第五章　根轨迹方法

Chapter 5　Root Locus

第五章内容

- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

根轨迹绘制方法

- **根轨迹问题**

开环传递函数（零极点形式）

$$G(s)H(s)=\frac{Z(s)}{E(s)}=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

开环零点z_j和开环极点p_i已知

参数K在$(0,+\infty)$或$(-\infty,0)$中变动

要求在s平面上绘出方程

$$(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)+K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)=0$$

的根（闭环极点）随K变动的轨线

- **计算机解决根轨迹问题**

  如：**Matlab的rlocus函数**

- **手工如何粗略绘制根轨迹？**

根轨迹绘制方法

- **根轨迹条件（$K>0$）**

几何方法：

$s \in C$且$s \neq z_i, s \neq p_j, i \in \{1,\cdots,w\}, j \in \{1,\cdots,n\}$，则$s$在根轨迹上，当且仅当有整数$h$使

$$\angle(s-z_1)+\cdots+\angle(s-z_w)-\angle(s-p_1)-\cdots-\angle(s-p_n)=(2h+1)180^\circ \qquad \text{（相角条件）}$$

- **根轨迹条件（$K>0$）的等价描述**

$s \in C$是根轨迹（$K>0$）上的点当且仅当存在$K>0$，满足

$$K\frac{\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-1$$

幅值条件：

$$\frac{K|s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_w|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=1$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则1

法则1：根轨迹的分支、对称性和连续性

闭环特征方程 $(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)+K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)=0$

闭环特征方程的阶数为 $\max(n,w)$，有 $\max(n,w)$ 个根

每个根形成一个分支（一条曲线）

结论:根轨迹的分支数等于开环零点数与开环极点数之大者

闭环特征方程是实系数多项式方程，其根或为实数或为共轭复数

结论：根轨迹关于实轴对称

闭环特征方程的系数是 K 的一次函数，一次函数是连续函数

多项式方程的根对其系数是连续依赖的

结论：根轨迹每个分支都是连续的曲线

根轨迹（K>0）－－绘制法则2

法则2：根轨迹的起点和终点

- 根轨迹的起点是指**K=0**时的根轨迹点

- 根轨迹的终点是指K=+∞时的根轨迹点

- 设s是根轨迹上的点，则$\dfrac{K|s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_w|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=1$，即

$$K=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s-z_j|}$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则2

$$K=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s-z_j|}$$

法则2：根轨迹的起点和终点

（1）若$n \geq w$(开环极点数不小于开环零点数)，则

$K=0$意味着$s=p_i$(开环极点)

$K=+\infty$意味着$s=z_j$(w个开环有限零点)或$|s|=+\infty$（$n-w$个开环无限零点）

（2）若$n<w$，则

$K=0$意味着$s=p_i$(n个开环有限极点)或$|s|=+\infty$（$w-n$个开环无限极点）

$K=+\infty$意味着$s=z_j$(开环零点)

结论：

根轨迹起始**(K=0)**于**开环极点**（有限极点和无限极点），终止于**开环零点 (有限零点和无限零点)**.

根轨迹（K>0）－－绘制法则3

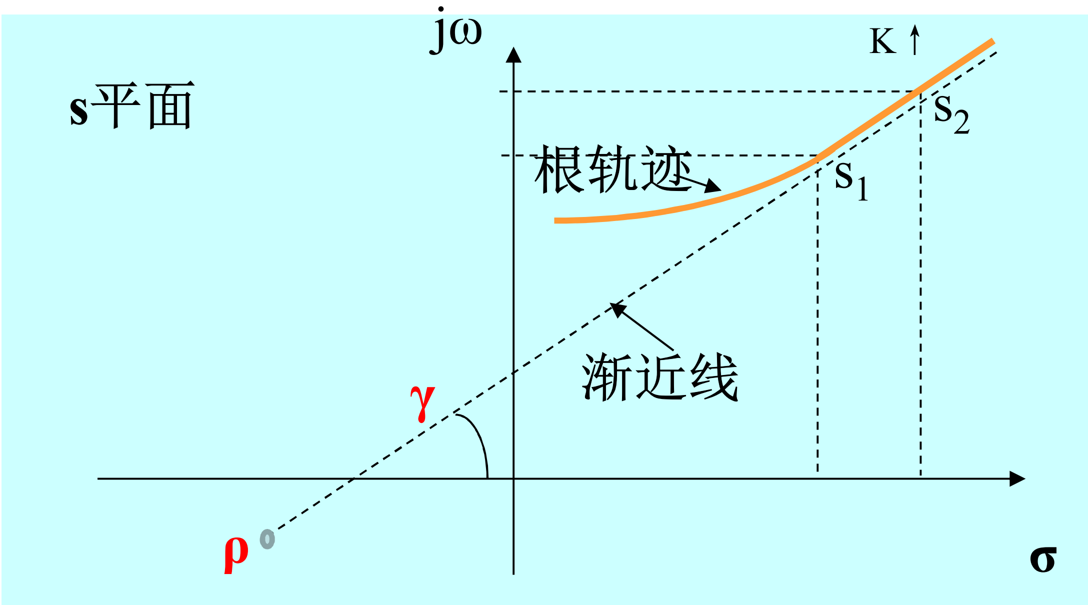
法则 3: **根轨迹的渐近线(n>w时)**

根轨迹渐近线 —— 当|s|取很大的值时，各条根轨迹分支的近似线

根轨迹任一分支的渐近线可以视为一条射线，可以用渐近线上的某一个点ρ以及渐近线与实轴间夹角γ来表示

n>w下渐近线条数： n-w条

n个有限起点、w个有限终点、n-w个无限终点、n条根轨迹



$$s_1 \approx |s_1| \angle \gamma$$

$$s_2 \approx |s_2| \angle \gamma$$

$$\vdots$$

问题：

如何绘制渐近线？

根轨迹（K>0）－－绘制法则3

$$K\frac{\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-1$$

法则3: 根轨迹的渐近线 (n>w时)

$$\lim_{|s|\to+\infty} K\frac{\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=\lim_{|s|\to+\infty}\frac{K}{s^{n-w}}=-1$$

当|s|→+∞

$$-K=s^{n-w}$$

$$s=\sqrt[n-w]{-K}$$

$$\gamma=\angle s=\angle\left(\sqrt[n-w]{-K}\right)=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}\qquad k\in\{0,1,\cdots,n-w-1\}$$

此外，在数学上可以证明：

实数$\sigma_0=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{w}z_j}{n-w}$在根轨迹每一分支的渐近线上

根轨迹（K>0）－－绘制法则3

法则3: **根轨迹的渐近线 (n>w时)**

结论: 根轨迹有**n-w** 条终止于开环无限零点的分支，这些分支的渐近线为从实轴上

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{w} z_j}{n-w}}$$

射出的**n-w**条射线，这些射线与实轴间的夹角分别为

$$\boxed{\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{n-w} \qquad k \in \{0,1,\cdots,n-w-1\}}$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-5: 开环传递函数**G(s)H(s)**如下，绘制根轨迹的渐近线

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

开环极点: $\boldsymbol{n=2,\quad p_1=0,\quad p_2=-2}$

开环零点: $\boldsymbol{w=0}$

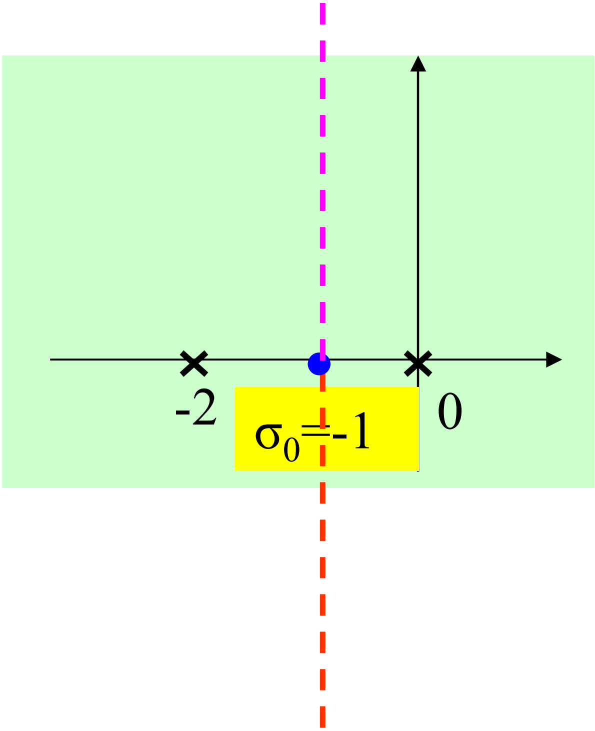
渐近线条数: $n-w=2$条

渐近线交点: $\sigma_0=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{w}z_j}{n-w}=\dfrac{-2+0}{2}=-1$

渐近线角度:

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2k)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\270^\circ\end{cases}$$

$k=0,1$



根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-6: 开环传递函数G(s)H(s) 如下，试绘制根轨迹的渐近线

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

开环极点: $n=4,\quad p_{1,2}=0,\quad p_3=-1,\quad p_4=-4$

开环零点: $w=1, z_1=-2$

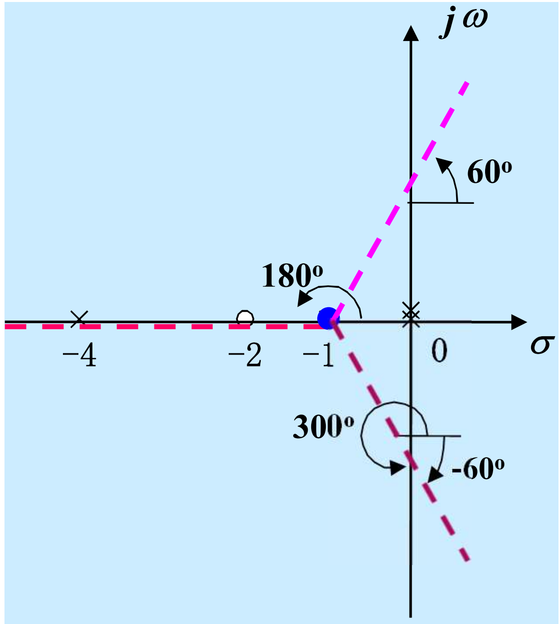
渐近线条数: $n-w=3$条

渐近线交点: $$\sigma_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{w}z_j}{n-w}=\frac{0+0-1-4-(-2)}{3}=-1$$

