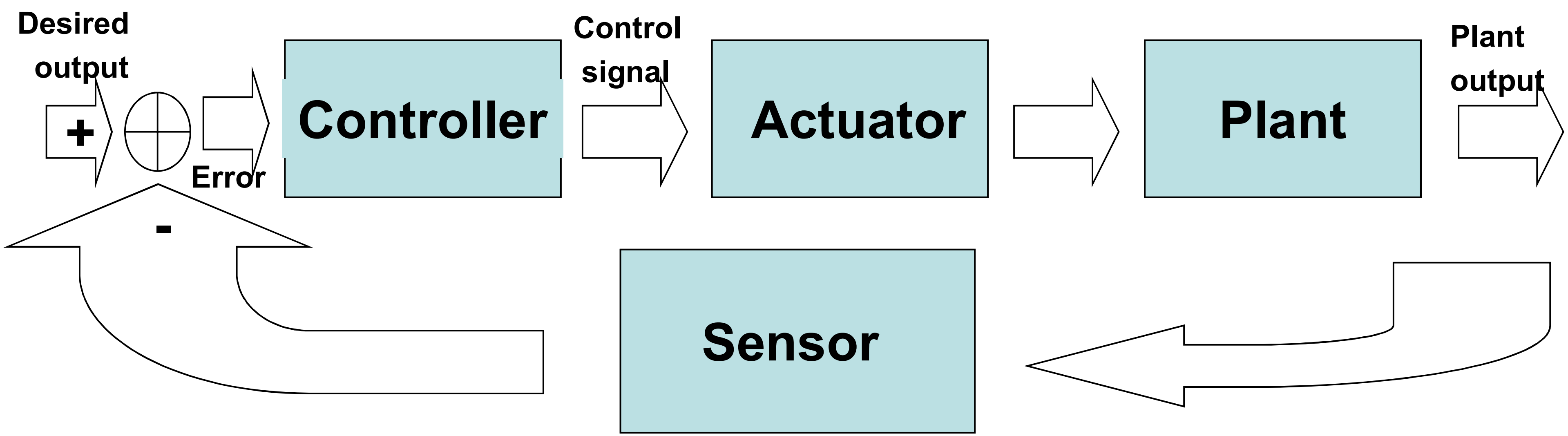
自动控制理论（甲）


浙江大学控制科学与工程学系
CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING
SINCE 1956

