自动控制原理

Principle of Automatic Control

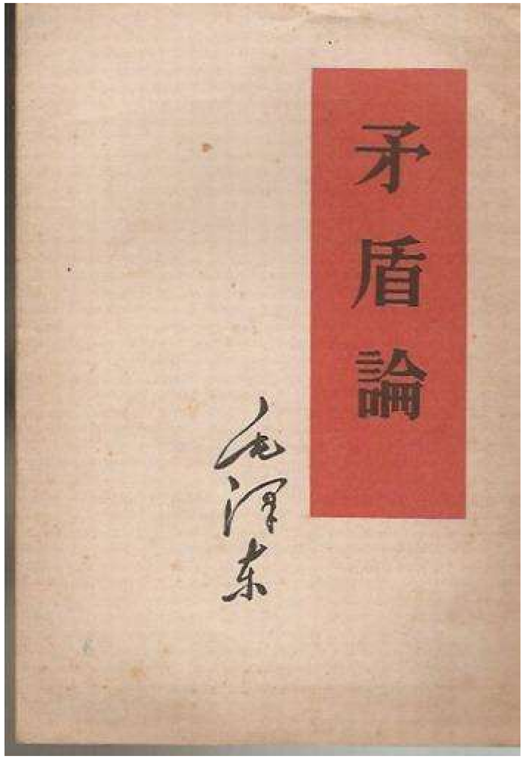
第三章 CHAPTER 3

连续时间控制系统的时域分析

稳定高阶系统的近似

- 对于实际物理世界中更常见的高阶系统
- 常用稳定的一阶或二阶控制系统近似稳定的高阶控制系统
- 主导极点思想，忽略非主导极点和零点
- 将一阶或二阶系统的动态性能指标公式用于高阶系统
- 利用计算机仿真考察近似的程度

抓主要矛盾的哲学思想



研究任何事物的过程，如果是存在着两个以上矛盾的复杂过程的话，就要用全力找出它的主要矛盾，抓住了这个主要矛盾，一切问题就迎刃而解了

毛泽东

稳定高阶系统的近似

- 高阶系统自由响应各分量的衰减快慢由系统极点的位置决定
  - 极点在S平面左半部离虚轴越远，相应的分量衰减越快，对系统的影响越小
- 各分量所对应的系数取决于系数的零、极点分布。
  - 若一对零极点互相很接近，则在输出*y*(*t*)中与该极点对应的分量就几乎被抵消。
  - 当某极点靠近零点而远离其他极点和原点，则相应的系数越小，该自由分量的影响就小。
  - 若某极点远离零点和其他极点，越接近原点，则相应的系数就越大，该自由分量的影响也就越大。
- 系统的零、极点共同决定了系统自由响应曲线的形状。

对于系数很小（影响很小）的分量、远离虚轴衰减很快的分量常常可以忽略，此时高阶系统就可用低阶系统来近似估计。

稳定高阶系统的近似

主导极点（某些稳定高阶系统的低阶近似）

主导极点（**1**个或**2**个）特征：

附近无其它零极点

距虚轴较近（其实部绝对值小于其它极点实部绝对值的**1/5**）

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)(s^2+2s+5)}=\frac{10(s-(-8))}{(s-(-20))(s-(-1+2\mathrm{j}))(s-(-1-2\mathrm{j}))}$$

$-1\pm 2\mathrm{j}$是一对主导极点

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)(s^2+2s+5)}=\frac{80(0.125s+1)}{20(0.05s+1)(s^2+2s+5)}$$

