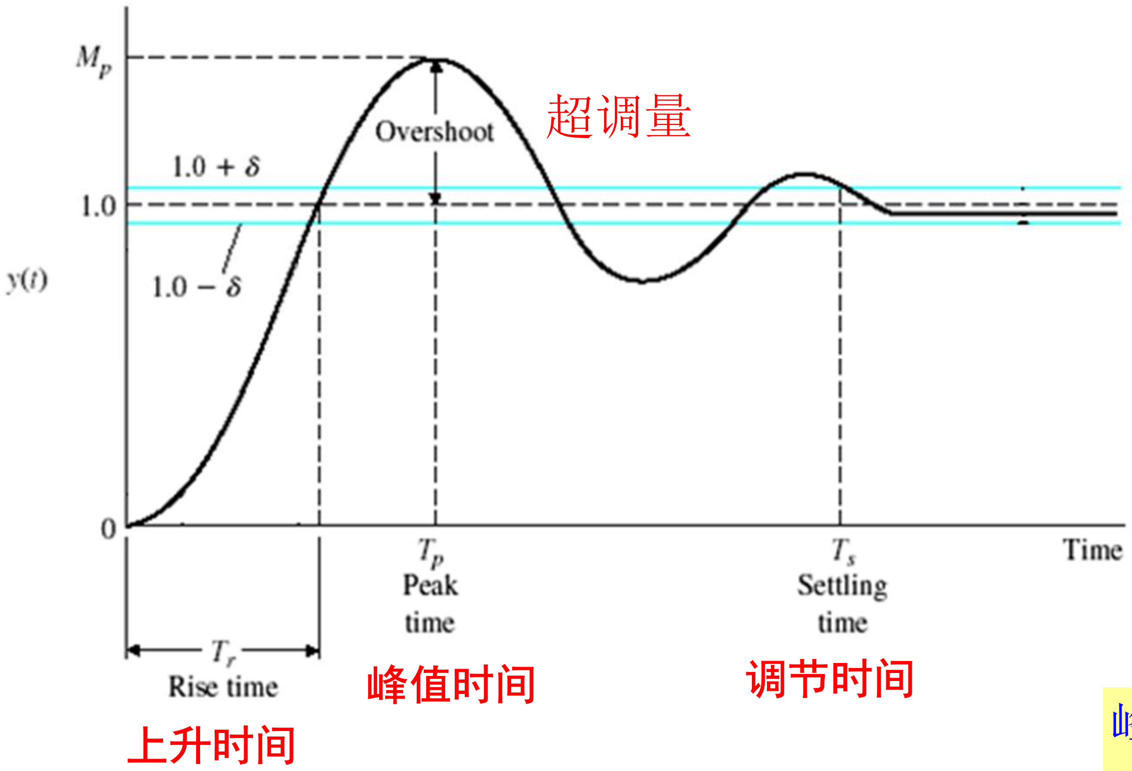
系统的动态性能指标

考察稳定系统在零初始条件下的单位阶跃响应曲线

- 基于动态特征的性能指标
  - 超调量(最大偏差) (Overshoot)
  - 调节时间 (Settling Time)
  - 峰值时间 (Peak Time)
  - 上升时间 (Rise time)

  …
- 基于偏差总量的性能指标
  - 平方误差积分指标 (ISE) $J_1 = \int_0^\infty e^2(t)dt$
  - 时间乘平方误差积分指标 (ITSE) $J_2 = \int_0^\infty te^2(t)dt$
  - 绝对误差积分指标 (IAE) $J_3 = \int_0^\infty |e(t)|dt$
  - 时间乘绝对误差积分指标 (ITAE) $J_4 = \int_0^\infty t|e(t)|dt$



系统在零初始条件下的单位阶跃响应

上升时间T_r：

对于衰减振荡过渡过程，指第一次到达1的时间；

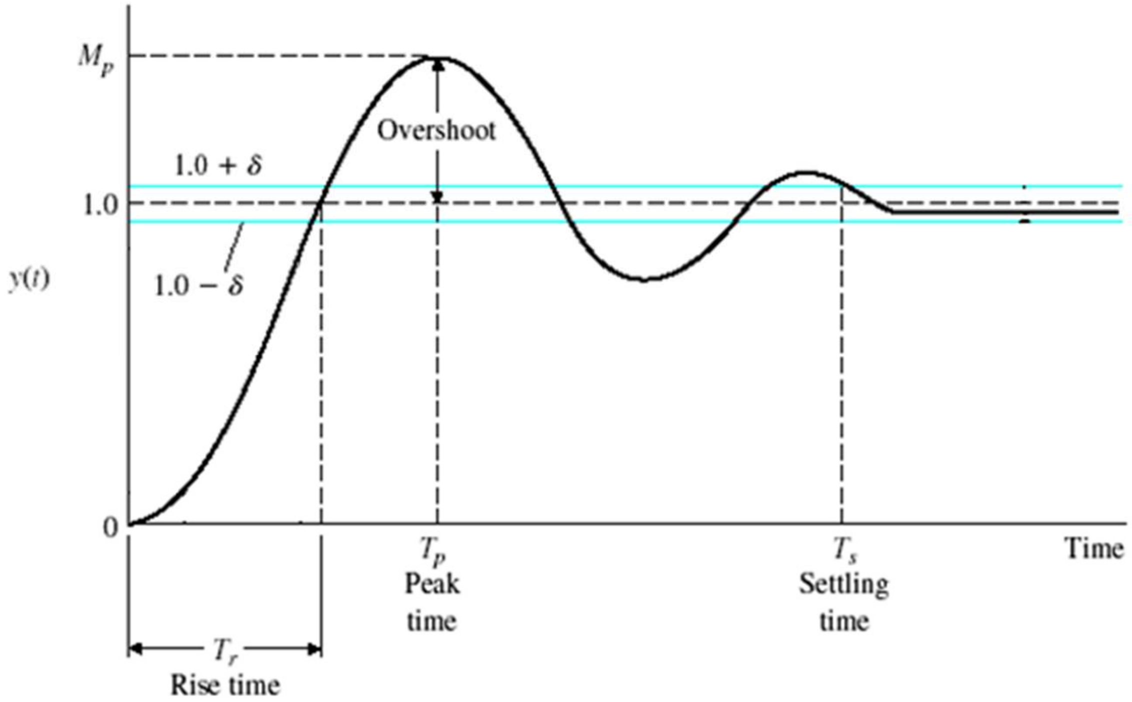
对于非振荡过渡过程，指从0.1到0.9所需的时间

峰值时间T_p：到达第一峰值的时间

超调量$\sigma\%$：第一峰值$M_p=y(T_p)$与稳态值$y(\infty)$之差，通常用百分比的形式表示

$$\sigma\% = \frac{y(T_p)-y(\infty)}{y(\infty)}\times 100\%$$

调节时间T_s（又称回复时间或过渡过程时间）：最后一次进入区间$(y(\infty)-\delta, y(\infty)+\delta)$的时间，$\delta$通常取$y(\infty)$的5%或$y(\infty)$的2%



- **延迟时间T_d**：第一次到达稳态值的50%的时间
- **衰减比n** 记第二峰值时间为$T_q, n=[y(T_p)-y(\infty)]:[y(T_q)-y(\infty)]$
  - 当n＝1时，过渡过程为等幅振荡
  - 当n>1时，n愈小，过渡过程的衰减程度也愈小
  - 过程控制一般希望控制系统的过渡过程稍带振荡，约对应于4：1~10：1的衰减比

