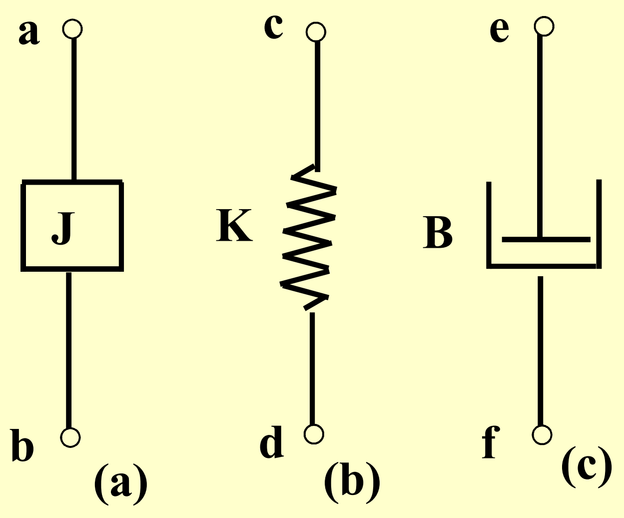
机械旋转系统的机理建模

- 本课程研究的机械旋转系统是一类转轴在世界坐标系中不变的机械旋转系统
- 描述这类机械旋转系统的方程与描述机械平移系统的方程类似，其中旋转系统中的位移、速度和加速度用角度量来表示（角位移、角速度、角加速度）



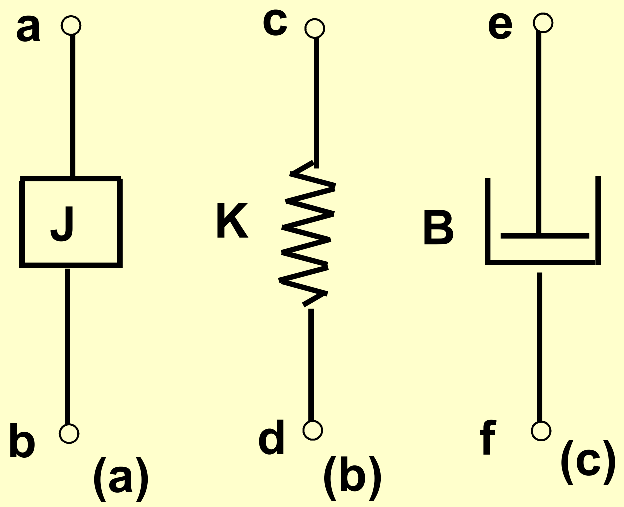
机械旋转系统网络基本单元示意图

- 作用转矩（Torque，力矩）等于反作用转矩之和
- 旋转系统中的三个基本单元是惯量、扭簧和阻尼，它们的网络元件表示图如左图所示。
- 同机械平移系统对比，元件图示基本一样，但物理行为有差别。

