



第六章 频率特性分析法

CHAPTER 6 Frequency Response





第六章主要内容



- ✓ 概述
- ✓ **Bode** 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ **Nyquist**稳定性判据
- ✓ 基于频率特性的补偿器设计



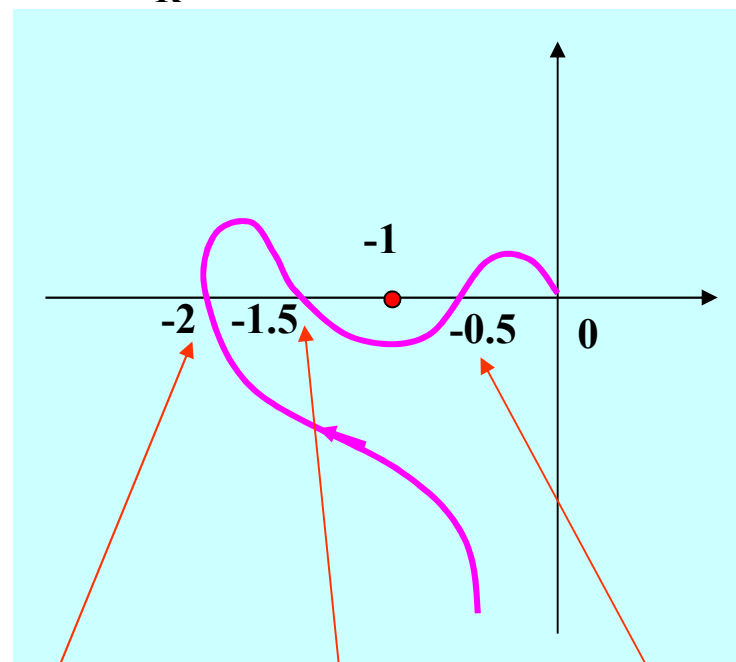


Nyquist稳定性判据——示例



例6-19 已知单位负反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s^m} G_1(s)$ ， $G_1(s)$ 的分子分母常数项为1，开环幅相曲线（ $K=10$ ， $P_R=0$ ， $m=1$ ）如图所示，试确定闭环稳定时 K 值（ $K>0$ ）的范围

解：如图所示，开环幅相曲线与负实轴有三个交点，设交接点处穿越负实轴频率分别为 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ ，



由题设条件知：

当 $K=10$

$$G(j\omega_1) = -2, G(j\omega_2) = -1.5, G(j\omega_3) = -0.5$$



Nyquist稳定性判据——示例



1型系统

K=10时，闭环稳定

Nyquist稳定性判据时， K 变为 βK ($\beta > 0$)
可相当于Nyquist图不变而-1点变为 $-1/\beta$

$$-2 = -\frac{1}{\beta_1}$$

$$\beta_1 = 0.5$$

$$K_1 = \beta_1 K = 5$$

$$-1.5 = -\frac{1}{\beta_2}$$

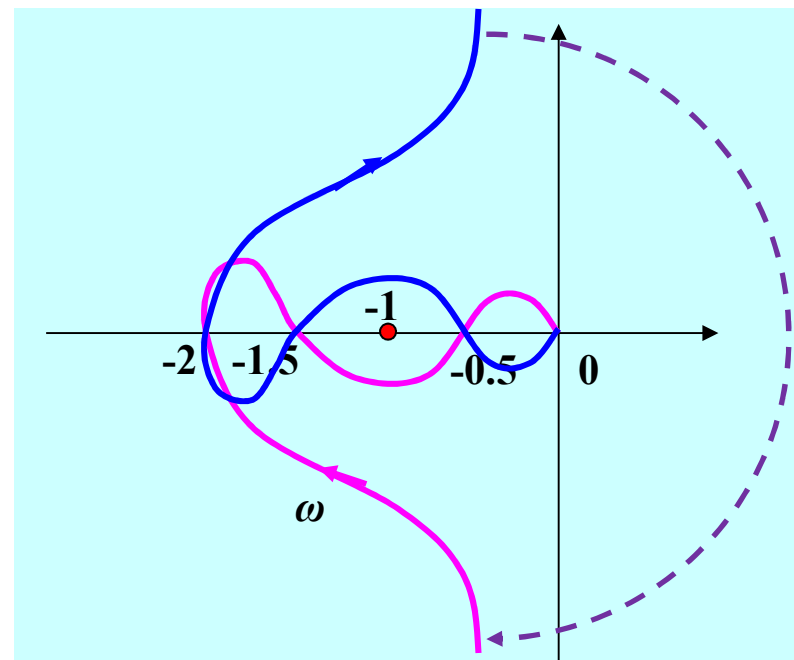
$$\beta_2 = \frac{2}{3}$$

$$K_2 = \beta_2 K = \frac{20}{3}$$

$$-0.5 = -\frac{1}{\beta_3}$$

$$\beta_3 = 2$$

$$K_3 = \beta_3 K = 20$$



当 $0 < K < 5$ 或 $\frac{20}{3} < K < 20$ 时，系统闭环稳定



Nyquist稳定性判据——应用于时滞系统

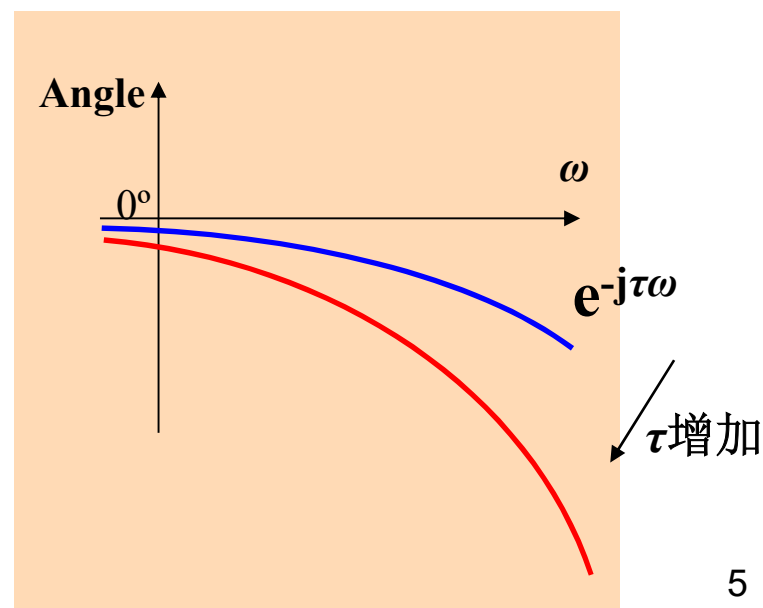
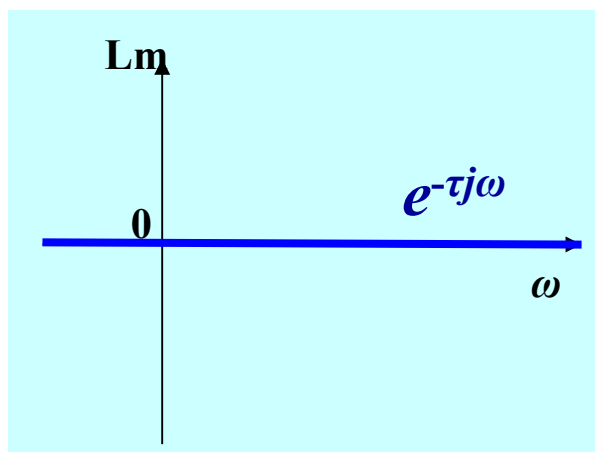


