第六章

频率特性分析法


浙江大学控制科学与工程学系
CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING
SINCE 1956

第六章主要内容

- ✓ 概述
- ✓ **Bode 图 (对数坐标图)**
- ✓ 极坐标图
- ✓ **Nyquist**稳定性判据
- ✓ 基于频率特性的补偿器设计

第六章主要内容

- ✓ 概述
- ✓ 系统的频率特性曲线
- ✓ **Nyquist**稳定判据
- ✓ 相位裕度和幅值裕度以及与稳定性的关系
- ✓ ……….

系统频率特性的图示方法

系统的传递函数$G(s)$　　　拉普拉斯变换

系统的频率特性$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}$　　　傅立叶变换

Bode图（对数频率特性曲线）：

$$\begin{cases}\text{对数幅频特性曲线}\,\mathrm{Lm}G(\mathrm{j}\omega)=20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|\text{，单位：分贝（dB）}\\ \text{对数相频特性曲线}\,\angle G(\mathrm{j}\omega)\text{，单位：度（deg或 °）}\end{cases}$$

横坐标按$\lg\omega$分度，圆频率$\omega>0$，单位：弧度/秒（rad/s）

Matlab的bode函数

Nyquist图（幅相曲线）：随ω从0变化到$+\infty$，$G(\mathrm{j}\omega)$在复平面上形成的曲线

Matlab的nyquist函数

传递函数的各种形式

传递函数$G(s)=\dfrac{\beta_m s^m+\beta_{m-1}s^{m-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}$ $(\alpha_n\neq 0,\beta_m\neq 0,n\geq m)$

$$=d+\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

零极点型 $=\dfrac{K_r(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$

$$=\frac{K\prod_k(T_k s+1)\prod_l(T_l^2 s^2+2\zeta T_l s+1)}{\prod_i(T_i s+1)\prod_j(T_j^2 s^2+2\zeta T_j s+1)}s^q$$

比例环节：K $(K\neq 0)$

积分/微分环节：$s^{\pm 1}$

惯性环节：$\dfrac{1}{Ts+1}$ $(T\neq 0)$

一阶微分环节：$Ts+1$ $(T\neq 0)$

振荡环节：$\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$ $(T>0,-1\leq\zeta<1)$

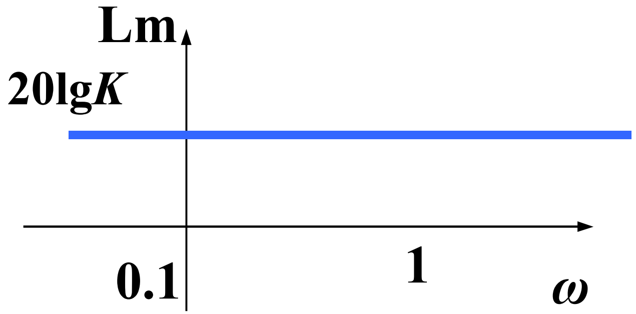
二阶微分环节：$T^2s^2+2\zeta Ts+1$ $(T>0,-1\leq\zeta<1)$

比例环节

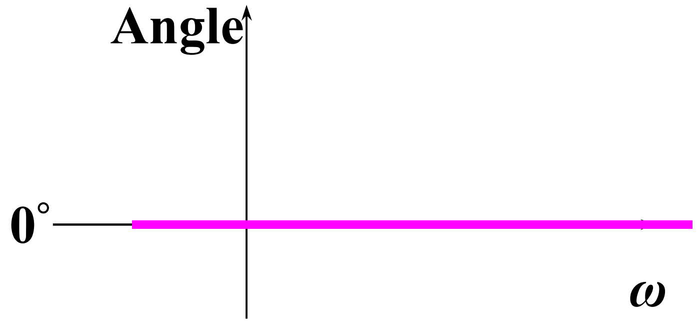
比例环节：*K*>0

$$G(s)=G(\mathrm{j}\omega)=K$$

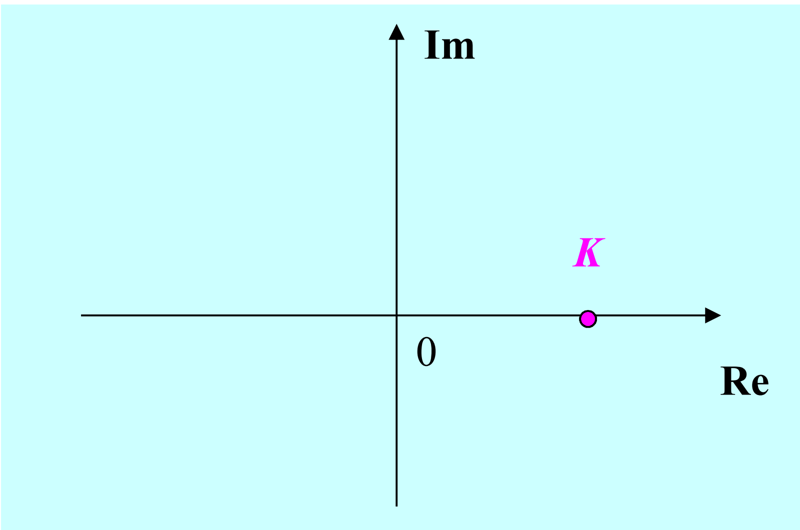
$$\mathrm{Lm}K=20\lg|K|$$



- 对数幅频曲线是一条水平线
- 相角恒为零



- **K增大或减小，对数幅频曲线上下移动**



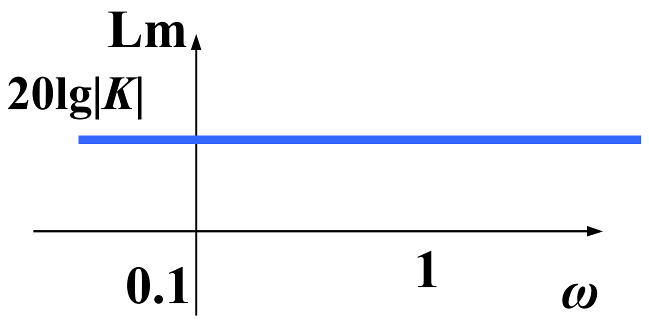
- **Nyquist图是一个点*K***

比例环节

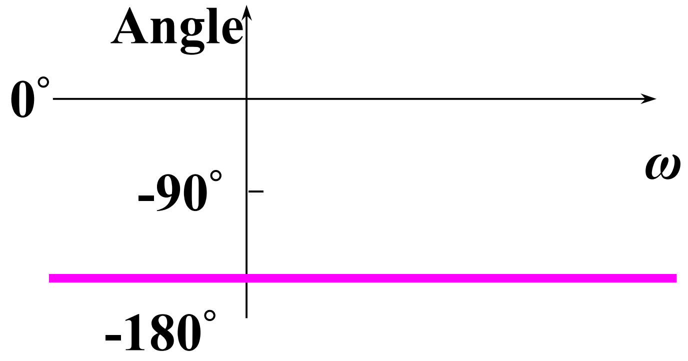
比例环节：K<0

$$G(s)=G(j\omega)=K$$

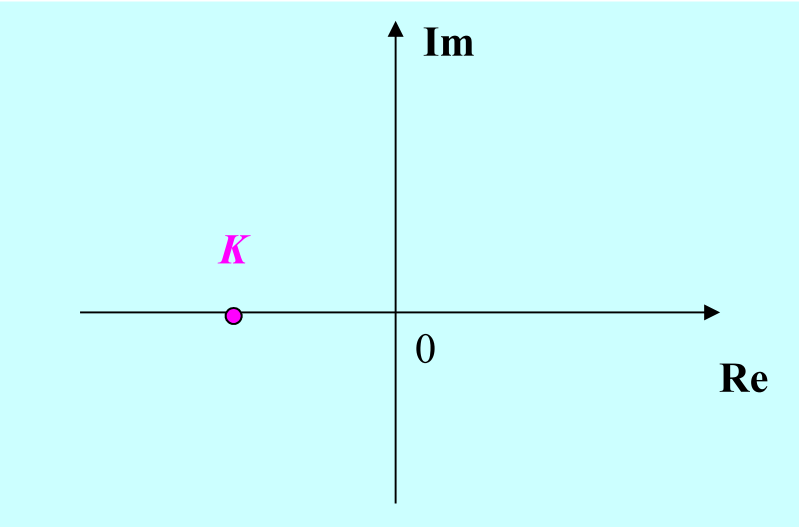
$$\mathrm{Lm}K = 20\lg|K|$$



- 对数幅频曲线是一条水平线
- 相角恒为-180度



- **K增大或减小，对数幅频曲线上下移动**



- **Nyquist图是一个点K**

微分/积分环节

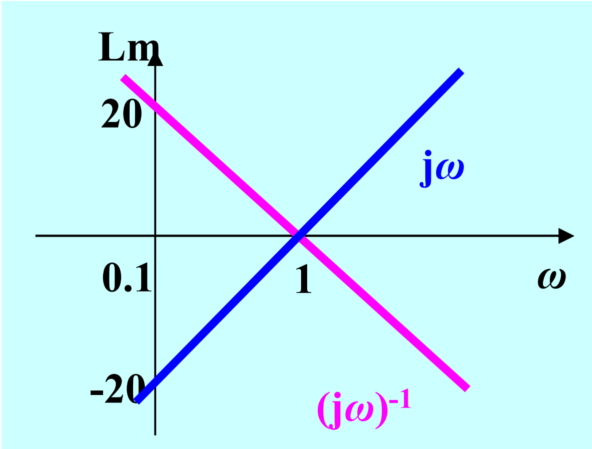
两种形式: $(j\omega)^{\pm 1}$

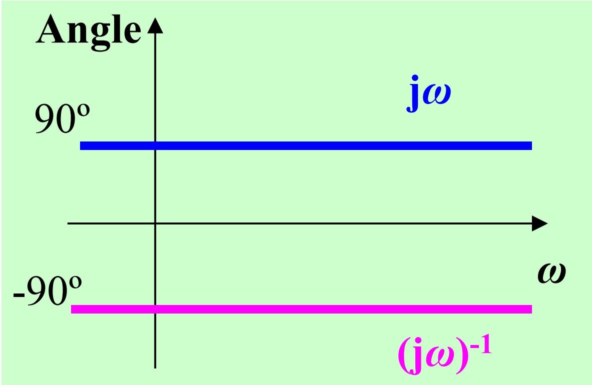
$$\mathrm{Lm}\frac{1}{j\omega} = 20\lg\left|(j\omega)^{-1}\right| = -20\lg\omega$$

- 对数幅频曲线为一条过（1，0）的斜线，其斜率为 -20分贝/十倍频（dB/dec）
- 相角恒等于 -90º（相位滞后）

$$\mathrm{Lm}(j\omega) = 20\lg|j\omega| = 20\lg\omega$$

- 对数幅频曲线为一条过（1，0）的斜线，其斜率为 20dB/dec
- 相角恒等于 +90º（相位超前）





微分/积分环节

积分环节：1/jω

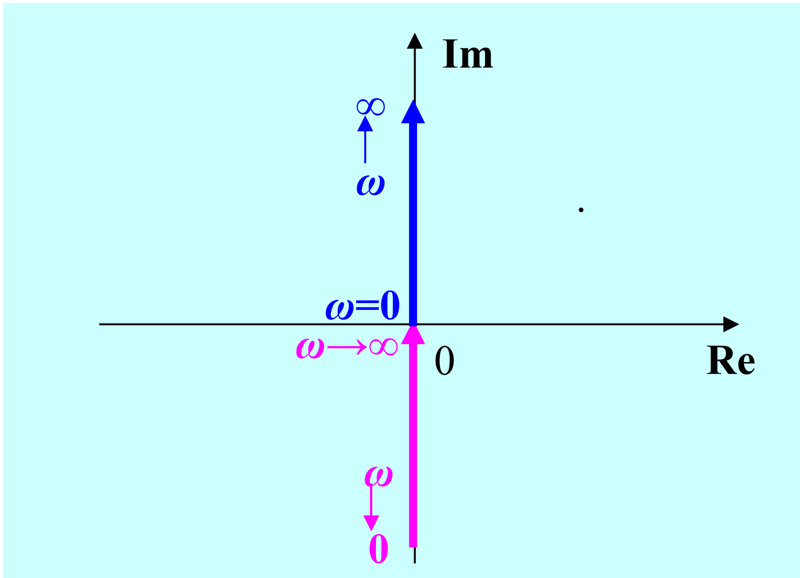
频率特性 $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$