机械旋转系统的机理建模

- 转矩作用于具有转动惯量 J 的物体，产生角加速度a

$$T_J = Ja = JD\omega = JD^2\theta$$



机械旋转系统网络基本单元

- 当转矩作用于扭簧时，弹簧将转过角度 θ

$$T_K = K(\theta_c - \theta_d)$$

- 为了使物体运动，对该物体施加的转矩必须克服阻尼转矩。阻尼转矩为

$$T_B = B(\omega_e - \omega_f) = B(D\theta_e - D\theta_f)$$

- 对于每个结点，根据合力矩为零列写转矩方程

- 假设用θ 表示角位移，ω表示角速度，a表示角加速度。

机械旋转系统的机理建模

◆ 比较：机械旋转系统和机械平移系统

$$T_J = Ja = JD\omega = JD^2\theta$$

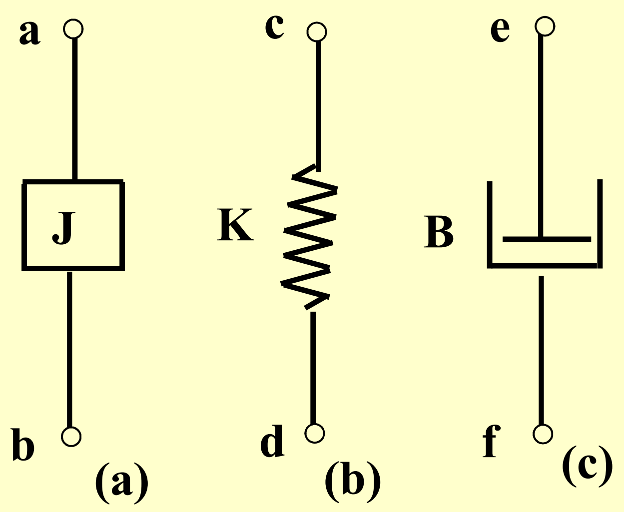
$$T_K = K(\theta_c - \theta_d)$$

$$T_B = B(\omega_e - \omega_f) = B(D\theta_e - D\theta_f)$$

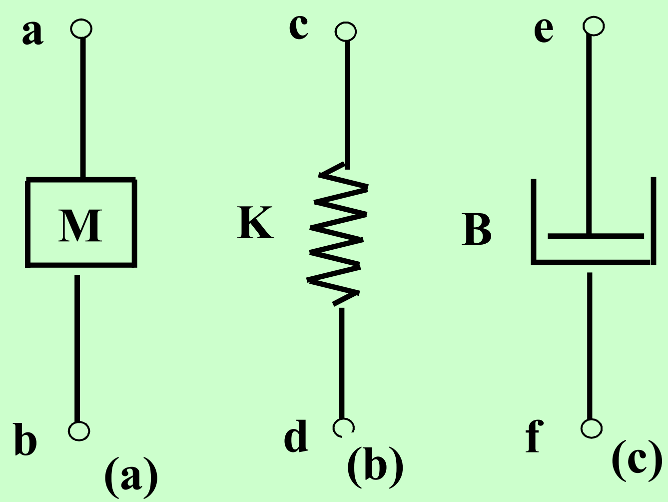
$$f_M = Ma = MDv = MD^2x$$

$$f_K = K(x_c - x_d)$$

$$f_B = B(v_e - v_f) = B(Dx_e - Dx_f)$$



机械旋转系统网络基本单元



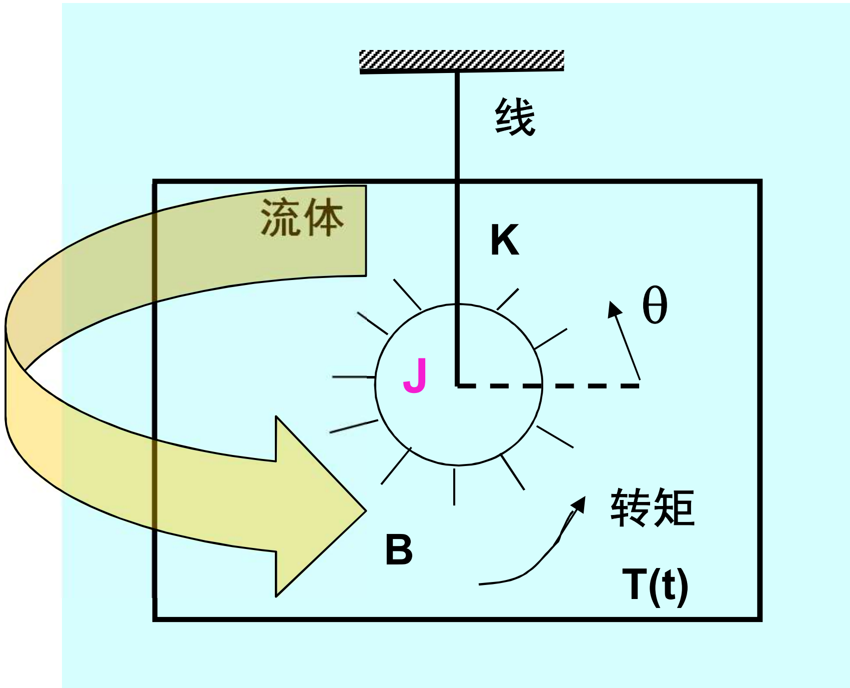
机械传递系统的基本单元

机械旋转系统的机理建模