纯滞后环节 $e^{-\tau s}$, $\tau > 0$

- 1) 在复平面上处处解析
- 2) 无极点、无零点

$$|e^{-j\tau\omega}| = 1$$

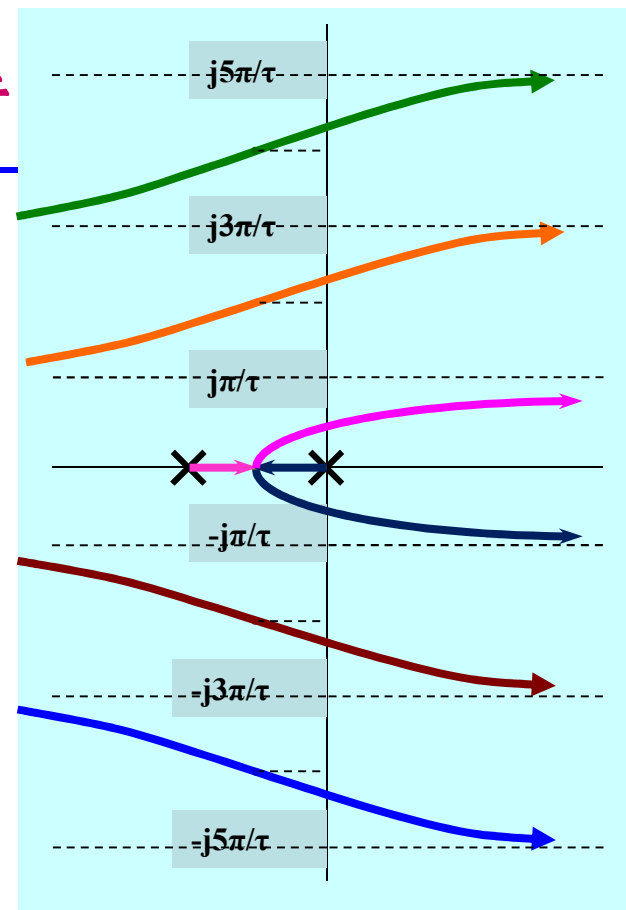
$$\angle e^{-j\tau\omega} = -\tau\omega(\text{rad}) = -57.3\tau\omega(\text{deg})$$





Nyquist稳定性判据——应用于

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)} = \frac{Ke^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{s(s-p_1)}$$



开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}e^{-\tau s}$ 满足

- 1) 在复平面上除有限个点外处处解析
- 2) 所有极点和零点都是有限阶的

幅角原理依然适用

若Nyquist围线上没有 $G(s)H(s)$ 的零极点，
则也没有 $G(s)H(s)e^{-\tau s}$ 的零极点

Nyquist稳定性判据适用于开环含纯滞后环节的系统



Nyquist稳定性判据——应用于时滞系统

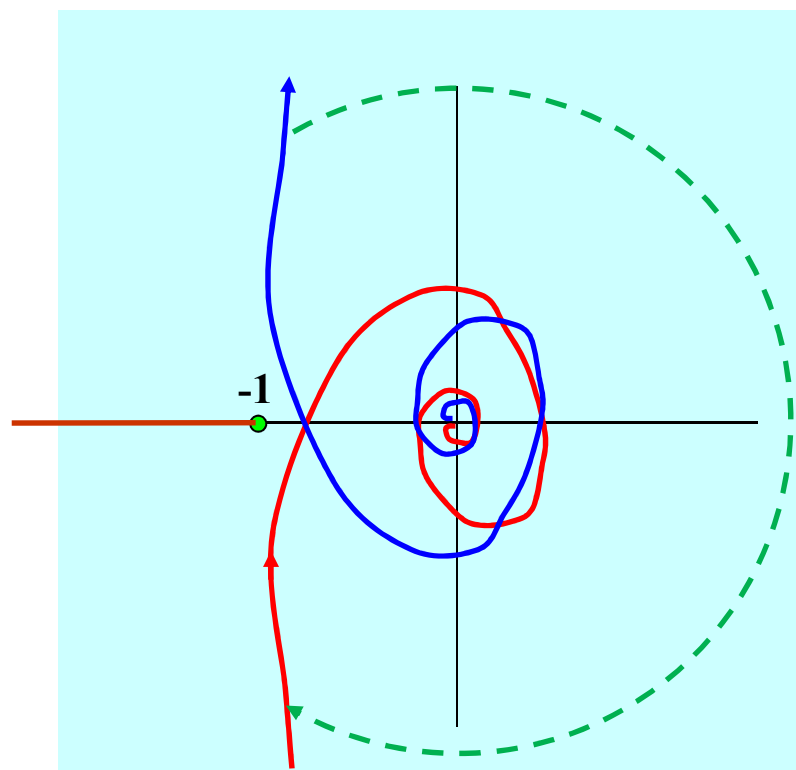
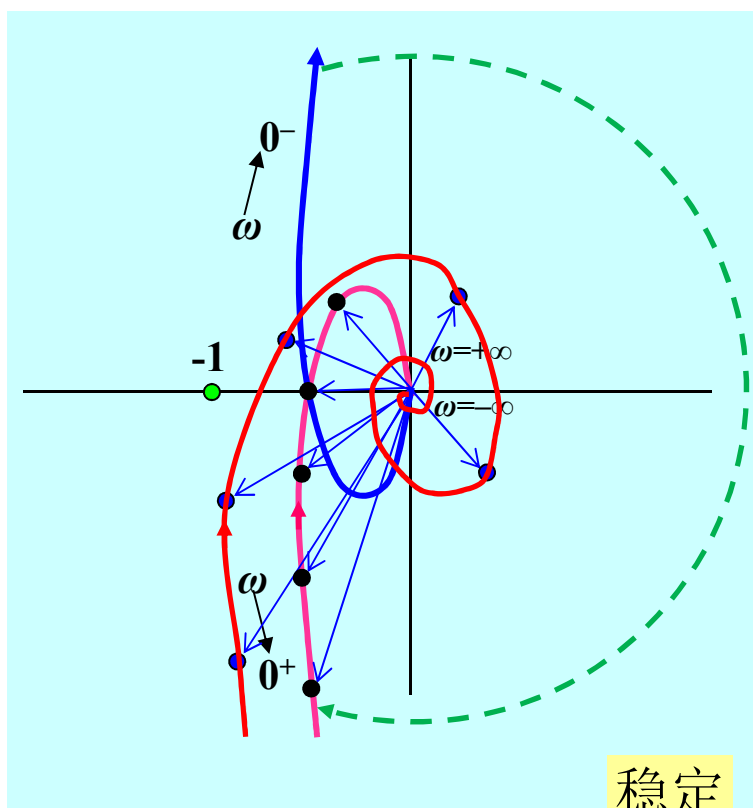


最小相位的开环传递函数

$$G_x(s)H(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

加纯滞后

$$G(s)H(s) = \frac{K_1 e^{-\tau s}}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}, \quad P_R = 0$$