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous -time Control Systems

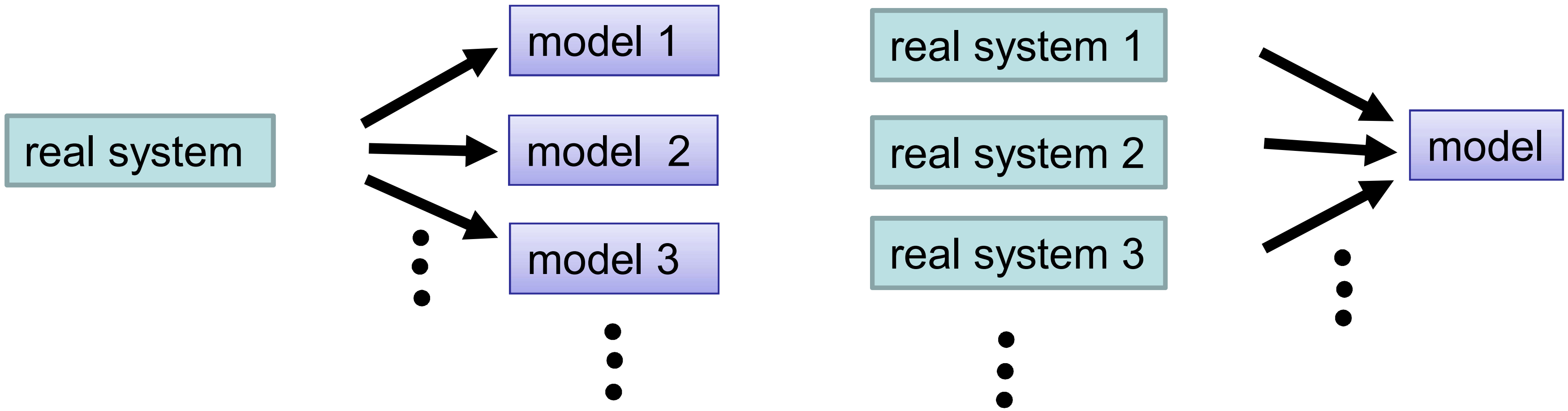


对系统进行数学描述，是设计和分析控制系统的前提

对系统进行数学描述即是建立系统的模型（建模，modeling）

系统建模 System Modeling

真实系统 ≠ 系统模型



二种建模方法

✓ 机理建模

基于电路原理建模电路系统

基于力学原理建模力学系统

⋮

✓ 数据建模(也称系统辨识)