$G(j\omega)$ 在负虚轴上

微分环节：jω

频率特性 $G(j\omega)=j\omega$

$G(j\omega)$ 在正虚轴上



惯性环节

惯性环节：$(1+j\omega T)^{-1}$　　$T>0$

$$Lm(1+j\omega T)^{-1}=20\lg|1+j\omega T|^{-1}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

手工一般绘制其对数幅频渐近特性曲线（低、高频段的渐近线组成的折线）

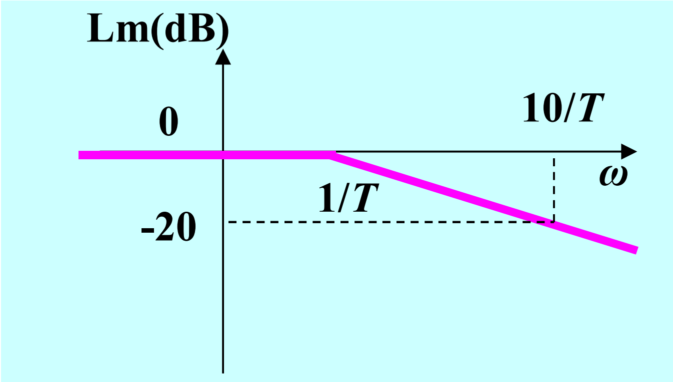
当 ω很小时，即 $\omega T<<1$　$Lm(1+j\omega T)^{-1}\approx 20\lg 1=0$　渐近线在低频段为 0 dB线

当 ω很大时，即 $\omega T>>1$　$Lm(1+j\omega T)^{-1}\approx 20\lg|j\omega T|^{-1}=-20\lg\omega-20\lg T$

渐近线在高频段是斜率为–20dB/dec 的斜线

- 转折频率ω_{cf}(交接频率)：渐近线转折的频率
- 本例的转折频率为 $\omega_{cf}=1/T$

$$\angle(1+j\omega T)^{-1}=-\tan^{-1}\omega T$$

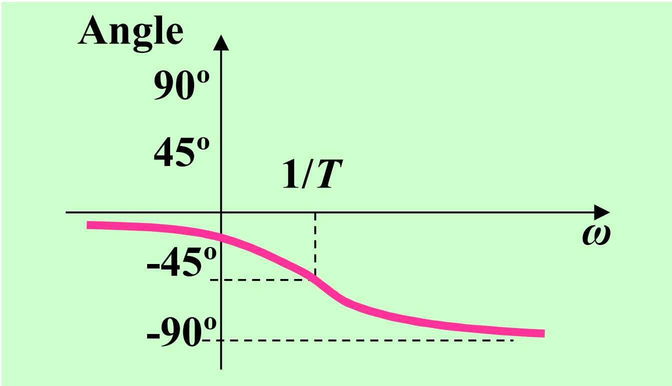


对数相频曲线特点：

频率为0时，相角为 0°

转折频率处 $\omega=\omega_{cf}$，相角为 -45°

频率为∞时，相角为 -90°



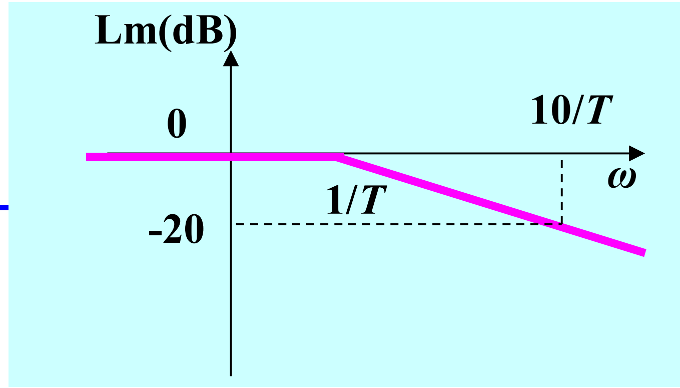
相位滞后

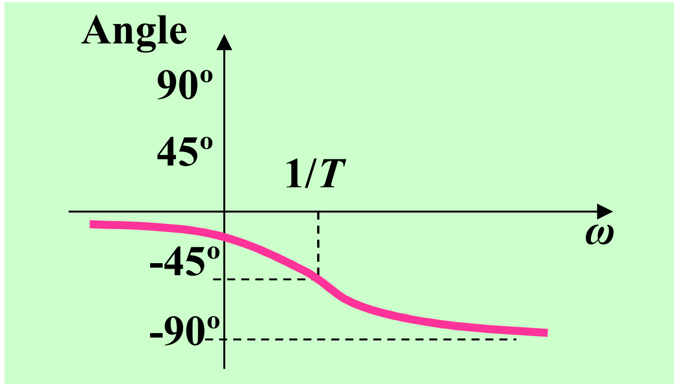
惯性环节

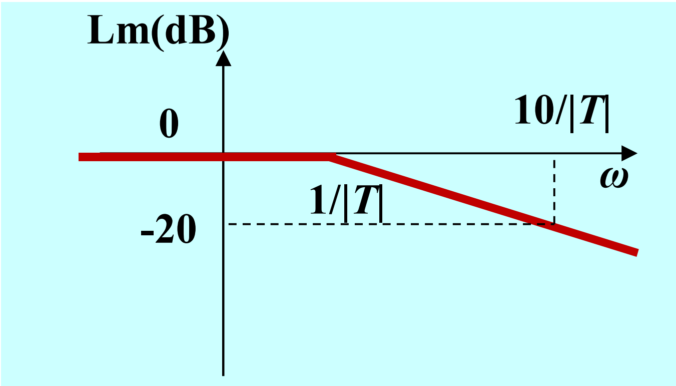
惯性环节：$(1+j\omega T)^{-1}$　　$T>0$

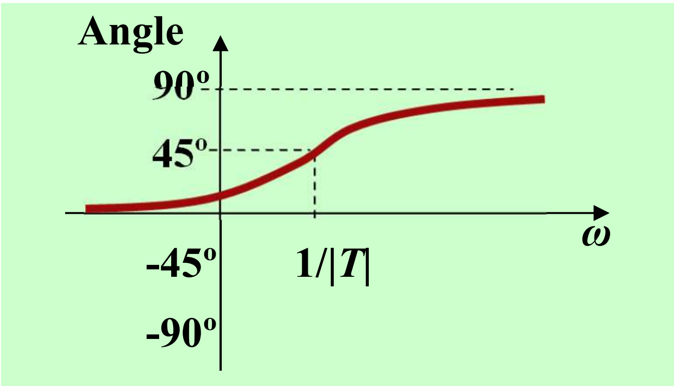
$$Lm(1+j\omega T)^{-1}=20\lg|1+j\omega T|^{-1}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\angle(1+j\omega T)^{-1}=-\tan^{-1}\omega T$$









惯性环节：$(1+j\omega T)^{-1}$　　$T<0$

$$Lm(1+j\omega T)^{-1}=20\lg|1+j\omega T|^{-1}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

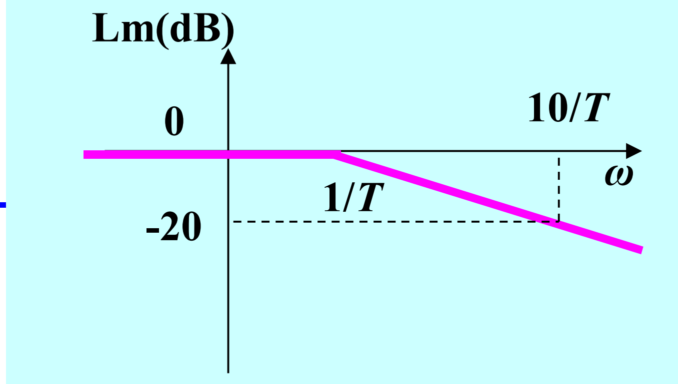
幅频特性同T>0

$$\angle(1+j\omega T)^{-1}=-\tan^{-1}\omega T$$

相频特性与T>0反号（关于0度线对称）

相位超前

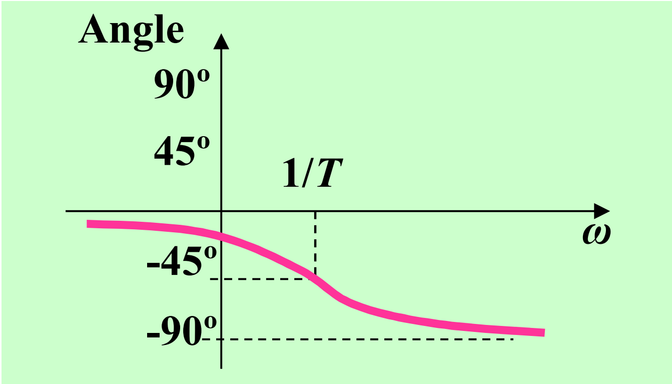
一阶微分环节

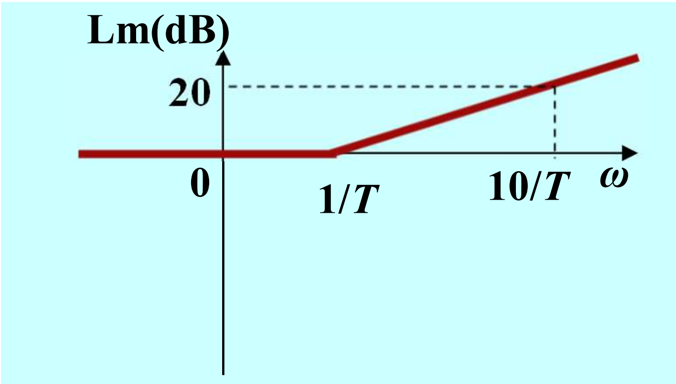


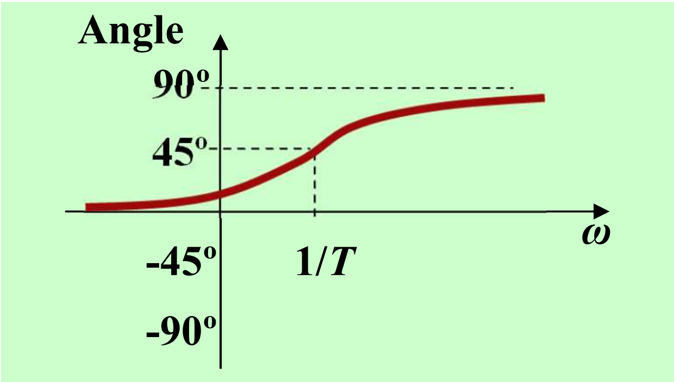
惯性环节：$(1+j\omega T)^{-1}$ $T>0$

$$Lm\left(1+j\omega T\right)^{-1}=20\lg\left|1+j\omega T\right|^{-1}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\angle(1+j\omega T)^{-1}=-\tan^{-1}\omega T$$







一阶微分环节：$(1+j\omega T)$ $T>0$

$$Lm\left(1+j\omega T\right)=20\lg\left|1+j\omega T\right|=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

幅频特性与惯性环节反号（关于0dB线对称）

$$\angle(1+j\omega T)=\tan^{-1}\omega T$$

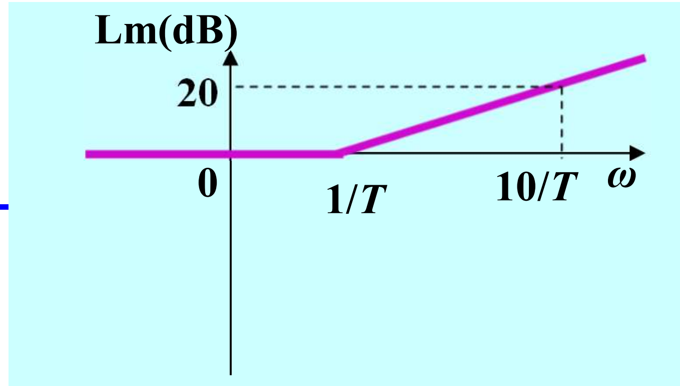
相频特性与惯性环节反号（关于0度线对称）

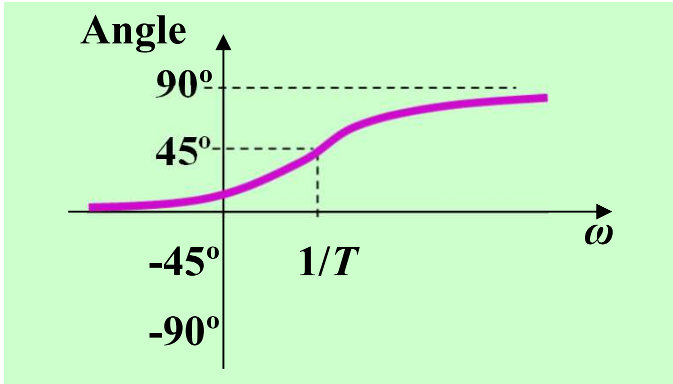
一阶微分环节

一阶微分环节：(1+jωT)　　T>0

$$Lm(1+j\omega T)=20\lg|1+j\omega T|=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\angle(1+j\omega T)=\tan^{-1}\omega T$$





