



# 自动控制理论

---

## 第五章 根轨迹方法

## Chapter 5 Root Locus





## 第五章内容

---

- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计



# 系统性能分析——回顾

**稳**（稳定性）

全部闭环极点位于左半开平面

**快**（暂态性能）

**主导极点**（某些稳定高阶系统的低阶近似）

主导极点（**1**个或**2**个）特征：

附近无其它零极点

距虚轴较近（其实部绝对值小于其它极点实部绝对值的**1/5**）

**主导根轨迹分支**：根轨迹中最接近于虚轴的**1**条或**2**条根轨迹分支

二阶系统的标准形式

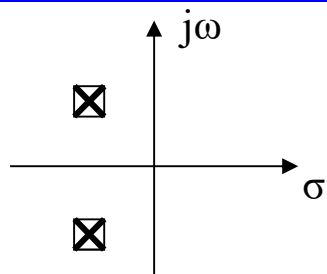
$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{K}{(s - s_1)(s - s_2)}\end{aligned}$$

阻尼比：  $\zeta$

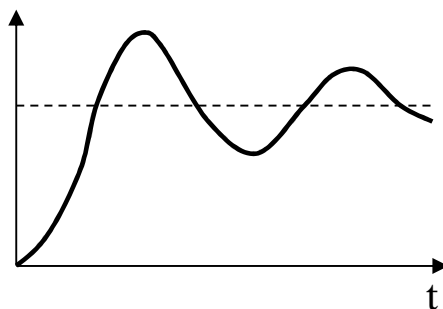
自然频率：  $\omega_n$



## 系统性能分析——回顾

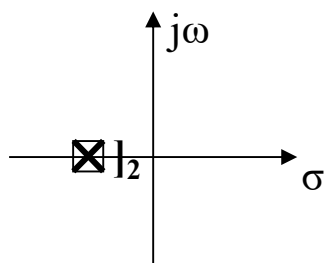


$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$$

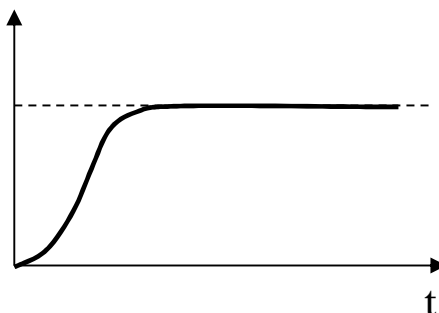


欠阻尼,  $\sigma = -\zeta\omega_n, \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$0 < \zeta < 1$$

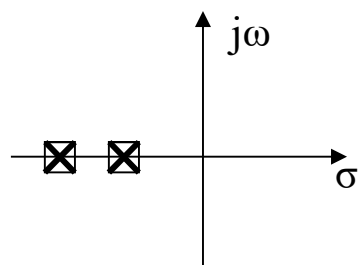


$$s_{1,2} = \sigma$$

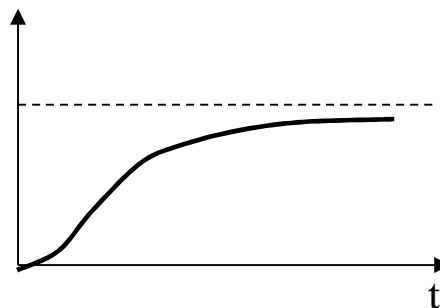


临界阻尼,  $\sigma = -\zeta\omega_n$

$$\zeta = 1$$



$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

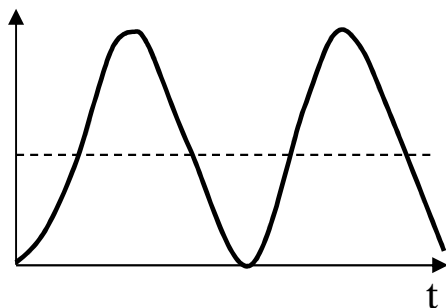
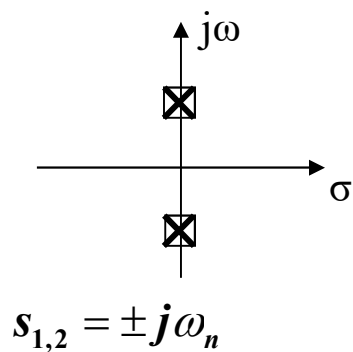


过阻尼

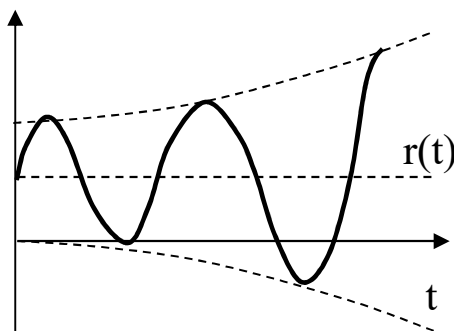
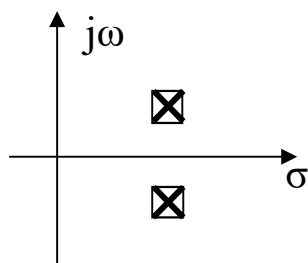
$$\zeta > 1$$



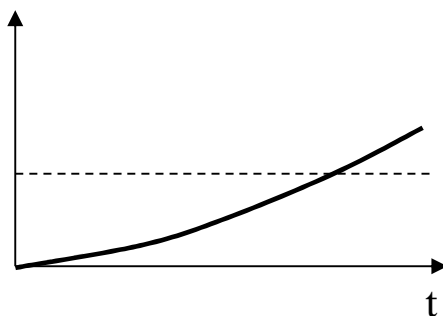
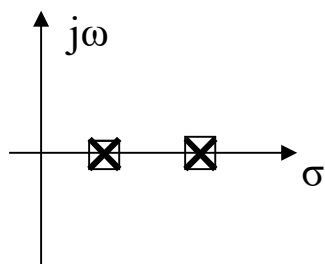
# 系统性能分析——回顾



$\zeta=0$  无阻尼



$-1 < \zeta < 0$  指数增大震荡



$\zeta < -1$  指数增大

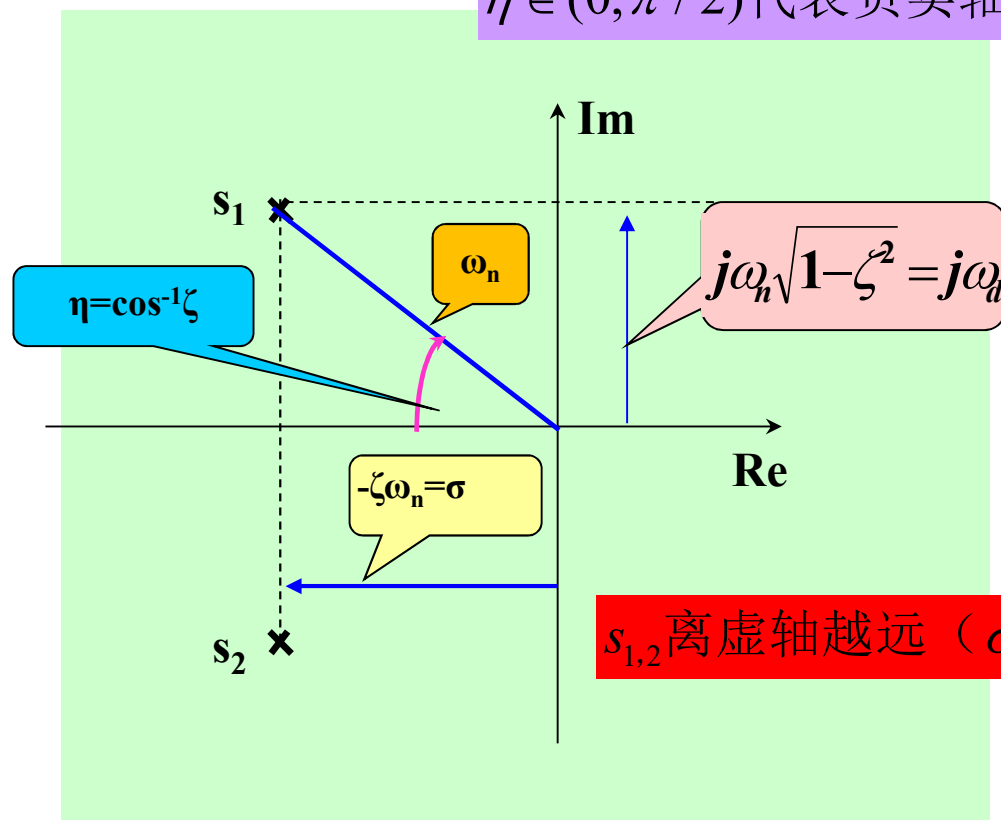


## 根轨迹概述 —— 根轨迹定性分析

工程上常设计闭环极点，目标为带合适阻尼比的欠阻尼系统 ( $0 < \zeta < 1$ )