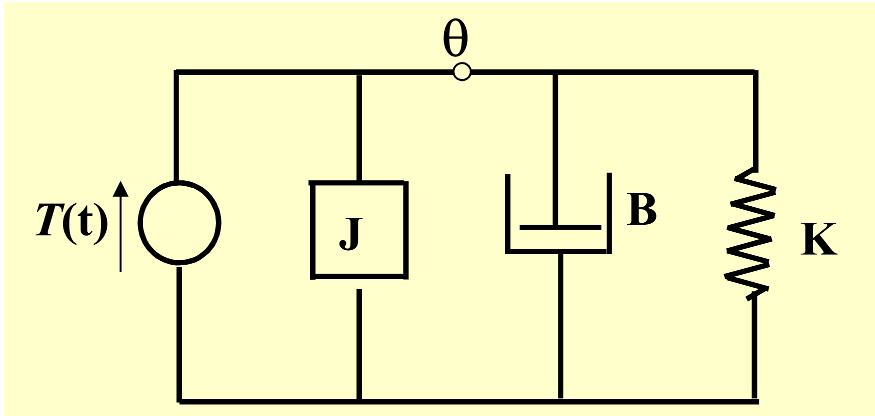
◆ 如图所示，系统包含一个质量块，其具有转动惯量 J，并浸在流体中，输入转矩 T 作用于该质量块，输出θ为质量块的角位移

质量块(定轴转动)受力矩分析 $T - f_B - f_K = J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ $\quad f_B = B\dfrac{d\theta}{dt}$ $\quad f_K = K\theta$

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1/J}{s^2 + (B/J)s + K/J}$$



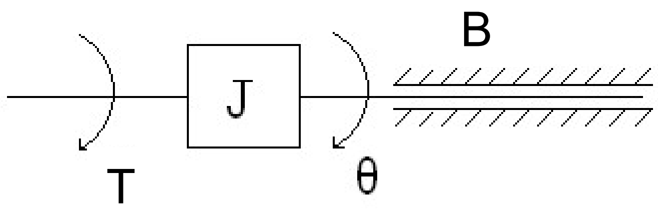
图(a) 简单旋转系统



图(b) 相应的机械网络图

机械旋转系统的机理建模

下图为定轴转动物体，J表示转动惯量，B表示粘滞系数。若输入为转矩T，输出为轴角位移θ，求传递函数。

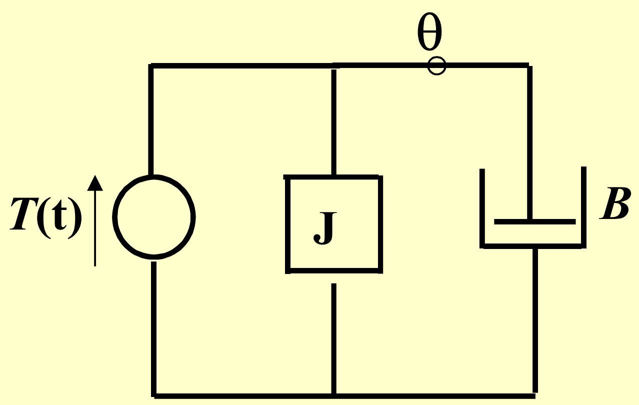


解：关于J的力矩分析 $$T - B\frac{d\theta}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

设初始条件为零，对上式取拉氏变换得：

$$Js^2\theta(s) + Bs\theta(s) = T(s)$$

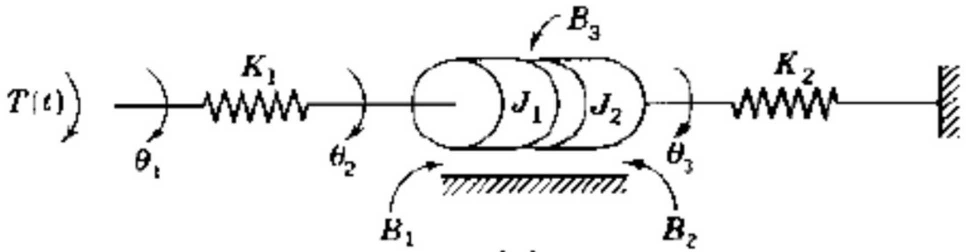
$$\therefore \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$



