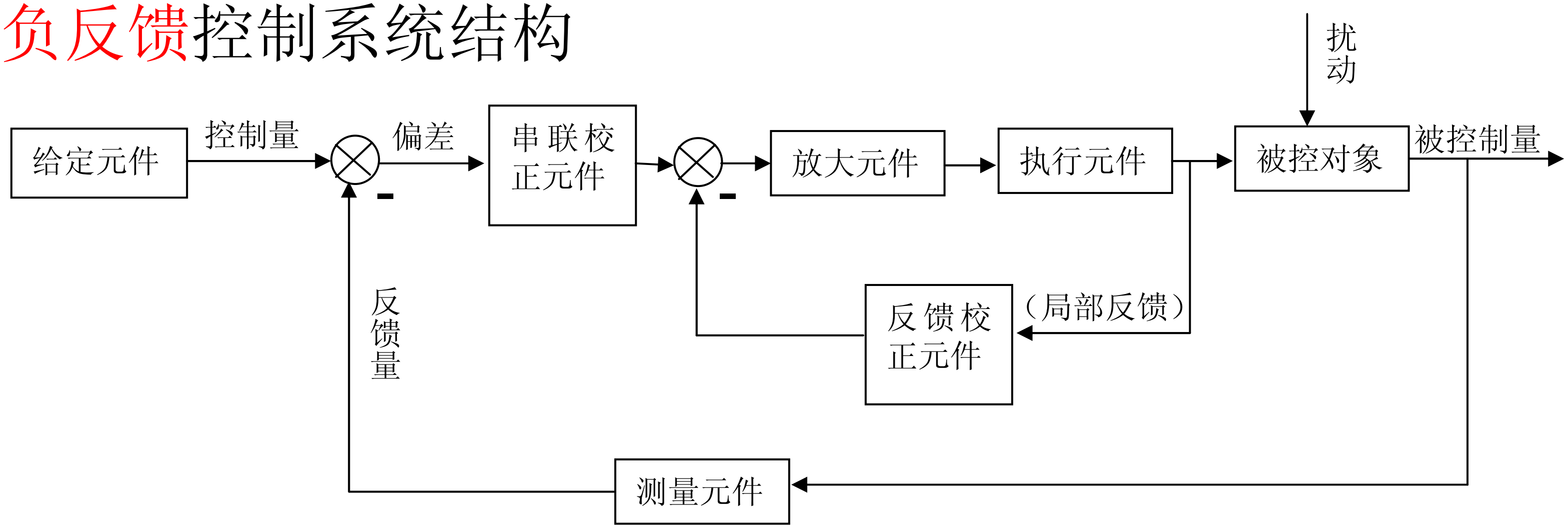
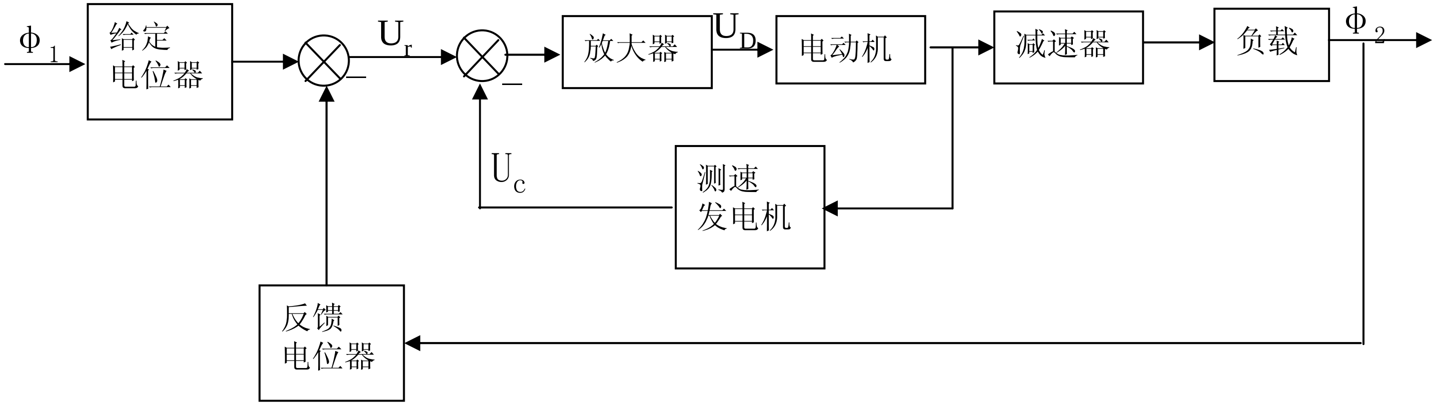
第一章 概论

典型负反馈控制系统结构



1—3



第一章 概论

工作原理

该系统的作用是使负载的角位移ϕ_2随给定角度ϕ_1的变化而变化，即位置随动系统，并且带有测速发电机的内反馈系统。

当负载的实际位置ϕ_2与给定位置ϕ_1相符时，则$U_r=0$，电动机不转。当负载的实际位置ϕ_2与给定位置ϕ_1不相符时，偏差电压$U_r\neq0$，经放大器放大后使电动机转动，通过减速器移动负载，使负载和反馈电位器向减小偏差的方向转动。

稳态时，输出转速Ω与输入电压U_r有一一对应的关系。所以给定U_r就设定了转速Ω 。若负载力矩M增加，在M增加的瞬时，电动机转速Ω下降；这是测速发电机(输出电压U_o与输入转速Ω呈现线性关系的测量元件)输出电压U_c下降；这使得差动放大器的反相输入电压$U_r- U_c$增大；电动机电枢电压U_D随之上升，电枢电流i_D随之上升；电动机电枢输出力矩M上升，这使得输出转速Ω上升，从而使电动机转速Ω基本回到原先稳定的转速。

第二章 控制系统的数学模型

习题答案：

2—1（a）$\dfrac{R_1R_2Cs+R_2}{R_1R_2Cs+R_1+R_2}$

2—1（b）$\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2s+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1}$

2—2（a）$2+\dfrac{1}{RCs}$

2—2（b）$-4(RCs+1)$

第二章 控制系统的数学模型

2-4 $\dfrac{G_1G_2+G_2H}{1+G_1G_2}$

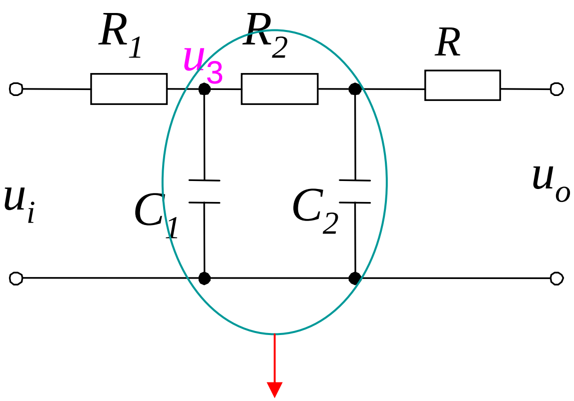
2-5 $\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2H_2-G_1G_2G_3H_1-G_1G_2G_3-G_1G_2H_2}$

2-6 $\dfrac{10s^3+3s^2+17s+14}{10s^3+3s^2+10s+14}$

第二章 控制系统的数学模型

习题解析：

2－1（b）



$$\frac{\frac{1}{C_1 s}\left(R_2+\frac{1}{C_2 s}\right)}{\frac{1}{C_1 s}+R_2+\frac{1}{C_2 s}}$$

$$u_3=\frac{R_2C_2s+1}{R_1R_2C_1C_2s+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1}u_i$$

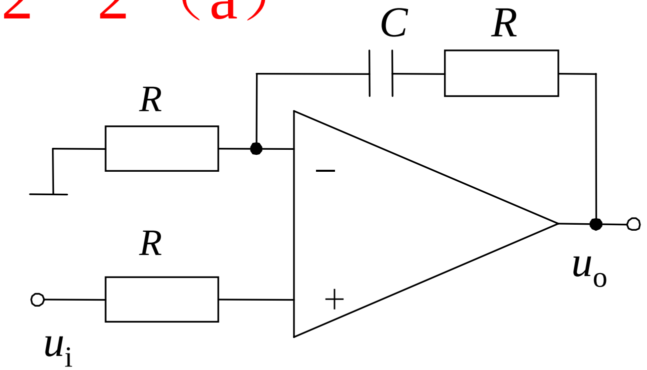
$$u_o=\frac{\frac{1}{C_2 s}}{R_2+\frac{1}{C_2 s}}u_3=\frac{1}{R_2C_2s+1}u_3$$

$$u_o=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1}u_i$$

$$(R_1R_2C_1C_2s+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1)^{-1}$$

第二章 控制系统的数学模型

2—2（a）

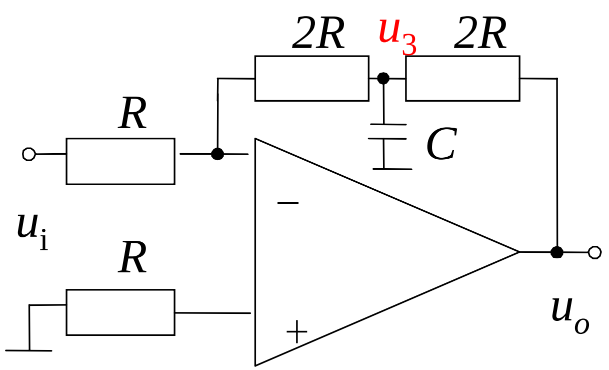


$$\frac{u_i}{R}+\frac{u_i-u_o}{R+\dfrac{1}{Cs}}=0$$

传递函数$G=\dfrac{u_o}{u_i}$ 而非 $\dfrac{u_i}{u_o}$

第二章 控制系统的数学模型

2—2（b）



$$\frac{u_i}{R} + \frac{u_3}{2R} = 0$$

$$\frac{u_3}{2R} + \frac{u_3}{\frac{1}{Cs}} + \frac{u_3 - u_o}{2R} = 0$$

注意符号！

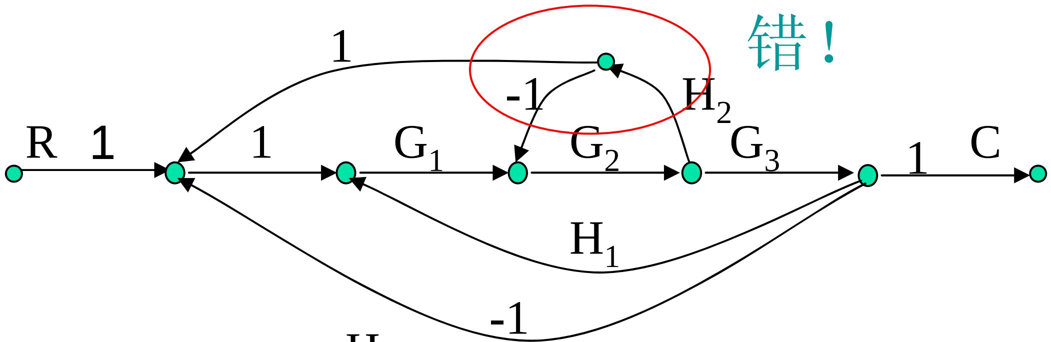
第二章 控制系统的数学模型

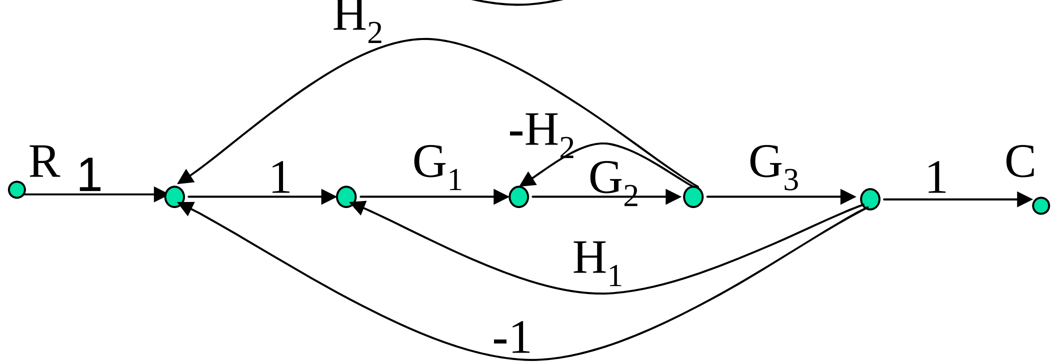
2—5

1 注意正，负反馈！

2 注意G_2后的出点后移到G_3后使H_2反馈变成H_2/G_3

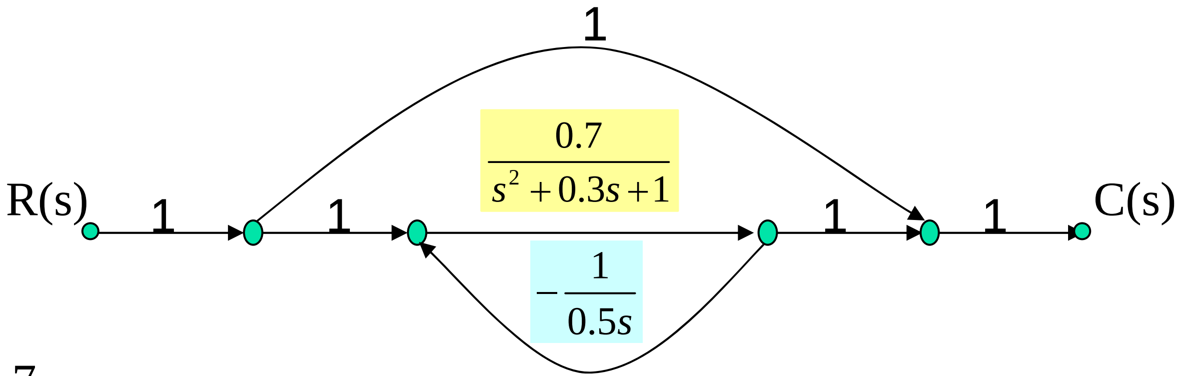
错！





第二章 控制系统的数学模型

2—6



$$P_1=\frac{0.7}{s^2+0.3s+1} \qquad \Delta_1=1$$

$$P_2=1 \qquad \Delta_2=1-(-\frac{1}{0.5s}*\frac{0.7}{s^2+0.3s+1})$$

Δ_k表示信号流程图中除去与第k条前向通道P_k相接触的支路和节点后余下的信号流程图的特征式。

$$\Delta=1-(-\frac{1}{0.5s}*\frac{0.7}{s^2+0.3s+1})$$

而信号流程图的特征式Δ

Δ=1-（所有不同回路的增益之和）

+（每两个互不接触回路增益乘积之和）

-（每三个互不接触回路增益乘积之和）

+

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_k P_k\Delta_k$$

第二章 控制系统的数学模型

2.7

1. 初始条件为0时，$H(s)=\frac{1}{s^2+3s+1}=\frac{C(s)}{R(s)}$

现$s^2c(s)-sc(0)-c'(0)+3sc(s)-3c(0)+c(s)=R(s)$

代入c(0)=−1, $c'(0)=0: s^2c(s)+3sc(s)+c(s)+s+3=R(s)$

当$r(t)=1(t), R(s)=1/s$

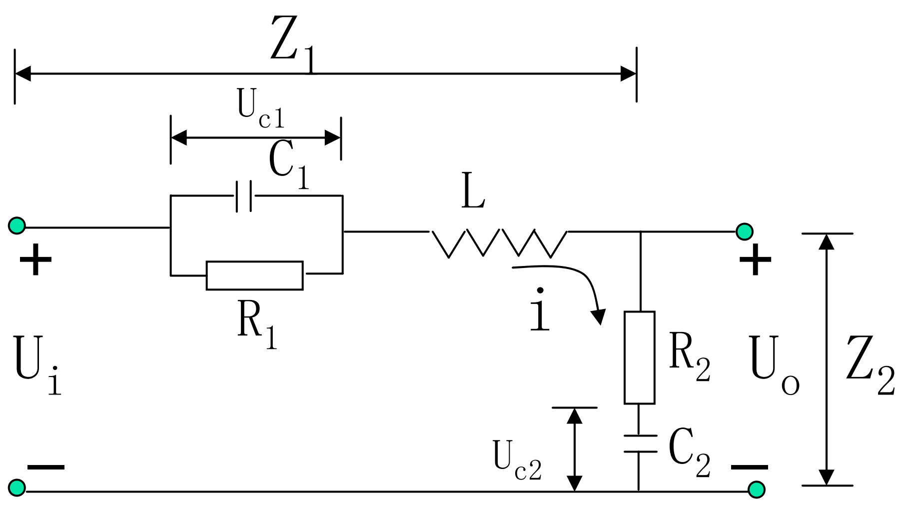
则$C(s)=\frac{1-s^2-3s}{s^3+3s^2+s}$

$$C(t)=1(t)+\frac{4}{3\sqrt{5}+5}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t}+\frac{4}{5-3\sqrt{5}}e\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t$$