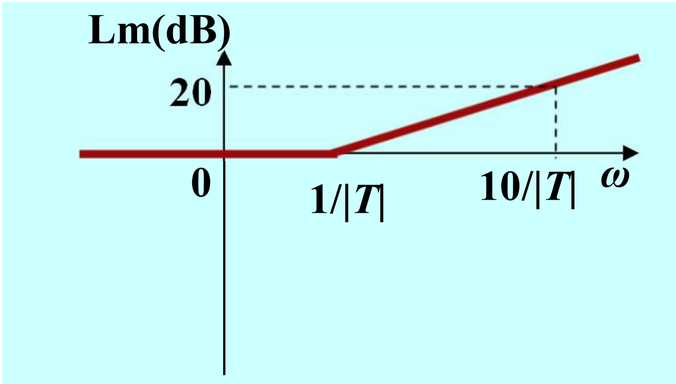
一阶微分环节：(1+jωT)　　T<0

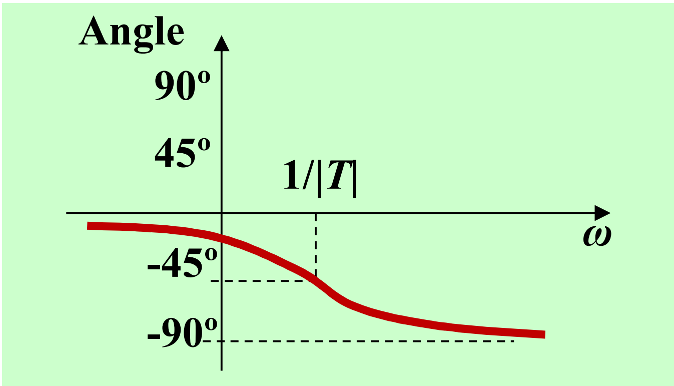
$$Lm(1+j\omega T)=20\lg|1+j\omega T|=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

幅频特性同T>0

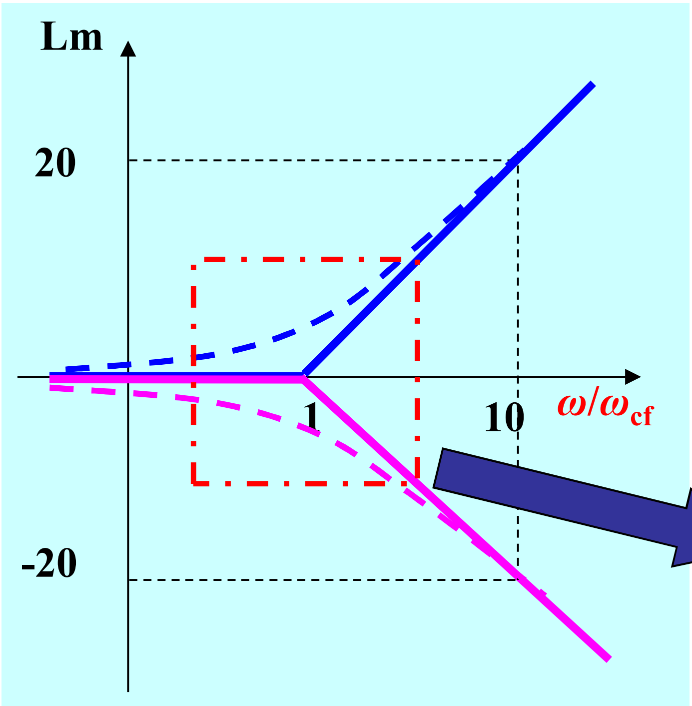
$$\angle(1+j\omega T)=\tan^{-1}\omega T$$

相频特性与T>0反号（关于0度线对称）



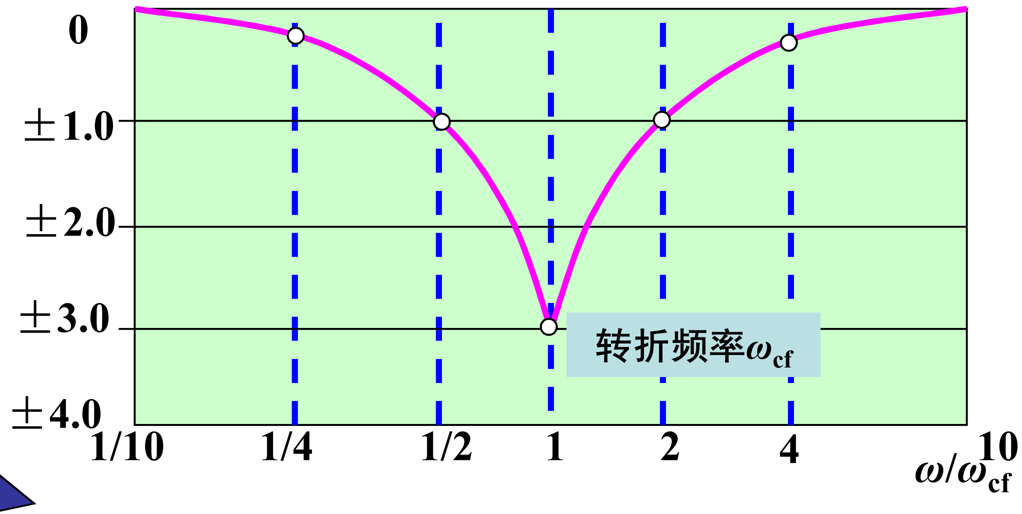


惯性/一阶微分环节



精确曲线与渐近特性曲线

精确曲线与渐近特性曲线的偏差如下



$$Lm\left(1+j\omega T\right)\Big|_{\omega=\frac{1}{|T|}}=20\log\sqrt{2}=3\ \ \text{dB}$$

✓在转折频率处有最大误差3dB

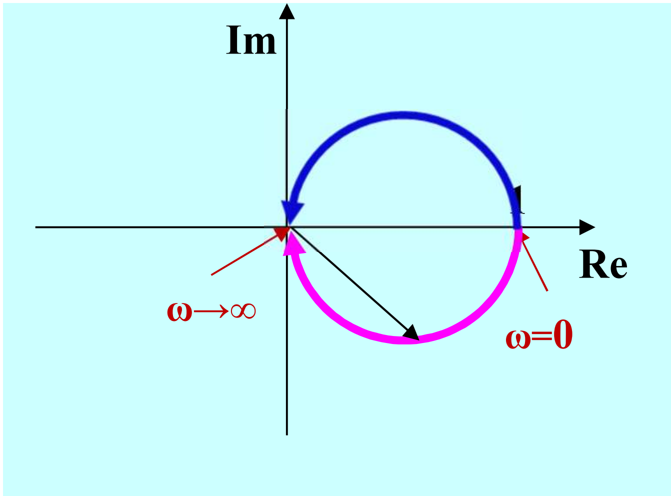
惯性环节

惯性环节：1/(jω*T*+1)　*T*>0

频率特性 $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}=\dfrac{1-j\omega T}{1+\omega^2T^2}=U(\omega)+jV(\omega)$

$$\left(U(\omega)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(V(\omega)\right)^2$$
$$=\left(\frac{2-\left(1+\omega^2T^2\right)}{2\left(1+\omega^2T^2\right)}\right)^2+\left(\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2$$
$$=\frac{1-2\omega^2T^2+\omega^4T^4+4\omega^2T^2}{4\left(1+\omega^2T^2\right)^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$U(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2T^2},V(\omega)=\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}$$



若 $\omega=0$，$G(j\omega)=1$

若 $\omega=1/T$，$G(j\omega)=\dfrac{1}{2}-j\dfrac{1}{2}$

若 $\omega=\infty$，$G(j\omega)=0$

圆心在$\dfrac{1}{2}$、半径$\dfrac{1}{2}$的半圆

惯性环节：1/(jω*T*+1)　*T*<0

幅频特性同、相频特性反号

模相同、相角反号→共轭

一阶微分环节

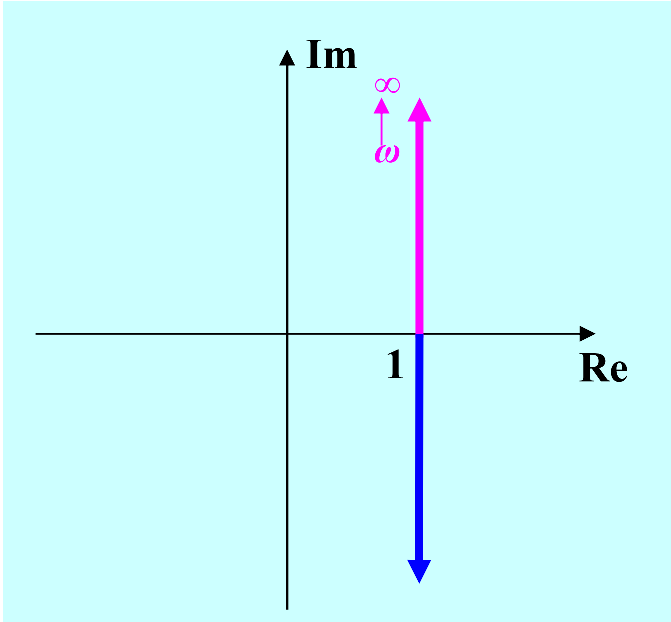
一阶微分环节：jωT+1　　T>0

频率特性　　$G(j\omega)=1+j\omega T$

实部恒为1，虚部非负且随ω变

一阶微分环节：jωT+1　　T<0

与T>0共轭



振荡环节

振荡环节 $\dfrac{1}{T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1}$ $1>\zeta>0, T>0$

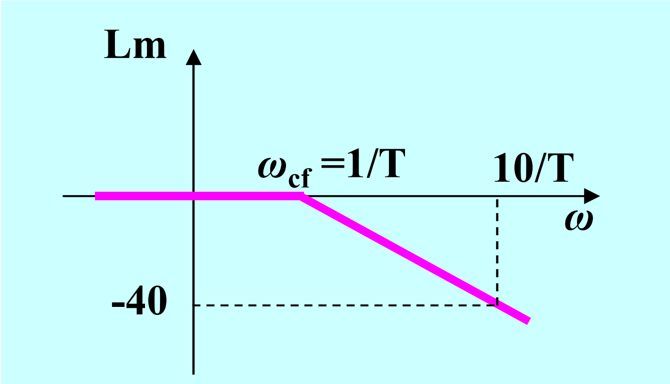
对数幅频曲线

$$Lm\left[1+2j\zeta\omega T+(j\omega T)^2\right]^{-1}=-20\lg\left[\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2\right]^{1/2}$$

手工绘制折线

- 当ω很小时，低频段渐近线可以用 0dB线来表示
- 高频段，对数幅频曲线可以近似为

$$-20\lg\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}$$
$$\approx -20\lg(\omega^2T^2)=-40\lg(\omega T)=-40\lg\omega-40\lg T$$



