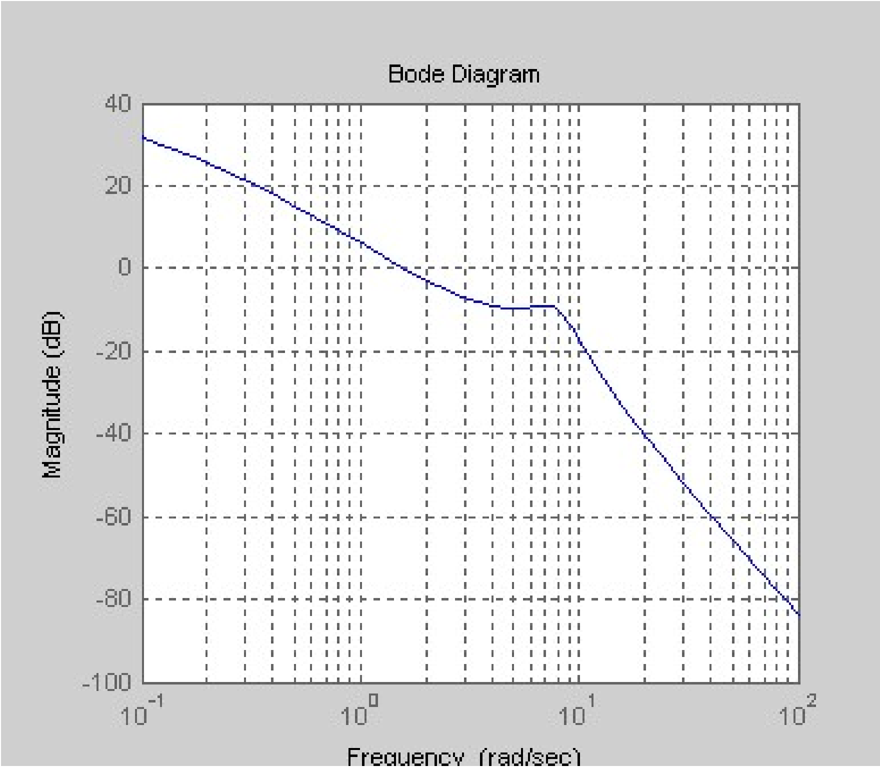
第六章 频率特性分析法

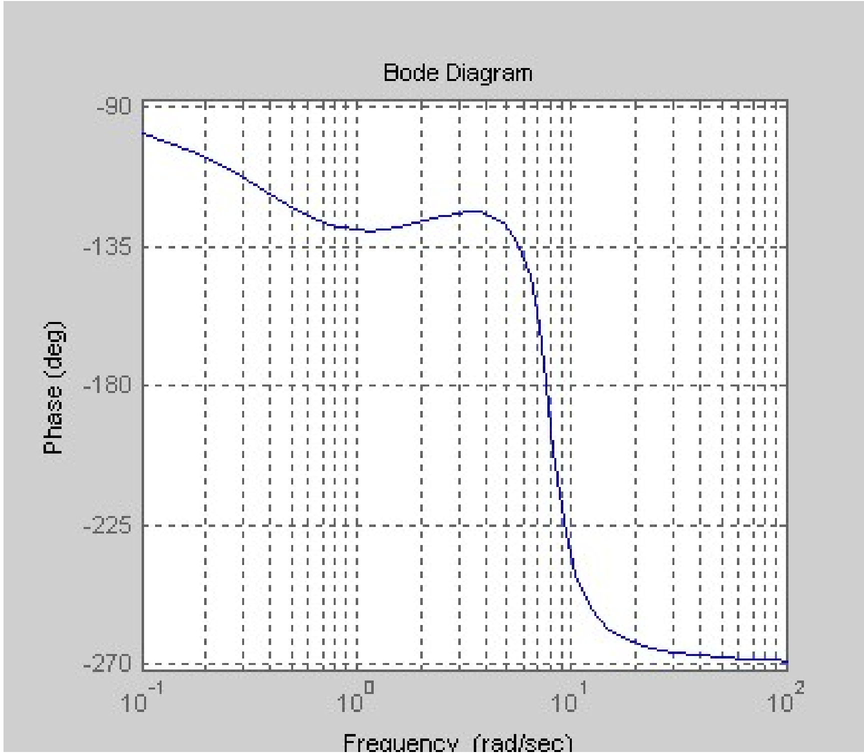
CHAPTER 6 Frequency Response

第六章主要内容

- ✓ 概述
- ✓ **Bode** 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ **Nyquist**稳定性判据
- ✓ 基于频率特性的补偿器设计