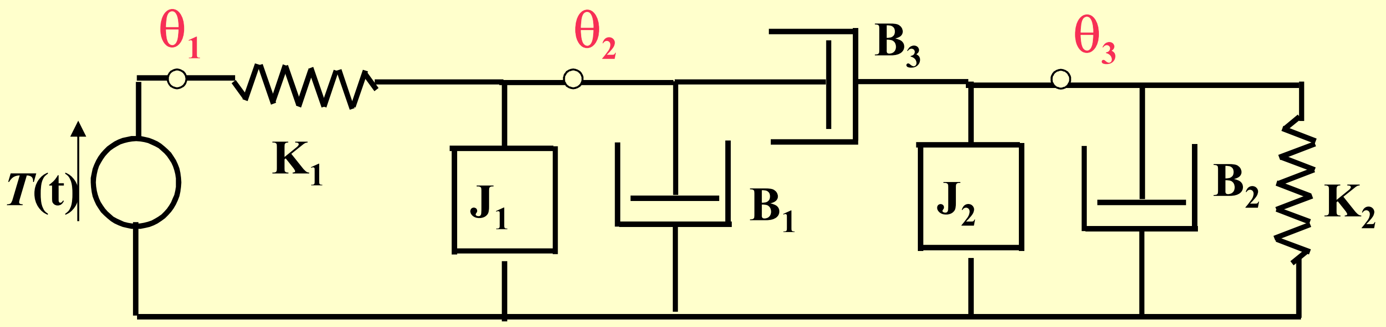
机械网络

机械旋转系统的机理建模

◆ 如图a所示的系统包含两个定轴转动圆盘，两个圆盘之间存在阻尼作用，并且两个圆盘各自同下方的平面之间存在摩擦，输入T，输出θ_3



(a)



图(b) 旋转系统的机械网络图

机械旋转系统的机理建模

$$Node\ 1:\ \xcancel{T(t)=K_1(\theta_1-\theta_2)}$$

$$Node\ 2:\ \cancel{K_1(\theta_1-\theta_2)}=J_1D^2\theta_2+B_1D\theta_2+B_3D(\theta_2-\theta_3)=T(t)$$

$$Node\ 3:\ B_3D(\theta_2-\theta_3)=J_2D^2\theta_3+B_2D\theta_3+K_2\theta_3$$

考虑J$_2$，取$x_1=\theta_3, x_2=\dot{\theta}_3$

注意到B$_2$的状态正是$x_1=\theta_3$

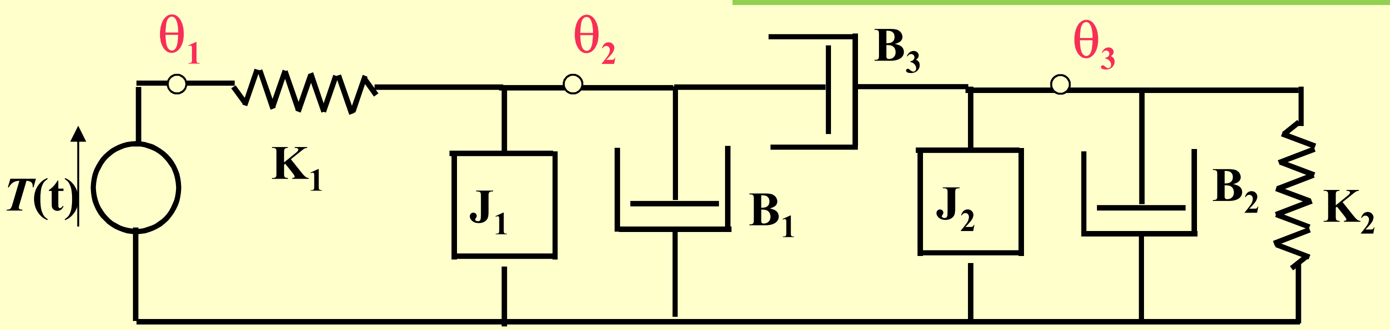
考虑J$_1$，取$x_3=\theta_2, x_4=\dot{\theta}_2$