渐近线角度:

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2k)180^\circ}{3}=\begin{cases}60^\circ\\180^\circ\\300^\circ\end{cases}$$

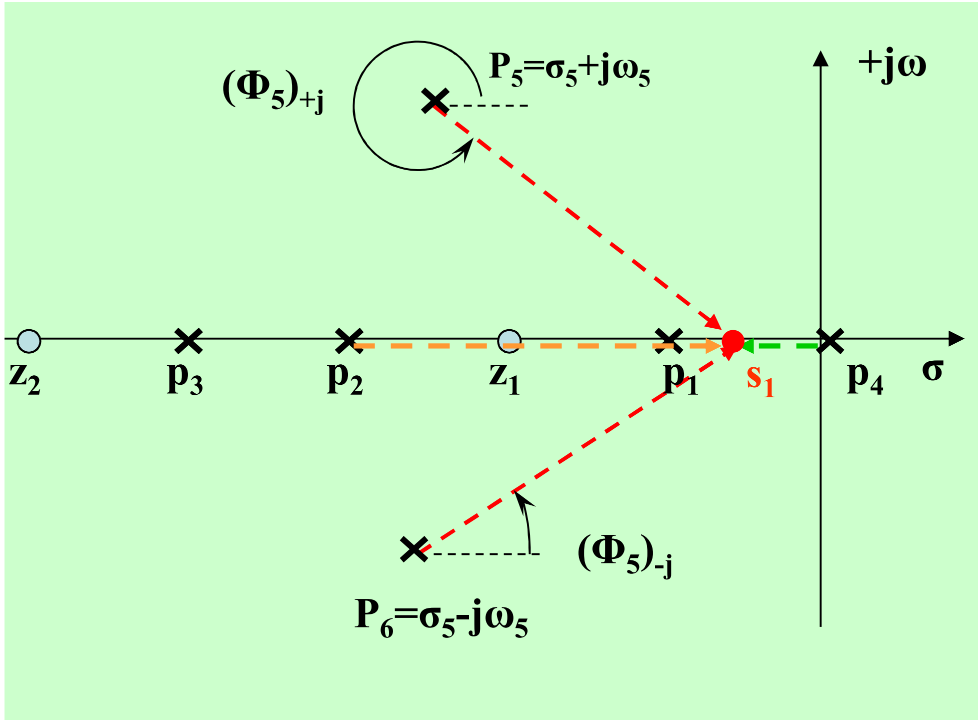
$k=0,1,2$



根轨迹（K>0）－－绘制法则 4

规则 4: 实轴上的根轨迹

实轴上哪一区域是根轨迹？ 对于实轴上的某一试验点（如 s_1）：



- 该点左侧实数零、极点到该点的向量相角为**0** 如

$$\angle\left|s_1 - z_i(p_j)_l\right| = 0$$

- 复数共轭零、极点到该点的相角和为**360°**

- 该点右侧实数零、极点到该点的向量相角为**180°**

$$\angle\left|s_1 - z_i(p_j)_r\right| = 180^\circ$$

$$\angle(s-z_1)+\cdots+\angle(s-z_w)-\angle(s-p_1)-\cdots-\angle(s-p_n)=(2h+1)180°$$

规则 4: 实轴上的根轨迹

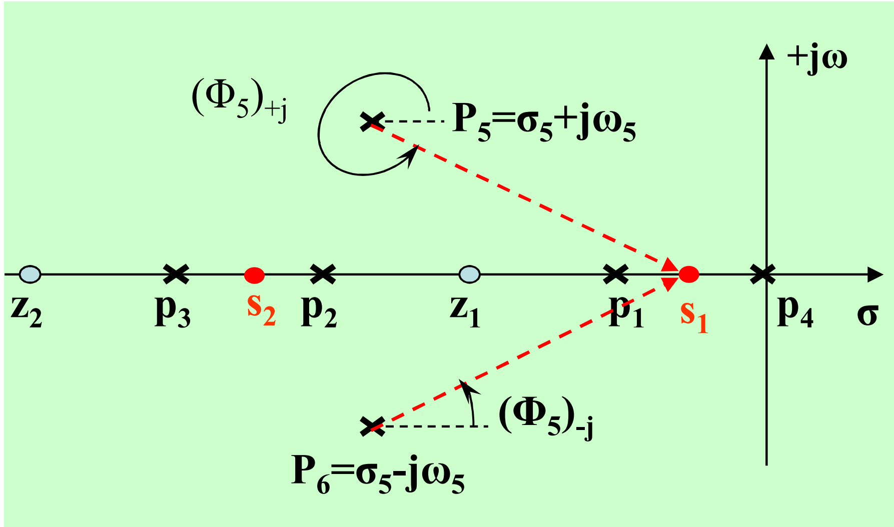
G(s)H(s) 各零极点到点 s_1 的相角:

$$(\psi_1+\psi_2)-\left(\varphi_4+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+(\varphi_5)_{+j}+(\varphi_5)_{-j}\right)=(1+2h)180°$$

$$0°+0°-(180°+0°+0°+0°+360°)=(1+2h)180° \quad h=-2$$

因此 s_1 是根轨迹上的一点

s_1右侧有1个实开环零极点



同样地，可以看出s_2 不是根轨迹上的点.

s_2右侧有4个实开环零极点

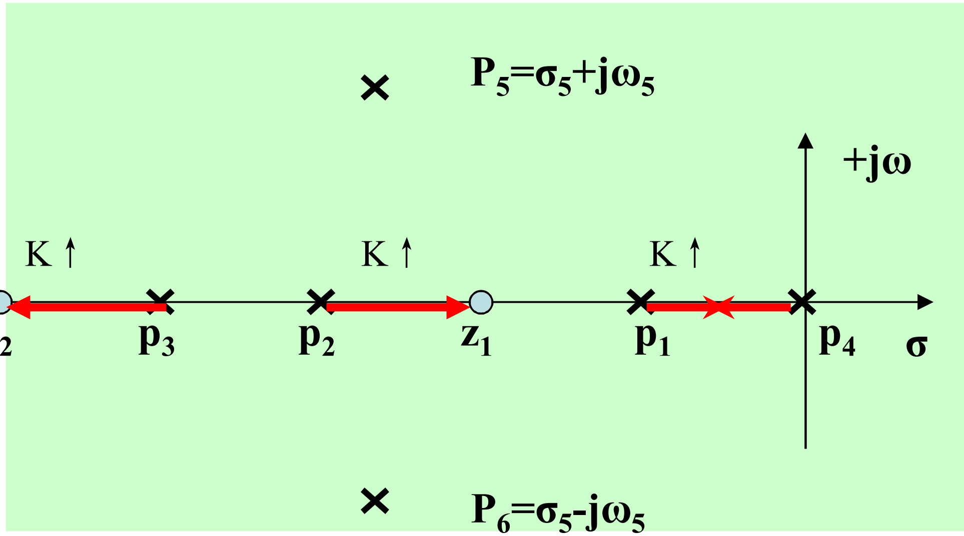
规则 4: 实轴上的根轨迹

结论-1:

复数零点、复数极点以及点s左侧的实零点、实极点对相角条件（180的奇数倍）没有影响.

结论-2:

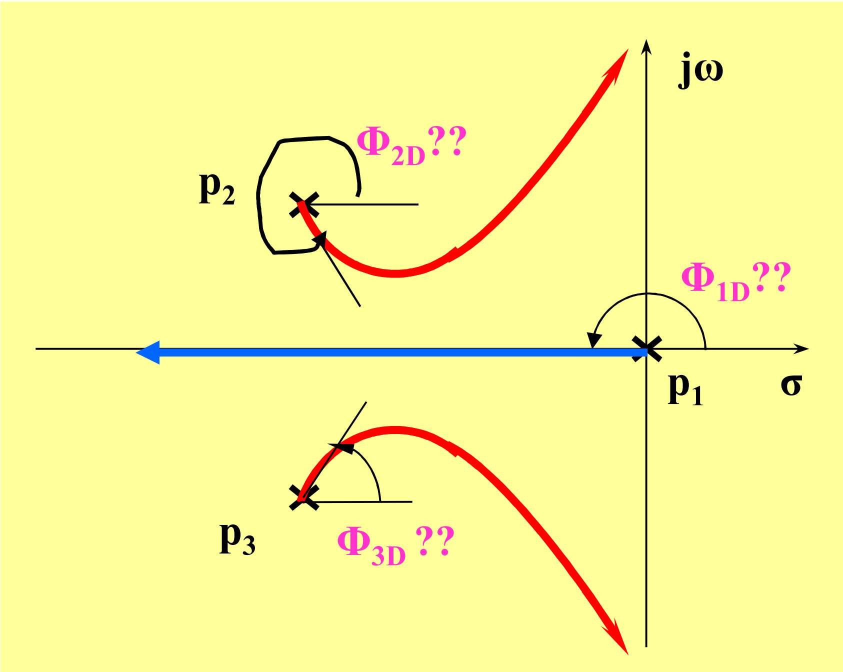
实轴上的点s在根轨迹上，当且仅当s右侧实零点数与实极点数之和是奇数



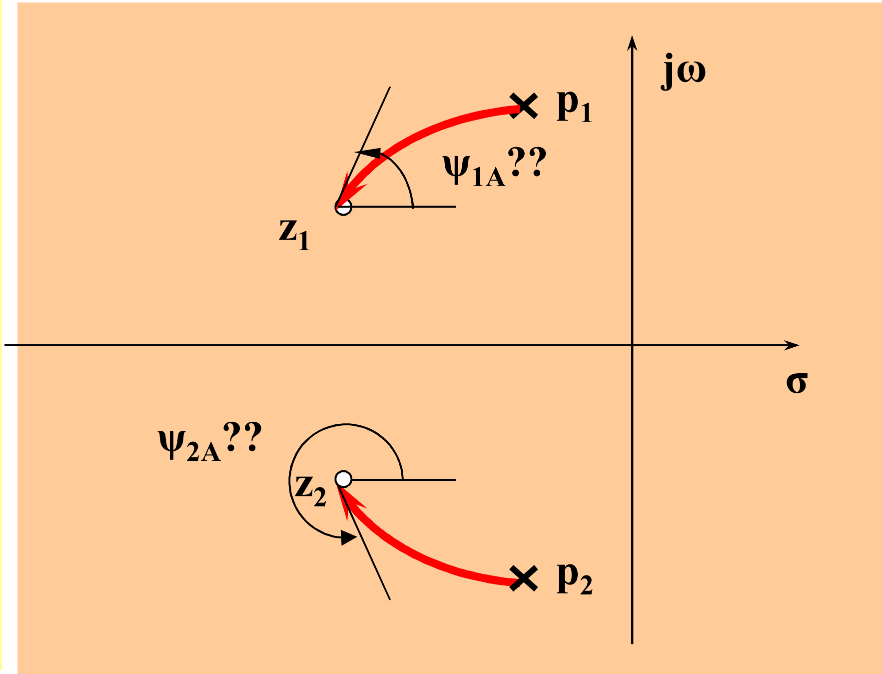
根轨迹（K>0）－－绘制法则6

法则 6: 出射角(起始角)及入射角 (终止角)

问题: 根轨迹离开极点或到达零点的方向角?



Angle of Departure（出射角）

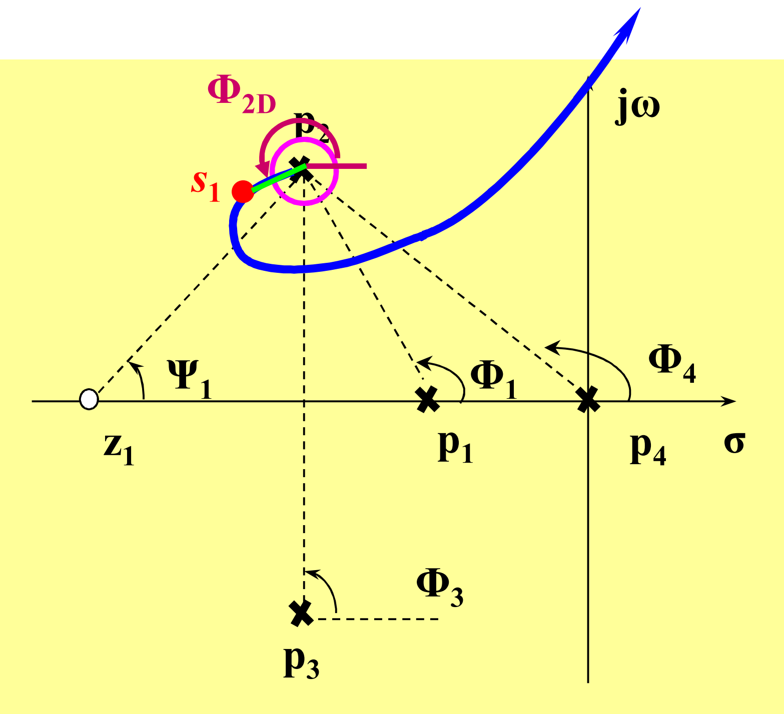


Angle of Approach （入射角）

根轨迹（K>0）－－绘制法则6

法则 6: 出射角及入射角

假设： 开环系统有四个极点和一个零点



在根轨迹上选点s_1距p_2足够近

相角条件：$\angle(s_1 - z_1) - \sum_{i=1}^{4} \angle(s_1 - p_i) = (2h+1)180^\circ$

当$s_1 \to p_2$时：
$$\angle(s_1 - z_1) = \angle(p_2 - z_1) = \psi_1$$
$$\angle(s_1 - p_1) = \angle(p_2 - p_1) = \phi_1$$
$$\angle(s_1 - p_2) = \Phi_{2D} = \text{出射角}$$
$$\angle(s_1 - p_3) = \angle(p_2 - p_3) = \phi_3$$
$$\angle(s_1 - p_4) = \angle(p_2 - p_4) = \phi_4$$

$$\psi_1 - \phi_1 - \phi_{2D} - \phi_3 - \phi_4 = (1+2h)180^\circ$$

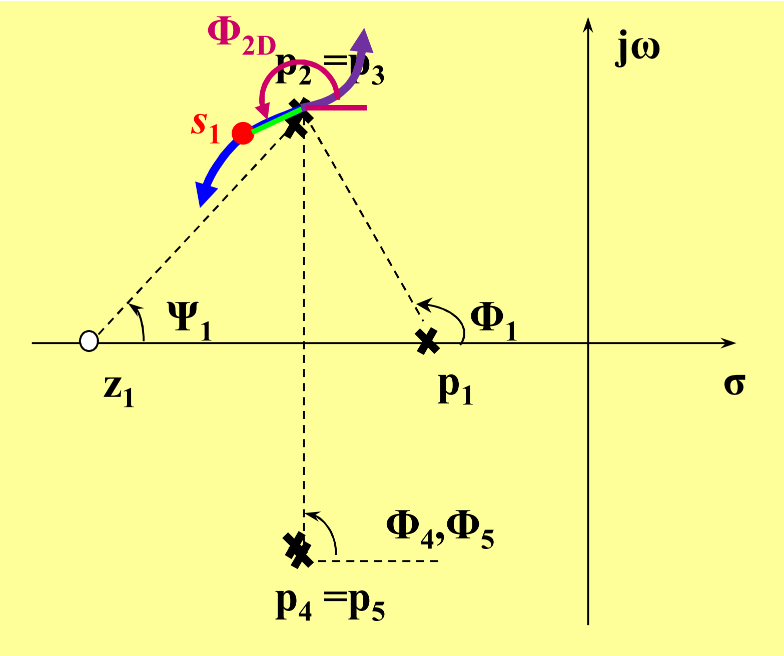
出射角 $\phi_{2D} = -(1+2h)180^\circ + \psi_1 - \phi_1 - \phi_3 - \phi_4$

$= 180^\circ + \psi_1 - \phi_1 - \phi_3 - \phi_4$

根轨迹（K>0）－－绘制法则6

法则 6: 出射角及入射角

假设： 开环系统有五个极点和一个零点



根轨迹自p_2=p_3出发有2条分支

在根轨迹上选点s_1距p_2足够近

$$\psi_1-\phi_1-2\phi_{2D}-\phi_4-\phi_5=(1+2h)180^\circ$$

$$出射角\ \phi_{2D}=\frac{(1+2k)180^\circ+\psi_1-\phi_1-\phi_3-\phi_4}{2}$$

$$k\in\{0,1\}$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则6

法则 6: 出射角及入射角

结论1: 根轨迹离开*q*重开环极点p_d的出射角（起始角）

$$\phi_{p_d} = \frac{(1+2k)180^\circ + \sum_{j=1}^{w} \angle(p_d - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ p_i \neq p_d}}^{n} \angle(p_d - p_i)}{q} \qquad k \in \{0,1,\cdots,q-1\}$$

结论2: 根轨迹到达*q*重开环零点z_d的入射角（终止角）

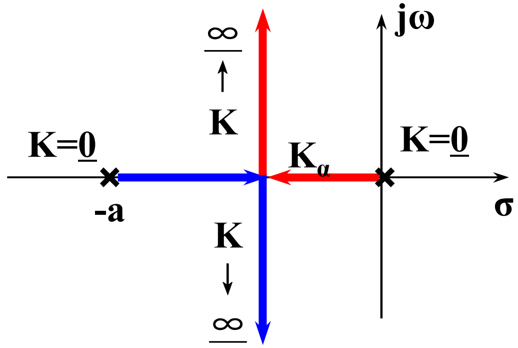
$$\psi_{z_d} = \frac{(1+2k)180^\circ + \sum_{i=1}^{n} \angle(z_d - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ z_j \neq z_d}}^{w} \angle(z_d - z_j)}{q} \qquad k \in \{0,1,\cdots,q-1\}$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则5

规则5: 根轨迹的分离点和分离角

两条或两条以上根轨迹分支在s平面相遇又立即分开的点，称为根轨迹的**分离点**。常见的是**两条根轨迹分支的分离点**

$$G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

规则5: 根轨迹的分离点和分离角

方法1: 分离点的出现，意味着特征方程有重根——如何获取这些根?

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)\right)=0$$

$$s\in C$$

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)$$

$$s\in C$$

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}$$

$$s\in C$$

根轨迹（K>0）— — 绘制法则 5

规则5: 根轨迹的分离点和分离角

$$\frac{\dfrac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{\dfrac{d}{ds}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}$$

注:

$$\frac{d\ln(f(x))}{dx}=\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{d\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{ds}=\frac{d\ln\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{ds}$$

注:

$$\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=\sum_{i=1}^{n}\ln(s-p_i)$$

$$\ln\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)=\sum_{j=1}^{w}\ln(s-z_j)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\ln(s-p_i)}{ds}=\sum_{j=1}^{w}\frac{d\ln(s-z_j)}{ds}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{s-z_j}$$

s未知，需要求取

根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

规则5: 根轨迹的分离点和分离角

结论: 分离点 r 满足条件:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{r-z_j} \quad r\in C}$$

注：在求解分离点时，须注意：

1）分离点必须在根轨迹上.