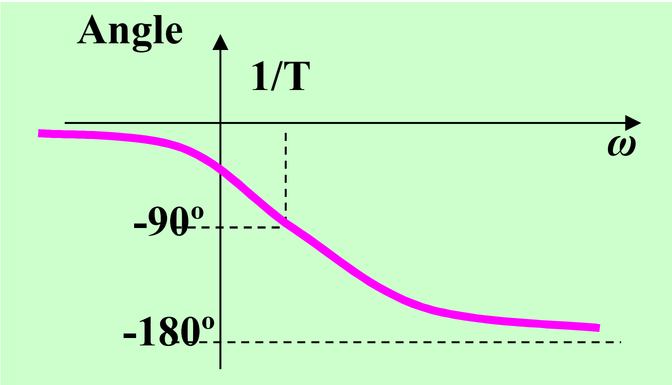
高频段的渐近线是一条经过转折频率$\omega_{cf}=1/T$，斜率为–40dB/dec的斜线

振荡环节

$$\angle\left[1+j2\zeta\omega T+(j\omega T)^2\right]^{-1}=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}=\begin{cases}-\tan^{-1}\dfrac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2} & \omega\le 1/T\\ -\left[180^\circ-\tan^{-1}\dfrac{2\zeta\omega T}{\omega^2T^2-1}\right] & \omega\ge 1/T\end{cases}$$

对数相频曲线:

- 频率为0时，相角为 0º $\angle[1]^{-1}=0$
- 转折频率1/T处，相角为 –90º $\angle[j2\zeta]^{-1}=-90^\circ$
- 频率为∞时，相角为-180º

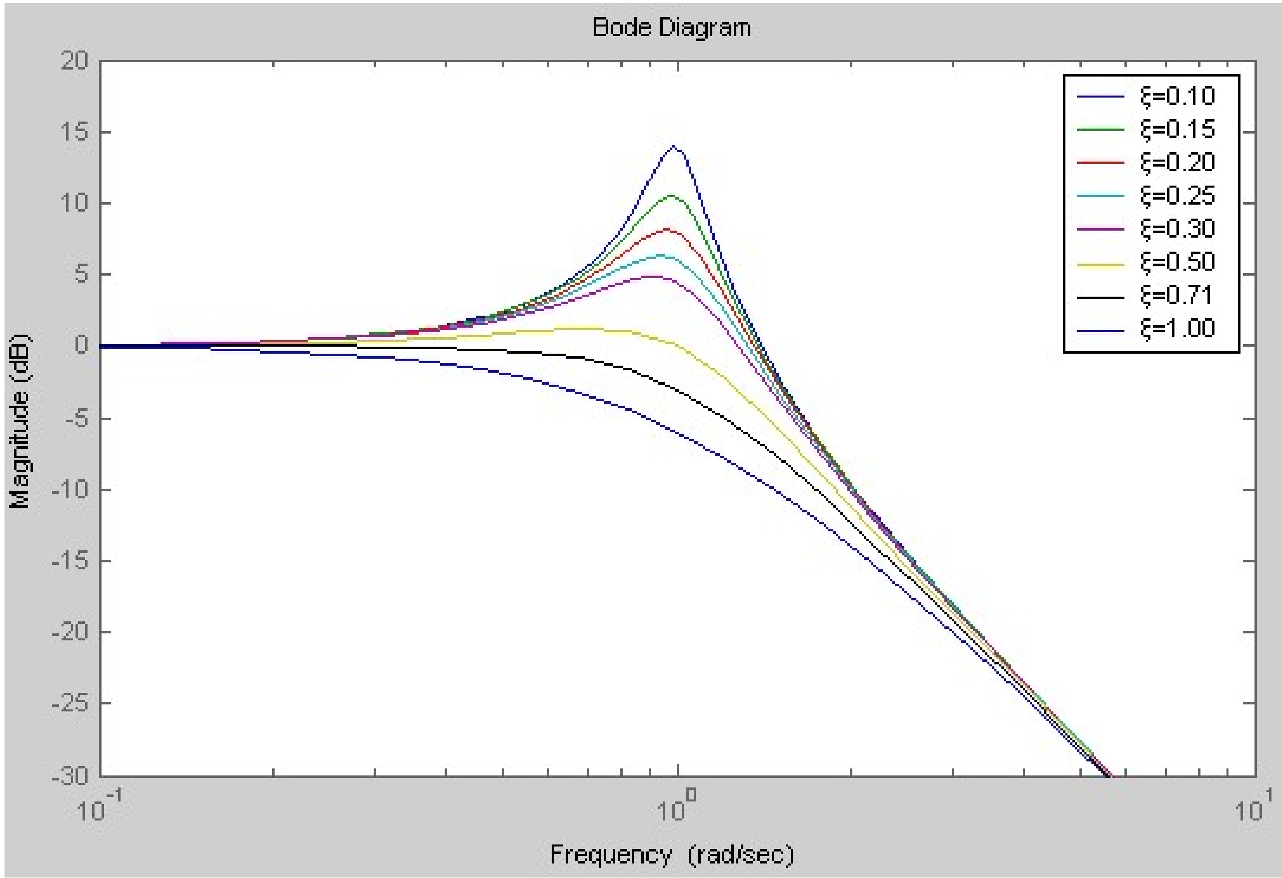


振荡环节

$$\left[1+j2\zeta\omega T+\left(j\omega T\right)^2\right]^{-1}$$

一组振荡环节（T=1，1>ζ>0）的对数幅频曲线

对数幅频曲线



当ζ小于某个值时，对数幅频曲线在ω= 1/T附近出现大于0dB的峰值

在ω=1/T附近出现**共振**的条件之一：对数幅频曲线峰值大于 0 dB

振荡环节

振荡环节：0<ζ<1

由方程 $$Lm\left[1+j2\zeta\omega T+\left(j\omega T\right)^2\right]^{-1}=-20\log\left[\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left|G(j\omega)\right|=\frac{-\left[-2\omega T^2\left(1-\omega^2T^2\right)+4\zeta^2\omega T^2\right]}{\left[\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\zeta^2\omega^2T^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$-2\omega T^2\left(1-\omega^2T^2\right)+4\zeta^2\omega T^2=0$$

$$-\left(1-\omega^2T^2\right)+2\zeta^2=0$$

$$\omega^2=\frac{1-2\zeta^2}{T^2}$$

当$0<\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$时

有$\omega>0$的解，即

谐振频率$\omega_r=\dfrac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{T}=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

谐振峰值$M_r=\left|G(j\omega_m)\right|=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ （放大倍数）

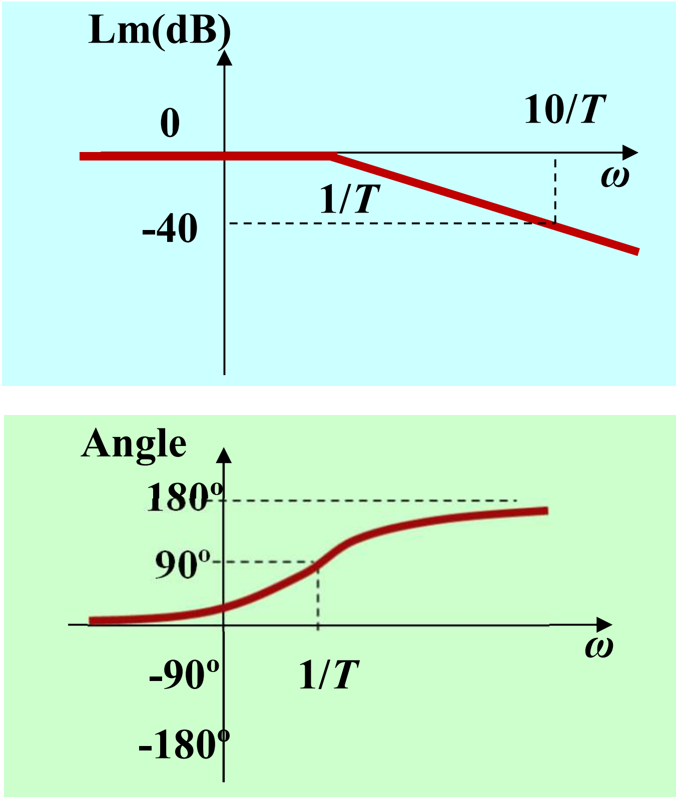
M_r和ω_r都是ζ的减函数

振荡环节

振荡环节 $\dfrac{1}{T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1}$ $\quad -1<\zeta<0, T>0$

幅频特性同1>ζ>0

相频特性与1>ζ>0反号（关于0度线对称）



-1<ζ<0的震荡环节不稳定

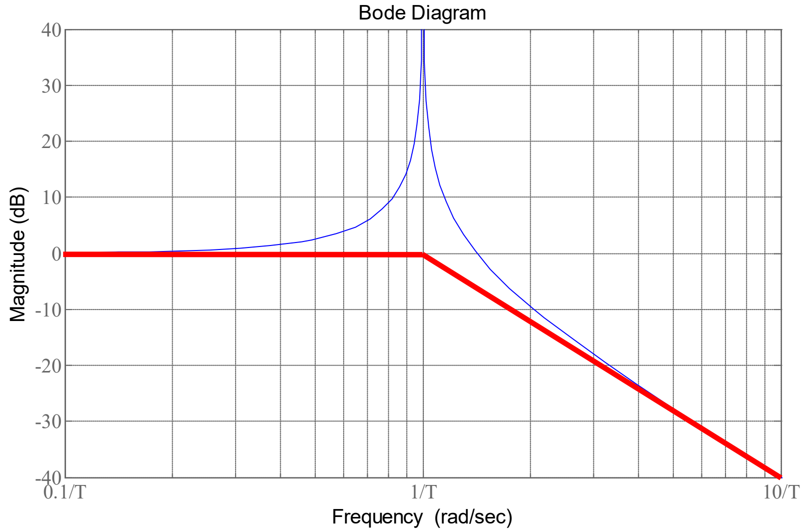
谐振频率及谐振峰值无实际意义

振荡环节

特殊的振荡环节 $\dfrac{1}{T^2(j\omega)^2+1}$ $T>0$

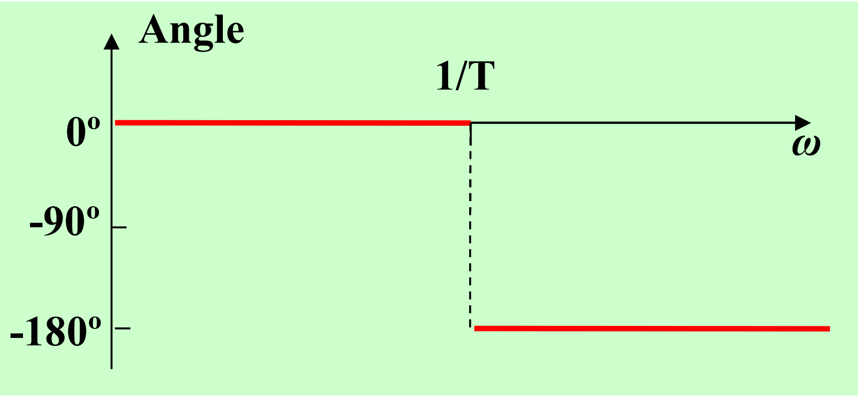
阻尼比$\zeta=0$

$$Lm\left[1+(j\omega T)^2\right]^{-1}=-20\lg\left|1-\omega^2T^2\right|$$



在转折频率$\omega_{cf}=\dfrac{1}{T}$处，$Lm\left[1+(j\omega T)^2\right]^{-1}=+\infty$

$$\angle\left[1+(j\omega T)^2\right]^{-1}=\angle\left[1-\omega^2T^2\right]^{-1}$$
$$=\begin{cases}0^\circ & \omega\le 1/T\\ -180^\circ & \omega>1/T\end{cases}$$



相频特性在转折频率处有跳变

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega^2T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -arctg\dfrac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2} & \omega \le 1/T \\ -\left[180^\circ - arctg\dfrac{2\zeta\omega T}{\omega^2T^2-1}\right] & \omega \ge 1/T \end{cases}$$

振荡环节 $\dfrac{1}{T^2(j\omega)^2 + 2\zeta T(j\omega) + 1}$ $1>\zeta \ge 0, T>0$

若 $\omega=0$， $|G(j0)| = 1$ $\angle G(j0) = 0^\circ$

若 $\omega=1/T=\omega_n$， $|G(j\omega_n)| = 1/(2\zeta)$ $\angle G(j\omega_n) = -90^\circ$

若 $\omega=\infty$， $|G(j\infty)| = 0$ $\angle G(j\infty) = -180^0$

$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}; 0<\zeta\le \sqrt{2}/2$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