一阶系统的响应分析

- 系统传递函数的极点决定了系统自由响应的特点
- 对于没有零点的一阶系统（惯性环节），系统具有一个极点

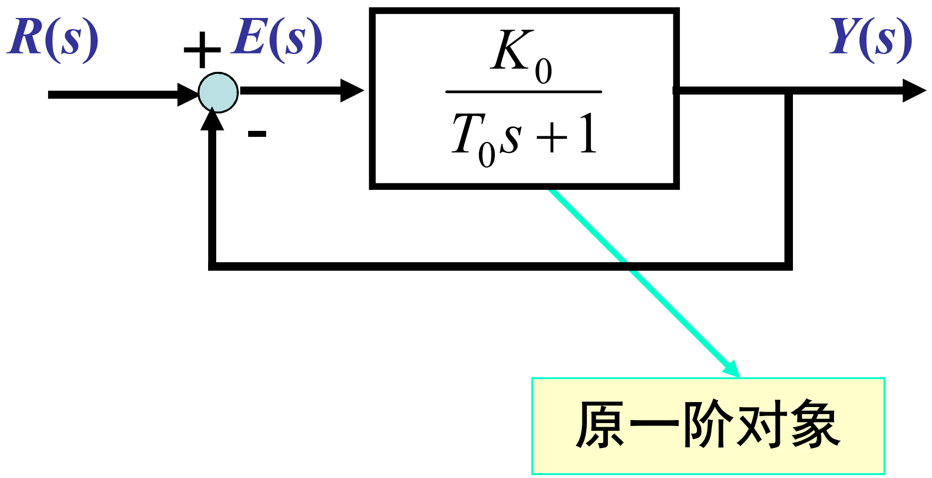
$$G(s)=\frac{K_r}{s-p}=\frac{K}{Ts+1},\quad p\text{为非零实数}$$

$$p<0\text{表示系统稳定，时间常数}T=\frac{1}{-p}$$

$$p>0\text{表示系统不稳定，这时}T<0$$

一阶系统的响应分析

➢ 由一阶稳定对象组成的单位反馈闭环系统仍然是一阶稳定系统，只是系统增益和时间常数变小，为原值的**$1/(1+K_0)$**



闭环传递函数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{K_0}{T_0 s+1}}{1+\dfrac{K_0}{T_0 s+1}}=\frac{K_0}{T_0 s+1+K_0}=\frac{K}{Ts+1},\quad T_0>0$$

其中，$K=\dfrac{K_0}{1+K_0},\quad T=\dfrac{T_0}{1+K_0}$

一阶系统的响应分析

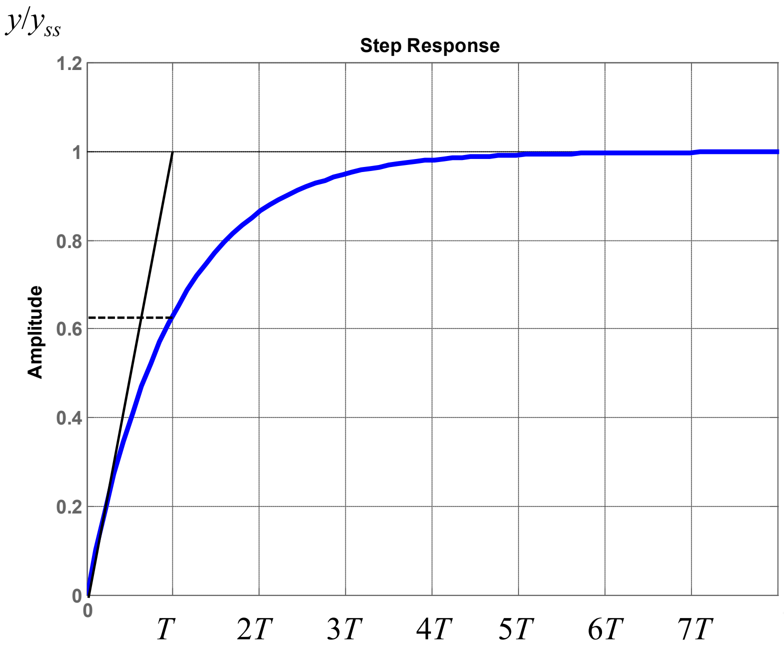
1. 如果 r 为单位阶跃函数：$r(t)=1$

强迫　　自由

零初始条件下，一阶稳定系统的阶跃响应为

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{K}{Ts+1}=\frac{K}{s}-\frac{K}{s+\frac{1}{T}}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\underbrace{K}_{\text{强迫}}-\underbrace{Ke^{-\frac{t}{T}}}_{\text{自由}}$$



当 $t=0,\ y(0)=0$， $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\frac{K}{T}$

当 $t=T$， $y(T)=K(1-e^{-1})=0.632K$

当 $t\to\infty$， $y(\infty)=K$ $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t\to\infty}=0$

当 $t=3T$， $y(t)=0.95K$

$t=4T$， $y(t)=0.982K$

$t=5T$， $y(t)=0.993K$

不存在峰值时间 T_p、超调量 σ 与衰减比 n；

$T_d=0.69T$

$T_r=2.20T$

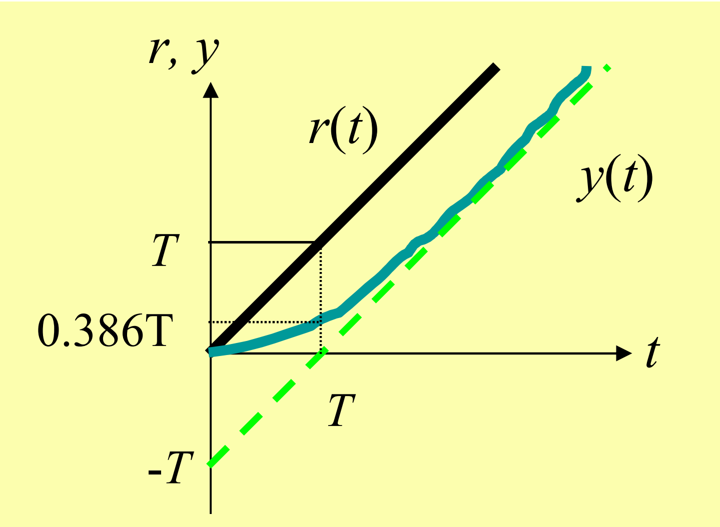
$$T_s=\begin{cases}3T; & \delta=5\%y(\infty)\\ 4T; & \delta=2\%y(\infty)\end{cases}$$

一阶系统的响应分析

2. 如果 r 为单位斜坡函数：$r(t)=t$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$



斜坡响应为

$$y(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$$

强迫 ($t-T$)　　自由 ($Te^{-\frac{t}{T}}$)

一阶系统的响应分析

系统输入 $t \geq 0$		系统响应 $t \geq 0$
单位脉冲 $r(t)=\delta(t)$	⇒	$y_{\delta}(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} = g(t)$
↑ D		↑ D
单位阶跃 $r(t)=u(t)=1$	⇒	$y_u(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$
↑ D		↑ D
单位斜坡 $r(t)=t$	⇒	$y_{r=t}(t) = (t - T) + Te^{-\frac{t}{T}}$
↑ D		↑ D
单位抛物线 $r(t)=t^2/2$	⇒	$y_{x=\frac{t^2}{2}}(t) = \left(\frac{t^2}{2} - Tt + T^2\right) - T^2 e^{-\frac{t}{T}}$

- 线性系统对输入信号导数（积分）的响应，可通过系统对输入信号的响应进行微分（积分--积分常数则由零初始条件决定）求得。

一阶系统的响应分析

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

3. 如果 r 为单位正弦函数：$r(t)=\sin\omega t$

$$Y(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{-T\omega}{T^2\omega^2+1}\frac{s-\frac{1}{T}}{s^2+\omega^2}+\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$y(t)=\underbrace{\frac{-1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}\sin(\omega t+\phi)}_{\text{强迫}}+\underbrace{\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}e^{-\frac{t}{T}}}_{\text{自由}}\qquad \text{其中，}\ \phi=\arctan(-\omega T)$$

