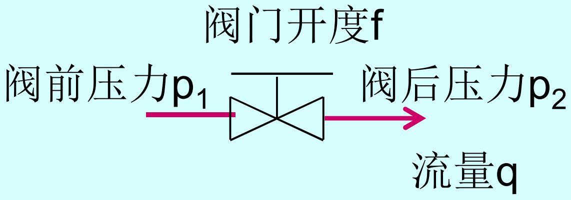
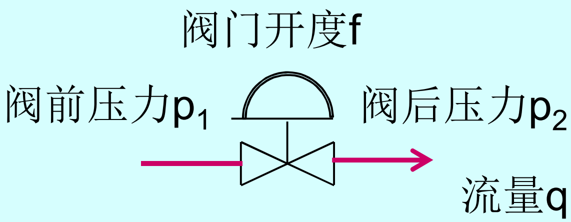
液位系统的机理建模

流量是指单位时间内流经封闭管道或明渠有效截面的流体量
当流体量以体积表示时称为体积流量(液位系统采用)
当流体量以质量表示时称为质量流量

手动调节阀



气动调节阀



据流体力学原理，$q=\alpha f\sqrt{p_1-p_2}$

参数α与液体密度有关

若阀前后压差p_1-p_2不变，则q与f的关系是线性的，$q=K_p f$

下图中，阀前后压差$p_1-p_2=\rho g h$，$q=\alpha\sqrt{\rho g}f\sqrt{h}=\alpha_\rho f\sqrt{h}$

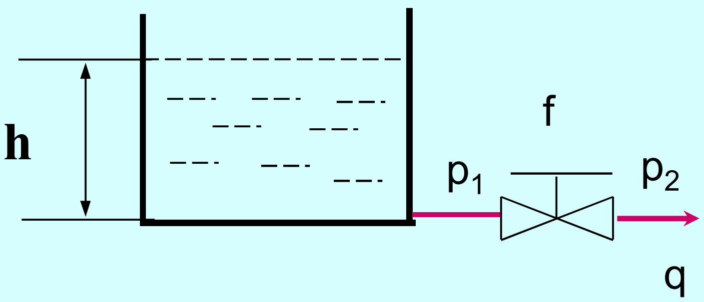
ρ 是液体密度，g 是重力加速度，h 是液位

有一工作点(h_0,f_0,q_0)，$q_0=\alpha_\rho f_0\sqrt{h_0}$

设$\Delta h=h-h_0,\ \Delta f=f-f_0,\ \Delta q=q-q_0$

作线性化 $$q=q_0+\left.\frac{\partial q}{\partial h}\right|_{\substack{h=h_0\\ f=f_0}}\Delta h+\left.\frac{\partial q}{\partial f}\right|_{\substack{h=h_0\\ f=f_0}}\Delta f$$

$$=q_0+\frac{1}{2}\alpha_\rho f_0\sqrt{\frac{1}{h_0}}\Delta h+\alpha_\rho\sqrt{h_0}\Delta f$$



$$\Delta q=\frac{1}{R}\Delta h+K\Delta f=\frac{1}{R}\Delta h+\Delta q_f$$

$$K=\alpha_\rho\sqrt{h_0},\text{液阻}R=\frac{2\sqrt{h_0}}{\alpha_\rho f_0}$$

Δq_f:Δf引起的流量改变

液位系统的机理建模

例 单个带阀的水槽

- q = 液体流量
- h = 液位
- R = 液阻
- A =水槽的横截面积

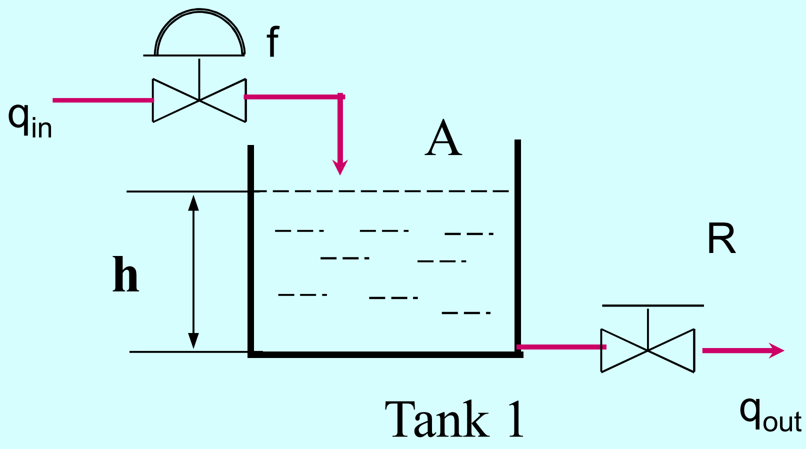
围绕水槽建立微分方程 $$\Delta q_{in} - \Delta q_{out} = \frac{dV}{dt} = A\frac{d\Delta h}{dt}$$

流入：假设阀前后差压不变，流量与阀门开度的关系 $$\Delta q_{in} = K_p \Delta f$$

流出：流量与液位关系： $$q_{out} = \alpha_\rho f\sqrt{h}$$

线性化 $$\Delta q_{out} = \frac{\Delta h}{R} + K\Delta f$$

假设流入阀前后压差和流出阀开度不变
求工作点附近流入阀开度偏移量与
流出阀流量偏移量的传递函数



假设阀门开度不变
只考虑液位影响
线性化后得到 $$\Delta q_{out} = \frac{\Delta h}{R}$$

代入后得到

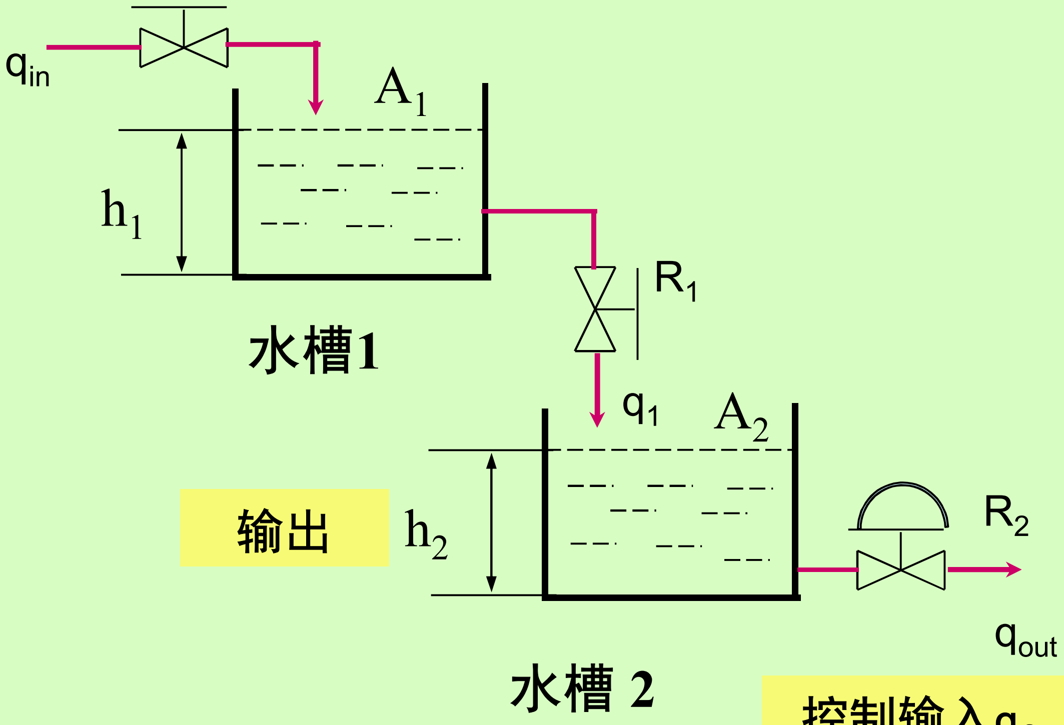
$$K_p\Delta f - \frac{\Delta h}{R} = A\frac{d\Delta h}{dt}$$

