



第六章 频率特性分析法

CHAPTER 6 Frequency Response





第六章主要内容



- ✓ 概述
- ✓ **Bode** 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ **Nyquist**稳定性判据
- ✓ 基于频率特性的补偿器设计





拉普拉斯变换

s 表示系统模态

能用于求解全响应

不方便处理纯滞后

不方便处理测量噪声

可用于控制系统的分析与综合

傅里叶变换

ω 表示圆频率

不能用于求全响应

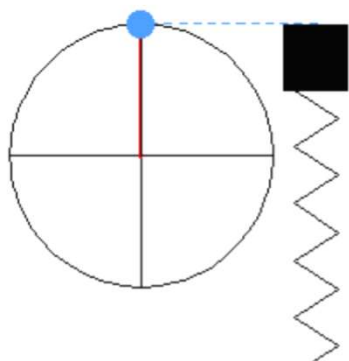
方便处理纯滞后

方便处理测量噪声（滤波）

可用于控制系统的分析与综合



三角函数（波）与匀速圆周运动



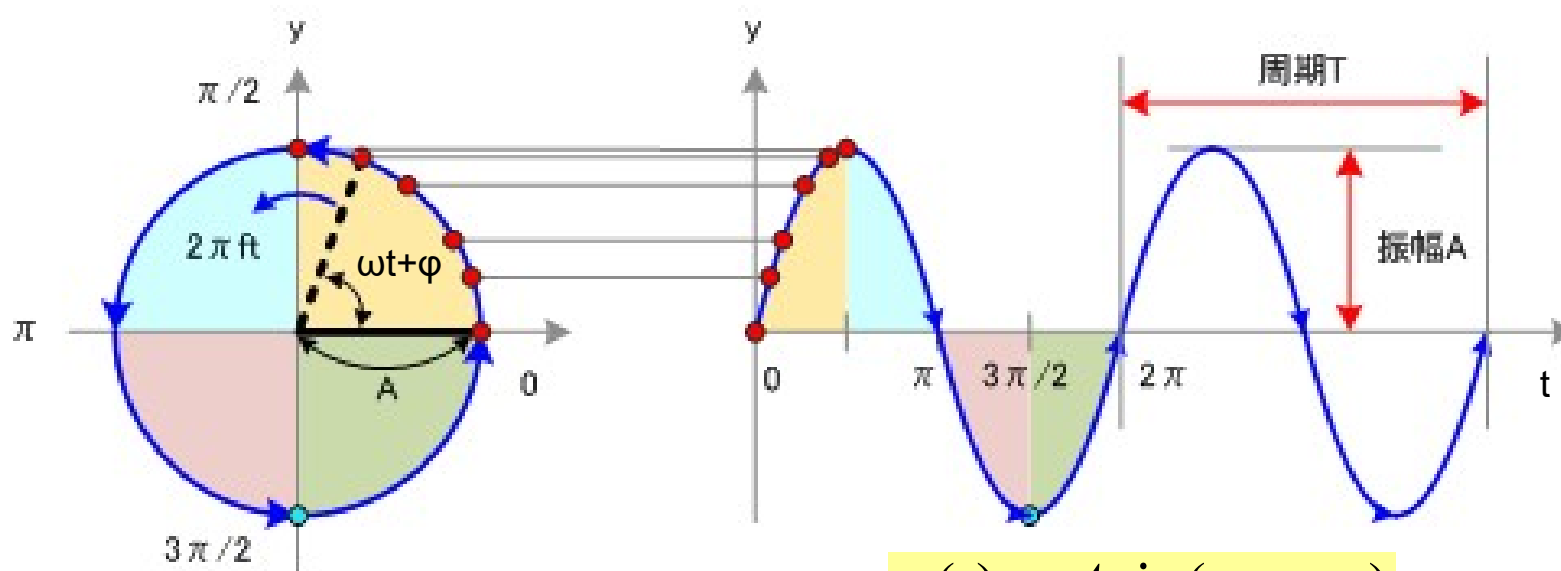
A : 波的振幅, 圆的半径

ω : 圆频率, 圆周运动的角速度 (rad/s)

t : 时间 (s)

φ : 圆周运动的初始角

$\omega = 2\pi / T$, T 是圆周运动的周期



$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$



傅里叶级数

给定一个周期为 T 的周期信号 $f(t)$,若 $f(t)$ 满足狄利赫里条件, 则

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

其中, $\omega_0 = 2\pi / T$

$$\text{傅立叶系数 } a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, b_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \\ &= \frac{a_0}{2} + \underbrace{c_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1)}_{\text{一次谐波或基波}} + \underbrace{c_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2)}_{\text{二次谐波}} + \cdots \end{aligned}$$