Q_{GH} 出现螺旋线，顺时针包围原点无穷多次

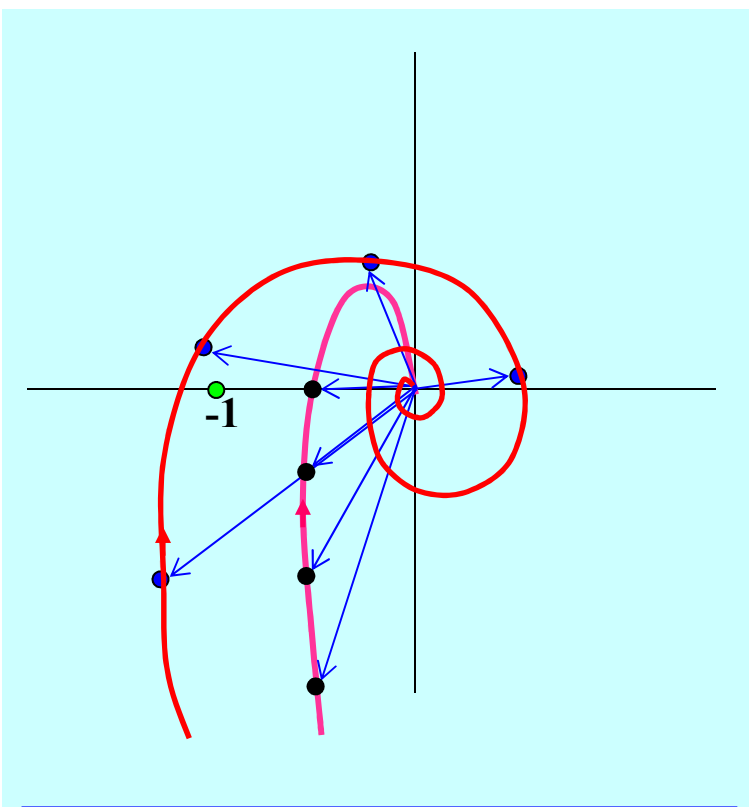
不包围 (-1) 点，闭环系统稳定



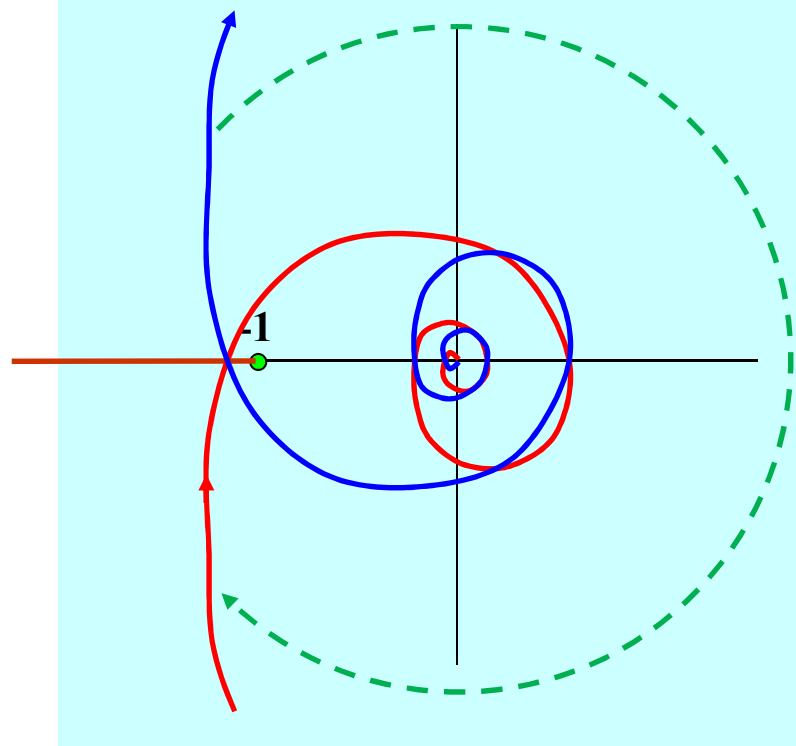
Nyquist稳定性判据——应用于时滞系统



增大纯滞后环节时间常数 τ



纯滞后降低系统的稳定性

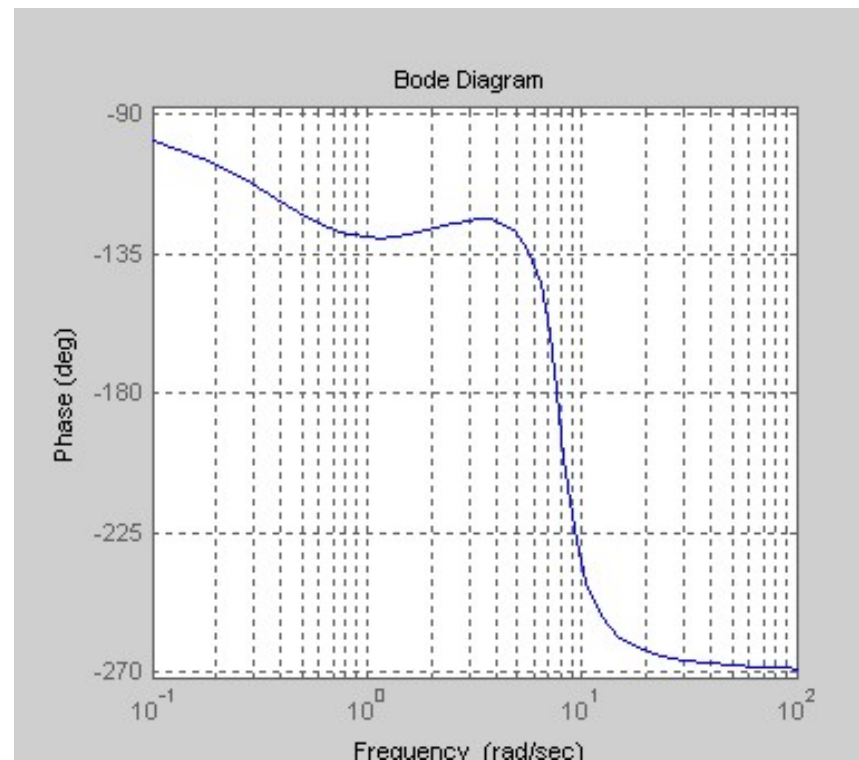
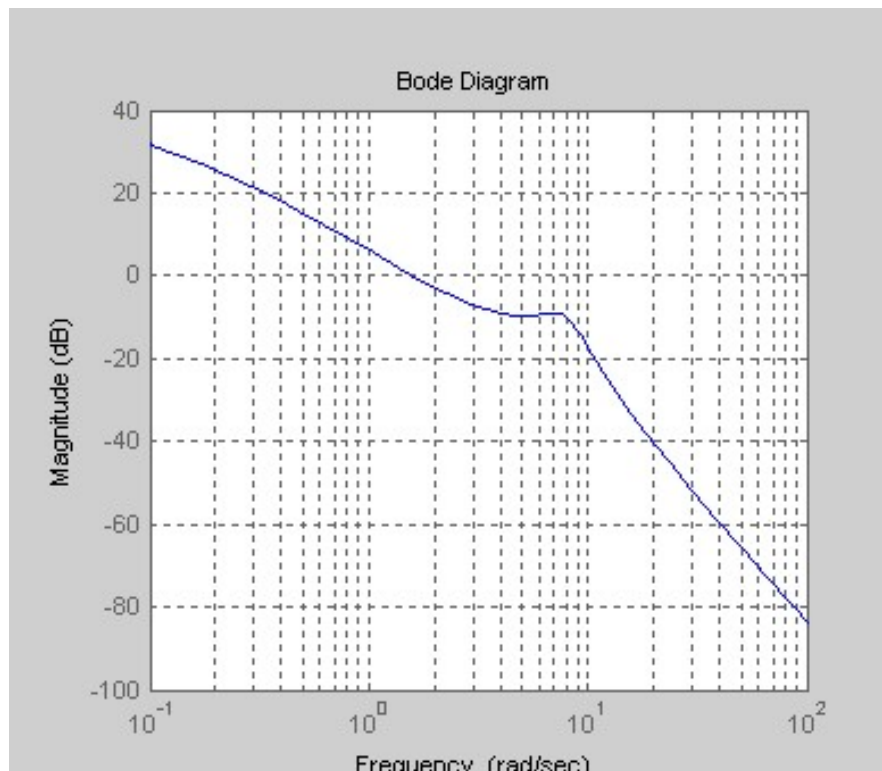


$N = -2$, 闭环系统不稳定

一般地，因果的开环传递函数是最小相位或最小相位+纯滞后时，对闭环稳定性，需要重点关注（-1）点附近的幅相曲线的情况，在远离（-1）点的高频幅相曲线与稳定性关系不大



问题回顾



已知闭环系统的开环对数频率特性曲线，要求从幅频和相频曲线直接判断出闭环系统的稳定性



穿越频率、截止频率和带宽频率



传递函数 $G(s)$ 的穿越频率 ω_x

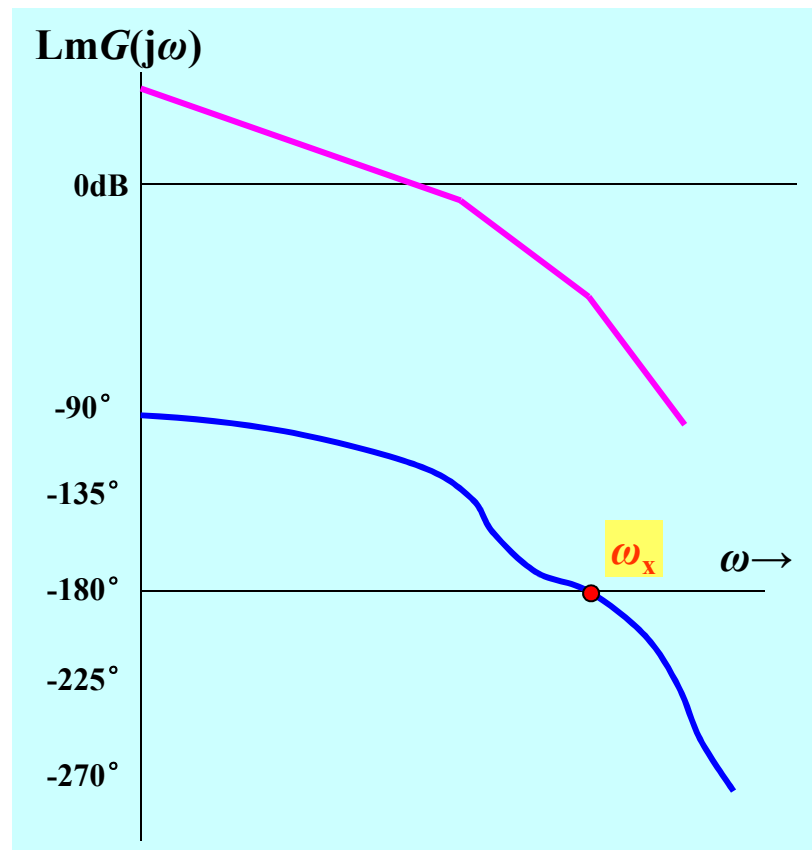
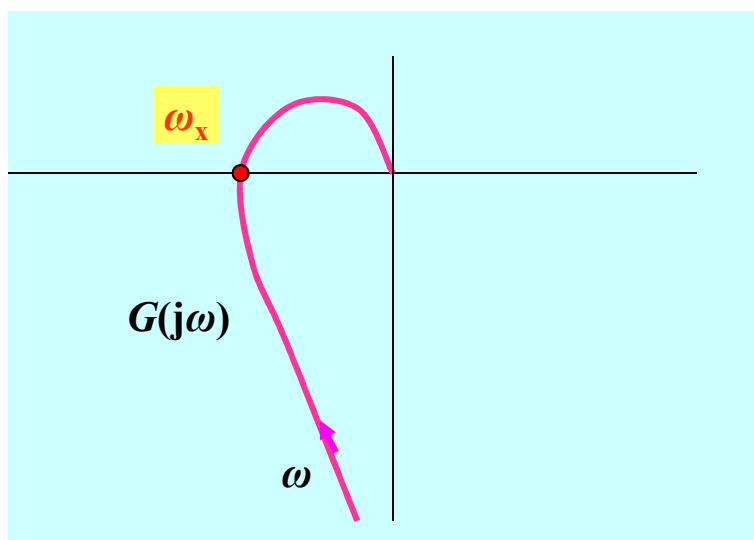
幅相曲线 $G(j\omega)$ 与负实轴交点处的频率

