自动控制原理

Principle of Automatic Control

浙江大学控制科学与工程学系

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous -time Control Systems

机械平移系统的机理建模

➢ 惯性系下的机械平移系统遵循牛顿定律

$$\sum_i F_i = MDv = Ma = MD^2 x$$

$\sum_i F_i$ 是外力之和， M 是质量, v 是速度， a 是加速度， x 是位移

作用力与反作用力相等

➢ 机械平移系统基本元件

- 质量块(mass)

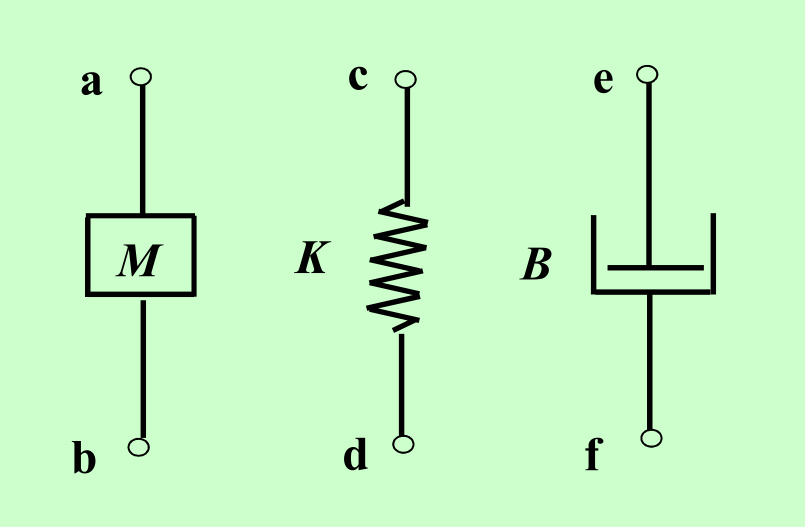
$$f_a - f_b = Ma = MDv = MD^2 x$$

- 弹簧(elastance)

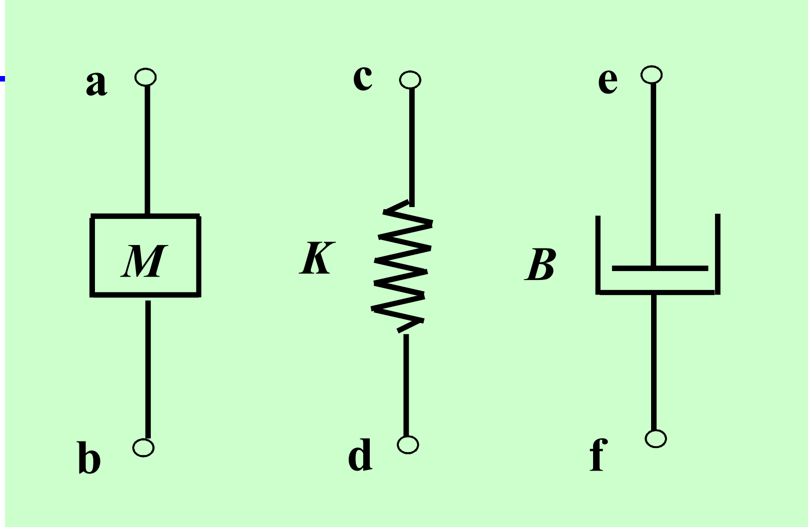
$$f_K = K(x_c - x_d)$$

- 阻尼器(damping)