2. $ess=6$

第二章 控制系统的数学模型

习题练习



(1) 列出系统的微分方程；

(2) 确定其传递函数 (系统初值为零)

解：由基尔霍夫电压、电流定律的系统微分方程：

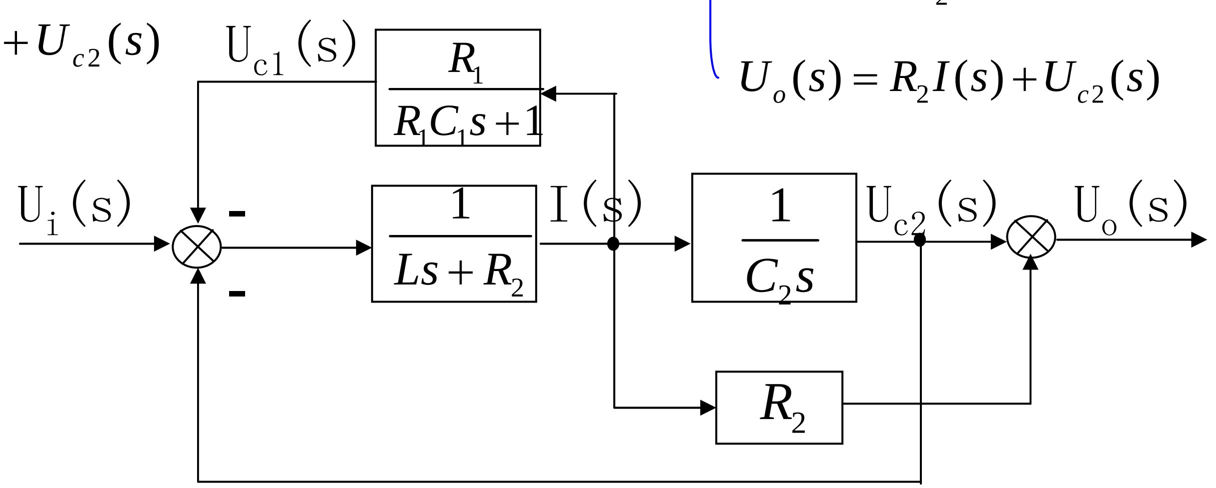
$$\begin{cases} u_i = u_{c1} + L\dfrac{di}{dt} + R_2 i + u_{c2} \\ i = C_1\dfrac{du_{c1}}{dt} + \dfrac{u_{c1}}{R_1} \\ i = C_2\dfrac{du_{c2}}{dt} \\ u_o = R_2 i + u_{c2} \end{cases}$$

第二章 控制系统的数学模型

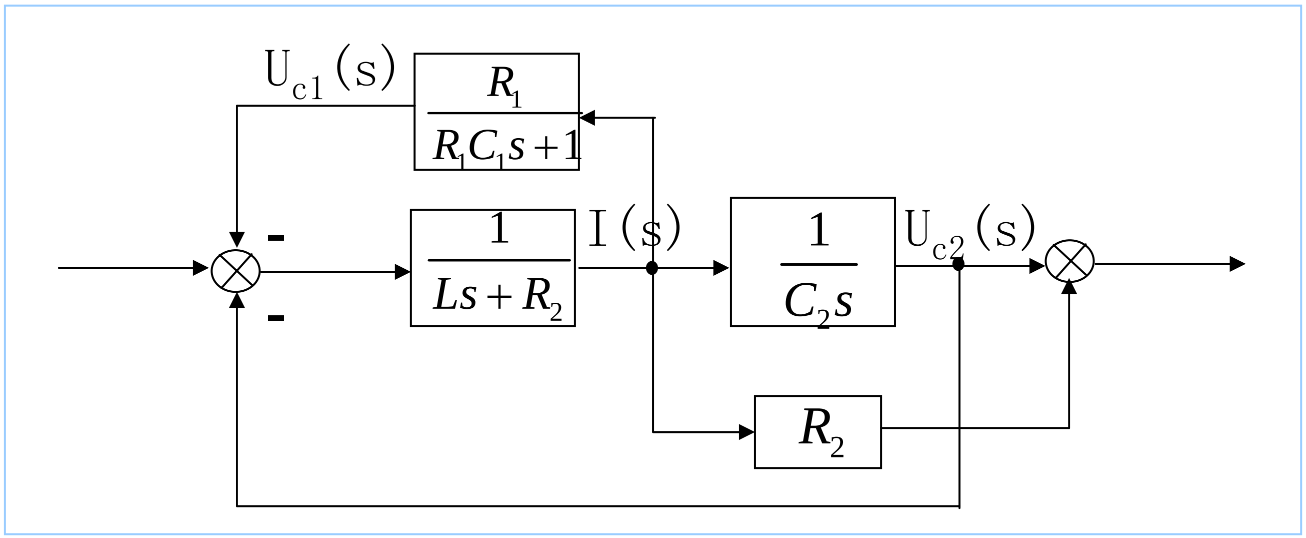
已知初值为零，对上式拉氏变换：

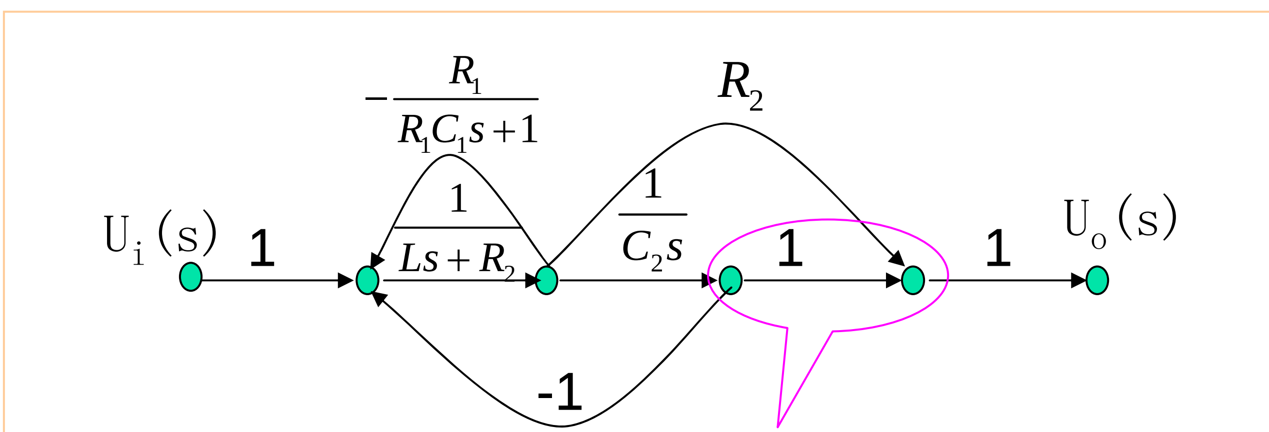
$$\begin{cases} U_i(s)=U_{c1}(s)+LsI(s)+R_2I(s)+U_{c2}(s) \\ I(s)=C_1sU_{c1}(s)+\dfrac{1}{R_1}U_{c1}(s) \\ I(s)=C_2sU_{c2}(s) \\ U_o(s)=R_2I(s)+U_{c2}(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I(s)=\dfrac{U_i(s)-U_{c1}(s)-U_{c2}(s)}{Ls+R_2} \\ U_{c1}(s)=\dfrac{1}{C_1s+\dfrac{1}{R_1}}I(s)=\dfrac{R_1}{R_1C_1s+1}I(s) \\ U_{c2}(s)=\dfrac{1}{C_2s}I(s) \\ U_o(s)=R_2I(s)+U_{c2}(s) \end{cases}$$



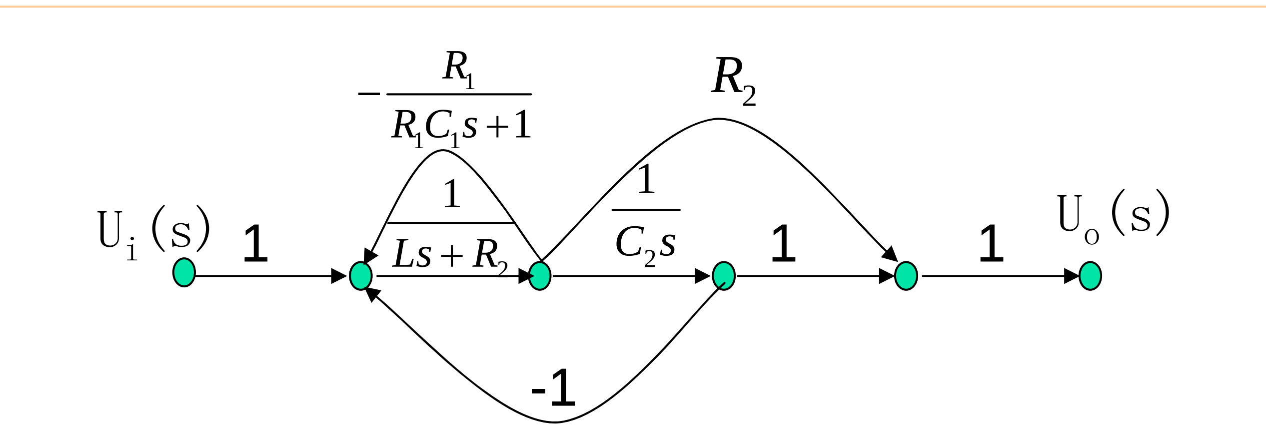
第二章 控制系统的数学模型





可以合二为一？

第二章 控制系统的数学模型



$$P_1=\frac{1}{C_2s(Ls+R_2)} \qquad \Delta_1=1$$

$$P_2=\frac{R_2}{Ls+R_2} \qquad \Delta_2=1$$

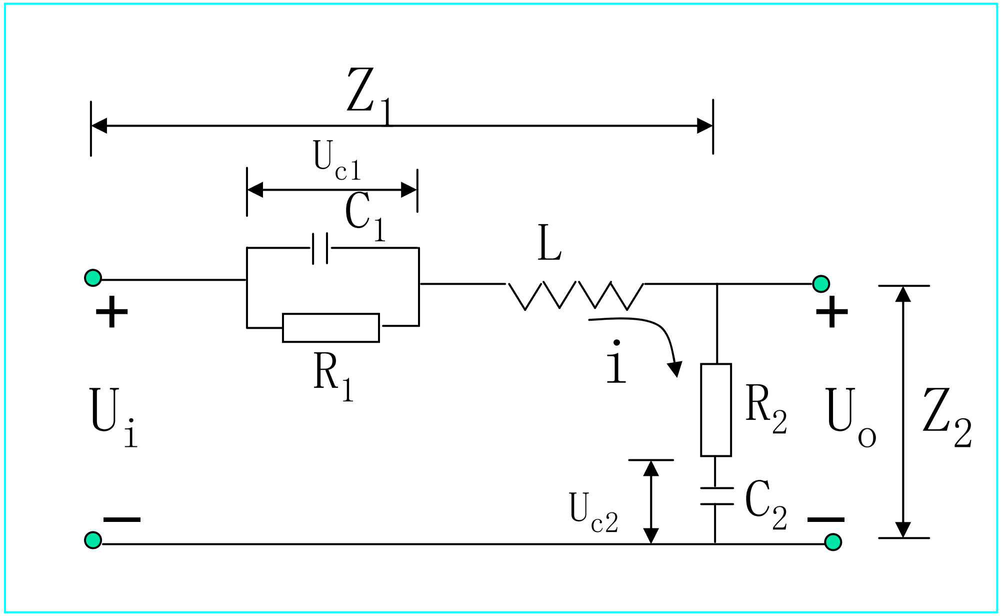
$$\Delta=1+\frac{R_1}{(Ls+R_2)(R_1C_1s+1)}+\frac{1}{C_2s(Ls+R_2)}$$

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$=\frac{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2)s+1}{R_1C_1C_2Ls^3+(R_1R_2C_1C_2+C_2L)s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

第二章 控制系统的数学模型

■ 求传递函数，还可以用第二种方法：应用阻抗法直接求电路的传递函数。



由图所示可知：

$$Z_1 = Ls + \frac{1}{C_1 s} \parallel R_1 = Ls + \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2 s}$$

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Ls + \dfrac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}}{Ls + \dfrac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} + R_2 + \dfrac{1}{C_2 s}}$$

$$= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 C_1 C_2 L s^3 + (R_1 R_2 C_1 C_2 + C_2 L)s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