若出现多个交点，则视具体情况确定 ω_x

对数相频曲线与 $-k\pi$ 线交点处的频率

即 $\angle G(j\omega_x) = -k\pi, k$ 为整数

若出现多个交点，则视具体情况确定 ω_x

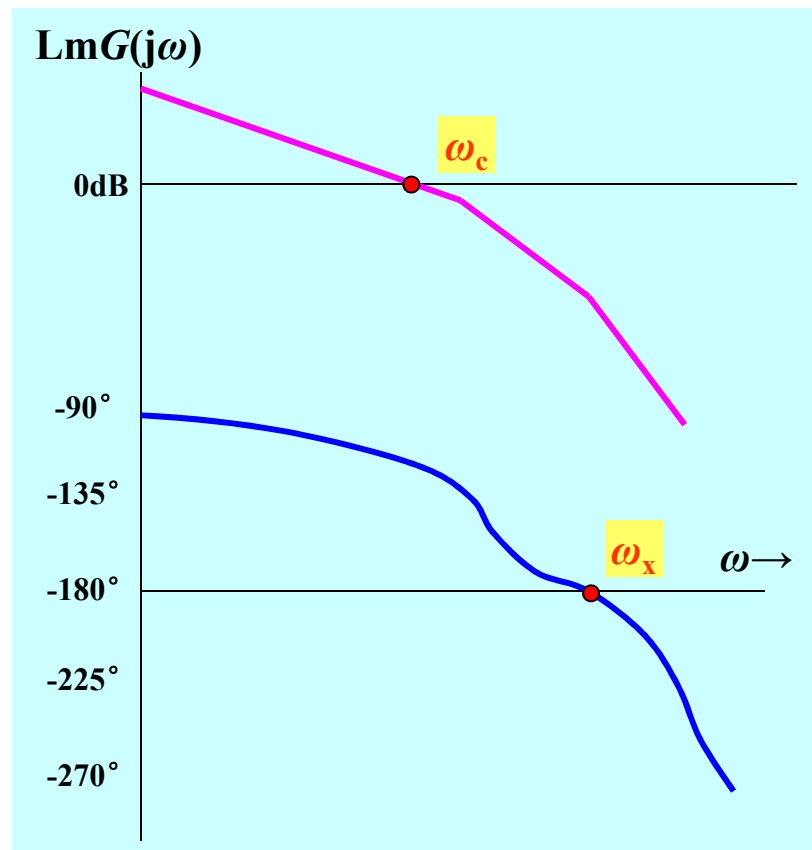
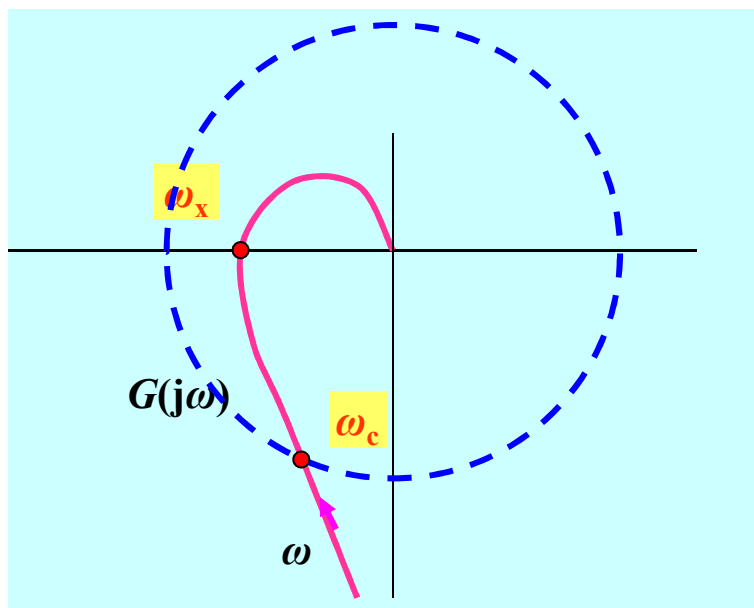




穿越频率、截止频率和带宽频率



传递函数 $G(s)$ 的截止频率(剪切频率) ω_c
对数幅频曲线与0dB线交点处的频率
即 $20\lg|G(j\omega_c)|=0$ 或 $|G(j\omega_c)|=1$
若出现多个交点,则视具体情况确定 ω_c



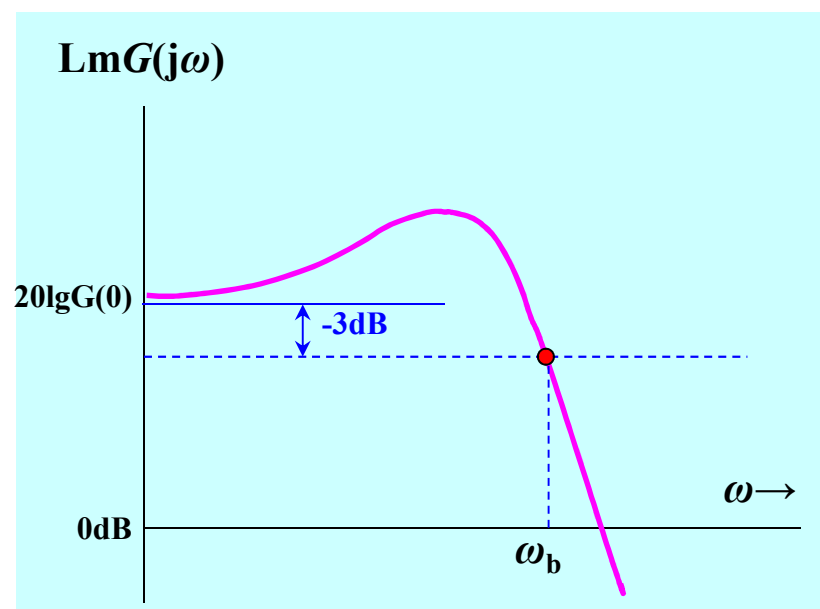
幅相曲线 $G(j\omega)$ 与单位圆周交点
(由圆外进入圆内)处的频率
若出现多个交点,则视具体情况确定 ω_c



穿越频率、截止频率和带宽频率



若传递函数 $G(s)$ 无极点或零点在原点，则 $G(s)$ 的带宽频率 ω_b 对数幅频曲线与 $20\lg|G(0)|-3(\text{dB})$ 线交点处的频率
若出现多个交点，则一般指其中最低的频率



