Matematiche elementari da un PVS
a.a. 2023-2024

Risolubilità per radicali delle equazioni algebriche. Aspetti storici e didattici - parte 1

Momenti di storia dell'algebra classica
fino alle equazioni di 2° grado

3 ottobre 2023

prof. Luigi Tomasi

L'algebra, la sua storia e… l'insegnamento

- L'algebra elementare si comincia a studiare fin da giovani, perché si insegna nella scuola secondaria di I e di II grado, non senza difficoltà sia da parte del docente sia da parte dell'allievo, che spesso comincia a provare un rifiuto per la matematica proprio a causa dell'algebra.
- A volte, a scuola, non si comprende l'utilità di questo linguaggio né tantomeno la sua logica interna e la sua bellezza.
- Una delle ragioni di questa difficoltà è forse da ascrivere alla mancata conoscenza della sua origine e dei suoi primi sviluppi, ossia della sua storia.

2

Che cos'è l'algebra?

- Lo storico della matematica Ettore Bortolotti (1866-1947) afferma che «l'algebra è un metodo e un’arte: è l'applicazione del metodo analitico all'arte numerica».
- Infatti per «Regola d'Algebra» i matematici del Rinascimento intendevano quel procedimento per la risoluzione di problemi aritmetici che consiste in tre momenti essenziali: la messa in equazione, la riduzione dell'equazione in forma canonica, l'effettiva risoluzione dell'equazione ridotta.

3

Il calcolo algebrico e il simbolismo

- Queste operazioni a loro volta presuppongono quello che viene chiamato calcolo algebrico;
- l'esecuzione di tale calcolo è favorita dall'uso di un simbolismo opportuno.
- È quindi necessario distinguere, nella storia dell'algebra, la storia dei concetti da quella del simbolismo usato per esprimere i medesimi.

4

Le origini dell'algebra

Dal punto di vista dei concetti, le origini dell'algebra si possono far risalire a tre fonti diverse:

- alla matematica babilonese
- alla matematica greca e in particolare all'opera di Diofanto (III sec. d.C.)
- alla matematica indiana

5

Matematica babilonese: equazioni di I e di II grado

L'interpretazione di O. Neugebauer (prima metà del XX secolo) di tavolette di terracotta scritte in caratteri cuneiformi dimostra che già verso il 2000 a.C. i Babilonesi erano in grado di risolvere equazioni di I grado e particolari equazioni di II grado ed avevano conoscenza di procedimenti che oggi chiamiamo algebrici.

6

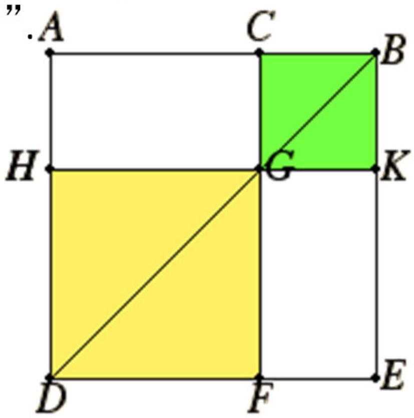
Si può parlare di «algebra» nella matematica greca?

- Per quanto riguarda la matematica greca, che si sviluppò dall’epoca classica (V sec. a.C.), a parte l’«algebra geometrica» di Euclide (II libro degli *Elementi*), si può parlare più propriamente di «algebra» a partire dall'opera di Diofanto, *Arithmetica* (III secolo d.C.).
- L’*Arithmetica* di Diofanto contiene, oltre a difficili ed eleganti problemi di analisi indeterminata, equazioni e problemi dei primi due gradi, con elementi di calcolo algebrico.

7

Proposizione 4 del II Libro degli *Elementi* di Euclide (il «quadrato del binomio», con il senno di poi…)

“*Se si divide a caso una linea retta [segmento], il quadrato di tutta la retta [segmento] è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti* [*stesse*]”.



- Si può parlare di algebra in Euclide?
- Gli storici dell’algebra negano che si possa parlare di algebra.
- Si tratta di un teorema di geometria.

La matematica indiana

- Molto più tarda è «l'algebra» indiana i cui inizi si fanno risalire alla seconda metà del V secolo; di tale periodo è infatti l'opera in versi del matematico Aryabhata nella quale sono risolti, tra l'altro, *un'equazione di I grado* (che oggi scriveremmo nella forma $ax + b = a'x + b'$) *un'equazione* di secondo grado e un *sistema di primo grado* in due incognite.