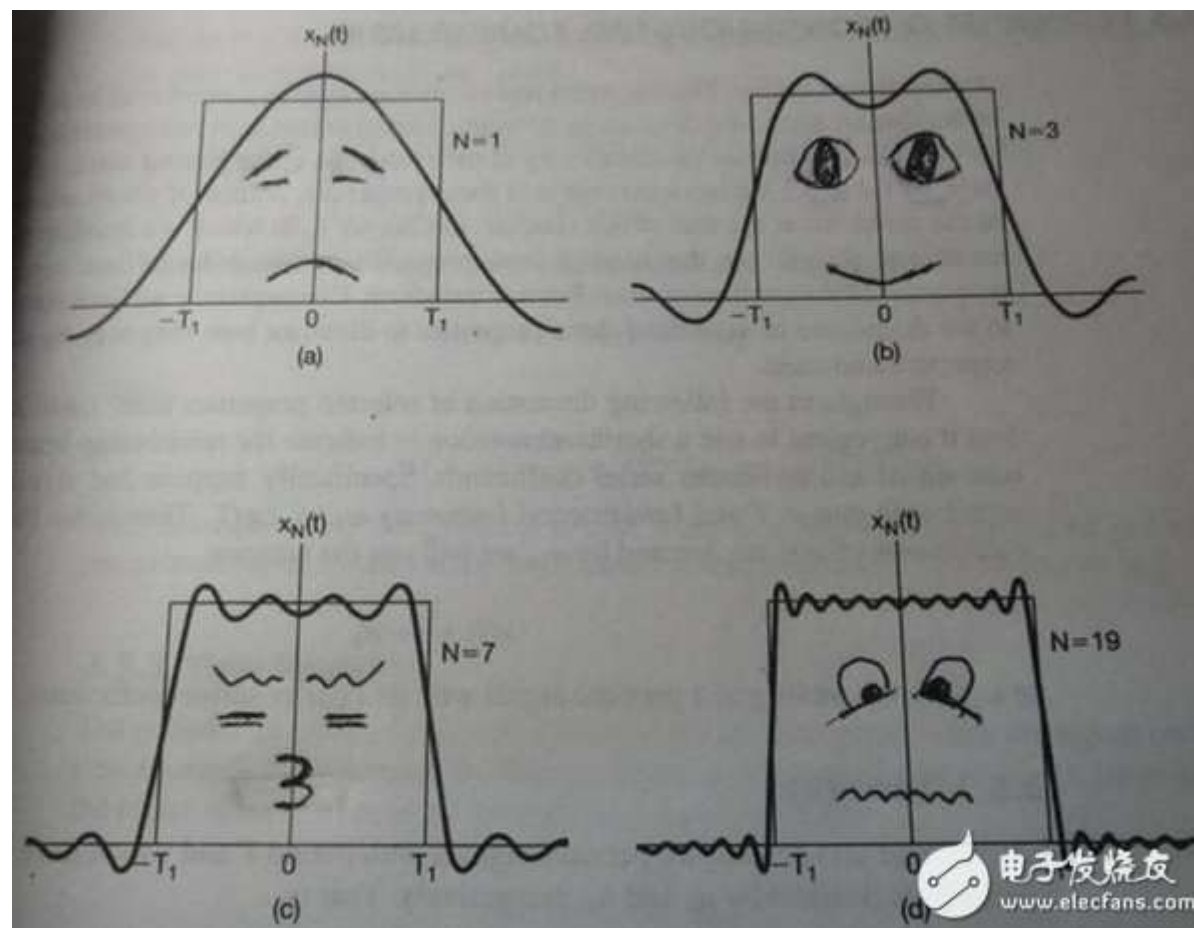
直流分量

一次谐波或基波

二次谐波

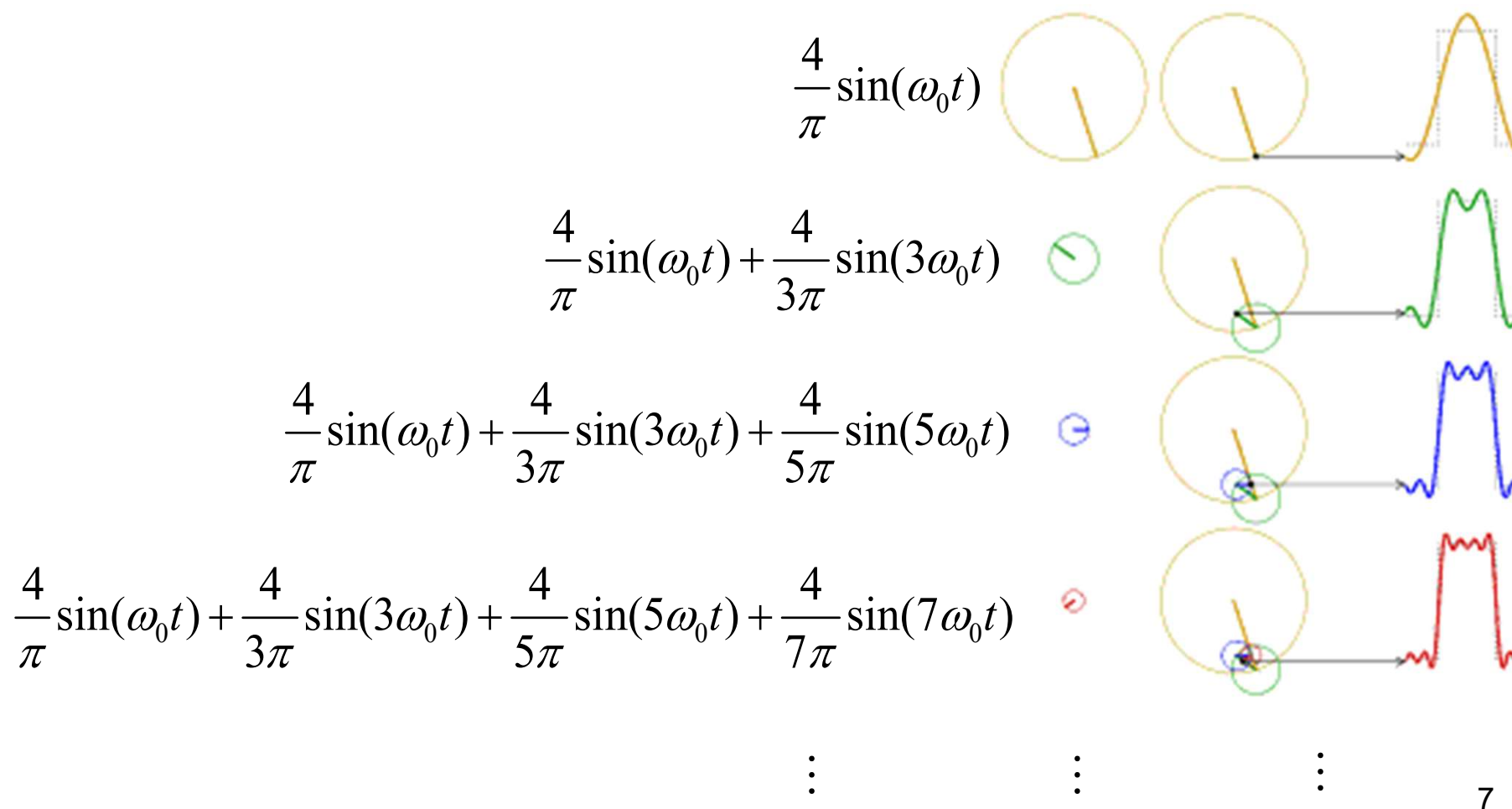


傅里叶级数





例：基于傅立叶级数逼近周期性方波信号

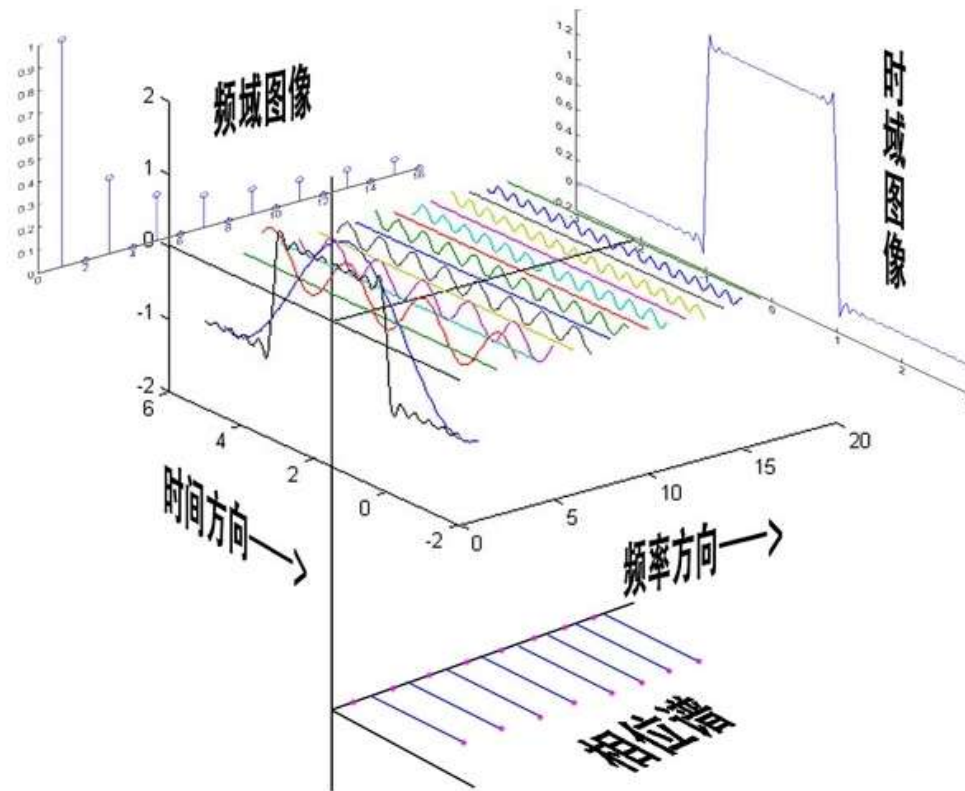
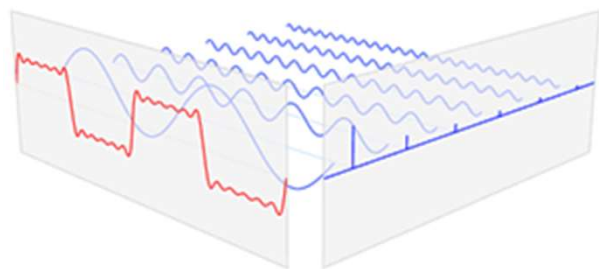
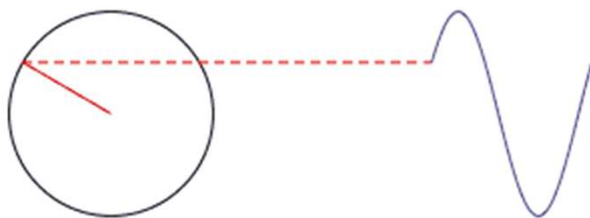




信号：从时域到频

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \delta(\omega - n\omega_0) \quad n \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

δ 为单位脉冲函数