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$$

$\eta \in (0, \pi/2)$  代表负实轴与向量  $s_1$  的夹角（顺时针方向为正）



角  $\eta$  越大 ( $\zeta$  越小)，则超调越大

$s_{1,2}$  离虚轴越远 ( $\sigma$  越小或  $|\sigma|$  越大)，则调节时间越短



## 系统性能分析——回顾

准（稳态性能）

单位负反馈系统的“型”取决于原点处的开环极点

无位于原点的开环极点，0型系统

有1个位于原点的开环极点，1型系统

有2个位于原点的开环极点，2型系统

...

单位负反馈系统的稳态误差系数与根轨迹增益有关

单位负反馈系统开环传递函数  $G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+10)(s+0.5)}$

0型系统

$$\text{稳态位置误差系数 } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{K \times 2}{10 \times 0.5} = 0.4K$$



# 系统性能分析——核心步骤

## 在根轨迹上确定特征根

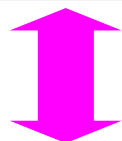
通常由系统的动态性能指标来在主导根轨迹分支上确定主导极点

一般步骤：

动态性能指标：调节时间 $t_s$ ，超调 $\sigma\%$ ，上升时间 $t_r$ ，峰值时间 $t_p$



阻尼比 $\zeta$ ，自然频率 $\omega_n$ ，阻尼振荡频率 $\omega_d$ ，主导极点实部 $\sigma$



在主导根轨迹分支上选择合适的主导极点



基于主导极点，应用幅值条件计算相应的根轨迹增益





# 系统性能分析——核心步骤

## 在根轨迹上确定特征根

其它根轨迹分支上的特征根可以用下列任一方法求取：

**方法 1:** 确定其它根轨迹分支上的点,使其满足具有与主导极点相同的根轨迹增益

**方法 2:** 如果除了一个实根或者一对共轭复根之外,其余特征根均已知,则可用下列任一方法确定未知的特征根

- 1) 除以由已知特征根构成的特征多项式,商为未知特征根构成的多项式
- 2) 对于  $m \leq n-2$  的系统,采用规则 8 求取系统的特征根



## 系统性能分析——举例

**例5-24** 已知负反馈控制系统前向通道传递函数 **$G(s)$** 与反馈通道传递函数 **$H(s)$** ,绘制根轨迹,并给出单位阶跃响应 **$c(t)$** (其中主导极点的 **$\zeta=0.5$** )

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s^2 / 2600 + s / 26 + 1)}, \quad K_1 > 0$$

$$H(s) = \frac{1}{0.04s + 1}$$

解: 将 **$G(s)$** 、 **$H(s)$** 重写

$$G(s) = \frac{2600K_1}{s(s^2 + 100s + 2600)} \quad H(s) = \frac{25}{s + 25}$$

则

$$G(s)H(s) = \frac{65000K_1}{s(s + 25)(s^2 + 100s + 2600)} = \frac{K}{s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s}$$

$$K = 65000K_1$$



## 系统性能分析——举例

1) 开环极点:  $n = 4$   $p_1 = 0, p_2 = -25, p_3 = -50 + j10, p_4 = -50 - j10$

开环零点:  $w = 0$

2) 4条根轨迹分支

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2 + 100s + 2600)}$$

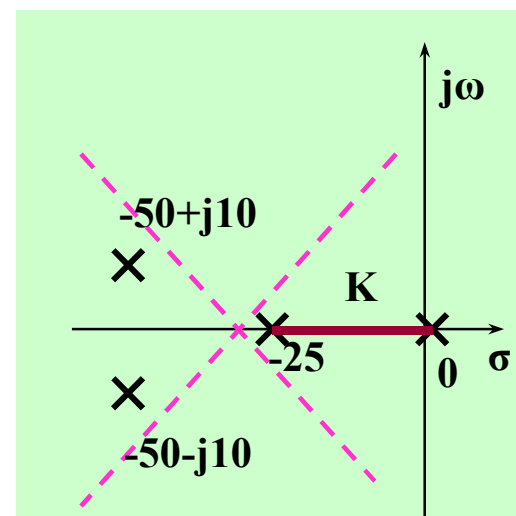
3) 实轴上的根轨迹: **[-25, 0]**

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{n-w} = \frac{(1+2h)180^\circ}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{n-w} = \frac{0 - 25 - 50 - 50}{4} = -31.25$$





## 系统性能分析——举例

### 5) 实轴上的分离点 $d$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

方法 1

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+25} + \frac{1}{d+25-j10} + \frac{1}{d+25+j10} = 0$$

方法 2

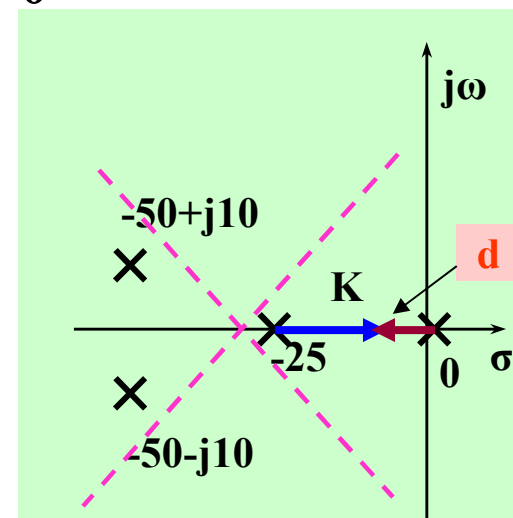
$$-K = s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s$$

$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = 4d^3 + 375d^2 + 10200d + 65000 = 0$$

$$d = -9.15$$

分离角:

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$



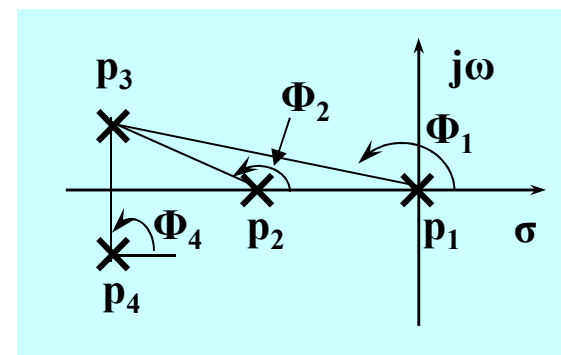


## 系统性能分析——举例

6) 极点  $-50+j10$  处的出射角  $\Phi_{3D}$

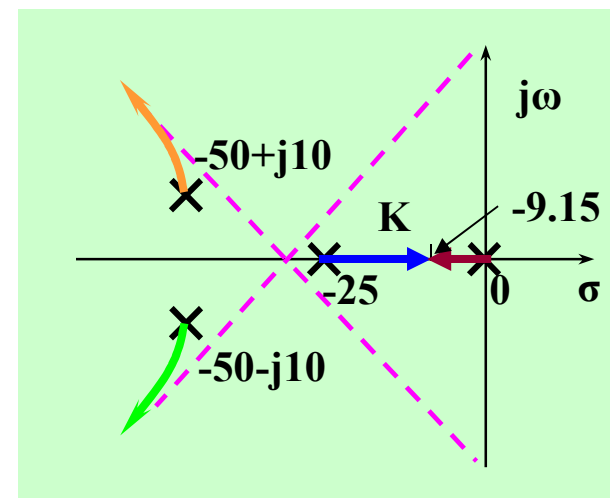
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\begin{aligned}\phi_{3D} &= (1+2h)180^\circ - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_4) \\ &= (1+2h)180^\circ - (168.7^\circ + 158.2^\circ + 90^\circ) \\ &= 123.1^\circ\end{aligned}$$