2）无有限极点时:

$$\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{r-z_j}=0, r\in C$$

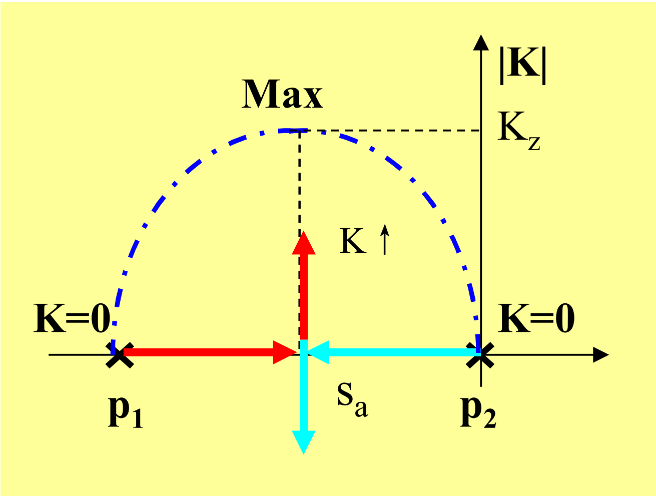
3）无有限零点时:

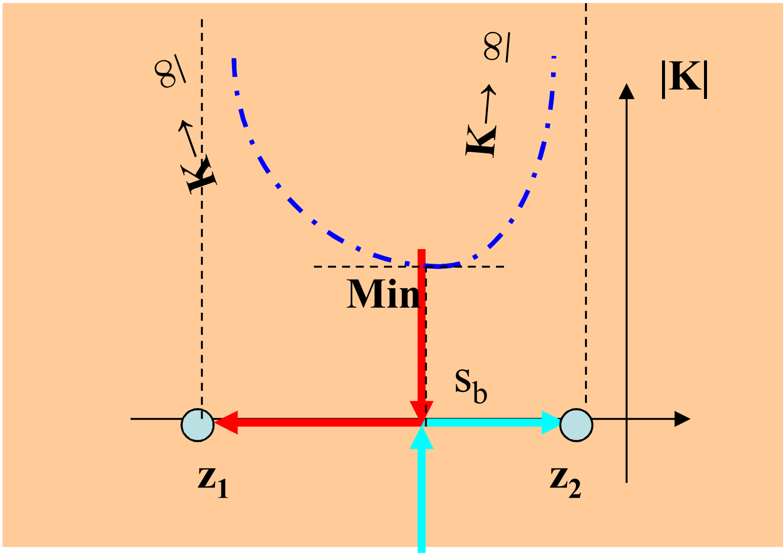
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-p_i}=0, r\in C$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

规则5: 根轨迹的分离点和分离角

方法2：

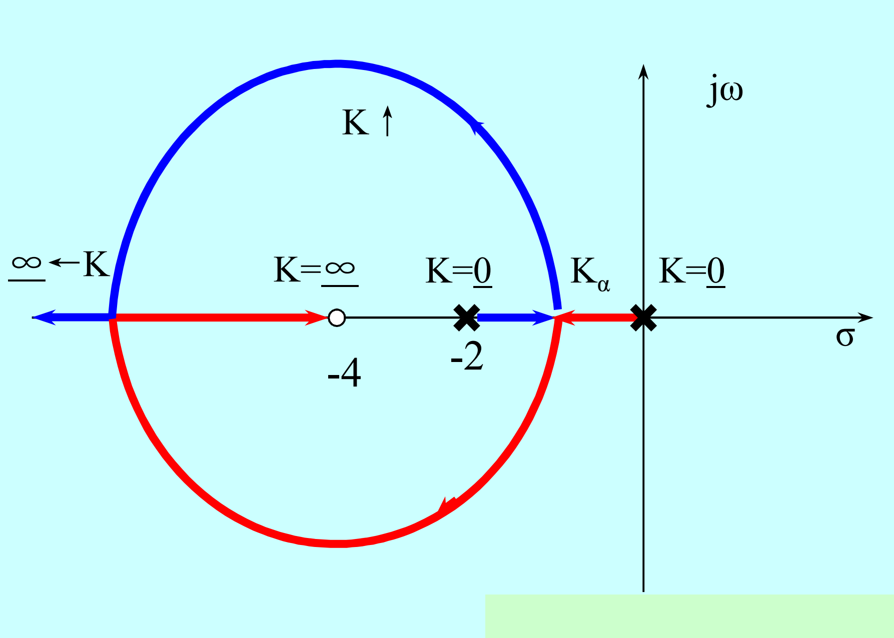


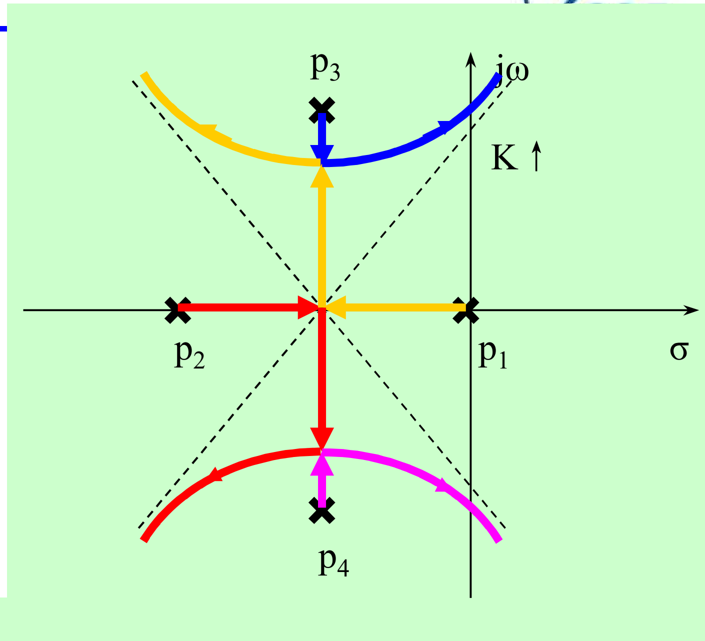


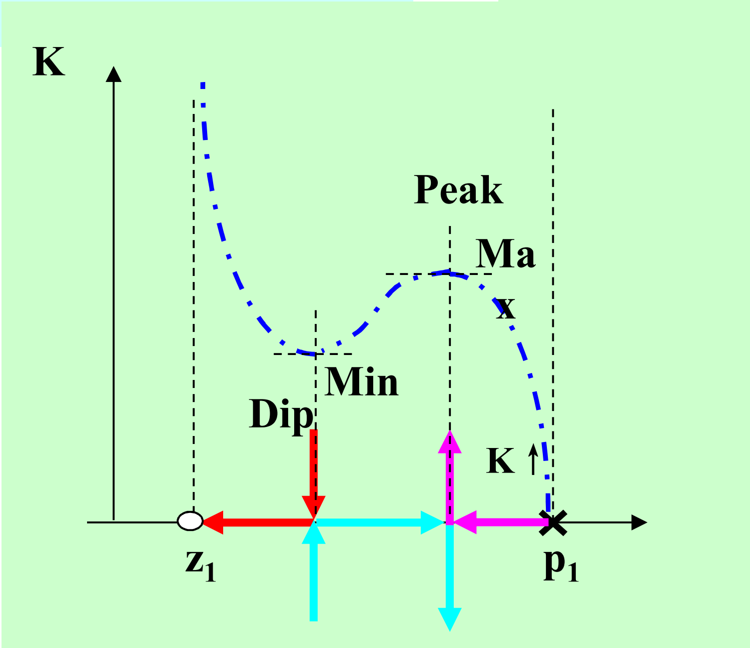
- 对于分离点s_a，对应的K_z 大于实轴上 s_a 两侧的任意点的K.

- 对于分离点s_b，在两个零点之间，K（在实轴上）是最小值.

根轨迹（K>0）－－绘制法则 5







规则5: 根轨迹的分离点和分离角

开环传递函数:

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

特征方程:

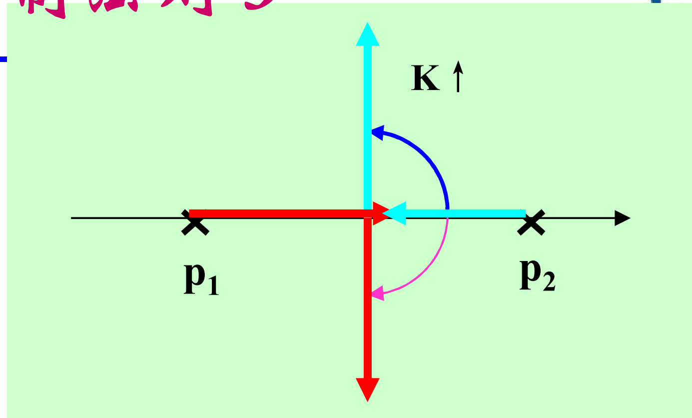
$$1+G(s)H(s)=1+\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=0$$

$$\text{Let}: W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=-K$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=r}=\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=r}=0$$