问题





已知闭环系统的开环对数频率特性曲线，要求从幅频和相频曲线直接判断出闭环系统的稳定性

幅角原理

复平面上没有重点的连续曲线，称为**简单曲线**

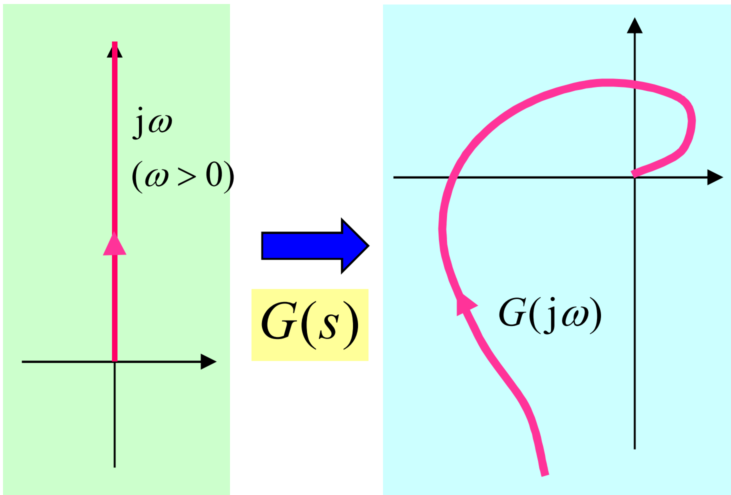
如果复平面上连续曲线的起点和终点重合，则称曲线为**闭曲线**

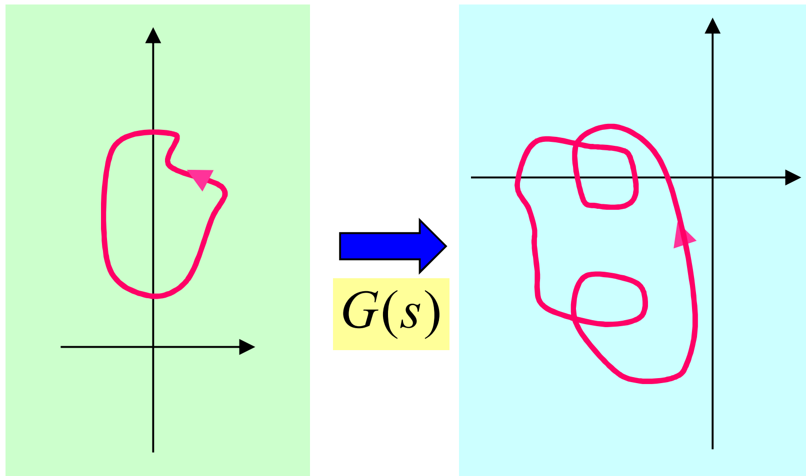
复平面上分段光滑的有向简单闭曲线，称为**有向围线**

任意一条有向围线Γ将复平面分成3部分：内部、外部和Γ

传递函数$G(s)$可被视为映射：

将复平面上的点集E(不含$G(s)$ 的极点) 映射到复平面上的点集E^*





$$G(s)=\frac{1}{s(1+0.1s)(1+s)(1+5s)}$$的幅相曲线

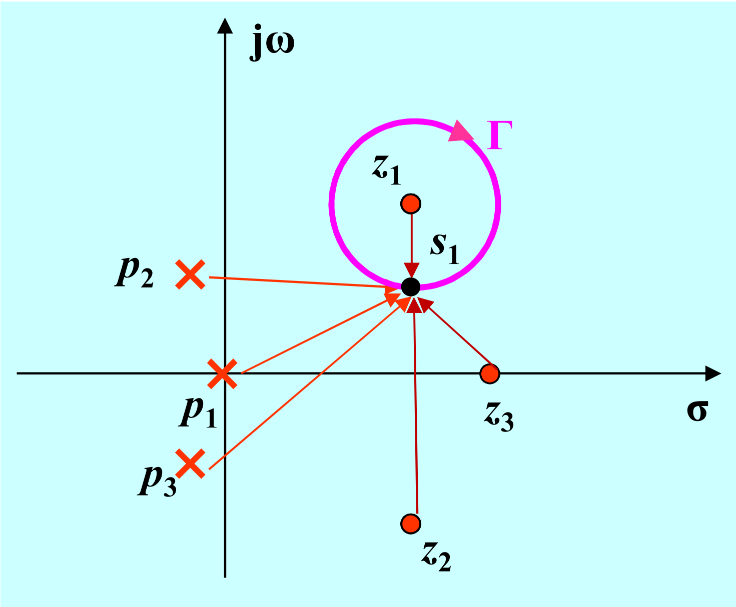
传递函数$G(s)$将有向围线（不含$G(s)$的极点）映射到有向闭曲线

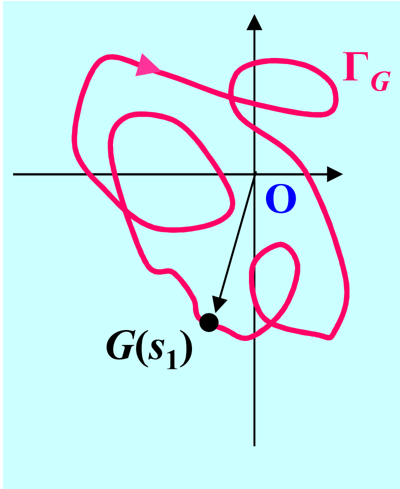
幅角原理

$$G(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

顺时针围线Γ：z_1在Γ内部，其它零极点在Γ外部

$G(s)$将Γ映射成有向闭曲线Γ_G





点s_1 沿 Γ一周， $G(s_1)$的相角如何变化？

$$\angle G(s_1)=\angle K+\angle(s_1-z_1)+\angle(s_1-z_2)+\angle(s_1-z_3)-\angle(s_1-p_1)-\angle(s_1-p_2)-\angle(s_1-p_3)$$

s_1沿Γ一周，等式右端除$\angle(s_1-z_1)$减少360°外，其余6项不变

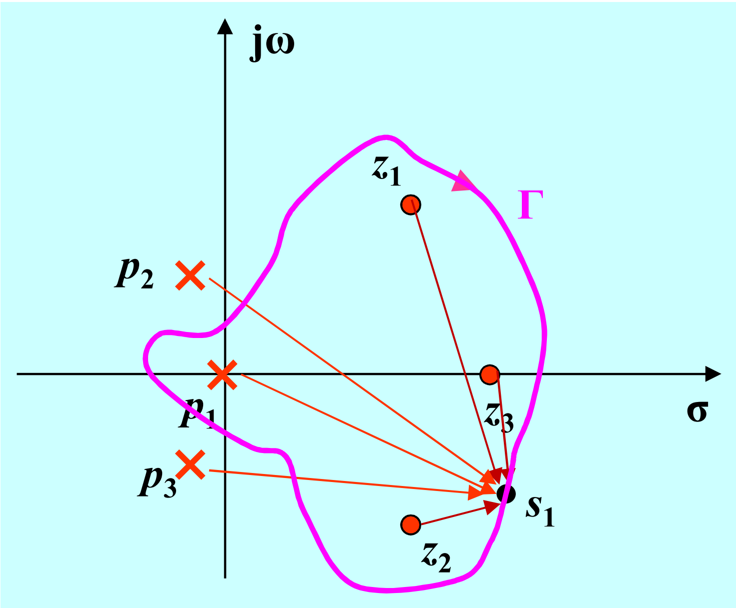
s_1沿Γ一周，$\angle G(s_1)$减少360°，即Γ_G顺时针包围原点1圈