注意到B$_1$的状态正是$x_3=\theta_2$

注意到B$_3$的状态正是$x_3-x_1=\theta_2-\theta_3$

$u=T, y=\theta_3=x_1$

系统的状态空间表达式……



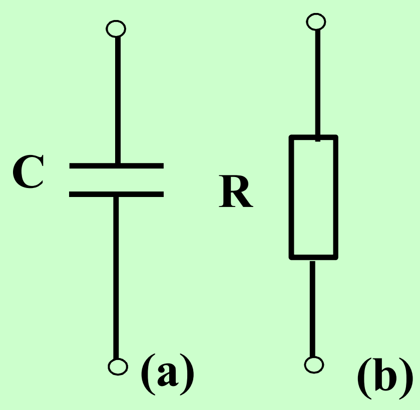
图(b) 旋转系统的机械网络图

热力系统的机理建模

◆ 只有少数热力系统可以由常微分方程描述，用常微分方程描述的热力系统要求研究对象的温度是均匀的。

Uniform temperature assumption（温度均匀分布的假设）
1、small body (for solid固体)
2、perfect mixing(for liquid液体)

◆ 热平衡的必要条件是注入系统的热量等于系统存储的热量加上离开系统的热量。这个条件也可以通过热流率表示



热力系统网络单元示意图

◆ 热力系统网络可以由热容和热阻表示。

热力系统的机理建模

- 外加的热量Q会让对象温度从 θ_1 升到 θ_2
  - 热量 $Q=\frac{q}{D}=C(\theta_2-\theta_1)$
  - 热流率 $q=CD(\theta_2-\theta_1)$

热流率q：单位时间内通过某一截面的热量，单位是“瓦特”。热流率大于零，物体获得热量；反之，热量外流。

热容C：物体在某一过程中，每升高(或降低)单位温度时从外界吸收(或放出)的热量，热容决定了对象储存热量的能力——类似于电路中的电容。

- 用边界温度 θ_3 和 θ_4表示的、通过对象的热流率为 $q=\frac{\theta_3-\theta_4}{R}$

热阻R：热量在热流路径上遇到的阻力，反映介质与介质间的传热能力的大小，表明单位热量所引起的温升，热阻决定了通过对象的热流率——类似于电路中的电阻。

热力系统的机理建模

◆ 考虑一个充满水银的细壁温度计（具有热容 C 及热阻 R），温度计稳定于温度 θ_1。在 t=0 时，将温度计放入温度为 θ_0 的容器中，请建立水银计温度 θ_m与容器温度θ_0 的数学模型。

◆ 温度计的热流率为 $$q=\frac{\theta_0-\theta_m}{R}$$

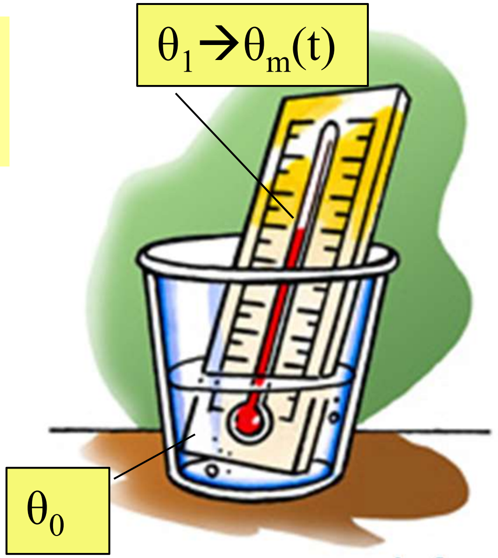
◆ 进入温度计并由热容 C 储存的热量为 $$Q=\frac{q}{D}=C(\theta_m-\theta_1)$$

◆ 上述方程可以合并为 $$Q=\frac{\theta_0-\theta_m}{RD}=C(\theta_m-\theta_1)$$

◆ 对上式进行微分，并整理可以得到

$$\boxed{RCD\ \theta_m+\theta_m=\theta_0}$$

问题：上式中为何没有温度 θ_1了？



热力系统的机理建模

◆ 系统的热力网络表示如图所示。将温度视作电压，则该网络的结点方程如方程（1），于是可以得到传递函数**G= θ_m/θ_0**

$$RCD\ \theta_m + \theta_m = \theta_0 \qquad (1)$$

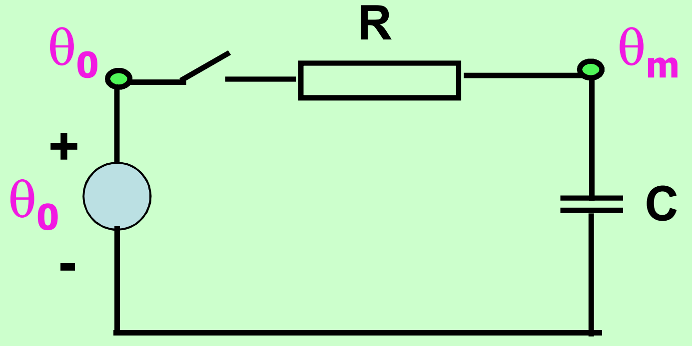


图2.20 温度计的网络表示

$$G(D) = \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{1}{RCD+1}$$

或

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{\theta_0(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