根轨迹（K>0)－－绘制法则 5

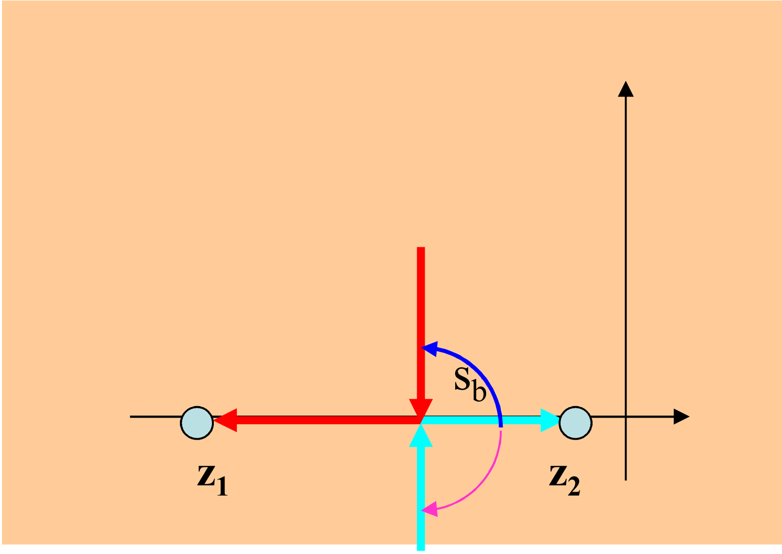
规则5: 根轨迹的分离点和分离角



分离角：

2条根轨迹分支由实轴外进入实分离点的轨线方向角

或者2条根轨迹分支离开实分离点进入实轴外的轨线方向角



借助出射角公式的证明思路可得上述分离角

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$$

例5-8 开环传递函数 G(s)H(s), 绘制根轨迹.

$$G(s)\,H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

1）：开环极点: $n=3: p_1=0,\quad p_2=-2,\quad p_3=-3$

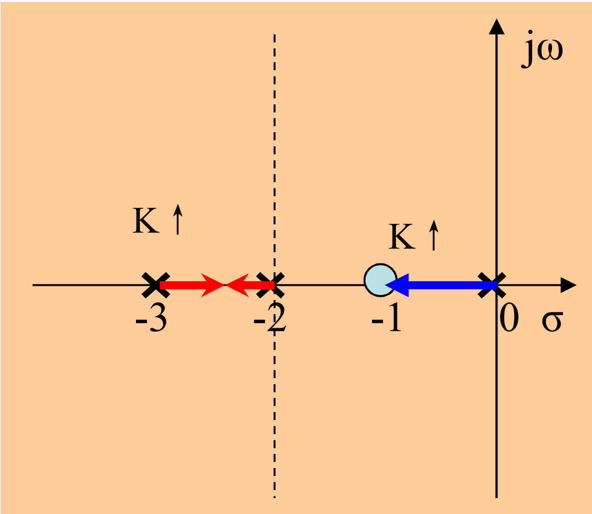
2）：开环零点: $w=1: z_1=-1$

3）：实轴上的根轨迹 [0, -1], [-2, -3]

4）：渐近线

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{n-w} = \frac{(1+2k)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

$$\sigma_0 = \frac{0-2-3-(-1)}{3-1} = -2$$



例5-8 开环传递函数 G(s)H(s), 绘制根轨迹.

5）：分离点

$$G(s)\,H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

方法 1

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+3}=\frac{1}{r+1}$$

$$r^3+4r^2+5r+3=0$$

$$r=-2.47$$

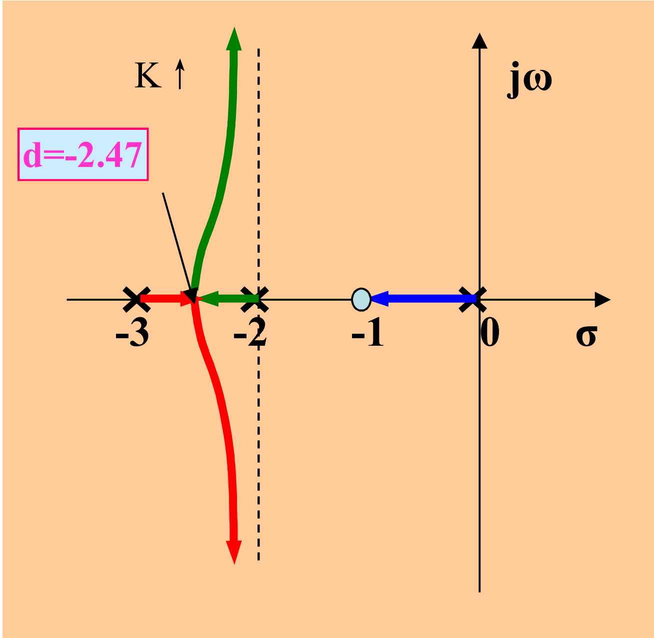
分离角:

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

方法 2

$$W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=\frac{s(s+2)(s+3)}{s+1}$$

$$\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=r}=0$$

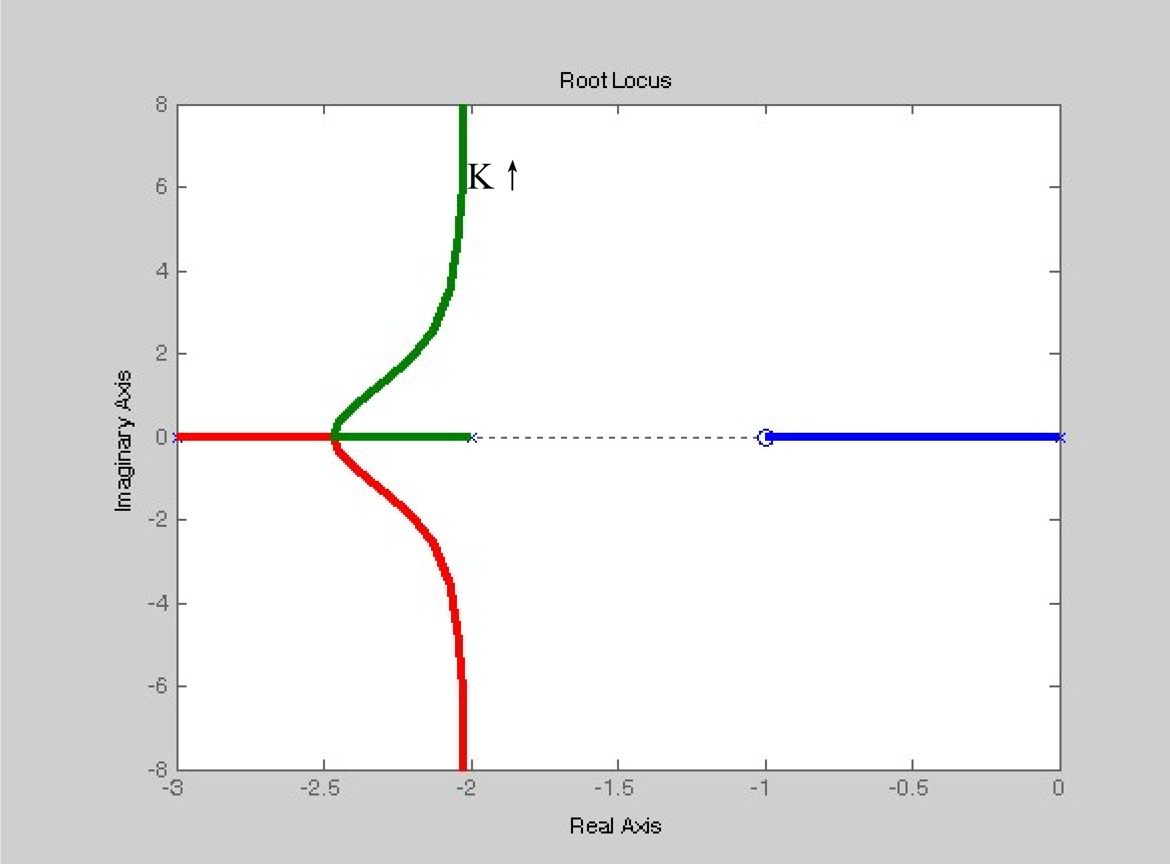


根轨迹图

根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例5-8　用MATLAB绘制的根轨迹

$$G(s)\,H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$



例5-9 开环传递函数 G(s)H(s), 绘制根轨迹.

$$G(s)\,H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

1）：开环极点 $n=3,\quad p_1=-1,\quad p_2=-2,\quad p_3=-3$

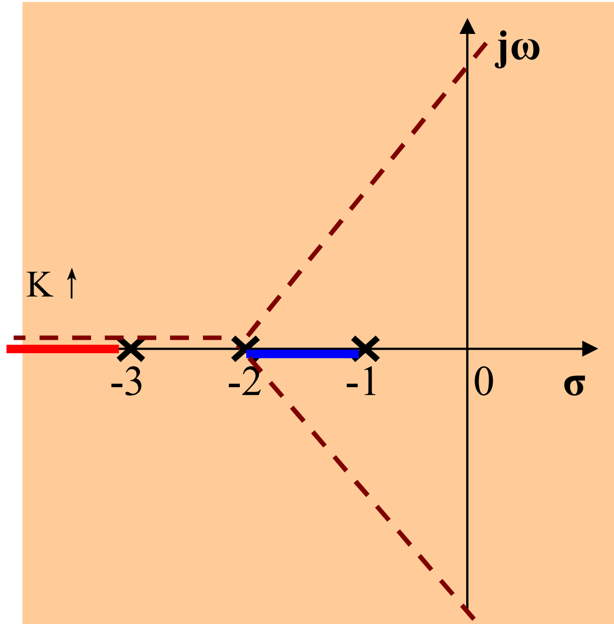
2）：开环零点 $w=0$

3）：实轴上的根轨迹 [-1, -2], [-3, -∞]

4）：渐近线

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2k)180^\circ}{3}=\begin{cases}60^\circ\\180^\circ\\-60^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{-1-2-3}{3-0}=-2$$



