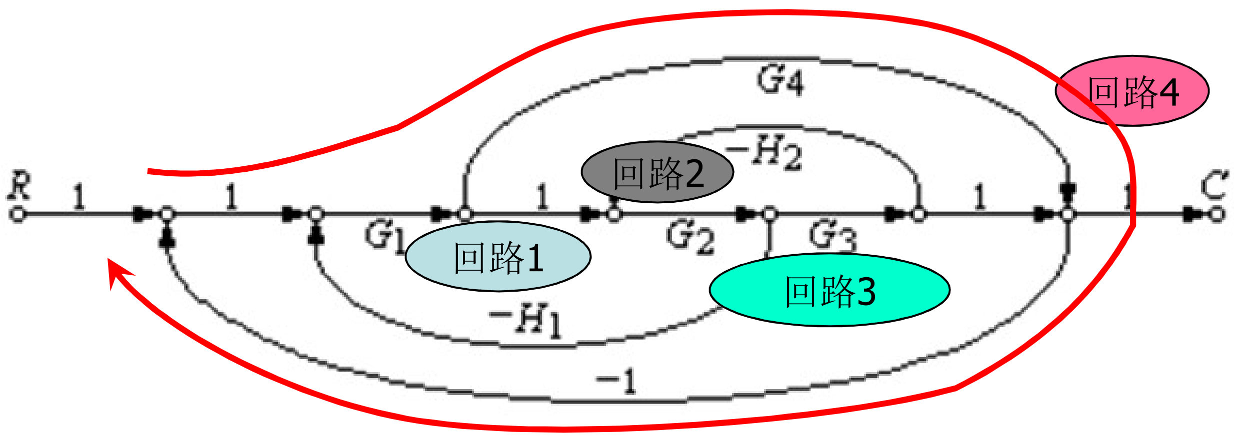
电路系统的机理建模（信号流图）

梅逊增益公式

一个信号流图中的2个回路没有任何公共节点，则称这2个回路不接触，反之称这2个回路接触



回路2与回路4不接触
其它任意2个回路接触

$\sum L_1$ ：所有不同回路的回路增益之和

$\sum L_2$ ：每两个互不接触回路的回路增益乘积之和

$\sum L_3$ ：每三个互不接触回路的回路增益乘积之和

………

信号流图的特征式 $\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots\cdots$

电路系统的机理建模（信号流图）

n 从源节点到阱节点所有前向通路的条数

T_i 从源节点到阱节点的第i条前向通路的增益

一个信号流图中的1个回路和1条前向通路没有任何公共节点，则称它们不接触，反之称它们接触

Δ_i 在Δ中，将与第i条前向通路相接触的回路的增益置0后所得到的结果，称为余子式

T 从源节点到阱节点的总传输增益

梅逊增益公式

$$T = \frac{1}{\Delta}\sum_{i}^{n} T_i \Delta_i$$

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots\cdots$$

注意：当前向通道接触所有的回路时，Δ_i 等于 1

电路系统的机理建模（信号流图）

信号流图（SFG）分析

- 一般地，任意复杂系统的 SFG 如图 a 所示。

（注意，所有的源节点在系统框图左边，而所有的阱节点在系统框图右边）

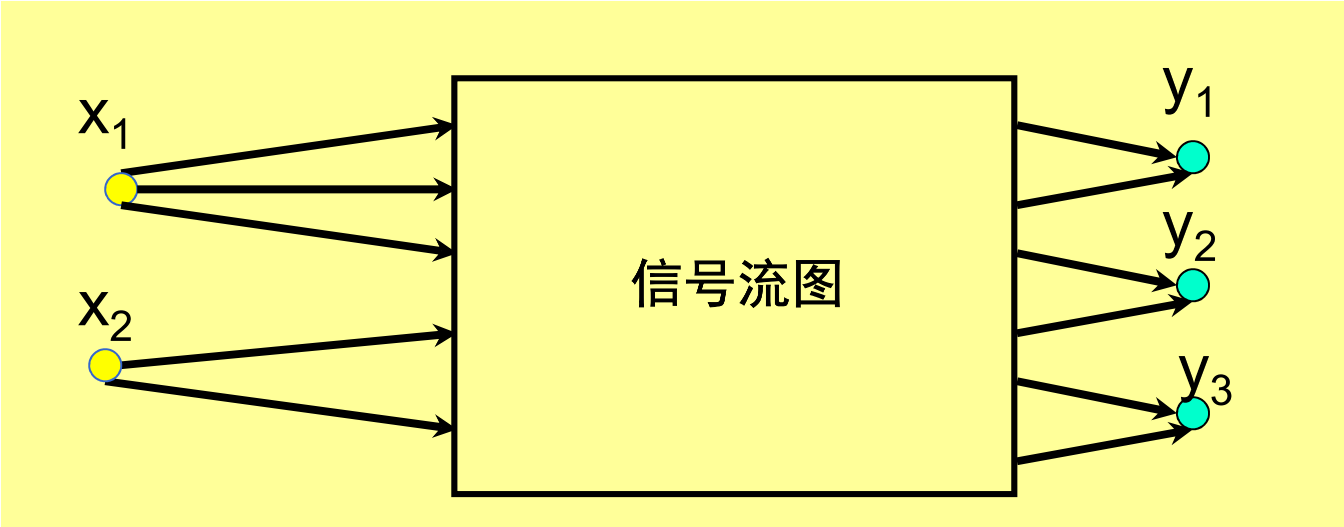
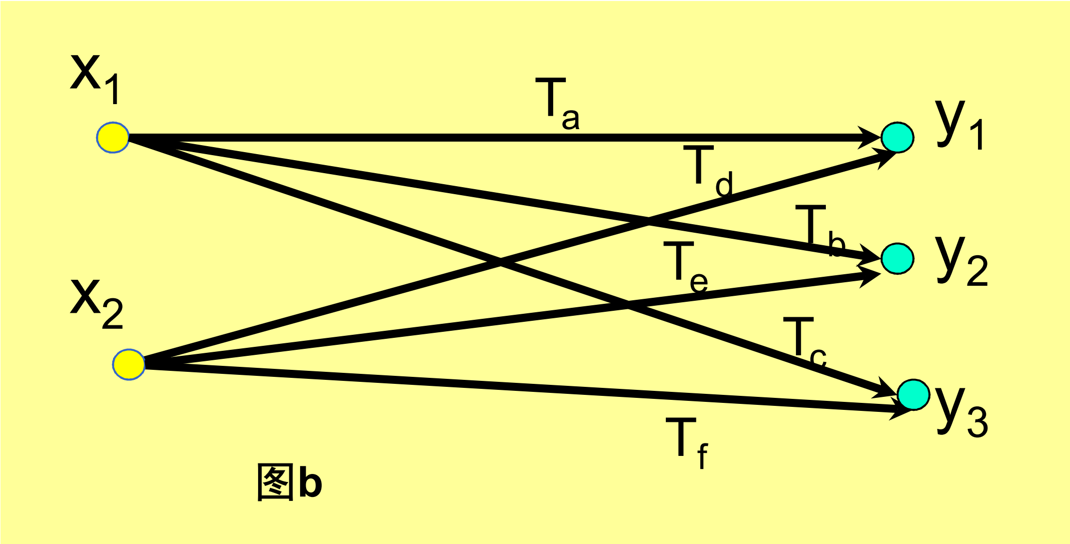