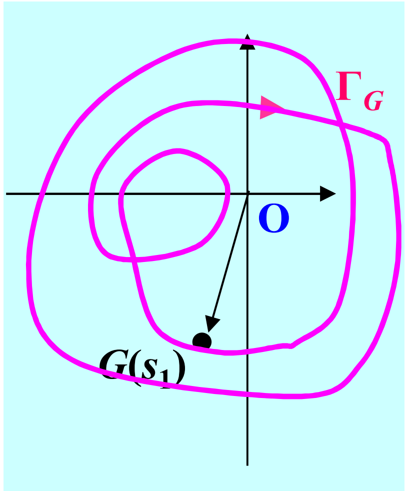
幅角原理

$$G(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

顺时针围线Γ：z_1、z_2、z_3和p_1在Γ内部

其它零极点在Γ外部





点s_1 沿 Γ一周

$$\angle G(s_1)=\angle K+\angle(s_1-z_1)+\angle(s_1-z_2)+\angle(s_1-z_3)-\angle(s_1-p_1)-\angle(s_1-p_2)-\angle(s_1-p_3)$$

$\angle(s_1-z_1)$、$\angle(s_1-z_2)$、$\angle(s_1-z_3)$和$\angle(s_1-p_1)$减少360°，右端其它项不变

Γ_G顺时针包围原点2圈

Γ内部有3个零点和1个极点

幅角原理

幅角原理：设复变函数$G(s)$在复平面上除有限个点外处处解析，顺时针围线Γ上没有$G(s)$的零点和极点，Γ内部有$G(s)$的极点$p_1(q_1$阶$)$、…、极点$p_m(q_m$阶$)$和零点$z_1(r_1$阶$)$、…、零点$z_l(r_l$阶$)$，则Γ_G逆时针包围原点的次数

$$N=\sum_{j=1}^{m}q_j-\sum_{i=1}^{l}r_i$$

$N>0$表示逆时针包围，$N<0$表示顺时针包围，$N=0$表示不包围

传递函数$G(s)=\dfrac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$满足

1）在复平面上除有限个点外处处解析

2）所有极点和零点都是有限阶的

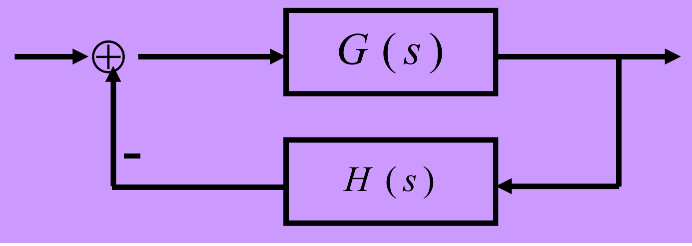
幅角原理适用于传递函数

推论：若顺时针围线Γ上没有传递函数$G(s)=\dfrac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$的零点和极点，则$\Gamma_G$逆时针包围原点的次数

$$N=\Gamma\text{内部的}G(s)\text{极点数}-\Gamma\text{内部的}G(s)\text{零点数}$$

负反馈系统的闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$



设 因果的$G(s)=N_1(s)/D_1(s)$　因果的$H(s)=N_2(s)/D_2(s)$

$N_1(s)$、$D_1(s)$、$N_2(s)$和$D_2(s)$均为多项式，$N_1(s)$与$D_1(s)$互素，$N_2(s)$与$D_2(s)$互素

$$B(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\frac{N_2(s)}{D_2(s)}=\frac{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

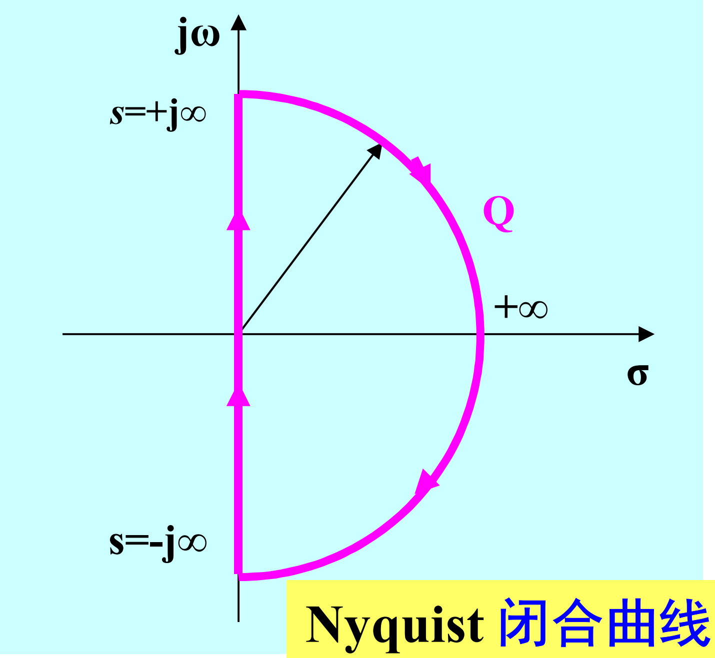
$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1+\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}\dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}}=\frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}$$

***B*(*s*)的零点** ⇕ ***Φ*(*s*)的极点**

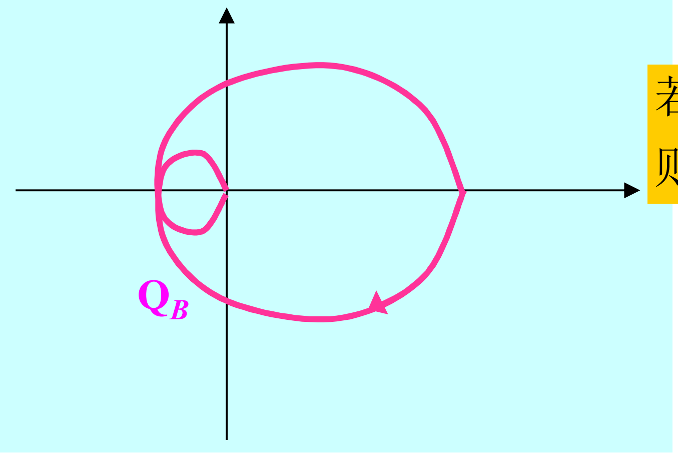
负反馈系统稳定当且仅当$\Phi(s)$的极点不在右半开平面或虚轴上

负反馈系统稳定当且仅当$B(s)=1+G(s)H(s)$的零点不在右半开平面或虚轴上

稳定判据



Nyquist 闭合曲线



构造一个内部为右半开平面的顺时针围线Q：

虚轴jω， $\omega \in (-\infty, +\infty)$

半径为∞的半圆， $s = \infty e^{j\theta}, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