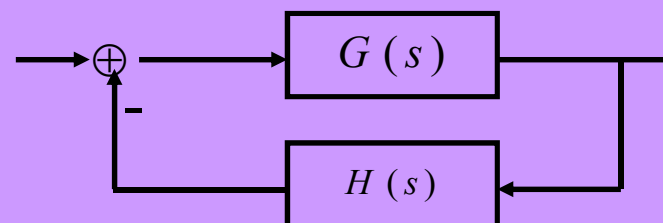


定义



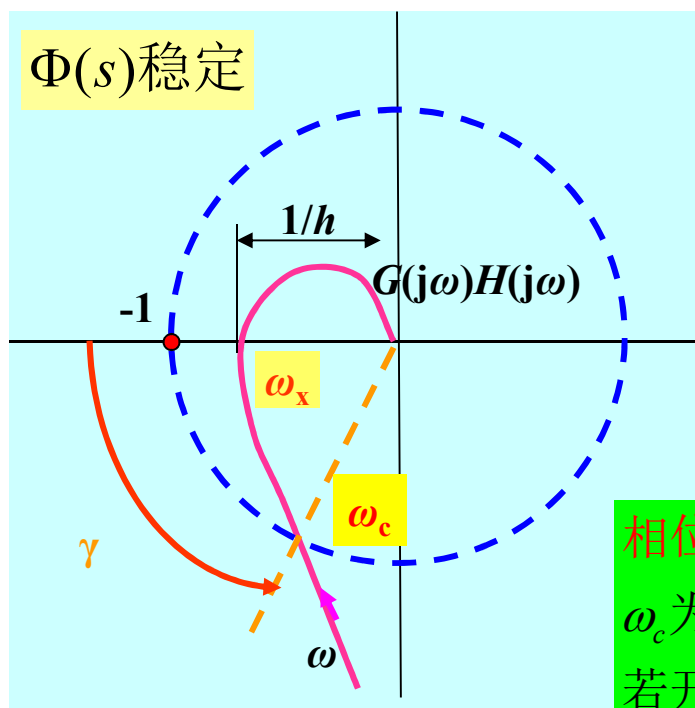
负反馈系统的闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



设开环传递函数 $G(s)H(s)$ 因果且是最小相位或最小相位+纯滞后

$\Phi(s)$ 稳定



$$\text{幅值裕度 } h = \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|}$$

ω_x 为 $G(s)H(s)$ 的穿越频率

若开环增益 K 变为 hK , 则 $\Phi(s)$ 临界稳定

幅值裕度也可以 $20\lg h$ 表示, 其单位为dB

$\Phi(s)$ 稳定时, $h > 1$, 即 $20\lg h > 0$

$$\text{相位裕度 } \gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$$

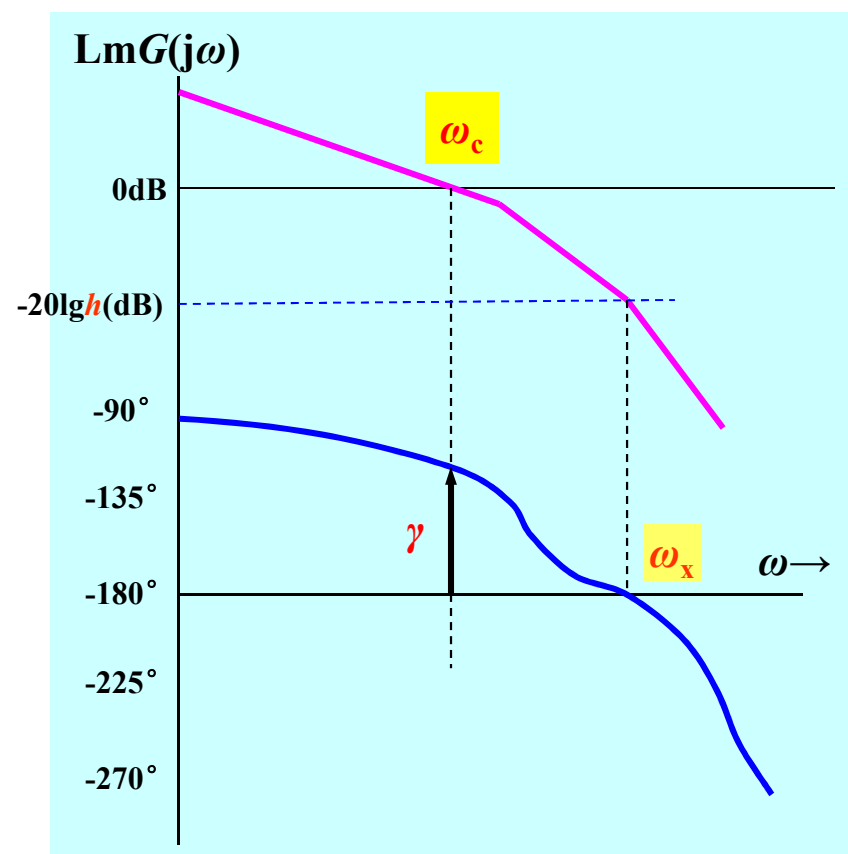
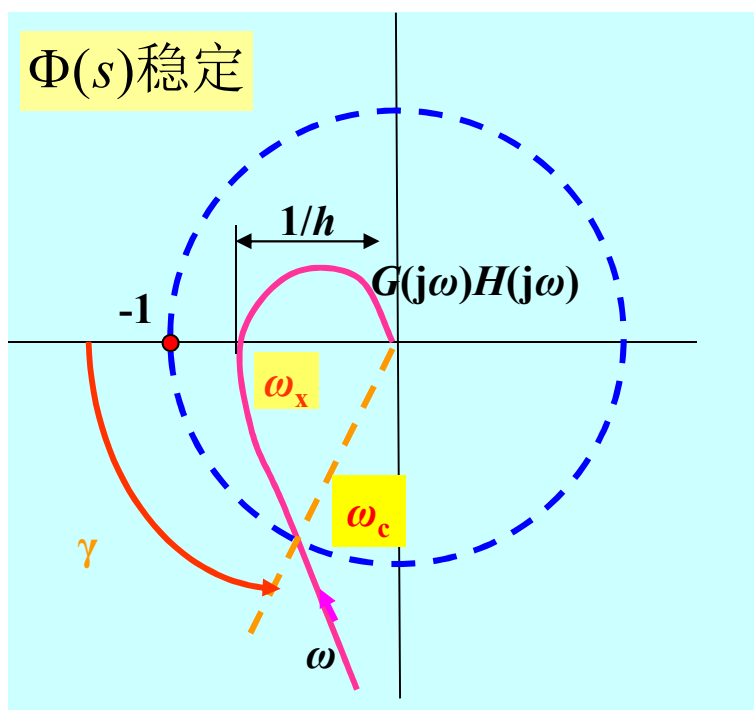
ω_c 为 $G(s)H(s)$ 的截止频率