图 a

电路系统的机理建模（信号流图）

- 内部节点的作用效果可以通过梅逊增益公式求出T_a, T_b, T_c, T_d, T_e 和 T_f，从而得到如图 b 所示的等效图

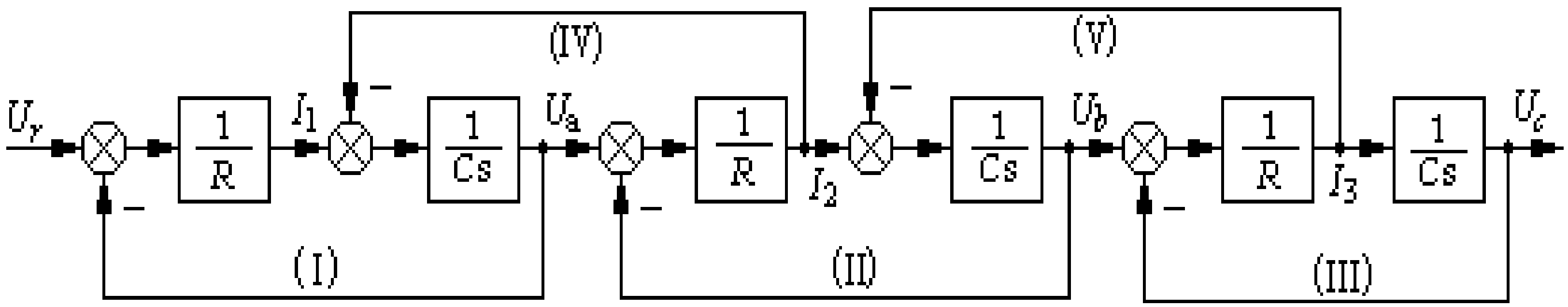


图b

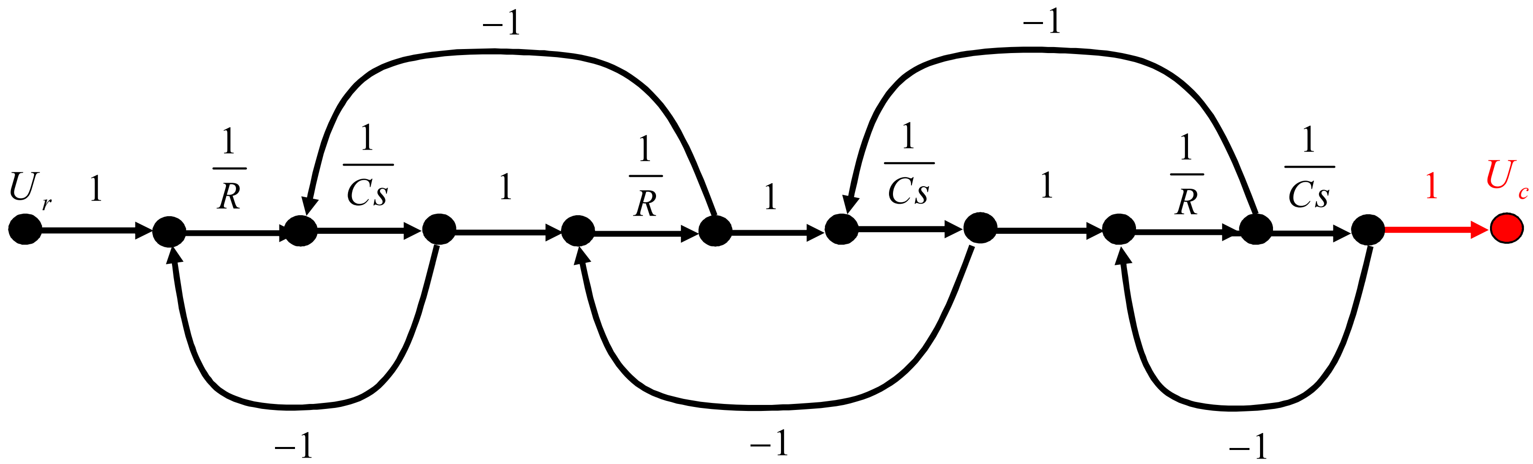
$$
\begin{aligned}
y_1 &= T_a x_1 + T_d x_2 \\
y_2 &= T_b x_1 + T_e x_2 \\
y_3 &= T_c x_1 + T_f x_2
\end{aligned}
$$

电路系统的机理建模（信号流图）

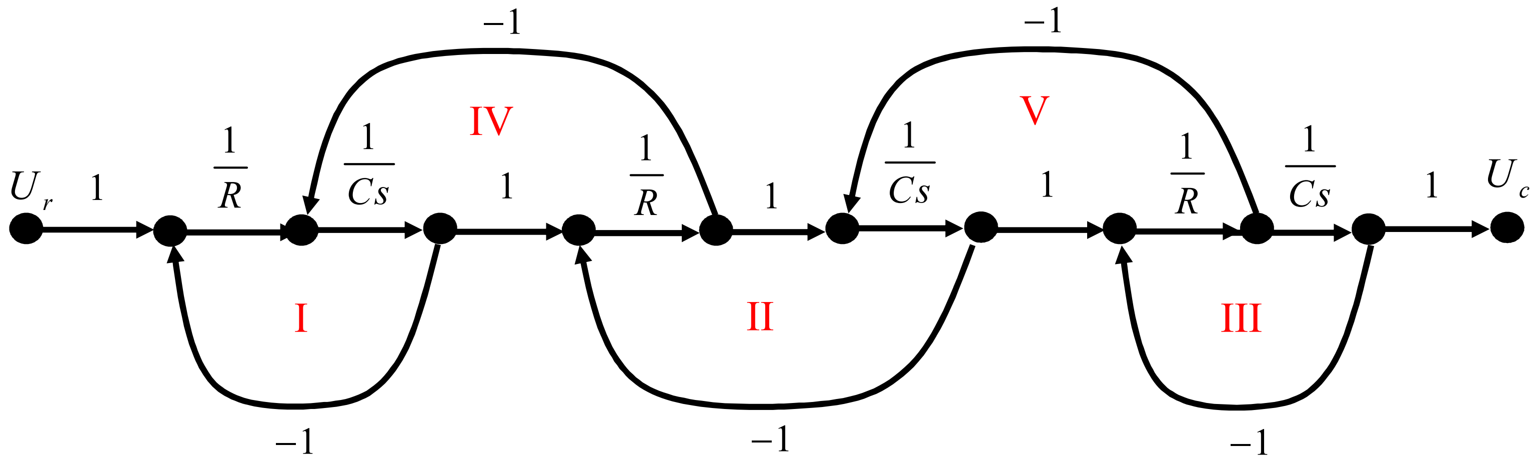
例：针对如下图所示系统，求取U_c/U_r



解：



电路系统的机理建模（信号流图）



5 个回路 $W_1 = W_2 = \cdots = W_5 = -\frac{1}{RCs}$　　$\sum L_1 = -\frac{5}{RCs}$

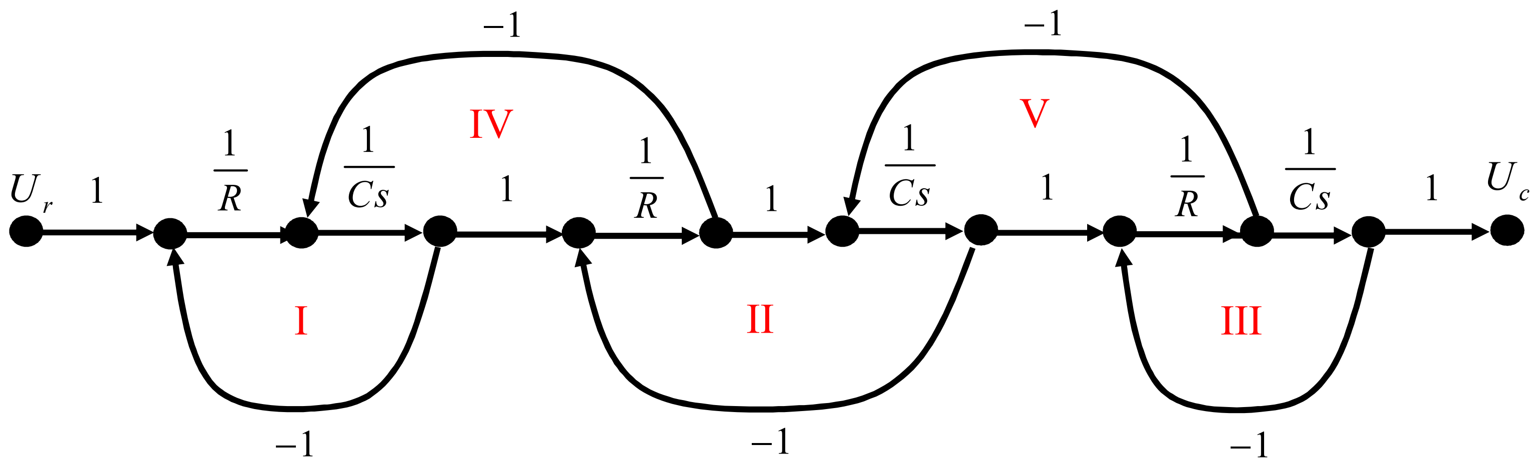
6 组两两互不接触回路，Ⅰ-Ⅱ、Ⅰ-Ⅲ、Ⅰ-Ⅴ、Ⅱ-Ⅲ、Ⅲ-Ⅳ 及 Ⅳ-Ⅴ

$$\sum L_2 = 6\left(-\frac{1}{RCs}\right)\left(-\frac{1}{RCs}\right) = \frac{6}{R^2C^2s^2}$$

1组三个互不接触的回路，Ⅰ-Ⅱ-Ⅲ

$$\sum L_3 = \left(-\frac{1}{RCs}\right)\left(-\frac{1}{RCs}\right)\left(-\frac{1}{RCs}\right) = -\frac{1}{R^3C^3s^3}$$