假设：$B(s) = 1 + G(s)H(s)$在虚轴上无极点

即$G(s)H(s)$在虚轴上无极点

开环传递函数$G(s)H(s)$不含积分环节

Q上无$B(s)$的极点，$B(s)$将Q映射成闭曲线Q_B

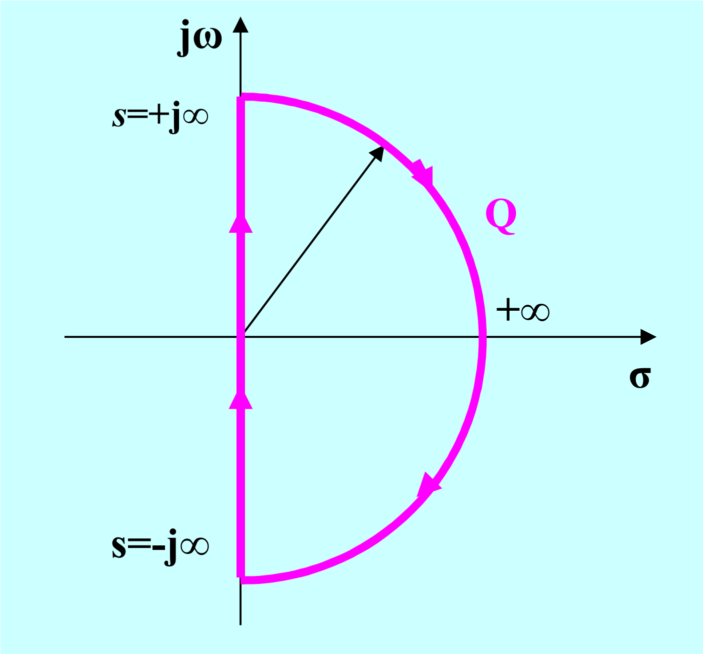
若原点在Q_B上，

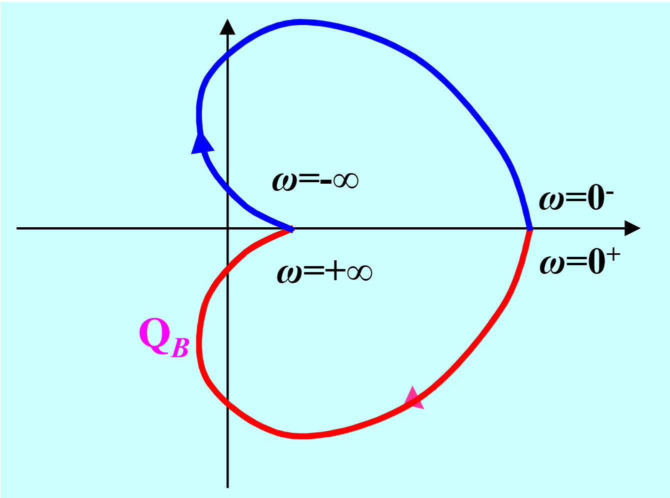
则有$B(s)$的零点在虚轴上（在Q上），$\Phi(s)$临界稳定或不稳定

若原点不在Q_B上，

则在Q上无$B(s)$的零点和极点，可用幅角原理

稳定判据





由$G(s)$和$H(s)$因果，知$B(s)=1+G(s)H(s)$因果

则$\lim\limits_{|s|\to\infty} B(s)$为实常数

Q_B由两部分组成：

$B(s)=1+G(s)H(s)$的幅相曲线

$B(s)$幅相曲线关于实轴的对称曲线（方向不对称）

Q_B的两部分在$\lim\limits_{|s|\to\infty} B(s)$和$B(j0)=1+G(j0)H(j0)$处交接

这两处均在实轴上

记P_R为$B(s)$在右半开平面的极点数

即$G(s)H(s)$在右半开平面的极点数

Z_R为$B(s)$在右半开平面的零点数

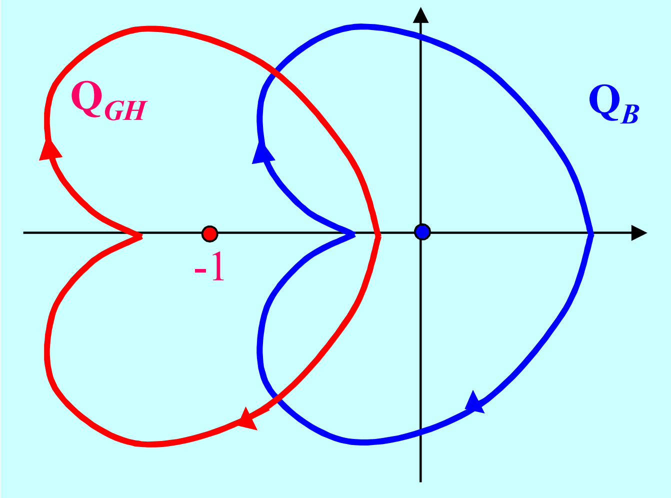
若$G(s)H(s)$因果且无虚轴上极点，原点不在Q_B上，则

Q_B逆时针包围原点的次数$N=P_R-Z_R$

若$G(s)H(s)$因果且无虚轴上极点，原点不在Q_B上，则

$\Phi(s)$稳定当且仅当Q_B逆时针包围原点的次数等于P_R

稳定判据



$B(s)=1+G(s)H(s)$将Q映射成闭曲线Q_B

$G(s)H(s)$将Q映射成闭曲线Q_{GH}

Q_{GH}水平向右移动一个单位即得到Q_B

“原点相对于Q_B的位置”就是“-1相对于Q_{GH}的位置”

“Q_B逆时针包围原点N圈”等价于“Q_{GH}逆时针包围(-1)点N圈”