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta F(s)} = \frac{K_p R}{RAs+1}$$

液位系统的机理建模

例 二容液位控制系统如下图所示。系统变量及参数包括：

扰动输入



液位系统由两个一阶对象串联组成

q： 液体流量

h： 液位高度

R： 流阻

A： 水槽截面积

干扰输入q_{in}

输出h_2（比如：保持 h_2 不变）

控制输入q_f

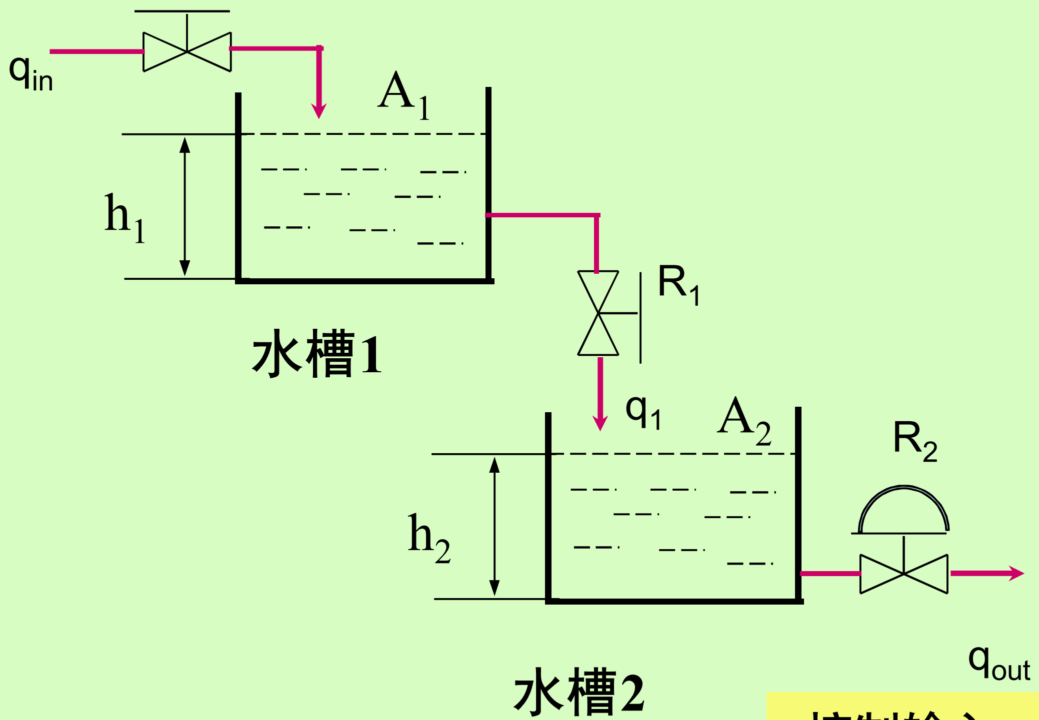
假设R_1开度不变

求输入与输出间的关系

液位系统的机理建模

围绕水槽建立微分方程

水槽1 $$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - q_1$$ $$q_1 = \frac{1}{R_1} h_1$$



控制输入q_f

水槽2 $$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_{out}$$

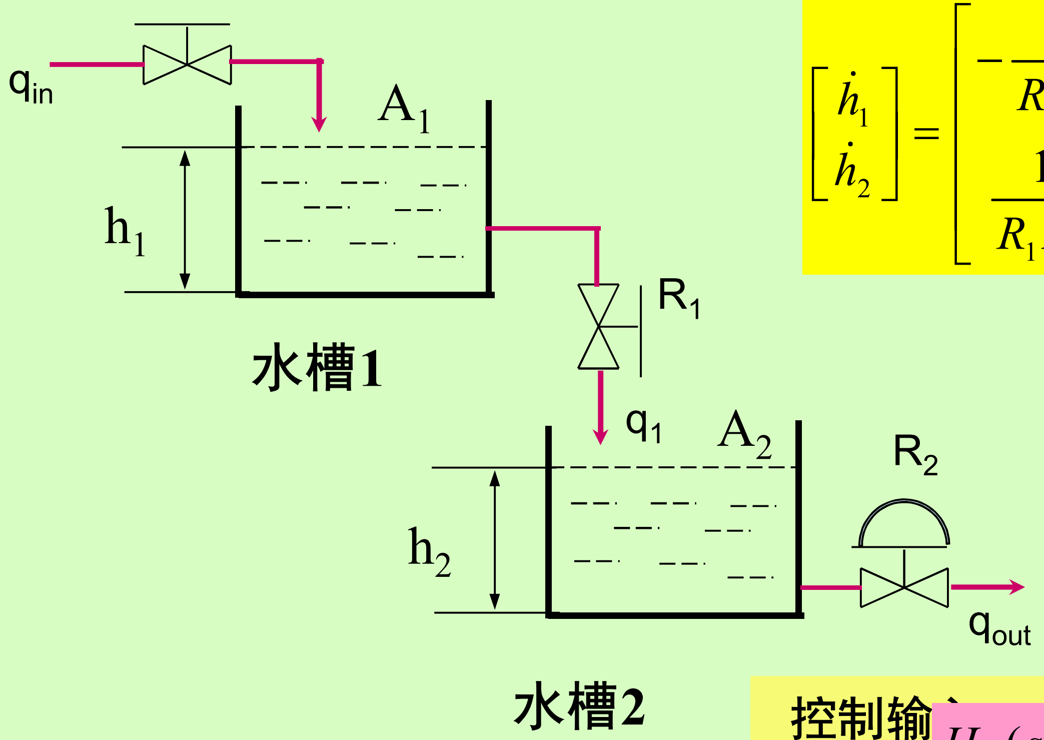
$$q_{out} = \frac{1}{R_2} h_2 + q_f$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\frac{1}{R_2 A_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1] x$$

取状态变量 $x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ 输入变量 $u = \begin{bmatrix} q_{in} \\ q_f \end{bmatrix}$ 输出变量 $y = h_2$

液位系统的机理建模



$$\begin{bmatrix}\dot{h}_1\\ \dot{h}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1A_1} & 0\\ \dfrac{1}{R_1A_2} & -\dfrac{1}{R_2A_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A_1} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{A_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{in}\\ q_f\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$$