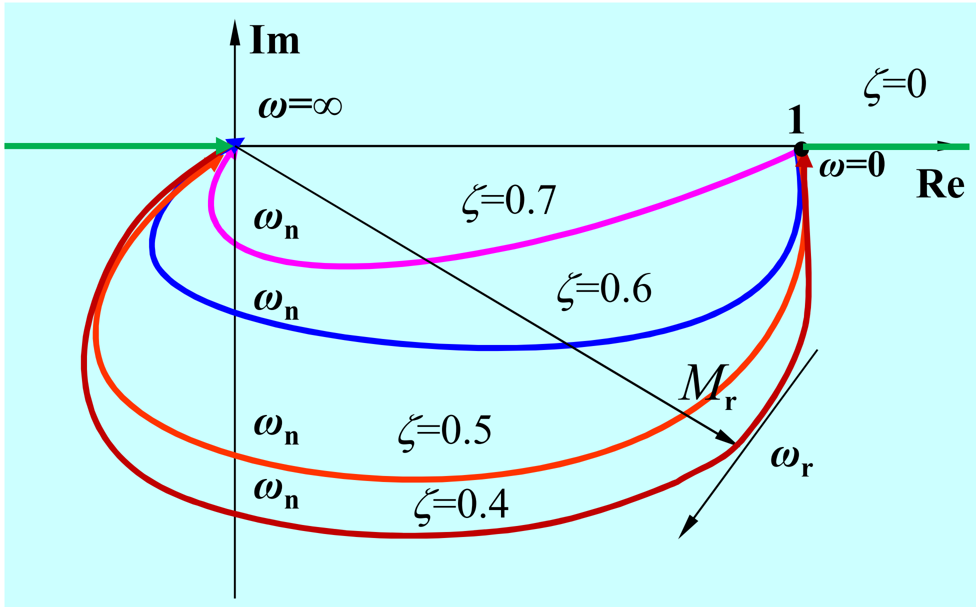
当 $\omega < \omega_r$

$\dfrac{d|G(j\omega)|}{d\omega} > 0$ $|G(j\omega)|$单调增

当 $\omega > \omega_r$

$\dfrac{d|G(j\omega)|}{d\omega} < 0$ $|G(j\omega)|$单调减

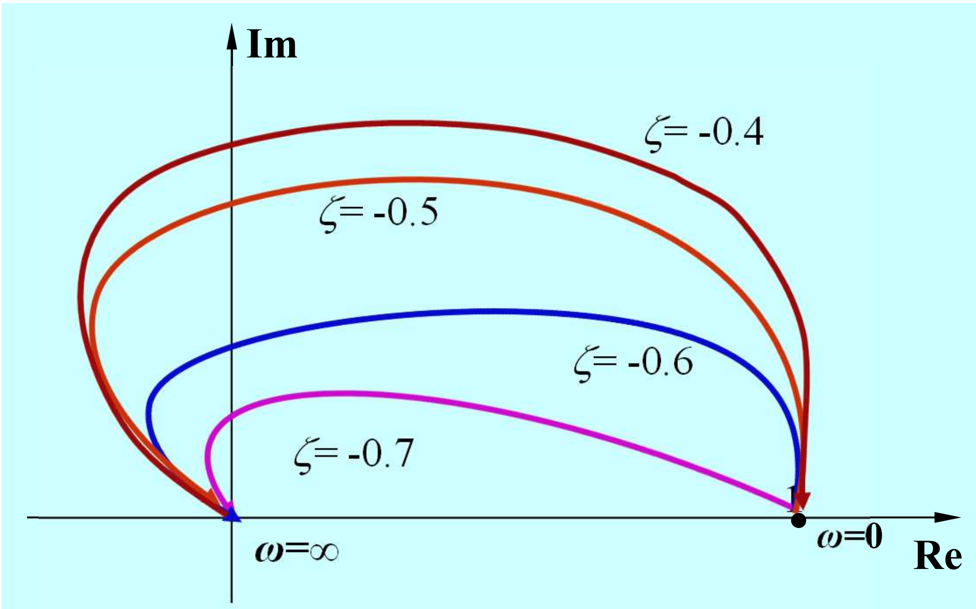
$\sqrt{2}/2 < \zeta$ **|G(jω)|单调减**



振荡环节

振荡环节 $\dfrac{1}{T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1}$　　$-1<\zeta<0, T>0$

幅相曲线与1>ζ>0的振荡环节共轭

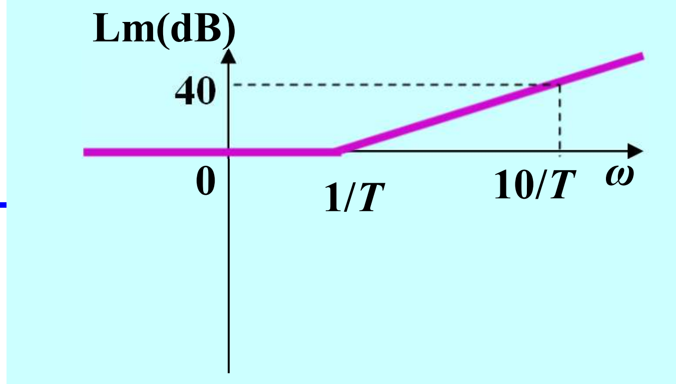


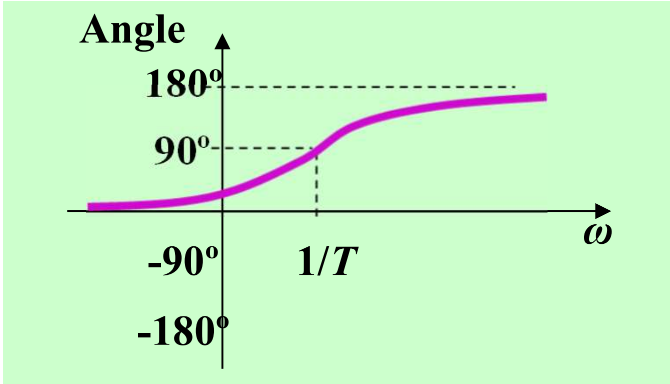
二阶微分环节

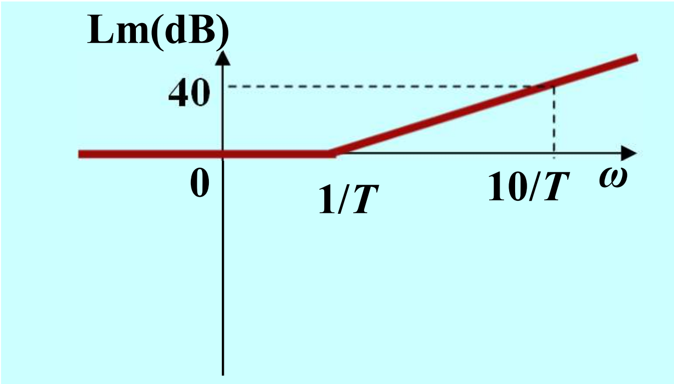
$$\text{二阶微分环节}\ T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$$
$$1>\zeta>0, T>0$$

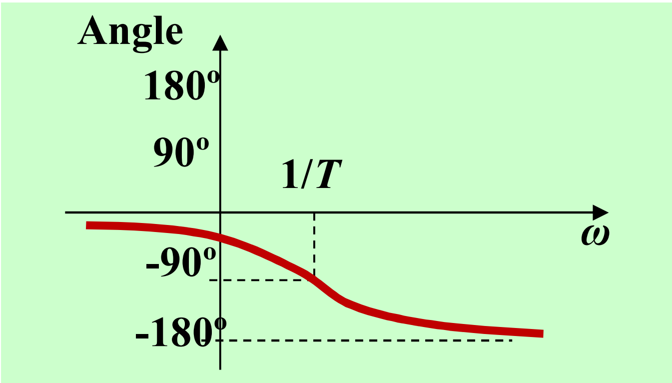
幅频特性与1>ζ>0的振荡环节反号

相频特性与1>ζ>0的振荡环节反号









$$\text{二阶微分环节}\ T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$$
$$-1<\zeta<0, T>0$$

幅频特性同1>ζ>0的二阶微分环节

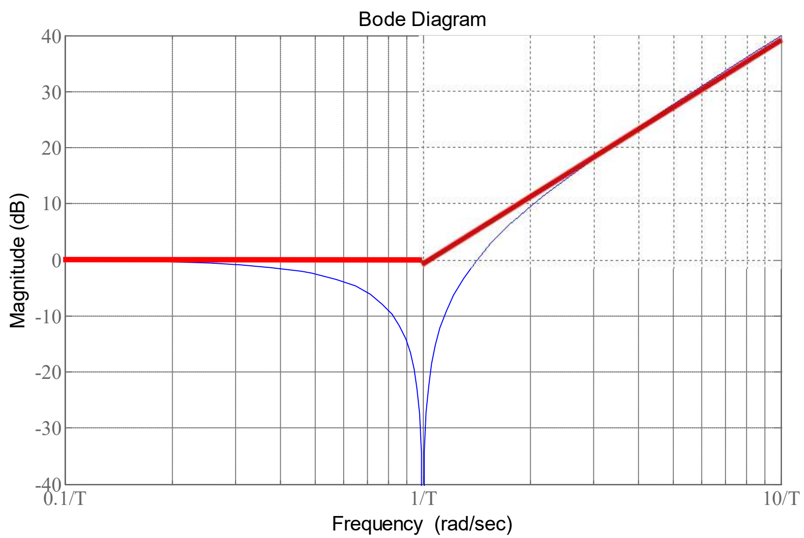
相频特性与1>ζ>0的二阶微分环节反号

二阶微分环节

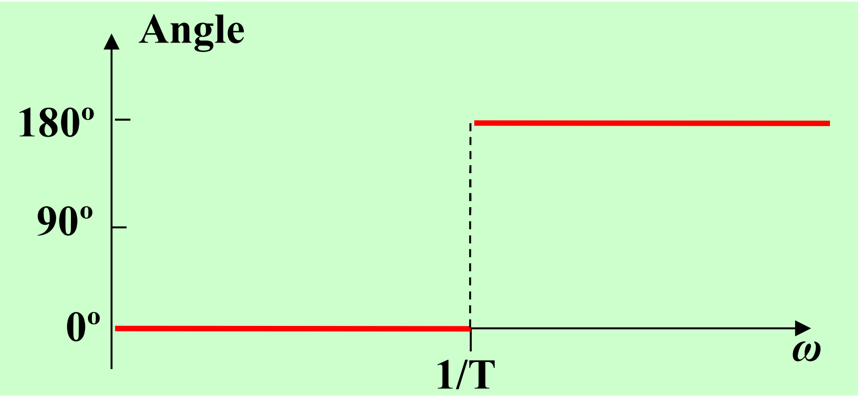
特殊的二阶微分环节 $T^2(j\omega)^2+1 \quad T>0$ 阻尼比$\zeta=0$

幅频特性与ζ=0的振荡环节反号

$$\text{在转折频率}\,\omega_{cf}=\frac{1}{T}\text{处},\left|G(j\omega_{cf})\right|=0$$



相频特性与ζ=0的振荡环节反号



频率特性曲线——二阶/PDD环节

$$\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}$$

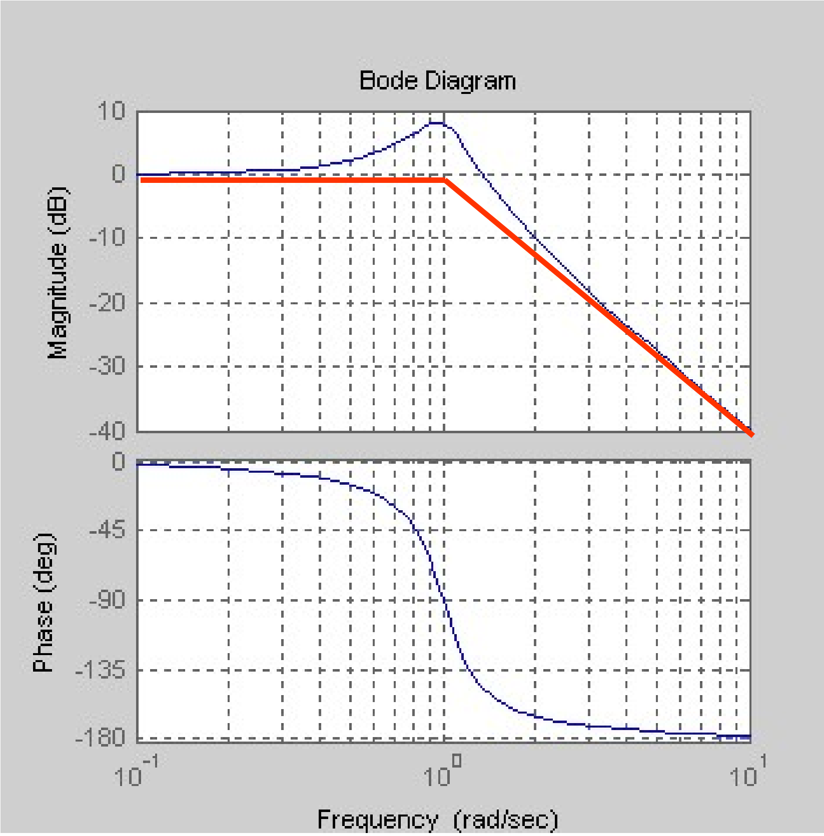
$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$M_r=|G(j\omega_r)|=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