电路系统的机理建模（信号流图）

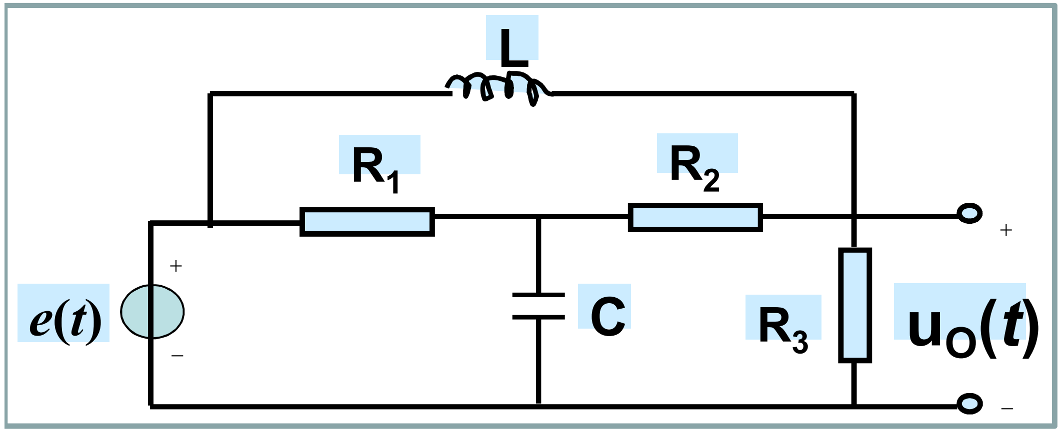


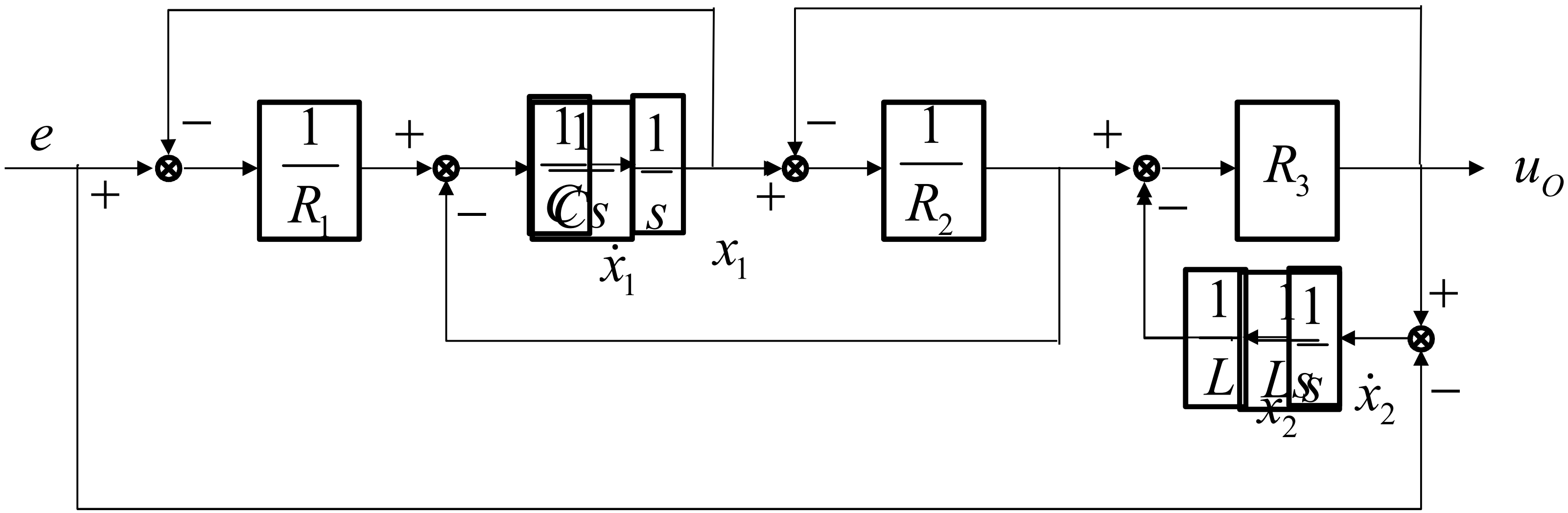
$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 = 1 + \frac{5}{RCs} + \frac{6}{R^2C^2s^2} + \frac{1}{R^3C^3s^3}$$

1 条前向通道，n=1 $T_1 = \frac{1}{R^3C^3s^3}$ 该前向通道接触所有回路，**Δ_1=1**

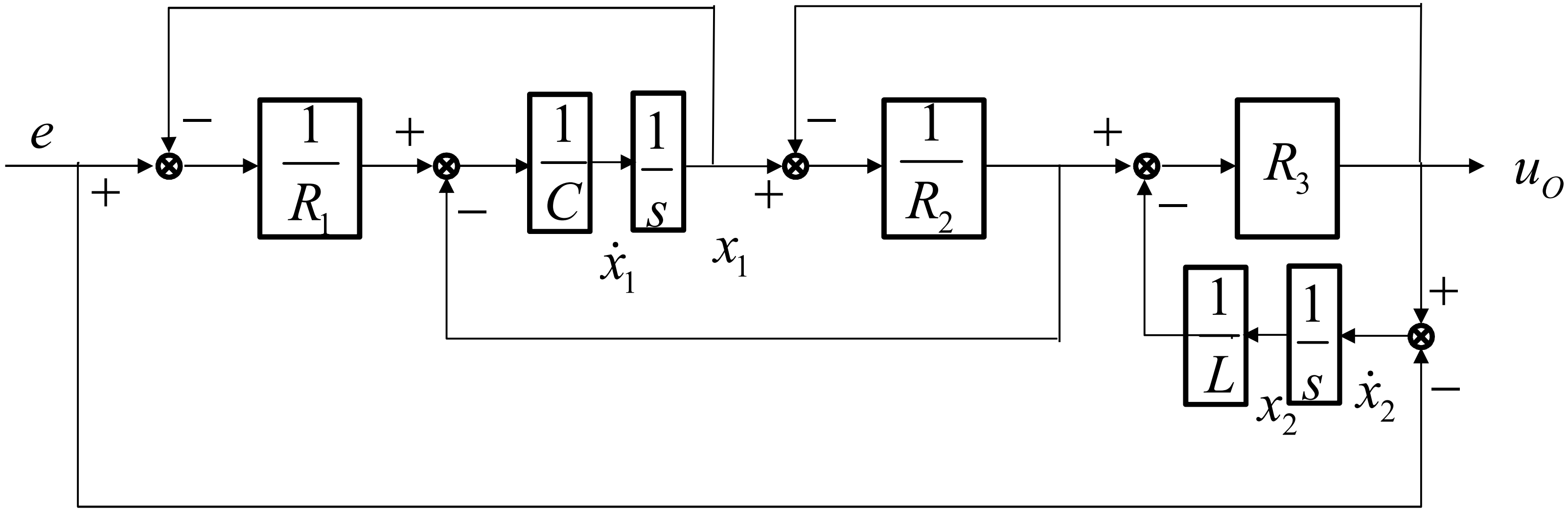
$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{R^3C^3s^3}}{1 + \frac{5}{RCs} + \frac{6}{R^2C^2s^2} + \frac{1}{R^3C^3s^3}} = \frac{1}{R^3C^3s^3 + 5R^2C^2s^2 + 6RCs + 1}$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）