Origine della parola «algebra»

- La parola «algebra» deriva dall'arabo «*al-jabr*»
- Secondo alcuni studiosi «*al-jabr*» significa, in arabo, «restaurazione» e si riferisce al fatto che una quantità determinata può aggiungersi ad ambo i membri di una data equazione (da cui deriva il cosiddetto «principio del trasporto»)
- *«al-mukābala»*, che vuol dire invece «semplificazione», significherebbe «mettere due cose faccia a faccia, confrontare, «paragonare», cioè «mettere in equazione».

Le origini dell'algebra

- Nell'opera di **al-Khwarizmi**, nella quale sono riportate le regole generali per la risoluzione delle equazioni di primo e di secondo grado, la quantità incognita è chiamata *cosa* o *radice di una pianta*, e da qui è venuto l'uso della parola «radice» per indicare la soluzione di un'equazione.
- Il termine «equazione» è invece di chiara provenienza latina dal punto di vista etimologico e si trova, per la prima volta, nel *Liber Abaci* (1202) di **Leonardo Pisano, detto Fibonacci.**

Stadi del simbolismo algebrico

Per quanto riguarda lo sviluppo del simbolismo algebrico si possono individuare tre stadi distinti:

(a) *Algebra retorica* nella quale i problemi e la loro risoluzione sono espressi completamente a parole

(b) *Algebra sincopata* nella quale per qualche operazione e per alcune quantità sono usate abbreviazioni simboliche

(c) *Algebra simbolica* nella quale viene usato un completo sistema di notazioni e tutte le trasformazioni algebriche sono espresse in simboli.

12

Stadi del simbolismo algebrico

Esempio: Diversi modi di scrivere la formula

$$3x^3 - 6x^2 = 4x + 5$$

forma retorica:

Sei volte il quadrato del mio numero si sottrae a tre volte il cubo del numero e chiedo [sia] *uguale a quattro volte il numero più cinque.*

forma sincopata:

3*cu* m 6*ce* *ae* 4*co* p 5 (Luca Pacioli, 1494)

forma simbolica:

3 *Acu* – 6*Aq aequatur* 4*A* + 5 (Viète, 1591)

$3xxx - 6xx \propto 4x + 5$ (Descartes, 1637)

$3\,x^3 - 6\,xx = 4x + 5$ (Wallis, 1693)

13

Stadi dell'algebra

- Questi tre stadi non rispecchiano una netta suddivisione cronologica; infatti, mentre già Diofanto nel III secolo d.C. usa abbreviazioni (ad esempio la lettera ζ per indicare l'incognita), l'algebra di al-Khwarizmi è del tutto retorica.
- L'algebra simbolica ha inizio nel XVI secolo (Viète, Cartesio,…), ma nel primo periodo è abbastanza difficile distinguerla dagli aspetti più evoluti dell'algebra sincopata.
- Va inoltre precisato che il simbolismo usato dai singoli autori era molto vario e personale,...

14

Uso delle lettere

- Nella sua opera principale (*In artem analyticam isagoge*), pubblicata nel 1591, **François Viète** ha introdotto quella che può essere considerata la più grande innovazione per quanto riguarda il simbolismo algebrico, cioè l'uso integrale delle lettere.
- In Viète *l'artem analyticam* è l'algebra
- Le lettere sono usate da Viète sia per indicare le incognite che per indicare le quantità note, adoperando per le prime le vocali e per le seconde le consonanti; permettendo inoltre in tal modo l'introduzione di più di una incognita.

15

Matematici nella storia dell'algebra classica

- **al-Khwarizmi**
- Leonardo Pisano, detto Fibonacci [*Fi(lius) Bonaccii*]
- Luca Pacioli
- **Niccolò Tartaglia, Girolamo Cardano, Ludovico Ferrari**
- Rafael Bombelli
- François Viète
- René Descartes
- Leonhard Euler
- Giuseppe Luigi Lagrange
- Paolo Ruffini
- Niels Henrik Abel
- Carl Friedrich Gauss
- **Évariste Galois (nasce l'algebra astratta)**