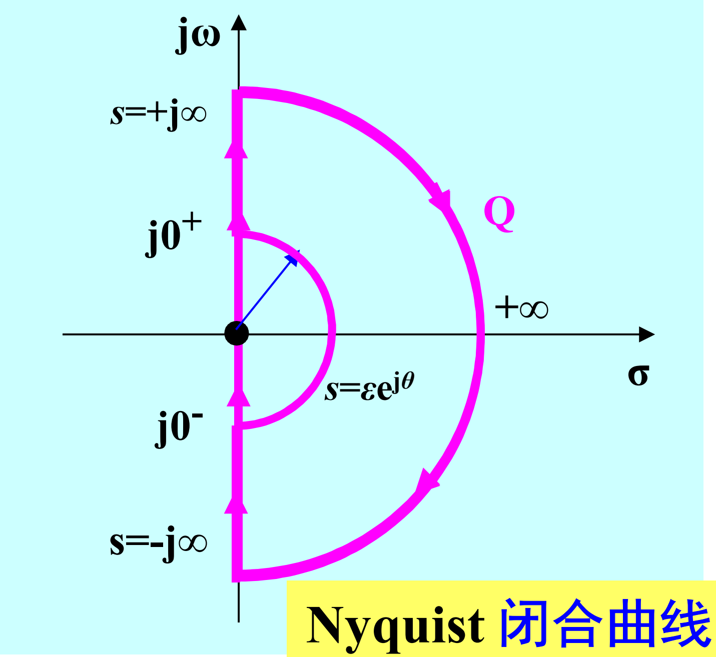
若$G(s)H(s)$因果且无虚轴上极点，　(-1)点不在Q_{GH}上，则$\Phi(s)$稳定当且仅当Q_{GH}逆时针包围(-1)点的次数等于P_R

P_R为$G(s)H(s)$在右半开平面的极点数

若$G(s)H(s)$的分母不是因式分解形式，可对分母多项式应用Routh判据来确定P_R

若$G(s)H(s)$因果且稳定，　(-1)点不在Q_{GH}上，则$\Phi(s)$稳定当且仅当Q_{GH}不包围(-1)点

稳定判据



Nyquist 闭合曲线

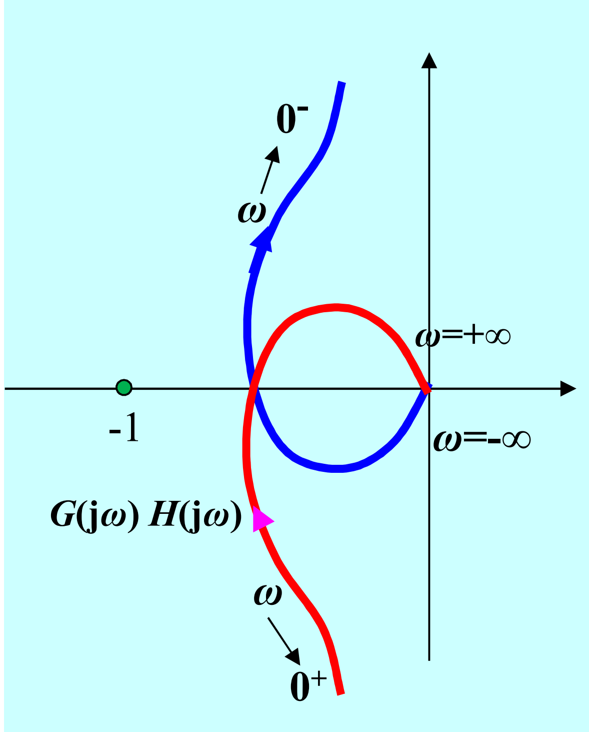
取消这个假设

~~假设：$G(s)H(s)$在虚轴上无极点~~

改造围线Q

为避开原点，构造一个半径为无穷小ε的逆时针半圆

$$s=\varepsilon e^{j\theta}, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$



Q_{GH}由三部分组成：

$G(s)H(s)$的幅相曲线

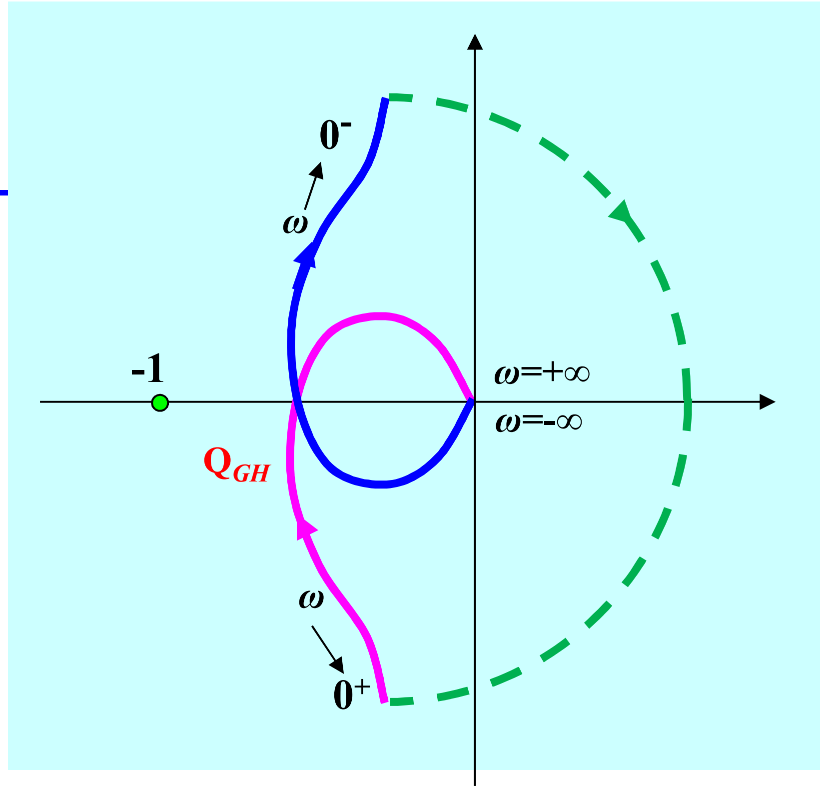
$G(s)H(s)$幅相曲线关于实轴的对称曲线（方向不对称）

$\varepsilon e^{j\theta}$经$G(s)H(s)$映射后所形成的曲线

稳定判据

$\varepsilon e^{j\theta}$经$G(s)H(s)$映射后所形成的曲线

$\varepsilon \to 0$, θ从$-\dfrac{\pi}{2}$到$\dfrac{\pi}{2}$（逆时针）



$$G(s)H(s)=\frac{K(1+a_1 s+\cdots+a_w s^w)}{s^m(1+b_1 s+\cdots+b_n s^n)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta})=\frac{K(1+a_1\varepsilon e^{j\theta}+\cdots+a_w\varepsilon^w e^{jw\theta})}{\varepsilon^m e^{jm\theta}(1+b_1\varepsilon e^{j\theta}+\cdots+b_n\varepsilon^n e^{jn\theta})}$$