第三章 控制系统的时域分析法

习题答案

3－1（1,2） 1.稳定2.不稳定

3-1(3) 不稳定

3－1（4） 临界稳定，虚根： $s_{1,2}=\pm j\sqrt{2}$ $s_{3,4}=\pm j$

3－2（1） K>0 系统稳定

3－2（2） 无论K取何值都不能使系统稳定

3－2（3） 0<K<3时，系统稳定

第三章 控制系统的时域分析法

习题解析

3－1（4）

$s^6+3s^5+5s^4+9s^3+8s^2+6s+4=0$

S^6	1	5	8	4
S^5	3	9	6	
S^4	1	3	2	
S^3	2	3		
S^2	3	4		
S^1	1			
S^0	4			

辅助方程：$s^4+3s^2+2=0$

求导：$4s^3+6s=0$

所以该系统为临界稳定，其虚根：

$$s_{1,2}=\pm j\sqrt{2} \qquad s_{3,4}=\pm j$$

第三章 控制系统的时域分析法

3－2（1）

$$(s+1)(0.1s+1)+K=0$$

$$\downarrow$$

$$0.1s^2+1.1s+1+K=0$$

$$\downarrow$$

$$K>-1$$

注意：K为开环系统的增益，不可能为负值。

故$K>0$时，整个系统稳定

第三章 控制系统的时域分析法

3—3

$$s(\tau s+1)(2s+1)+K(s+1)=0$$

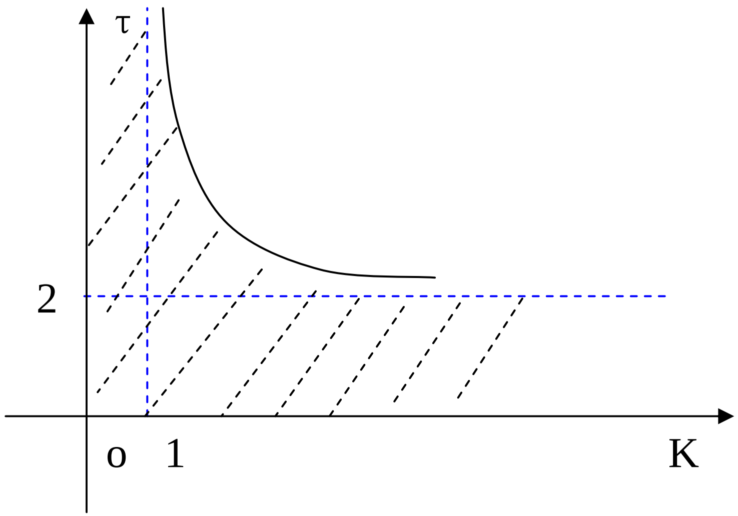
$$2\tau s^3+(2+\tau)s^2+(1+K)s+K=0$$

s^3	2τ	$1+K$
s^2	$2+\tau$	K
s^1	$(2+\tau)(1+K)-2\tau K$	
s^0	K	

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\tau>0 \\ K>0 \\ (2+\tau)(1+K)-2\tau K>0 \end{cases}$$

第三章 控制系统的时域分析法

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau>0 \\ (1-K)\tau+2(K+1)>0 \\ K>0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \tau>0 \qquad K>0 \\ \text{当}0<K<1\text{时 恒成立} \\ \text{当}K>1\text{时 } \tau<2+4/(K-1) \end{cases}$$

第三章 控制系统的时域分析法

3-6

1.Kp = 50　　Kv= 0　Ks　=0

2.Kp =无穷　　Kv= K　Ks　=0

3.Kp = 无穷　　Kv= 无穷　Ks　=K/10

4.Kp =无穷　　Kv= K/200　Ks　=0

第三章 控制系统的时域分析法

3-7

1. 0

2. 0.1R1

$$R2 = 0\text{时}，\ ess = 0$$

3. $R2 \neq 0\text{时}，\ ess = \infty$

第三章 控制系统的时域分析法

3—10

(1)

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{\frac{1}{s^2}}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+\frac{\omega_n^2}{s+2\xi\omega_n}}=\frac{2\xi}{\omega_n}$$

(2)

$$\begin{cases} C(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}(1+as)R(s) \\ E(s)=R(s)-C(s)=\dfrac{s-(a\omega_n^2-2\xi\omega_n)}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} \\ e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}s g E(s)=0 \end{cases} \Longrightarrow a\omega_n^2-2\xi\omega_n=0 \Longrightarrow a=\frac{2\xi}{\omega_n}$$

3—11

$$\begin{cases} \sigma_p=e^{-(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}})}=0.096 \\ t_p=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}=0.2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \xi=0.6 \\ \omega_n=19.6 \end{cases}$$

第三章 控制系统的时域分析法

3－12

设 $G(s)=k/as^3+bs^2+cs+d$

$$ess=\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{k}{as^3+bs^2+cs+d}=0\text{得d=0}$$

又 $\dfrac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{R(s)}}=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{k}{as^3+bs^2+cs+d}$

系统特征方程：$s^3+4s^2+6s+4=0$

比较得：$a=1,b=4,c=,k=4$

所以$G(s)=\dfrac{4}{s^3+4s^2+6s}$

第三章 控制系统的时域分析法

3.13

设$G(s)=\dfrac{cs+d}{s(s^2+as+b)}$

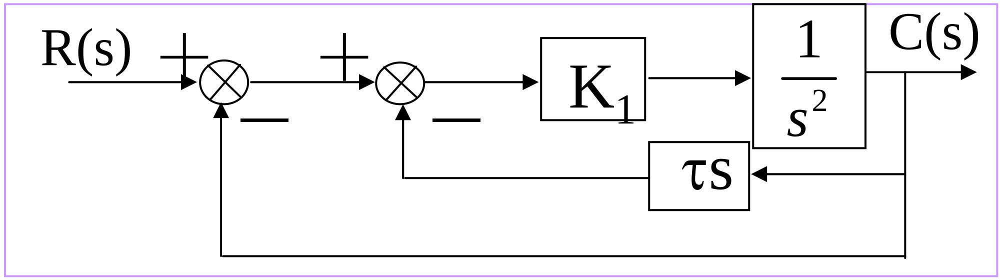
又$ess=\lim\limits_{s\to 0}1/sG(s)=2.0$得2d=b

特征多项式：$s^3+as^2+bs+d=0$

设另一极点为e（e<5），则特征多项式：（s+e）(s^2+2s+2)

第三章 控制系统的时域分析法

二阶系统，R(s)=1/s, σ_p=0.2, t_s=1.8s时，试确定K_1、τ值。



当输入信号分别为：

r(t)=1(t), r(t)=t, r(t)=1/2t²时，

试求系统的稳定误差。

$$G(s)=\frac{K_1}{s(s+K_1\tau)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}\qquad \sigma_p=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}=0.2\qquad t_s=3/\xi\omega_n=1.8(s)$$

$$\xi=\sqrt{\frac{(\ln\sigma)^2}{\pi^2+(\ln\sigma)^2}}=0.456$$

$$\omega_n=\frac{3}{\xi t_s}=\frac{3}{0.456\times1.8}=3.655(s^{-1})$$

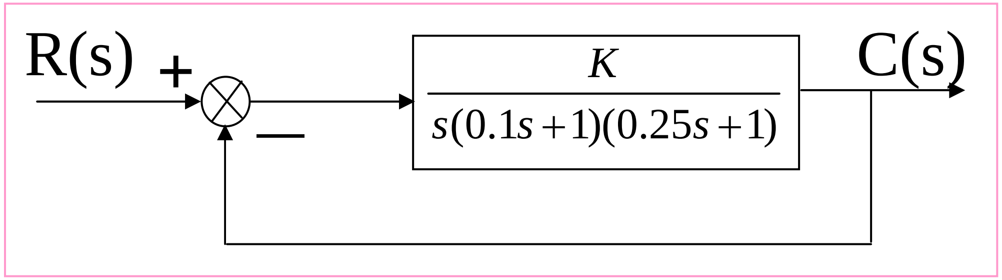
$$K_1=\omega_n^2=13.36$$

$$\tau=2\xi/\omega_n\approx0.2s$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{s\cdot R(s)}{1+G(s)}=\begin{cases}\dfrac{R}{1+\lim\limits_{s\to0}G(s)}=0, R(s)=\dfrac{1}{s}\\[2ex]\dfrac{R}{\lim\limits_{s\to0}s\cdot G(s)}=\tau=0.2, R(s)=\dfrac{1}{s^2}\\[2ex]\dfrac{R}{\lim\limits_{s\to0}s^2\cdot G(s)}=\infty, R(s)=\dfrac{1}{s^3}\end{cases}$$

第三章 控制系统的时域分析法

（1）为使闭环系统稳定，确定K的取值范围。



（2）当K为何值时系统出现等幅振荡，并确定等幅振荡的频率。

（3）为使系统的闭环极点全部处于s平面左移一个单位后的左侧，试确定K的取值范围。

第三章 控制系统的时域分析法

解：系统闭环特征方程：

$$s^3+2s^2+s+40K=0$$

s^3	1	1
s^2	2	40K
s^1	1-20K	
s^0	40	

- 使系统稳定的K值为（1－20K）>0,40K>0,即0<K<0.05

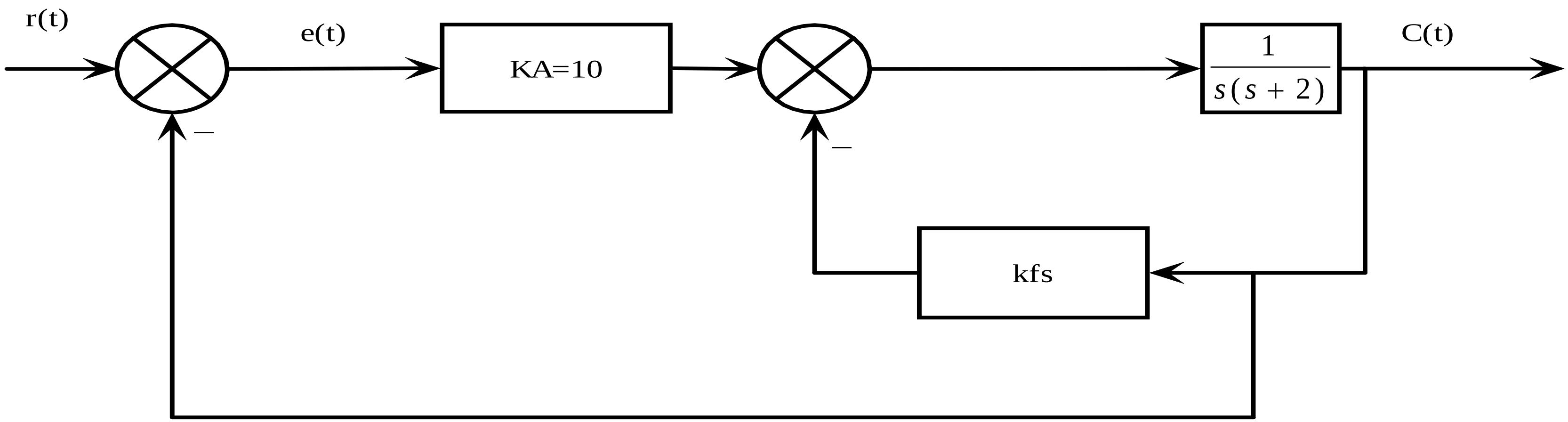
- 等幅振荡时 1－20K＝0->K=0.05
  辅助方程： $2s^2+40K=0$
  解得：$s_{1,2}=\pm j$，等幅振荡频率ω＝1rad/s

- 令$s=s_1-1$代入原方程，得新特征方程：

$$s_1^3-s_1^2+40K=0$$

由稳定性的必要条件可知，不论K取何值，都不可能使闭环极点处于s平面得虚轴左移一个单位得左侧。

第三章 控制系统的时域分析法



1.当Kf＝0时，求阻尼比ξ，固有频率ω_n，单位斜坡输入时系统稳态误差

2 .当ξ＝0.6，确定系统Kf，单位斜坡输入时稳态误差

1，Kf＝0开环G1（s）＝$\frac{10}{s(s+2)}$，开环增益K_1＝5，v＝I

闭环$\varnothing 1(s)=\frac{10}{s^2+2s+10}$

$$\omega_n=\sqrt{10}=3.16,\xi_1=\frac{2}{2*3.16}=0.316$$

$$ess_1=\frac{1}{K}=0.2$$

2，$kf\neq 0$

$$G_2(s)=10*\frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{kfs}{s(s+2)}}=\frac{10}{s(s+2+kf)}$$

$$k_2=\frac{10}{2+k_f},v=1$$

$$\varnothing_2(s)=\frac{10}{s^2+(2+kf)s+10},\omega_n=3.16,\xi_2=\frac{2+k_f}{2*3.16}=0.6$$

得$kf=1.896,ess_2=0.39$

第四章 根轨迹法

4-2 习题答案

（1） 根轨迹的起迄点：3个开环极点（0，－2，－4），无零点。

3条根轨迹均沿渐近线趋向无穷远。

（2） 实轴上的根轨迹：0到－2，－4到－∞的线段

（3） 渐近线：相角 $\alpha = \dfrac{\pm 180^{\circ}(2k+1)}{3}$ 为60°，180°，300°（－60°）

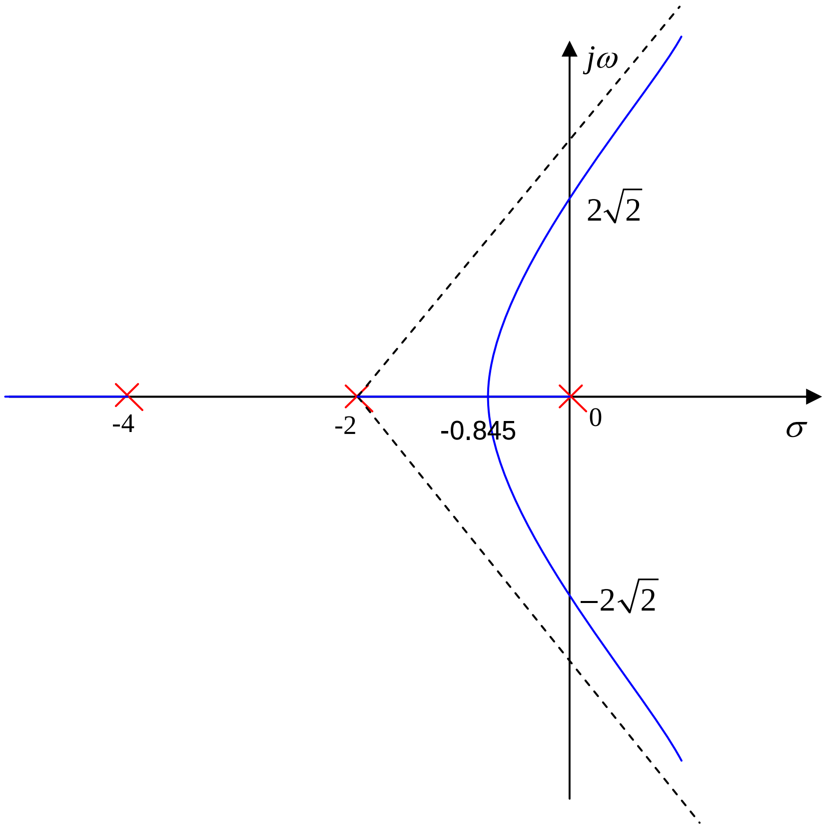
与实轴的交点 $\sigma_{\alpha} = \dfrac{-2-4}{3} = -2$