若开环相位变化且在 ω_c 有滞后 γ 的相位变化, 则 $\Phi(s)$ 临界稳定

$\Phi(s)$ 稳定时, $\gamma > 0^\circ$

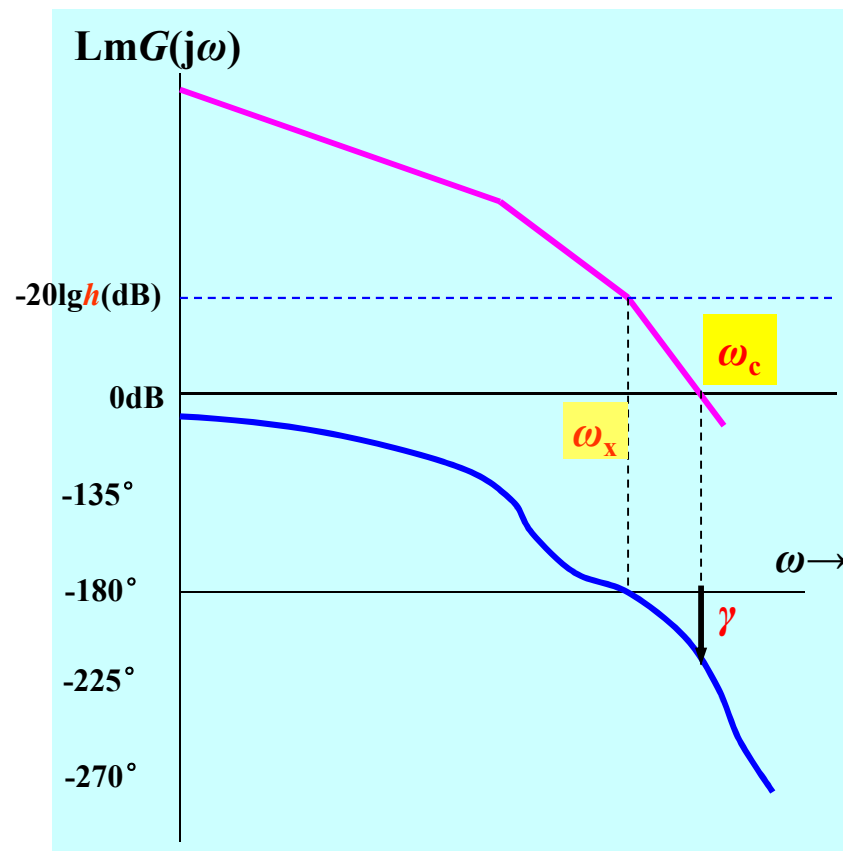
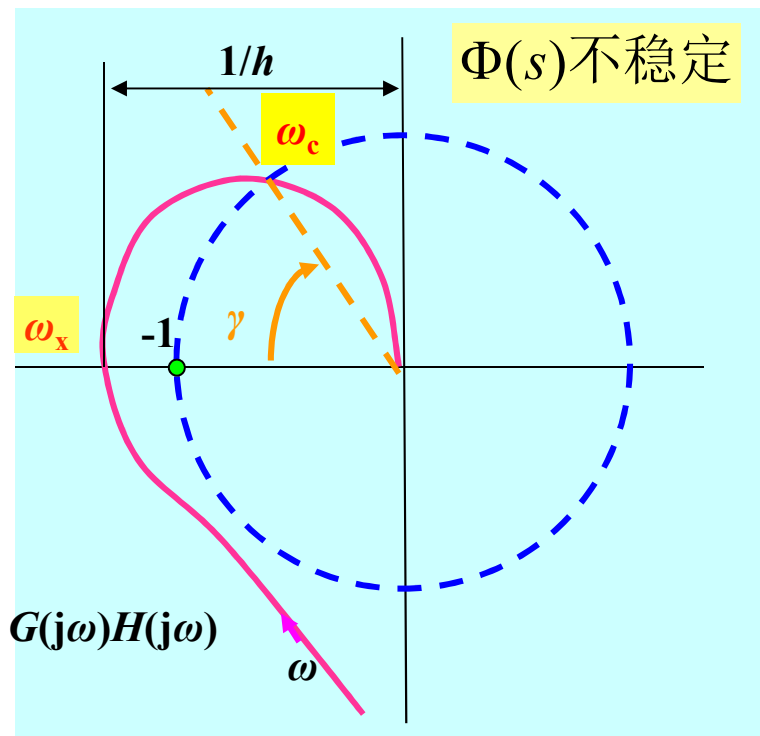


定义





定义



$\Phi(s)$ 不稳定时, $h < 1$

若开环增益 K 变为 hK , 则 $\Phi(s)$ 临界稳定

$\Phi(s)$ 不稳定时, $\gamma < 0^\circ$

若开环相位变化且在 ω_c 有超前 $|\gamma|$ 的相位变化, 则 $\Phi(s)$ 临界稳定



三种求解系统相位裕度和幅值裕度的方法，即解析法、极坐标图法和伯德图法。

(一) 解析法

根据系统的开环频率特性，由

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1 \quad (0 \leq \omega_c \leq +\infty)$$

和 $\gamma = \Phi(\omega_c) - (-180^\circ) = \Phi(\omega_c) + 180^\circ$ 求出相位裕度

由 $\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x) = -180^\circ \quad (0 \leq \omega_x \leq +\infty)$

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|}$$

或 $20 \lg h = -20 \lg |G(j\omega_x)H(j\omega_x)|$ 求出幅值裕度



求解

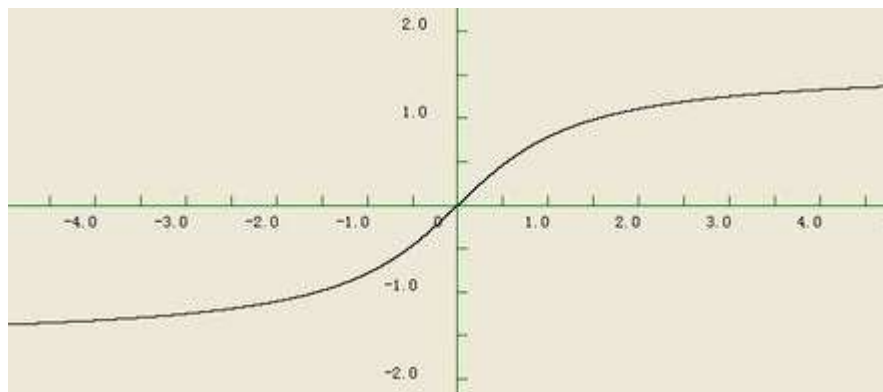


两种反正切函数

$$\theta = \arctan(x) = \text{atan}(x)$$

定义域: \mathbb{R}

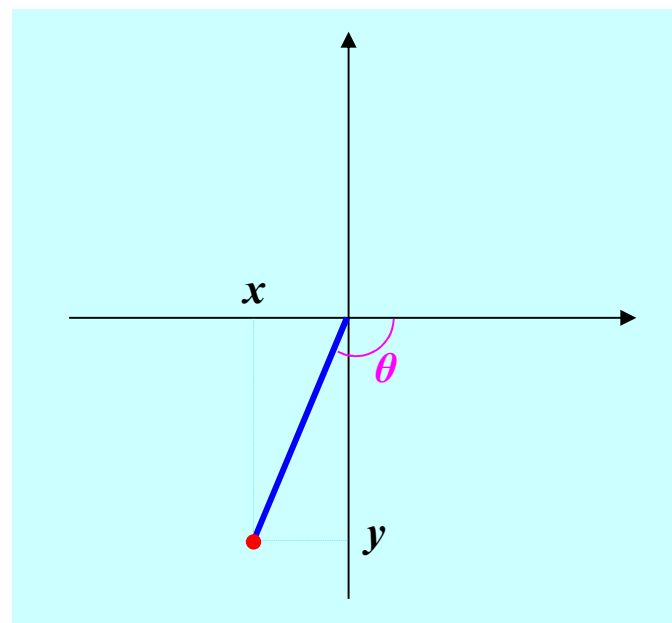
值域: $(-\pi/2, \pi/2)$



$$\theta = \text{atan2}(y, x)$$

定义域: $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

值域: $(-\pi, \pi]$





求解



例6-20 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{40}{s(s^2 + 2s + 25)}$$

试求出该系统的幅值裕度和相位裕度

解： 系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{40}{j\omega(25 - \omega^2 + j2\omega)}$$

其幅频特性和相频特性分别是

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \frac{40}{\sqrt{(25 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x) = -90^\circ - \text{atan2}(2\omega, 25 - \omega^2)$$

$$\omega > 0$$



求解



$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \frac{40}{\sqrt{(25 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x) = -90^\circ - \text{atan2}(2\omega, 25 - \omega^2)$$

$$\omega > 0$$

令 $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$, 得 $\omega_\Phi = 1.82$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_\Phi)H(j\omega_\Phi) = 90^\circ - \text{atan2}(2 \times 1.82, 25 - 1.82^2) = 80.5^\circ$$