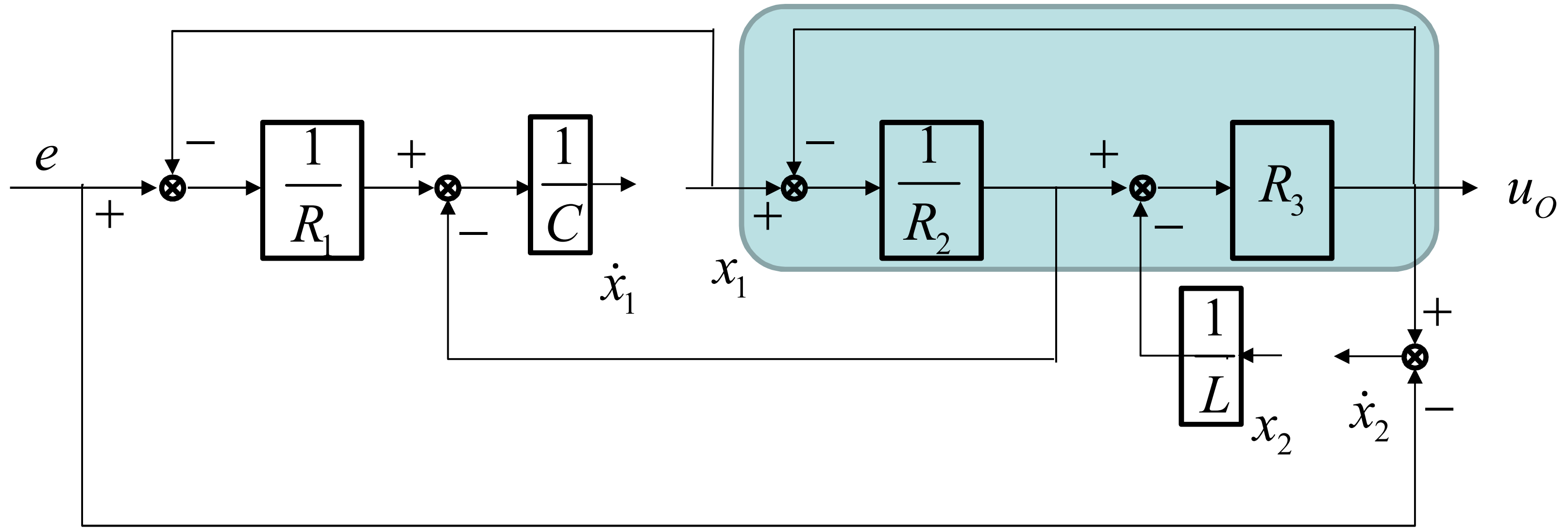
电路系统的机理建模（状态空间模型）

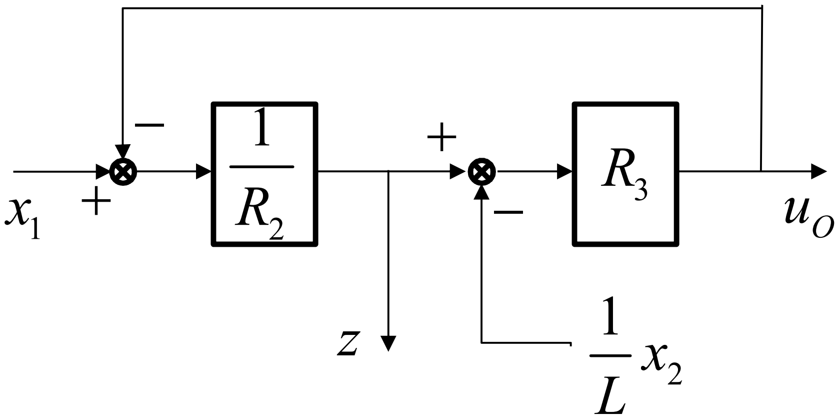


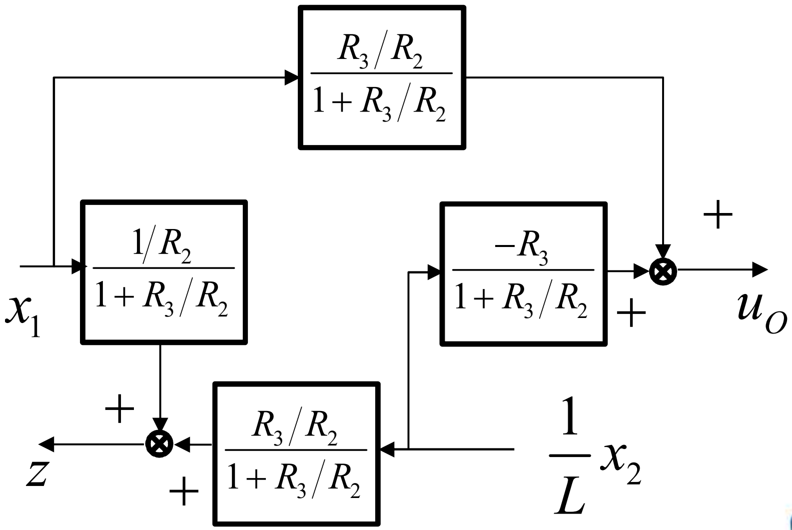
在任何时刻，若已知积分器的输出x_1和x_2，则可由e、x_1和x_2计算出其他系统变量

利用x_1和x_2建立系统模型？

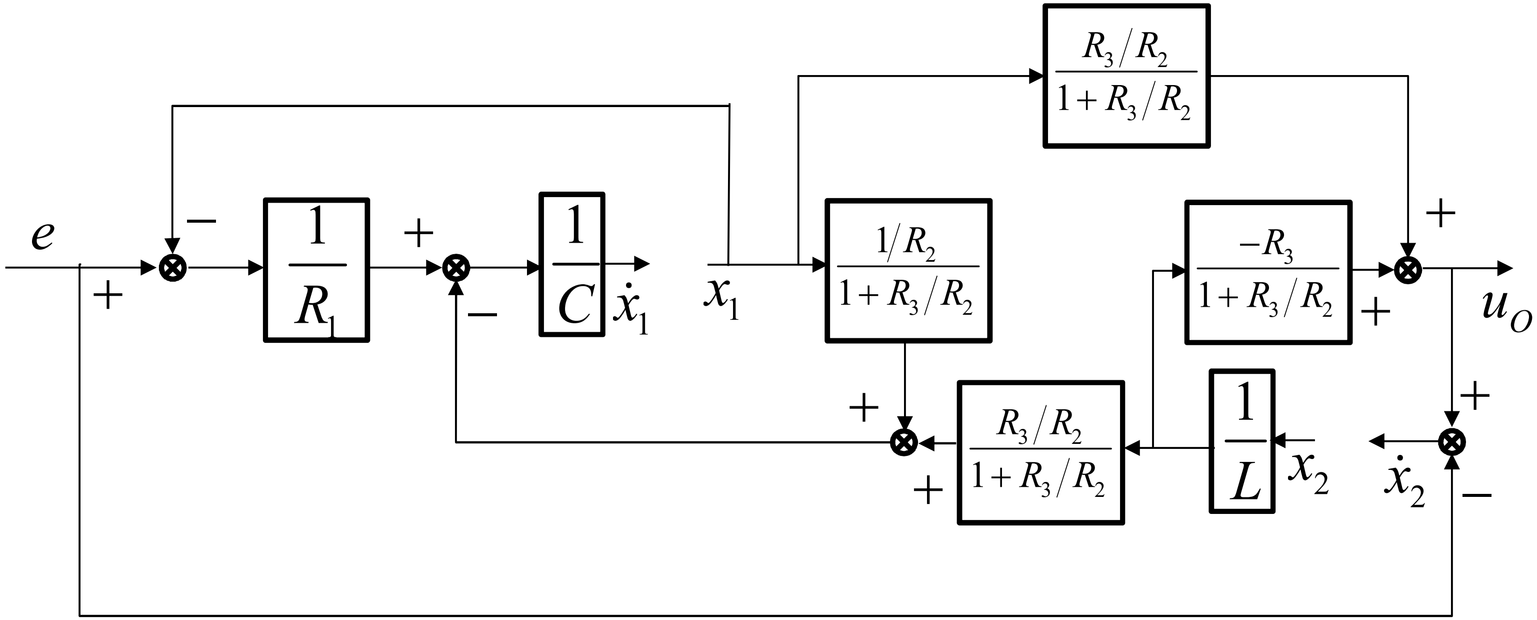
电路系统的机理建模（状态空间模型）







电路系统的机理建模（状态空间模型）



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{R_1 C}(e - x_1) - \frac{1}{C}\left[\frac{1/R_2}{1+R_3/R_2}x_1 + \left(\frac{R_3/R_2}{1+R_3/R_2}\right)\frac{1}{L}x_2\right]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{R_3/R_2}{1+R_3/R_2}x_1 - \left(\frac{R_3}{1+R_3/R_2}\right)\frac{1}{L}x_2 - e$$

$$u_O = \frac{R_3/R_2}{1+R_3/R_2}x_1 - \left(\frac{R_3}{1+R_3/R_2}\right)\frac{1}{L}x_2$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{R_1 C}(e - x_1) - \frac{1}{C}\left[\frac{1/R_2}{1+R_3/R_2}x_1 + \left(\frac{R_3/R_2}{1+R_3/R_2}\right)\frac{1}{L}x_2\right]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{R_3/R_2}{1+R_3/R_2}x_1 - \left(\frac{R_3}{1+R_3/R_2}\right)\frac{1}{L}x_2 - e$$

$$u_O = \frac{R_3/R_2}{1+R_3/R_2}x_1 - \left(\frac{R_3}{1+R_3/R_2}\right)\frac{1}{L}x_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1+R_2+R_3}{R_1(R_2+R_3)C} & -\dfrac{R_3}{(R_2+R_3)LC} \\ \dfrac{R_3}{R_2+R_3} & -\dfrac{R_2R_3}{(R_2+R_3)L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_1C}\\ -1\end{bmatrix}e$$

$$u_O = \begin{bmatrix}\dfrac{R_3}{R_2+R_3} & -\dfrac{R_2R_3}{(R_2+R_3)L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$为状态