◆ 令 $x_1=\theta_m$， $u=\theta_0$，状态方程为

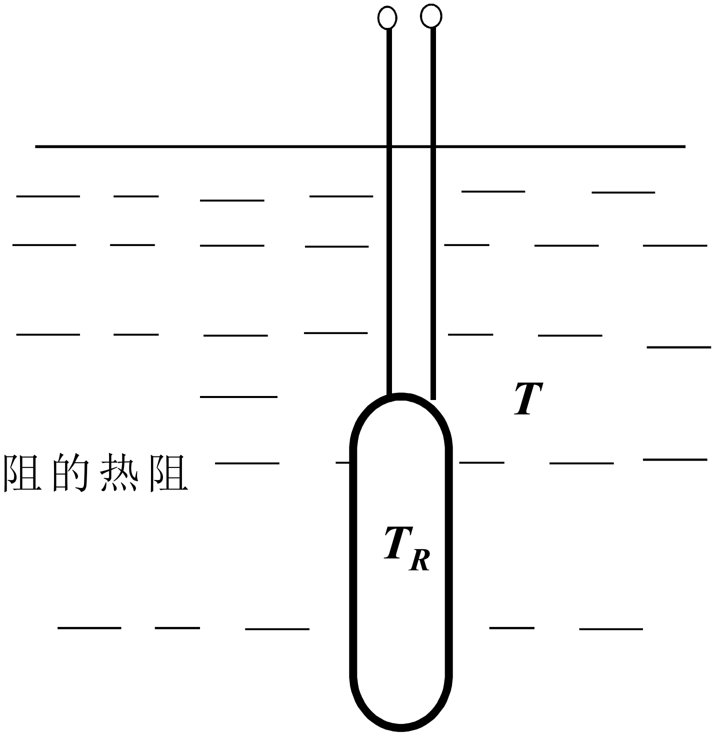
$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{RC}u$$