根轨迹（K>0)－－绘制法则举例

5）分离点：

$$G(s)\,H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+3}=0 \Rightarrow 3r^2+12r+11=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1=-1.42 \\ r_2=-2.58 \end{cases}$$

d_2=-2.58 因为不在根轨迹上，舍弃

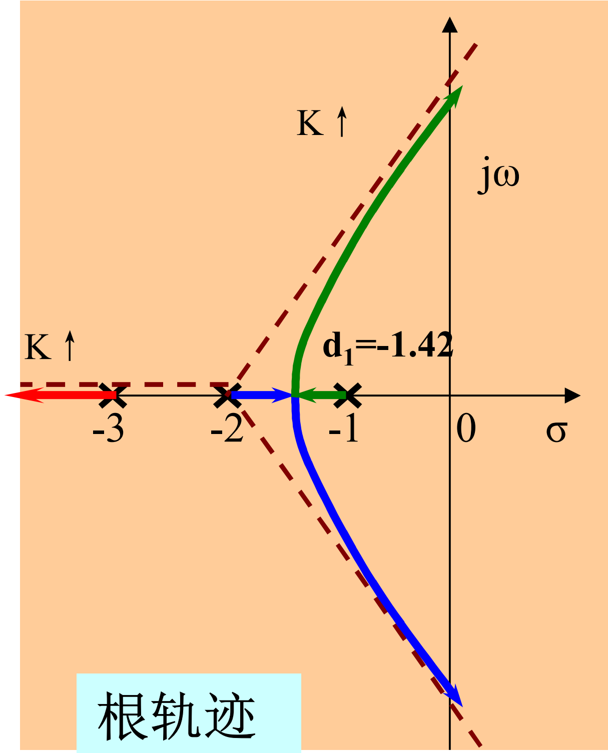
分离角：

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

方法 2：

$$W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=(s+1)(s+2)(s+3)$$

$$\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=r}=0$$

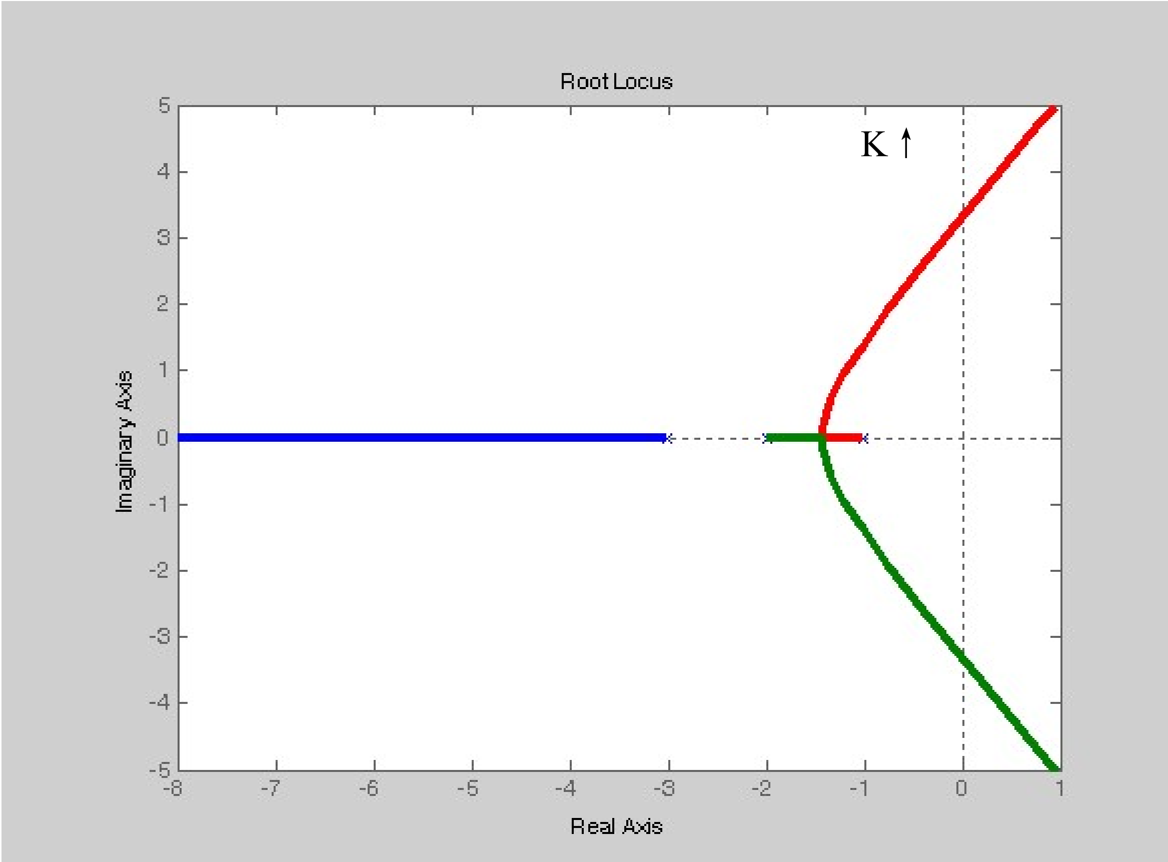


根轨迹

根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例5-9 用**MATLAB**绘制的根轨迹

$$G(s)\,H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



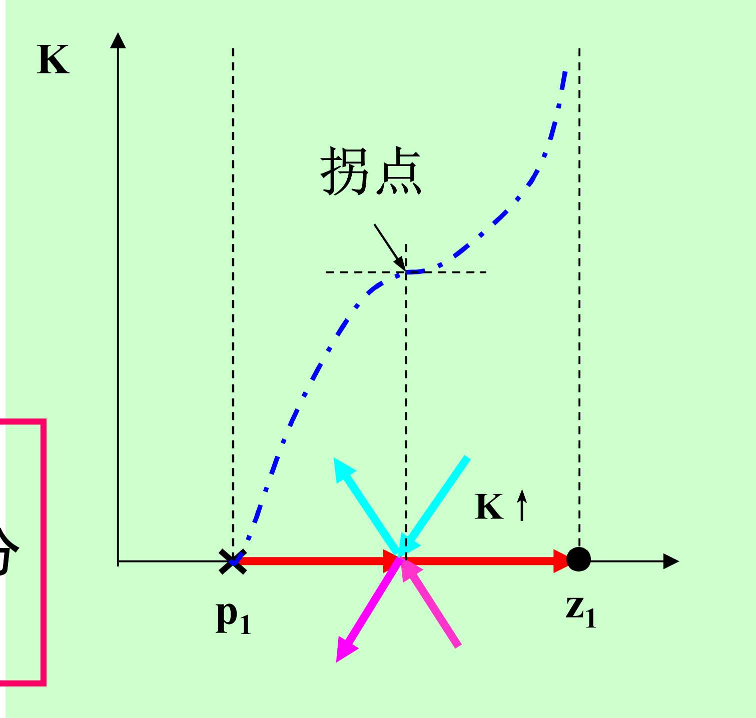
根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

规则5: 根轨迹的分离点和分离角

更复杂情况:

出现3条或以上分支的实分离点

K会出现拐点



如果在根轨迹上的给定点处**W(s)**的**y-1** 阶导数等于零，则有 **y**条根轨迹分支在该点相聚又分离

根轨迹（K>0）－－绘制法则8

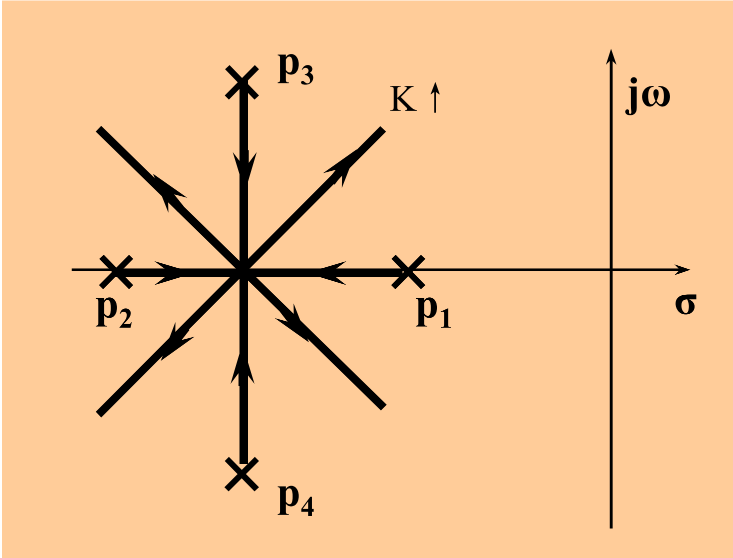
规则5: 根轨迹的分离点和分离角

进入分离点的轨线方向角

$$\frac{2k180^\circ}{y} \qquad k \in \{0,1,\cdots,y-1\}$$

离开实分离点的轨线方向角

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{y} \qquad k \in \{0,1,\cdots,y-1\}$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-10: 绘制G(s)H(s)的根轨迹 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$

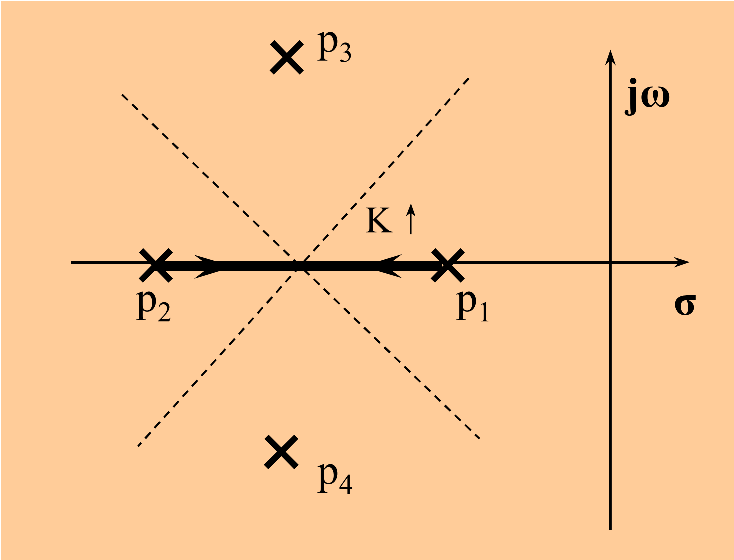
开环极点: $n=4,\quad p_1=-2,\quad p_2=-4,\quad p_{3,4}=-3\pm j1$