此模型为状态空间模型

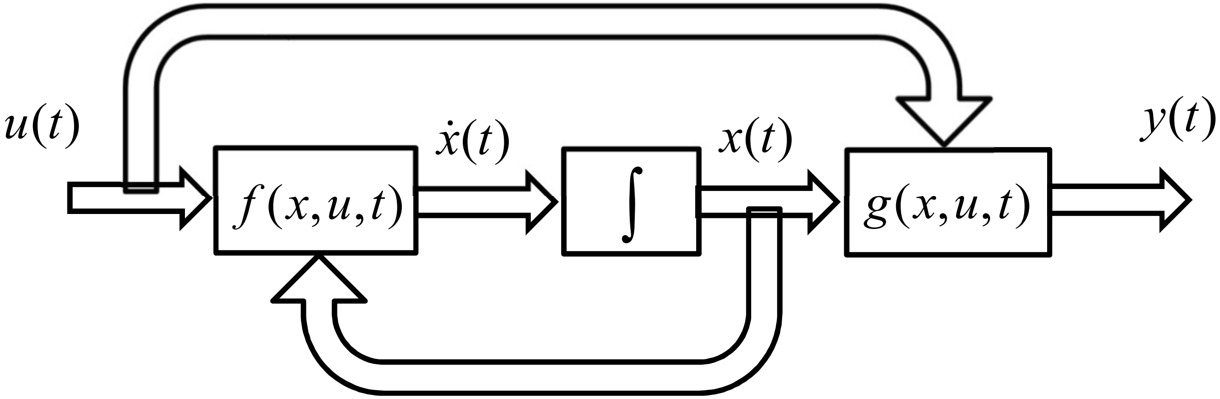
电路系统的机理建模（状态空间模型）

因果系统的状态空间模型表示为

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u,t) & \text{状态方程}\\ y=g(x,u,t) & \text{输出方程}\end{cases}\Bigg\}\ \text{状态空间表达式}$$

状态$x\in R^n$，输入$u\in R^m$，输出$y\in R^l$，时间$t\in[t_0,\infty)$

f和g是有合适维数的映射



状态向量$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$是一组合适的系统变量

（其定义及选取方法是《现代控制理论》课程的内容）

$x_i(t)$称为状态变量

以$x_1,x_2,\cdots,x_n$构成的n维空间称为状态空间

系统在任意时刻的$x(t)$在状态空间中是一个点

系统随时间的变化过程，使$x(t)$在状态空间中描绘出一条轨迹称为状态轨迹

电路系统的机理建模（状态空

因果系统的状态空间模型表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

静态(Static)模型

无状态方程和状态

无记忆（当前输出与过去输入无关）

I/O代数方程

响应无过渡过程

动态(Dynamic)模型

有状态方程和状态

有记忆（当前输出与过去输入有关）

I/O微分方程

响应有过渡过程

线性(Linear)模型与非线性(Nonlinear)模型

- 线性模型——**f(x,u,t)**和**g(x,u,t)**为线性映射
- 非线性模型——**f(x,u,t)**或**g(x,u,t)**为非线性映射

线性因果系统的状态空间模型表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases}$$

$$A(t) \in R^{n\times n}, B(t) \in R^{n\times m}, C(t) \in R^{l\times n}, D(t) \in R^{l\times m}$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）

- 定常(时不变)模型与时变模型
  - 定常模型(Time-invariant)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

  - 时变模型(Time-variant)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

- 集中(总)参数模型与分布参数模型（通常以偏微分方程描述）
  - 集中模型(Lumped model)
  - 分布参数模型(Distributed model)

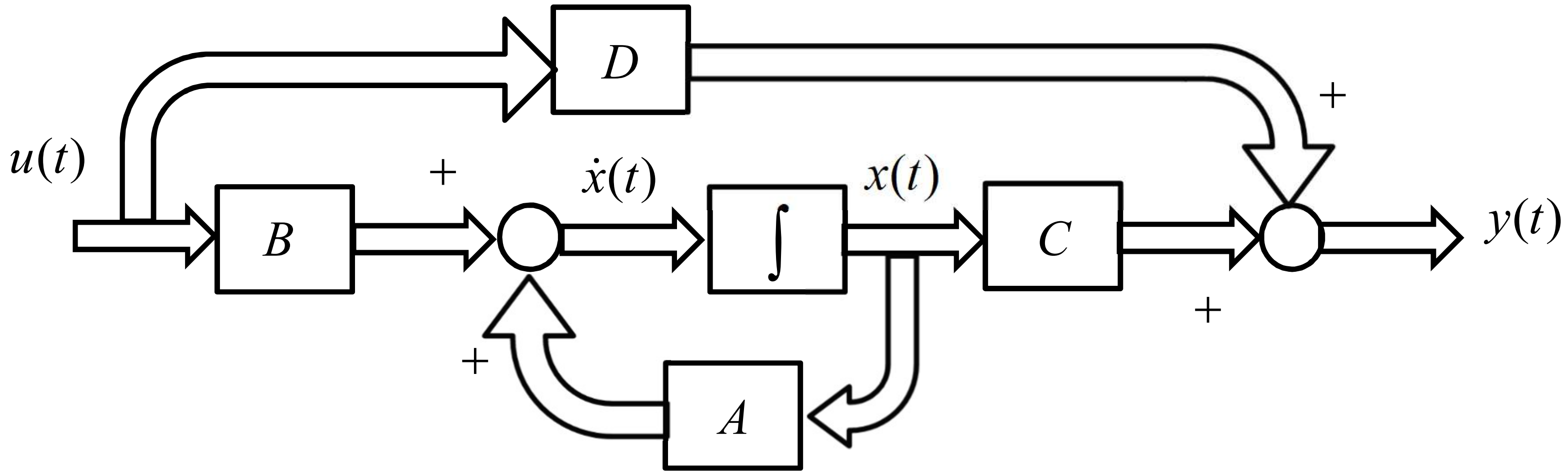
电路系统的机理建模（状态空间模型）

集总参数线性定常因果动态系统的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{l\times n}, D \in R^{l\times m}$$

本课程的主要研究对象



电路系统的机理建模（状态空间模型）

在图 3-S中，系统包含两个储能元件：电感 L 和电容 C。设状态变量为 $x_1=u_c$ 和 $x_2=i$，因此需要两个状态方程。 令 $e=u$:

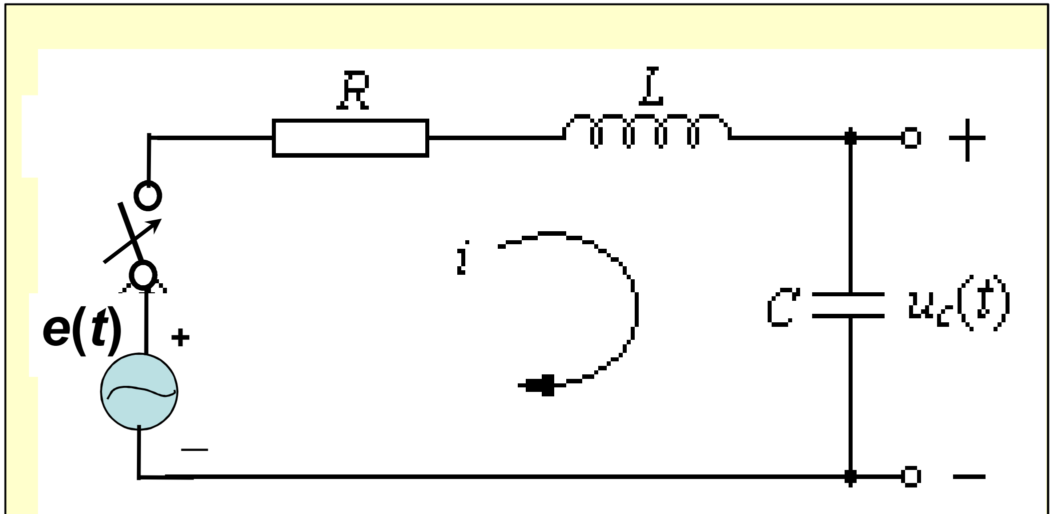


图3-S

$$\because u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau$$

$$\therefore \dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$$

$$\because u_L + u_R + u_C = e$$

及 $$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$\therefore \dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

电路系统中

电感 和电容为动态（储能）元件

电阻为静态元件

状态变量：电容的电压、电感的电流

电路系统的机理建模（状态空间模型）

将 R-L-C 电路的状态方程写成标准形式（ 2 个一阶微分方程，系统独立状态数为2）。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [u]$$