水槽液位 **h_1**可影响**h_2**

水槽液位 **h_2**不影响**h_1**

控制输

$$H_2(s)=G(s)U(s)=\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]U(s)$$

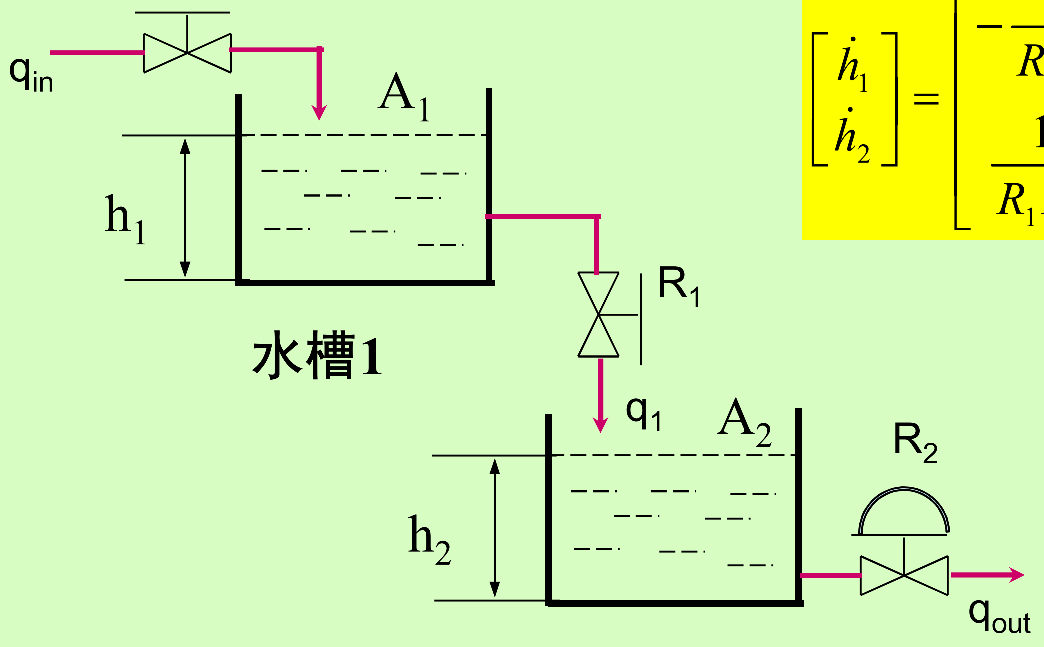
$$H_2(s)=\left[\frac{R_2}{R_1A_1R_2A_2s^2+(R_1A_1+R_2A_2)s+1}\quad \frac{-R_2}{R_2A_2s+1}\right]\begin{bmatrix}Q_{in}(s)\\ Q_f(s)\end{bmatrix}$$

干扰通道传递函数

控制通道传递函数

$$R_1A_1R_2A_2\frac{d^2h_2}{dt^2}+(R_1A_1+R_2A_2)\frac{dh_2}{dt}+h_2=R_2q_{in}-R_1A_1R_2\frac{dq_f}{dt}-R_2q_f$$

液位系统的机理建模



控制输入q_f

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1A_1} & 0 \\ \dfrac{1}{R_1A_2} & -\dfrac{1}{R_2A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{in} \\ q_f \end{bmatrix}$$

取$y = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$,即$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$

q_{in}正影响 h_1

q_{in}正影响 h_2

q_f不影响 h_1

q_f负影响 h_2

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_1}{R_1A_1s+1} & 0 \\ \dfrac{R_2}{R_1A_1R_2A_2s^2+(R_1A_1+R_2A_2)s+1} & \dfrac{-R_2}{R_2A_2s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}(s) \\ Q_f(s) \end{bmatrix}$$