16

Algebra nei secoli XVII e XVIII

- Dall'inizio del XVII secolo, l'algebra diventa la «scienza del calcolo letterale », cioè la scienza delle trasformazioni di formule formate da lettere.
- Tale punto di vista è espresso in modo particolarmente chiaro nell'opera di Eulero *Introduzione all'algebra*, scritta intorno al 1770.
- Alla fine del XVIII secolo e all'inizio del XIX, il problema principale dell'algebra divenne quello di: *trovare una formula risolutiva per un'equazione algebrica completa di grado n in un'incognita*

17

L' Algebra in Lagrange

J.L. Lagrange nel *Traité de la résolution des équations numériques...* (1808) scrive:

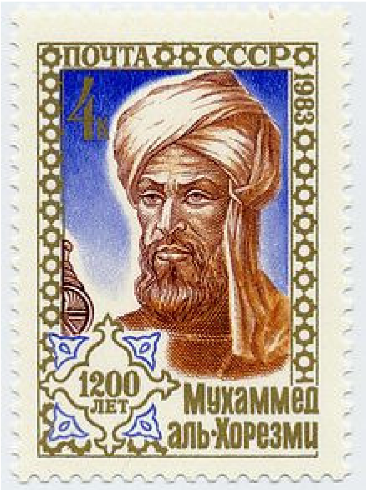
«*L'algebra come la si intende comunemente, è l'arte di determinare quantità incognite in quanto funzioni di quantità conosciute o supposte tali; è altresì l'arte di trovare una soluzione generale per equazioni. Questa soluzione consiste nel ricercare per tutte le equazioni dello stesso grado, quelle funzioni dei coefficienti delle equazioni stesse che ne rappresentano tutte le radici. Finora il problema si può considerare risolto solo per le equazioni di* $1°, 2°, 3°$ e $4°$ *grado...* »

18

al-Khwarizmi (ca. 780 - 850)

al-Khwarizmi (ca. 780 - 850)

- Matematico ed astronomo persiano
- Nato probabilmente nel Khorezm (regione a est del mar Caspio) e vissuto a Bagdad.
- Ha studiato e diffuso il sistema di numerazione indiano (che noi chiamiamo «arabo»).
- Ha scritto un importante trattato intitolato *Kitāb al-jabr wal mukābala* (tra l'813 e l'833 a Bagdad) dove risolve le equazioni fino al II grado a parole (ma anche in modo geometrico)
- *Al-jabr* ha dato origine alla parola *Algebra*.



al-Khwarizmi (ca. 780 – 850)

La sua fama è fondata soprattutto sul trattato di Algebra, ritenuto di fondamentale importanza per lo sviluppo di questa disciplina, tanto che dal nome del suo autore, deformato da un traduttore in *Algorithmi*, derivò il termine *algoritmo*, ancor oggi denotante uno schema di calcolo.

L'opera di al-Khwarizmi, pur non andando oltre le equazioni di secondo grado, cioè oltre il campo della matematica greca (Diofanto), presenta infatti, accanto alla riacquisizione di nozioni classiche, un notevole grado di elaborazione originale.

21

al-Khwarizmi (ca. 780 – 850)

Solo gli algebristi della scuola italiana (e bolognese in particolare), all'inizio del sec. XVI, fornendo la soluzione delle equazioni di III e IV grado, superarono il punto in cui s'era arrestata la matematica di al-Khwarizmi.

22

Le equazioni di 2° grado nell'opera di al-Khwarizmi

Nel Cap. I al-Khwarizmi (IX secolo) tratta il caso di equazioni di 2° grado del tipo (trad.it, medievale: **censi uguali a cose**).
In particolare tratta le equazioni:

$$x^2 = 5x$$

$$\frac{x^2}{3} = 4x$$

$$5x^2 = 10x$$

23

Al Khwarizmi trova rispettivamente le soluzioni:

$$x = 5, \qquad x = 12, \qquad x = 2$$

Si noti che la radice $x = 0$ non veniva considerata (pur esistendo la cifra «0»).

Il Cap. II tratta il caso: **censi uguali a numeri** e il Cap. III tratta il caso di **cose uguali a numeri**, sempre con tre esempi per capitolo per illustrare i casi in cui il coefficiente del termine di secondo grado è uguale, maggiore o minore di 1.