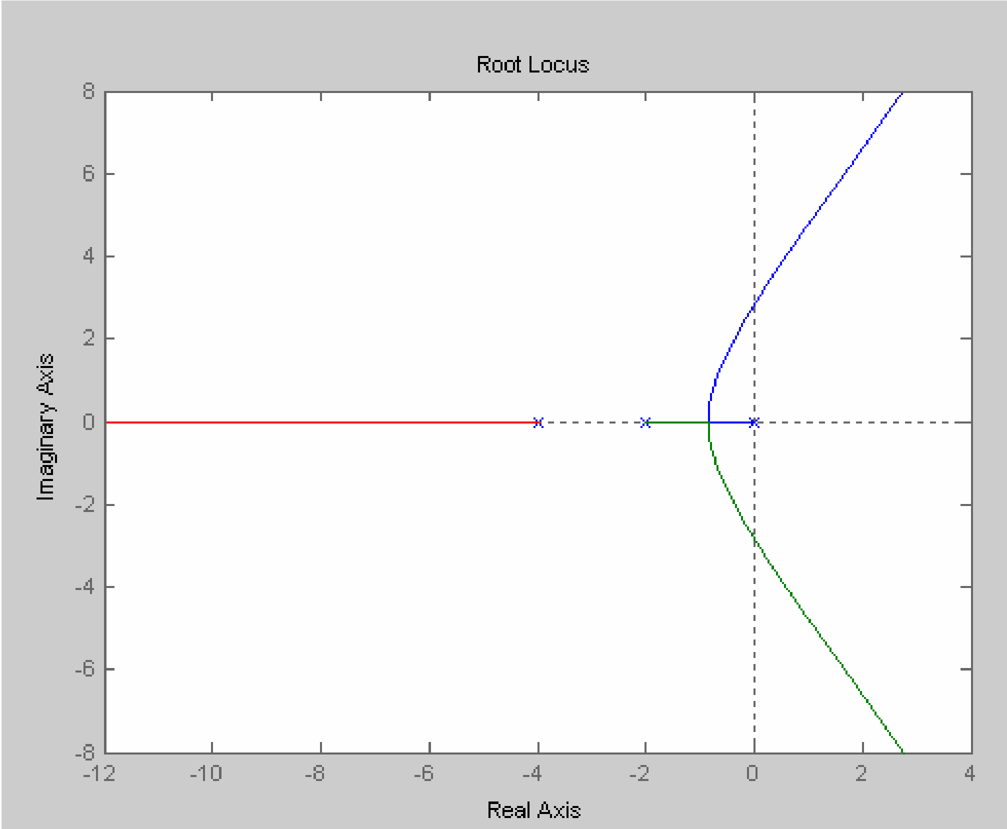
（4） 分离点： $\dfrac{dK}{ds} = -(3s^2 + 12s + 8) = 0$ $s_1 = -0.8453, s_2 = -3.1547$(舍去)

第四章 根轨迹法

（5）与虚轴的交点 $(j\omega)^3+6(j\omega)^2+8(j\omega)+K=0$

得到 $\omega=\pm2\sqrt{2}$ $K=48$





第四章 根轨迹法

主导极点的阻尼比ξ=0.707，得到$\theta=\cos^{-1}0.707$=45°，在根轨迹图中作45°的线，得到一对共轭极点：

则

$$K=|s(s+2)(s+4)|_{s=-0.755+0.755j}\approx 5.2$$

设另一个极点s_3，则

$$(s-s_3)(s+0.755+0.755j)(s+0.755-0.755j)=s(s+2)(s+4)+5.2$$

得到s_3=-4.472

(求共轭极点时也可以用代数解：令$s_{1,2}$＝a±aj，带入特征方程式得到$s_1(s_1+2)(s_1+4)+K=0$，解得 $a=-3+\sqrt{5}$，$K=8(7\sqrt{5}-15)$ ，求另一个极点方法和上面一样用待定系数法)

第四章 根轨迹法

更普遍的是，

令$s_{1，2}=-\varepsilon\omega_n \pm j\omega_n(1-\varepsilon^2)^{1/2}$，$\varepsilon$ 已知

将上式代入特征方程D（S）=0，

根据复数相等可得 ω_n和k

第四章 根轨迹法

```
% -----------(1)------------ %
%K/s(s+2)(s+4)
     z=[];
     p=[0 -2 -4];
     k=1;
     g=zpk(z,p,k);
     rlocus(g)
```

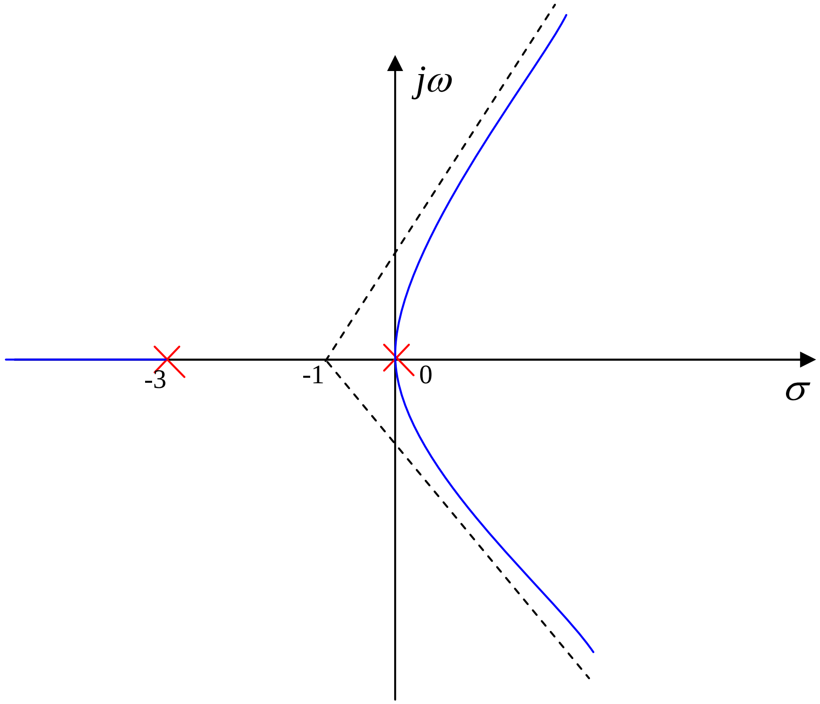
```
% -----------(2)------------ %
[k,poles]=rlocfind(g)
while(abs(k-5.2)>0.1)       %  abs(k-5.2)>0.05
[k,poles]=rlocfind(g)2；
end
p1=poles(1)
```

第四章 根轨迹法

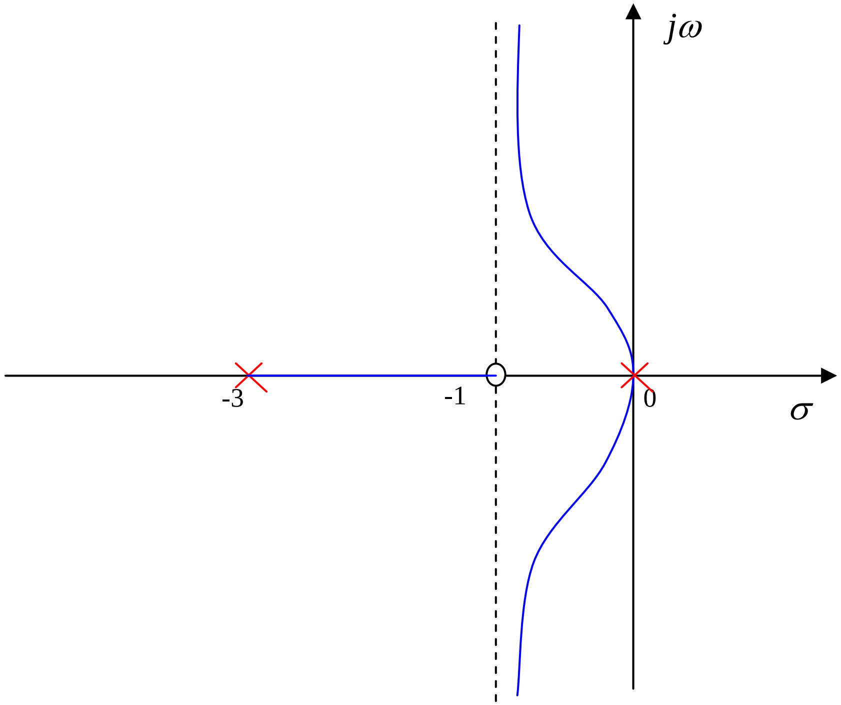
4-3

解题步骤和4-2一样，根轨迹图如下：

$G(s)=K/s^2(s+3)$



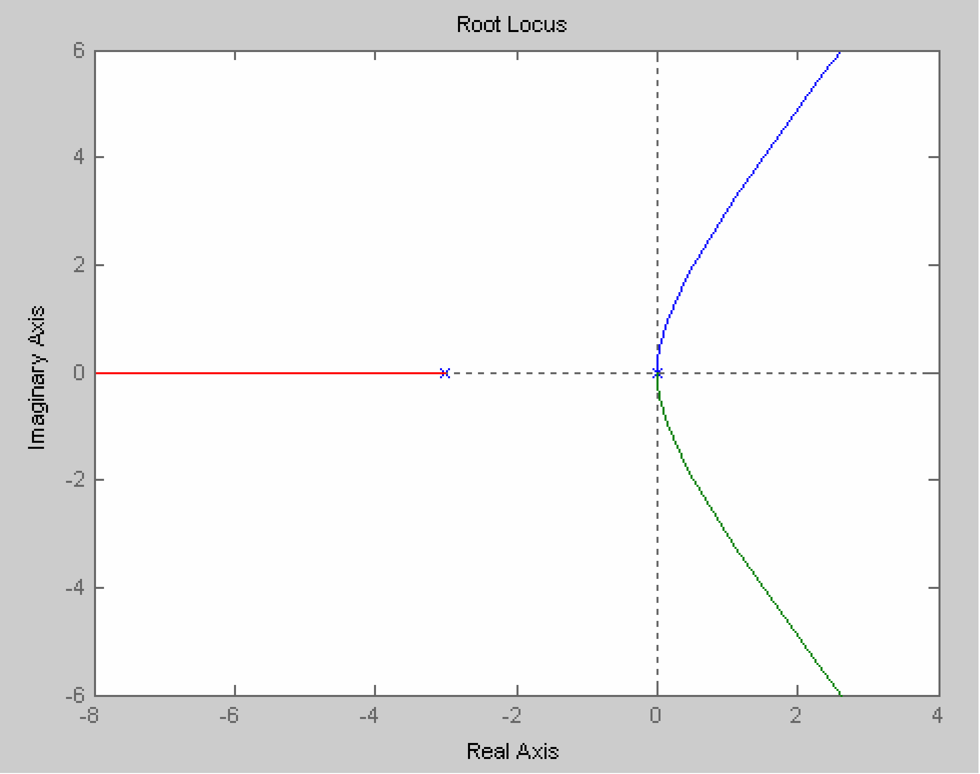
$G(s)=K(s+1)/s^2(s+3)$



第四章 根轨迹法

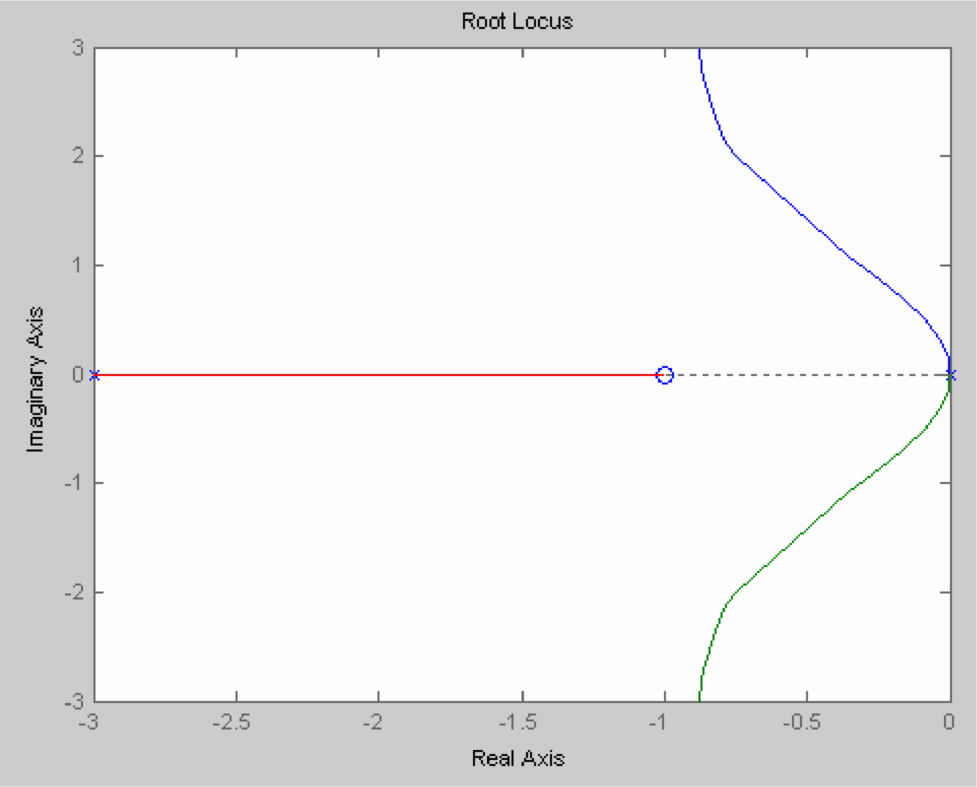
Matlab实现

```
%  -------------------(1)--------------------- %
%K/s^2(s+3)
z=[];
p=[0 0 -3];
k=1;
g1=zpk(z,p,k);
rlocus(g1)
```



第四章 根轨迹法

```
%  ------------------(2)-------------------- %
%K(s+1)/s^2(s+3)
z=[-1];       %  增加了一个-1的零点
p=[0 0 -3];
k=1;
g2=zpk(z,p,k);
rlocus(g2)
```

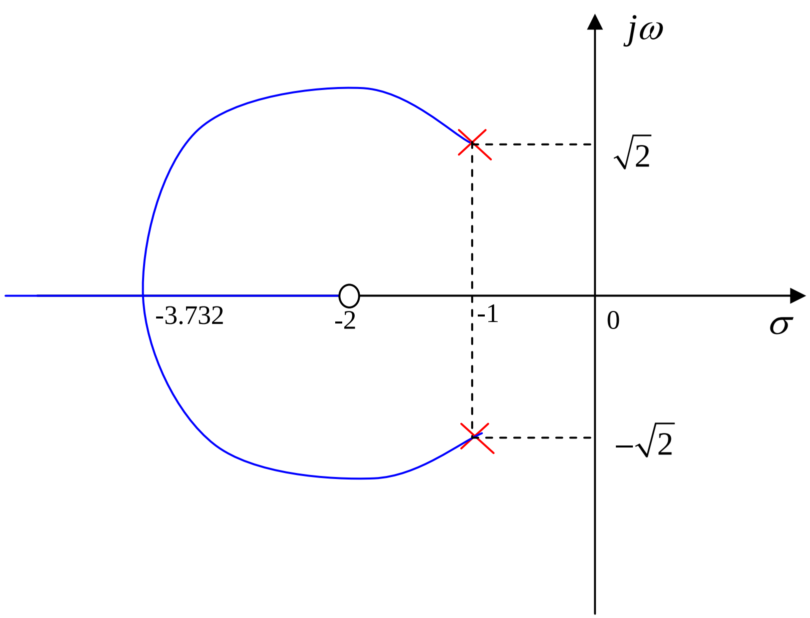


第四章 根轨迹法

4-4
解题步骤和4-2一样，增加计算出射角：

极点 $-1+\sqrt{2}j$ 的出射角为 $\varphi_p = \text{m}180^{\circ}(2k+1)+\tan^{-1}\sqrt{2}-90^{\circ} \approx 145^{\circ}$