液位系统的机理建模

例 二容液位控制系统由两个一阶对象串联组成。注意， 这里水槽液位h_2 对q_1有影响

q： 液体流量

h： 液位高度

R： 流阻

A： 水槽截面积

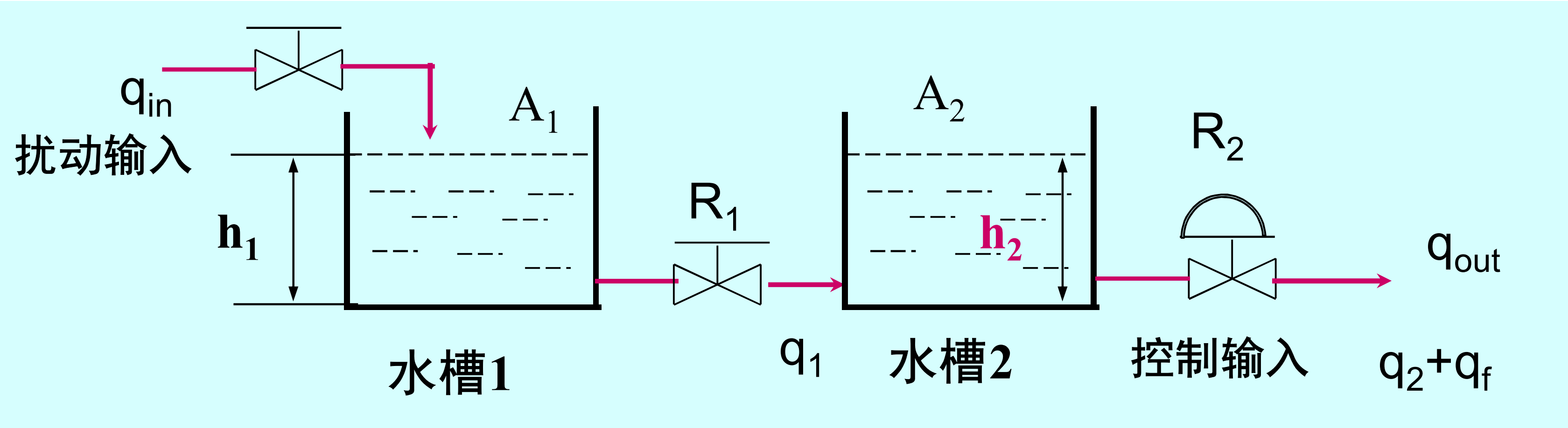
控制输入q_f

干扰输入q_{in}

输出h_1和h_2

假设R_1开度不变

求输入与输出间的关系



液位系统的机理建模

围绕水槽建立微分方程

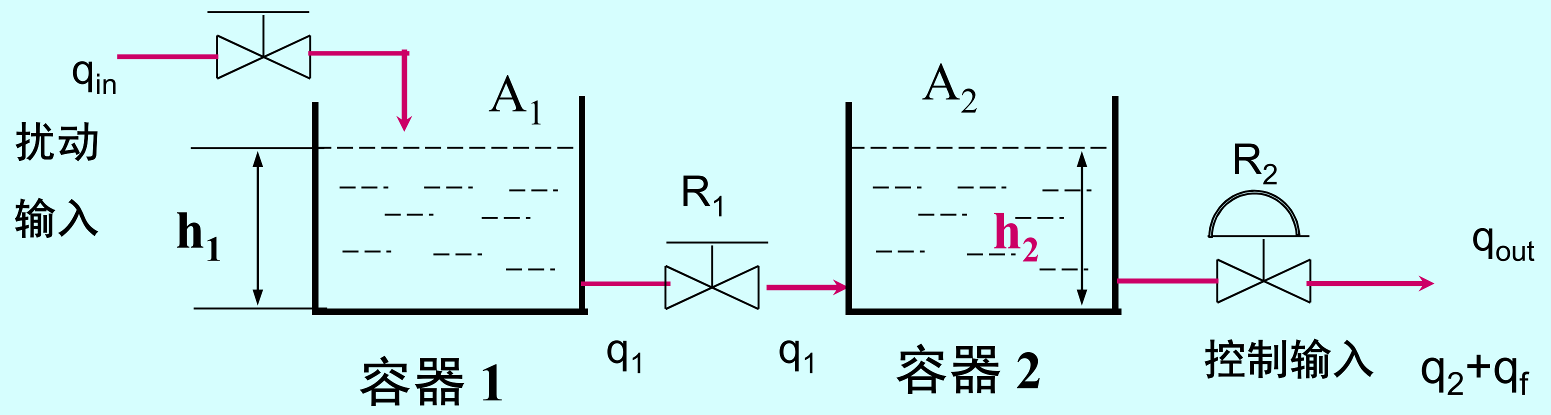
水槽1 $$A_1\frac{dh_1}{dt}=q_{in}-q_1$$ $$q_1=\frac{1}{R_1}(h_1-h_2)$$

水槽2 $$A_2\frac{dh_2}{dt}=q_1-q_{out}$$ $$q_{out}=\frac{1}{R_2}h_2+q_f$$

$$y=x=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$$ $$u=\begin{bmatrix}q_{in}\\q_f\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1A_1} & \frac{1}{R_1A_1}\\ \frac{1}{R_1A_2} & -\frac{1}{R_1A_2}-\frac{1}{R_2A_2}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{1}{A_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{A_2}\end{bmatrix}u$$ $$y=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}x$$

水槽液位 h_1与h_2 耦合：h_1影响h_2，h_2也影响h_1



液位系统的机理建模

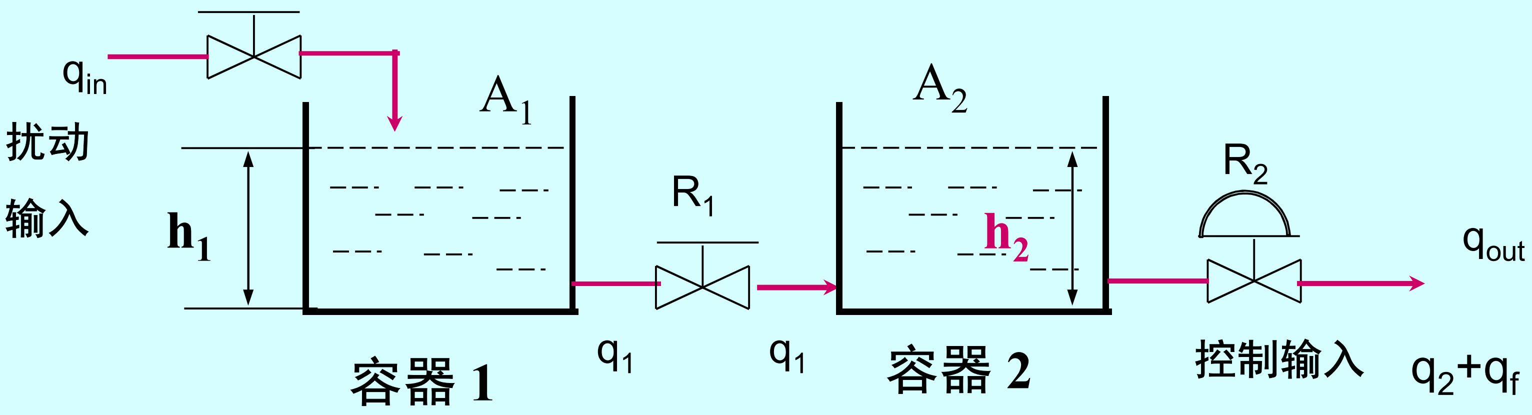
q_{in}正影响 h_1

q_{in}正影响 h_2

q_f负影响 h_1

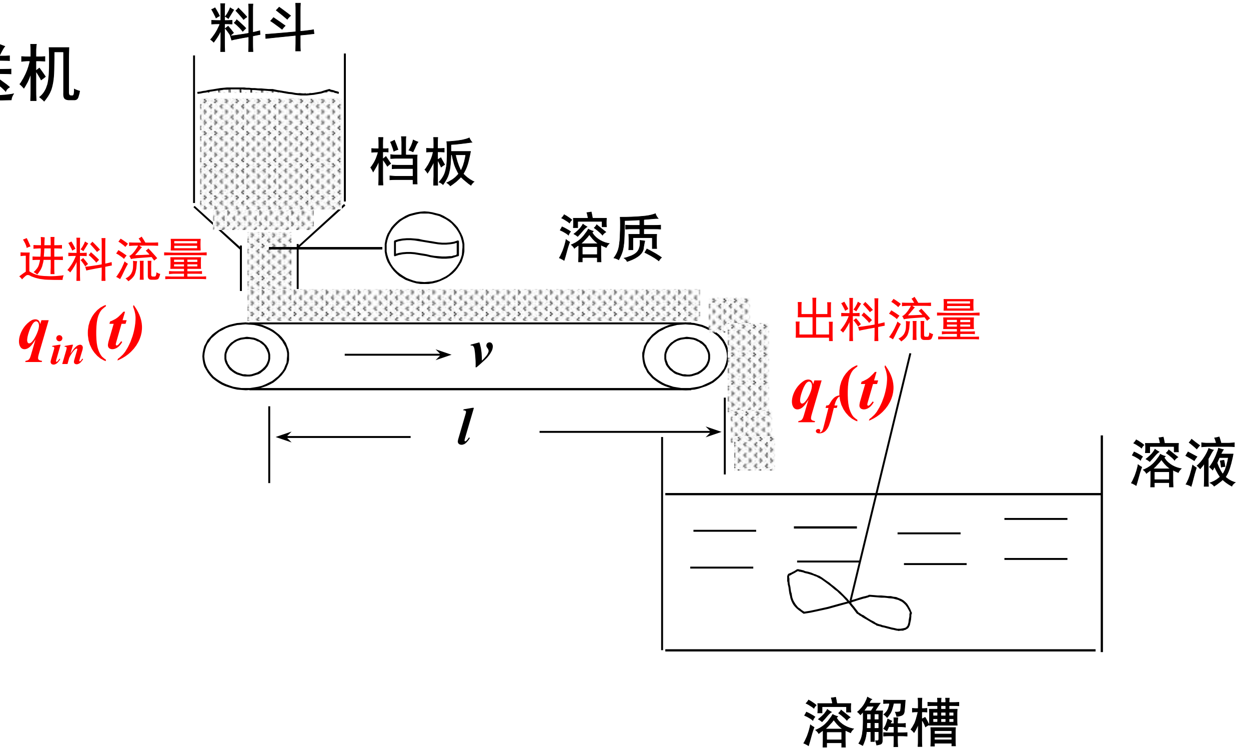
q_f负影响 h_2

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_1R_2A_2s+(R_1+R_2)}{R_1A_1R_2A_2s^2+(R_2A_1+R_1A_1+R_2A_2)s+1} & \dfrac{-R_2}{R_1A_1R_2A_2s^2+(R_2A_1+R_1A_1+R_2A_2)s+1} \\ \dfrac{R_2}{R_1A_1R_2A_2s^2+(R_2A_1+R_1A_1+R_2A_2)s+1} & \dfrac{-R_1A_1R_2s-R_2}{R_1A_1R_2A_2s^2+(R_2A_1+R_1A_1+R_2A_2)s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}(s) \\ Q_f(s) \end{bmatrix}$$