同样地,

极点  $-50-j10$  处的出射角为  $-123.1^\circ$





## 系统性能分析——举例

### 7) 根轨迹与虚轴的交点:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\Delta(s) = s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 65000K_1$$

根据Routh表:

$s^4$	1	5100	65000 $K_1$
$s^3$	1	520 (after division by 125)	
$s^2$	1	14.2 $K_1$ (after division by 4580)	
$s^1$	520 - 14.2 $K_1$		
$s^0$	14.2 $K_1$		

$$520 - 14.2K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 36.6$$

由 $s^2$ 行构造辅助方程:

$$s^2 + 14.2K_1 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{14.2K_1} = \pm j22.8$$



## 系统性能分析——举例

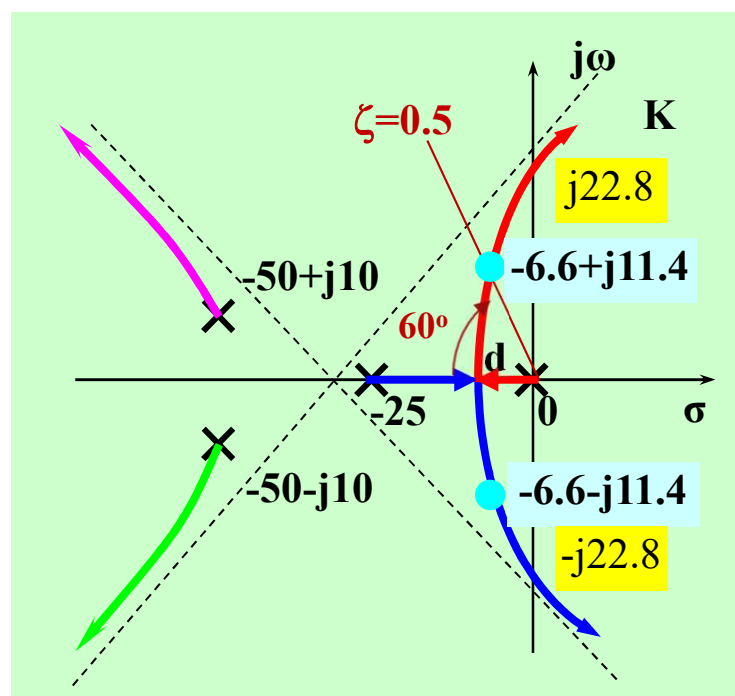
8) 绘制 $\zeta=0.5$ 的射线, 其中 $\eta$

$$\eta = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ$$

由图可以得到主导极点

$$s_{1,2} = -6.6 \pm j11.4$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$



9) 增益

$$K = 65000K_1 = \left( |s| \cdot |s+25| \cdot |s+50-j10| \cdot |s+50+j10| \right)_{s=-6.6+j11.4}$$



$$K = 598800 = 65000K_1, \quad K_1 = 9.25$$



## 系统性能分析——举例

10) 满足幅值  $K=598800$  的其余特征根

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

方法 1

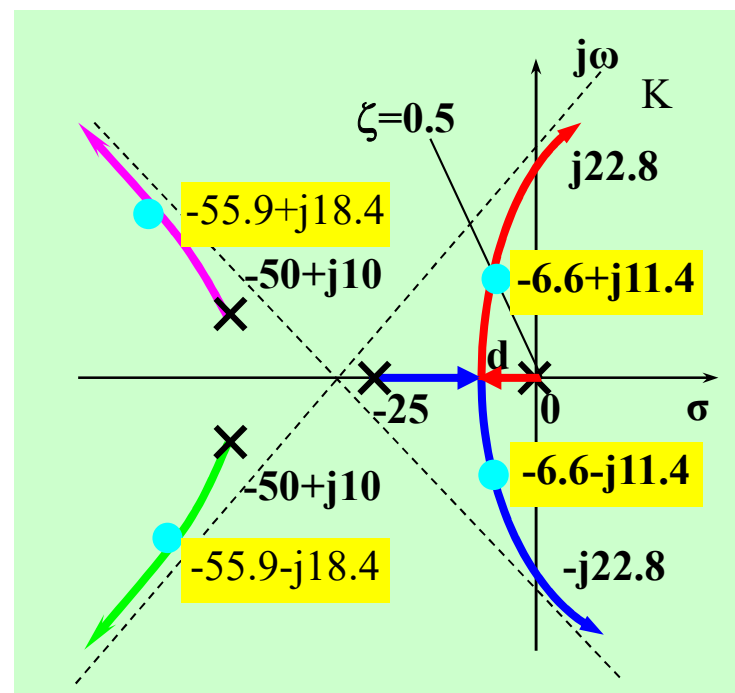
$$1 + G(s)H(s) = s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 598800 = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 598800}{(s + 6.6 + j11.4)(s + 6.6 - j11.4)} \\ &= \frac{s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 598800}{s^2 + 13.2s + 173.52} \\ &= s^2 + 111.8s + 3463 \end{aligned}$$

$$\therefore s_{3,4} = -55.9 \pm j18.4$$

方法 2

因为满足分母阶次  $n \geq$  分子阶次  $w+2$ , 故可用法则八 (根之和) 法则来确定根的实部







# 系统性能分析——举例

方法 2

由法则八（根之和）

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$0 - 25 + (-50 + j10) + (-50 - j10)$$

$$= (-6.6 + j11.4) + (-6.6 - j11.4) + (\sigma + j\omega_d) + (\sigma - j\omega_d)$$

$$s_{3,4} = -55.9 \pm j18.4$$

$$\Phi(s) = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{N_1}{D_1}}{1 + \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}} = \frac{N_1 D_2}{\text{closed-loop roots}}$$

$$G(s) = \frac{2600K_1}{s(s^2+100s+2600)}$$

$$H(s) = \frac{25}{s+25}$$

11) 闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24040(s+25)}{s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 65000K_1}$$



## 系统性能分析——举例

### 12) 阶跃响应 $c(t)$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24040(s+25)}{(s+6.6+j11.4)(s+6.6-j11.4)(s+55.9+j18)(s+55.9-j18)}$$
$$C(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+6.6-j11.4} + \frac{A_2}{s+6.6+j11.4} + \frac{A_3}{s+55.9-j18} + \frac{A_4}{s+55.9+j18}$$

$$A_0 = 1.0 \quad A_1 = 0.604 \angle (-201.7^\circ) \quad A_3 = 0.14 \angle (-63.9^\circ)$$

响应  $c(t)$

$$c(t) = 1 + 1.21e^{-6.6t} \sin(11.4t - 111.7^\circ) + 0.28e^{-55.9t} \sin(18t + 26.1^\circ)$$