极点 $-1-\sqrt{2}j$ 的出射角为 $\varphi_p = \text{m}180^{\circ}(2k+1)-\tan^{-1}\sqrt{2}+90^{\circ} \approx 215^{\circ}$

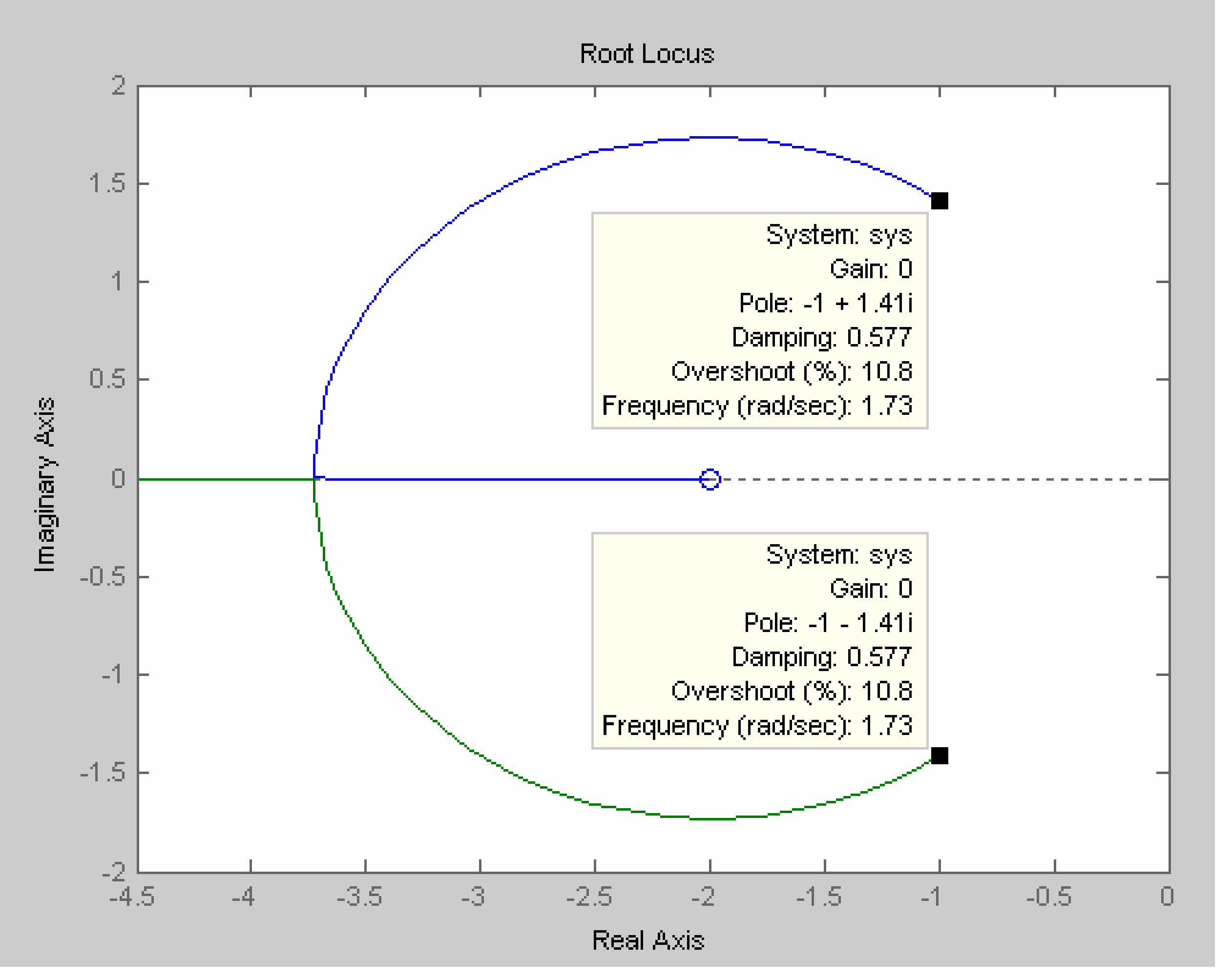


在极点 $-1\pm\sqrt{2}j$ 的阻尼比为0.577，显然阻尼比为0.5的相应闭环极点和K值不存在。

第四章 根轨迹法

Matlab实现

```
%K(s+2)/(s^2+2s+3)
n=[1 2];
d=[1 2 3];
rlocus(n,d)
```



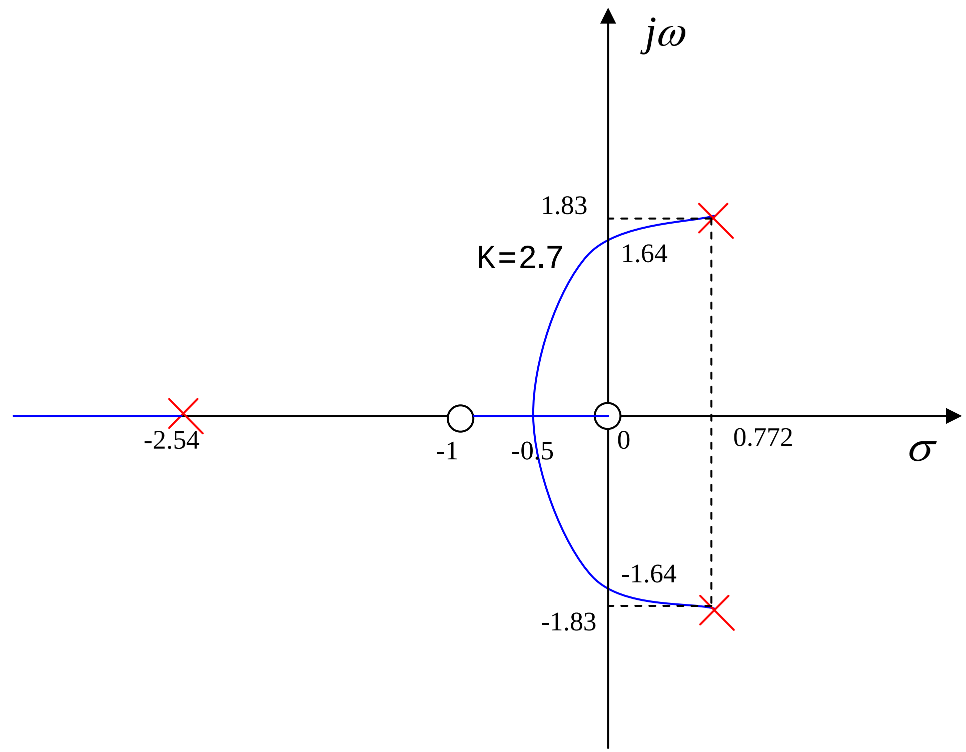
第四章 根轨迹法

4-7

系统的特征方程 $10 + s(s+1)(s+a) = 0$

得到： $1 + \dfrac{(s^2 + s)a}{s^3 + s^2 + 10} = 0$

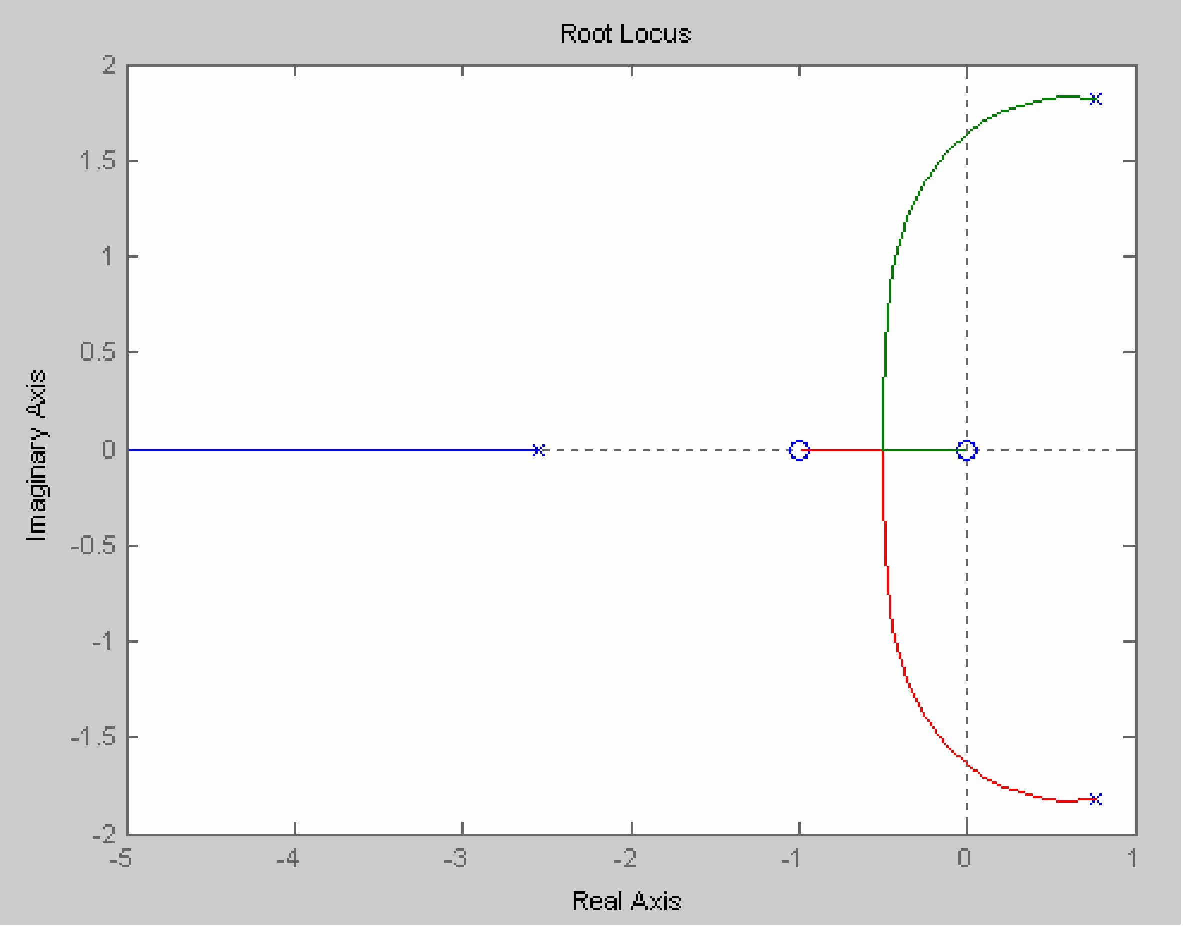
类似求 $G'(s) = \dfrac{(s^2 + s)K}{s^3 + s^2 + 10}$ 的单位负反馈系统的根轨迹，解题步骤和4-2一样，其中K=a。



第四章 根轨迹法

Matlab实现

```
%a(s^2+s)/(s^3+s^2+10)
n=[1 1 0];
d=[1 1 0 10];
rlocus(n,d)
```



第四章 根轨迹法

4-8

内环为正反馈，$G(s)=\dfrac{K}{(s^2+0.3s+1)(s+2)}=\dfrac{K}{(s+0.15-0.9887j)(s+0.15+0.9887j)(s+2)}$

（1）开环极点：$-0.15\pm0.9887j,-2$

（2）实轴上根轨迹为-2到+∞

（3）渐近线 $\alpha=\dfrac{\pm180^{o}(2k)}{3}$ 得到 ±120°

$$\sigma_{\alpha}=\frac{-0.3-2}{3}=-0.767$$

（4）会合点：-0.5333，分离点：-1

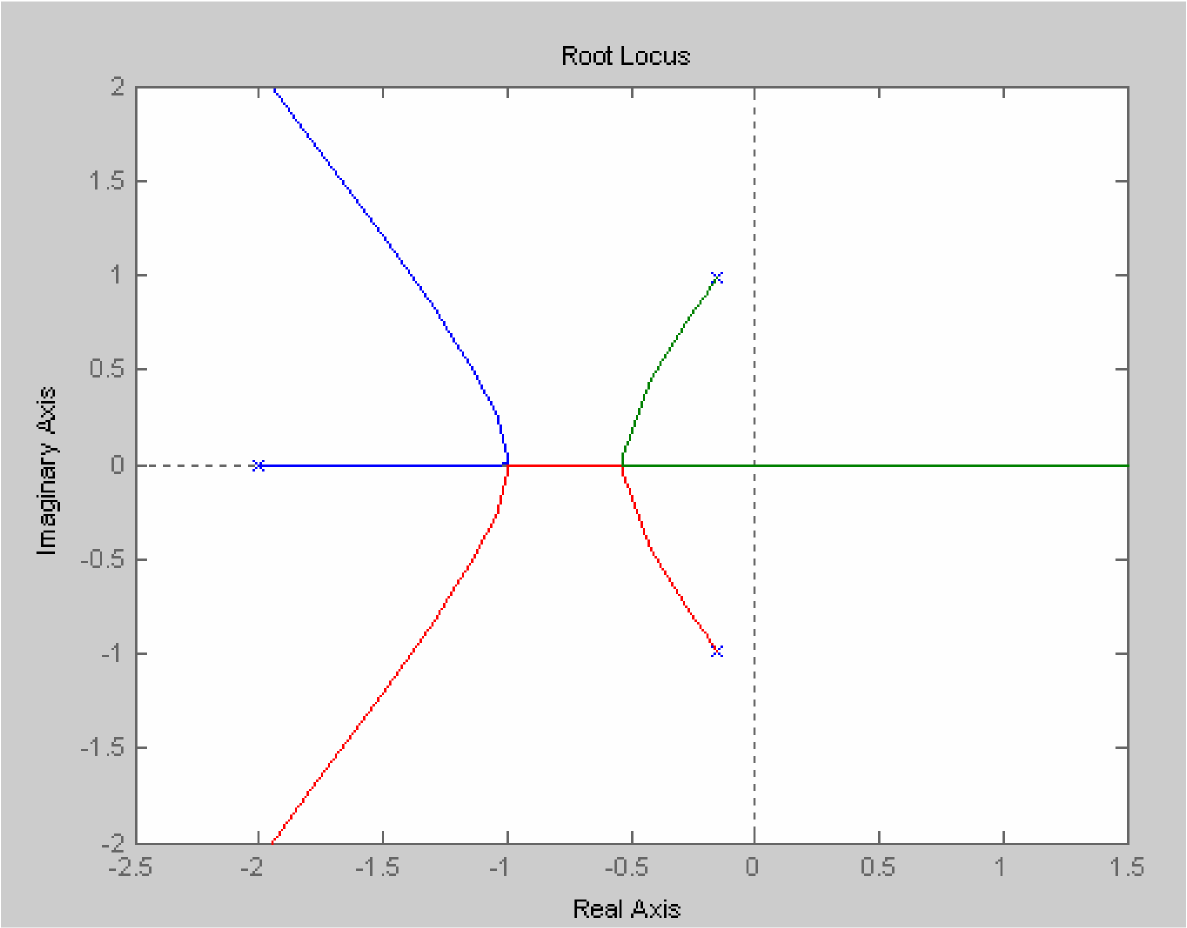
（5）与虚轴没有交点

当K=1时，内环闭环主导极点为：1.706，-0.297±0.706j

第四章 根轨迹法

Matlab实现

```
n=[-1];   %  正反馈
d=conv([1 0.3 1],[1 2]);
rlocus(n,d)
```



第四章 根轨迹法

4-9

由 $$\frac{dK}{ds}=[-\frac{s^2(s+1)}{s+a}]'=\frac{2s^3+(3a+1)s^2+2as}{(s+a)^2}=0$$