$$\approx\frac{4}{s^2+2s+5}$$

增益不变

根轨迹增益变

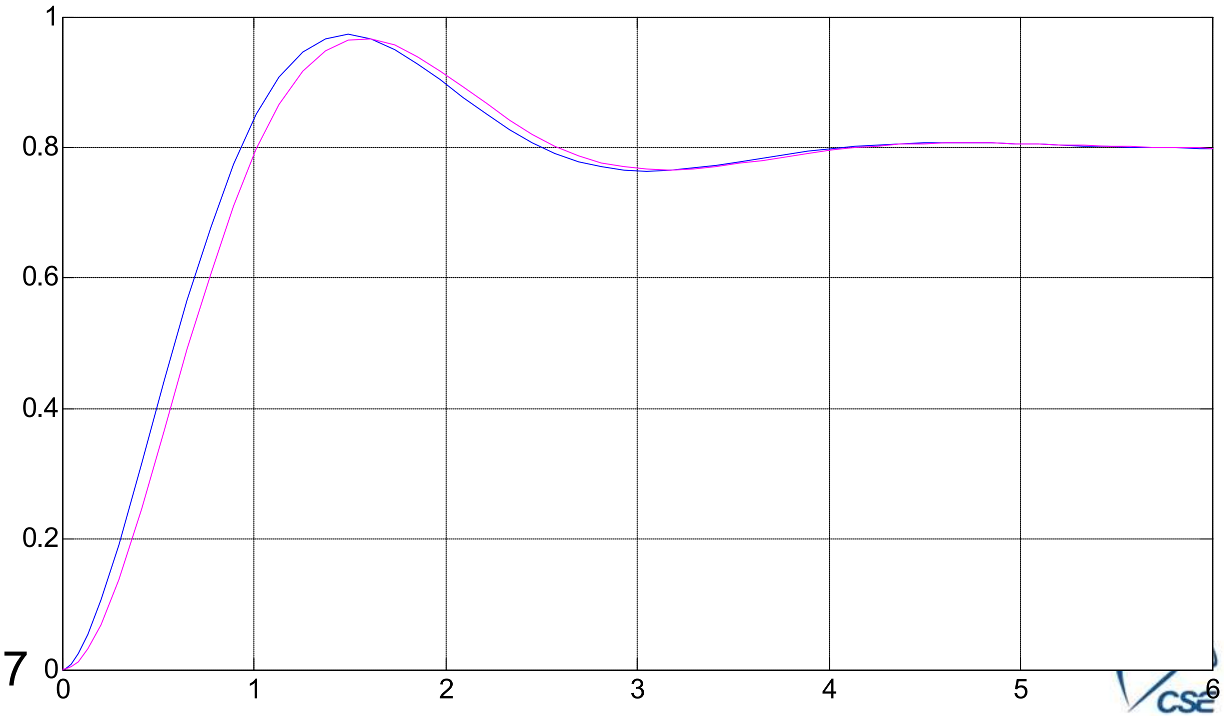
稳定高阶系统的近似

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)\left(s^2+2s+5\right)} \approx \frac{4}{s^2+2s+5} = 0.8\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{5} = 2.24$$
$$\zeta = 0.45$$

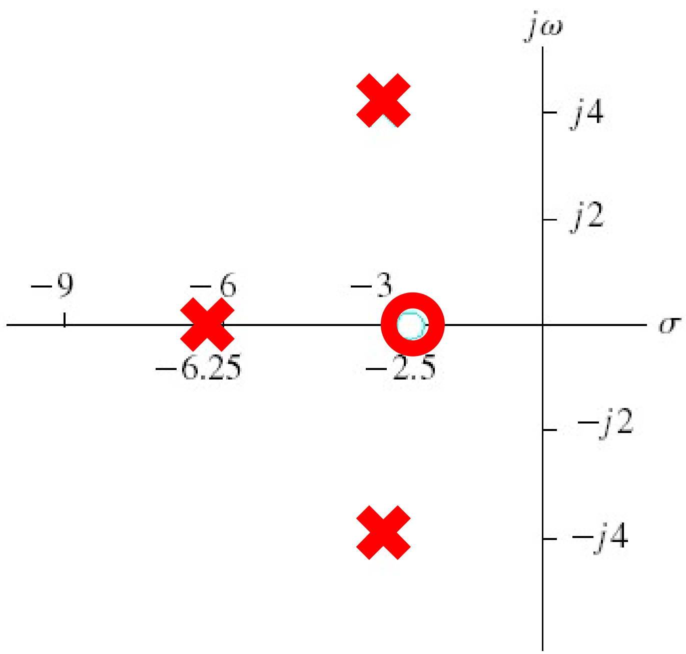
$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 20.53\%$$
$$t_s = 4\zeta\omega_n = 4$$