利用傅立叶级数，时域上的周期信号 $f(t)$ 可以在频域上用 $\hat{f}(\omega)$ 描述（离散频谱）

当 $T \rightarrow \infty$ 时，傅立叶级数 \rightarrow 傅立叶变换

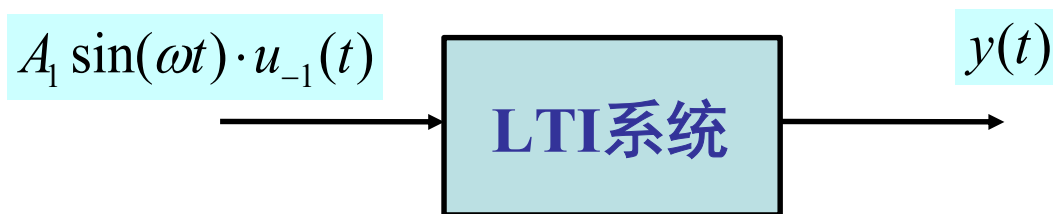
时域上满足条件的非周期信号 $f(t)$ 可以在频域上用 $\hat{f}(\omega)$ 描述（连续频谱）



典型输入的自由响应及强迫响应



正弦输入下LTI系统的全响应、自由响应和强迫响应



某典型输入 $u(t)$ 和一个LTI系统 $G(s)$ 满足下列2个模态不重叠条件之一：

1) $u(t) = A_1 \sin \omega_0 t \cdot u_{-1}(t)$, $G(s)$ 不含 $\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$