比较：同一系统的微分方程描述

$$LC\frac{du_c^2(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = e$$

- 还可以用更紧凑的矩阵形式表示： $\dot{x} = Ax + bu$

其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{n\times 1}$ 及 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}_{n\times n}$

x 是一个 $n\times 1$ 的状态向量（本例中 $n=2$；A是$n\times n$矩阵， 称为对象系数矩阵或系统矩阵

电路系统的机理建模（

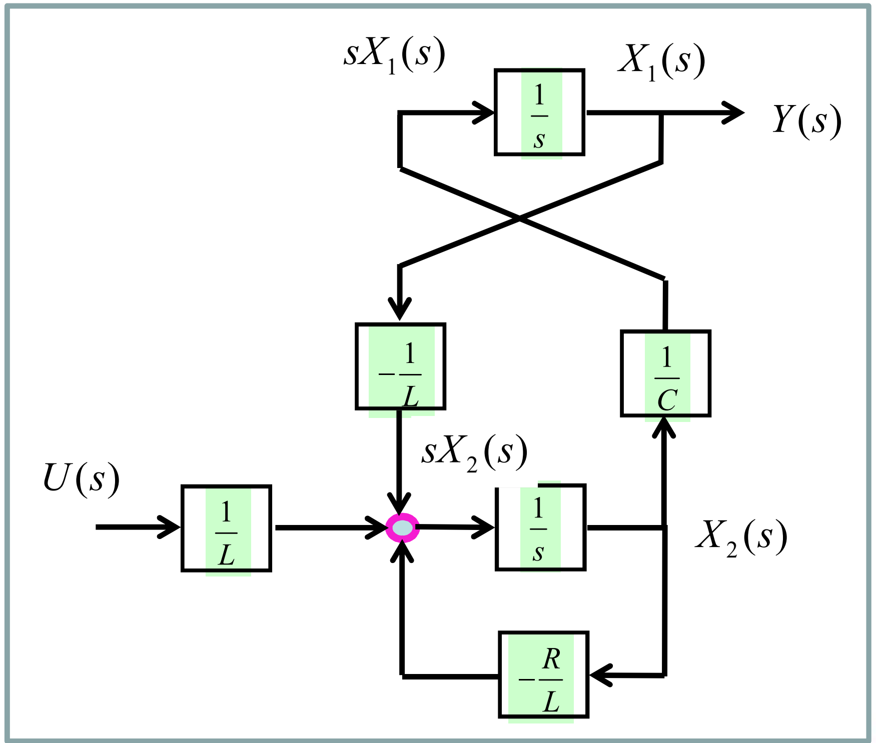
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C}\\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}[u]$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}_{n\times 1}$$

b 称为控制向量 ($n\times1$) （因为 u 是一个标量）

如果 u 是一个 m 维的输入向量，B是 $n\times m$ 的控制矩阵

➢ 如果系统输出 y(t) 是 电容电压 u，那么有 $y(t)=u_c=\mathbf{x}_1$



输出方程：

$$y(t)=Cx+Du$$
$$=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[0][u]=x_1$$

C称为输出矩阵；D称为前馈矩阵

如果 y 是 $l\times1$ 的向量，则称为输出向量

电路系统的机理建模（状态空间模型）

（1）输入变量：

$\left\{\begin{array}{l}\text{控制变量}\\\text{扰动变量}\end{array}\right.$

输入变量从外部作用于被控过程（或被控对象）

（2）输出变量：过程的被控变量，可以被量测

（3）状态变量：　一组合适的变量

电路系统的机理建模（状态空间模型）

已知状态空间模型：$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

求u到y的传递函数矩阵

拉普拉斯变换

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \Rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

当系统输入变量u和输出变量y均为标量时，系统为SISO系统， B 是列向量， C 是行向量， D 是标量， $G(s)$是传递函数

电路系统的机理建模（状态空间模型）

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$=\frac{C[adj(sI-A)]B}{\det(sI-A)}+D$$

传递函数只能描述线性定常SISO系统

本课程内容基本上以传递函数为中心

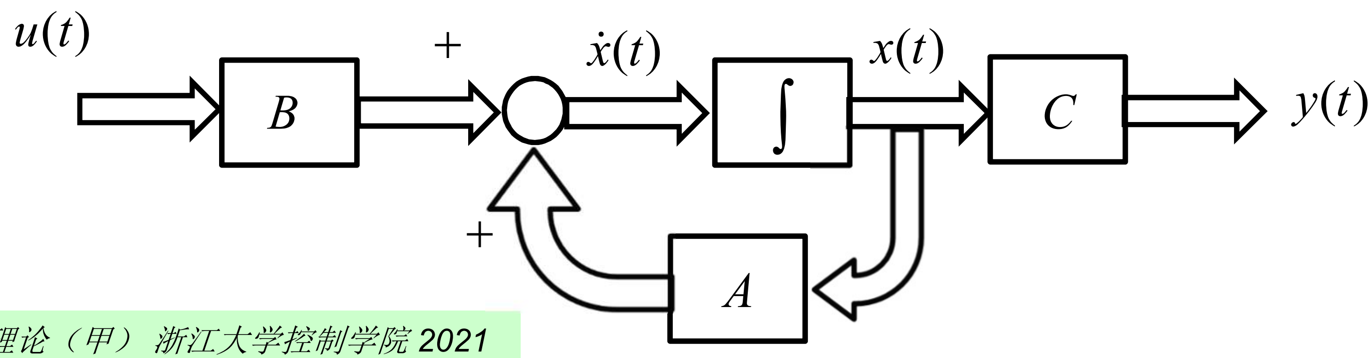
$adj(sI-A)$为$(sI-A)$矩阵的伴随矩阵(adjoint)；$det(sI-A)$为矩阵$(sI-A)$的行列式(determinant)。

若状态空间模型（A,B,C,D）的D=0，则称模型是严格因果的

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$y=Cx$$

若 $G(s)=\dfrac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$ 严格因果，当且仅当 $n>m$



电路系统的机理建模（状态空间模型）

【例】设系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -8 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[u]$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

式中，u，y分别为系统的输入和输出信号，试求系统的传递函数

解：　矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -8 & -9\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\end{bmatrix}\quad D=0$$

$$G(s)=\frac{C\,adj\,(sI-A)B}{\det(sI-A)}+D$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）

$$\Delta = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 8 & s+9 \end{vmatrix} = s(s+1)(s+8)$$

$$\because \; adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s(s+9)+8 & s+9 & 1 \\ 0 & s(s+9) & s \\ 0 & -8s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

传递函数

$$\therefore G(s) = \frac{C\,adj(sI - A)B}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{s^2 + 4s + 1}{s^3 + 9s^2 + 8s}$$

系统的微分方程可表示为 $\dddot{y} + 9\ddot{y} + 8\dot{y} = \ddot{u} + 4\dot{u} + u$

电路系统的机理建模（状态空间模型）

已知传递函数G(s)，求其状态空间表达式

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$=b_n+\frac{(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)s^{n-1}+\cdots+(b_1-a_1 b_n)s+(b_0-a_0 b_n)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$=b_n+\frac{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$Y(s)=V(s)+b_n U(s)$$

相变量（phase variable）方法

phase: stage of development

$$\frac{V(s)}{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1 s+c_0}=\frac{U(s)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=X(s)\text{相变量}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=b_n+\frac{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$\frac{V(s)}{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1s+c_0}=\frac{U(s)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}=X(s)\text{相变量}$$

将相变量及其各阶导数取为状态变量

$$x_1(t)=L^{-1}[X(s)],x_2(t)=\dot{x}_1(t),x_3(t)=\ddot{x}_1(t),\cdots,x_{n-1}(t)=x_1^{(n-2)}(t),x_n(t)=x_1^{(n-1)}(t)$$

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\dot{x}_2(t)=x_3(t),\cdots,\dot{x}_{n-1}(t)=x_n(t)$$

$$s^nX(s)+a_{n-1}s^{n-1}X(s)+\cdots+a_1sX(s)+a_0X(s)=U(s)$$

$$\dot{x}_n(t)=-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-\cdots-a_{n-1}x_n(t)+u(t)$$