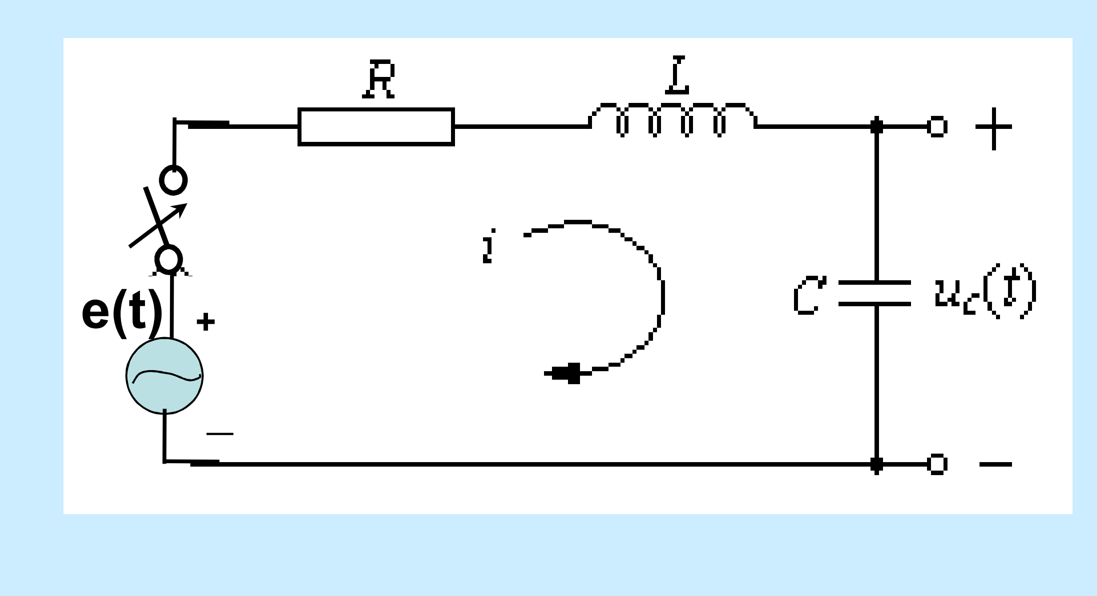
强迫　　自由

二阶系统的响应分析

➢ 回顾第2章的例子

- 例1. R-L-C 串联电路

$$LC\frac{du_c^{\,2}(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=e$$

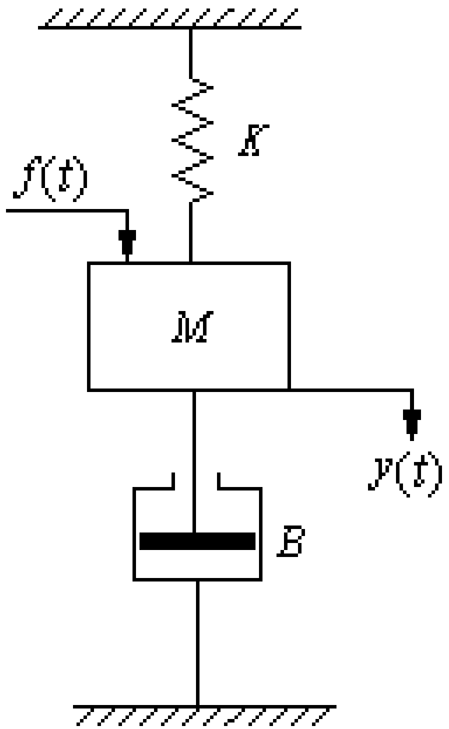


二阶系统的响应分析

➢ 回顾第2章的例子

- 例2. 质量-弹簧-阻尼系统

$$M\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+Ky(t)=f(t)$$

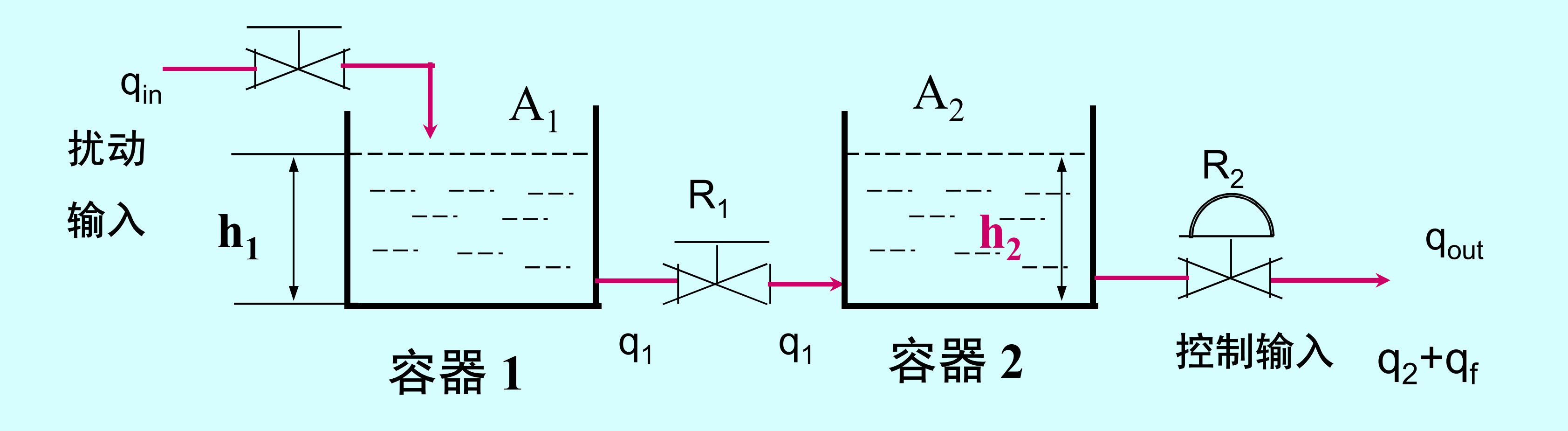


二阶系统的响应分析

➢ 回顾第2章的例子

• 例3. 液位系统

$$R_1A_1R_2A_2\frac{d^2h_2}{dt^2}+(R_1A_1+R_2A_2+R_2A_1)\frac{dh_2}{dt}+h_2=R_2q_{in}-R_2q_f-R_1A_1R_2\frac{dq_f}{dt}$$



所有这些常见例子均为稳定的二阶系统

二阶系统的响应分析

- 对于没有零点的二阶系统，系统具有两个极点

$$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1},\quad T>0$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的标准形式

ζ是无量纲的阻尼比（阻尼系数），$\omega_n=\dfrac{1}{T}>0$称为自然频率

圆频率ω（弧度/秒）

普通频率f（次/秒或赫兹）

$f=\dfrac{1}{\tau},\omega=2\pi f=\dfrac{2\pi}{\tau},\tau$是周期

二阶系统的响应分析

- 例1. R-L-C 串联电路 $LC\dfrac{du_c^2(t)}{dt^2}+RC\dfrac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=e$

$$G(s)=\frac{Uc(s)}{E(s)}=\frac{1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

自然频率 $\omega_n=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

阻尼比 $\zeta=\dfrac{R/L}{2\omega_n}=\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

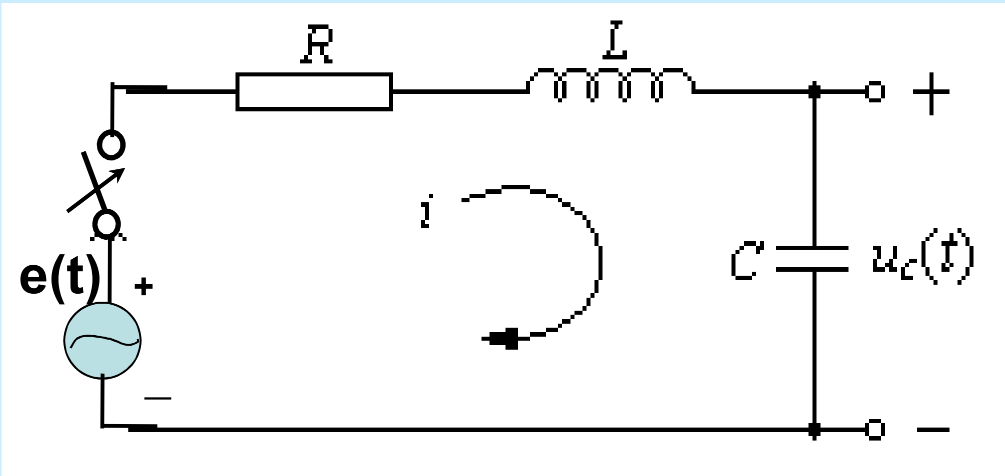


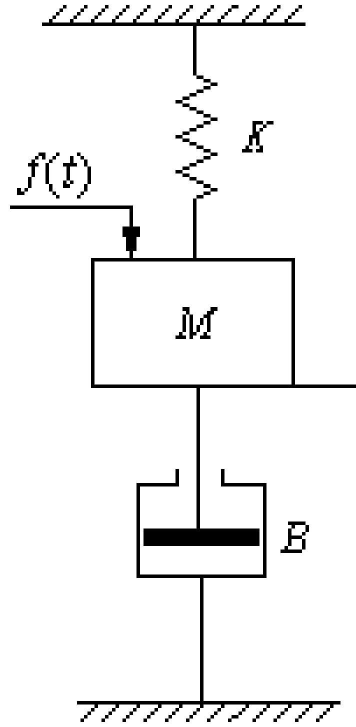
Fig .3

二阶系统的响应分析

- 例2. 质量-弹簧-阻尼系统

$$M\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+Ky(t)=f(t)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{K}\frac{\frac{K}{M}}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{K}{M}}=\frac{1}{K}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