$$f_B = B(v_e - v_f) = B(Dx_e - Dx_f)$$



机械平移系统的机理建模



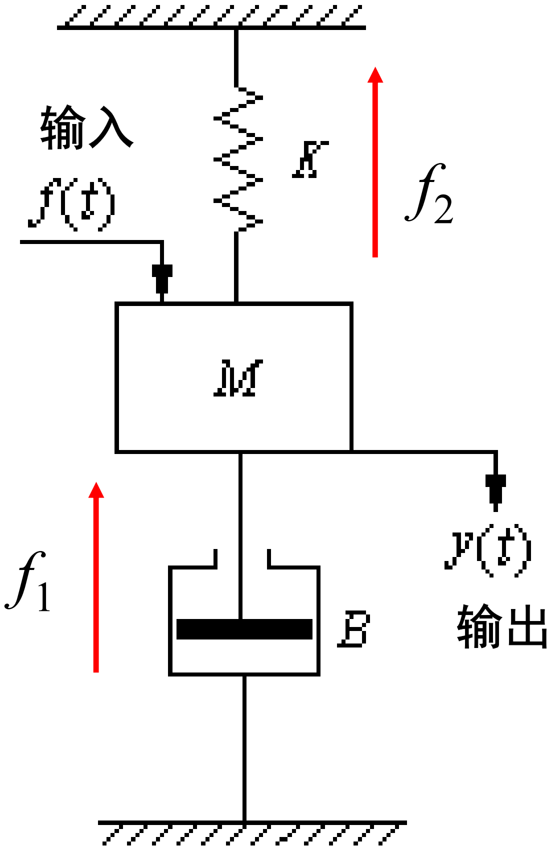
- 机械平移元件的受力特点
  - M: 两端节点所受的外力可以不等
  - K,B: 两端节点所受的外力大小相等、方向相反

- 机械平移元件的运动特点
  - M: 两端节点运动的位移和速度相等
  - K,B: 两端节点运动的位移和速度可以不等

机械平移系统的机理建模

例 图中系统处于无重力场中，当外力 $f(t)$ 作用于质量 M 时，M 将产生位移 $y(t)$，试列写F(s)到Y(s)传递函数

方法一（质量块受力分析）



第一步：关于M

$$f(t)-f_1(t)-f_2(t)=M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

其中， $f_1(t)$ — 阻尼器阻力

$f_2(t)$ — 弹簧回复力

第二步：关于B和K

$$f_1(t)=B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$f_2(t)=Ky(t)$$

第三步：

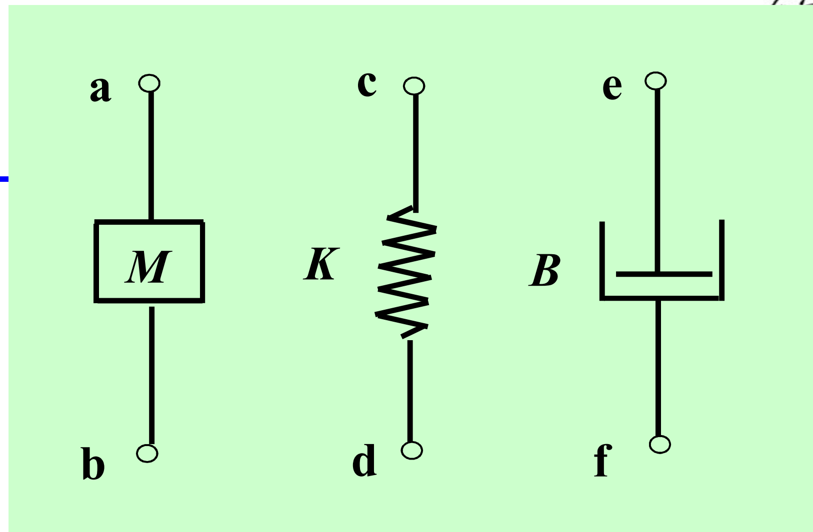
$$M\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+Ky(t)=f(t)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Bs+K}=\frac{1/M}{s^2+(B/M)s+K/M}$$

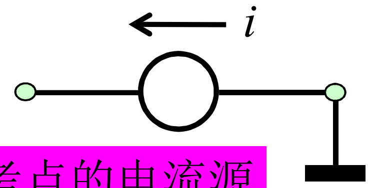
方法二（相似系统）

关注力与速度的关系

- 质量块 $f_a - f_b = MD^2x = MDv$
- 弹簧 $f = K(x_c - x_d) = \dfrac{K}{D}(v_c - v_d)$
- 阻尼器 $f = B(Dx_e - Dx_f) = B(v_e - v_f)$