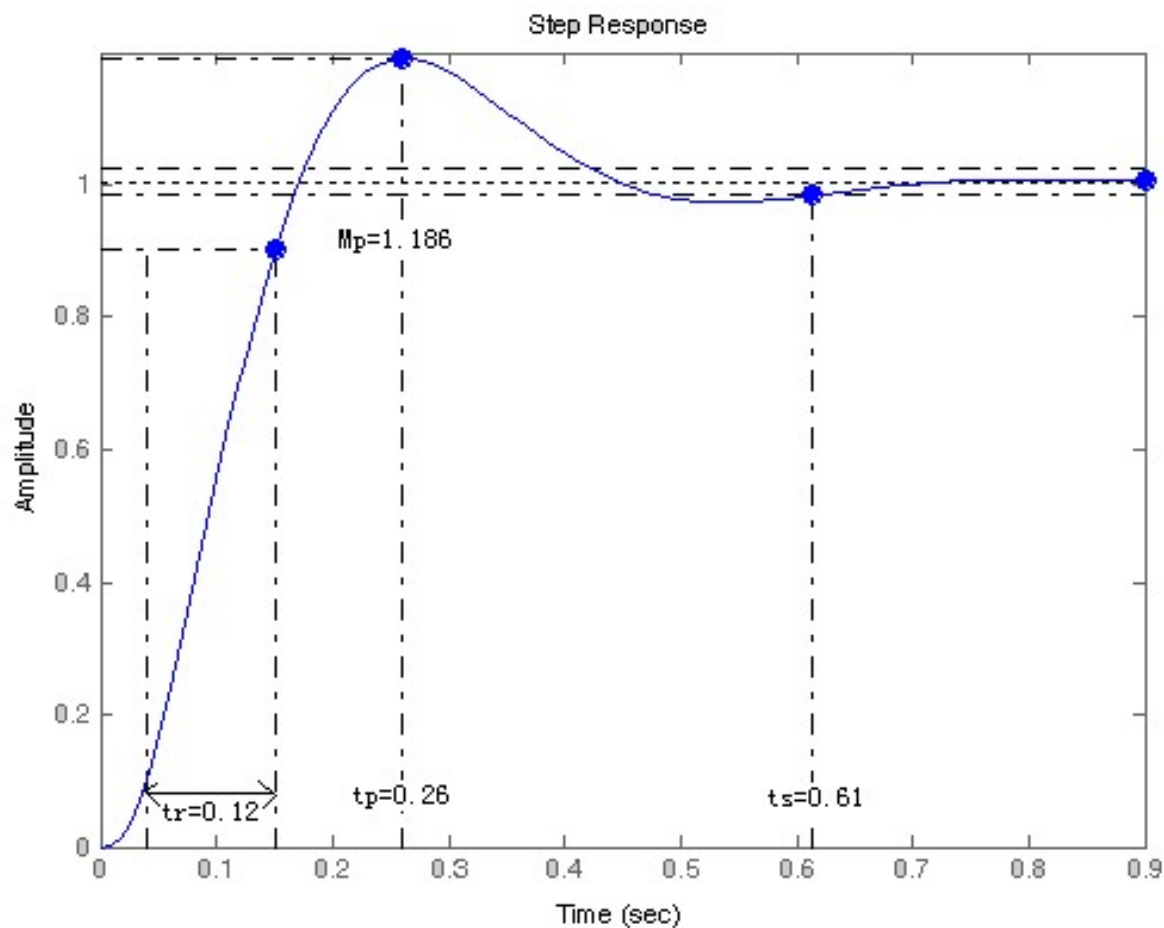
可以忽略



## 系统性能分析——举例

仿真 $c(t)$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$





## 系统性能分析——举例

**例5-26** 已知某单位负反馈控制系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}, K > 0$$

- (1) 绘制根轨迹
- (2) 对任意  $K$ ，系统是否稳定？若否，则确定使系统稳定的  $K$  值范围  
确定使闭环系统持续振荡的参数  $K$  和频率  $\omega$
- (3) 若调节时间  $4s$ ，确定  $K$  值和对应的特征根

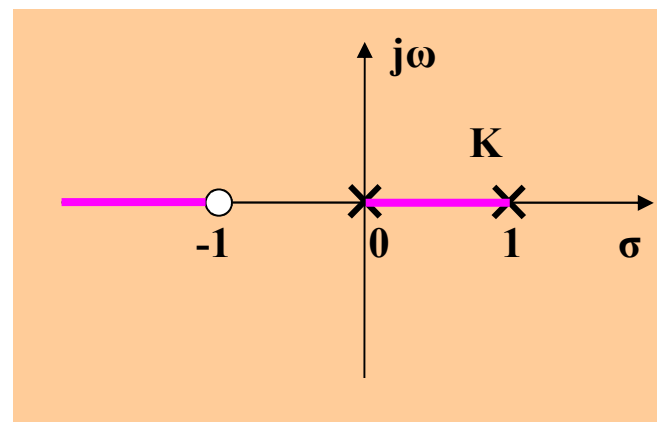
**解：(1) 绘制根轨迹**

**1) 开环极点：**  $n=2, p_1=0, p_2=1$

**开环零点：**  $w=1, z_1=-1$

**2) 2条根轨迹分支**

**3) 实轴上的根轨迹：  $(-\infty, -1], [0, 1]$**





## 系统性能分析——举例

### 4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{n-w} = \frac{(1+2h)180^\circ}{1} = 180^\circ$$

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

### 5) 实轴上的分离点 $d$

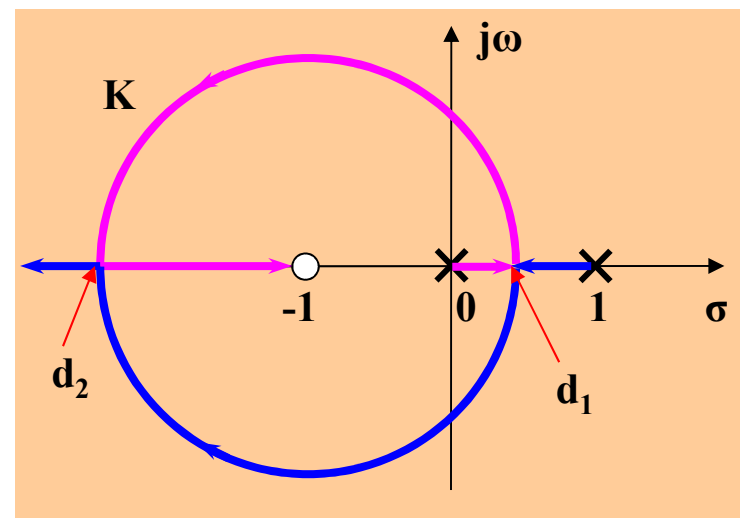
$$\therefore -K = \frac{s(s-1)}{s+1}$$

$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = s^2 + 2s - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} d_1 &= -1 + \sqrt{2} = 0.414 \\ d_2 &= -1 - \sqrt{2} = -2.414 \end{aligned}$$

$$\text{分离角: } \frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

根轨迹的主要部分是以  $(-1, j0)$  为圆心, 以 **1.414** 为半径的圆





## 系统性能分析——举例

(2) 确定闭环系统稳定的**K**值范围,以及使系统等幅振荡(持续振荡)的**K**和频率 **$\omega$** .

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

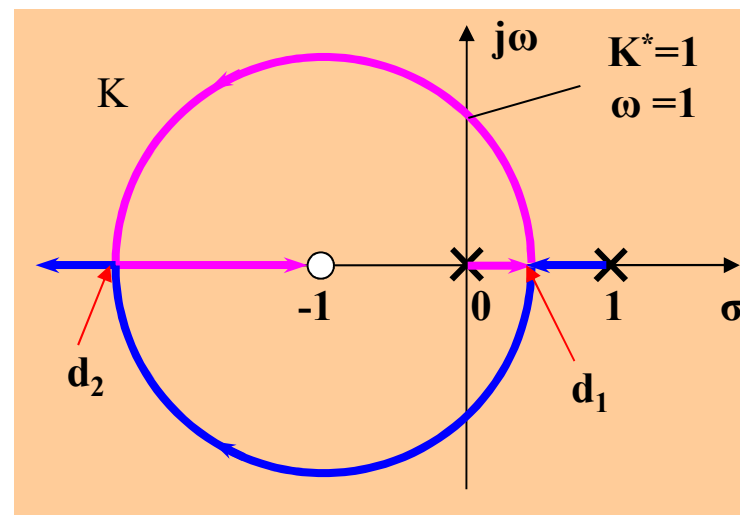
或者:从特征方程:

$$\Delta(s) = s^2 + (K-1)s + K = 0$$

很容易获得临界稳定的**K**为**1**, 当 **$K > 1$** , 系统稳定.