开环零点: $w=0$

渐近线:

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2k)180^\circ}{4}=\begin{cases}45^\circ\\135^\circ\\-135^\circ\\-45^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{-2-4-3-3}{4-0}=-3$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-10: 绘制G(s)H(s)的根轨迹 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$

出射角

$$\phi_{p_3}=180^\circ-\angle(p_3-p_1)-\angle(p_3-p_2)-\angle(p_3-p_4)$$
$$=180^\circ-arctg(-2)-arctg(2)-90^\circ$$
$$=-90^\circ$$

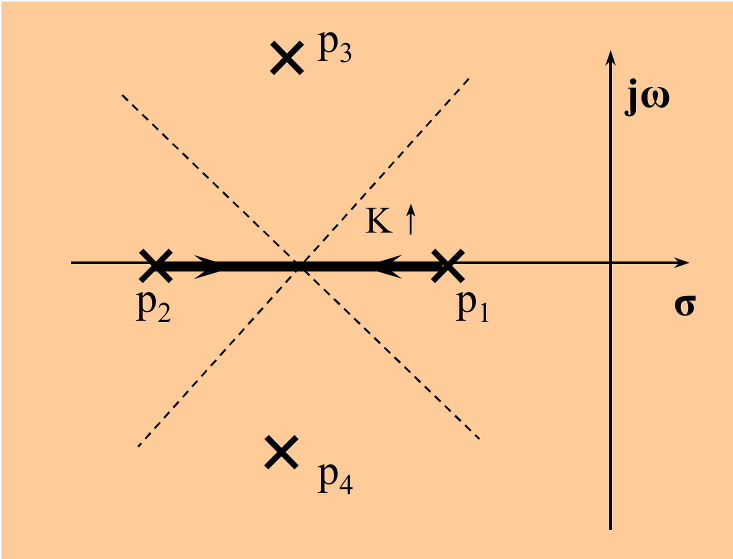
$$\phi_{p_4}=90^\circ$$

实轴上的分离点（方法1）

$$\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+4}+\frac{1}{r+3+j1}+\frac{1}{r+3-j1}=0$$

$$r=-3$$

$$p_{3,4}=-3\pm j1$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-10: 绘制G(s)H(s)的根轨迹 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$

实轴上的分离点（方法2）：

$$W(s)=(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)=(s^2+6s+8)(s^2+6s+10)$$

$$W'(s)\big|_{s=-3}=\left[(2s+6)(s^2+6s+10)+(s^2+6s+8)(2s+6)\right]\big|_{s=-3}=0$$

$$W''(s)\big|_{s=-3}=2(2s^2+12s+18)+(2s+6)(4s+12)\big|_{s=-3}=0$$

$$W'''(s)\big|_{s=-3}=\left[2(4s+12)+(16s+48)\right]\big|_{s=-3}=0$$

$$W^{(4)}(s)\big|_{s=-3}=24$$ ⇒ y=4 ⇒

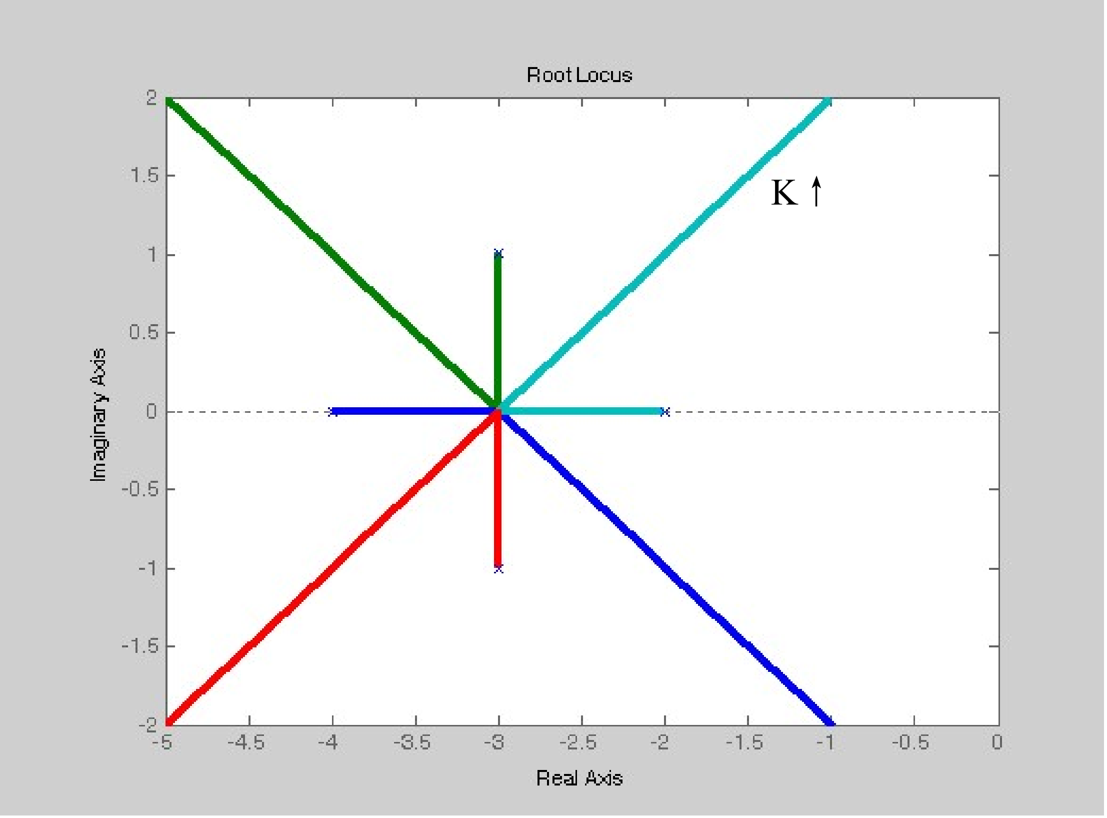
进入实分离点的轨线方向角0°, 90°, 180°, 270°

离开实分离点的轨线方向角45°, 135°, 225°, 315°

根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-10: 绘制**G(s)H(s)**的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$$



根轨迹（K>0）——绘制法则7

法则 **7:** 根轨迹与虚轴的交点(产生无阻尼振荡点)

方法**:** 根轨迹与虚轴相交，意味着闭环系统有虚根. 因此, 令 **s=jω** 代入特征方程 **1+G(s)H(s)=0**来计算根轨迹与虚轴的交点.

$$1+G(j\omega)H(j\omega)=0 \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{Re}\left[1+G(j\omega)H(j\omega)\right]=0\\ \mathrm{Im}\left[1+G(j\omega)H(j\omega)\right]=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\omega=\pm\omega_c\\ K=K_c\end{cases}$$

s=±jω$_c$ 对应于根轨迹穿越虚轴的点。
K$_c$ 表示穿越虚轴的点对应的参数

根轨迹（K>0）－－绘制法则7举例

例 5-9-1: 开环传递函数 G(s)H(s), 试求根轨迹与虚轴的交点

$$G(s)\,H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

特征方程

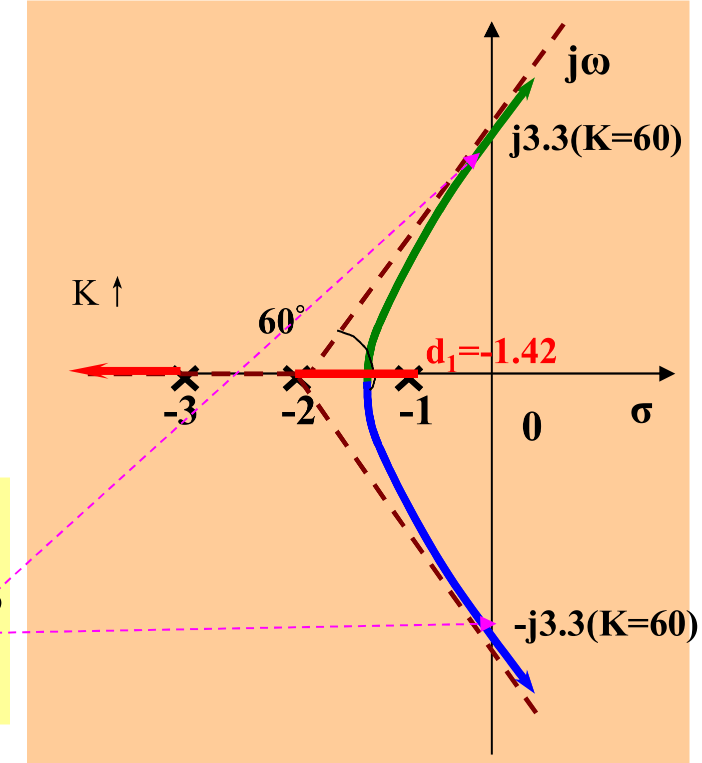
$$s^3+6s^2+11s+K+6=0$$

令s=jω 代入特征方程:

$$-j\omega^3-6\omega^2+j11\omega+K+6=0$$

$$\begin{cases}11\omega-\omega^3=0\\ K+6-6\omega^2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega_1=0 \quad (\text{放弃})\\ \omega_{2,3}=\pm\sqrt{11}=\pm3.3\\ K=60\end{cases}$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则9