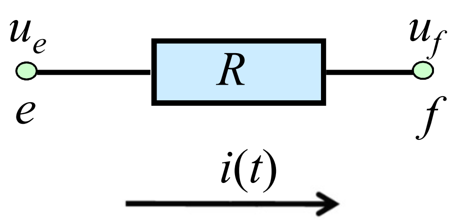


将机械平移系统中的力f和速度v分别相似于电路系统中的电流i和电位u

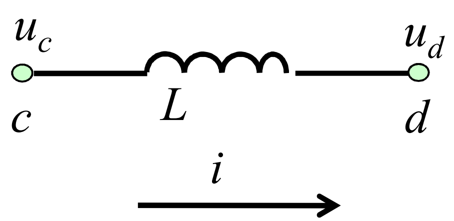


外部输入力 ～ 一端接参考点的电流源

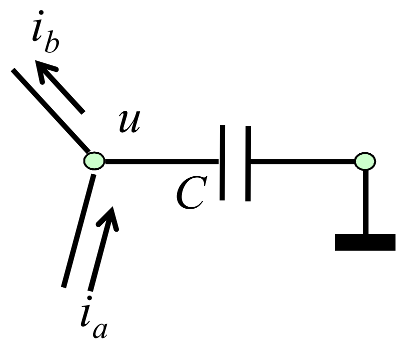
$$i = \frac{1}{R}(u_e - u_f)$$



$$i = \frac{1}{LD}(u_c - u_d)$$



$$i_a - i_b = CDu$$



阻尼器 ～ 电阻

$f \sim i$

$v_e - v_f \sim u_e - u_f$

$B \sim 1/R$

弹簧 ～ 电感

$f \sim i$

$v_c - v_d \sim u_c - u_d$

$K \sim 1/L$

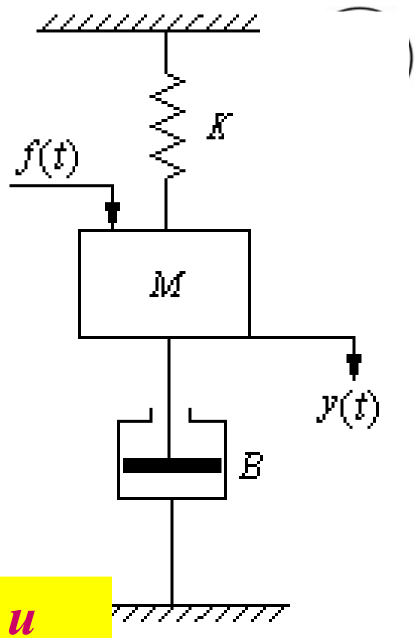
质量块 ～ 一端接参考点的电容

$v \sim u$

$f_a - f_b \sim i_a - i_b$(其它支路流入电容的总电流)