当 **$K=1$** , 等幅振荡的频率为 **$\omega=1$**

$$K^* = \frac{|s - p_1| \cdot |s - p_2|}{|s - z|} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{2}} = 1$$





## 系统性能分析——举例

### (3) 稳态时间4s. 确定K值和相应的特征根

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 4 \Rightarrow \sigma = -\zeta\omega_n = -0.875$$

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

由图, 根据三角形以及半径**1.414**

$$\omega_d^2 = (\sqrt{2})^2 - (1 + \sigma)^2 = 1.984$$

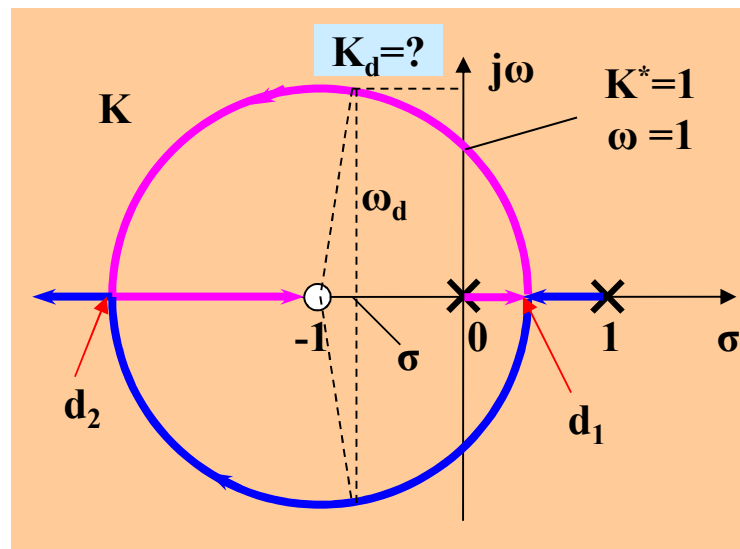
$$\omega_d = 1.41$$

相应的特征根

$$s_{1,2} = -0.875 \pm j1.41$$

运用幅值条件

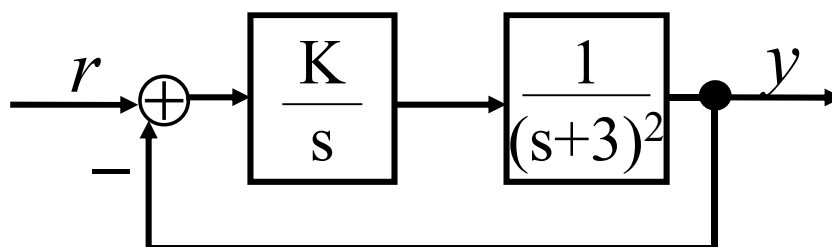
$$K_d = \frac{\sqrt{0.875^2 + 1.41^2} \cdot \sqrt{1.875^2 + 1.41^2}}{\sqrt{2}} = 2.753$$





## 系统性能分析——举例

**例5-27** 已知某单位负反馈闭环系统如图所示 ( $K>0$ )



请由根轨迹确定使系统工作在欠阻尼状态下的**K值范围**，且系统在斜坡输入下的稳态误差小于**0.2**

解：开环传递函数 **$G(s)$**

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$

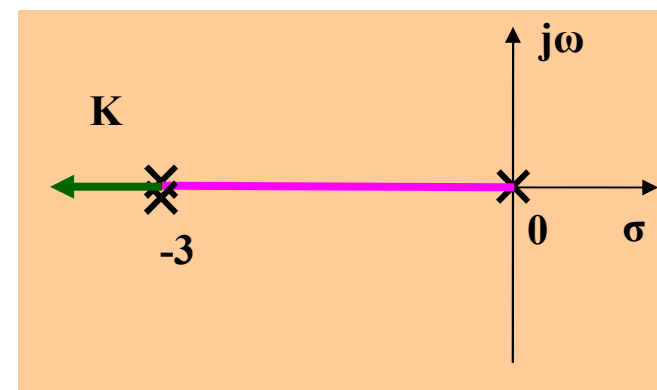
**(1) 绘制根轨迹**

1) 开环极点:  $n = 3$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_{2,3} = -3$

开环零点:  $w = 0$

2) 3条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹( $-\infty, -3$ ),  $[-3, 0]$







## 系统性能分析——举例

### 4) 渐近线与实轴的夹角与交点

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{3} = \pm 60, 180^\circ \quad \sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{n} = -2$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$

### 5) 实轴上区间[-3, 0]的分离点 $d$

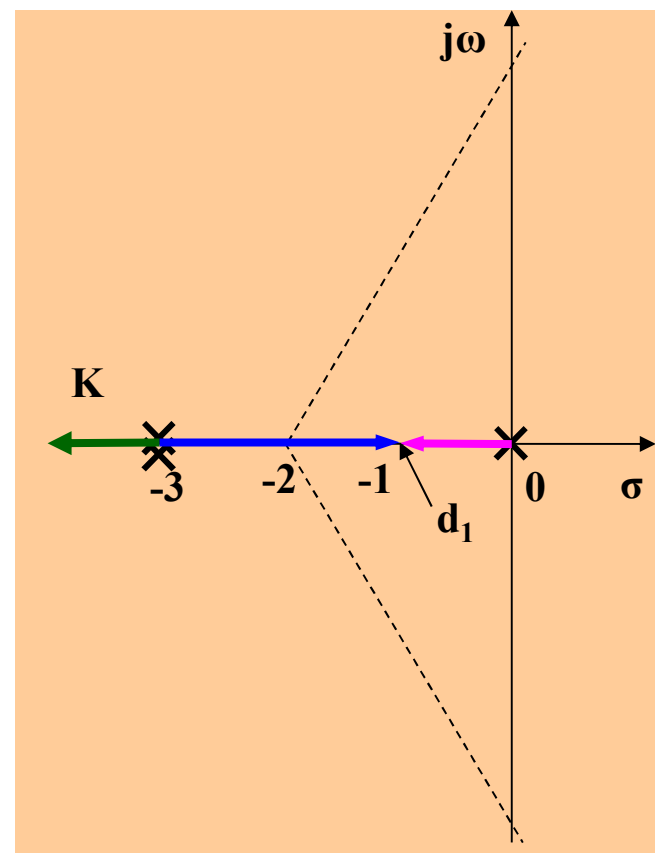
$$-K = s^3 + 6s^2 + 9s$$

$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = 3s^2 + 12s + 9 = 0$$

$$\begin{aligned} d_1 &= -1 \\ d_2 &= -3 \end{aligned}$$

分离角:

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$





# 系统性能分析——举例

## 6) 根轨迹与虚轴的交点

特征方程:

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 9s + K$$

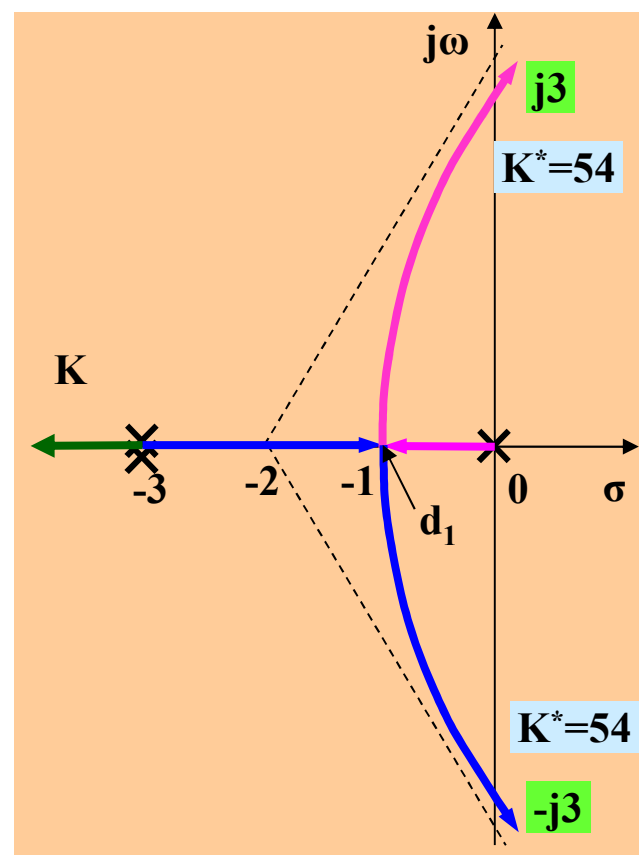
Routh表:

$s^3$	1	9	
$s^2$	6	$K$	
$s^1$	$\frac{54-K}{6}$	0	$K=54$
$s^0$	$K$		

由 $s^2$  行构造辅助方程 :

$$6s^2 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{\frac{K}{6}} = \pm j3$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$





## 系统性能分析——举例

(2) 由根轨迹, 系统在欠阻尼状态下的**K**值范围

$d_1$ 处的**K**值  $K_d = \left| s(s+3)^2 \right|_{s=d_1=-1} = 4$

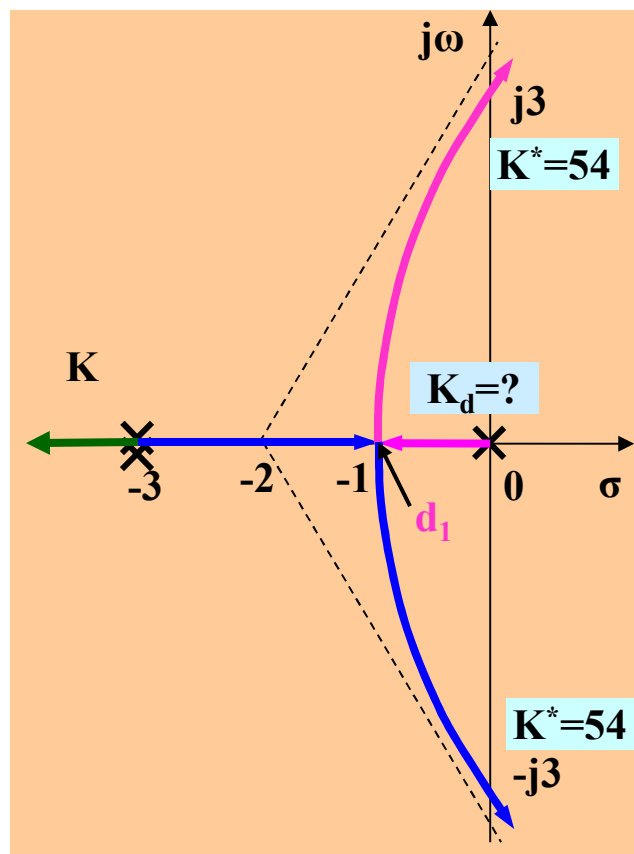
$\therefore 4 < K < 54$  系统欠阻尼

(3) 如果输入是斜坡函数, 稳态误差  $e_{ss}$  为 (系统是 1型)

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{9}{K} \leq 0.2 \quad \longrightarrow \quad K \geq 45$$

因此, 满足要求的**K**值范围  $45 \leq K \leq 54$

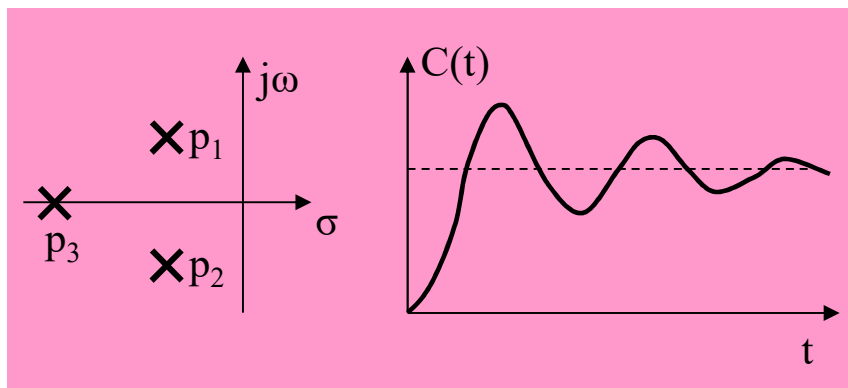
$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$





## 系统性能分析——附加极点

考虑一个具有复数极点和一个附加负实数极点 $p_3$ 的系统，如图所示，闭环传递函数为



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - p_3)}$$

$$K = -\omega_n^2 p_3$$

单位阶跃输入下的系统输出响应为

$$c(t) = 1 + 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) + A_3 e^{p_3 t}$$

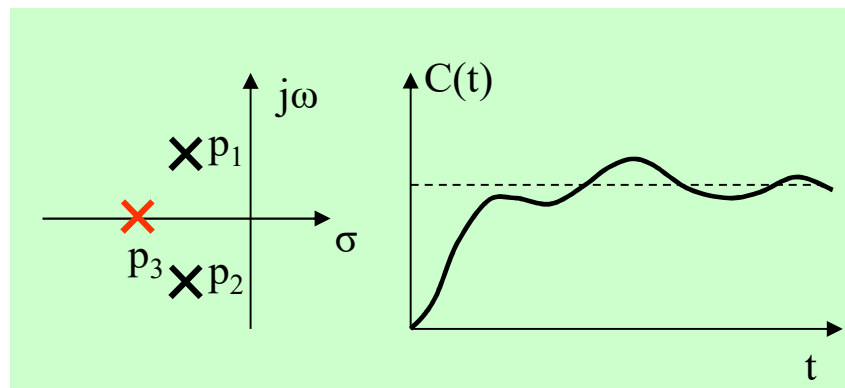
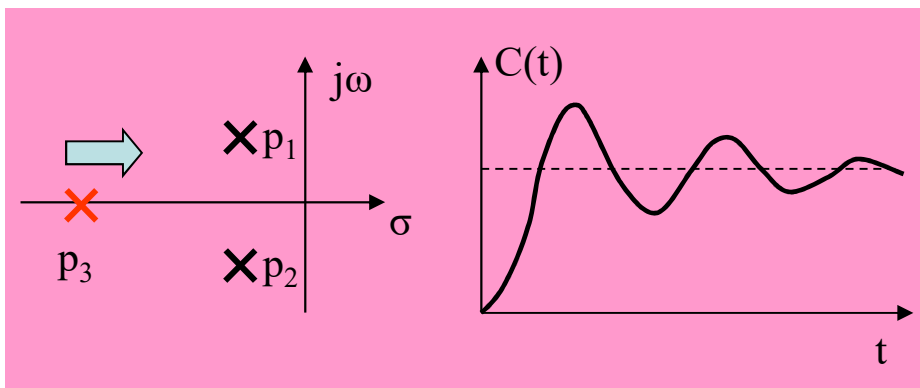
$$A_3 = \left. \frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right|_{s=p_3} = \left. \frac{-\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=p_3} < 0$$



## 系统性能分析——附加极点

系统的响应:

$$c(t) = 1 + 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) + A_3 e^{p_3 t}$$