纯滞后环节的传递函数

例　皮带输送机



输入和输出间的关系

$$q_f(t) = q_{in}(t-\tau)$$

纯滞后时间 $\tau = ?$

拉普拉斯变换

$$Q_f(s) = e^{-\tau s} Q_{in}(s)$$

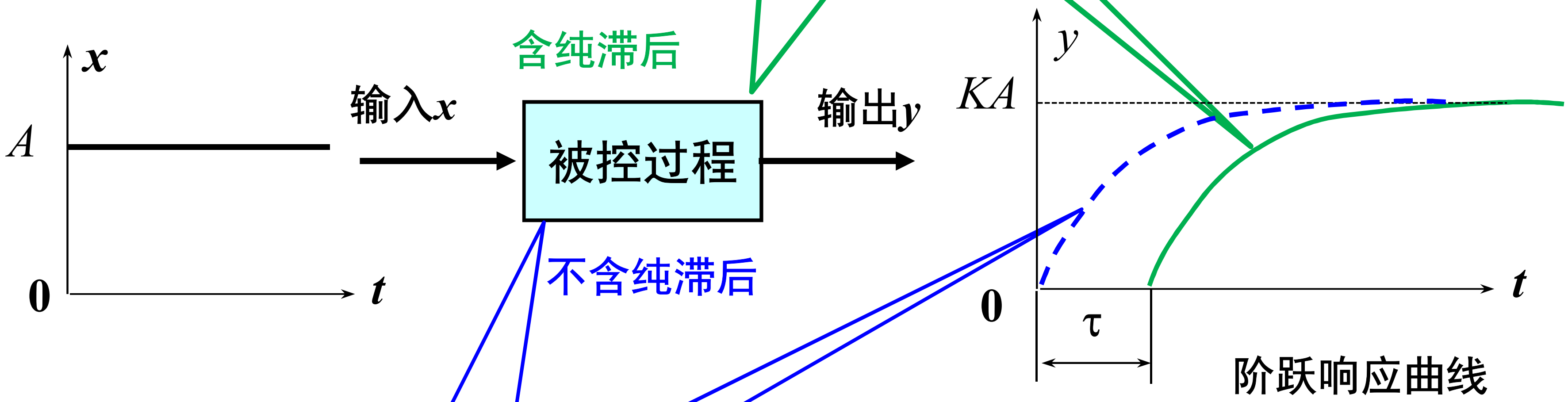
$$G(s) = \frac{Q_f(s)}{Q_{in}(s)} = e^{-\tau s}$$

纯滞后环节的传递函数

含纯滞后的一阶微分方程及传递函数模型

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts+1}$$

$$T\frac{dy}{dt} + y = Kx(t-\tau)$$



$$T\frac{dy}{dt} + y = Kx$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts+1}$$

不含纯滞后的一阶微分方程与传递函数模型

一阶+纯滞后可以描述许多工业对象

直接蒸汽加热器模型

传热的基本方式

传导传热：是热量从物体内部温度较高的部分传递到温度较低的部分或者传递到与之相接触的温度较低的另一个物体的过程。特点：物质间没有宏观位移

对流传热：流体中质点发生宏观位移而引起的热量传递

辐射传热：物体发出辐射能并在周围空间传播而引起的传热

流量是指单位时间内流经封闭管道或明渠有效截面的流体量
当流体量以体积表示时称为体积流量
当流体量以质量表示时称为质量流量(热力系统采用)

