Tartaglia non respingeva tale testimonianza ("questa particolarità non mi par licita a doverla disputare né manco negare", *Seconda risposta della matematica disfida*, p. 3).

21

La «disfida» tra Antonio Maria del Fiore e Tartaglia (1535, a Venezia)

- Del Fiore prese così a sfidare polemicamente nel 1530 Giovanni de Tonini da Coi e, nel 1535, Niccolò Tartaglia (che si era trasferito da Verona a Venezia nel 1534, come «maestro d'abaco»), invitandoli alla risoluzione di problemi algebrici che, appunto, erano "solvibili" mediante la nuova regola.

22

La «disfida» tra Antonio Maria del Fiore e Tartaglia (svolta a Venezia, nel 1535)

Questa "disfida" ebbe un'enorme importanza nella Storia della matematica, in quanto stimolò Tartaglia a cercare (e a trovare) la formula risolutiva dell'equazione cubica generale.

La disfida si svolse in pubblico, e finì con la piena vittoria di Tartaglia, che in due ore risolse tutti i problemi propostigli da Del Fiore, mentre questi non riuscì a risolvere nessuno dei problemi che Tartaglia gli aveva proposto.

23

La «disfida» tra Antonio Maria del Fiore e Tartaglia

- Ma anche Tartaglia pervenne alla suddetta regola e, a suo dire, ciò gli era riuscito tra il 12 e il 13 febbraio 1535, cioè appena otto giorni antecedenti la data entro cui i trenta quesiti propostigli dal Fiore, unitamente agli altri trenta quesiti da lui proposti di rimando, venissero depositati a Venezia, presso un notaio, per formalizzare la sfida e fissare i tempi concessi per la soluzione dei problemi.
- Dalla disputa con Del Fiore, Tartaglia uscì vincitore, ma l'intera faccenda da quell'anno prese a complicarsi per l'intervento di nuovi ed autorevoli esperti (Cardano e Ferrari).

24

La «disfida» tra Antonio Maria del Fiore e Tartaglia

- Cardano, con pressioni e lusinghe, in data 25 marzo 1539, riusciva ad ottenere dal Tartaglia l'agognata formula in forma di sonetto, sotto giuramento di non diffonderla ma, presa poi visione, nell'anno 1542, insieme con il suo allievo Ludovico Ferrari, di un libretto del che ne disquisiva, si sentì affrancato da quell'obbligo di segretezza, in ogni caso libero di comunicare al mondo con la pubblicazione dell'*Ars Magna* (1545), tutto quello che lui e il Ferrari, avevano ricavato da quella regola.

25

La formula rivelata da Tartaglia a Cardano tramite un sonetto (Tartaglia, 1539)

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.
In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osseruarai quest'altri contratti,

Quando che 'l cubo con le cose appresso
x^3+px
Se agguaglia a qualche numero discreto
$= q$
Trovami dui altri, differenti in esso.
$u-v = q$
Dapoi terrai, questo per consueto,
Che 'l loro produtto, sempre sia eguale
$u \cdot v =$
Al terzo cubo delle cose netto,
$(p/3)^3$
El residuo poi suo generale,
Delli lor lati cubi, ben sottratti
radcub(u) - radcub(v)
Varrà la tua cosa principale.
$= x$
In el secondo, de cotesti atti
Quando che 'l cubo, restasse lui solo
Tu osserverai quest'altri contratti,

26

La formula rivelata da Tartaglia a Cardano tramite un sonetto (Tartaglia, 1539)

Del numer farai due tal part'à uolo
Che l'una in l'altra ſi produca ſchietto
El terzo cubo delle coſe in ſtolo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi inſieme gionti
Et cotal ſomma ſarà il tuo concetto.
El terzo poi de queſti noſtri conti
Se ſolue col ſecondo ſe ben guardi
Che per natura ſon quaſi congionti.
Queſti trouai, & non con paſſi tardi
Nel mille cinquecentè, quatroe trenta
Con fondamenti ben ſald'è gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

Del numer farai due tal part'a volo,
Che l' una, in l'altra, si produca schietto,
El terzo cubo delle cose in stolo
Delle quali poi, per commun precetto,
Terrai li lati cubi, insieme gionti
El cotal somma, sarà il tuo concetto.
El terzo, poi de questi nostri conti
Se solve col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent' e quattro e trenta;
Con fondamenti ben sald' e gagliardi
Nella Città dal mar 'intorno centa.

Tartaglia denuncia il tradimento di Cardano

- Da qui, Tartaglia affidava al libro IX dei suoi *Quesiti* (1546) il compito di denunciare il tradimento di Cardano, ribadendo la sua posizione in merito alla storia della scoperta, mentre i «cartelli di disfida» che Ludovico Ferrari (allievo di Cardano) prese ad inviargli insieme con quelli di risposta che riceveva da Tartaglia (negli anni 1547-1548) costituivano una delle più esemplari testimonianze della conflittualità della medesima.