$$=\frac{K}{\varepsilon^m e^{jm\theta}}=\infty e^{-jm\theta}=\infty e^{j\psi}$$

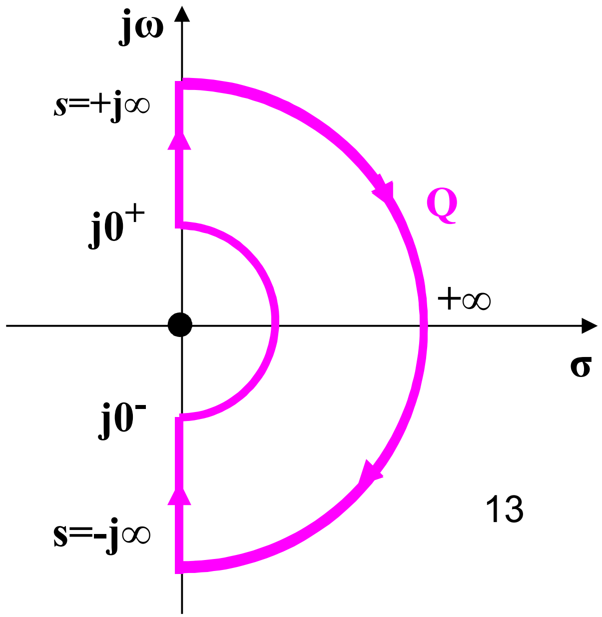
ψ从$\dfrac{m\pi}{2}$到$-\dfrac{m\pi}{2}$（顺时针）

1型系统顺时针旋转180°（半圈）

2型系统顺时针旋转360°（一圈）

3型系统顺时针旋转540°（一圈半）

⋮



对虚轴极点的其它情况（特殊振荡环节）可类似处理

稳定判据

Nyquist稳定判据：设因果的开环传递函数$G(s)H(s)$在右半开平面有P_R个极点，(-1)点不在Q_{GH}上，则闭环传递函数$\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$稳定的充分必要条件是$Q_{GH}$逆时针包围$(-1)$点$P_R$次

最小相位系统的传递函数在右半开平面无极点

推论：若$G(s)H(s)$因果且是最小相位的， (-1)点不在Q_{GH}上，则$\Phi(s)$稳定当且仅当Q_{GH}不包围(-1)点

示例

例 6-15- 3. 2型系统 $G(s)H(s)=\dfrac{K(1+T_4 s)}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$

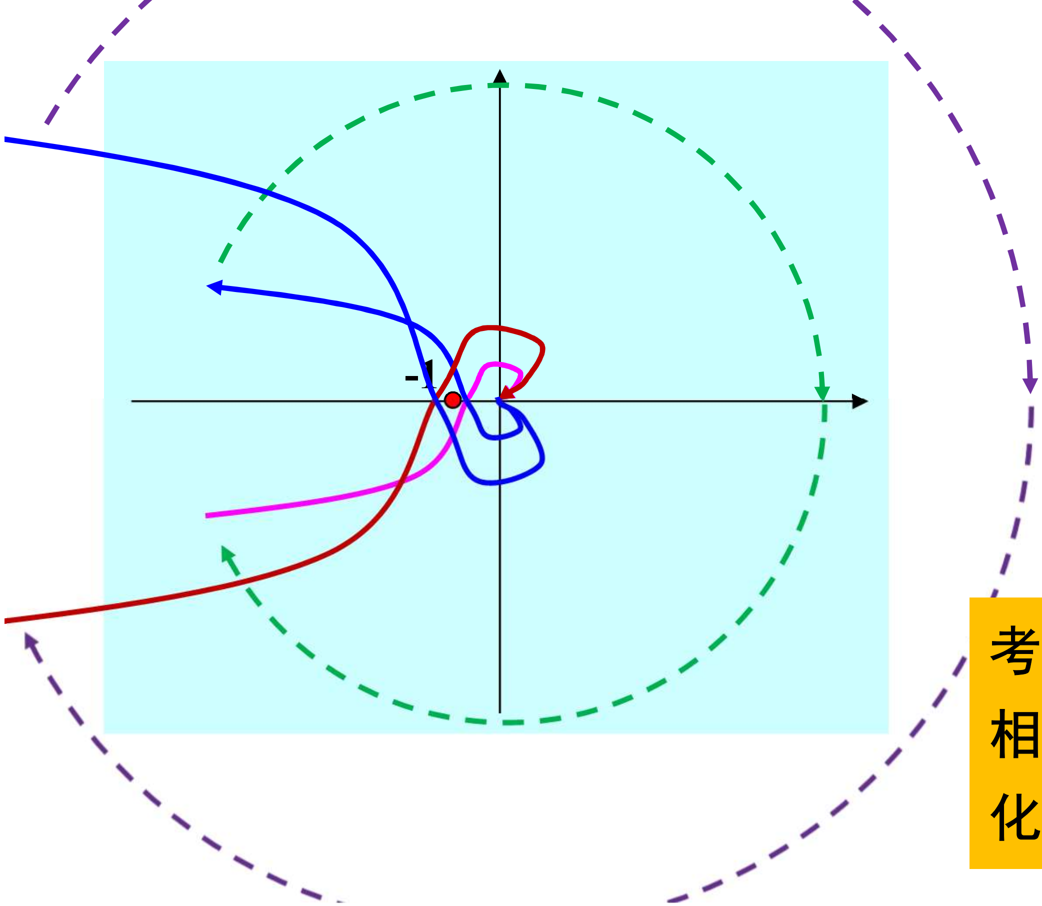
$N=0$

负反馈系统的开环传递函数

是最小相位的，其中$T_4>T_1+T_2+T_3$

负反馈系统稳定

若增大$G(s)H(s)$的增益



改变$G(s)H(s)$的增益

Nyquist图的形状不变

Nyquist图的大小变化

$N=-2$

则负反馈系统不稳定

考虑增益变化的稳定性Nyquist判别，相当于Nyquist图不变而坐标轴刻度变化，即-1点沿实轴变动的稳定性判别

极坐标图——示例

例6-16-1 设负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)},K>0$

用Nyquist稳定判据确定使系统稳定的*K*的取值范围

解： 系统开环频率特性为 $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{-4K(1+j0.25\omega)}{j\omega(1-j\omega)}=\dfrac{-5K}{\omega^2+1}+j\dfrac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$