$M \sim C$

例 图中系统处于无重力场中，当外力 $f(t)$ 作用于质量 M 时，M 将产生位移 $y(t)$，试列写F(s)到Y(s)传递函数



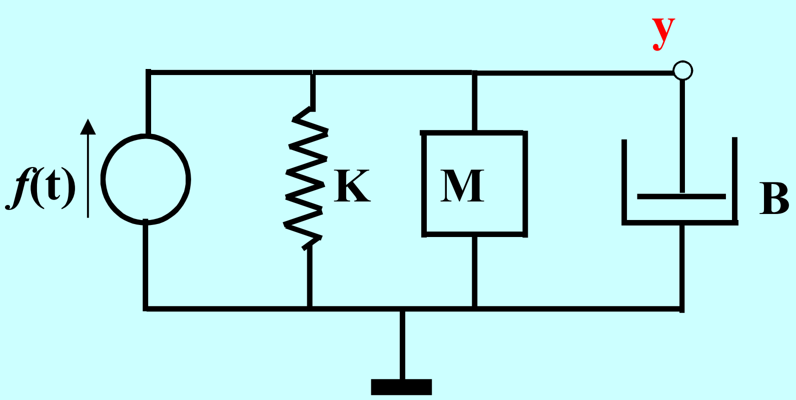
方法二（相似系统）

第一步：绘参考点

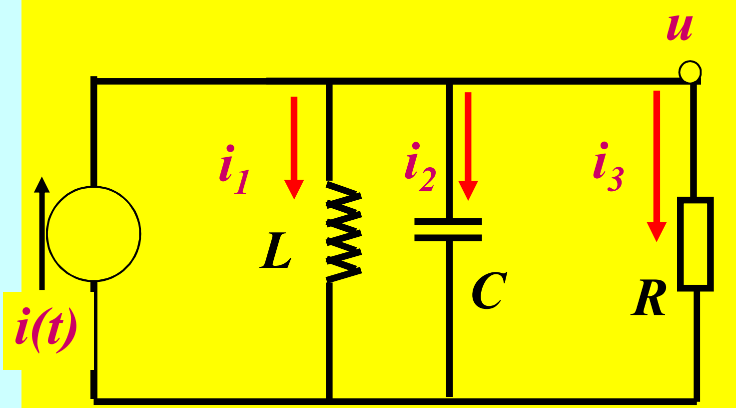
第二步：绘质量块和输入力

第三步：根据同v则同结点原则，绘阻尼器和弹簧等

第四步：f作用在M上



相应的机械网络图



第四步：将位移作结点处变量，再用结点法或回路法

结点法：$f = f_K + f_M + f_B$

$$f_K = \frac{K}{D}v = Ky$$

$$f_B = Bv = BDy$$

$$f_M = MDv = MD^2y$$

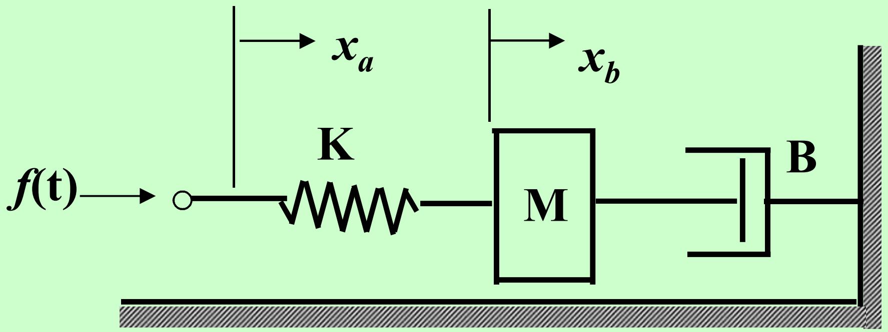
$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/M}{s^2 + (B/M)Bs + K/M}$$

机械平移系统的机理建模

例 系统结构如图所示，f为弹簧左端受力， x_a和x_b分别为弹簧左、右端的位移，试求f到x_a的传递函数、f到x_b的传递函数、 x_a到x_b的传递函数

（默认情况下，地面光滑）

方法一（质量块受力分析）



(a) 简单的质量-弹簧-阻尼机械系统

第一步：关于M

$$f_K(t)-f_B(t)=M\frac{\mathrm{d}^2x_b}{\mathrm{d}t^2}$$

其中， $f_B(t)$ — 阻尼器力

$f_K(t)$ — 弹簧力

第二步：关于B和K

$$f_B(t)=B\frac{\mathrm{d}x_b(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$f_K(t)=f(t)=K(x_a(t)-x_b(t))$$

第三步：

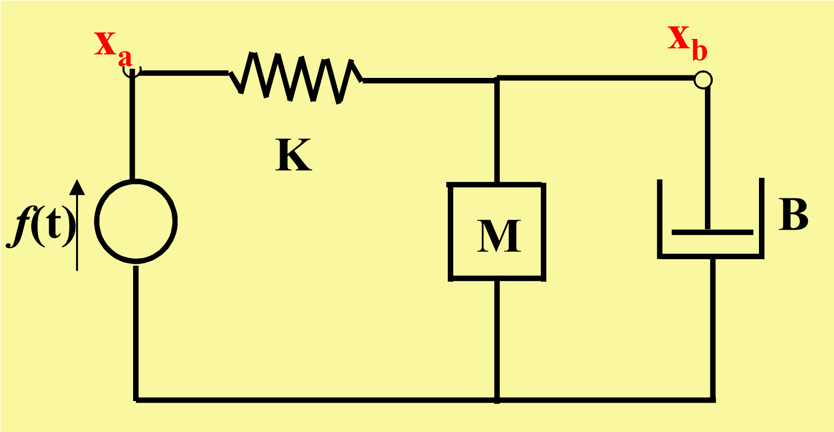
$$\frac{X_b(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Bs}$$

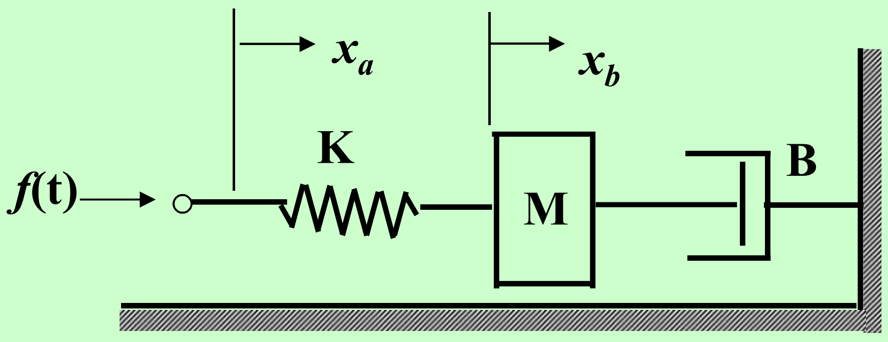
$$\frac{X_b(s)}{X_a(s)}=\frac{K}{Ms^2+Bs+K}$$

$$\frac{X_a(s)}{F(s)}=\frac{X_b(s)}{F(s)}\bigg/\frac{X_b(s)}{X_a(s)}=\frac{Ms^2+Bs+K}{MKs^2+BKs}$$