Niccolò Fontana detto **Tartaglia** (Brescia 1499ca - Venezia 1557)

29

30

La formula risolutiva delle equazioni di 3° grado viene ritrovata da Tartaglia in modo indipendente da .

Tartaglia risolve l'equazione del tipo $x^3 + px = q$, ponendo $x = u - v$ e $p = 3uv$.

Con queste posizioni si ha: $q = u^3 - v^3$. Si ottiene pertanto l'identità (cubo del binomio):

$$(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3$$

e il sistema $\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ u^3v^3 = \dfrac{p^3}{27} \end{cases}$ che permette di risolvere l'equazione.

31

Per quanto riguarda il contributo di Niccolò Tartaglia, egli è il primo ad avere osservato che la risoluzione dell'equazione cubica $x^3 + px = q$ dipende da quella dell'equazione quadratica (detta *risolvente*):

$$y^2 - qy = \frac{p^3}{27}$$

dove $y = u^3$.

I risultati di Tartaglia saranno anch'essi pubblicati da Cardano nell'*Ars Magna* (1545).

[In realtà il libro di Cardano è intitolato *Artis Magnae*].

32

Gerolamo Cardano,

nato a Pavia nel 1501 e morto a Roma nel 1575; si è laureato in Arti liberali a Venezia e in Medicina a Padova nel 1526;

matematico,

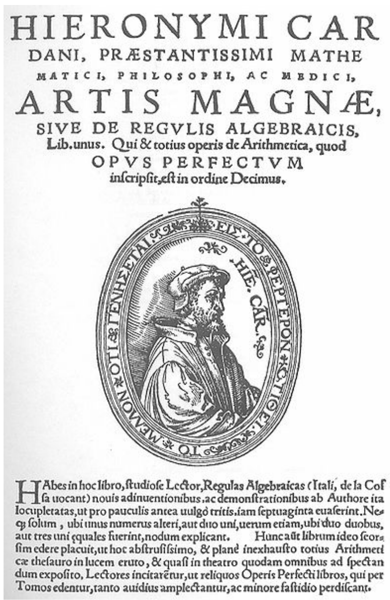
filosofo

e medico (e astrologo):

https://matematica.unibocconi.it/articoli/cardano-e-le-equazioni-di-terzo-grado

Gerolamo Cardano, *Artis Magnae* (1545)

Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis (Artis Magne, o Regole dell'Algebra).
Questo libro di Cardano, dedicato all'Algebra, è spesso citato con il titolo *"Ars Magna".*



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

34

Cardano, *Artis Magnae* 1545

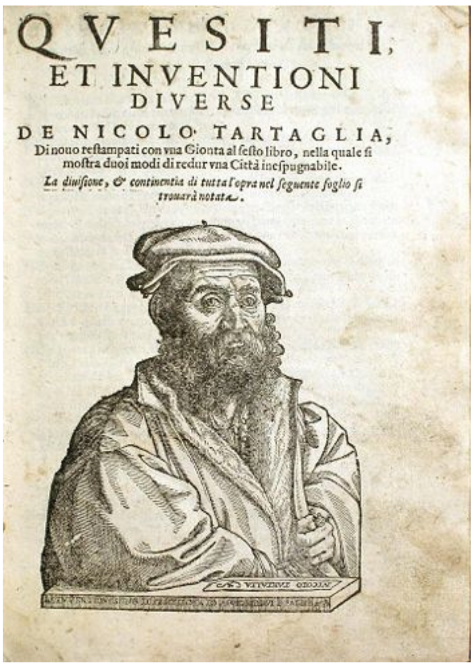
Gerolamo Cardano fece un'analisi completa (nel suo libro *Ars Magna,* 1545; 'ars magna' è sinonimo di 'algebra') di tutti i casi dell'equazione di III grado e studiò le trasformazioni che permettono di ridurre un'equazione algebrica in un'altra di più facile risoluzione.

Si deve sempre a Cardano la scoperta del cosiddetto «caso irriducibile».

Questo caso però sarà completamente compreso da Raffael Bombelli, a cui si deve in sostanza l'introduzione dei numeri complessi, nella sua *Algebra* del 1572.

Diatriba tra Tartaglia e Cardano

La pubblicazione da parte del Cardano dei risultati del Tartaglia causò una diatriba tra i due, e Tartaglia della sua opera "*Quesiti et inventioni diverse*" (Venezia, 1554) sfoga tutto il suo rancore contro Cardano.