近似程度好



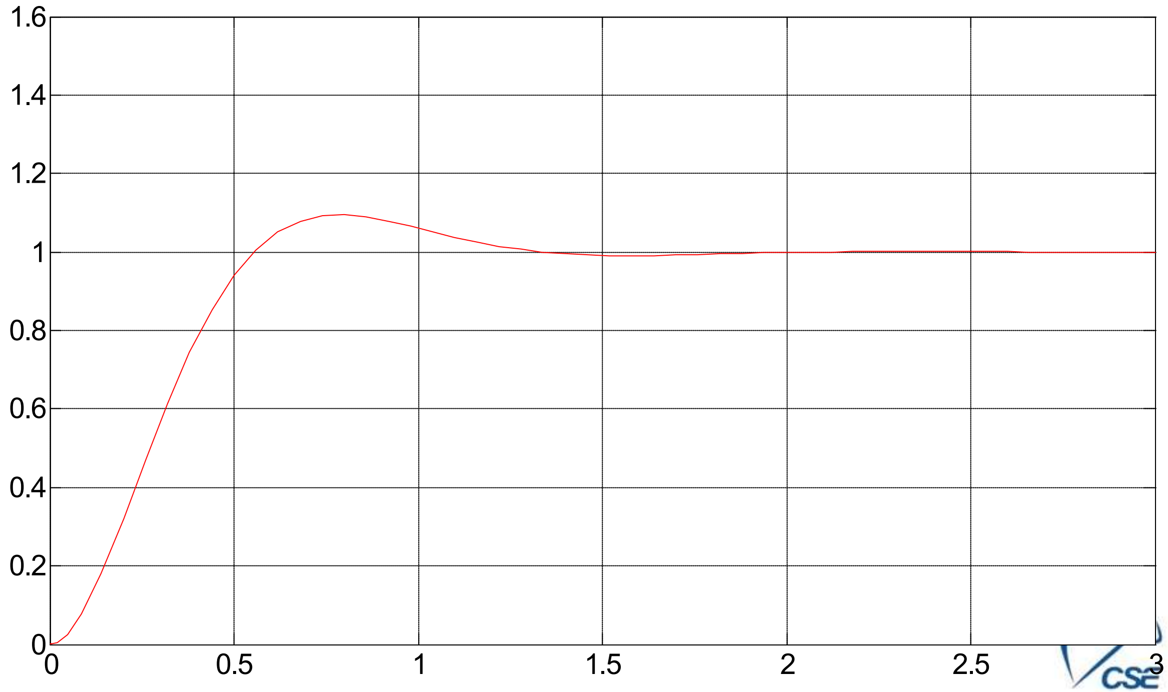
稳定高阶系统的近似

> 例：第三个极点和零点对二阶系统的影响



$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$=\frac{62.5\times 2.5(0.4s+1)}{6.25(s^2+6s+25)(0.16s+1)}\approx\frac{25}{s^2+6s+25}$$