其中，自然频率

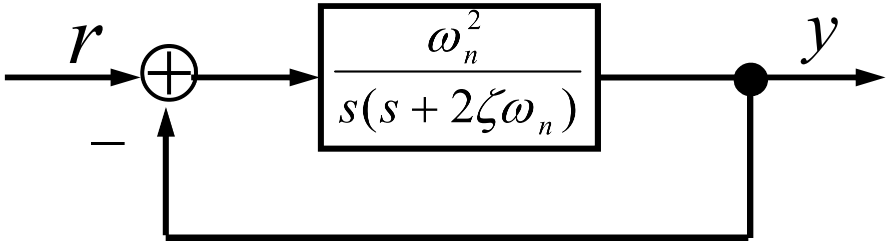
$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}}$$

阻尼比

$$\zeta=\frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

二阶系统的响应分析

- 具有标准形式的二阶系统还可以表示为如下图所示的单位反馈系统结构



$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

原系统 $\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$ 不稳定

- 由二阶对象组成的单位反馈闭环系统仍然是二阶系统

二阶系统的响应分析

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- ζ>1时，系统具有两个不同的实根

$$s_{1,2}=-(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n$$

2个互异的负实根，系统稳定

- 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应为

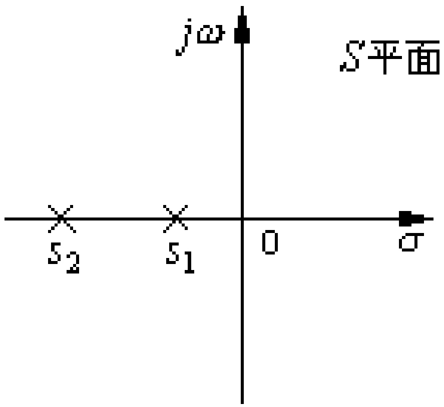
$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{[2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})]^{-1}}{s+(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}+\frac{[2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})]^{-1}}{s+(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}$$

LT^{-1}

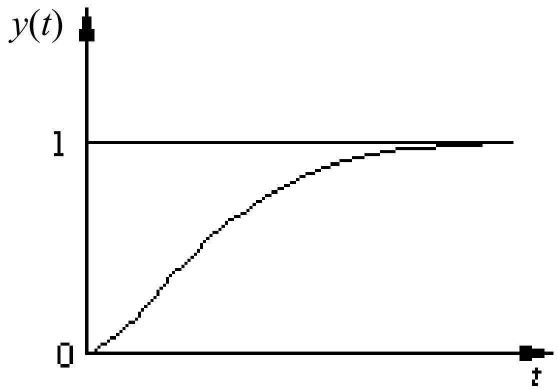
$$y(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}-\frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right)$$

二阶系统的响应分析

- $\zeta>1$时，系统特征方程的根在 S 平面的分布及响应曲线



(a) 根分布



(b) 单位阶跃响应

此时的系统响应称为**过阻尼**响应

二阶系统的响应分析

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

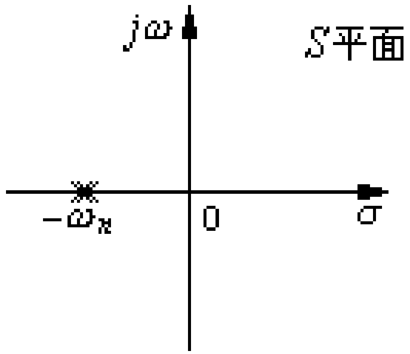
- ζ=1时，系统特征方程具有两个相等的实根 $s_{1,2}=-\omega_n$ 2重负实根，系统稳定
- 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应为

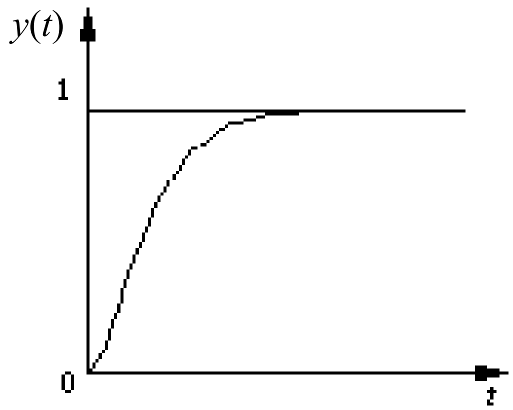
$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}-\frac{1}{s+\omega_n}$$

LT^{-1}

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

- 此时，系统响应称为临界阻尼响应





二阶系统的响应分析

- $0<\zeta<1$时，系统传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)}$$

$$s_1,s_2=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

1对共轭负实部根，系统稳定

- 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应的传递函数为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

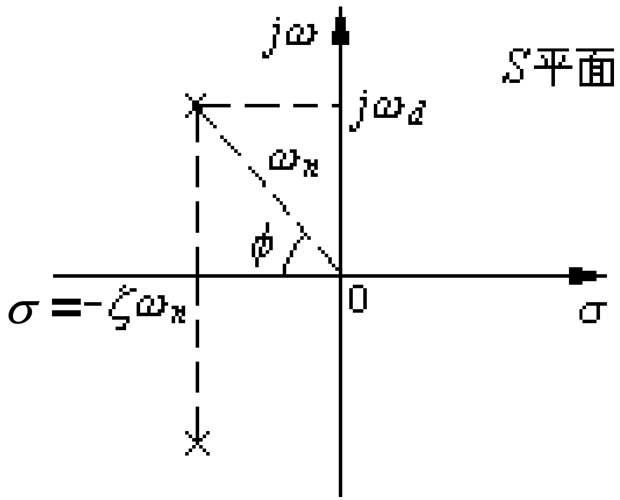
LT^{-1}

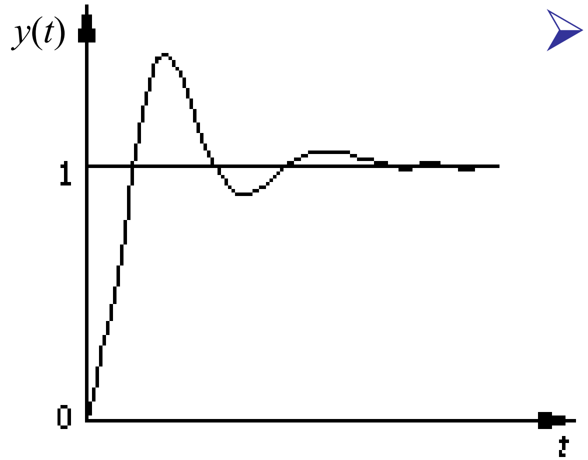
$$\begin{aligned}y(t)&=L^{-1}[Y(s)]=1-e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t)\\&=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})\end{aligned}$$

二阶

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)}$$

$$\boxed{y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})}$$





- 此时，系统响应称为**欠阻尼**响应

$$s_1,s_2=\sigma\pm j\omega_d=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_n=\sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}=|s_1|=|s_2|$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$\sigma=-\zeta\omega_n$

衰减（阻尼）震荡频率 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

- 衰减振荡过程，其振荡频率为有阻尼振荡频率 ω_d，而其幅值则按 $e^{\sigma t}$ 衰减，两者均由参数**阻尼比 ζ 和自然频率 ω_n** 决定

二阶系统的响应分析

- ζ=0时，系统传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s-j\omega_d)(s+j\omega_d)}$$

$$s_1, s_2=\pm j\omega_n$$

1对共轭虚根，系统临界稳定

- 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应的传递函数为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