Diatriba tra Tartaglia e Cardano (e il suo allievo Ludovico Ferrari)

- Questo causerà un'ulteriore diatriba tra Tartaglia e un brillante allievo di Cardano, Ludovico Ferrari, inventore della formula risolutiva delle equazioni di 4° grado.
- Egli manderà, in difesa del suo maestro Cardano, uno dei "Cartelli di Matematica disfida" a Tartaglia.
- I due si scambieranno in totale 6 «cartelli di matematica disfida».

37

La risoluzione delle equazioni di III grado

38

Formula risolutiva delle equazioni di III grado

Partiamo dall'equazione di 3° grado

$$t^3 + a\,t^2 + b\,t + c = 0$$

In questa equazione è possibile eliminare il termine di secondo grado, tramite la sostituzione

$$t = x - \frac{a}{3}$$

ottenendo un'equazione del tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

Nel Cinquecento però non si usava lo zero nella seconda parte dell'equazione e inoltre si doveva avere $p > 0$, $q > 0$.

39

Formula risolutiva delle equazioni di III grado

I casi che venivano trattati per le equazioni di 3° grado erano quindi tre (venivano scritti in questo modo per avere p e q positivi):

$$x^3 + px = q$$
$$x^3 = px + q$$
$$x^3 + q = px \quad (p > 0, q > 0).$$

Riportiamo ora i metodi risolutivi - trattati da Cardano e da Bombelli - e le ingegnose argomentazioni geometriche attraverso le quali è stata presentata la formula risolutiva delle equazioni di 3° grado.

40

Idea geometrica per la risoluzione del primo caso $x^3 + px = q$

Consideriamo il caso $x^3 + px = q$.
L'equazione equivale a chiedere di costruire
un cubo e un parallelepipedo tali che:

- l'altezza del parallelepipedo sia uguale al lato x del cubo;
- il parallelepipedo abbia area di base p
- il cubo e il parallelepipedo devono avere volumi che sommati danno q.

41

Siano u e $3v$ le dimensioni della base del parallelepipedo $p = u\,3v$ e sia $x = u - v$.

Lo si può fare perché è sempre possibile trovare due numeri positivi di cui è fissato sia il prodotto che la differenza. Quindi stiamo chiedendo di costruire un parallelepipedo di dimensioni $u, 3v$ e x.

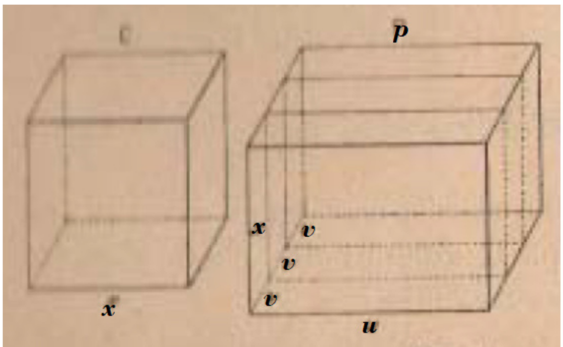


Fig. 1.

42

Un tale parallelepipedo si scompone quindi in tre parallelepipedi di dimensioni u, v, x.

Essi si possono addossare al cubo come in figura.

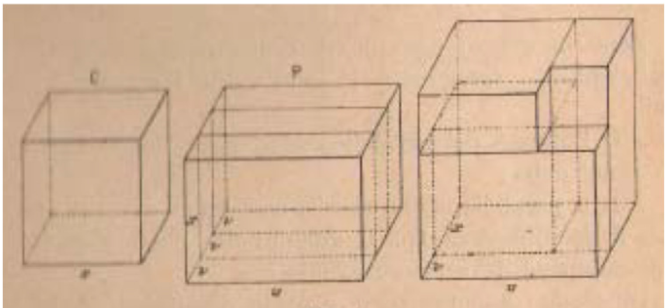
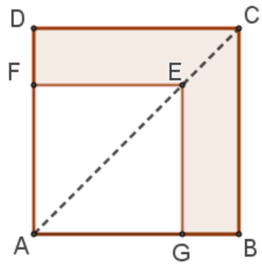


Fig. 1.

Quindi, si possono sommare al cubo in modo tale da formare un solido, detto "*gnomonide*" (perché ricorda la figura di uno gnomone) da Bombelli, e che è la differenza di due cubi di lato u e v.