幅频特性为 $$|G(j\omega)H(j\omega)|=\frac{K\sqrt{\omega^2+16}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

相频特性为 $$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-180^\circ-90^\circ+arctg0.25\omega-(-arctg\omega)=-270^\circ+arctg\frac{\omega}{4}+arctg\omega$$

不稳定的$\dfrac{1}{s-\alpha}$环节会给系统相频特性自低频开始就增加180°滞后

开环幅相曲线的起点：$G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle-270^\circ\Rightarrow V_x=\mathrm{Re}\,G(j0^+)H(j0^+)=-5K$

开环幅相曲线的终点：$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-90^\circ$

当*K*>0时，*G*(j*ω*)*H*(j*ω*)的实部不为零，故与虚轴无交点

极坐标图——示例

开环幅相曲线的起点： $G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle-270°\Rightarrow V_x=\mathrm{Re}\,G(j0^+)H(j0^+)=-5K$

开环幅相曲线的终点： $G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-90°$

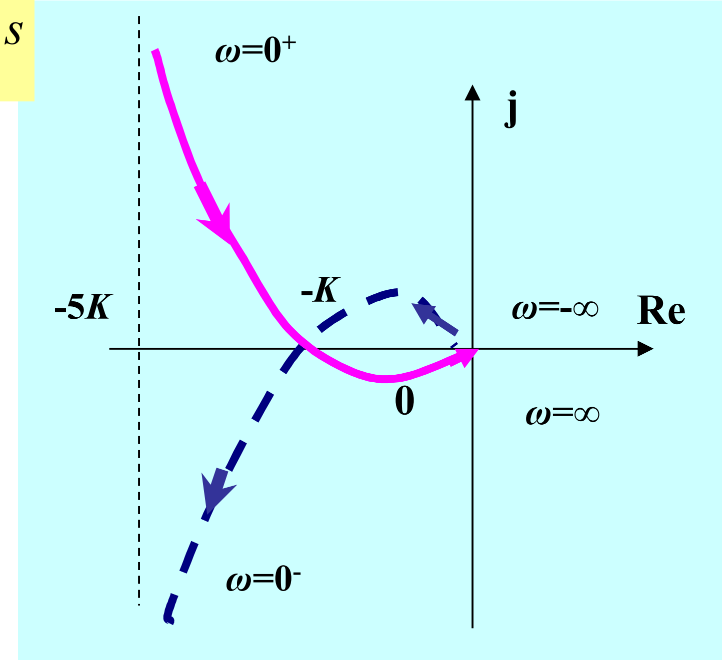
当K>0时，$G(j\omega)H(j\omega)$的实部不为零，故与虚轴无交点

令虚部为零，可求出频率特性与实部的交点时的频率值为

$$\mathrm{Im}\,G(j\omega)H(j\omega)=0\Rightarrow\frac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}=0\Rightarrow\omega=2rad/s$$

此时，实部的坐标：

$$\mathrm{Re}\,G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-5K}{\omega^2+1}=-K$$