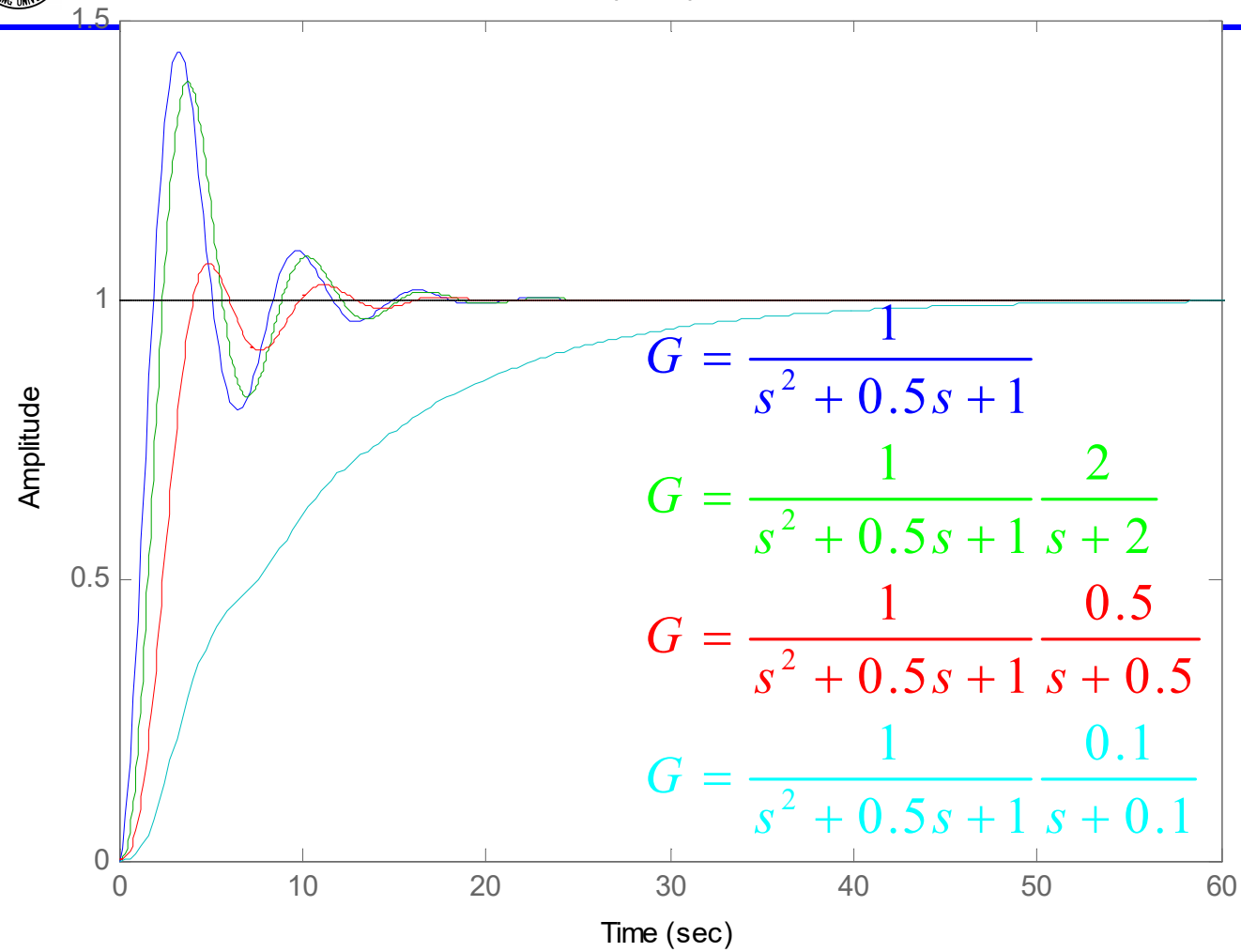


- 当极点  $p_3$  向右侧移动,  $|A_3|$  增大, 超调减少
- 当  $p_3$  接近但仍然在复数极点的左侧时, 时域上第一个峰值小于稳态值, 最大超调可能出现在第二个峰值或后面的峰值

$$A_3 = \frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \Big|_{s=p_3} = \frac{-\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Big|_{s=p_3} = \frac{-\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)} \Big|_{s=p_3} < 0$$



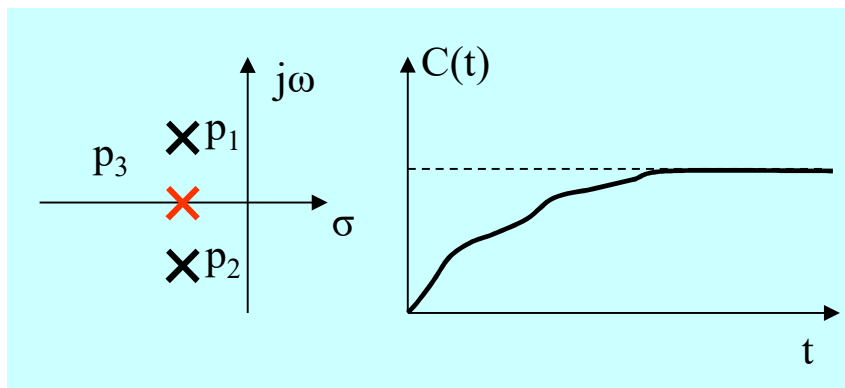
# Step Response



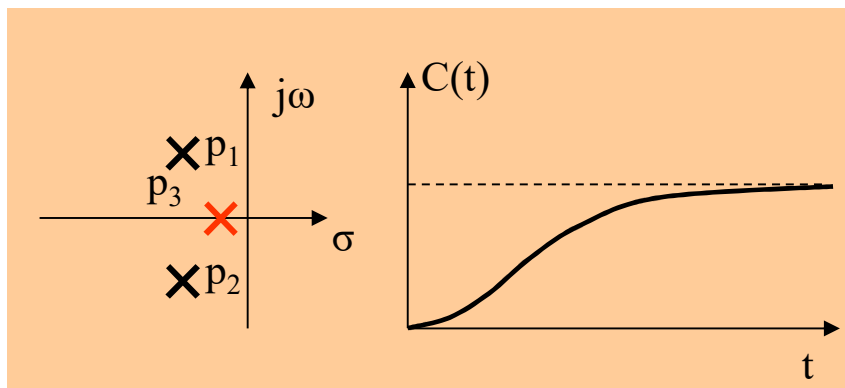


## 系统性能分析——附加极点

系统的响应:



- 当  $p_3$  位于复数极点在实轴的投影处, 响应是单调的, 没有超调. 相当于临界阻尼, 复数极点则导致时域响应出现波纹(ripple)



- 当  $p_3$  位于复数极点的右侧, 则  $p_3$  的作用反而超过其它2个极点, 系统响应特点为过阻尼



## 系统性能分析——附加极点

### 结论:

- ❖ 由实数极点 $p_3$ 作用的瞬态项为  $A_3 e^{p_3 t}$ , 其中  $A_3 < 0$ , 因此超调  $M_p$  减少
- ❖ 幅值 $A_3$  取决于 $p_3$  相对于复数极点的位置.  $p_3$  越靠左侧, 幅值  $A_3$  越小, 对系统响应的影响越小.
- ❖ 若 $p_3$ 在复数极点 $p_1$ 和 $p_2$ 左侧5倍以远的位置, 对系统响应的影响可以忽略不计



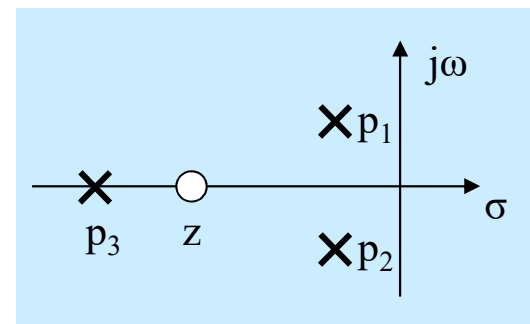


## 系统性能分析——附加极点与零点

除了增加实数极点之外，再增加一个实数零点，则会进一步影响系统的瞬态响应

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s-z)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s-p_3)}$$

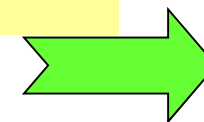
$$K = \frac{\omega_n^2 p_3}{z}$$



单位阶跃响应

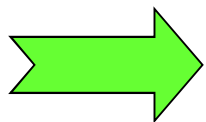
$$c(t) = 1 + 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) + A_3 e^{p_3 t}$$

$$A_3 = \left. \frac{\omega_n^2 \frac{p_3}{z} (s-z)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right|_{s=p_3} = \left. \frac{\omega_n^2 \left( \frac{p_3}{z} - 1 \right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=p_3} = K_1 \left( \frac{p_3}{z} - 1 \right) \quad K_1 > 0$$