LT^{-1}

$$\boxed{y(t)=L^{-1}[Y(s)]=1-\cos\omega_n t}$$

- 响应曲线将以自然频率 ω_n作等幅振荡

二阶系统的响应分析

- ζ<0时，系统传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$$

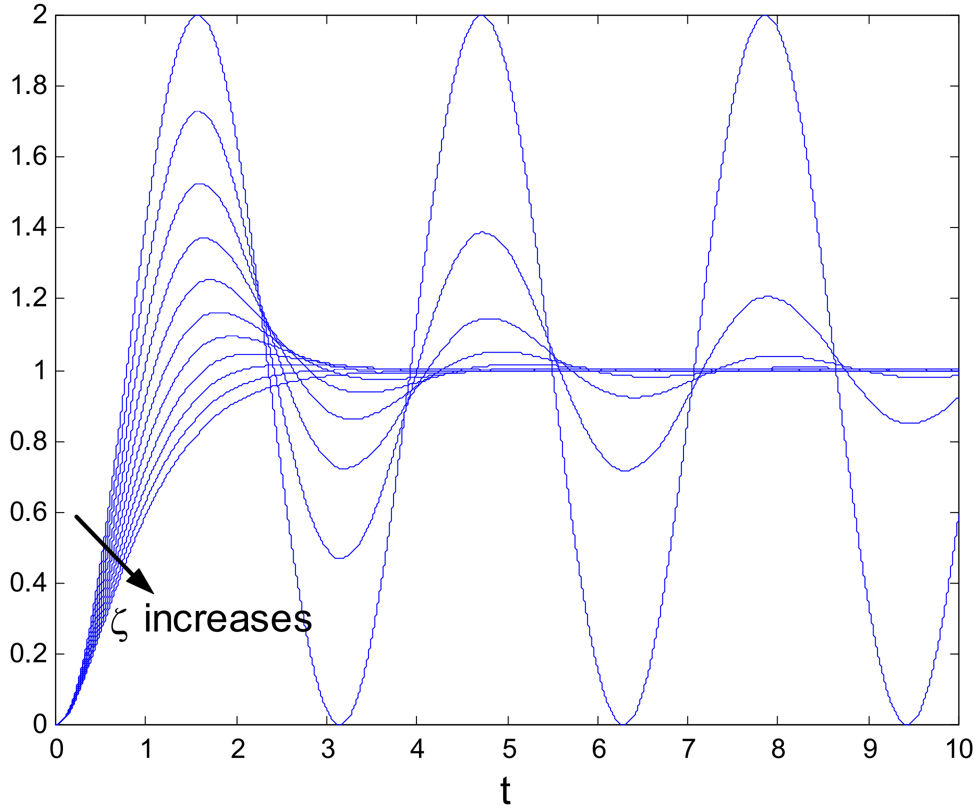
$$s_1,s_2=\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n$$

2个正实部根，系统不稳定

二阶系统的响应分析

- 不同的 ζ 取值下的单位阶跃响应

$\boxed{0 \le \zeta}$



二阶系统的响应分析

- 阻尼比 ζ 与系统特征方程根在 **S** 平面 中位置的关系
  - $\zeta<0$，特征方程有2个正实部根，系统响应发散(不稳定)
  - $\zeta=0$，特征方程有1对共轭虚根，系统响应为等幅振荡(临界稳定)响应
  - $0<\zeta<1$，特征方程有1对共轭负实部根，系统响应为欠阻尼响应
  - $\zeta=1$，特征方程有相等负实根，系统响应为临界阻尼响应
  - $\zeta>1$，特征方程有不等负实根，系统响应为过阻尼响应

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **上升时间**：响应从终值的10%上升到终值的90%所需的时间（过阻尼系统）；或响应从零第一次上升到终值所需的时间（欠阻尼系统）。

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$$

$$y(T_r)=1$$

$$\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,T_r+\phi)=0$$

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,T_r+\phi=\pi$$

$$\boxed{T_r=\frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

其中，

$$\phi=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **峰值时间**：系统响应超过其终值到达**第一个峰值**所需的时间。

$$y_u(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$\frac{dy_u(t)}{dt} = y_\delta(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t)$$

$$\frac{dy_u(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t) = 0 \Leftrightarrow \omega_d t = n\pi \Leftrightarrow t = \frac{n\pi}{\omega_d} \Leftrightarrow T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

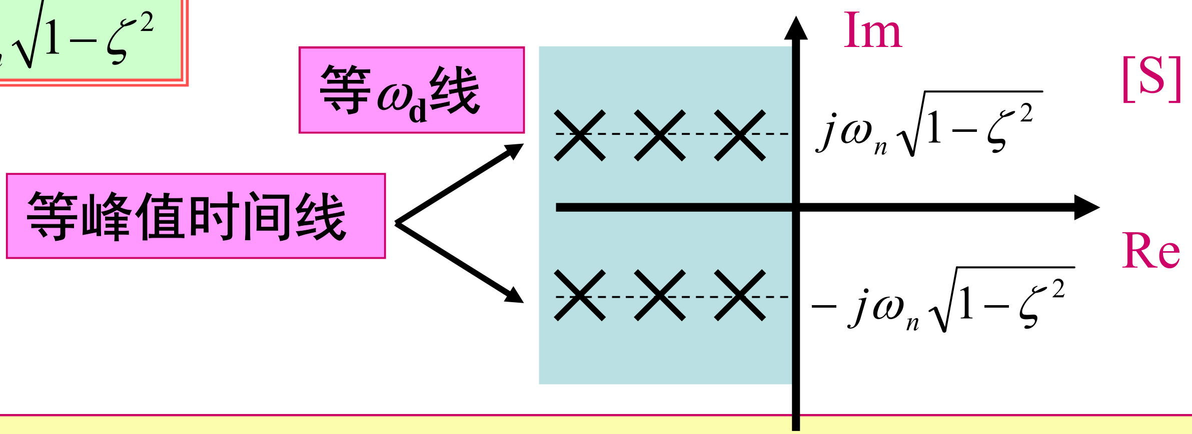
- 峰值时间是阻尼振荡频率ω_d（$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$）的函数

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **峰值时间**：系统响应超过其终值到达第一个峰值所需的时间。

$$y_u(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$\boxed{T_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



峰值时间 T_p与阻尼振荡频率 ω_d 成反比。当 ω_n一定，ζ越小，T_p也越小。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **超调量：**响应的最大偏离量与终值的差同终值的比。

- 最大偏离量

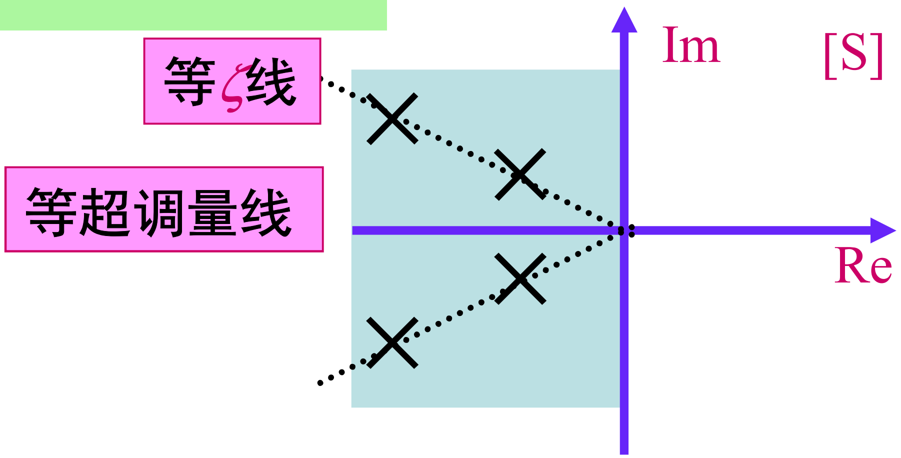
$$M_p = y(T_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \beta\right)$$

$$= 1 + e^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\phi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

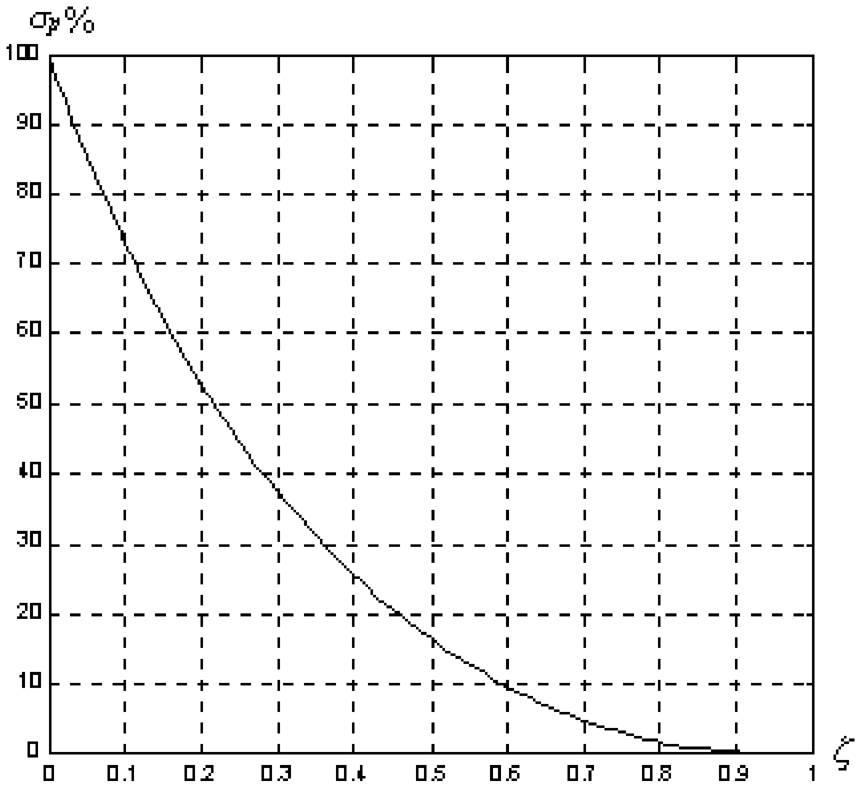
- 超调量

$$\sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



超调量完全由ζ决定，ζ越小，超调量越大。当ζ=0时，σ%=100%，当ζ=1时，σ% =0。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