法则 8: 系统根之和的守恒（**n-2>=w**时）

考虑如下形式的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \qquad w\le n-2$$

闭环特征方程

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

其中 λ_i 是根轨迹上对应于同一**K**值的**n**个点

根轨迹（K>0）－－绘制法则9

法则 **8:**系统根之和的守恒（**n-2>=w**时）

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

方程两侧表示为多项式形式

$$\left(s^n-\sum_{j=1}^{n}p_js^{n-1}+\cdots\right)+K\left(s^w-\sum_{i=1}^{w}z_is^{w-1}+\cdots\right)=s^n-\sum_{i=1}^{n}\lambda_is^{n-1}+\cdots$$

对于$w\le$ **n-2**的开环传递函数, 令方程两端 s^{n-1} 的系数相等，可以得到

$$\sum_{j=1}^{n}p_j=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$

p_j 表示所有的开环极点

λ_j 表示闭环特征方程的根

结论：对于**w ≤ n-2**的开环传递函数，当**K**由**0**变化到∞时, 系统的根之和是常数. 换句话说, 系统的根之和与**K**无关

小结：根轨迹绘制法则

- 法则 1:根轨迹的分支数、对称性和连续性
- 法则 2:根轨迹的起点、终点
- 法则 3:根轨迹的渐近线
- 法则 4:实轴上的根轨迹
- 法则 5:根轨迹的分离点/会合点
- 法则 6: 复数极点 (或零点)的出射角(入射角)
- 法则 7: 根轨迹与虚轴的交点
- 法则 8:系统根之和守恒

注意：根轨迹是一种几何图解法：绘制出根轨迹后，根轨迹上任一点s对应的K值都可由幅值定理求出：

$$K_1 = \frac{|s_1 - p_1| \cdot |s_1 - p_2| \cdots |s_1 - p_n|}{|s_1 - z_1| \cdot |s_1 - z_2| \cdots |s_1 - z_w|} = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s_1 - p_i|}{\prod_{j=1}^{w} |s_1 - z_j|}$$

根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

例5-11 开环传递函数$G(s)H(s)$，绘制根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

1)开环极点: $n=2,\ p_1=-1+j,\ p_2=-1-j$

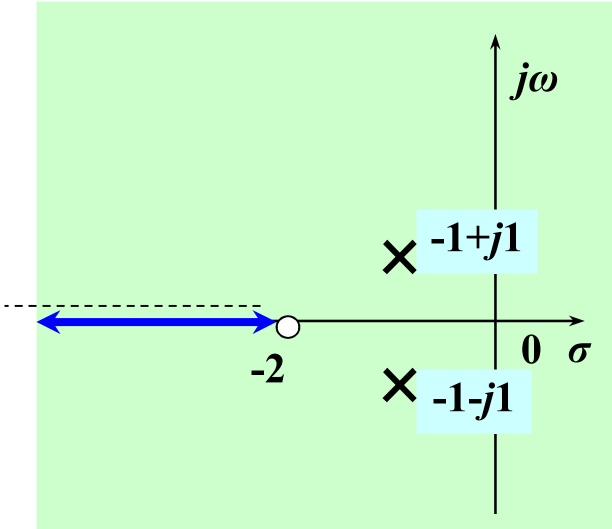
开环零点: $w=1,\ z_1=-2$

2) 两条根轨迹

3) 实轴上的根轨迹(-∞,-2]

4) 渐近线夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180°}{n-w}=\frac{(1+2h)180°}{1}=180°$$



根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

5) 实轴上的分离点d

$$\frac{1}{d+1-j1}+\frac{1}{d+1+j1}=\frac{1}{d+2}$$

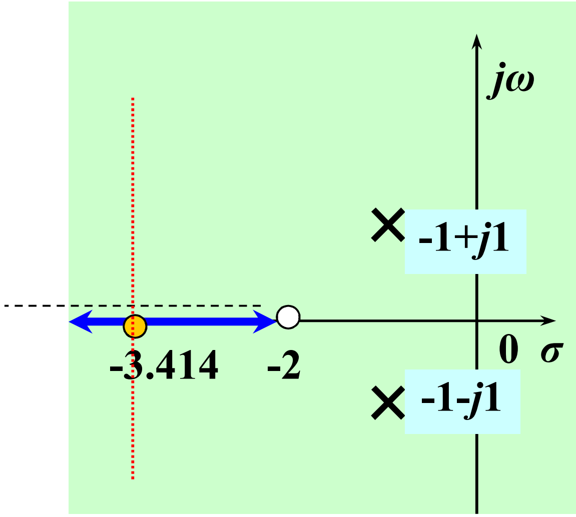
或者

$$-K=\frac{s^2+2s+2}{s+2}$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=0 \quad\Rightarrow\quad d^2+4d+2=0$$

$$d_1=-3.414$$

$$d_2=-0.586$$ 舍弃



分离角:

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{l}=\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

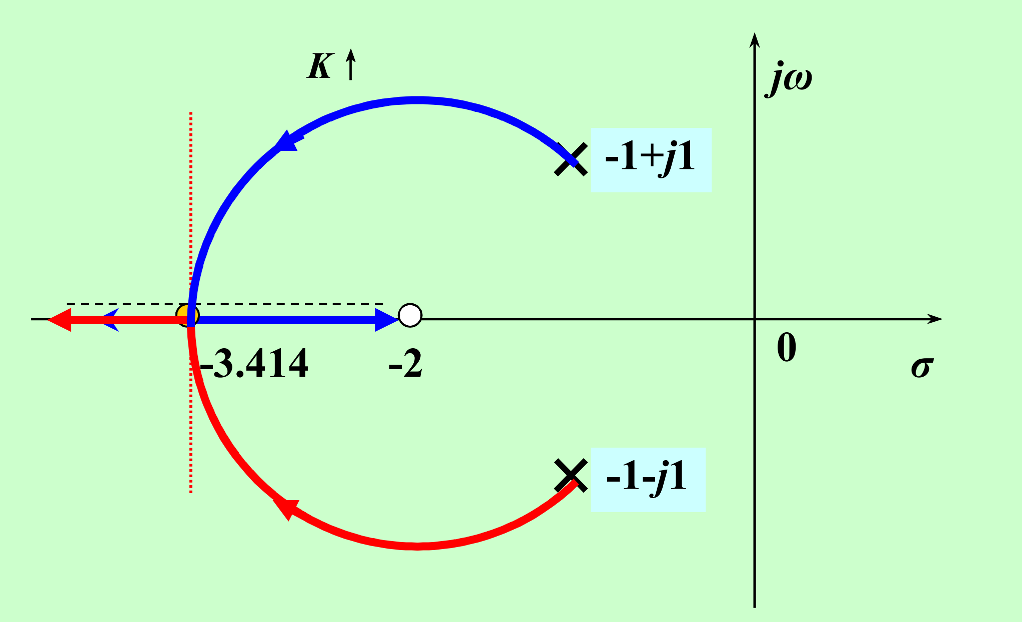
根轨迹（*K*>0）—— 绘制法则举例

6) 极点–1+*j*1处的出射角Φ_{1_D}

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

$$\phi_{1_D}=(1+2h)180^\circ+\psi_1-\phi_2=(1+2h)180^\circ+45^\circ-90^\circ=135^\circ$$

类似地，极点 –1-*j*1处的出射角是 –135° .



可以证明，这个系统的根轨迹是以(-2, j0) 为圆心，以1.414为半径的圆

如何证明？

根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

可以证明，这个系统的根轨迹上以(-2, j0) 为圆心，以1.414为半径的圆

方法 1

$$z_1=-2,\ p_1=-1+j1\quad p_2=-1-j1$$

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

假设$s=u+jv$ 是根轨迹上的一个点，根据相角条件

$$\angle(s-z_1)-\angle(s-p_1)-\angle(s-p_2)=\pm180^\circ$$

将 z_1, p_1, p_2 和$s=u+jv$ 代入上述方程

$$\angle(u+2+jv)-\left[\angle(u+1+j(v-1))+\angle(u+1+j(v+1))\right]=\pm180^\circ$$

$$tg^{-1}\frac{v}{u+2}-\left[tg^{-1}\frac{v-1}{u+1}+tg^{-1}\frac{v+1}{u+1}\right]=\pm180^\circ$$

应用公式

$$tg^{-1}x\pm tg^{-1}y=tg^{-1}\frac{x\pm y}{1\mp x\cdot y}$$

根轨迹（*K*>0）—— 绘制法则举例

$$tg^{-1}\frac{\dfrac{v}{u+2}-\dfrac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}}{1+\dfrac{v}{u+2}\cdot\dfrac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}}=\pm 180^\circ$$

$$\frac{v}{u+2}-\frac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}=0$$

$$u^2+4u+2+v^2=0$$

$$(u+2)^2+v^2=(\sqrt{2})^2$$

即已证明，这个系统的根轨迹是以(-2, *j*0) 为圆心，以1.414为半径的圆

这已是圆的方程

根轨迹（$K>0$）—— 绘制法则举例

方法 2　假设$s=u+jv$ 是根轨迹上的一个点, 将它代入特征方程

$$s^2+s(K+2)+2K+2=0$$

$$(u+jv)^2+(u+jv)(K+2)+2K+2=0$$

令方程的实部和虚部分别为零，有

$$u^2-v^2+u(K+2)+2K+2=0$$

和 $$2uv+v(K+2)=0$$

即 $$K=-2u-2$$

$$u^2+v^2+4u+2=0$$

$$(u+2)^2+v^2=(\sqrt{2})^2$$

结论：由两个开环极点（实极点或复数极点）和一个开环实零点组成的二阶系统，只要实零点没有位于两个实极点之间，当开环根轨迹增益由零变到无穷大时，复平面上的闭环根轨迹，一定是以实零点为圆心，以实零点到分离点的距离为半径的一个圆（当开环极点为两个实极点时）或圆的一部分（当开环极点为一对共轭复数极点时）。

Thanks!