$$V(s)=c_{n-1}s^{n-1}X(s)+\cdots+c_1sX(s)+c_0X(s)$$

$$v(t)=c_0x_1(t)+c_1x_2(t)+\cdots+c_{n-1}x_n(t)$$

$$y(t)=v(t)+b_nu(t)=c_0x_1(t)+c_1x_2(t)+\cdots+c_{n-1}x_n(t)+b_nu(t)$$

友矩阵

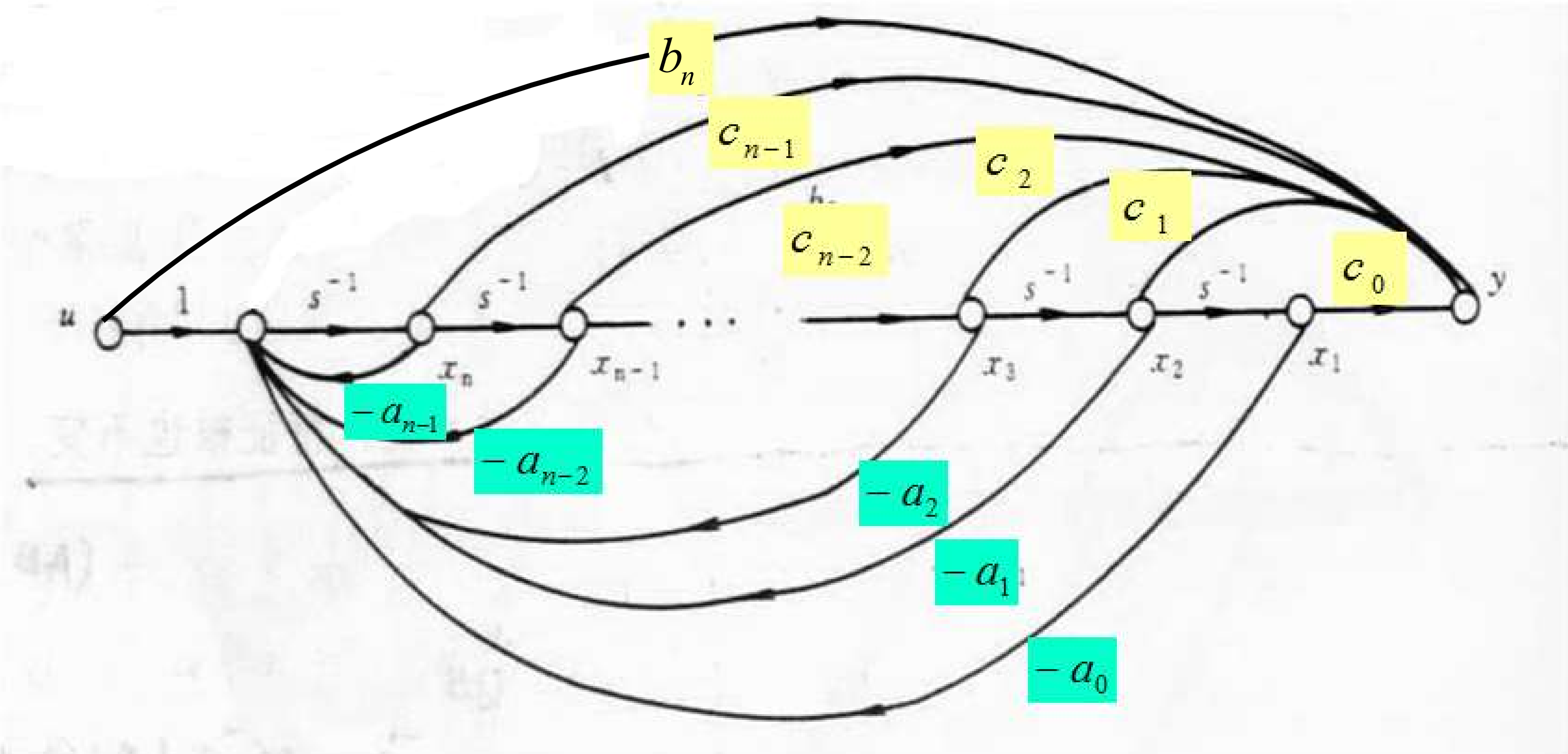
能控标准型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}c_0&c_1&\cdots&c_{n-2}&c_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+b_nu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$



电路系统的机理建模（状态空间模型）

串联（cascade）

$$u(t)=u_1(t)\longrightarrow\boxed{(A_1,B_1,C_1,D_1)}\xrightarrow{y_1(t)=u_2(t)}\boxed{(A_2,B_2,C_2,D_2)}\longrightarrow y(t)=y_2(t)$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u\\ y_1=C_1x_1+D_1u\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_2=A_2x_2+B_2y_1\\ y=C_2x_2+D_2y_1\end{cases}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}? & ?\\? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}?\end{bmatrix}u$$

$$\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2&=A_2x_2+B_2y_1=A_2x_2+B_2(C_1x_1+D_1u)\\&=B_2C_1x_1+A_2x_2+B_2D_1u\end{aligned}$$

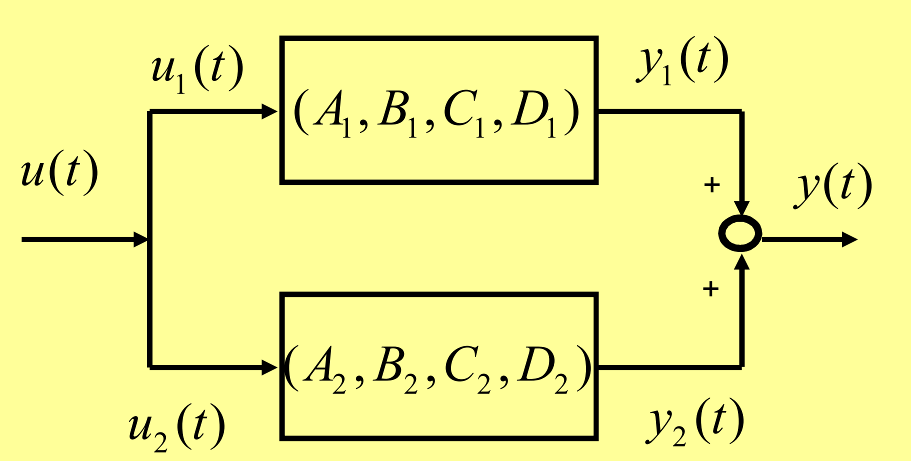
$$\begin{aligned}y&=C_2x_2+D_2y_1=C_2x_2+D_2(C_1x_1+D_1u)\\&=D_2C_1x_1+C_2x_2+D_2D_1u\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\B_2D_1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}D_2C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+D_2D_1u$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）

并联（parallel）



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (D_1 + D_2) u$$

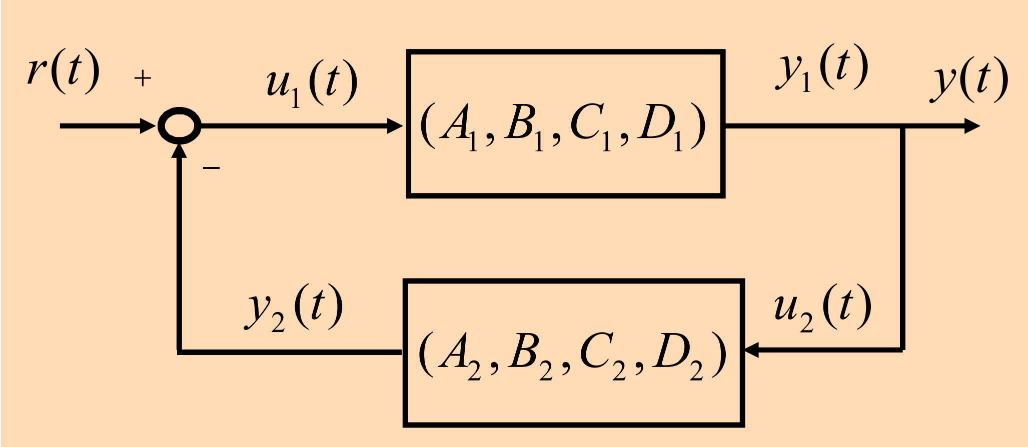
n个系统$(A_i, B_i, C_i, D_i), i \in \{1, 2, \cdots, n\}$并联

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + (D_1 + D_2 + \cdots + D_n) u$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）

负反馈（negative feedback）



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 y \end{cases}$$

$$u_1 = r - y_2$$

$$\begin{aligned} y = C_1 x_1 + D_1(r - y_2) &= C_1 x_1 + D_1(r - (C_2 x_2 + D_2 y)) \\ &= C_1 x_1 - D_1 C_2 x_2 - D_1 D_2 y + D_1 r \end{aligned}$$

$$(I + D_1 D_2) y = C_1 x_1 - D_1 C_2 x_2 + D_1 r$$

负反馈的适定性（wellposed）条件

$$\left| I + D_1 D_2 \right| \neq 0$$

$$y = (I + D_1 D_2)^{-1} C_1 x_1 - (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 x_2 + (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 r$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 y \end{cases} \quad u_1 = r - y_2$$

$$y = (I + D_1 D_2)^{-1} C_1 x_1 - (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 x_2 + (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 r$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u_1 = A_1 x_1 + B_1 r - B_1 y_2 = A_1 x_1 + B_1 r - B_1 (C_2 x_2 + D_2 y) \\ &= \left[A_1 - B_1 D_2 (I + D_1 D_2)^{-1} C_1\right] x_1 + \left[B_1 D_2 (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 - B_1 C_2\right] x_2 + \left[B_1 - B_1 D_2 (I + D_1 D_2)^{-1} D_1\right] r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 y \\ &= B_2 (I + D_1 D_2)^{-1} C_1 x_1 + (A_2 - B_2 (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2) x_2 + B_2 (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 r \end{aligned}$$

满足适定性条件下，负反馈系统成立，其状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 (I + D_1 D_2)^{-1} C_1 & B_1 D_2 (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 - B_1 C_2 \\ B_2 (I + D_1 D_2)^{-1} C_1 & A_2 - B_2 (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 - B_1 D_2 (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 \\ B_2 (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 \end{bmatrix} r$$