得到 $$s[2s^2+(3a+1)s+2a]=0$$

（1）当a≠0时，s=0为根轨迹的分离点

（2）系统具有1个分离点（即s=0）时，

$$\Delta=(3a+1)^2-4\times2\times2a<0$$

即 $$\frac{1}{9}<a<1$$

（3）系统具有2个分离点（包括s=0）时

$$\Delta=(3a+1)^2-4\times2\times2a=0$$

即 $$a=\frac{1}{9},a=1$$

若a=1则G(s)零极点抵消，变成K/s²，其根轨迹只有一个（s＝0）分

第四章 根轨迹法

（4）系统具有3个（包括s=0）分离点时，

$$\Delta=(3a+1)^2-4\times2\times2a>0$$

即 $a<\dfrac{1}{9}, a>1$

对a<1/9，因前提是a≠0，所以分成0<a<1/9和a<0分析：

显然，0<a<1/9时系统是具有3个分离点，但是a<0时，系统具有正的零点，根据作图可以发现，实际只有2个分离点。

对a>1，因零点-a在极点-1左边，根据作图可以发现，实际只有1个分离点。

（5）a=0时G(s)=K/s(s+1)，没有零点，根轨迹只有1个分离点

第四章 根轨迹法

综上所述，系统根轨迹分离点情况分为：

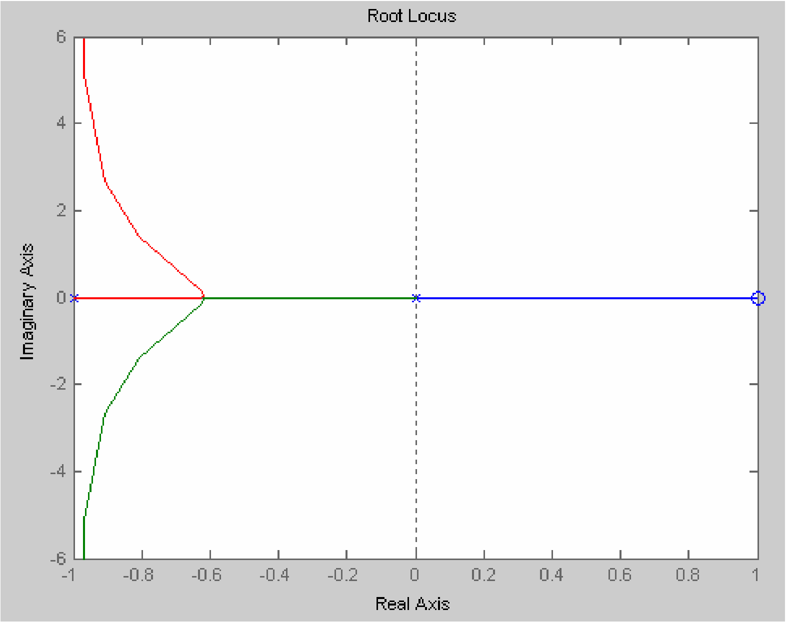
1个分离点：a=0，a>1/9

2个分离点：a<0，a=1/9

3个分离点：0<a<1/9

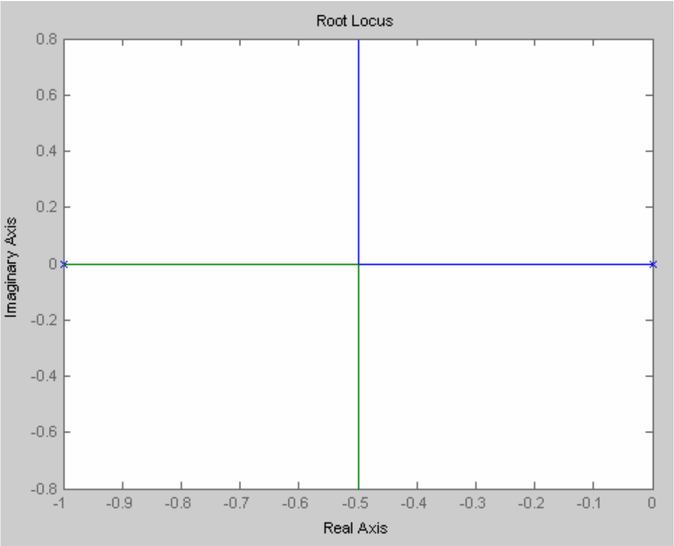
以下用matlab程序验证：

```
% ---- (1) a=-1  (a<0) ----  %
z=[1];p=[0 0 -1];k=1;
g=zpk(z,p,k);
figure(1);
rlocus(g);
```

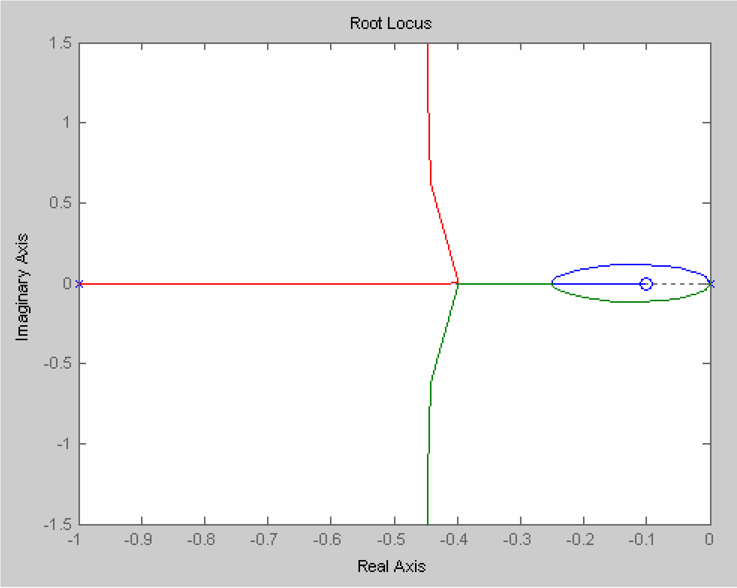


第四章 根轨迹法

```
% ---- (2) a=0 ----  %
z=[];p=[0 -1];k=1;
g=zpk(z,p,k);
figure(2);
rlocus(g);
```

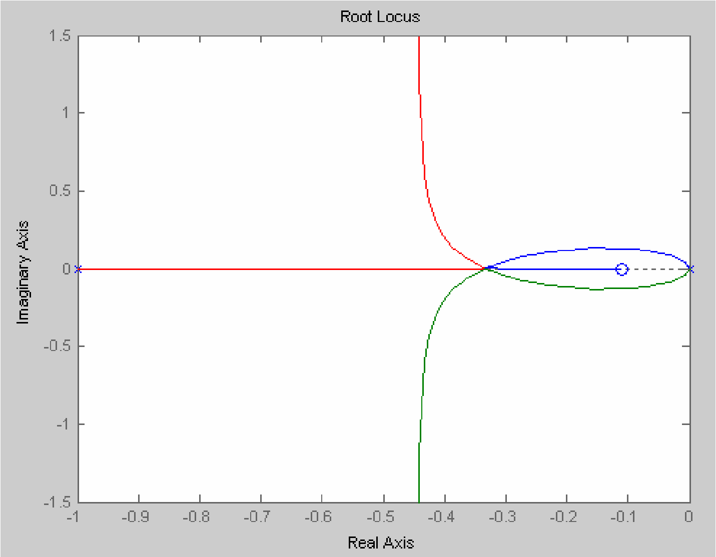



```
% ---- (3) a=0.1  (0<a<1/9) ----  %
z=[-0.1];p=[0 0 -1];k=1;
g=zpk(z,p,k);
figure(3);
rlocus(g);
```

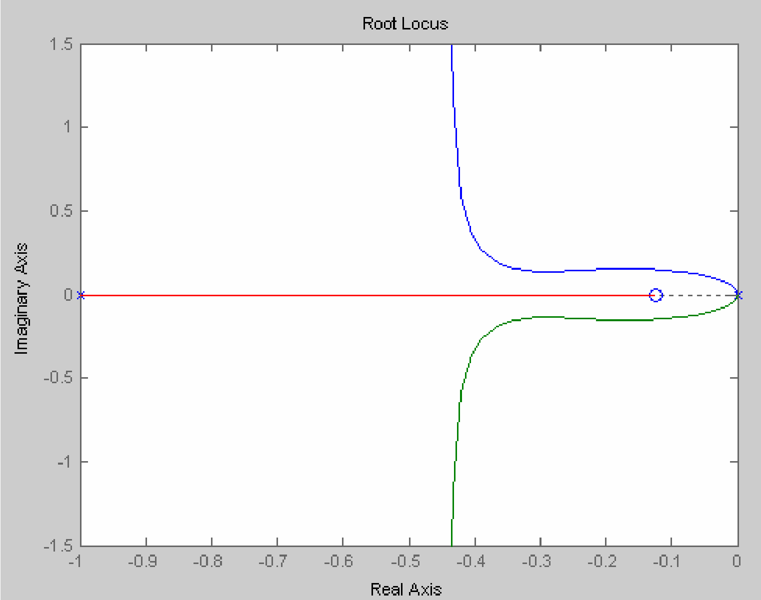


第四章 根轨迹法

```
% ---- (4) a=1/9  ----  %
z=[-1/9];p=[0 0 -1];k=1;
g=zpk(z,p,k);
figure(4);
rlocus(g);
```

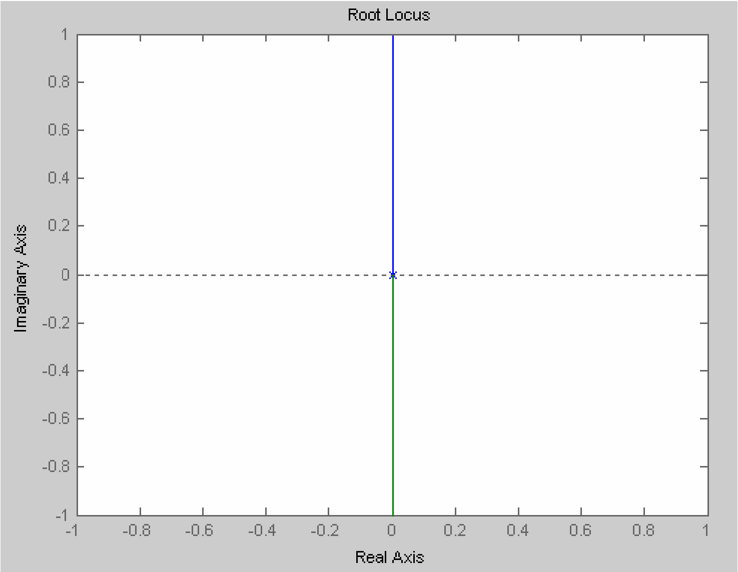



```
% ---- (5) a=0.125  (1/9<a<1) ----  %
z=[-0.125];p=[0 0 -1];k=1;
g=zpk(z,p,k);
figure(5);
rlocus(g);
```

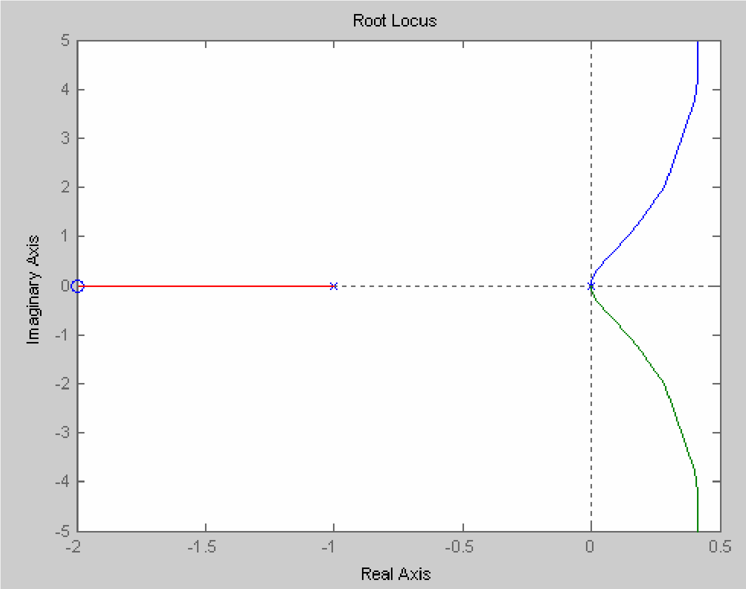


第四章 根轨迹法

```
% ---- (6) a=1 ----  %
z=[];p=[0 0];k=1;
g=zpk(z,p,k);
figure(6);
rlocus(g);
```




```
% ---- (7) a=2  (a>1) ----  %
z=[-2];p=[0 0 -1];k=1;
g=zpk(z,p,k);
figure(7);
rlocus(g);
```



第四章 根轨迹法

练习1 概念

偶极子：距离比她们本身模小一个数量级以上的一对闭环零极点（可相消）

主导极点：靠近虚轴而附近又没有闭环零点的闭环极点（实部比它大2-3倍）

稳定性：所有闭环极点在左半平面

快速性：闭环极点远离虚轴，极点间距离大，零点靠近极点（主导极点）

平稳性：复数极点位于与负实轴±45度处

第四章 根轨迹法

练习2 用主导极点近似高阶系统

原系统闭环传递函数ϕ（S）=32（S+6）/$S^3+8S^2+20S+48$

则有一对主导极点$s_{1,2}=-1\pm j2.65$，

其闭环增益=32×6/48=4，

近似系统的闭环特征方程为（$S-s_1$）（$S-s_2$）=0

即 $S^2+2S+8=0$

∵二阶系统的通式是ϕ（S）=$K\omega_n^2/(S^2+2\varepsilon\omega_n+\omega_n^2)$

∴近似系统ϕ（S）=K×8/（S^2+2S+8）

为使系统闭环增益保持不变，

有8K/8=4 K=4

∴近似系统ϕ（S）=32/（S^2+2S+8）

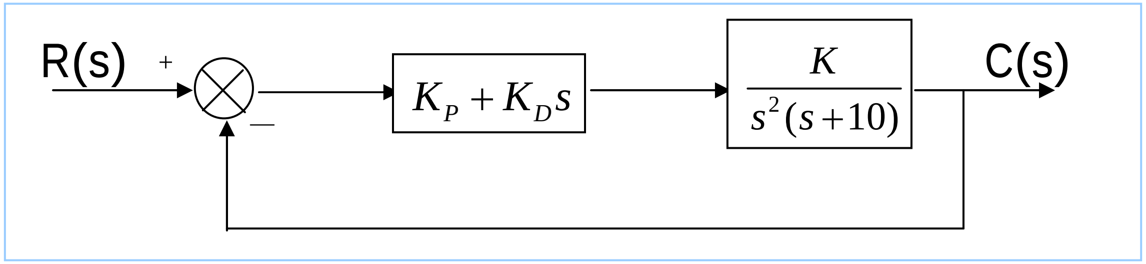
第四章　根轨迹法

习题练习3

有闭环控制系统如图所示，其中校正环节的传递函数为$G_c=K_P+K_Ds$。$K=10$时，要求校正后闭环系统的超调量$\sigma_p=16\%$，调整时间$t_s=4s$（2%允许误差）。