例6-4

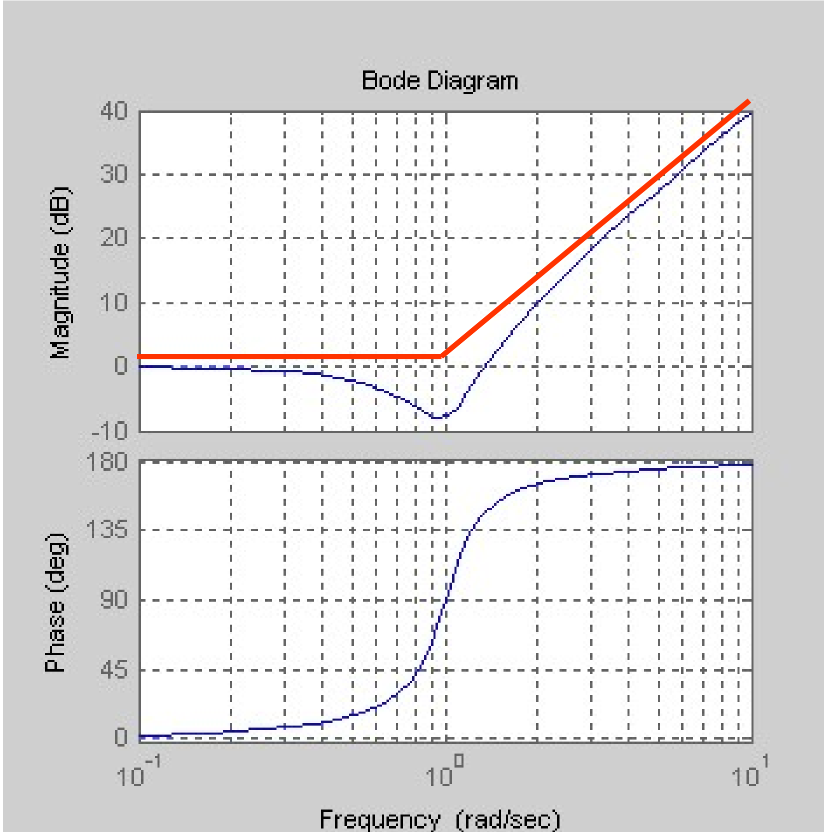
$$G_1(s)=\frac{1}{1+0.4s+s^2}$$

ζ=0.2, ω_n=1



$$G_2(s)=1+0.4s+s^2$$

ζ=0.2, ω_n=1



二阶微分环节

二阶微分环节 $T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

$1>\zeta>0, T>0$

$$T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1=U(\omega)+jV(\omega)$$

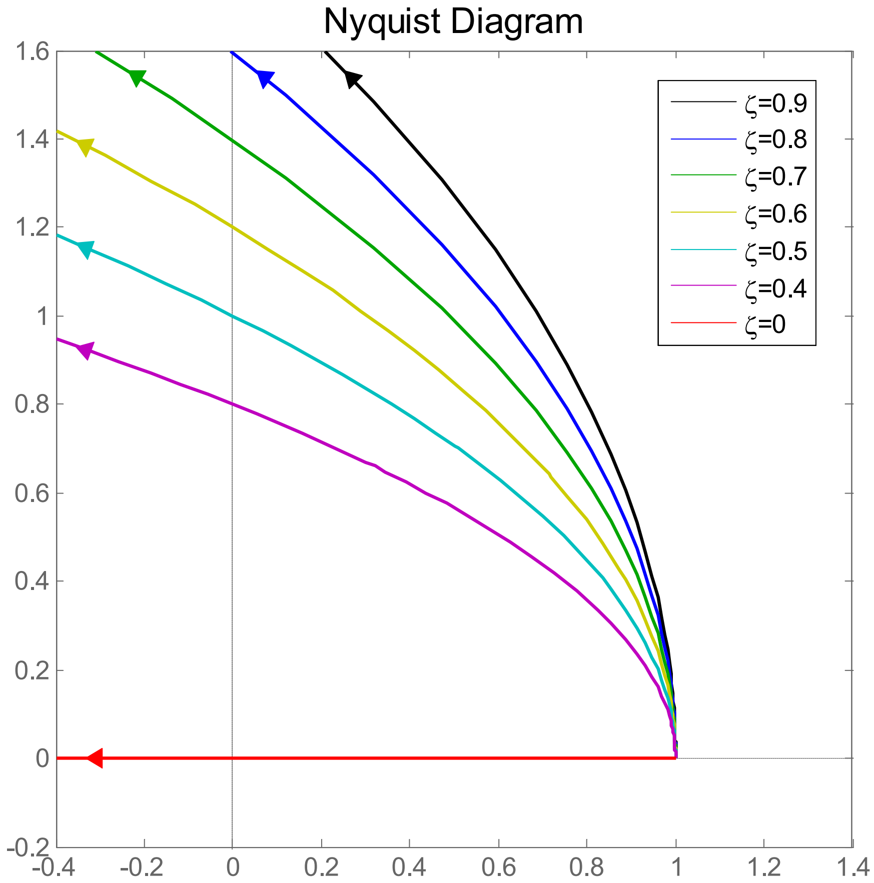
$$U(\omega)=1-\omega^2T^2, V(\omega)=2\zeta\omega T$$

$$\frac{(V(\omega))^2}{4\zeta^2}=1-U(\omega)$$

幅相曲线为抛物线(顶点位于(1,0))的上半支

特殊的二阶微分环节 $T^2(j\omega)+1$， $T>0$

幅相曲线为自(1,0)出发的射线

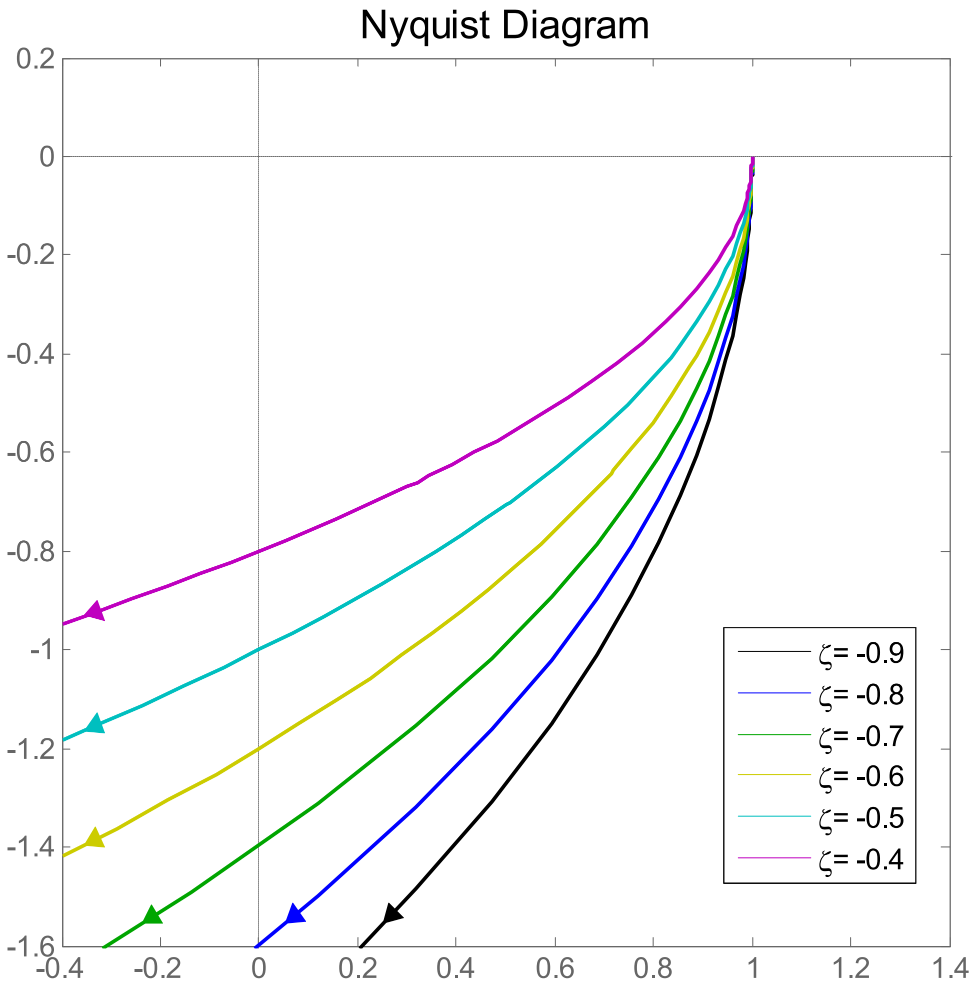


二阶微分环节

二阶微分环节 $T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

$-1<\zeta<0, T>0$

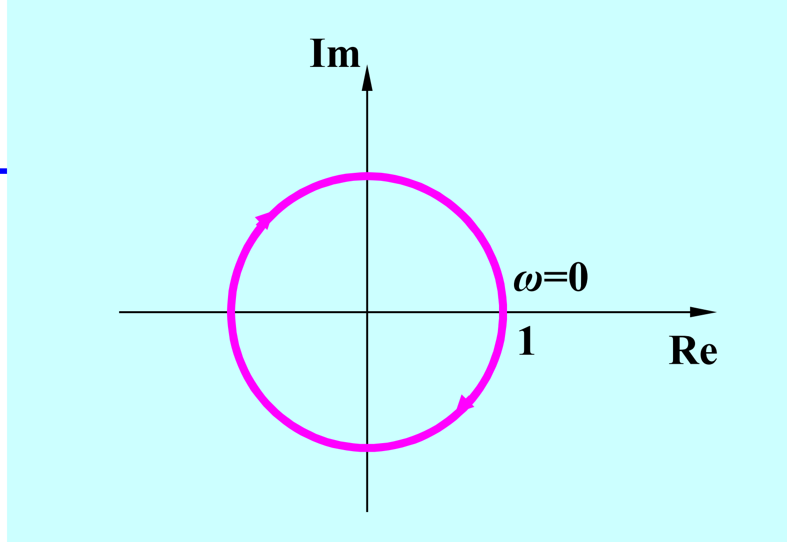
幅相曲线与1>ζ>0的二阶微分环节共轭



幅相曲线为抛物线(顶点位于(1,0))的下半支

纯滞后环节

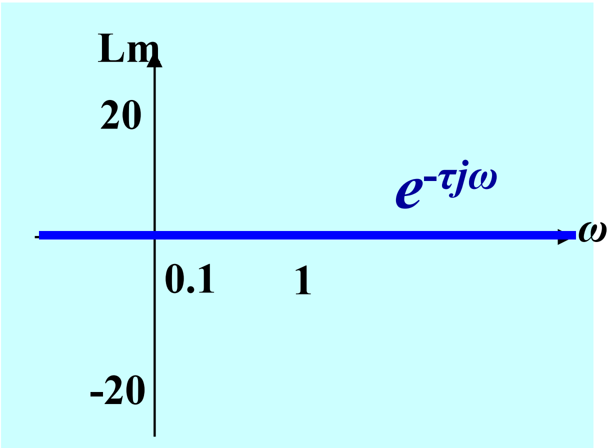
纯滞后环节：$e^{-j\tau\omega}$

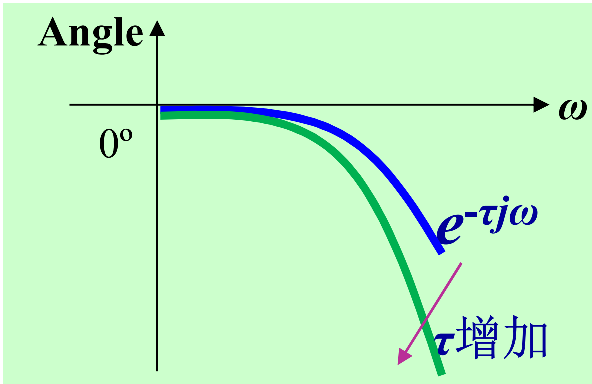


$G(j\omega)$ 的幅值和相位

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\tau\omega(\text{radius}) = -57.3\tau\omega(\text{degree})$$