热电阻温度模型

◆ 热电阻测量元件（测温用）

热电阻测温原理是：电阻体电阻值R 与T_R存在一一对应关系，R随T_R的变化而变化。

一个热电阻测温元件插入温度为T的被测介质中。假设导线向外传出的热量Q可以忽略，电阻体温度为T_R且分布均匀。



热电阻示意图

- 进入热电阻的热流率为 $q = \frac{T - T_R}{R_h}$, R_h是热电阻的热阻
- 进入热电阻并由热容 C 储存的热量为

$$Q = \frac{q}{D} = C(T_R - T_{R0}), T_{R0}\text{是热电阻的初始温度}$$

- 合并、微分得到

$$\boxed{R_h C \frac{dT_R}{dt} + T_R = T}$$

热电阻温度模型

◆ 热电阻测量元件（测温用）在热电阻外加上保护套管

设保护套管插入被测介质较深，由上部传出的热损耗可以忽略，并且保护套管具有均匀的温度T_a。介质温度为T

进入套管的热流率 $q = \dfrac{T - T_a}{R_a} - \dfrac{T_a - T_R}{R_h}$，$R_a$是套管的热阻

- 进入套管并由其热容 C_a 储存的热量为

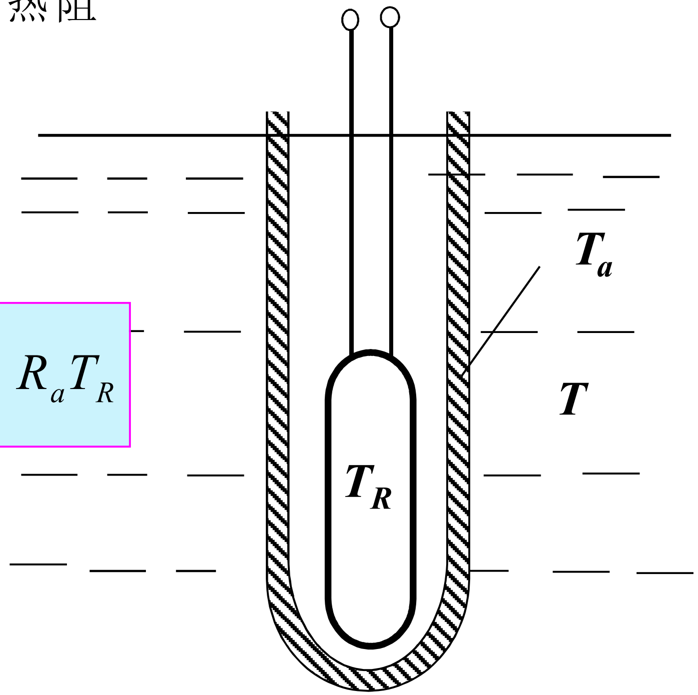
$$Q = \frac{q}{D} = C_a(T_a - T_{a0}),\ T_{a0}\text{是套管的初始温度}$$

- 整理得到 $$R_a R_h C_a \frac{dT_a}{dt} + (R_a + R_h)T_a = R_h T + R_a T_R$$

- 对于热电阻 $$R_h C \frac{dT_R}{dt} + T_R = T_a$$

- 消去T_a

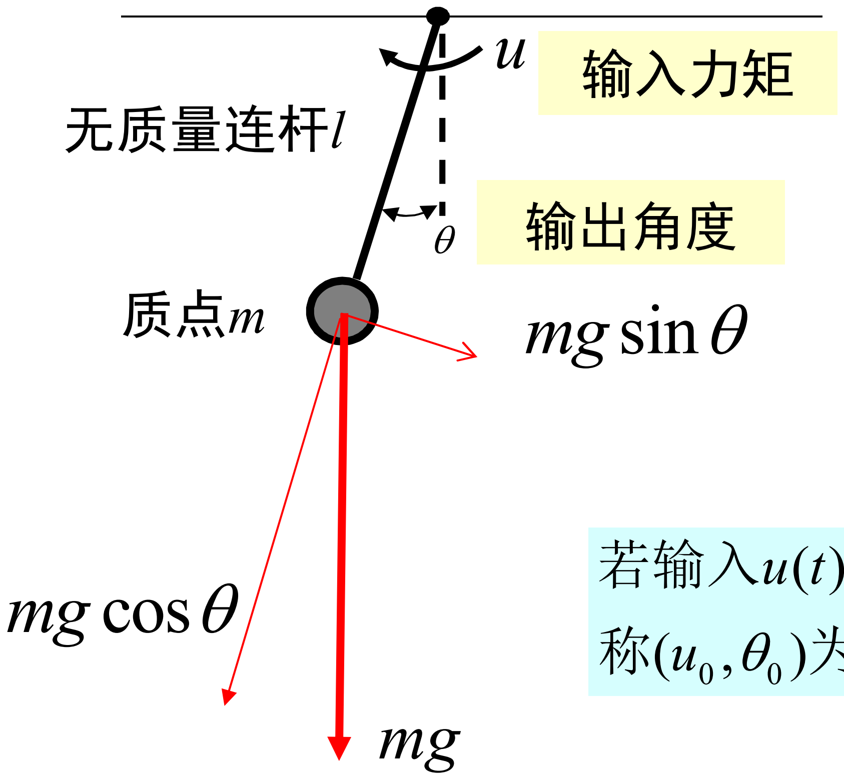
$$R_a R_h C_a C \frac{d^2 T_R}{dt^2} + (R_a C + R_h C + R_a C_a)\frac{dT_R}{dt} + T_R = T$$



有套管的热电阻示意图

非线性环节的线性化

例 钟摆



力矩分析

$$J\ddot{\theta} = u - mgl\sin\theta$$

转动惯量$J = ml^2$

$\Updownarrow$

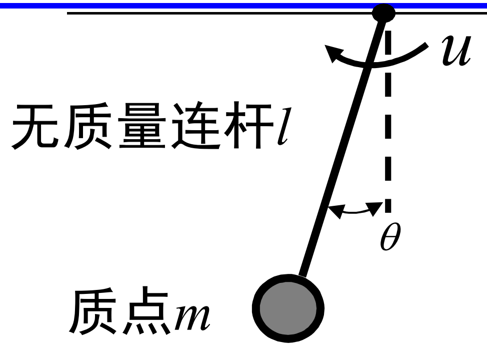
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{1}{ml^2}u$$