（1）试用根轨迹法确定校正参数K_P和K_D；

（2）确定K_P和K_D后，绘制K从$0\to+\infty$的根轨迹图。



第四章 根轨迹法

解：（1）由 $\sigma_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 16\%$ 得 $\xi = 0.5$

由 $t_s = \dfrac{4}{\omega_n \xi} = 4$ 得 $\omega_n = 2$

由 $-\xi\omega_n = -1, \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 1.73$ 得 $s_{1,2} = -1 \pm j1.73$

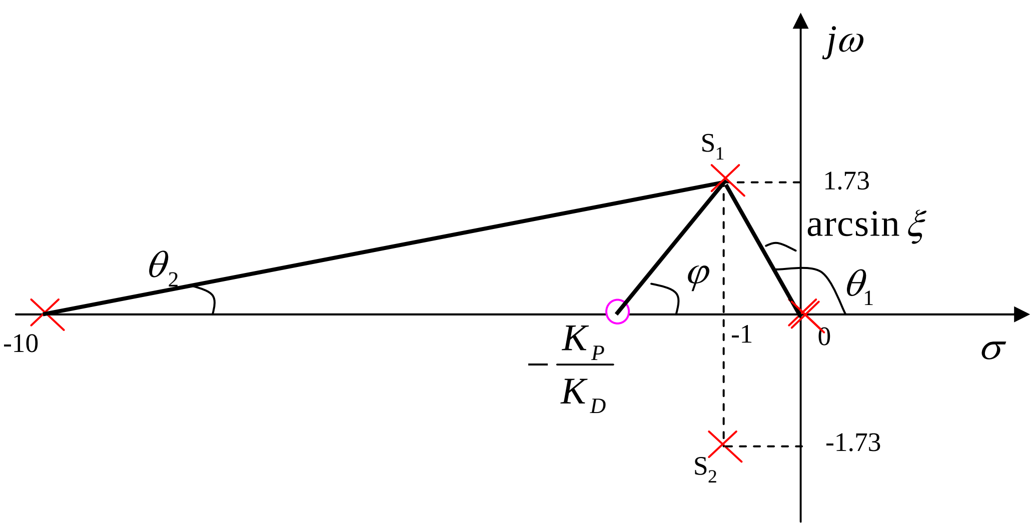
因为 $\arcsin\xi = 30^{\circ}$

故 $\theta_1 = 120^{\circ}$

$$\theta_2 = \arctan\frac{1.73}{10-1} = 10.88^{\circ}$$

校正网络提供的相角为

$$\varphi = 2\times 120^{\circ} + 10.88^{\circ} - 180^{\circ} = 70.88^{\circ}$$



第四章 根轨迹法

因为 $\tan\varphi = 2.88 = \dfrac{1.73}{\dfrac{K_P}{K_D} - 1}$

得 $\dfrac{K_P}{K_D} = 1.6$

由幅值条件 $\dfrac{|s_1 + \dfrac{K_P}{K_D}| \times 10K_D}{|s_1|^2 |s_1 + 10|}\Big|_{s_1 = -1 + j1.73} = 1$

得 $K_D = 2, K_P = 1.6K_D = 3.2$

设第三个根为s_3，由特征方程 $s^3 + 10s^2 + 10K_D s + 10K_P = 0$

代入 $s_{1,2} = -1 \pm j1.73$ 得s_1=-8

故s_1，s_2为系统的闭环主导极点

第四章 根轨迹法

（2）画系统的根轨迹

开环极点：0，0，-10，开环零点：－1.6

渐近线与实轴的交点：$\sigma_{\alpha}=\dfrac{-10+1.6}{3-1}=-4.2$

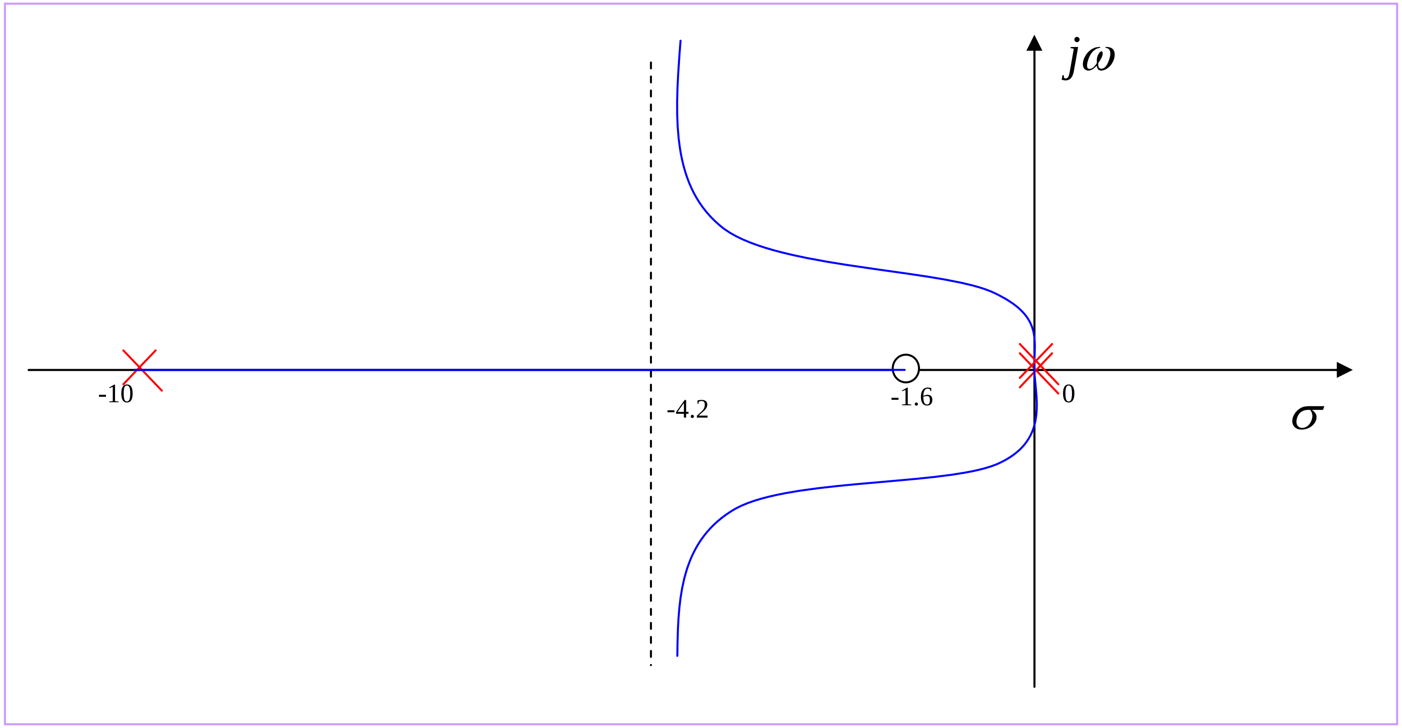
渐近线与实轴的夹角：±90°

分离点与会合点：$\dfrac{d}{ds}[\dfrac{s^2(s+10)}{(s+1.6)}]=\dfrac{2s^2+24.8s+32}{(s+1.6)^2}=0$

即 $2s^2+24.8s+32=0$

该方程无实数解，故无分离点与会合点

第四章 根轨迹法



第五章 频率响应法

一 习题答案

5-2 $$G(j\omega)=\frac{36}{(j\omega+4)(j\omega+9)}=\frac{36}{\sqrt{(36-\omega^2)^2+(13\omega)^2}}e^{-\tan^{-1}\frac{13\omega}{36-\omega^2}}$$

5-3

(a) $$G(s)=\frac{10}{1+\frac{s}{10}}=\frac{10}{1+0.1s}=\frac{100}{s+10}$$

(b) $$G(s)=\frac{0.1s}{1+\frac{s}{50}}=\frac{0.1s}{1+0.02s}=\frac{5s}{s+50}$$

(c) $$G(s)=\frac{50}{s(1+\frac{s}{100})}=\frac{50}{s(1+0.01s)}=\frac{5000}{s(s+100)}$$

(d) $$G(s)=\frac{100}{s(1+\frac{s}{0.01})(1+\frac{s}{20})}=\frac{100}{s(1+100s)(1+0.05s)}=\frac{20}{s(s+0.01)(s+20)}$$

第五章 频率响应法

(e) $-20\lg\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=3$ 得 $\xi=0.383$

$$\omega_n=\frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\xi^2}}=\frac{630}{\sqrt{1-2\times0.383^2}}=749$$ 易得 $K=10$

$$G(s)=\frac{10}{1+\frac{0.766}{749}s+\frac{s^2}{749^2}}$$

(f) $-20\lg\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=4.85$ 得 $\xi=0.3$

$$\omega_n=\frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\xi^2}}=\frac{45.3}{\sqrt{1-2\times0.3^2}}=50$$

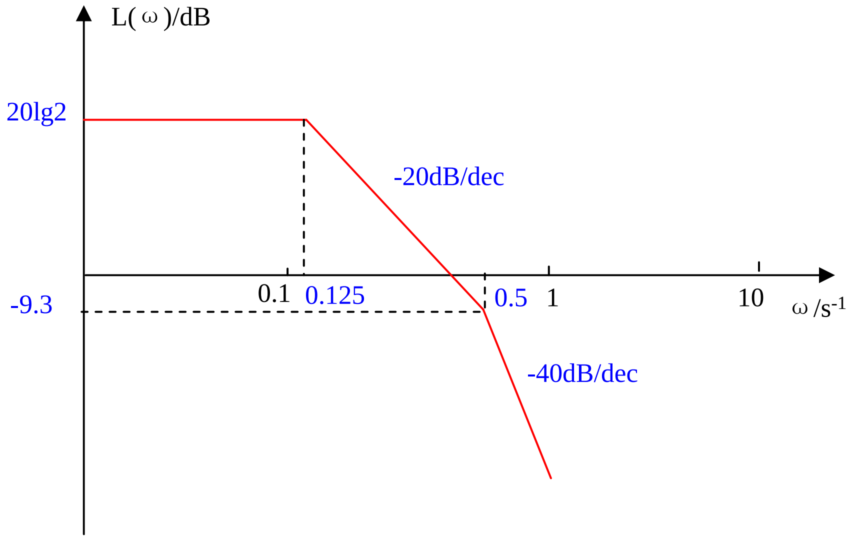
$$G(s)=\frac{100}{s(1+\frac{0.6}{50}s+\frac{s^2}{50^2})}$$

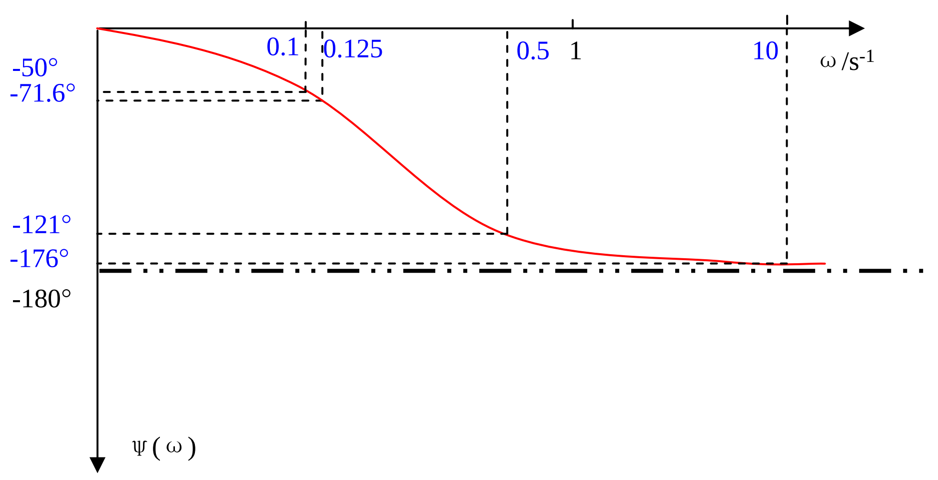
第五章 频率响应法

5-5

(1) $$L(\omega)=20\lg 2-20\lg\sqrt{1+(2\omega)^2}-20\lg\sqrt{1+(8\omega)^2}$$

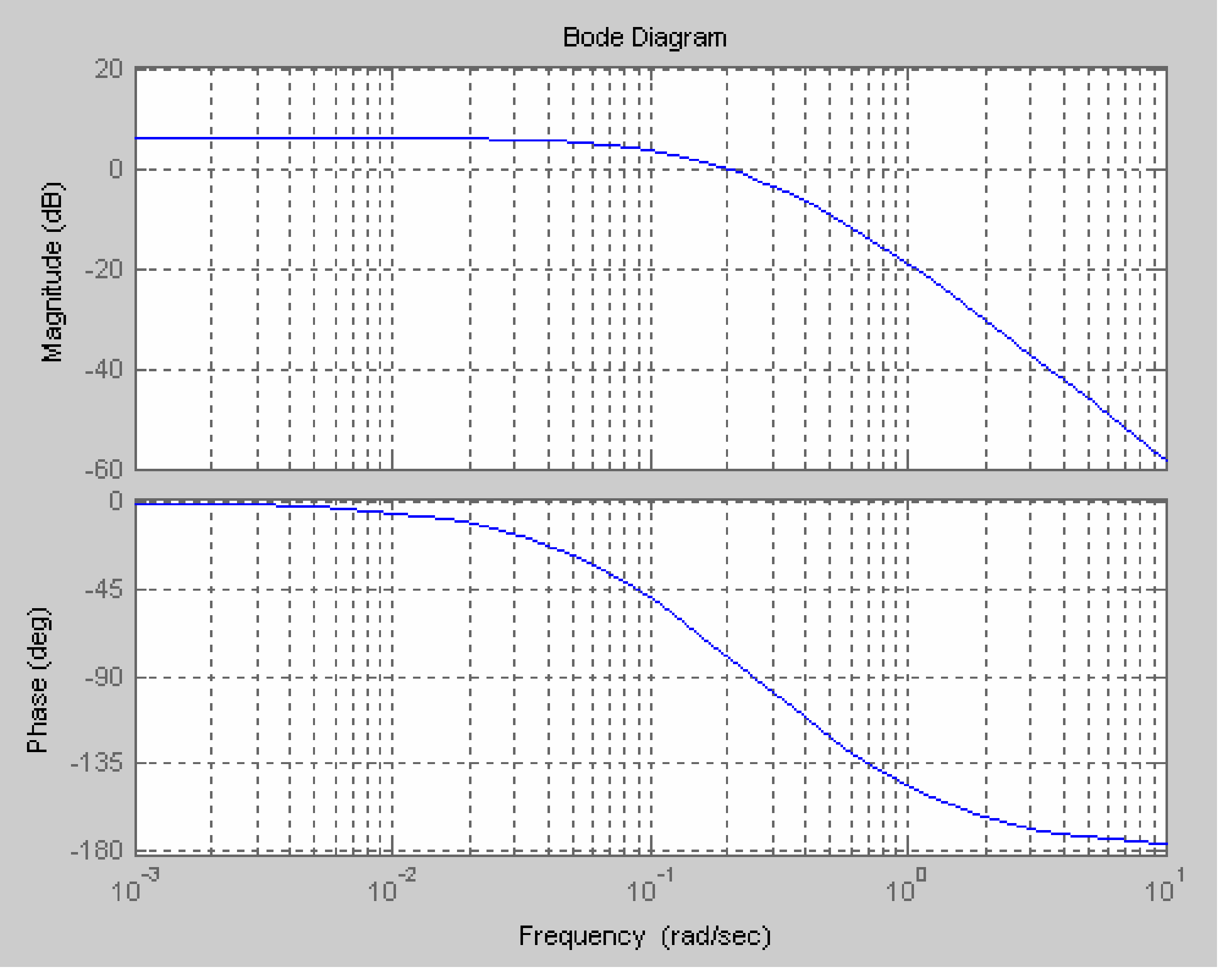
$$\varphi(\omega)=0-\tan^{-1}(2\omega)-\tan^{-1}(8\omega)$$