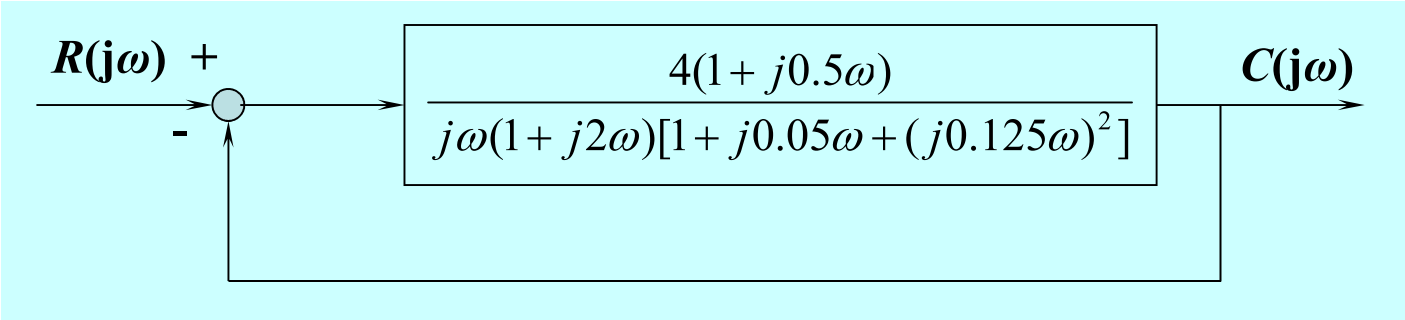




开环对数频率渐近特性曲线

例6-7

反馈系统的方块图：



开环传递函数：

$$G(j\omega)=\frac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$$

典型环节：

$$4 \quad (j\omega)^{-1} \quad (1+j2\omega)^{-1} \quad (1+j0.5\omega) \quad [1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]^{-1}$$

开环对数频率渐近特性曲线

例6-7

开环传递函数 $\dfrac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$

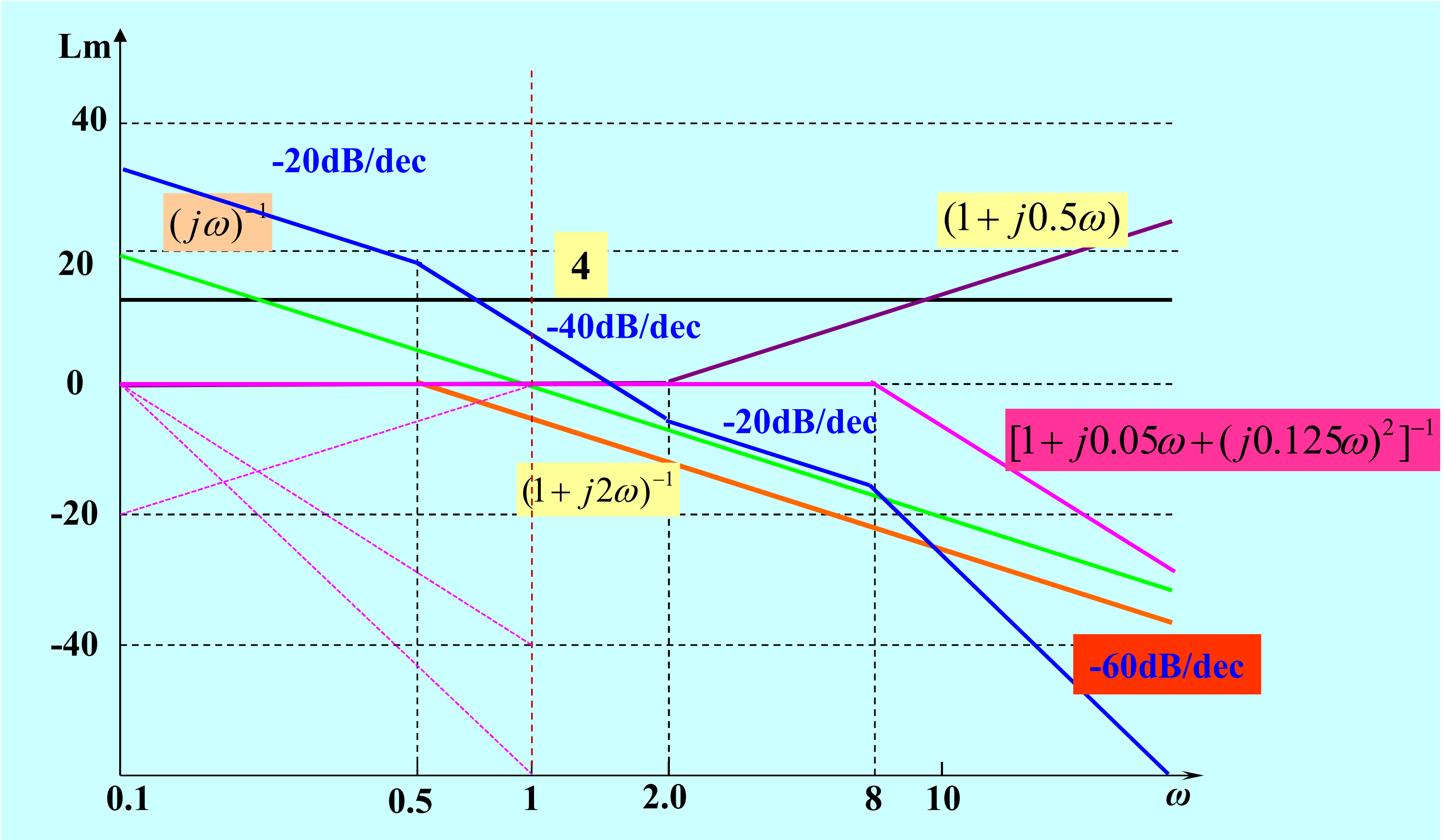
典型环节	交接频率 ω_{cf}	对数幅值	相角特性
4	无	常数12 dB	常数 0^o
$(j\omega)^{-1}$	无	斜率为–20 dB/decade(0dB 当 ω=1)的直线	常数 -90^o
$(1+j2\omega)^{-1}$	ω_1=0.5	当$\omega<\omega_1$（低频段），斜率为0的直线；当$\omega>\omega_1$（高频段），斜率为 -20 dB/decade 的直线	0 到 -90^o变化
$(1+j0.5\omega)$	ω_2=2.0	当$\omega<\omega_2$（低频段），斜率为0的直线；当$\omega>\omega_2$（高频段），斜率为 20 dB/decade 的直线	0 到 90^o变化
$[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]^{-1}$ $\zeta=0.2 \quad \omega_n=8$	ω_3=8.0	当$\omega<\omega_3$（低频段），斜率为0的直线；当$\omega>\omega_3$（高频段），斜率为 -40 dB/decade 的直线	0 到 -180^o变化

$$\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}$$

开环对数频率渐近特性曲线

开环传递函数 $\dfrac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$

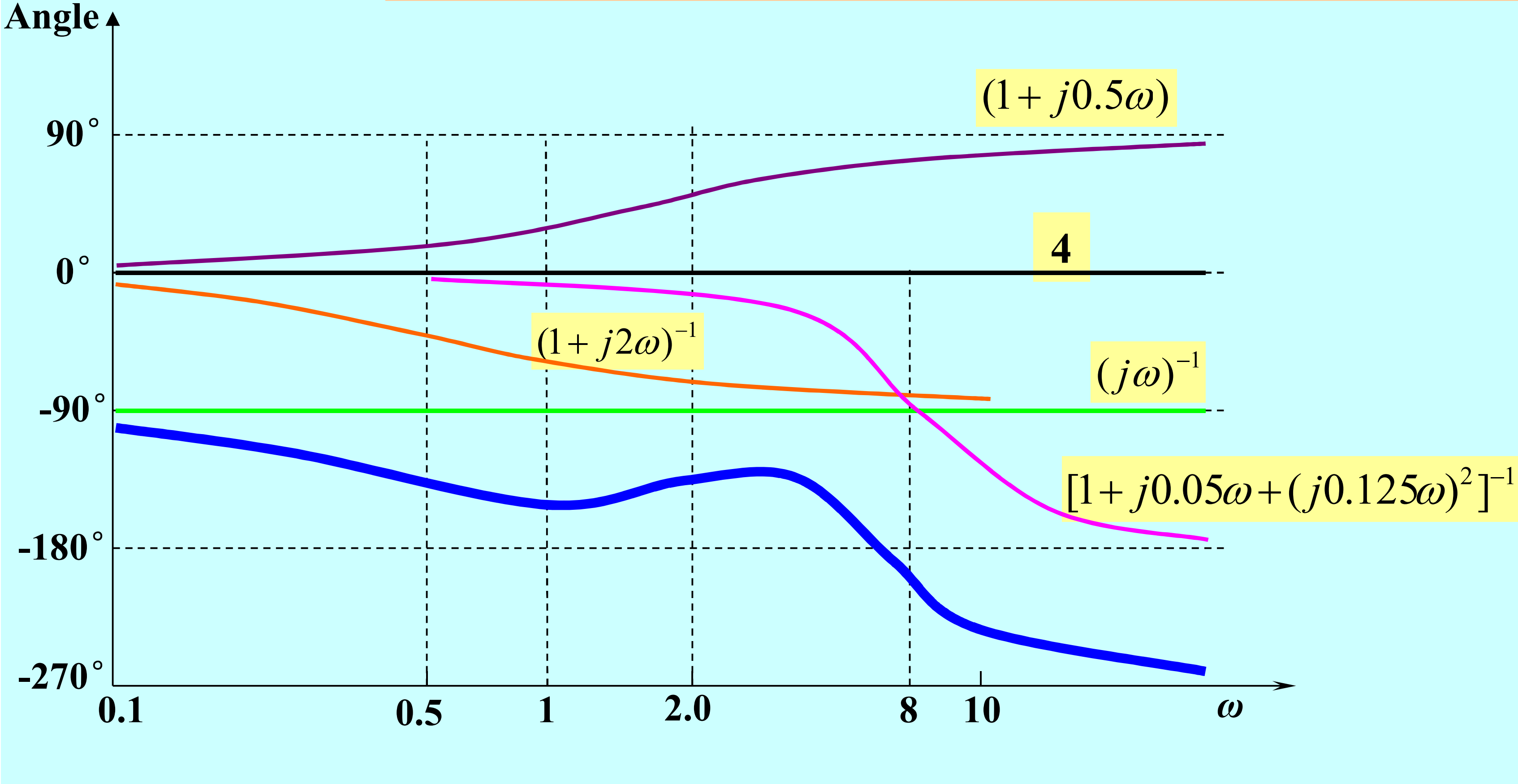
例6-7



开环对数频率渐近特性曲线

例6-7

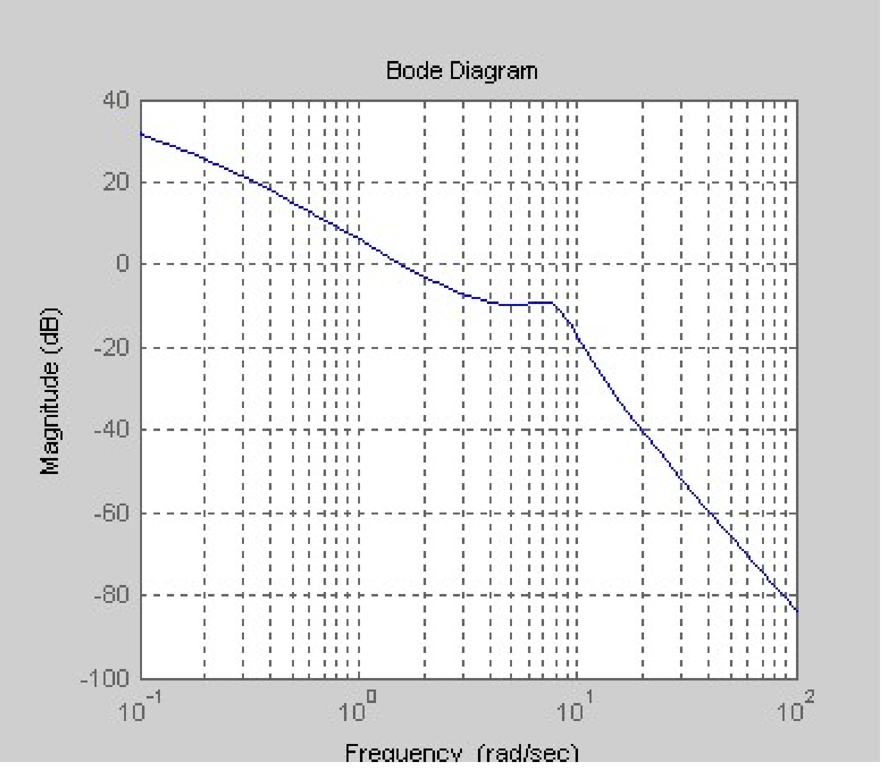
开环传递函数 $\dfrac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$