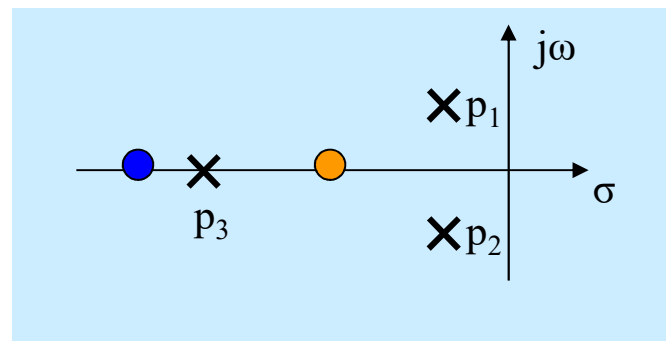




## 系统性能分析——附加极点与零点



$$A_3 = K_1 \left( \frac{p_3}{z} - 1 \right)$$



**$A_3$**  的符号取决于实数零极点的相对位置

- 1) 若零点 $z$ 在 $p_3$ 的左侧，则 $A_3$  为负
- 2) 若零点 $z$ 在 $p_3$ 的右侧，则 $A_3$  为正
- 3) 若零点 $z$ 接近于 $p_3$ ，则 $A_3$  很小，这项瞬态响应则相对较小



## 系统性能分析——附加极点与零点

### 结论:

- ❖ 若零点  $z$  在极点  $p_3$  的左侧,  $A_3$  为负, 且响应与仅有复数极点的系统响应相似, 但超调减小
- ❖ 若零点  $z$  在极点  $p_3$  的右侧,  $A_3$  为正, 超调比仅有复数极点的系统响应大



## 系统性能分析——附加极点举例

**例5-28** 考虑一单位负反馈系统开环传递函数为

$$G_x(s) = \frac{K_x}{s(s^2 + 4.2s + 14.4)} = \frac{K_x}{s(s + 2.1 + j3.1607)(s + 2.1 - j3.1607)}$$

设计控制器，使闭环系统满足：

$$K_1 = K_x/14.4, \quad K_1 \geq 1.5s^{-1}$$

$$1 < M_p \leq 1.123,$$

$$t_s \leq 3s \quad e(t)_{ss} = 0,$$

$$t_p \leq 1.6s$$



## 系统性能分析——附加极点举例

确定  $\zeta, \omega_d, \omega_n$  采用下列几个式子

$$M_p = 1.123 = 1 + \exp \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \rightarrow \zeta = 0.555$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \rightarrow \omega_d > 1.9636$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \rightarrow \omega_n > 2.4024$$

闭环系统的主导极点：

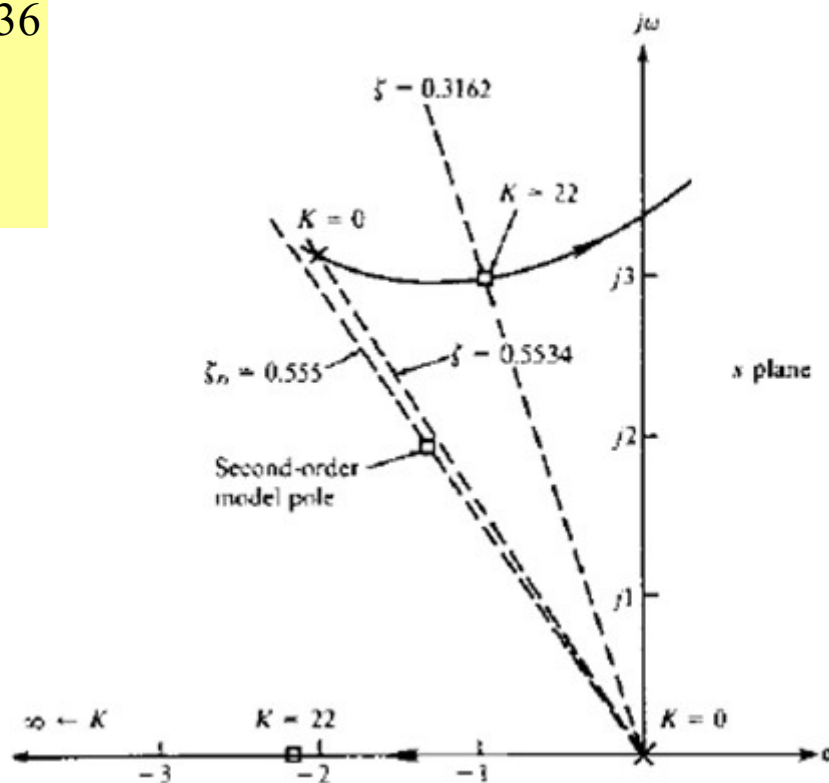
$$s_{1,2} = -1.3333 \pm j1.9984$$

由图可以看出：无法得到期望的主导极点，必须进行再次设计

$$K_1 = K_x/14.4, \quad 1 < M_p \leq 1.123,$$

$$t_s \leq 3s \quad e(t)_{ss} = 0,$$

$$t_p \leq 1.6s, \quad K_1 \geq 1.5s^{-1}$$





## 系统性能分析——附加极点

$$K_1 = K_x / 14.4, \quad 1 < M_p \leq 1.123,$$

$$t_s \leq 3s \quad e(t)_{ss} = 0,$$

$$t_p \leq 1.6s, \quad K_1 \geq 1.5s^{-1}$$

### 第二次设计:

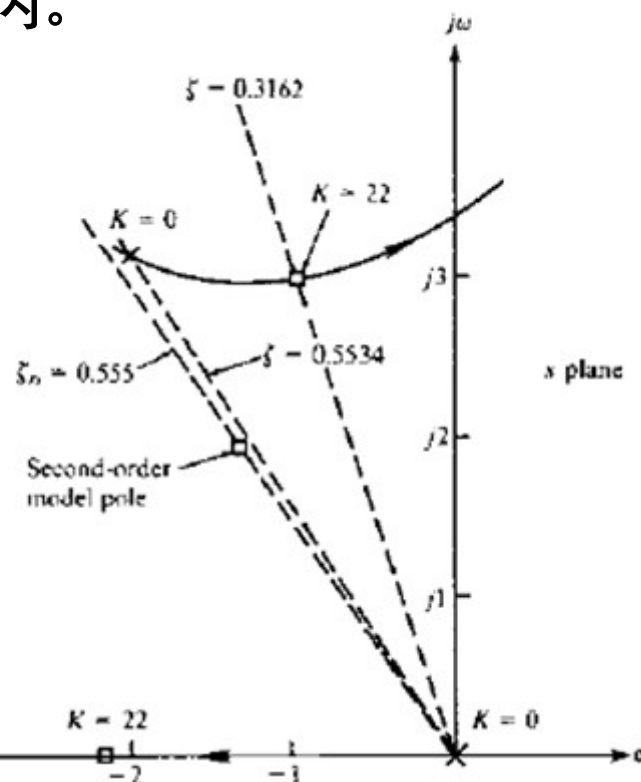
由于第三个根  $p_3$  对应瞬态响应  $A_3 e^{p_3 t}$ ，若该瞬态响应为负，则将降低由复数极点产生的超调，因此，可以选择较小的阻尼比  $\zeta$ ，第三个极点的作用是使得超调在要求的范围内。

为了同时满足  $K_1 > 1.5$ ，因此根轨迹上的根选择  $s_{1,2} = -1 \pm j3$ ，相应的根轨迹增益  $K_x = 22$ （使得  $K_1 = 1.528$ ），闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{22}{(s+1-j3)(s+1+j3)(s+2.2)}$$

单位阶跃输入下:

$$M_p \approx 1.123, \quad t_p \approx 1.51s, \quad t_s \approx 2.95s$$





---

Thanks!