2) $u(t)$ 为阶跃、斜坡或抛物线输入, $G(s)$ 不含 $\frac{1}{s}$

任给初始条件, 对 $G(s)$ 输入 $u(t)$, 可得到相应的全响应 $y(t)$, 则

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$$

$y_{tr}(t)$: $y(t)$ 中由 $G(s)$ 模态组成的部分, 称为自由响应

$y_{ss}(t)$: $y(t)$ 中由非 $G(s)$ 模态组成的部分, 称为强迫响应



典型输入的自由响应及强迫响应

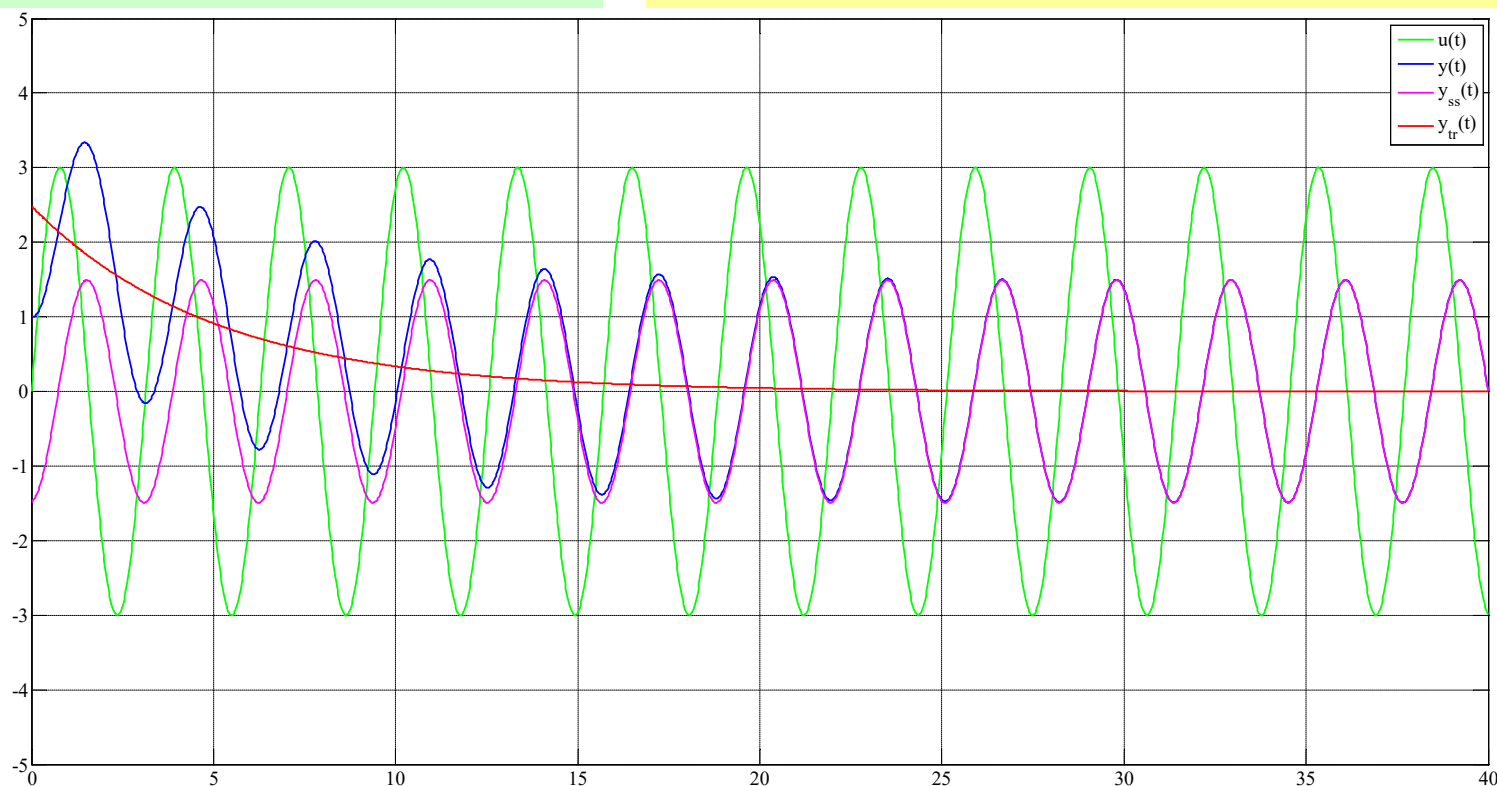


例： $u(t) = 3 \sin 2t \cdot u_{-1}(t)$, $G(s) = \frac{1}{s + 0.2}$, $y(0^-) = 1$

计算可得 全响应 $y(t) = 2.4851e^{-0.2t} + 1.4926 \sin(2t - 1.4711)$

自由响应 $y_{tr}(t) = 2.4851e^{-0.2t} \cdot u_{-1}(t)$

强迫响应 $y_{ss}(t) = 1.4926 \sin(2t - 1.4711) \cdot u_{-1}(t)$



强迫响应是与输入频率相同的正弦波，但幅值和相位与输入不同



典型输入的自由响应及强迫响应

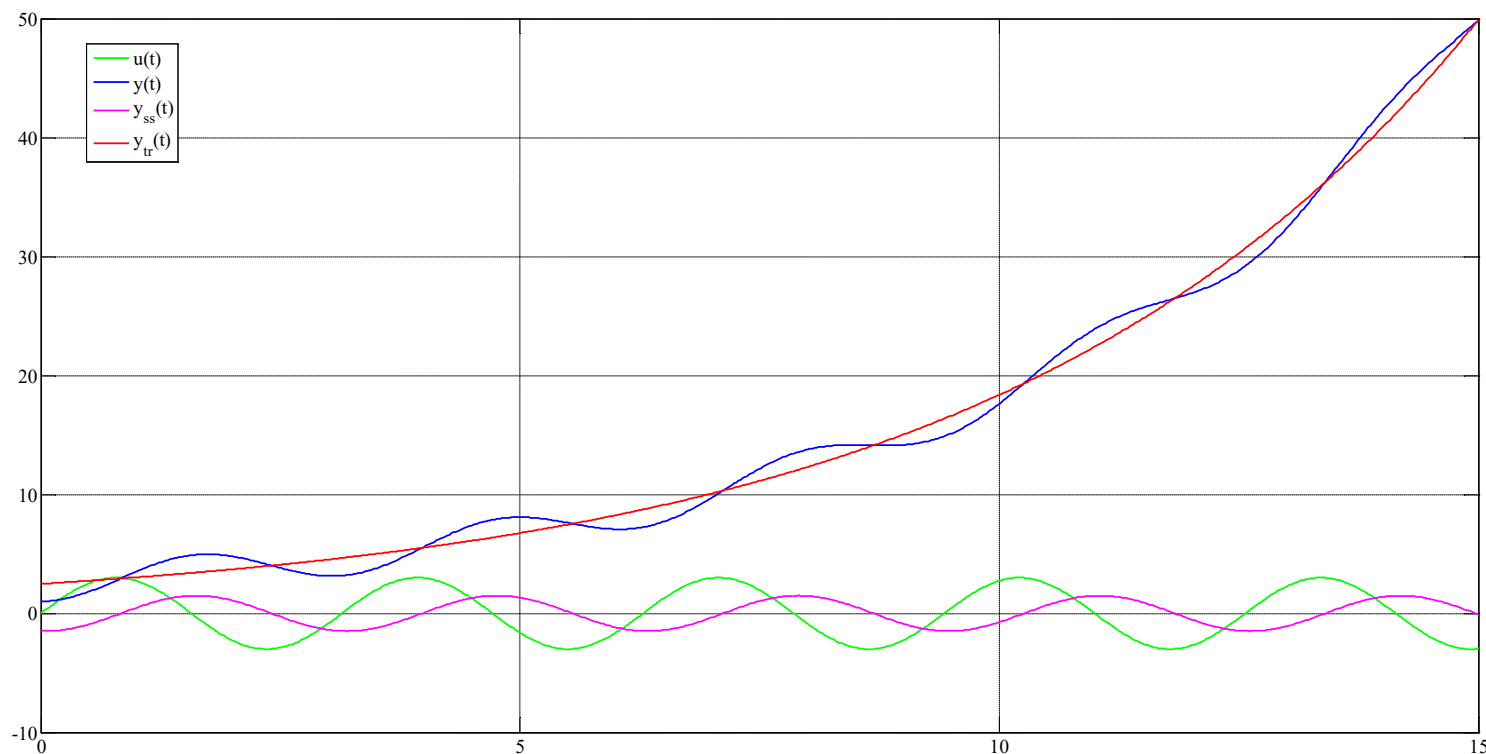


例： $u(t) = 3 \sin 2t \cdot u_{-1}(t)$, $G(s) = \frac{1}{s-0.2}$, $y(0^-) = 1$

计算可得 全响应 $y(t) = 2.4851e^{0.2t} + 1.4926 \sin(2t - 1.6705)$

自由响应 $y_{tr}(t) = 2.4851e^{0.2t} \cdot u_{-1}(t)$

强迫响应 $y_{ss}(t) = 1.4926 \sin(2t - 1.6705) \cdot u_{-1}(t)$



强迫响应是与输入频率相同的正弦波，但幅值和相位与输入不同



典型输入的自由响应及强迫响应



$$A_1 \sin(\omega t) \cdot u_{-1}(t)$$



$$y_{ss}(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \cdot u_{-1}(t)$$

只需关注 $\frac{A_2}{A_1}$ 和 φ , 可以证明: $\frac{A_2}{A_1}$ 和 φ 均为 ω 的函数, 即 $\frac{A_2}{A_1} = M(\omega), \varphi = \phi(\omega)$

LTI系统输入正弦信号, 强迫响应与输入的幅值比称为系统的**幅频特性** $M(\omega)$
强迫响应与输入的相角差称为系统的**相频特性** $\phi(\omega)$
复数值函数 $M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ 称为系统的**频率特性**

对于稳定的LTI系统, 可以用实验法测得 $M(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$

对于LTI系统 (无论是否稳定), 可以用分析法得到频率特性, 即

$$M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$



概述——频率特性

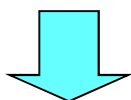


考虑系统

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

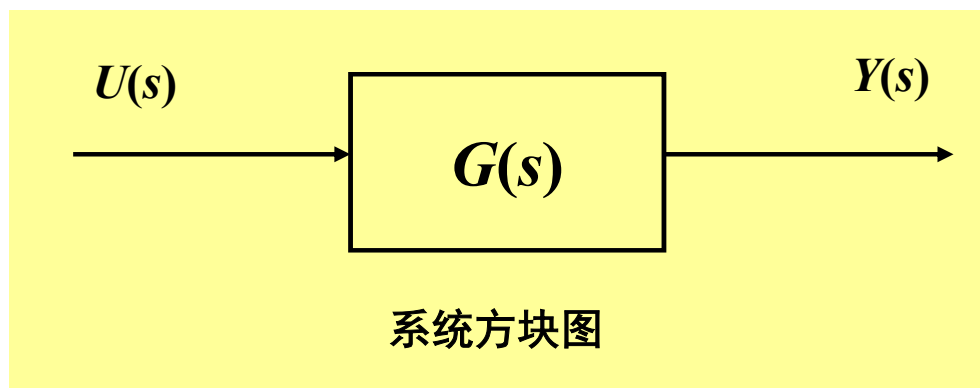
若输入为

$$u(t) = A_1 \sin \omega t$$



LT