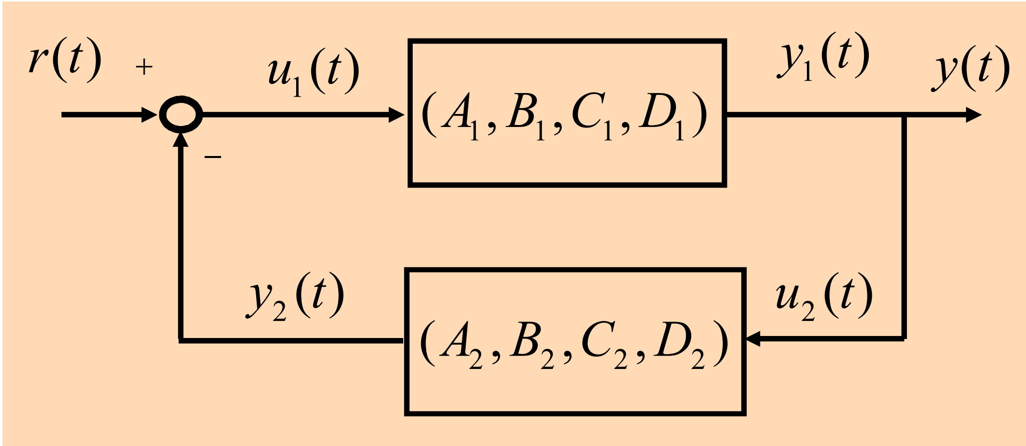
$$y = \begin{bmatrix} (I + D_1 D_2)^{-1} C_1 & -(I + D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (I + D_1 D_2)^{-1} D_1 u$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1-B_1D_2(I+D_1D_2)^{-1}C_1 & B_1D_2(I+D_1D_2)^{-1}D_1C_2-B_1C_2\\ B_2(I+D_1D_2)^{-1}C_1 & A_2-B_2(I+D_1D_2)^{-1}D_1C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1-B_1D_2(I+D_1D_2)^{-1}D_1\\ B_2(I+D_1D_2)^{-1}D_1\end{bmatrix}r$$

$$y=\begin{bmatrix}(I+D_1D_2)^{-1}C_1 & -(I+D_1D_2)^{-1}D_1C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+(I+D_1D_2)^{-1}D_1u$$

$$\left|I+D_1D_2\right|\neq 0$$

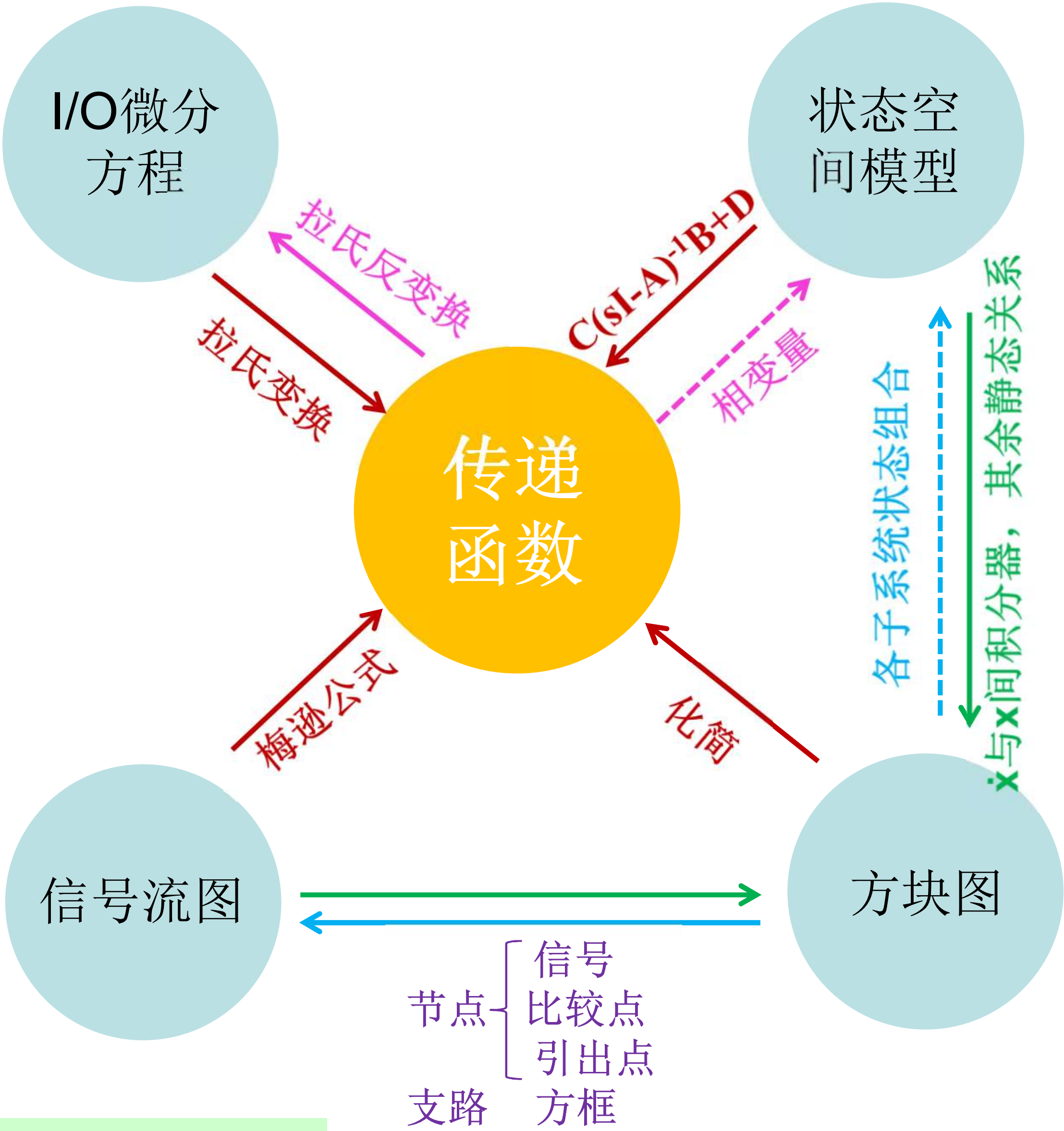


若(A_1,B_1,C_1,D_1)或(A_2,B_2,C_2,D_2)严格因果, 则负反馈系统必成立

当(A_1,B_1,C_1,D_1)严格因果时, 负反馈系统的状态空间表达式

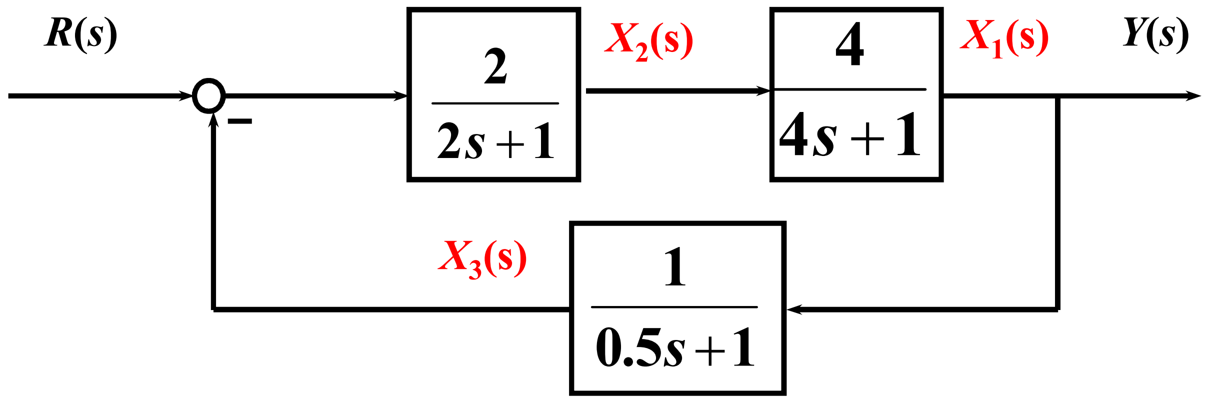
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1-B_1D_2C_1 & -B_1C_2\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}r \qquad y=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

电路系统的机理建模（状态空间模型）



电路系统的机理建模（状态空间模型）

【例】已知系统的方块图如下图所示，请写出状态空间表达式



解：

$$X_1(s)=\frac{4}{4s+1}X_2(s)$$

$$X_2(s)=\frac{2}{2s+1}(R(s)-X_3(s))$$

$$X_3(s)=\frac{1}{0.5s+1}X_1(s)$$

$$Y(s)=X_1(s)$$

$$\dot{x}_1=-\frac{1}{4}x_1+x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{1}{2}x_2-x_3+r$$

$$\dot{x}_3=2x_1-2x_3$$

$$y=x_1$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}r$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

Thanks !