通过大量实验，获得系统在不同输入信号

$$u_i(t) \quad i=1, 2, \ldots, m$$

下的输出信号$y_i(t)$，基于u_i和y_i数据，采用数学方法求取一个合理的映射Φ，使得$\Phi(u_i)\approx y_i$，再利用Φ得到系统的模型

工程建模不是越准确越好，要兼顾精度、简单、易用、成本等等

建模比控制难得多

控制中常用的模型

- I/O微分方程模型
- 传递函数
- 方块图
- 状态空间模型

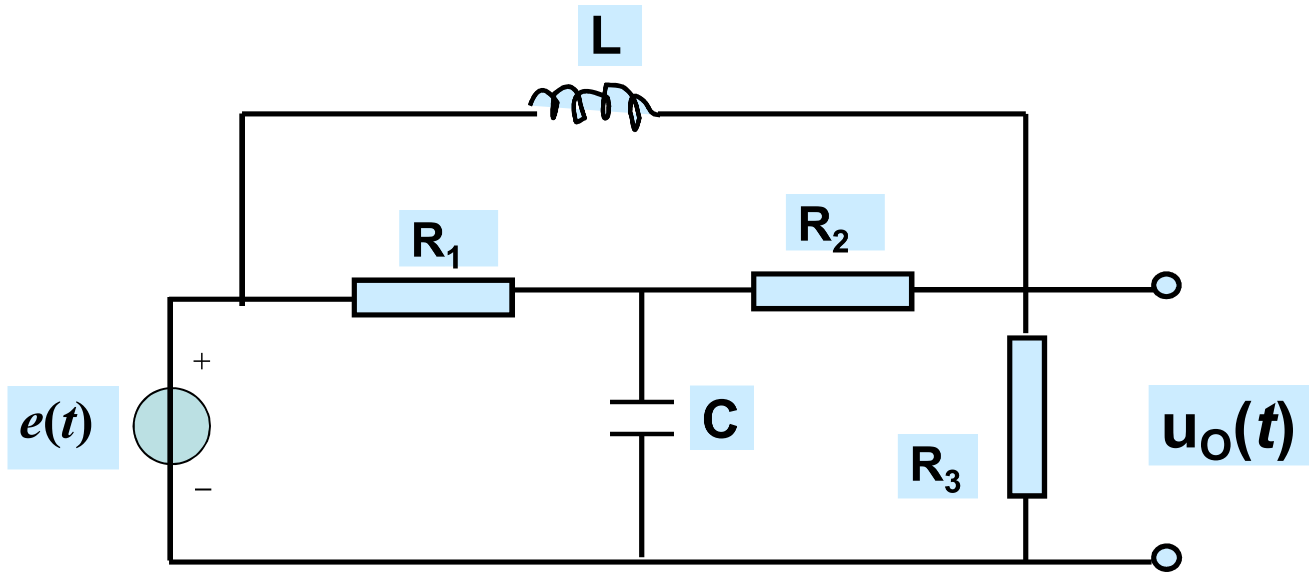
若干典型系统

- 电路系统
- 机械平移系统
- 液位系统
- 热力系统

电路系统的机理建模

- 电路系统 = 电路元件+电路结构（网络）

例



- 常用电路元件

电阻：$u(t)=Ri(t)$

电容：$C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=i(t)$

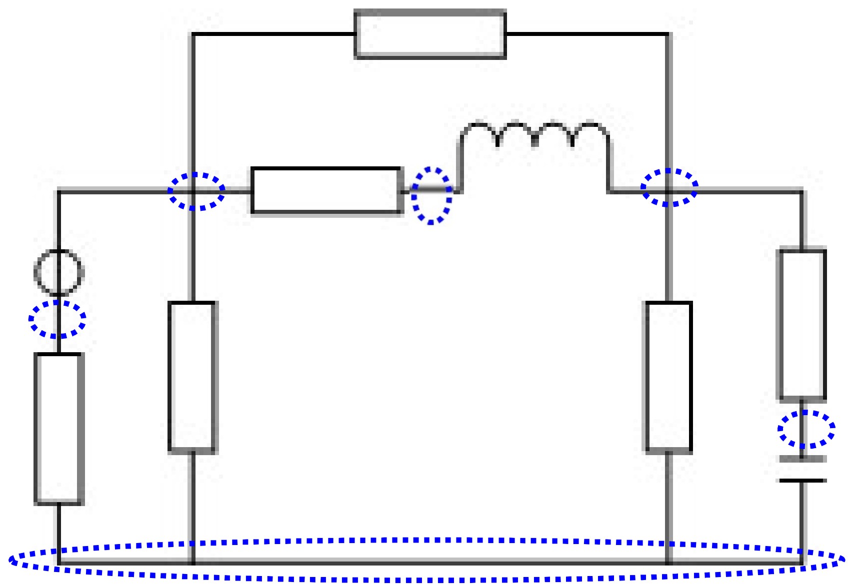
电感：$L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)$

电压源、电流源、…

电路系统的机理建模

- 电路结构(网络)的若干概念

例



支路（**branch**）：每个二端元件称为一条支路（上例**9**条支路）

结点（**node**）：二条或以上支路的连接点称为结点（上例**6**个结点）

回路（**loop**）：由支路组成的闭合路径

网孔（**mesh**）：每个网眼即为网孔（上例**4**个网孔）

网孔必是回路，但回路未必是网孔

电路系统的机理建模

- **基尔霍夫电流定律**

在任一时刻，对任一结点，其连接的全部支路电流的代数和为零

$$\sum_k i_k = 0$$

若流出结点的电流前面取“+”，则流入结点的电流前面取“－”