$$U(s) = \frac{A_1 \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1 \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$



$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} \cdot \frac{A_1 \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \\ &= \frac{b}{s + j\omega} + \frac{\bar{b}}{s - j\omega} + \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - s_n} \end{aligned}$$



概述——频率特性



$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b}{s+j\omega} + \frac{\bar{b}}{s-j\omega} + \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \dots + \frac{a_n}{s-s_n}$$

$$y(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t} + a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + \dots + a_ne^{s_nt}$$

$$y_{ss}(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t}$$

其中 b 可以通过留数定理或其他方法获得

$$b = G(s) \frac{A_1 \omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{G(-j\omega)A_1}{2j}$$

$$\bar{b} = G(s) \frac{A_1 \omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)A_1}{2j}$$

由于 $G(s)$ 是实系数有理分式（或带一个纯滞后）， $G(-j\omega)$ 与 $G(j\omega)$ 共轭

$$b = -\frac{|G(j\omega)|A_1}{2j} e^{-j\angle G(j\omega)}$$

$$\bar{b} = \frac{|G(j\omega)|A_1}{2j} e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$y_{ss}(t) = -\frac{|G(j\omega)|A_1}{2j} e^{-j\angle G(j\omega)} e^{-j\omega t} + \frac{|G(j\omega)|A_1}{2j} e^{j\angle G(j\omega)} e^{j\omega t}$$



概述——频率特性



$$y_{ss}(t) = -\frac{|G(j\omega)| A_1}{2j} e^{-j\angle G(j\omega)} e^{-j\omega t} + \frac{|G(j\omega)| A_1}{2j} e^{j\angle G(j\omega)} e^{j\omega t}$$

$$= \frac{|G(j\omega)| A_1}{2j} (e^{j(\angle G(j\omega) + \omega t)} - e^{j(-\angle G(j\omega) - \omega t)})$$

$$= \frac{|G(j\omega)| A_1}{2j} 2j \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$$= \underbrace{|G(j\omega)| A_1}_{A_2} \sin(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_{\Phi(\omega)})$$