令 $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ$, 得 $\omega_x = 5$

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|} = 1.25$$

或 $h(\text{dB}) = 20 \lg 1.25 = 1.94(\text{dB})$

即：该系统具有1.94dB的幅值裕度，80.5°的相位裕度。



(二) 极坐标图法

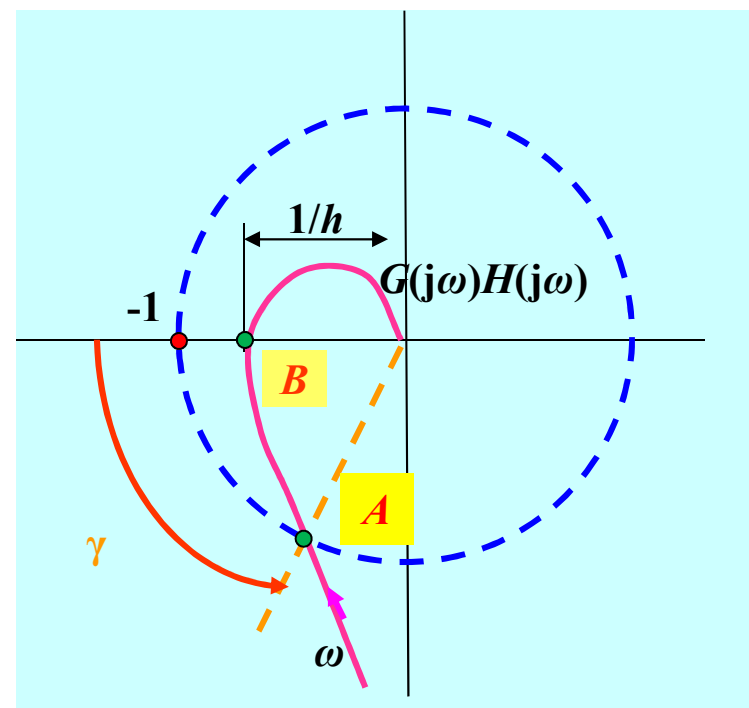
在GH平面上作出系统的开环频率特性的极坐标图

并作一单位圆，单位圆与开环频率特性相交于点A

由点A与坐标原点的连线与负实轴的夹角求出相位裕度 γ

开环频率特性与负实轴相交于点B处

由点B处的幅值 $|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|$ 的倒数得到幅值裕度 h





求解



在例6-20中，先作出系统的开环频率特性曲线如图所示

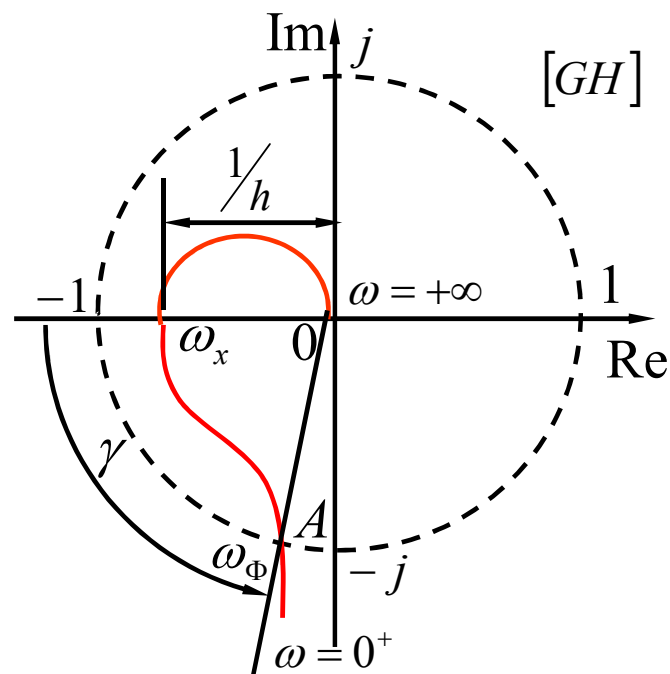
作单位圆交开环频率特性曲线于A点，连接OA，射线OA与负实轴的夹角即为系统的相位裕度 $\gamma \approx 80^\circ$

开环频率特性曲线与负实轴的交点坐标为 $(-0.8, j0)$

由此得到系统的幅值裕度：

$$h = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

$$20\lg h = 20\lg 1.25 = 1.94(\text{dB})$$



例6-20 的极坐标图



求解

(三) Bode图法

画出系统的Bode图

由开环对数幅频特性与零分贝线

(即 ω 轴)的交点得频率 ω_Φ

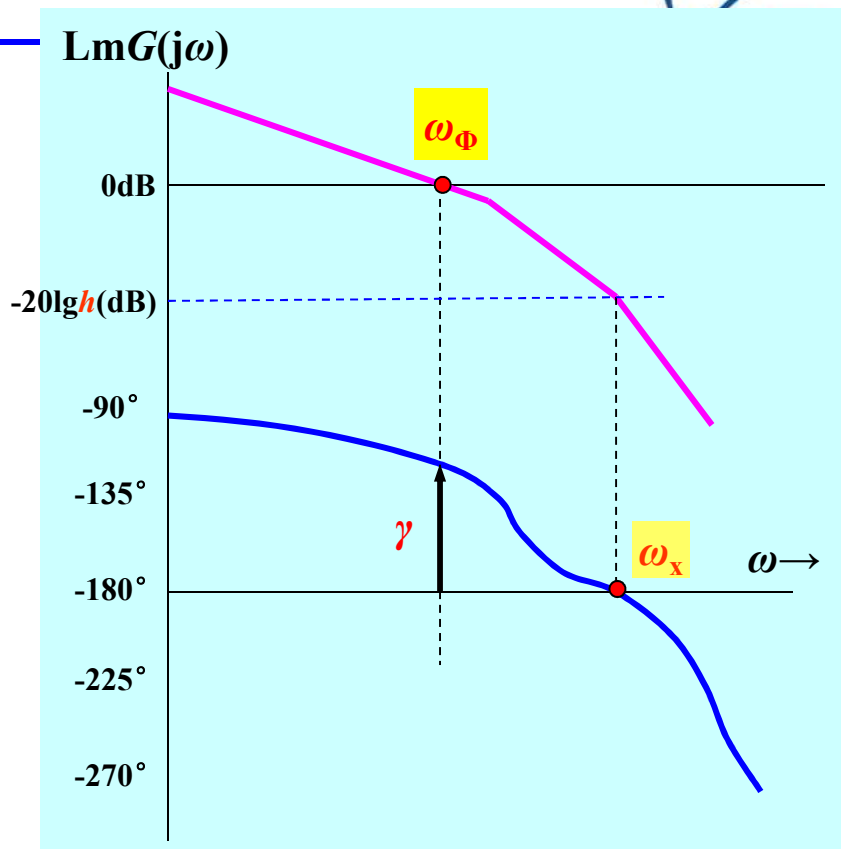
求出 ω_Φ 对应的相角与 -180° 线的相移量, 即为相位裕度 γ

当 ω_Φ 对应的相角位于 -180° 线上方时, $\gamma > 0^\circ$

当 ω_Φ 对应的相角位于 -180° 线下方时, $\gamma < 0^\circ$

由相频特性与 -180° 线的交点得频率 ω_x

求出 ω_x 对应的幅频与零分贝线的差值, 即为幅值裕度 h 的分贝数



当 ω_x 对应的幅频特性位于零分贝线下方时, $20\lg h > 0$

当 ω_x 对应的幅频特性位于零分贝线上方时, $20\lg h < 0$



求解



例6-20的Bode图如右图所示

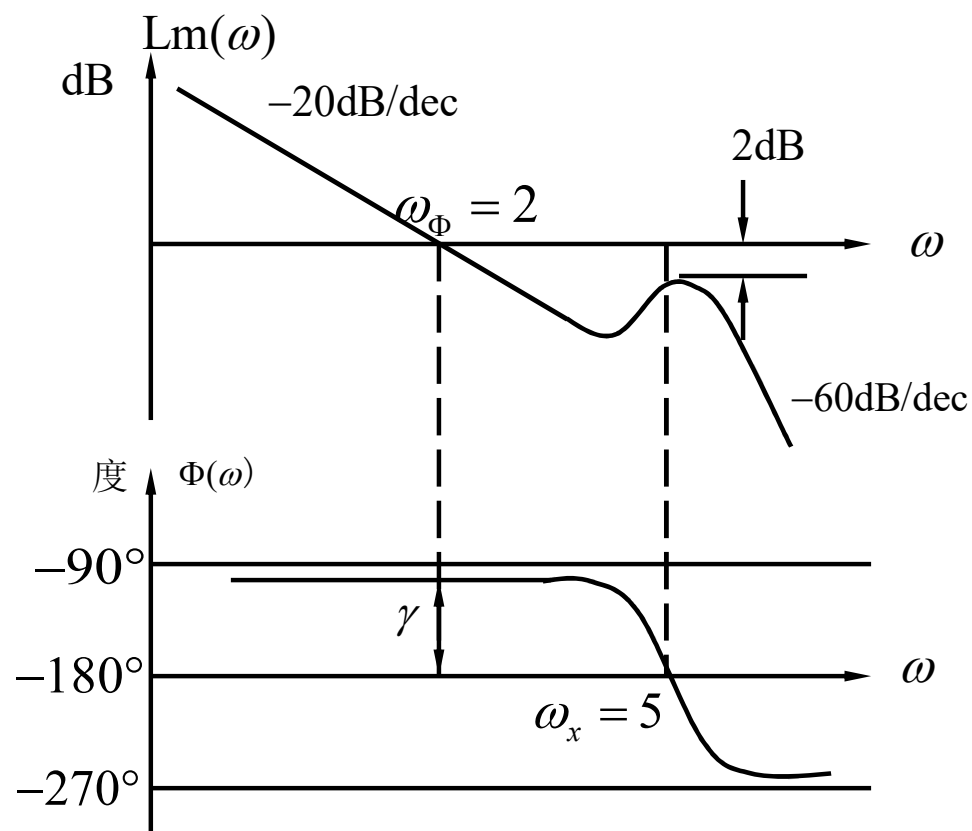
从图中，可直接得到

截止频率 $\omega_{\Phi} \approx 2$

穿越频率 $\omega_x = 5$

相位裕度: $\gamma \approx 80^\circ$

幅值裕度: $h = 2\text{dB}$



例6-20 Bode图



解析法 比较精确，但计算步骤复杂，而且对于三阶以上的高阶系统，用解析法相当困难

图解法 以极坐标图和Bode图为基础的图解法，避免了繁锁的计算，具有简便、直观的优点，对于高阶系统尤为方便。不过图解法是一种近似方法，所得结果有一定误差，误差的大小视作图准确性而定