若输入$u(t)$为常值u_0，输出$\theta(t)$最终会收敛于常值θ_0

称(u_0, θ_0)为钟摆的一个工作点

在工作点处$\dfrac{g}{l}\sin\theta_0 = \dfrac{1}{ml^2}u_0$

非线性环节的线性化



$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=\frac{1}{ml^2}u \qquad (1)$$

$$\frac{g}{l}\sin\theta_0=\frac{1}{ml^2}u_0 \qquad (2)$$

记$\Delta\theta(t)=\theta(t)-\theta_0$

$\Delta u(t)=u(t)-u_0$

在给定工作点处，作$\sin\theta$的泰勒级数展开

$$\sin\theta=\sin\theta_0+\left.\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\theta_0}\Delta\theta+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\sin\theta}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}(\Delta\theta)^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3\sin\theta}{\mathrm{d}\theta^3}\right|_{\theta=\theta_0}(\Delta\theta)^3+\cdots$$

保留泰勒级数展开中的常数项和1次项

$$\sin\theta\approx\sin\theta_0+\left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0}\Delta\theta=\sin\theta_0+\cos\theta_0\Delta\theta \qquad (3)$$

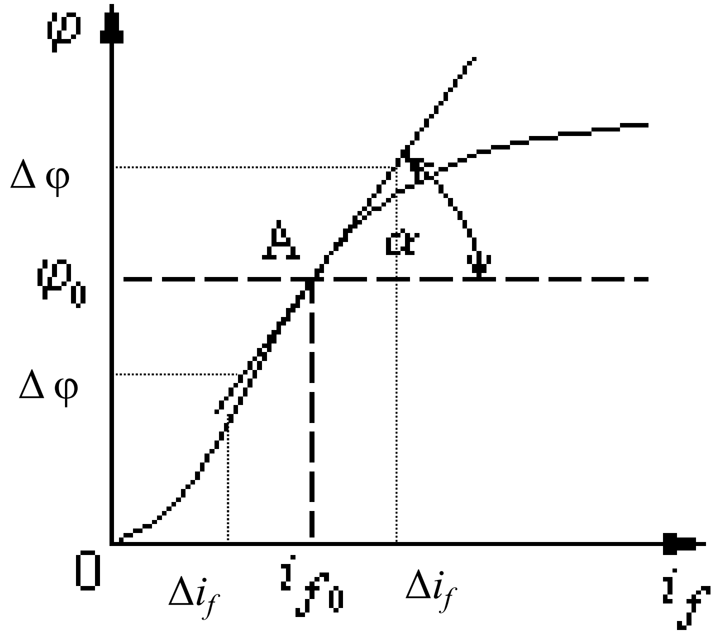
由(1)、(2)、(3)，有$\dfrac{d^2\Delta\theta}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\cos\theta_0\Delta\theta=\dfrac{1}{ml^2}\Delta u$

工作点附近，偏移量，线性近似

比如工作点$(u_0,\theta_0)=(0,0)$附近，$\dfrac{\Theta(s)}{U(s)}=\dfrac{\Delta\Theta(s)}{U(s)}=\dfrac{1/(ml^2)}{s^2+g/l}$可较好描述钟摆行为

非线性环节的线性化

- 几乎所有元件或系统的运动方程都是非线性方程。在比较小的范围内，把这些方程近似成线性的，多数情况下是不会产生很大误差的。方程式一经线性化，就可以应用线性迭加原理。
- 研究非线性系统在某一工作点附近的性能，如图，(i_{f0}, φ_0)为工作点，受到扰动后，$i_f(t)$偏离i_{f0}，产生$\Delta i_f(t)$和$\Delta\varphi(t)$的变化过程。非线性特性的线性化，实质上就是以平衡点附近的直线代替平衡点附近的曲线。



- 线性化最常用的方法是工作点处泰勒级数展开后舍去2次及更高次项，取相对于工作点的偏移量为变量即得线性关系
- 线性化的前提条件：工作点存在、工作点附近的1阶导数存在