例 系统结构如图所示，f为弹簧左端受力，x_a和x_b分别为弹簧左、右端的位移，试求f到x_a的传递函数、f到x_b的传递函数、x_a到x_b的传递函数

方法二（相似系统）





(a) 简单的质量-弹簧-阻尼机械系统

结点 a: $f = f_K$

结点 b: $f_K = f_M + f_B$

$$f_B(t) = B\frac{\mathrm{d}x_b(t)}{\mathrm{d}t}$$

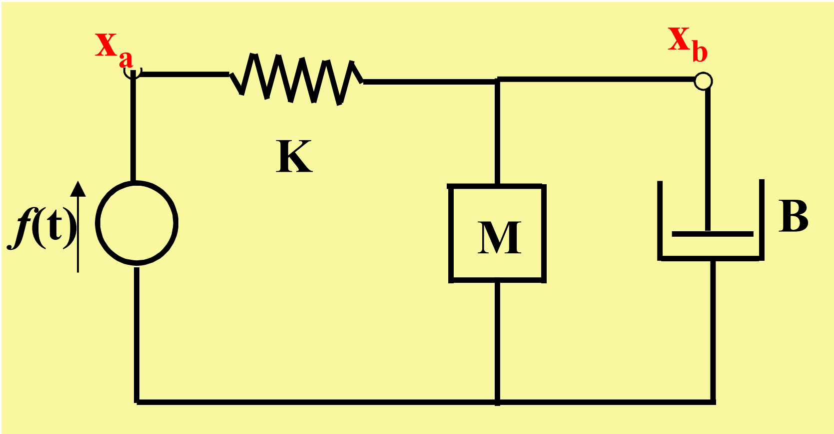
$$f_K(t) = K(x_a(t) - x_b(t))$$

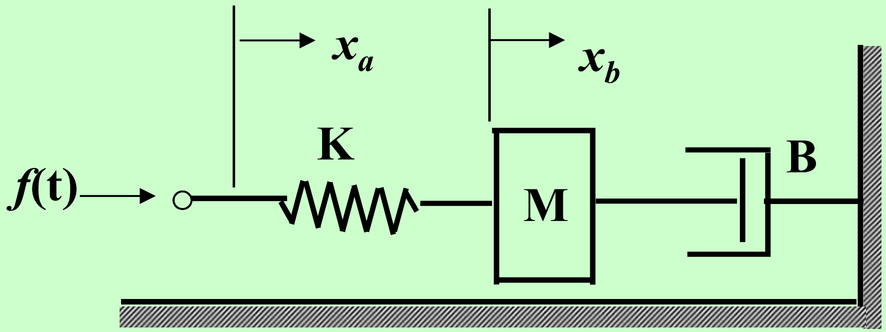
$$f_M(t) = M\frac{\mathrm{d}^2x_b(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$G_1(s) = \frac{X_a(s)}{F(s)} \qquad G_2(s) = \frac{X_b(s)}{X_a(s)} \qquad G(s) = \frac{X_b(s)}{F(s)}$$

$$f \longrightarrow \boxed{G_1(s)} \xrightarrow{x_a} \boxed{G_2(s)} \xrightarrow{x_b} \quad \Rightarrow \quad f \longrightarrow \boxed{G(s)} \xrightarrow{x_b}$$

例 系统结构如图所示， 输入f为弹簧左端受力， 输出x_b为弹簧右端的位移，试求状态空间模型





(a) 简单的质量-弹簧-阻尼机械系统

结点 a: $f = f_K$

结点 b: $f_K = f_M + f_B$

$$f_B(t) = B\frac{\mathrm{d}x_b(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\cancel{f_K(t) = K(x_a(t) - x_b(t))}$$

$$f_M(t) = M\frac{\mathrm{d}^2 x_b(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