Bode图法和极坐标法虽然都是图解法，但前者不仅可从Bode图上获得相位裕度 γ 和幅值裕度 h ，还可直接得到相应的截止频率 ω_{Φ} 和穿越频率 ω_x 。同时Bode图较极坐标图方便，因此在工程实践中得到更为广泛的应用



注意：

- 对于开环非最小相位系统，不能简单地用系统的相位裕度和幅值裕度的大小来判断系统的稳定性
- 对于开环最小相位系统以相位裕度 $\gamma > 0$ 和幅值裕度 $h > 1$ （或 $h \text{ (dB)} > 0$ ）作为系统闭环稳定的充要条件是可靠的



求解



例6-21 已知非最小相位的开环传递函数为

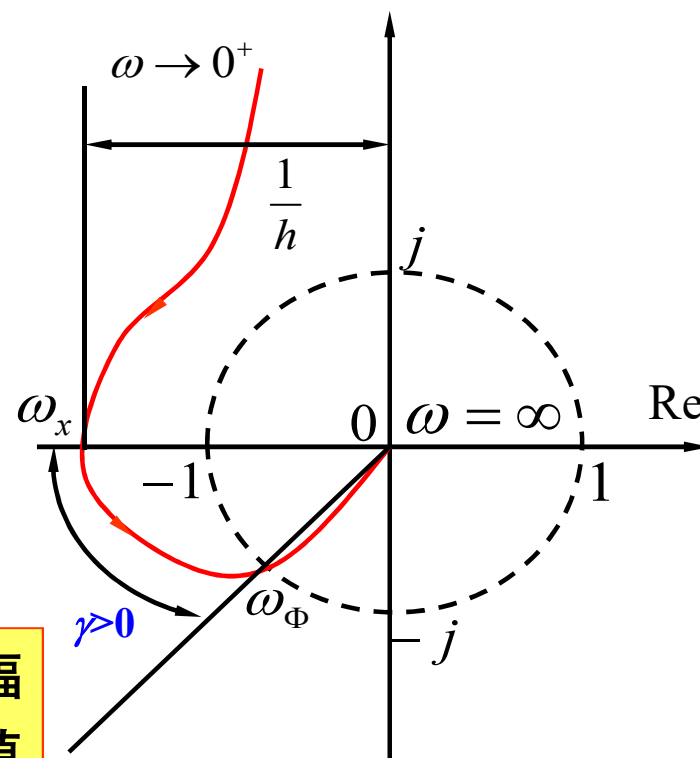
其中，各参数大于零。试分析该系统的稳定性及其与系统稳定裕度之间的关系

解 在一定的 K 值条件下，系统的开环频率特性如右图所示。由于该系统有一个位于 S 右半部平面的开环极点 $P_R=1$ ，奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一周

($N=1$)，根据奈氏判据，该系统为稳定系统。

但由图解法求出该系统的相位裕度 $\gamma > 0$ ，幅值裕度 $h < 1$ ，这说明以相位裕度 $\gamma > 0$ 和幅值裕度 $h > 1$ 作为判别开环非最小相位条件下的系统稳定性的依据是不可靠的

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(Ts - 1)}$$



例6-21 极坐标图



对于开环最小相位的系统，当幅值裕度用分贝（decibels）来表示时，大于零（为正）表示系统稳定（即幅值裕度数字上大于1），一个负的幅值裕度表示系统不稳定

工程设计上，一般要求：

系统的相位裕度在 45° 到 60° 之间

系统的幅值裕度不小于6dB



截止频率附近的斜率



对于最小相位传递函数 $G(s)$, $\text{Lm}G(j\omega)$ 与 $\angle G(j\omega)$ 间存在严格确定的关系, 如果其对数幅频特性在 ω_a 附近相当宽的频率段内斜率约为 $20k\text{dB/dec}$, k 为整数, 则 $\angle G(j\omega_a) \approx 90k^\circ$

最小相位的开环传递函数 $G(s)H(s)$, 其对数幅频曲线在截止频率 ω_ϕ 附近相当宽的频率段内斜率约为 -60dB/dec , 则 $\angle G(j\omega_\phi)H(j\omega_\phi) \approx -270^\circ$,
 $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_\phi)H(j\omega_\phi) \approx -90^\circ$, 闭环不稳定

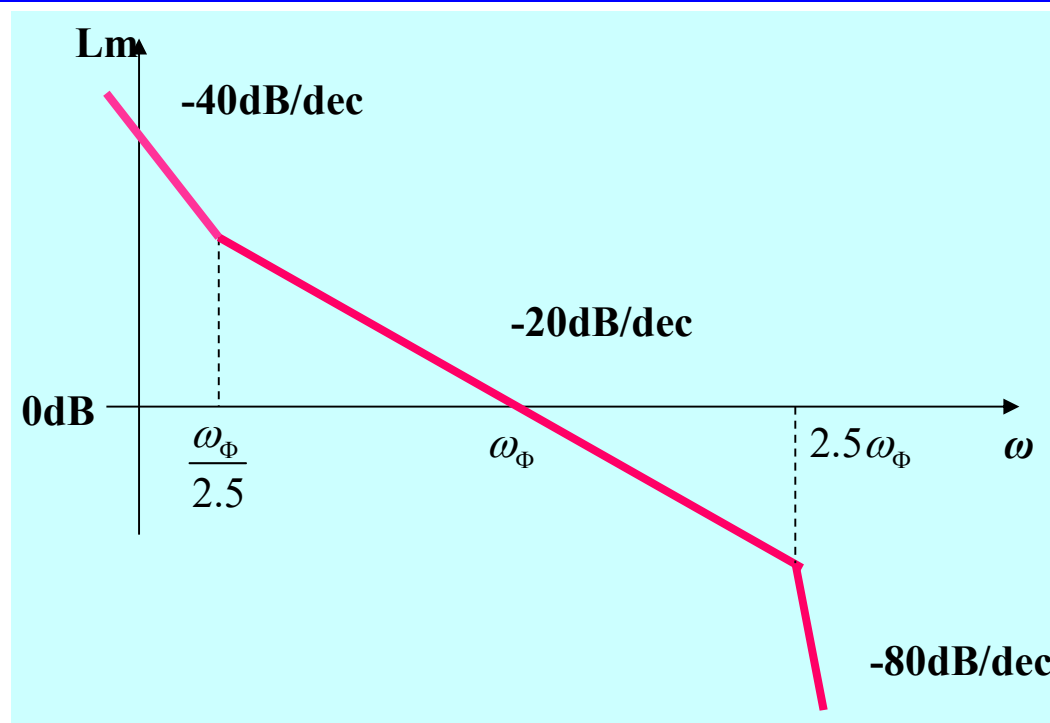
最小相位的开环传递函数 $G(s)H(s)$, 其对数幅频曲线在截止频率 ω_ϕ 附近相当宽的频率段内斜率约为 -40dB/dec , 则 $\angle G(j\omega_\phi)H(j\omega_\phi) \approx -180^\circ$,
 $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_\phi)H(j\omega_\phi) \approx 0^\circ$, 即使闭环稳定, 相位裕度也很小

最小相位的开环传递函数 $G(s)H(s)$, 其对数幅频曲线在截止频率 ω_ϕ 附近相当宽的频率段内斜率约为 -20dB/dec , 则 $\angle G(j\omega_\phi)H(j\omega_\phi) \approx -90^\circ$,
 $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_\phi)H(j\omega_\phi) \approx 90^\circ$, 闭环稳定, 相位裕度大

为保证闭环稳定, 设计开环对数幅频曲线 (折线) 时, 截止频率处的斜率需为 -20dB/dec



截止频率附近的斜率



开环对数幅频曲线（折线）截止频率 ω_ϕ 附近斜率的一种工程设计原则：

在 $\frac{\omega_\phi}{2.5}$ 至 $2.5\omega_\phi$ 的频段内斜率为 -20dB/dec

在低于 $\frac{\omega_\phi}{2.5}$ 的频段内不陡于 -40dB/dec

在高于 $2.5\omega_\phi$ 的频段内不陡于 -80dB/dec



Thanks!