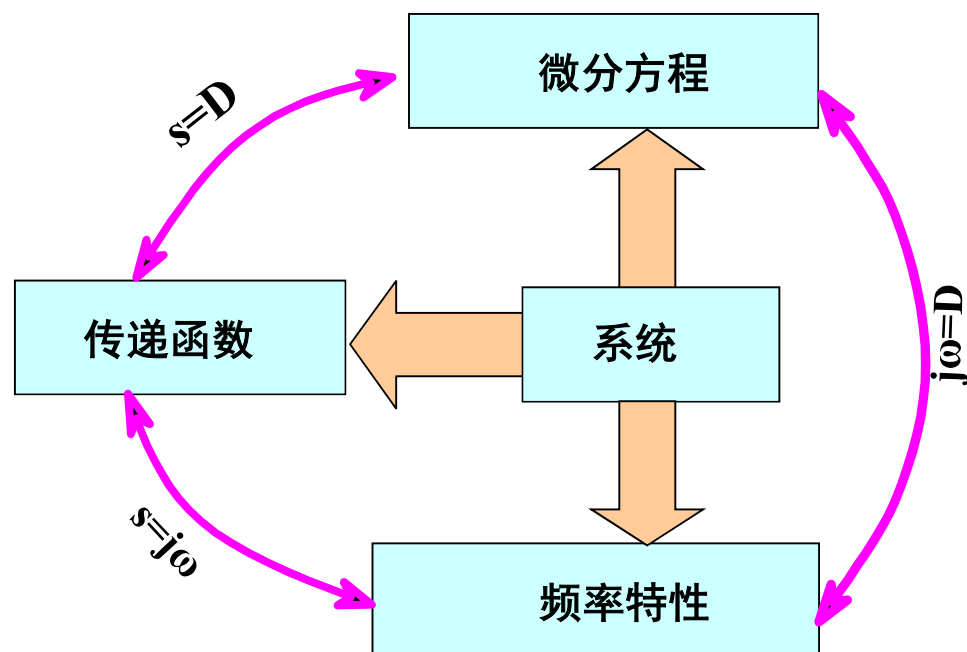
A_2

$\Phi(\omega)$

$$M(\omega) = \frac{A_2}{A_1} = |G(j\omega)|, \phi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

$$M(\omega) e^{j\phi(\omega)} = G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

当系统 $G(s)$ 的输入为一频率 ω 的正弦信号时，强迫响应为同频率的正弦信号，其幅值增大 $|G(j\omega)|$ ，相位滞后 $\angle G(j\omega)$





概述——频率特性



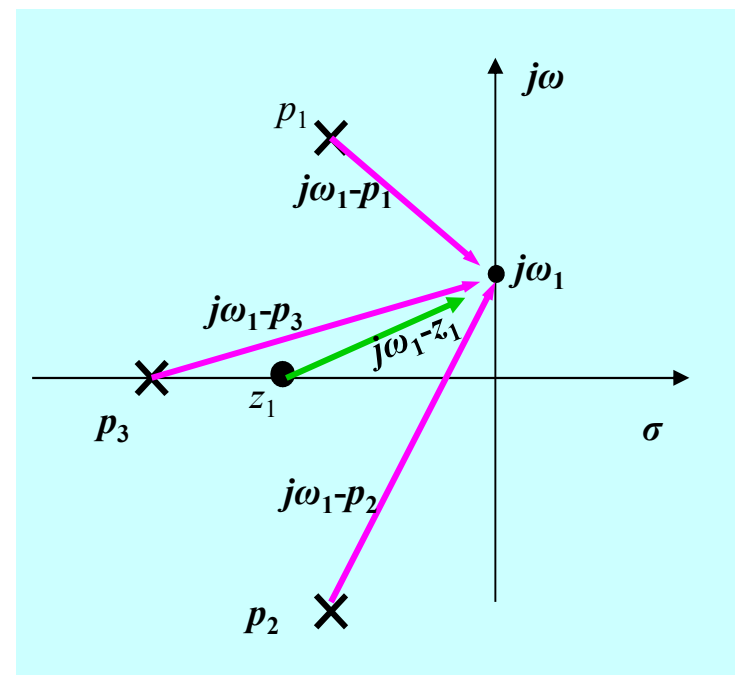
LTI系统传递函数：

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

频率特性：

$$\begin{aligned} M(\omega) &= \left| \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \right| = \left| \frac{K(j\omega - z_1) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1) \cdots (j\omega - p_n)} \right| \\ &= |G(j\omega)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle B(j\omega) - \angle A(j\omega) = \angle G(j\omega) \\ &= \angle K + \angle(j\omega - z_1) + \cdots + \angle(j\omega - z_m) - \angle(j\omega - p_1) - \cdots - \angle(j\omega - p_n) \end{aligned}$$





概述——频率特性

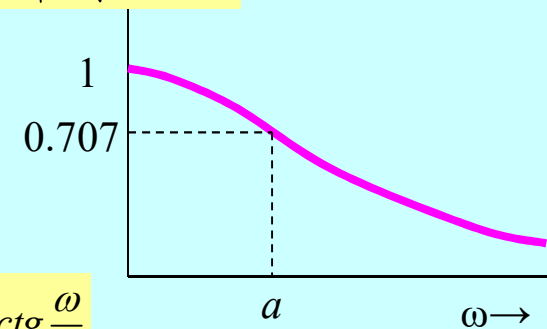


频率特性曲线： 在直角坐标系中，频率与输出输入比的幅值之间的关系图，以及相应的相角与频率之间的关系图，例如

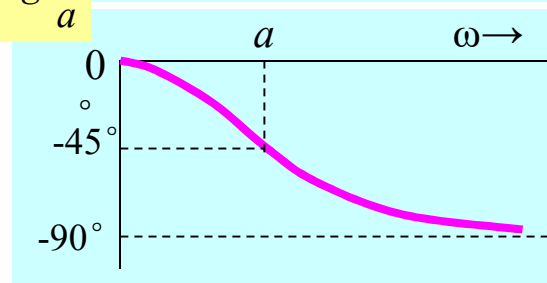
输入： $U(j\omega)$ 输出： $Y(j\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{a}{s+a} = \frac{a}{j\omega+a}$$

$$M(\omega) = \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| = \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$



$$\phi(\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = -\arctg \frac{\omega}{a}$$





➤ 频率特性常用的两种图示方法：

❖ Bode图（对数频率特性曲线）

❖ Nyquist图（极坐标图，幅相曲线）



Hendrik Wade Bode
(1905-1982)



Harry Nyquist
(1889-1976)