直接蒸汽加热器模型

对流传热是一个热交换过程，参与热交换的流体称为载热体

载热体吸收（或释放）热量的计算方法

显热法：

$$Q = mc(\theta_2 - \theta_1) = C(\theta_2 - \theta_1)$$

Q:流体吸收或释放的热量； m:流体的质量

c:流体的比热（单位质量流体温度升高1°C所需热量）

θ_2:流体离开换热器时的温度（单位°C）

θ_1:流体进入换热器时的温度（单位°C）

C:流体的热容（$C = mc$）

显热法不能用于热交换中出现相变的流体

焓变法：

流体在某一状态下的热焓值H：使单位质量流体由0°C变为现状态所需热量（H还与压力有关，若热交换过程压力改变不大，可忽略压力影响）

$$Q = m(H_2 - H_1)$$

H_2:流体离开换热器时的热焓值； H_1:流体进入换热器时的热焓值

无论热交换中是否出现相变，焓变法均适用

直接蒸汽加热器模型

显热法：$Q = mc(\theta_2 - \theta_1) = C(\theta_2 - \theta_1)$

焓变法：$Q = m(H_2 - H_1)$

取0°C液态流体的热量为参考点，即设0°C液态流体的热量等于0

则θ°C流体的热量等于mH

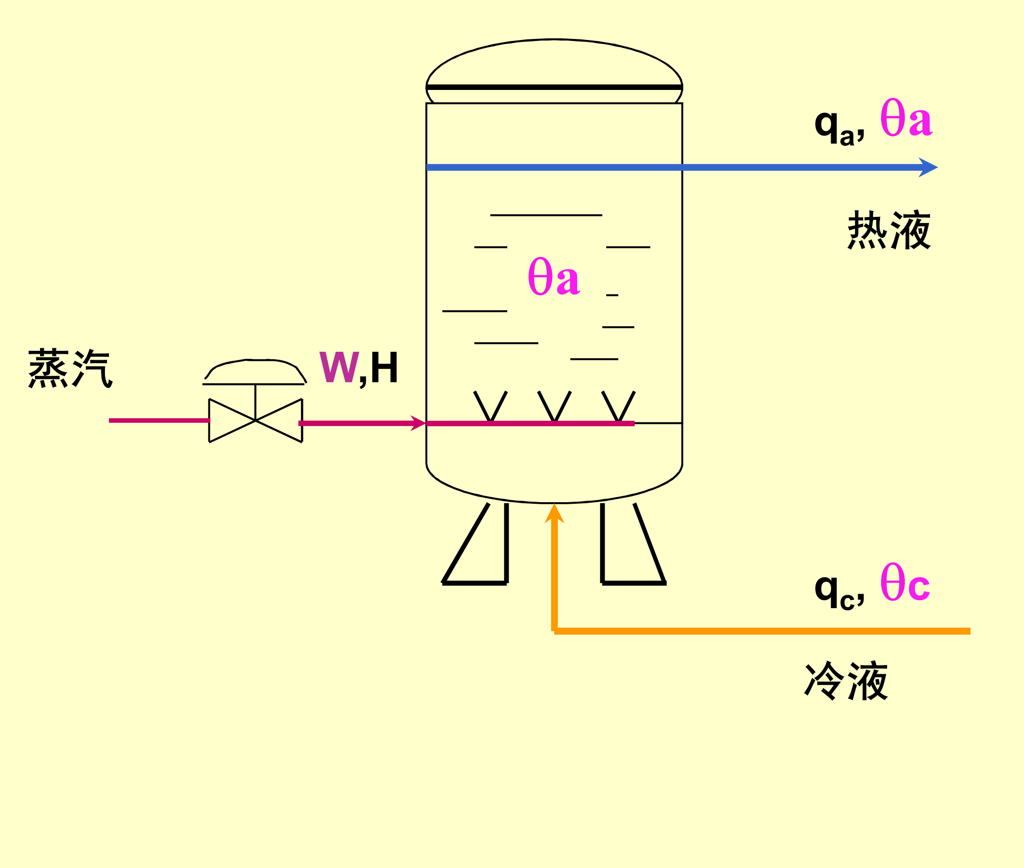
若θ°C流体是液体，其热量也等于$mc\theta$

流量为q的θ°C流体的热流率等于qH

若流量为q的θ°C流体是液体，其热流率也等于$qc\theta$

直接蒸汽加热器模型

➢ 目标：把冷液加热至温度 θa



假设及简化

(1)理想保温条件：

与罐外环境无热交换

(2)混合充分，集总模型

(3)定常H，

定常$q_a=q_c+W\approx q_c$

（罐内液体质量不变）

输入输出？

输出：θa热液及罐内液体温度

控制输入：W蒸汽流量

干扰输入：θc冷液温度

试求输入输出关系？

直接蒸汽加热器模型

罐内液体热量$Q = mc\theta_a = V\rho c\theta_a$

m :罐内液体质量

V :罐内液体体积

ρ :液体密度

c :液体比热

根据能量守恒定律

Q的变化率=总输入热流率-总输出热流率

$$V\rho c\frac{d\theta_a}{dt} = WH + q_c c\theta_c - q_a c\theta_a$$

H :热液的热焓值

q_c :冷液流量

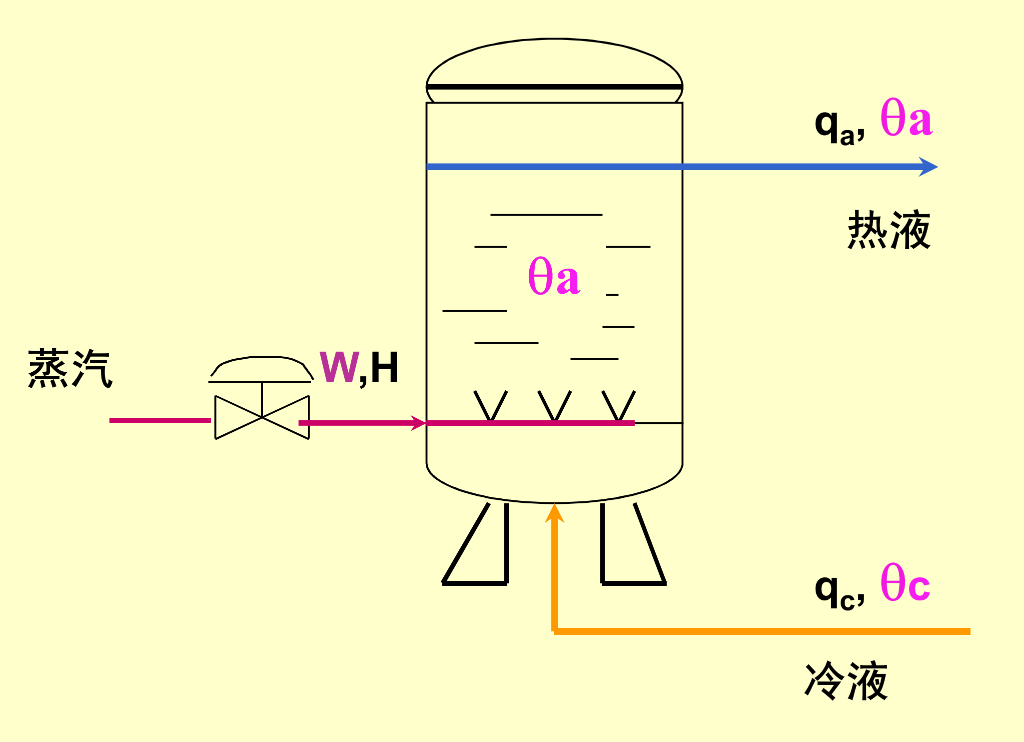
q_a :热液流量

$$T\frac{d\theta_a}{dt} + \theta_a = KW + \theta_c$$

$$T = \frac{V\rho}{q_a}, K = \frac{H}{q_a c}$$

控制通道 $\dfrac{\Theta_a(s)}{W(s)} = \dfrac{K}{Ts+1}$

干扰通道 $\dfrac{\Theta_a(s)}{\Theta_c(s)} = \dfrac{1}{Ts+1}$



直接蒸汽加热器模型

- 在工业控制中，我们通常考虑变量的增量（偏移量）方程，如

系统动态方程：

$$T\frac{d\theta_a}{dt}+\theta_a=\theta_c+KW$$

**

系统稳态方程：

$$\theta_{a0}=\theta_{c0}+KW_0$$

---工作点

- 将动态方程减去稳态方程，其中，$\theta_a=\theta_{a0}+\Delta\theta_a$

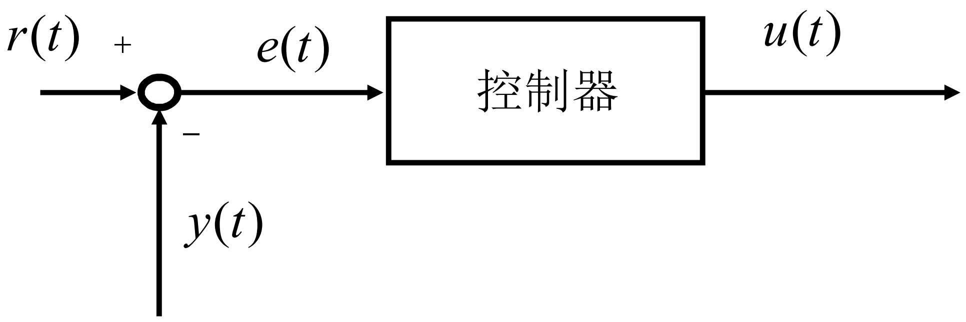
$$T\frac{d\theta_a}{dt}+\theta_a-\theta_{a0}=\theta_c+KW-\theta_{c0}-KW_0$$