- **基尔霍夫电压定律**

在任一时刻，对任一回路，其上的全部支路电压的代数和为零

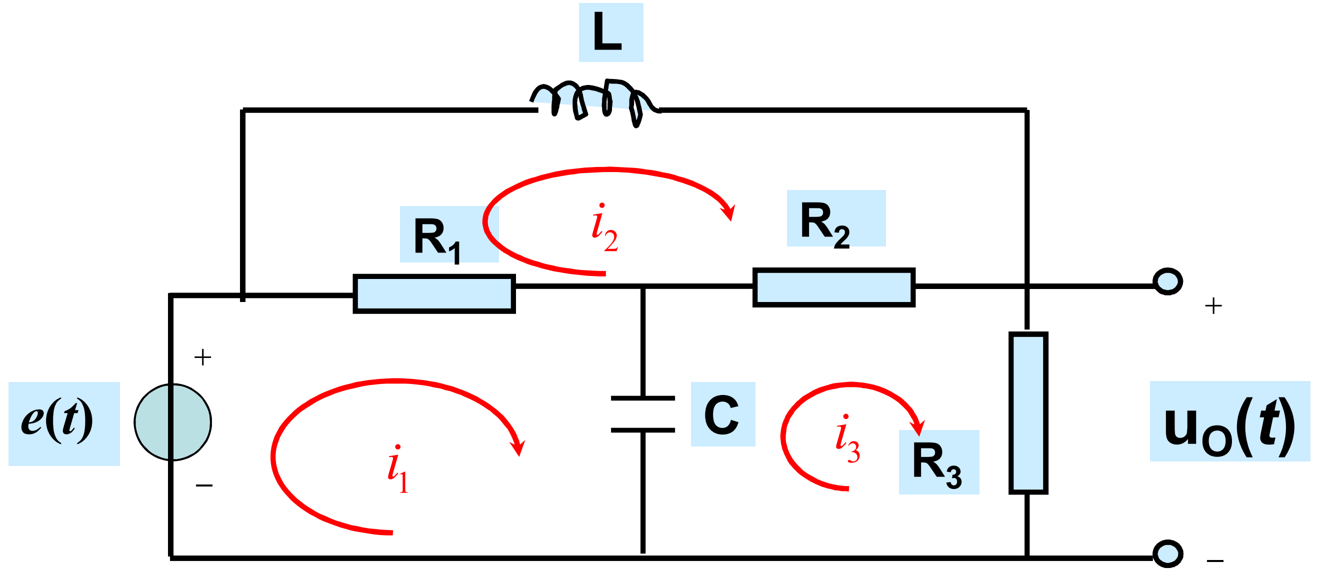
$$\sum_k u_k = 0$$

需指定回路的绕行方向（顺时针或逆时针）

与绕行方向同向的电压前面取“+”，反向的电压前面取“—”

电路系统的机理建模（I/O微分方程模型）

◆ 例：如图电路中，输入$e(t)$,输出$u_O(t)$，求输入-输出关系



回路方法：3个网孔

$$\text{记}Dx(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\ \frac{1}{D}x(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$$

Mesh 1: $$\left(R_1+\frac{1}{CD}\right)i_1-R_1i_2-\frac{1}{CD}i_3=e$$

Mesh 2: $$-R_1i_1+(R_1+R_2+LD)i_2-R_2i_3=0$$

Mesh 3: $$-\frac{1}{CD}i_1-R_2i_2+\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right)i_3=0$$

输出电压

$$u_o=R_3i_3$$

$$\left(R_1+\frac{1}{CD}\right)i_1-R_1i_2-\frac{1}{CD}i_3=e$$
$$-R_1i_1+(R_1+R_2+LD)i_2-R_2i_3=0$$
$$-\frac{1}{CD}i_1-R_2i_2+\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right)i_3=0$$

$$u_o=R_3i_3$$

$$\begin{bmatrix} R_1+\dfrac{1}{CD} & -R_1 & -\dfrac{1}{CD} \\ -R_1 & R_1+R_2+LD & -R_2 \\ -\dfrac{1}{CD} & -R_2 & R_2+R_3+\dfrac{1}{CD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta=\left(R_1+\frac{1}{CD}\right)(R_1+R_2+LD)\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right)-\frac{R_1R_2}{CD}-\frac{R_1R_2}{CD}$$
$$-\frac{1}{C^2D^2}(R_1+R_2+LD)-R_2^2\left(R_1+\frac{1}{CD}\right)-R_1^2\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right)$$
$$=R_1R_2R_3+\frac{L}{C}(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2+R_3)LD+(R_1+R_2)\frac{R_3}{CD}$$

$$i_3=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} R_1+\dfrac{1}{CD} & -R_1 & e \\ -R_1 & R_1+R_2+LD & 0 \\ -\dfrac{1}{CD} & -R_2 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left(R_1R_2+\frac{L}{C}+\frac{R_1+R_2}{CD}\right)e$$

$$\Delta = R_1R_2R_3 + \frac{L}{C}\left(R_1 + R_2 + R_3\right) + R_1\left(R_2 + R_3\right)LD + \left(R_1 + R_2\right)\frac{R_3}{CD}$$

$$u_o = R_3 i_3$$

$$i_3 = \frac{1}{\Delta}\left(R_1R_2 + \frac{L}{C} + \frac{R_1 + R_2}{CD}\right)e$$

$$i_3 = \frac{R_1R_2 + \frac{L}{C} + \frac{R_1 + R_2}{CD}}{R_1R_2R_3 + \frac{L}{C}\left(R_1 + R_2 + R_3\right) + R_1\left(R_2 + R_3\right)LD + \left(R_1 + R_2\right)\frac{R_3}{CD}}e$$