考虑M， 取$x_1 = x_b, x_2 = \dot{x}_b$

注意到B的状态正是$x_1 = x_b$

2阶系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

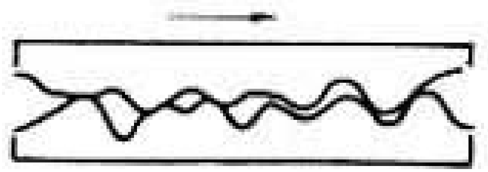
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

机械平移系统的机理建模

摩擦 当物体与另一物体沿接触面的切线方向运动或有相对运动的趋势时，在两物体的接触面之间有阻碍它们相对运动的作用力，这种力叫摩擦力。接触面之间的这种现象或特性叫“摩擦”。

摩擦分为静摩擦和动摩擦

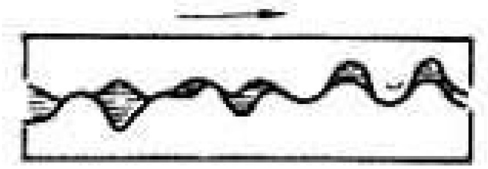
按动摩擦表面的润滑状态，摩擦可分为干摩擦、边界摩擦和流体摩擦



干摩擦

干摩擦：摩擦副表面直接接触，没有润滑剂存在时的摩擦。

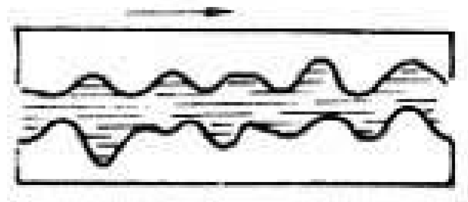
干摩擦力=法向力×干摩擦系数



边界摩擦

流体摩擦：流体润滑状态下的摩擦称为流体摩擦。当流体为层流状时

流体摩擦力=物体相对运动速度×流体摩擦系数



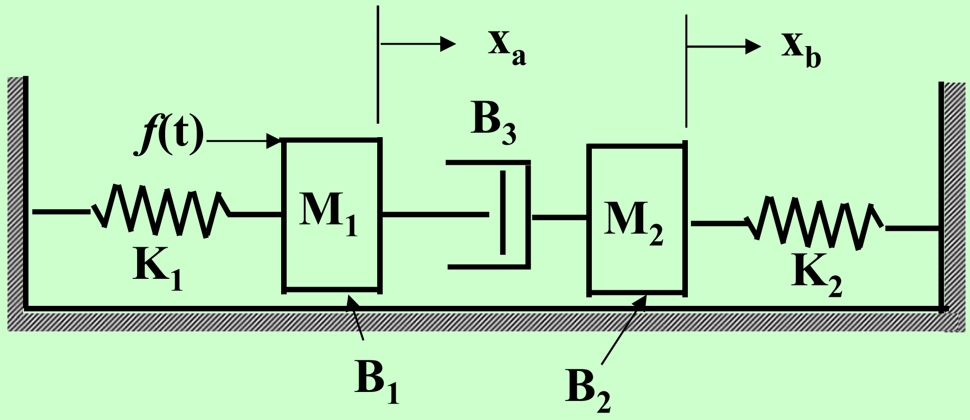
流体摩擦

边界摩擦相当于干摩擦和流体摩擦之间的一种状态

本课程机械系统建模中的动摩擦均假设是“流体为层流状的流体摩擦”