- 可以得到增量方程

$$\boxed{T\frac{d\Delta\theta_a}{dt}+\Delta\theta_a=\Delta\theta_c+K\Delta W}$$

除了增量符号Δ之外，增量方程与动态方程具有一样的表达式。对于线性时不变系统，符号Δ通常省略，但是“增量”的思想非常重要。

PID控制器的模型



- 控制器的输入是偏差信号e
  控制器的输出是控制变量u

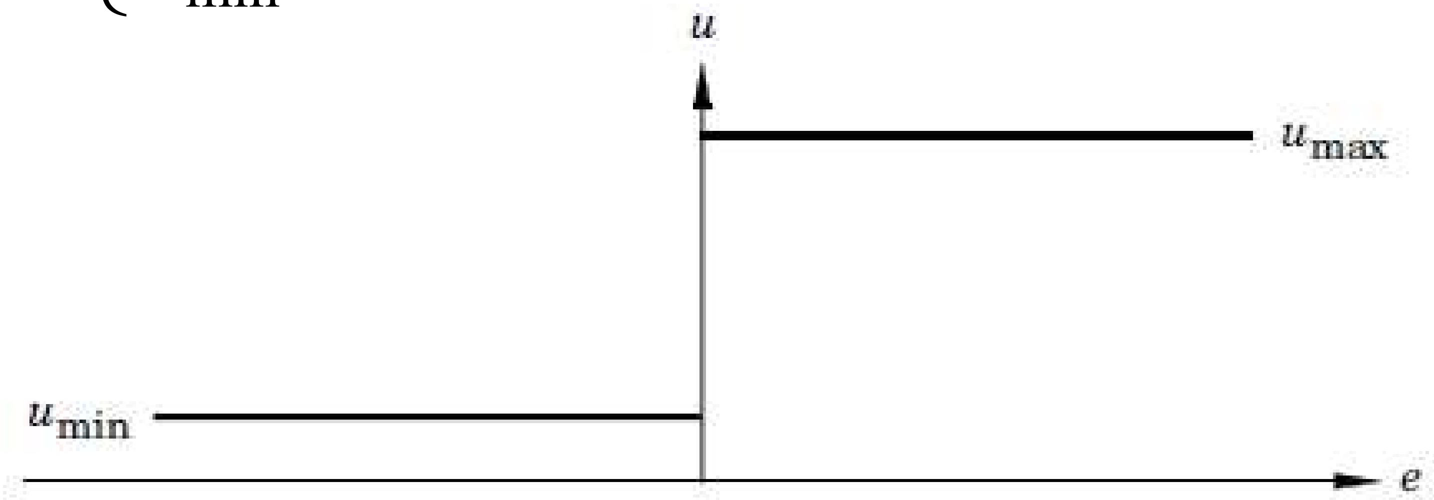
- 由e(t)计算得到u(t)的过程，即是控制律
  设计控制律是控制工程师的一大任务

- PID控制是工程上最常用的控制律
  PID（比例Proportional，积分Integral，微分 Derivative）

PID控制器的模型

最朴素的反馈控制：bang-bang控制

$$u=\begin{cases} u_{\max}, & e>0 \\ u_{\min}, & e<0 \end{cases}, \quad e=r-y$$



缺点：抖振

PID控制器的模型

P控制

K是工程师设计的控制器增益

u_0是偏差e等于0时的控制变量

$$u=\begin{cases} u_{\max}, & u_0+Ke\ge u_{\max};\\ u_0+Ke, & u_{\max}>u_0+Ke>u_{\min};\\ u_{\min}, & u_0+Ke\le u_{\min}; \end{cases}$$

如何计算u_0?

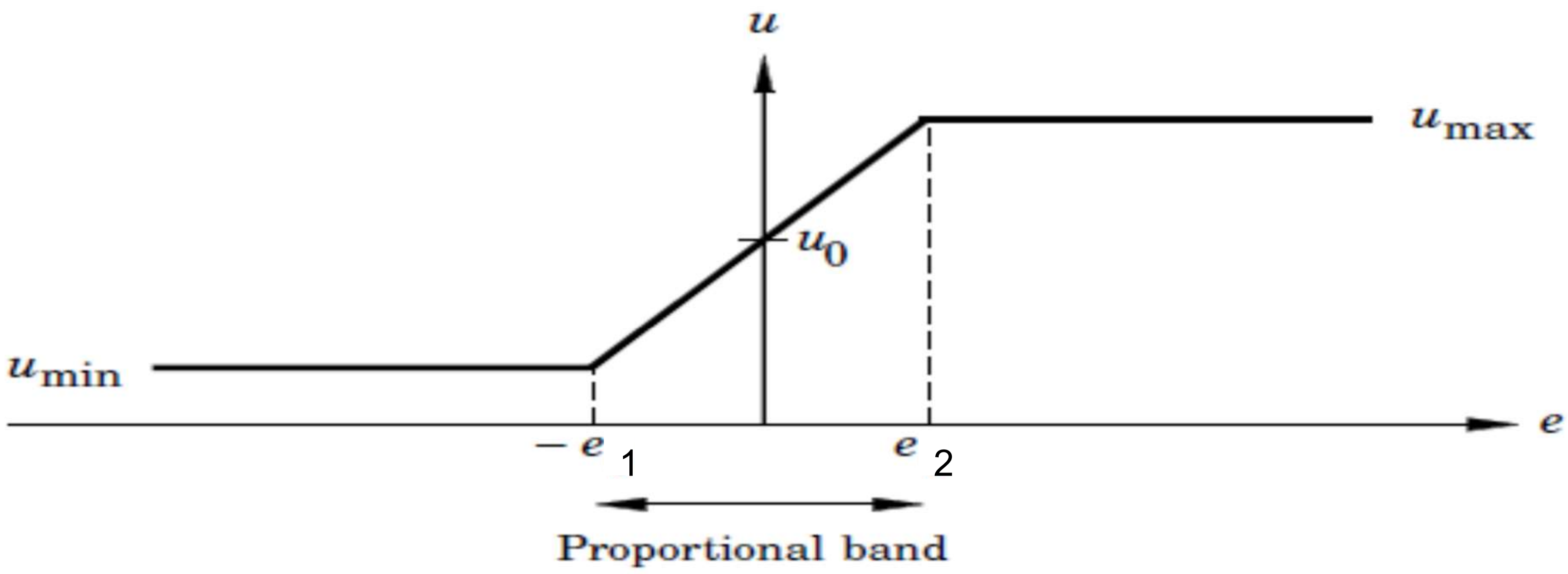


Figure 1.3 The control signal of the P controller.

PID控制器的模型

PI控制

$$u_0 = \frac{K}{T_i}\int e(t)dt$$

利用积分求u_0!