σ% 和 ζ 的关系

$$\sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **调节时间：**响应到达并保持在终值±5%（±2%）内所需的最短时间。

- 误差表达式

$$e(t)=r(t)-y(t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})\qquad(t\geq 0)$$

- 考虑到系统时间响应曲线总是在包络线的两条分支之间变化

$$\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right|\leq\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right|\leq 0.05,\text{或}0.02$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

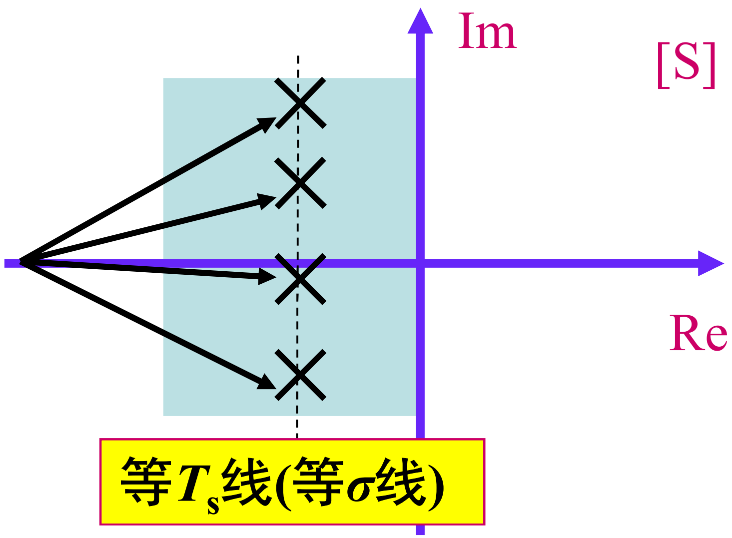
- 通常利用两个近似公式计算调节时间

$$\left|e^{-\zeta\omega_n T_s}\right| = 0.05 \Leftrightarrow \zeta\omega_n T_s \approx 3 \Leftrightarrow T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$ 对于 **5%** 误差

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$ 对于 **2%** 误差

- 调节时间仅仅取决于复数共轭极点的实部 $\zeta\omega_n$

等调节时间线



等T_s线(等σ线)

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **衰减比：**同方向过渡过程曲线上的相邻两个波峰之比

第3波峰时间 $T_3 = \dfrac{3\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ ⇒ $y(T_3) = 1 + e^{-\frac{3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

⇓

$$n = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

与超调量σ类似，与阻尼比ζ之间有一一对应的关系

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- 对于不包含零点的二阶系统，动态性能指标的**精确公式**

$$M_p = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$n = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\phi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$ 对于 5% 误差

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$ 对于 2% 误差

通常还用：$T_s \approx \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

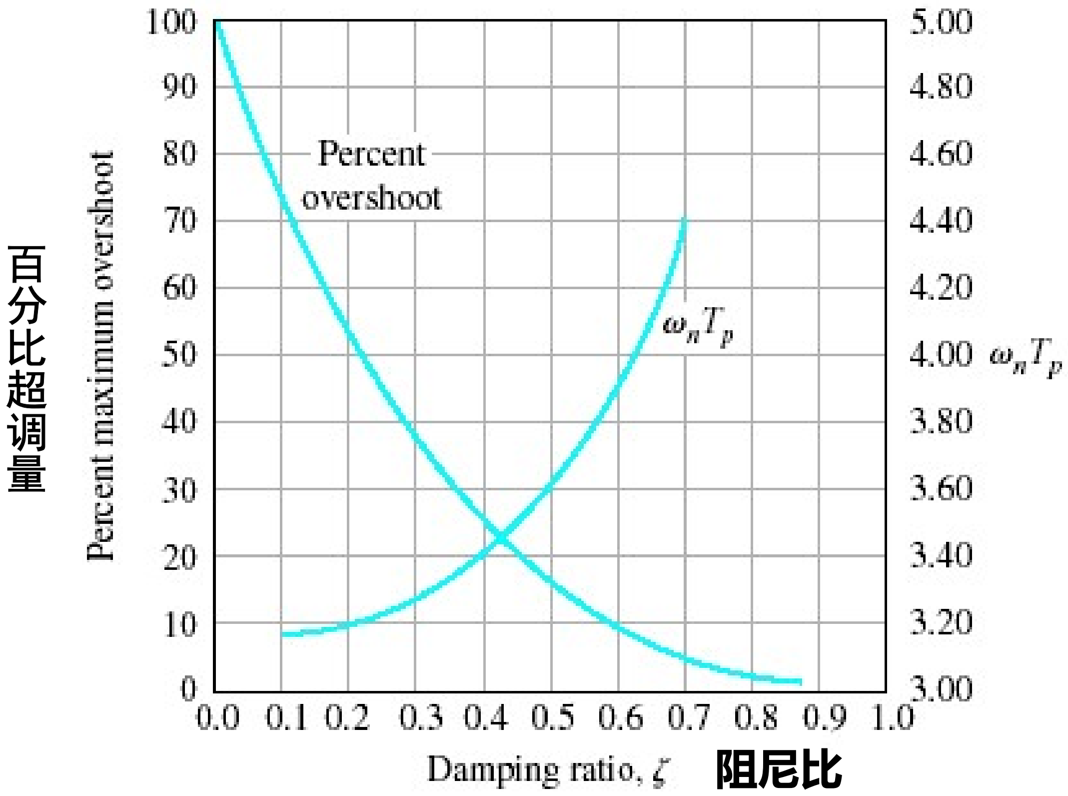
$$T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad T_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

- 如何选取ζ和ω_n来满足系统设计要求？性能指标与ζ和ω_n的关系如下：
  - 当ω_n一定，要减小T_r和T_p，必须减少ζ值，要减少 T_s则应增大$\zeta\omega_n$值，而且ζ值有一定范围，不能过大。
  - 增大ω_n，能使T_r，T_p和T_s都减小。
  - 最大超调量σ只由ζ决定，ζ越小，σ越大。所以，一般先根据σ的要求选择ζ值，在实际系统中，ζ值一般在0.5～0.8之间。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