机械平移系统的机理建模

例　在图(a)中，输入外力 *f* 作用于质量 M_1，考虑表面存在滑动摩擦B_1、B_2，输出为 M_2 的位移x_b，试求状态空间模型



图(a) 多单元机械传递系统

地面摩擦相当于一端接参考点的阻尼器

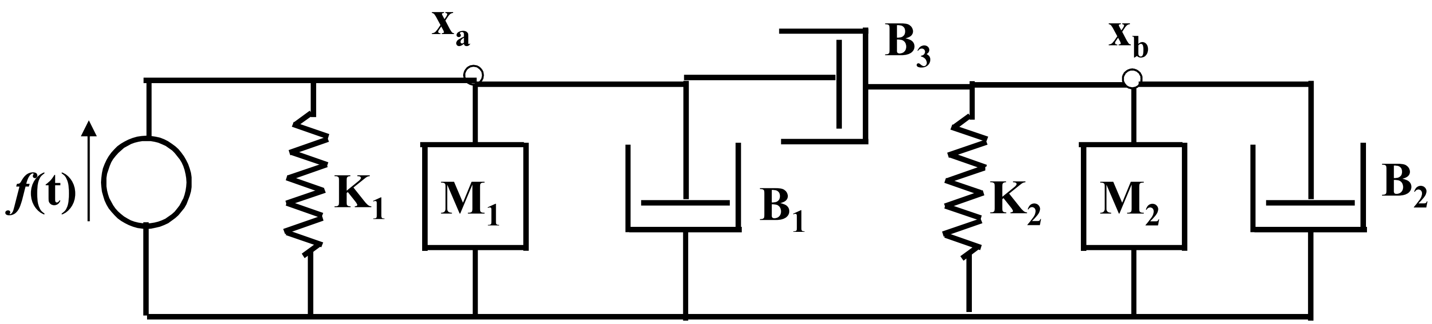


图 (b) 相应的机械网络图

机械平移系统的机理建模

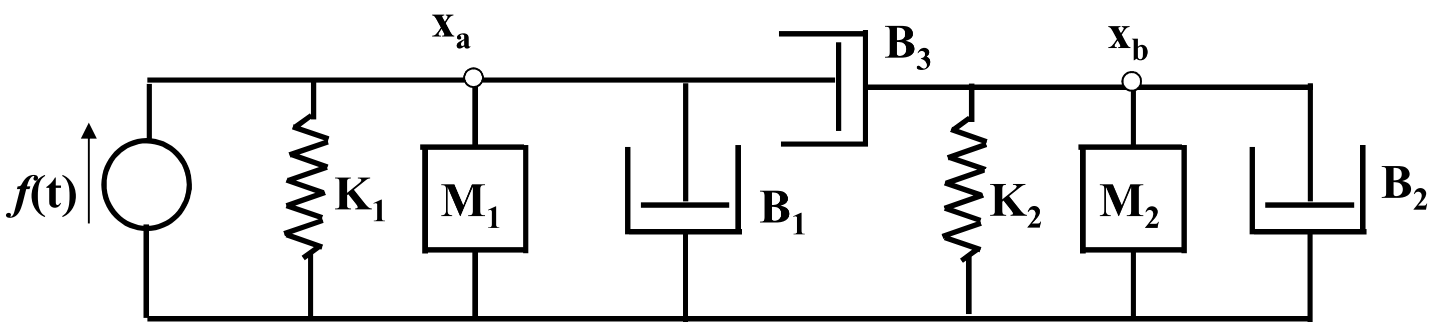
- 各结点的合力为零

结点 a: $(M_1D^2+B_1D+B_3D+K_1)x_a-(B_3D)x_b=f$

结点 b: $-(B_3D)x_a+(M_2D^2+B_2D+B_3D+K_2)x_b=0$

方程中的每一项都是力

- 机械系统的结点方程类似于电路的结点方程，可使用同样的规则



图(b) 相应的机械网络图

机械平移系统的机理建模

节点 a: $(M_1D^2 + B_1D + B_3D + K_1)x_a - (B_3D)x_b = f$

节点 b: $-(B_3D)x_a + (M_2D^2 + B_2D + B_3D + K_2)x_b = 0$

$$M_1Dx_4 = f - B_1x_4 - B_3x_4 - K_1x_3 + B_3x_2$$

$$M_2Dx_2 = B_3x_4 - B_2x_2 - B_3x_2 - K_2x_1$$

$$y = x_1$$

考虑M$_2$，取$x_1 = x_b, x_2 = \dot{x}_b$

注意到B$_2$的状态正是$x_1 = x_b$

考虑M$_1$，取$x_3 = x_a, x_4 = \dot{x}_a$

注意到B$_1$的状态正是$x_3 = x_a$

注意到B$_3$的状态正是$x_3 - x_1 = x_a - x_b$

$$u = f, y = x_b = x_1$$

机械平移系统的机理建模

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{bu}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{cx}$$

$$M_2 D x_2 = B_3 x_4 - B_2 x_2 - B_3 x_2 - K_2 x_1$$

$$\boldsymbol{M_1 D x_4 = f - B_1 x_4 - B_3 x_4 - K_1 x_3 + B_3 x_2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{B_2 + B_3}{M_2} & 0 & \dfrac{B_3}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{B_3}{M_1} & -\dfrac{K_1}{M_1} & -\dfrac{B_1 + B_3}{M_1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{M_1} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4阶系统