概述——频率特性



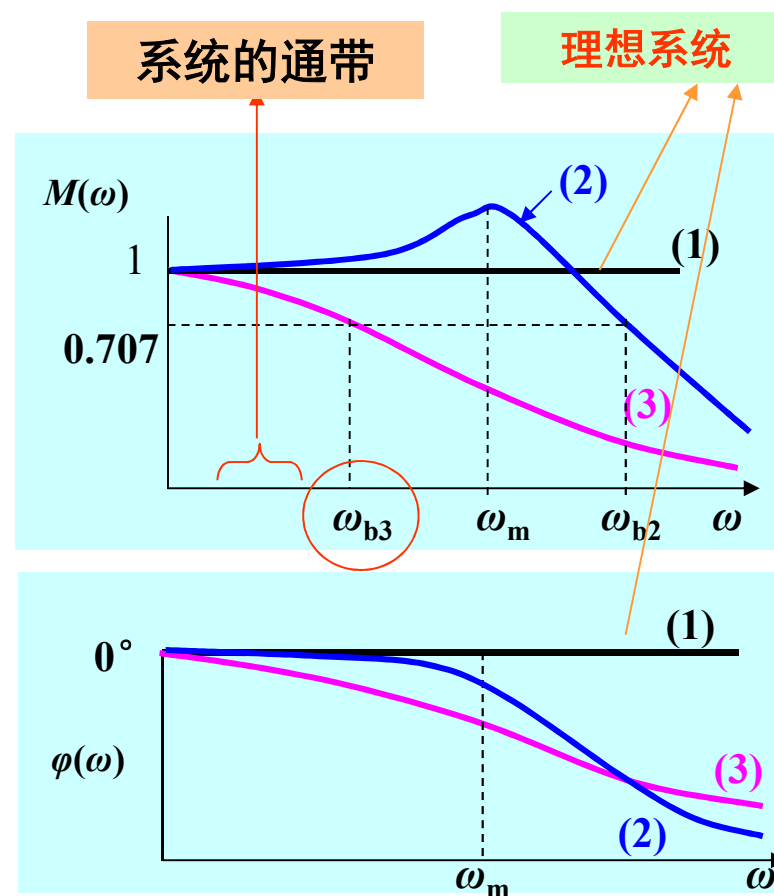
对一给定的正弦输入，输入与强迫响应具有以下形式：

$$x(t) = X \sin \omega t \quad y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$$

闭环系统频率响应

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} = M(\omega) \angle \varphi(\omega)$$

$Y(j\omega)/R(j\omega)$ 的频率响应特性（直角坐标）如图所示





概述——频率特性



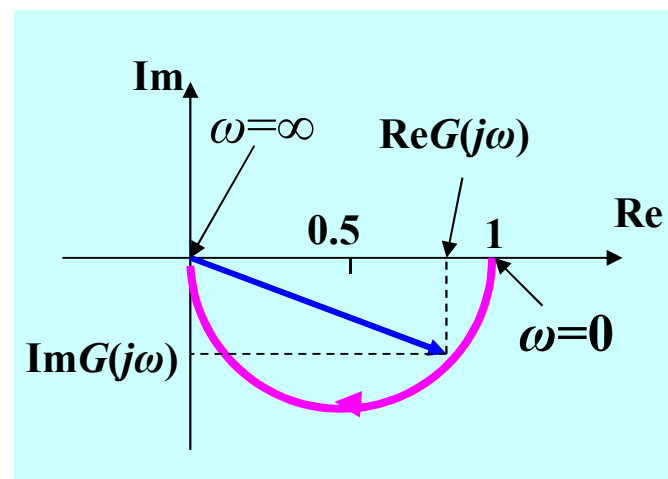
在极坐标系中以频率为参数绘制输出输入比被称为 *Nyquist* 图

例 6-1: 传递函数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{1+(T\omega)^2}$$

$$\left[\operatorname{Re} G(j\omega) - \frac{1}{2} \right]^2 + \operatorname{Im}^2 G(j\omega) = \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

Nyquist 图是以 $(0.5, j0)$ 为圆心, 以 0.5 为半径的圆





概述——频率特性

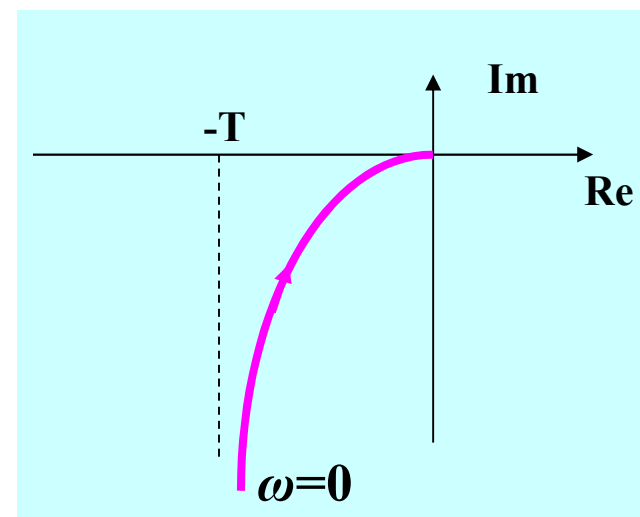


例 6-2：传递函数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} \quad \longrightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} G(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = -T - j\infty = \infty \angle (-90^\circ) \\ G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -0 - j0 = 0 \angle (-180^\circ) \end{cases}$$

以频率为参数，纵坐标为对数幅值横坐标为相角（对数幅值 vs 相角），被称为 *Nichols* 图或者对数幅相曲线——第三种频域表现形式。





Bode图 (对数坐标图)