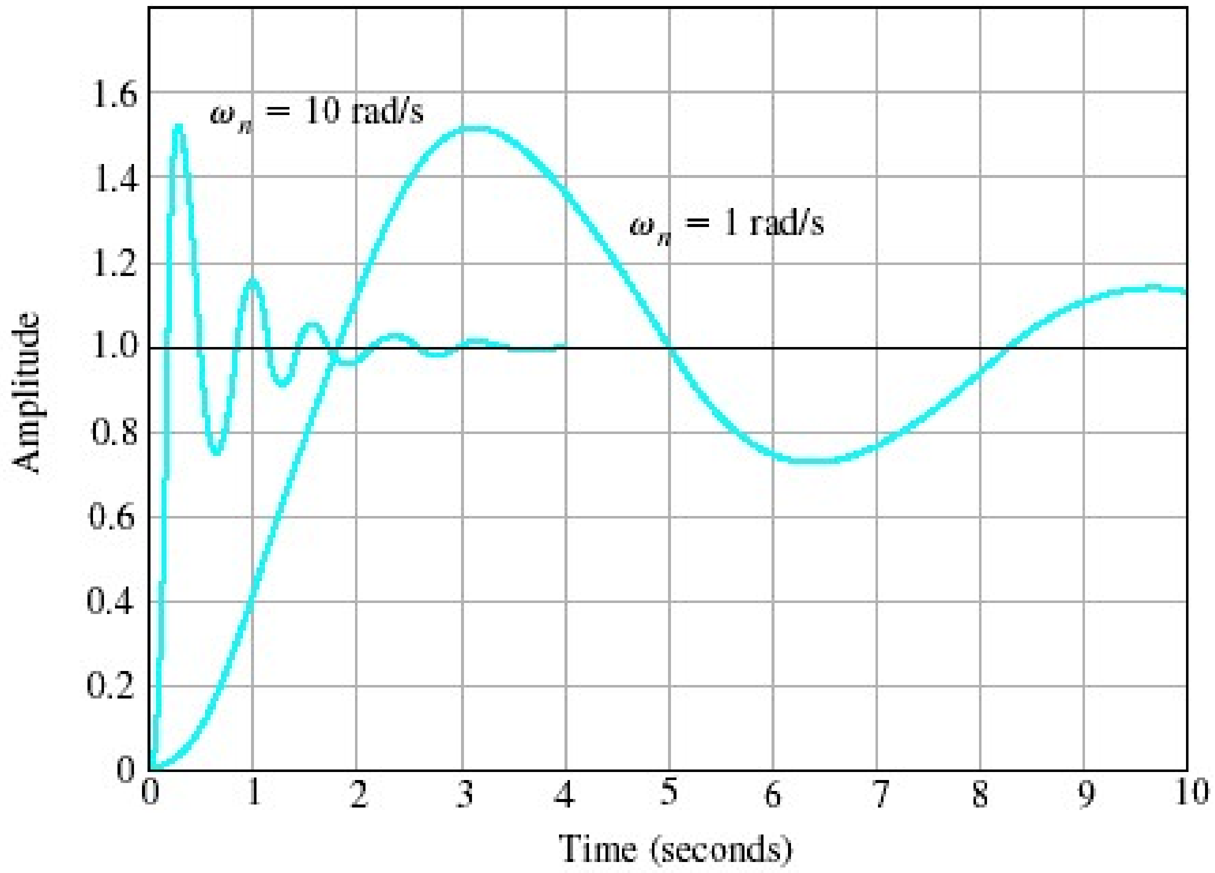
Percent overshoot and normalized peak time versus damping ratio ζ for a second-order system

二阶系统的百分比超调量、归一化峰值时间与阻尼比的关系

从控制系统设计目标来说，峰值时间与超调量之间具有相互矛盾的关系，因此在设计的时候要考虑到两者之间的折中。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

幅值

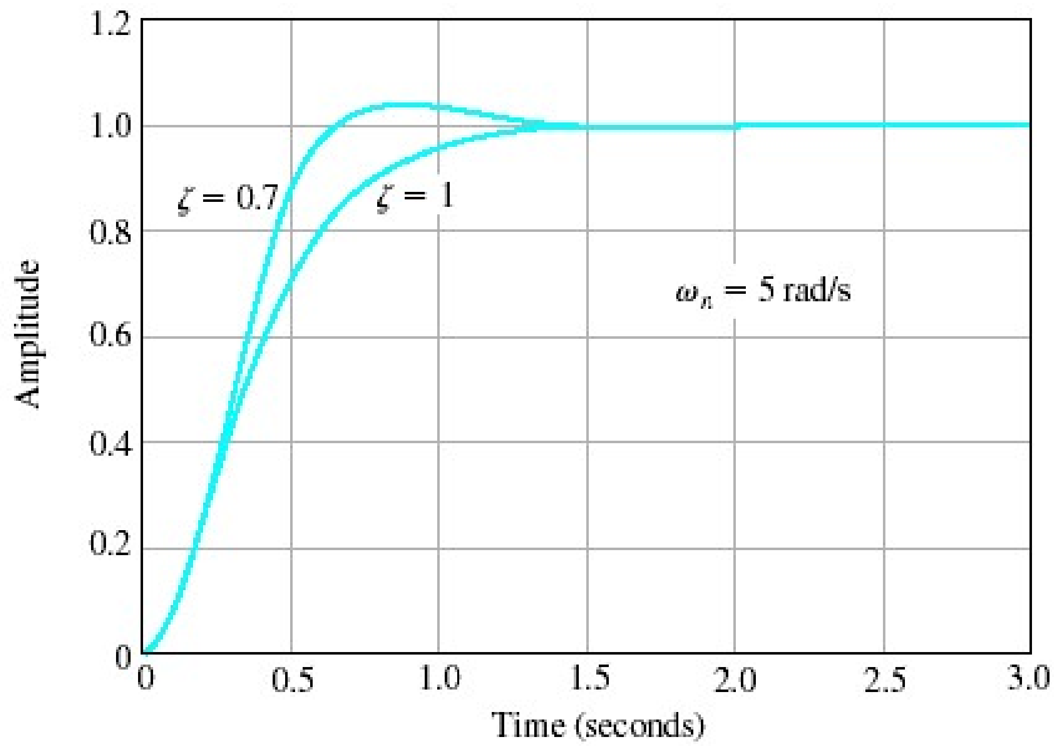


The step response for $\zeta = 0.2$ for $\omega_n = 1$ and $\omega_n = 10$.

阶跃响应

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

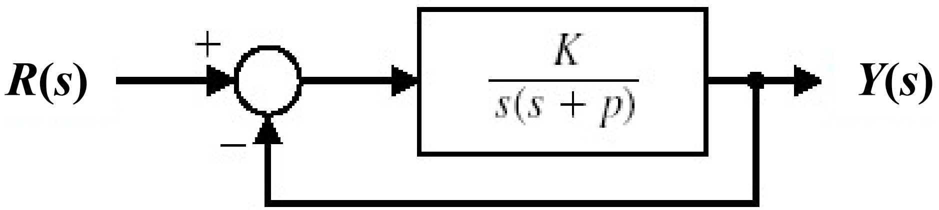
幅值



The step response for $\omega_n = 5$ with $\zeta = 0.7$ and $\zeta = 1$.

阶跃响应

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



$$G_o(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

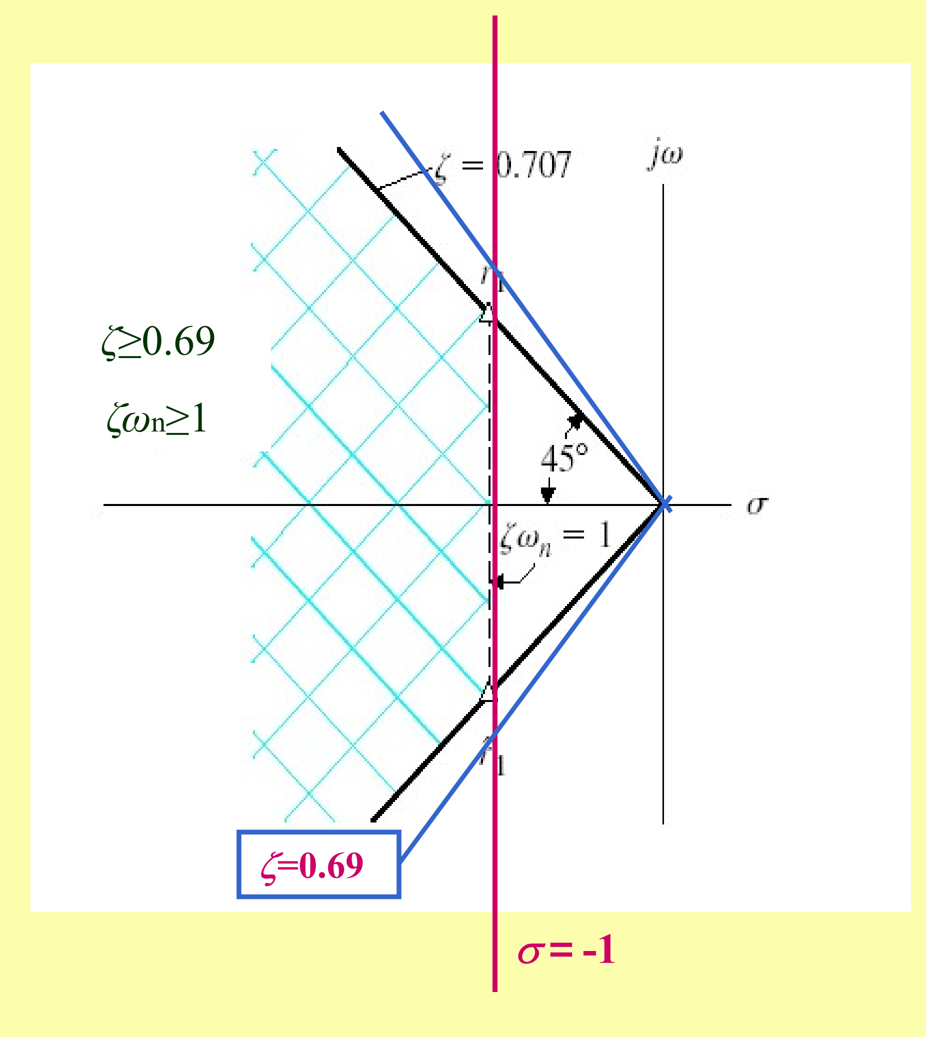
选择增益 *K* 和参数 *p*，使得百分比超调量小于 5%，调节时间（考虑 2% 误差）小于 4 秒。