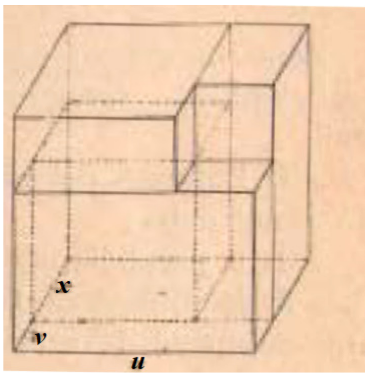
Gnomone in 2 dimensioni
differenza di due quadrati;
la sua area è

$$u^2 - v^2$$



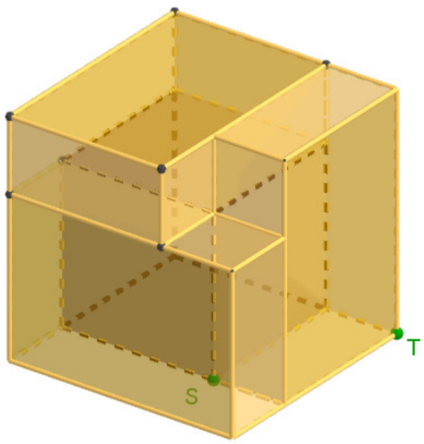
Gnomonide: «gnomone» in 3 dimensioni; è la differenza tra due cubi. Il suo volume è

$$u^3 - v^3$$



Rappresentazione geometrica di $x^3 + px$

$$x^3 + px = q$$



45

$$x^3 \quad + \quad p\,x \quad = \quad q$$

$$(u-v)^3 + 3uv\,(u-v) = u^3 - v^3$$

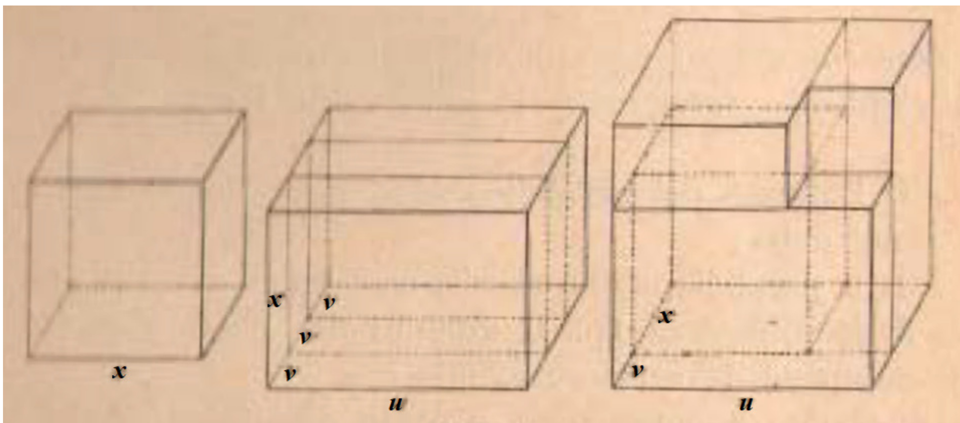


Fig. 1.

46

Siano u e $3v$ le dimensioni della base del parallelepipedo.

Si ha $p = u3v = 3uv$ e poniamo $x = u - v$.

Si ha allora:

$$q = x^3 + px = (u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3\,.$$

Da $v = \frac{p}{3u}$, da cui si ricava

$$q = u^3 - \frac{p^3}{27u^3}$$

e quindi l'equazione

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

47

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

- Questa equazione può essere risolta risolvendo il sistema

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ u^3v^3 = \dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

Si ottiene:

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

48

Da

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

si ottiene

$$v^3 = u^3 - p = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e quindi:

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

49

Formula risolutiva delle equazioni di 3° grado

Quindi

$$\begin{cases} u^3 = \dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \\ v^3 = u^3 - q = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \end{cases}$$

50

La formula:

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

può essere scritta nella forma

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

detta **formula di Cardano** (per il 1° caso, ossia per l'equazione $x^3 \quad + \quad p\,x \quad = \quad q$).

51

Formula risolutiva delle equazioni di 3° grado

Quindi

$$x = u - v$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ossia, $$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

52

Quindi, poiché q = $u^3 - v^3$ e $u^3 v^3 = \frac{p^3}{27}$, u^3 e v^3

sono radici della precedente equazione di

2° grado, da cui si ottiene:

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\ .$$

Si ricava pertanto la formula (detta di Cardano per il

Primo caso):

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ .$$

53

Si può dimostrare che le tre radici sono

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x = \omega u - \omega^2 v$$

$$x = \omega^2 u - \omega v$$

dove

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

sono le radici terze complesse dell'unità.

54

Esempio (1° caso nel Cinquecento)

Risolvere l'equazione:

$x^3 + 3x = 10$.

Utilizzando la formula ricaviamo la prima soluzione (che è reale):

$$x = u - v =$$
$$= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} =$$
$$= \sqrt[3]{5 + \sqrt{25+1}} - \sqrt[3]{5 - \sqrt{25+1}} =$$
$$= \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}} - \sqrt[3]{5 - \sqrt{26}} \approx 1.7$$

Le altre due radici sono complesse coniugate.

55

Si dimostra che le altre due soluzioni dell'equazione

$x^3 + 3x = 10$

si ottengono nel seguente modo:

$$x = \omega u - \omega^2 v$$

$$x = \omega^2 u - \omega v$$

dove $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

sono le radici terze complesse dell'unità.

56