$$\sigma=9.5\%, T_s=1.2s$$

稳定高阶系统的近似

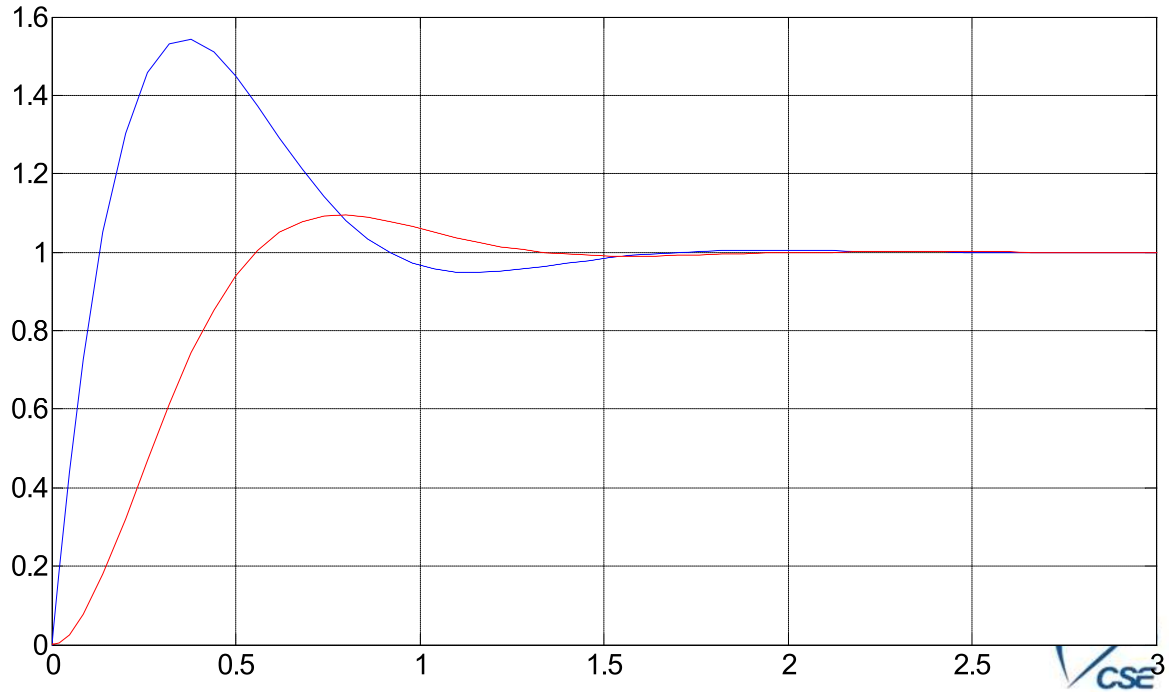
(1) 不忽略零点-2.5

$$\frac{25}{s^2+6s+25} \qquad \sigma=9.5\%, T_s=1.2s$$

$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$=\frac{62.5(s+2.5)}{6.25(s^2+6s+25)(0.16s+1)}\approx\frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \qquad \sigma=55\%, T_s=1.33s$$

零点：
使超调量加大
调节时间增加



稳定高阶系统的近似

(2) 不忽略极点-6.25

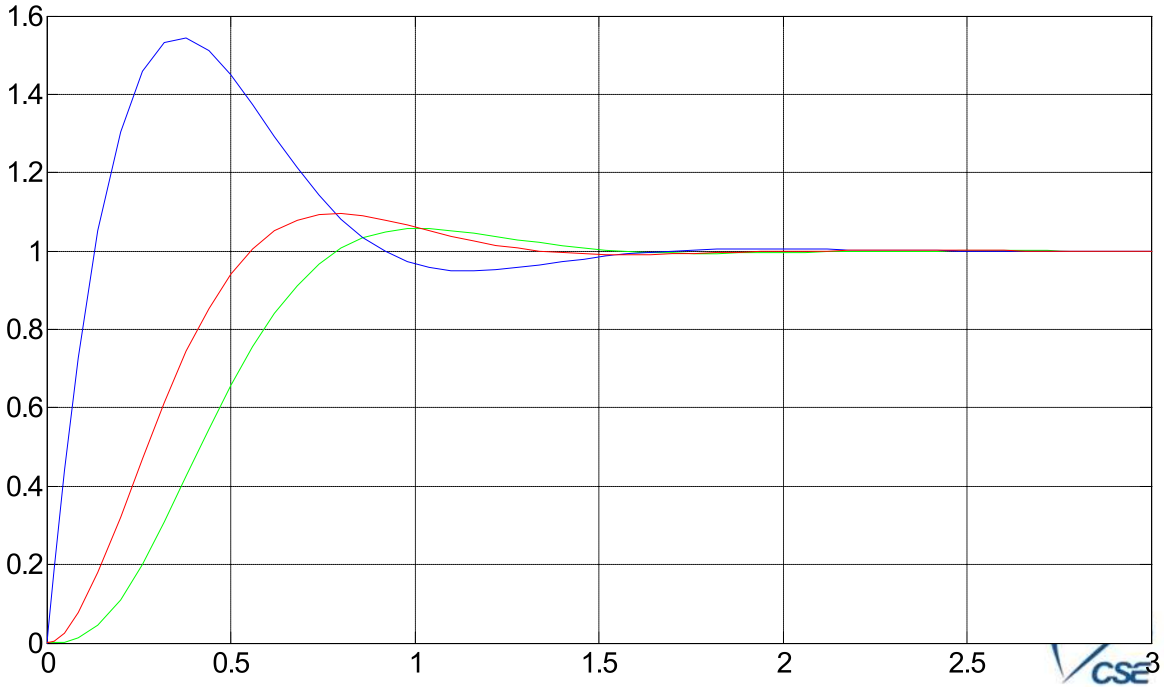
$$\frac{25}{s^2+6s+25} \qquad \sigma = 9.5\%, T_s = 1.2s$$

$$\frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \qquad \sigma = 55\%, T_s = 1.33s$$

$$\Phi(s) = \frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$= \frac{62.5\times 2.5(0.4s+1)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)} \approx \frac{156.25}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\sigma = 5.5\%, T_s = 1.4s$$