24

L'algebra retorica di al-Khwarizmi (IX secolo), nella traduzione in italiano medievale

cose uguale a numero	$ax = b$
censi uguale a numero	$ax^2 = b$
censi uguale a cose	$ax^2 = bx$
censi e cose uguali a numero	$ax^2 + bx = c$
censi e numero uguali a cose	$ax^2 + c = bx$
cose e numero uguali a censi	$bx + c = ax^2$

L'algebra retorica di al-Khwarizmi (IX secolo)

I Cap. IV, V, VI trattano rispettivamente i casi classici di equazioni di secondo grado a tre termini:

1) Censi e cose uguali a numero: $ax^2 + bx = c$
2) Censi e numero uguali a cose: $ax^2 + c = bx$
3) Cose e numero uguali a censi: $bx + c = ax^2$

Le risoluzioni consistono in metodi per "completare il quadrato" applicate ai casi specifici.

Il capitolo VI illustra il primo dei tre casi (censi e cose uguali a numeri) con tre esempi:

$$x^2 + 10x = 39$$

$$2x^2 + 10x = 28$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$$

In ciascun caso viene data solo la soluzione positiva (con metodi di **completamento del quadrato**).

27

Vediamo come descrive la soluzione del primo esempio:

$$x^2 + 10x = 39 \text{ (quadrati più radici uguale a un numero)}$$

«Un quadrato più dieci delle sue radici sono uguali a trentanove dirham, cioè se si aggiunge a un quadrato qualunque una quantità uguale a dieci volte la sua radice, il tutto sarà trentanove».

Procedimento: Dividi a metà il numero delle radici; risulta, in questo problema, cinque, che moltiplichi per sé stesso; si ha venticinque; lo aggiungi a trentanove; si avrà sessantaquattro, prendi la radice che è otto, dalla quale sottrai la metà delle radici, che è cinque.

Resta tre, che è la radice del quadrato che vuoi, e il quadrato è 9.

28

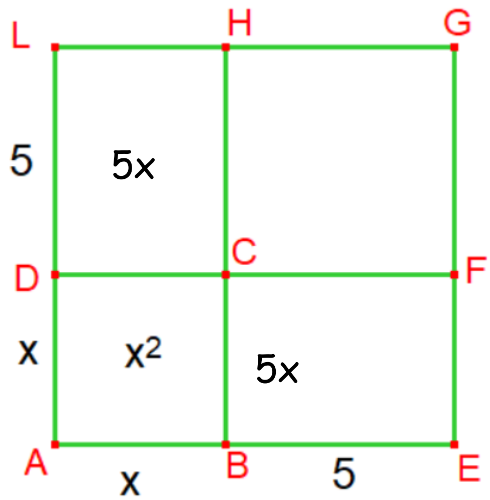
Nella seconda parte della sua opera, al-Khwarizmi dà la dimostrazione geometrica delle regole per la risoluzione delle equazioni quadratiche trattate precedentemente e scrive:

«Abbiamo detto abbastanza, per quanto riguarda i numeri, circa i sei tipi di equazioni.

Ora, però, ***è necessario dimostrare geometricamente*** *la verità di quei medesimi problemi che abbiamo spiegato in numeri.»*

29

Per risolvere l'equazione $x^2 + 10x = 39$ viene usato il seguente metodo. Rappresenti AB il valore di x e si costruisca su AB il quadrato ABCD.

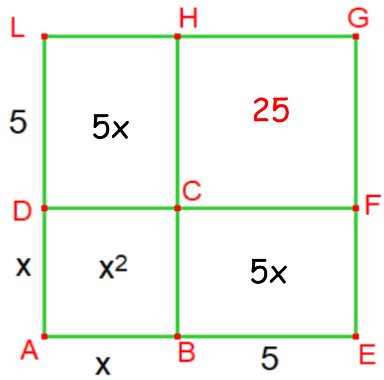


30

Si prolunghino AB e AD di un segmento BE = DL = 5 e si completi al quadrato AEGL.

La figura AEFCHL ha area $x^2 + 10x$, cioè 39; aggiungendo a questa il quadrato CFGH, che ha per area 25, si ottiene il quadrato AEGL che ha per area 64 (25 + 39). Il lato di questo quadrato è 8, che diminuito di 5 dà il valore cercato dell'incognita, cioè 3.

$$x^2 + 10x = 39$$
$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$
$$(x+5)^2 = 64$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 3$$



Digressione (a oggi…)

come si risolve oggi l'equazione di II grado?