对数坐标图的优点

- 1) 将乘积和除法的数学操作转化为加法和减法;
- 2) 对数坐标扩展了频段

对数幅频: 传递函数 $G(j\omega)$ 幅值的对数 (幅频特性), 以分贝来表示

$$20 \log |G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

称为**对数幅频**, 缩写**Lm**。因此

$$LmG(j\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

$$L(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

由于幅频特性是频率的函数, 因此 Lm 也是频率的函数

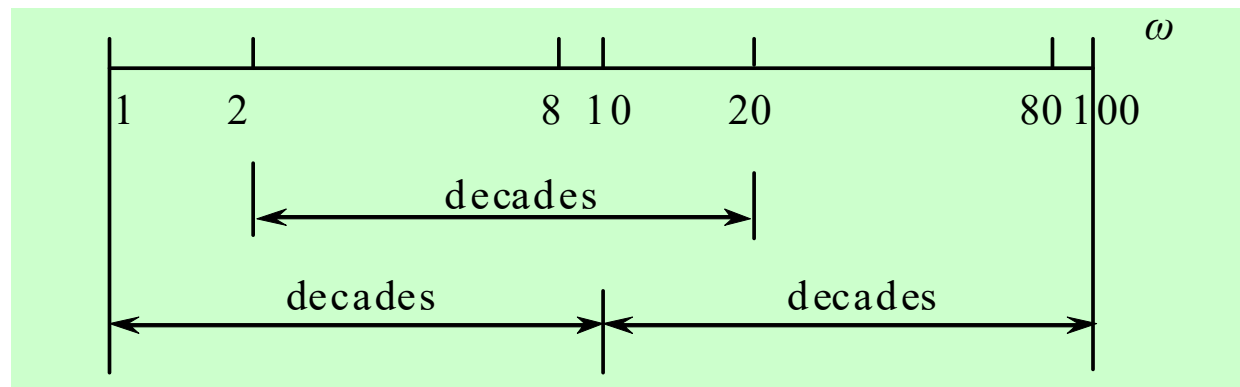


Bode图（对数坐标图）



Octave (倍频): 倍频是 f_1 到 f_2 的频带，其中 $f_2/f_1=2$ 。例如：频带 **1rad/s** 到 **2 rad/s** 是 **1**个倍频宽度，频带**17.4rad/s** 到 **34.8rad/s** 也是一个倍频宽度

Decade(十倍频): 当 $f_2/f_1=10$ 时，则频带 f_1 到 f_2 称为一个十倍频。频带**1rad/s**到**10rad/s**或者 **2.5rad/s**到**25rad/s** 称为一个十倍频宽度





Bode图（对数坐标图）



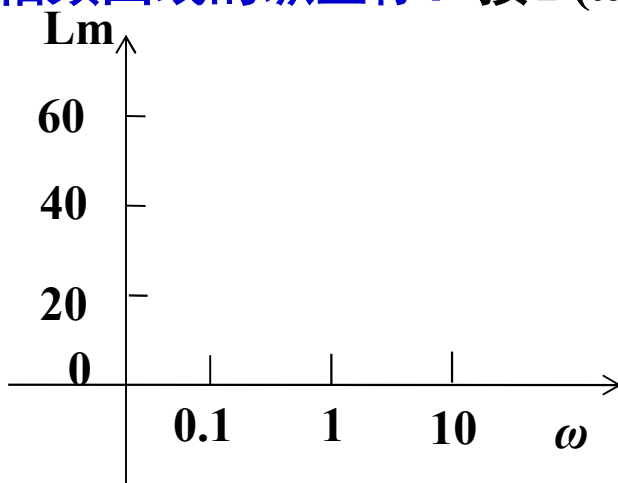
Bode图（对数频率特性曲线）：

对数频率特性曲线由对数幅频曲线和对数相频曲线组成

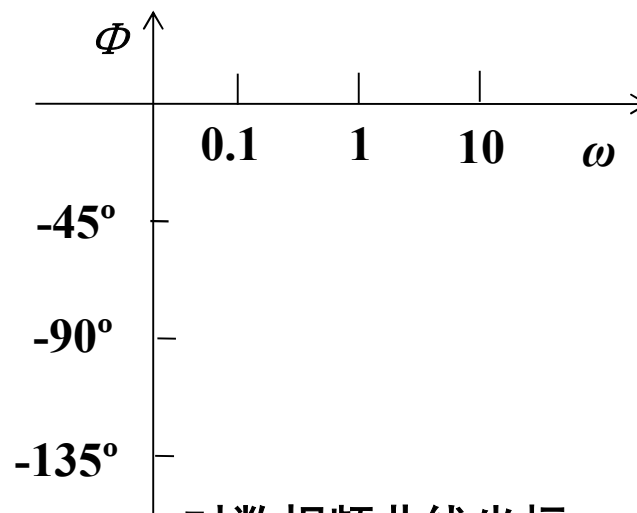
对数频率特性曲线的**横坐标**：按 $\log \omega$ 分度，单位为弧度/秒（rad/s）

对数幅频曲线的**纵坐标**：按 $L_m G(j\omega) = 20 \log |G(j\omega)|$ 线性分度，单位是分贝

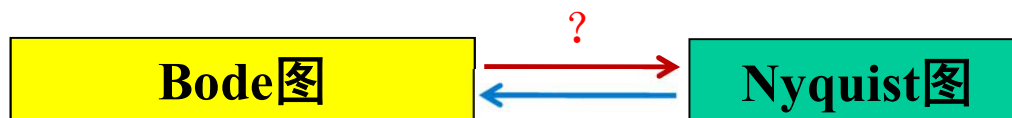
对数相频曲线的**纵坐标**：按 $\Phi(\omega)$ 线性分度，单位为度



对数幅频曲线坐标



对数相频曲线坐标





Bode图 (对数坐标图)

$$LmG(j\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \quad \text{dB}$$



频域响应:

$$G(j\omega) = \frac{K_m (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)^r \cdots}{(j\omega)^m (1 + j\omega T_a) [1 + (2\zeta / \omega_n) j\omega + (1 / \omega_n^2)(j\omega)^2] \cdots}$$

对数幅值:

$$LmG(j\omega) = LmK_m + Lm(1 + j\omega T_1) + rLm(1 + j\omega T_2) + \cdots - mLm(j\omega) \\ - Lm(1 + j\omega T_a) - Lm \left[1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right] - \cdots$$

相角方程:

$$\angle G(j\omega) = \angle K_m + \angle(1 + j\omega T_1) + r\angle(1 + j\omega T_2) + \cdots - m\angle(j\omega) \\ - \angle(1 + j\omega T_a) - \angle \left[1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right] - \cdots$$

$$\tan^{-1} \omega T_1$$

$$m 90^\circ$$

$$0^\circ / 180^\circ$$

$$\tan^{-1} \frac{2\zeta \omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}$$




绘制Bode图



一般形式的传递函数

$$G(j\omega) = \frac{K_m (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)^r \cdots}{(j\omega)^m (1 + j\omega T_a)[1 + (2\zeta / \omega_n)j\omega + (1 / \omega_n^2)(j\omega)^2] \cdots}$$

典型环节:


$$\begin{array}{l} K_m \quad (j\omega)^{\pm m} \quad (1 + j\omega T)^{\pm r} \quad \left[1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{\pm p} \\ K_m \quad (j\omega)^{\pm 1} \quad (1 + j\omega T)^{\pm 1} \quad \left[1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{\pm 1} \end{array}$$

典型环节的Bode图叠加在一起就可以得到整个频率特性的Bode图，特别是采用对数幅频渐近特性曲线的时候。



Thanks!