T_i是工程师设计的控制器积分时间

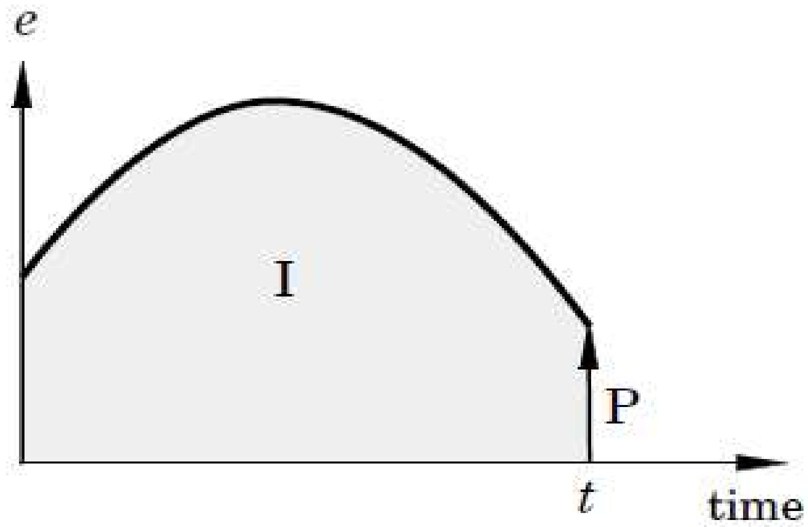
$$u = u_0 + Ke$$

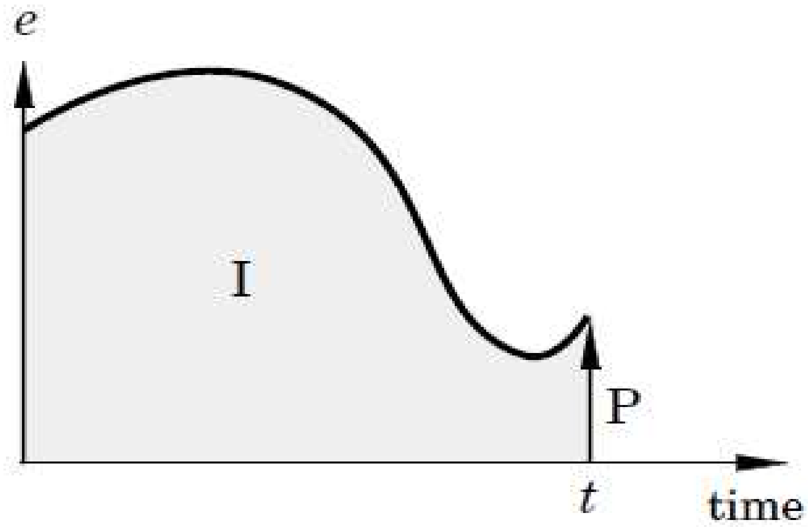
$$u = K\left(\frac{1}{T_i}\int e(t)dt + e\right)$$

PID控制器的模型

PI控制用到了过去和现在的偏差信息

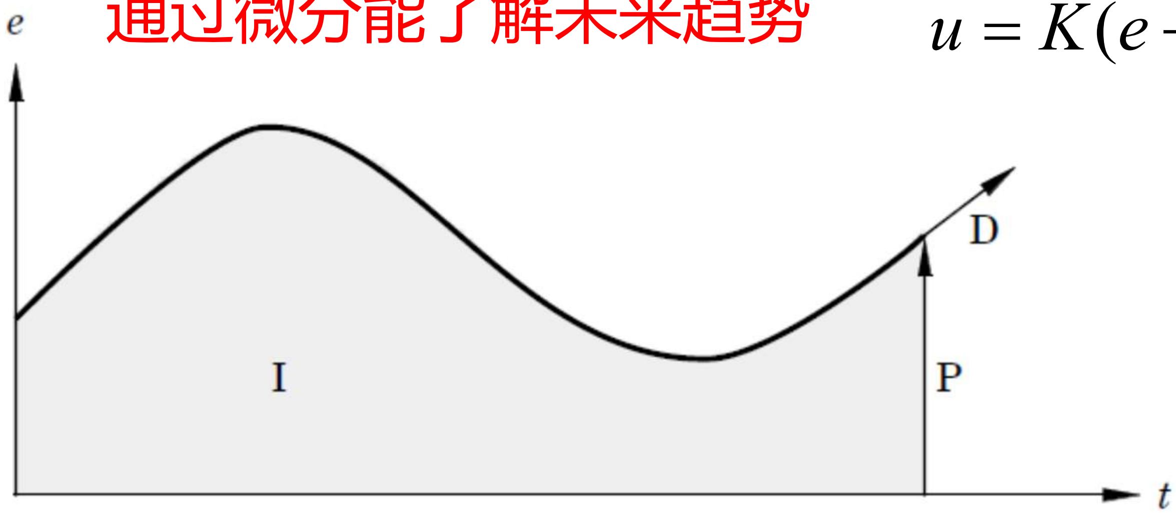
PID控制





通过微分能了解未来趋势

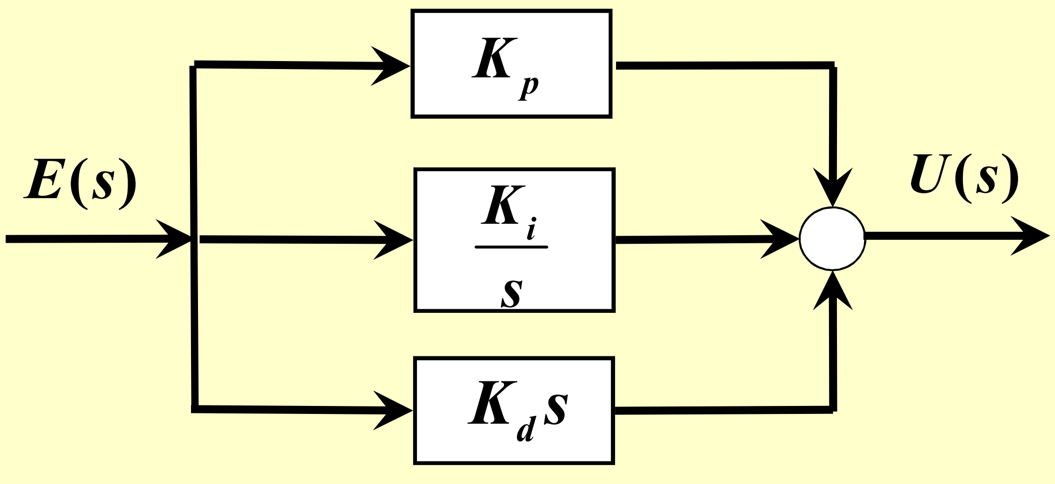
$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de}{dt}\right)$$



T_d是工程师设计的控制器微分时间

自

PID控制器的模型



PID控制器结构图

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de}{dt}\right)$$

$$= K_p e + K_i\int e(t)dt + K_d\frac{de}{dt}$$

比例系数$K_p = K$，积分系数$K_i = \frac{K}{T_i}$，微分系数$K_d = KT_d$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

工程中实现微分（一）：$\frac{T_d s}{\tau s+1} \approx T_d s, \tau << 1$

工程中实现微分（二）：$T_d\left(\frac{e(t)-e(t-T)}{T}\right) \approx T_d\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$

Thanks!