Sostanzialmente si usa lo stesso metodo proposto da al-Khwarizmi

32

Metodo di completamento al quadrato

Se riusciamo a portare un'equazione di secondo grado completa nella forma $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A})^2 = \boldsymbol{B}$, abbiamo un metodo per risolvere le equazioni complete.

Procedimento		Esempio
$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{con } a, b, c \neq 0)$	portiamo il termine noto al secondo membro	$3x^2 + x - 2 = 0$
$ax^2 + bx = -c$	dividiamo tutti i termini per a, coefficiente del termine x^2 e diverso da 0 per ipotesi	$3x^2 + x = 2$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	scriviamo il termine di primo grado come un doppio prodotto	$x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$	completiamo il quadrato di un binomio aggiungendo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ in entrambi i membri	$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \underline{\left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \underline{\left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{c}{a}$	riconosciamo al primo membro il quadrato di un binomio	$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} + \underline{\frac{1}{36}} = \underline{\frac{1}{36}} + \frac{2}{3}$

Metodo del completamento del quadrato

Procedimento	Esempio
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ Così abbiamo trasformato l'equazione di secondo grado nella sua forma pura. L'espressione al primo membro è un quadrato, quindi è sempre positiva o nulla; il segno del secondo membro dipende dal segno del numeratore.	$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1 + 24}{36}$ $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$
Distinguiamo tre casi: • se $b^2 - 4ac > 0$, estraiamo la radice quadrata: $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; otteniamo due soluzioni • se $b^2 - 4ac = 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$; le due soluzioni coincidono • se $b^2 - 4ac < 0$, il secondo membro è negativo, quindi l'equazione è impossibile perché il quadrato $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ non può essere uguale a un numero negativo.	Poiché $\frac{25}{36} > 0$, siamo nel primo caso e possiamo estrarre la radice quadrata: $x + \frac{1}{6} = \pm\frac{5}{6} \rightarrow$ $x = \frac{\overset{-b}{-1} \pm \overset{\sqrt{b^2-4ac}}{5}}{\underset{2a}{6}}$. Le radici sono: $x_1 = \frac{-1-5}{6} = -1$; $x_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}$.

Leonardo Pisano, detto Fibonacci *Fi(lius) Bonaccii*: l'algebra arriva in Italia (e in Europa)

A partire dall'XI secolo, grazie alla fine delle scorrerie barbariche, allo sviluppo dei commerci, a una consistente crescita demografica, si assiste in Italia, ma soprattutto a Genova, Pisa e Venezia, a uno sviluppo economico senza precedenti, basato sul commercio per mare tra i paesi dell'Islam e l'Europa continentale.

Guglielmo Bonacci, mercante pisano, decise di portare il figlio Leonardo a Bugia, nel nordest dell'attuale Algeria, per studiare i nuovi metodi aritmetici degli arabi e forse la lingua araba.

35

Leonardo Pisano, *Fi(lius) Bonaccii*: l'algebra arriva in Italia (e in Europa)

36

Leonardo Pisano, detto Fibonacci: l'algebra arriva in Italia (e in Europa); il *Liber abaci*

Leonardo (1170ca - 1240) rapidamente e con entusiasmo si impadronì delle tecniche di calcolo basate sulle cifre indiane (dette da noi «arabe») e sullo zero, della scrittura posizionale dei numeri e degli algoritmi di calcolo per le quattro operazioni aritmetiche.

Dopo aver viaggiato in tutti i paesi del Mediterraneo, entrando in contatto con studiosi di estrazione diversa, di ritorno a Pisa, scrisse il suo capolavoro, il *Liber abaci* (1202).

Il libro fu riscritto ed emendato nel 1228 ed ebbe un'enorme influenza sullo sviluppo della scienza in Italia e poi in Europa.

37

Il *Liber abaci* (1202), una ricchissima miscellanea matematica

L'opera è una ricchissima miscellanea di problemi di matematica, da quelli strettamente legati alla mercanzia, ai baratti e alle compagnie, a quelli puramente matematici.

Il livello matematico è molto accurato, completo di dimostrazioni, sia logiche sia geometriche, per giustificare le affermazioni fatte, con un metodo indubbiamente legato all'impostazione assiomatico -deduttiva che gli arabi avevano importato dai greci. L'opera nel suo complesso è un prolungamento latino della matematica araba, sulla scia di al-Khwarizmi.

38

Il *Liber abaci* (1202), di Fibonacci