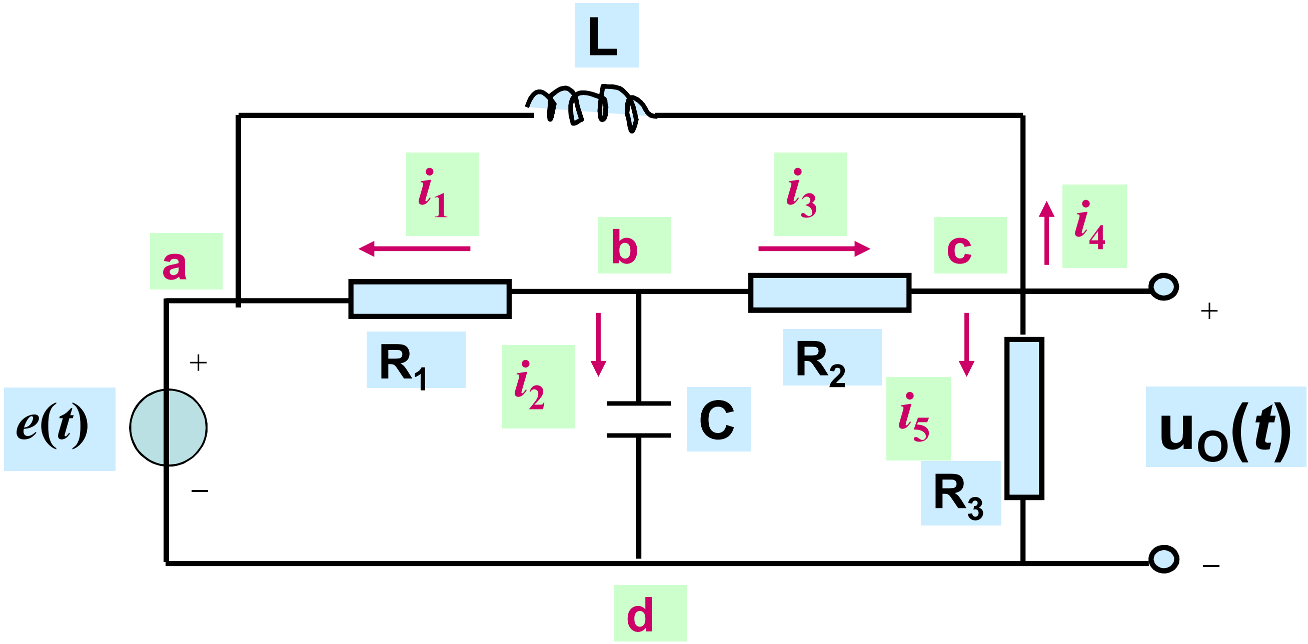
$$= \frac{R_1R_2CD + LD + R_1 + R_2}{R_1R_2R_3CD + \left(R_1 + R_2 + R_3\right)LD + R_1\left(R_2 + R_3\right)LCD^2 + \left(R_1 + R_2\right)R_3}e$$

$$u_o = \frac{R_1R_2R_3CD + R_3LD + R_3\left(R_1 + R_2\right)}{R_1R_2R_3CD + \left(R_1 + R_2 + R_3\right)LD + R_1\left(R_2 + R_3\right)LCD^2 + \left(R_1 + R_2\right)R_3}e$$

$$\left(R_1R_2R_3CD + \left(R_1 + R_2 + R_3\right)LD + R_1\left(R_2 + R_3\right)LCD^2 + \left(R_1 + R_2\right)R_3\right)u_o$$
$$= \left(R_1R_2R_3CD + R_3LD + R_3\left(R_1 + R_2\right)\right)e$$

$$R_1\left(R_2 + R_3\right)LC\ddot{u}_o + \left(R_1R_2R_3C + \left(R_1 + R_2 + R_3\right)L\right)\dot{u}_o + \left(R_1 + R_2\right)R_3u_o$$
$$= \left(R_1R_2R_3C + R_3L\right)\dot{e} + R_3\left(R_1 + R_2\right)e$$

电路系统的机理建模（I/O微分方程模型）



结点方法：4个结点，d参考点，电压源电流仅与a有关 标出各支路参考电流方向

对于结点b $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ 对于结点c $-i_3 + i_4 + i_5 = 0$

用结点电压表示

$$\frac{u_b - e}{R_1} + CDu_b + \frac{u_b - u_o}{R_2} = 0$$

$$\frac{u_o - u_b}{R_2} + \frac{u_o}{R_3} + \frac{1}{LD}(u_o - e) = 0$$

用与回路法类似的整理步骤可得I/O微分方程模型