极点：
使超调量减小
调节时间增加

稳定高阶系统的近似

(3) 不忽略零点和极点

$$\frac{25}{s^2+6s+25} \quad \sigma=9.5\%, T_s=1.2s$$

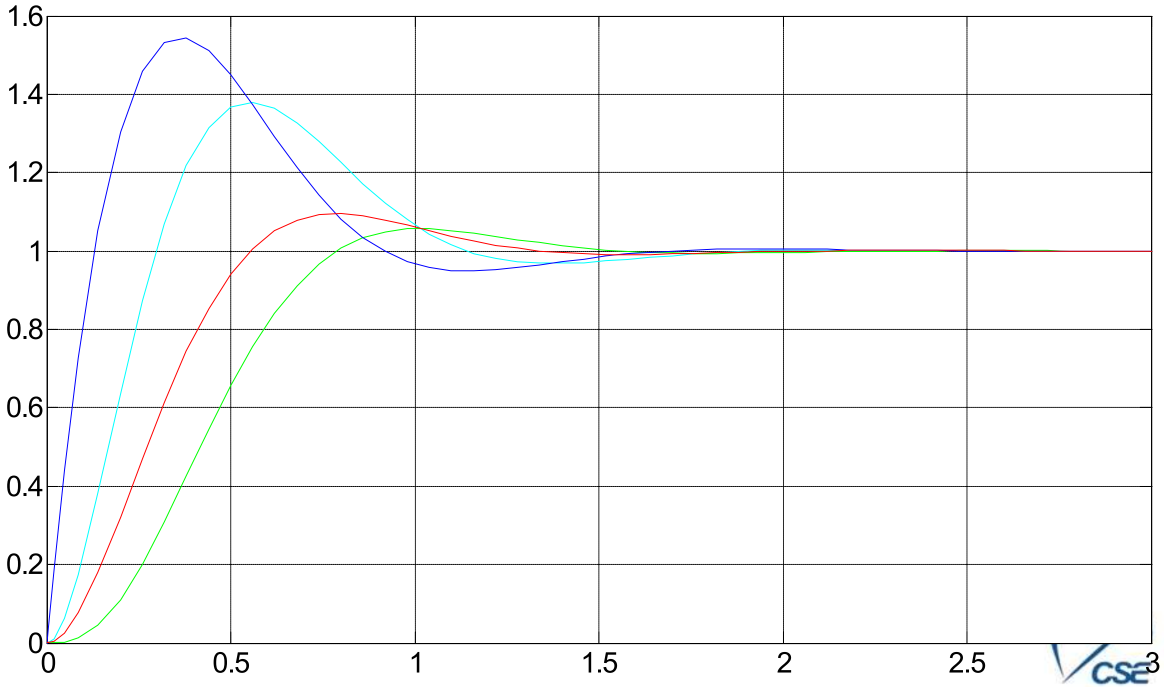
$$\frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \quad \sigma=55\%, T_s=1.33s$$

$$\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\sigma=38\%, T_s=1.6s$$

$$\frac{156.25}{(s^2+6s+25)(s+6.25)} \quad \sigma=5.5\%, T_s=1.4s$$

- 增加零点使超调量加大
  调节时间增加
- 增加极点使超调量减小
  调整时间增加



状态空间模型的解算问题

状态空间模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$ 状态方程

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$ 输出方程

已知初始状态$\boldsymbol{x}(0)$和输入$\boldsymbol{u}(t)$　$t \geq 0$

求$\boldsymbol{x}(t)$　$t \geq 0$

- 首先考虑齐次状态方程，即输入变量 $u(t)=0$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

– 如果 $n=1$，则状态方程为标量方程，表示了一个一阶系统。可以很容易求得标量方程的解

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow x(t) = e^{at}x(0)$$

– 假定初始时刻为 t_0，对于任意初始条件 $x(t_0)$，如果 $x(t_0)$ 已知，则有

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0)$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ ⇒ $x(t) = e^{at}x(0)$