Nyquist稳定性判据——示例

例6-16-2　设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)}$，$K>0$

用奈魁斯特稳定判据确定使系统稳定的*K*的取值范围。

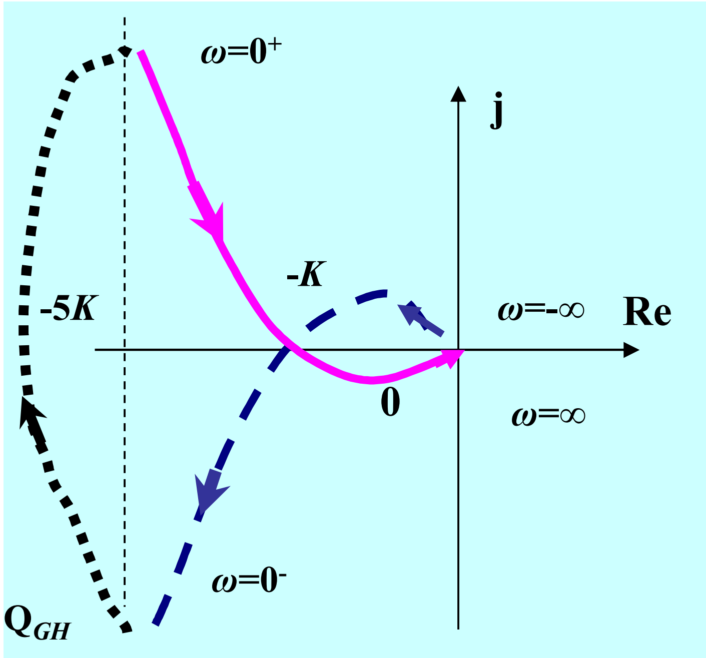
I型系统，*m*=1，如图顺时针连接0^-与0^+

系统在右半开平面有一个开环极点，$P_R=1$

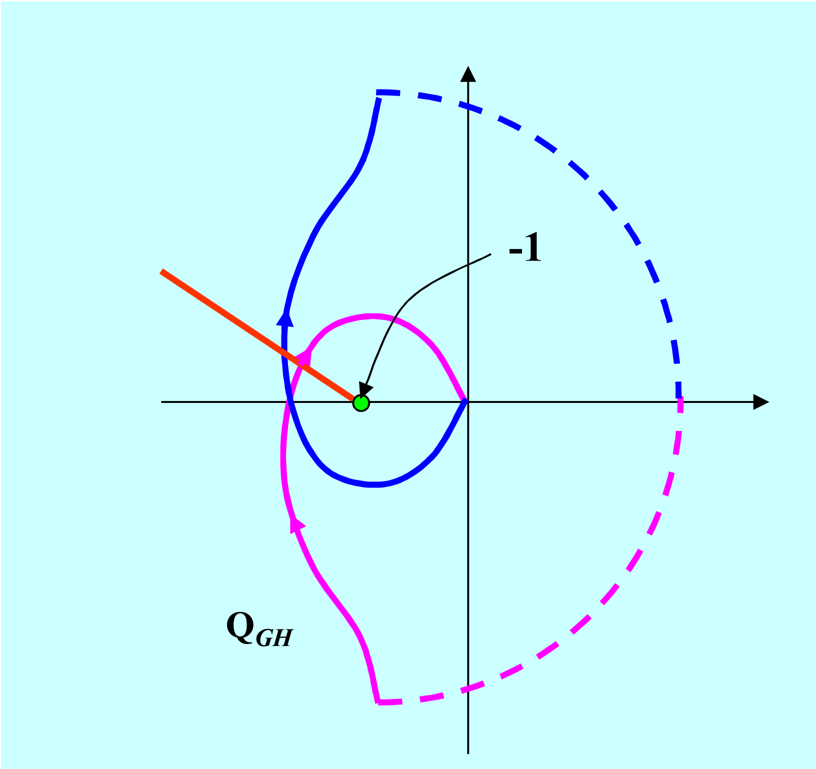
K=1，Q_{GH}过(-1)点，系统临界稳定；

K>1，*N*=1，系统稳定；

K<1，*N*=-1，系统不稳定



Nyquist稳定性判据——示例



旋转的圈数N可以通过从(–1) 点向任意方向绘制一射线的方法来确定

在射线与Q_{GH}曲线交点处标注穿越方向

若Q_{GH}逆时针/顺时针穿越该射线，表示正穿越/负穿越

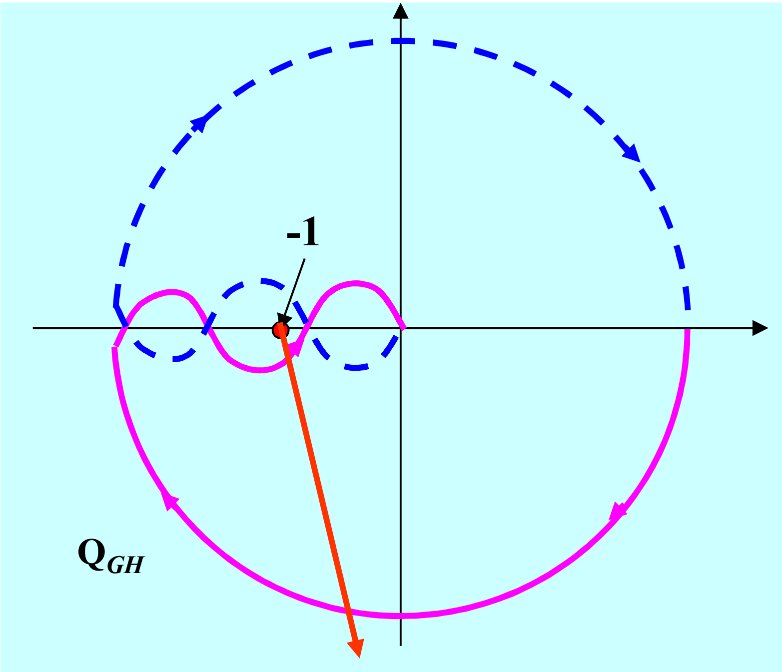
穿越之和为N

$$N = -2$$

Nyquist稳定性判据——示例

例 6-17. 某负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K(1+T_1 s)^2}{(1+T_2 s)(1+T_3 s)(1+T_4 s)(1+T_5 s)^2}$$



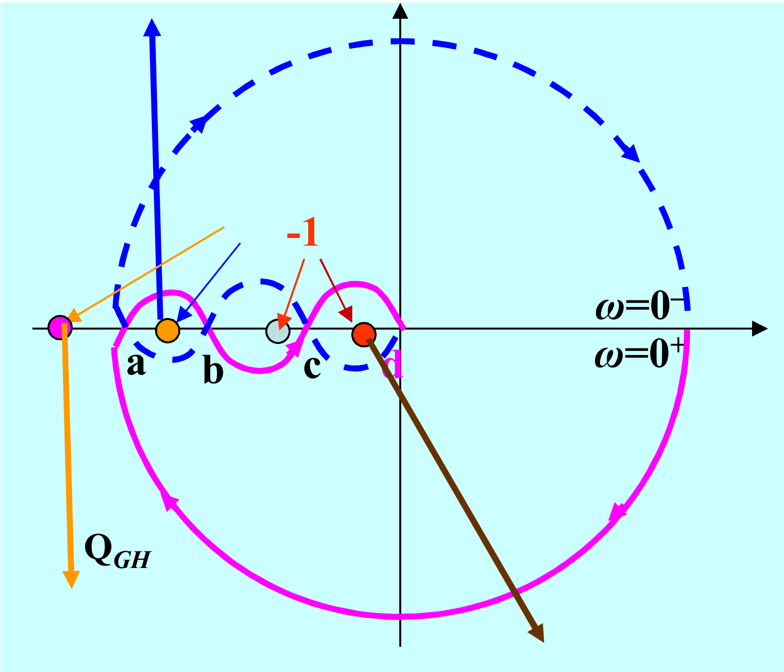
是最小相位的，Q_{GH}见图

从（–1）点引出射线，旋转的圈数 N=0

系统稳定

Nyquist稳定性判据——示例

通过增大或减少增益，系统稳定性将出现变化



1) 若增大增益，使得（–1）点在c和d之间, 则N= -2。系统不稳定

2) 若减小增益，使得（–1）点位于极坐标图的a和b之间，则N= -2。系统不稳定

3) 进一步减少增益，使得（–1）点位于a的左侧，则N= 0。系统稳定

该系统称为条件稳定

条件稳定系统：系统在给定增益范围内是稳定的，但当增益增加或减少时，系统出现不稳定

Thanks!