解：

$$\because \quad \sigma=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\le 0.05$$

$$\ln 0.05\ge -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\Rightarrow \zeta^2\ge 0.477\Rightarrow \zeta\ge 0.69$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



$$\zeta \ge 0.69$$

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \le 4 \Longrightarrow \zeta\omega_n \ge 1$$

闭环系统特征根

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j \Longrightarrow \begin{aligned} T_s &= 4 \\ \sigma &= 4.3\% \end{aligned}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \omega_n = \sqrt{2}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

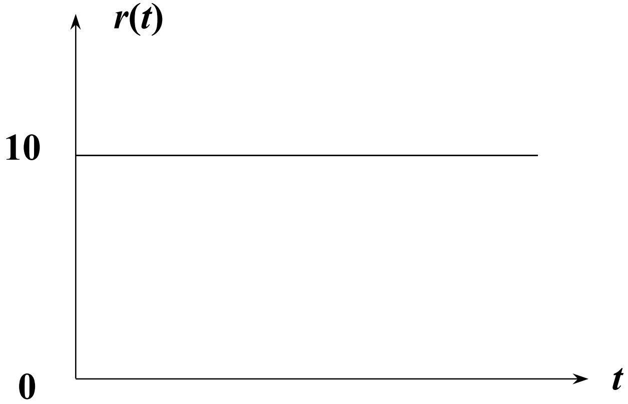
$\boxed{K=2，p=2}$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

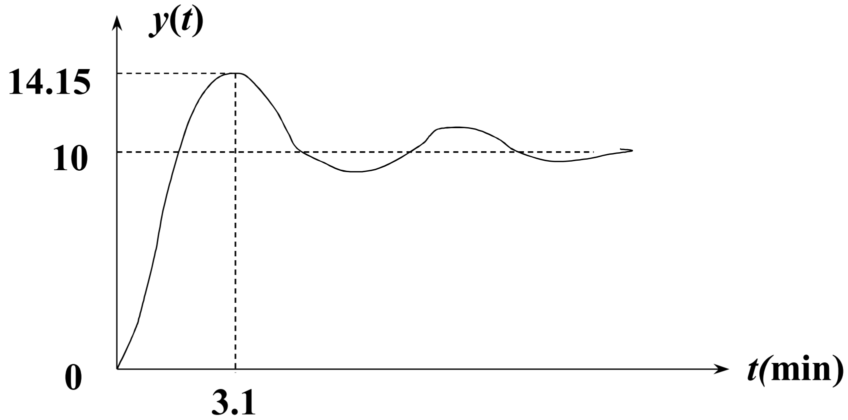
❖（1997年考研题）设某一单位反馈的二阶系统的阶跃响应曲线如图示，试确定此该系统的开环传递函数。提示：

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



系统输入曲线



系统响应曲线

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

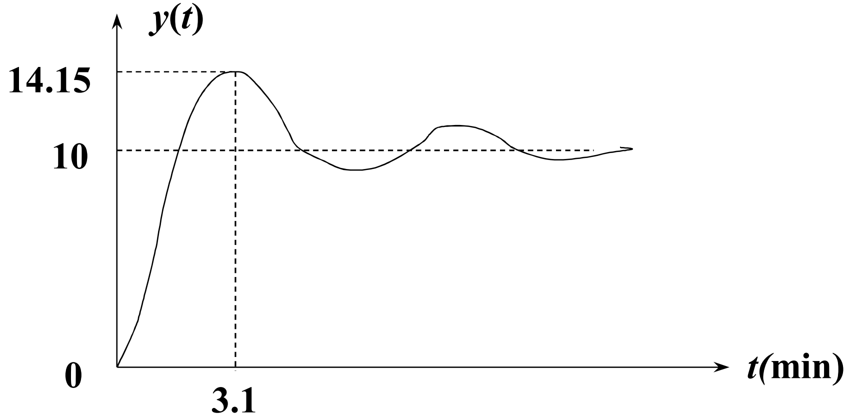
由图直接可得： $\sigma=\dfrac{14.15-10}{10}=0.415; T_p=3.1$

由 $\sigma=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}=0.415$ $\quad T_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=3.1$

解之： $\zeta=0.27 \quad \omega_n=1.05$

故：系统开环传递函数：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=\frac{1.1025}{s(s+0.567)}$$

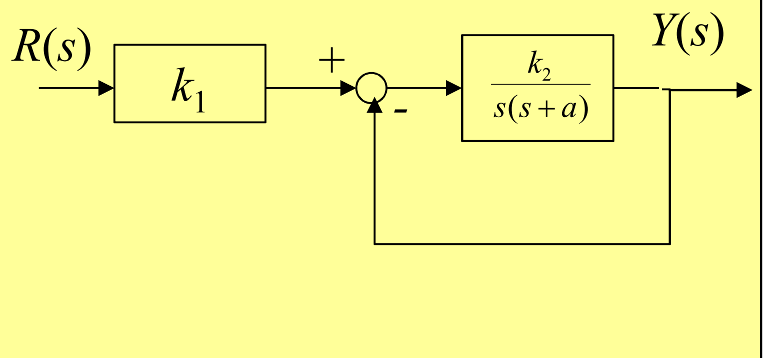


系统响应曲线

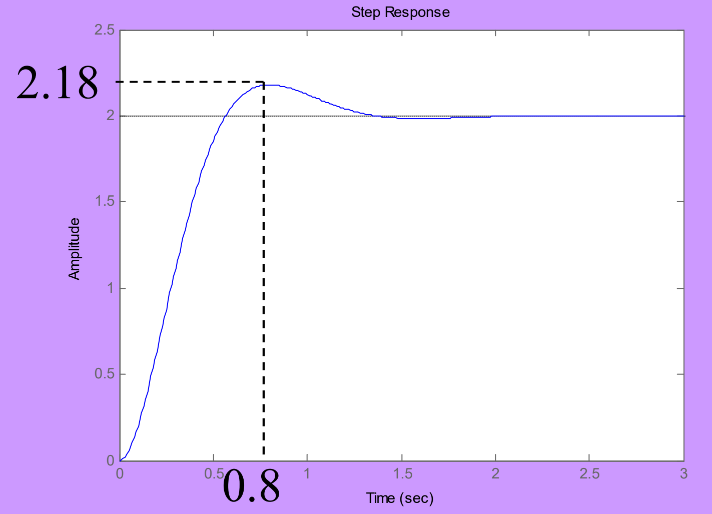
欠阻尼二阶系统的动态性能指标

❖（2005年考研题）系统结构及其单位阶跃响应如图。试求k_1、k_2和a值。[提示：$0<\zeta<1$时, 标准二阶系统的单位响应]

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

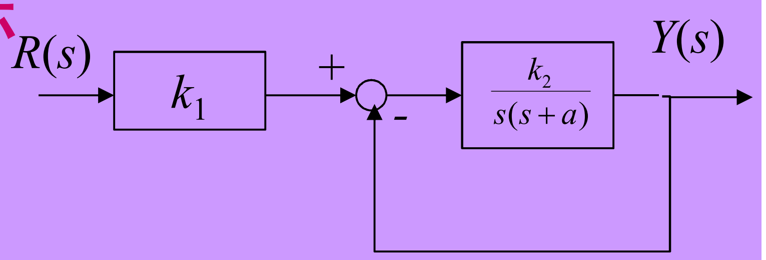


系统结构



单位阶跃响应

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



系统结构

解：

$$G(s)=\frac{k_1\times\frac{k_2}{s(s+a)}}{1+\frac{k_2}{s(s+a)}}=\frac{k_1k_2}{s^2+as+k_2}$$

$$k_1=2$$

$$\therefore\begin{cases}\omega_n^2=k_2\\ 2\zeta\omega_n=a\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{2.18-2}{2}=9\%=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta=0.608$$

$$T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n=4.946$$

$$\therefore k_2=\omega_n^2=24.463$$
$$a=2\zeta\omega_n=6.014$$

Thanks！