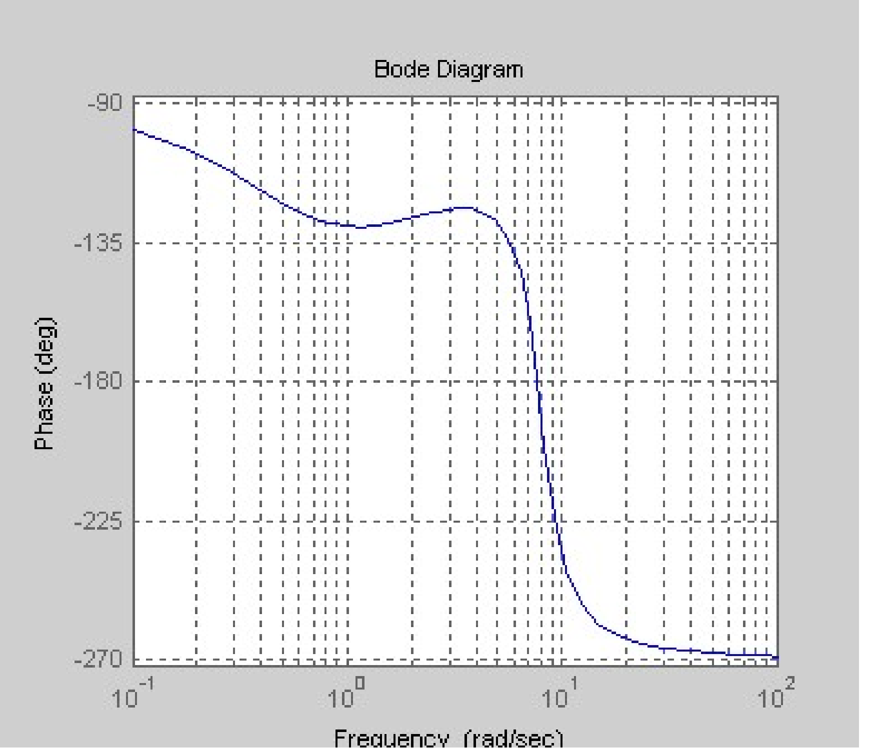


例6-7

开环传递函数 $\dfrac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$

Matlab作图





对数频率渐近特性曲线绘制步骤

1) 进行传递函数典型环节分解；

2) 确定一阶环节、二阶环节的转折频率，将各转折频率标注在半对数坐标图的ω轴上；

3) 绘制低频段渐近特性线：由于一阶环节和二阶环节的对数幅频渐近特性曲线在转折频率前斜率为0dB/dec，在转折频率处斜率发生变化，故在$\omega<\omega_{min}$（最小交接频率）频段内，渐近特性曲线的斜率取决于$K/(j\omega)^m$，因而直线斜率为-20×mdB/dec。为获得低频渐近线，还需要确定该直线上的一点，可以采用以下三种方法：

方法一：在$\omega<\omega_{min}$范围内，任选一点ω_0，计算 $Lm(\omega_0)=20\lg K-20m\lg\omega_0$

方法二：取频率为特定值ω_0=1，则 ；$Lm(1)=20\lg K$

方法三：取Lm(ω_0)=0，则有 $\omega_0=K^{\frac{1}{m}} \quad (m>0)$

过（ω_0，Lm(ω_0)）在$\omega<\omega_{min}$的范围内做斜率为-20×mdB/dec的斜线

对数频率渐近特性曲线绘制步骤

4) 作 $\omega \geq \omega_{min}$频段渐近特性线：在$\omega \geq \omega_{min}$ 频段，系统开环对数幅频渐近特性曲线表现为分段折线。每两个相邻转折频率之间为直线，在每个转折频率点处，斜率发生变化，变化规律取决于该转折频率对应的典型环节的种类。

典型环节类别	典型环节传递函数	交接频率	斜率变化
一阶环节	$1/(1+Ts)$	$1/\|T\|$	-20dB/dec
	$1+Ts$		20dB/dec
二阶环节	$[1+j2\zeta\omega T+(j\omega T)^2]^{-1}$		-40dB/dec
	$[1+j2\zeta\omega T+(j\omega T)^2]$		40dB/dec

对数频率渐近特性曲线绘制步骤

例6-7　开环传递函数：
$$G(j\omega)=\frac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$$

典型环节：$4\quad (1+j0.5\omega)\quad (j\omega)^{-1}\quad (1+j2\omega)^{-1}\quad [1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]^{-1}$

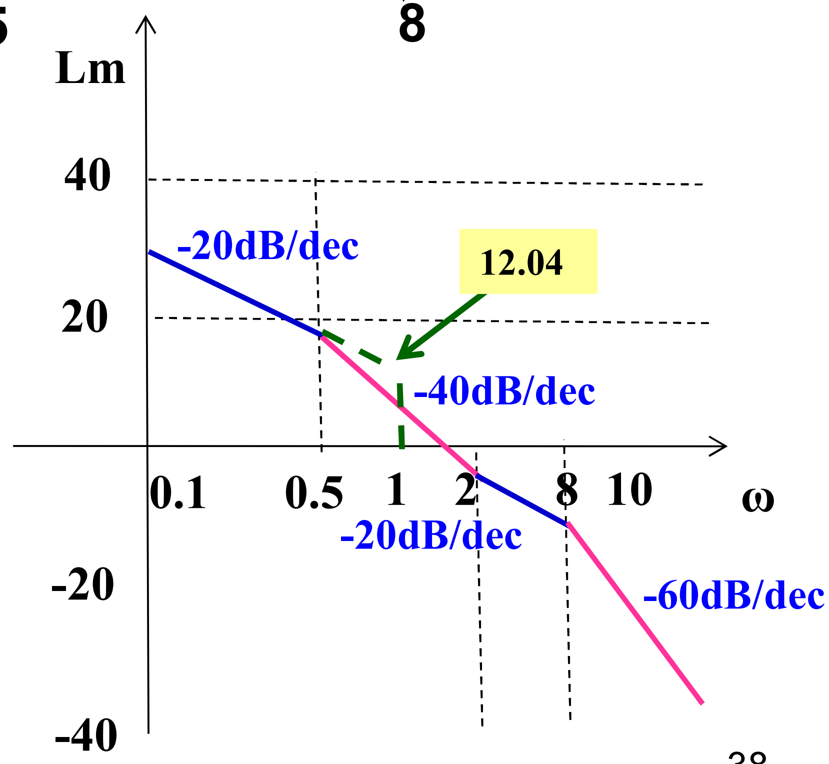
交接频率：2　0.5　8

起始段直线：

斜率为-20dB/dec，

当ω_0=1 时，

Lm(1)=20lgK=20lg4=12.04



对数频率渐近特性曲线绘制步骤

绘制$G(j\omega)$的相频曲线可以采用以下方法来简化:

1) 对于 $(j\omega)^{-m}$ 环节，绘制相角为$(-m)90°$ 的一条直线。

2) 对于 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 环节，确定转折频率处的相角 ±45°， 以及转折频率前后1倍频和10倍频处相角，然后过这些点绘制 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 环节的相频曲线。

3) 对于$[1+j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$环节：

(a) 转折频率$\omega=\omega_n$处的相角±90°

$$Angle\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}$$

(b) 对于不同的 ζ，确定几个频率点的相角。 $\omega=0.707\omega_n$ 点处的相角等于$-\tan^{-1}2.828\zeta$。

对数频率渐近特性曲线绘制步骤

4) 一旦绘制出 $G(j\omega)$的每个环节的相频曲线，通过叠加这些环节的相频曲线，就可以得到$G(j\omega)$ 的相频曲线。

(a) 以 $\lim_{\omega\to 0}\angle G(j\omega)=(-m)90^\circ$ 作为基准线，其中m 表示系统的型别，加/减每一个环节的相角。

(b) 在相频曲线的特殊频率点处，测量每个一阶、二阶环节的相角，叠加到基准线上，采用的频率点的个数取决于对相频曲线精度的要求。

(c) 在 $\omega=\infty$ 时，相角为 90°乘以分子分母的阶次差 [-(n-w)90°]。

最小相位系统

由如下几种基本环节串联组成的系统成为最小相位系统，

K（其中$K>0$），$\frac{1}{s}$或s，$\frac{1}{Ts+1}$（其中$T>0$），$Ts+1$（其中$T>0$）

$\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$（其中$T>0$、$\zeta\geq 0$），$T^2s^2+2\zeta Ts+1$（其中$T>0$、$\zeta\geq 0$）

对于最小相位系统$G(s)$，$\mathrm{Lm}G(j\omega)$与$\angle G(j\omega)$间存在严格确定的关系

对于最小相位系统$G(s)$，如果其对数幅频特性在ω_a附近相当宽的频率段内斜率约为$20k$dB/dec，k为整数，则$\angle G(j\omega_a)\approx 90k^\circ$

工程上对于最小相位系统，可根据对数幅频特性曲线的斜率大致勾画出对数相频特性曲线的草图，而省去绘制准确对数相频特性曲线的步骤

非最小相位系统无此优势

最小相位系统没有零点和极点在右半开平面

最小相位系统的增益为正

最小相位系统不含纯滞后环节

最小相位系统

假设两个系统$G_1(s)$和$G_2(s)$稳定或临界稳定，且最小相位系统$G_1(s)$与非最小相位系统$G_2(s)$的幅频特性相同，则$G_1(j\omega)$的相位滞后小于$G_2(j\omega)$

例：$G_1(s)=\dfrac{2(5s+1)(20s+1)}{s(s+1)(100s+1)}, G_1(s)=\dfrac{2(5s+1)(20s+1)}{s(s+1)(100s+1)},$

最小相位系统

$$Sys.1: G_1(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$Sys.2: G_2(s)=\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

易知，两个系统的幅频率特性相同，区别在于相频特性。

两个系统的相频特性分别为 $\varphi_{1b}=\pi-\varphi_1$ $\varphi_{2b}=\pi-\varphi_2$

$$\Psi_1(\omega)=(\varphi_1+\varphi_2)-(\theta_1+\theta_2)$$

$$\Psi_2(\omega)=(\pi-\varphi_1+\pi-\varphi_2)-(\theta_1+\theta_2)$$

两个系统的相位差为 $\Psi_2(\omega)-\Psi_1(\omega)=2\pi-2(\varphi_1+\varphi_2)$

当ω由0增加到∞时，上式中的（$\varphi_1+\varphi_2$）从0增加到π，满足关系（$\varphi_1+\varphi_2)\le\pi$，所以对于任意频率$\omega$，有 $\Psi_2(\omega)\ge\Psi_1(\omega)$

因此有结论：对数幅频特性完全相同的系统中，在任意频率上，最小相位系统的相角是最小的。

Thanks!