指数函数 e^{at}的性质：$\frac{de^{at}}{dt} = ae^{at}$

. 如果 $n \neq 1$ $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), A \in R^{n\times n}$

设 $x_{ij}(t)(i \in \{1,\cdots,m\}, j \in \{1,\cdots,n\})$都是定义在区间$(a,b)$上的函数，

则 $m \times n$矩阵 $X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \cdots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}$

称为定义在区间(a,b)上的矩阵值函数

若 $x_{ij}(t)(i \in \{1,\cdots,m\}, j \in \{1,\cdots,n\})$在区间$(a,b)$上均可导

则 $X(t)$在区间(a,b)上可导

$X(t)$的导数 $\frac{dX(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_{11}(t)}{dt} & \frac{dx_{12}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_{1n}(t)}{dt} \\ \frac{dx_{21}(t)}{dt} & \frac{dx_{22}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_{2n}(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dx_{m1}(t)}{dt} & \frac{dx_{m2}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix}$

$$\frac{d(At^q)}{dt} = \frac{d\left[a_{ij}t^q\right]}{dt} = \left[qa_{ij}t^{q-1}\right] = qAt^{q-1}$$

指数函数 e^{at} 的性质：$\dfrac{de^{at}}{dt} = ae^{at}$

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), A \in R^{n\times n}$

能否将 e^{at} 推广到方阵？

定义一种矩阵函数 $Y = f(X)$: $R^{n\times n} \to R^{n\times n}$ 具有性质 $\dfrac{df(At)}{dt} = Af(At)$?

复变函数对指数的定义

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots$$，z 为复数

$\forall X \in R^{n\times n}$，定义矩阵指数函数

$$\exp[X] = e^X = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^k}{k!} + \cdots$$

$$\forall A \in R^{n\times n}, \forall t \in (0,\infty), e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots\right)$$

$$= A + \frac{2A^2t}{2!} + \frac{3A^3t^2}{3!} + \cdots + \frac{kA^kt^{k-1}}{k!} + \cdots$$

$$= A + A\frac{At}{1!} + A\frac{(At)^2}{2!} + \cdots + A\frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots = Ae^{At} = e^{At}A$$

状态转移矩阵

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow x(t) = e^{at}x(0)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0)$$

- *A* 是方阵，exp[*At*] 是与 *A* 具有相同阶数的方阵

- 对于线性定常系统，exp[*At*] 称为系统的**状态转移矩阵** (state transition matrix, STM)，可记为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{At} = \exp[\boldsymbol{A}t]$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t-\tau) = e^{A(t-\tau)} = \exp[\boldsymbol{A}(t-\tau)]$$

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

状态转移矩阵

如果 t 和 p 是相互独立的变量，则有

$$\exp[\boldsymbol{A}(t+p)] = \exp[\boldsymbol{A}t]\exp[\boldsymbol{A}p]$$

证：$$e^{\boldsymbol{A}t} \cdot e^{\boldsymbol{A}p} = \left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}t}{1!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^3}{3!} + \cdots\right)\left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}p}{1!} + \frac{(\boldsymbol{A}p)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{A}p)^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}(t+p) + \boldsymbol{A}^2\left(\frac{t^2}{2!} + tp + \frac{p^2}{2!}\right) + \boldsymbol{A}^3\left(\frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!}t^2 p + \frac{t^2}{2!}tp^2 + \frac{p^3}{3!}\right)\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k \frac{(t+p)^k}{k!} = e^{A(t+p)}$$

基于上述结论，有

$$\exp[\boldsymbol{A}t]\exp[-\boldsymbol{A}t] = \exp[\boldsymbol{A}0] = I$$

$$\exp[-\boldsymbol{A}t]\exp[\boldsymbol{A}t] = \exp[\boldsymbol{A}0] = I$$

$$[\exp[\boldsymbol{A}t]]^{-1} = \exp[-\boldsymbol{A}t]$$