第五章 频率响应法

```
bode(tf(2,conv([2,1],[8,1])));grid on;
```



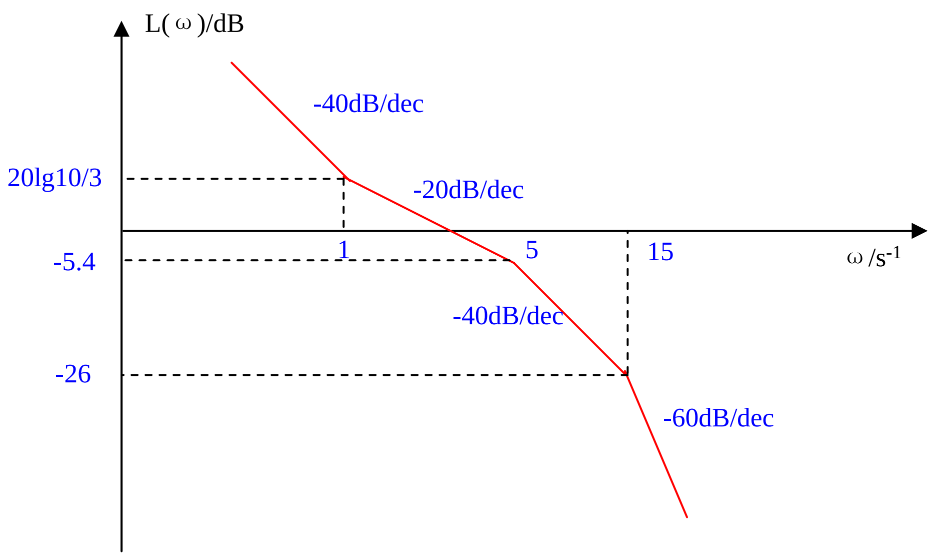
第五章 频率响应法

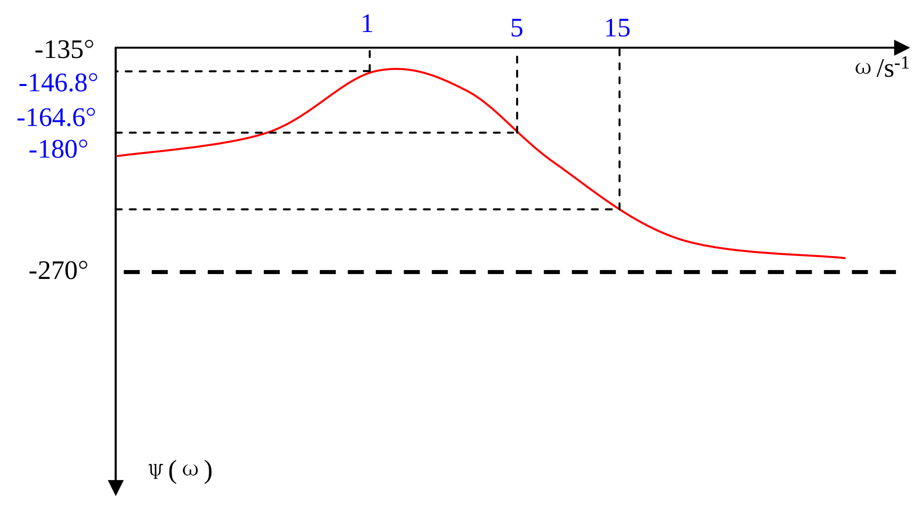
(3)

$$G_0(\omega)=\frac{\frac{10}{3}(1+j\omega)}{(j\omega)^2(1+0.2j\omega)(1+\frac{1}{15}j\omega)}$$

$$L(\omega)=20\lg\frac{10}{3}+20\lg\sqrt{1+\omega^2}-40\lg\omega-20\lg\sqrt{1+(0.2\omega)^2}-20\lg\sqrt{1+(\frac{1}{15}\omega)^2}$$

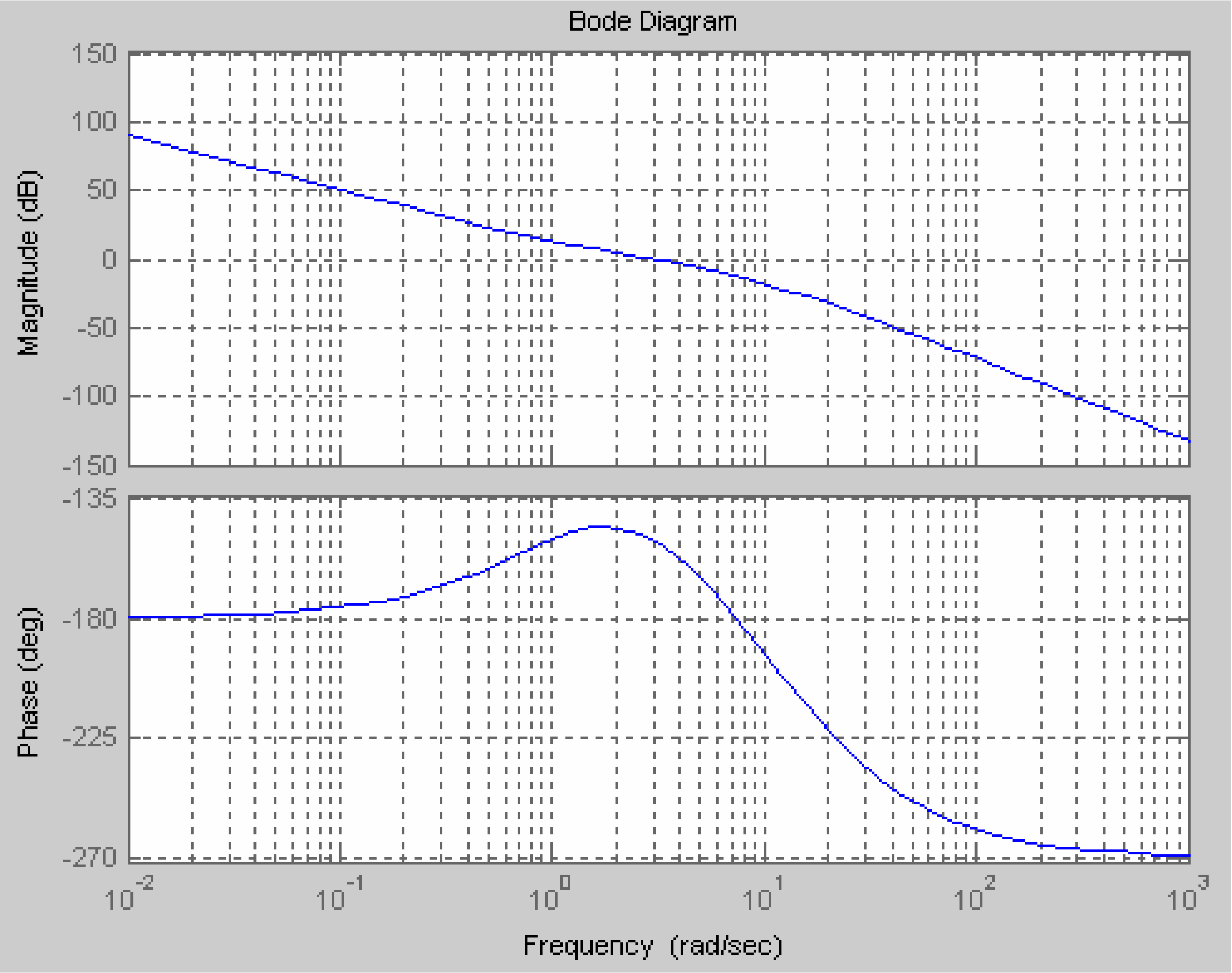
$$\varphi(\omega)=0+\tan^{-1}\omega-180^{\circ}-\tan^{-1}(0.2\omega)-\tan^{-1}(\frac{1}{15}\omega)$$





第五章 频率响应法

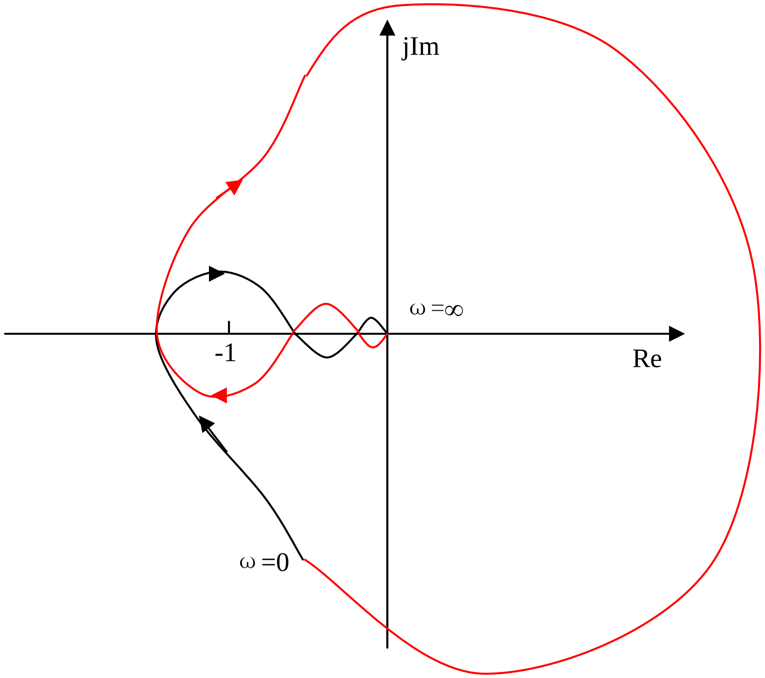
bode(zpk([-1],[0,0,-5,-15],250));grid on;



第五章 频率响应法

5-6

(a)



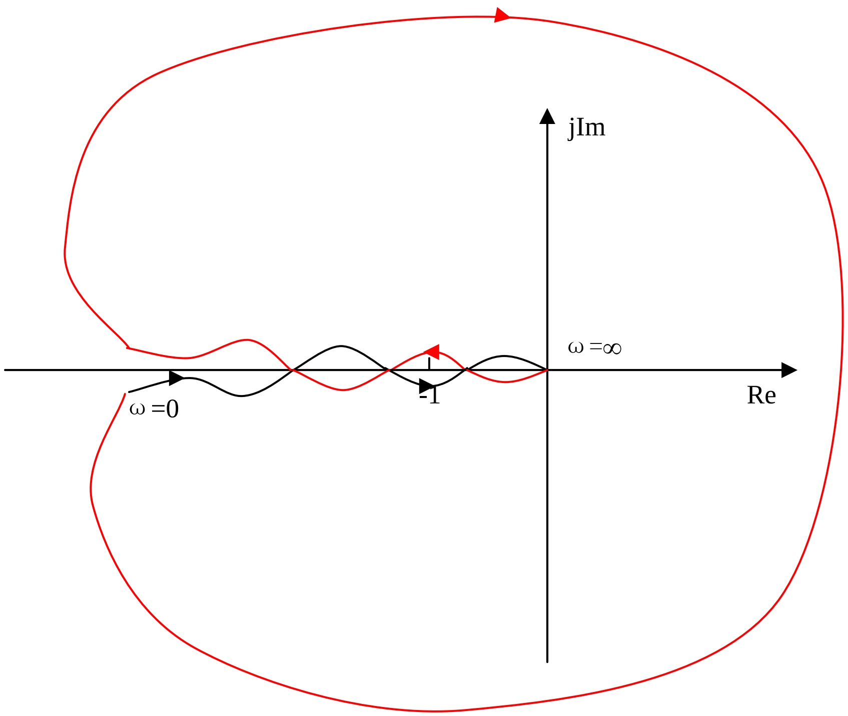
N=2，P=0

Z=N+P=2

故闭环系统不稳定

第五章 频率响应法

(b)



N=0，P=0

Z=N+P=0

故闭环系统稳定

第五章 频率响应法

5-8

(1) $20\lg K - 20\lg 0.001 = 80$ 得 $K = 10$

$$G(s) = \frac{10(1+10s)}{s(1+100s)(1+0.2s)}$$

(2) 系统稳定

（routh判据；闭环极点分析；奈式图分析；bode图分析）

(3) I型系统在斜坡信号r(t)=t下系统静态误差$e_{ss}=1/K_v$(P63)

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{10(1+10s)}{(1+100s)(1+0.2s)} = 10$$

故 $e_{ss} = 0.1$

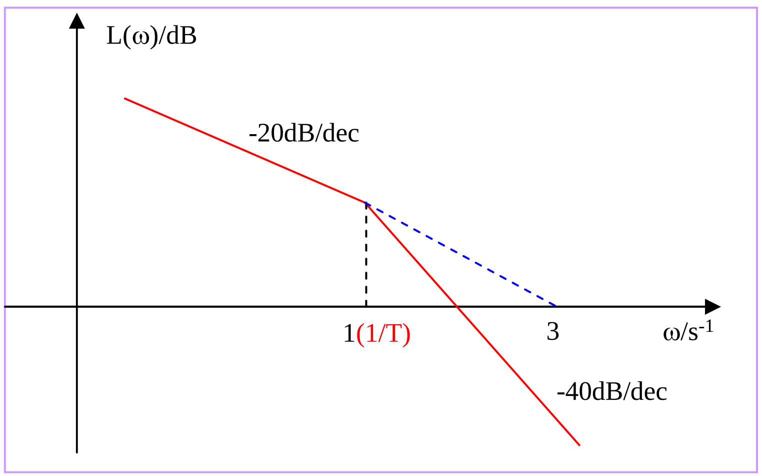
第五章 频率响应法

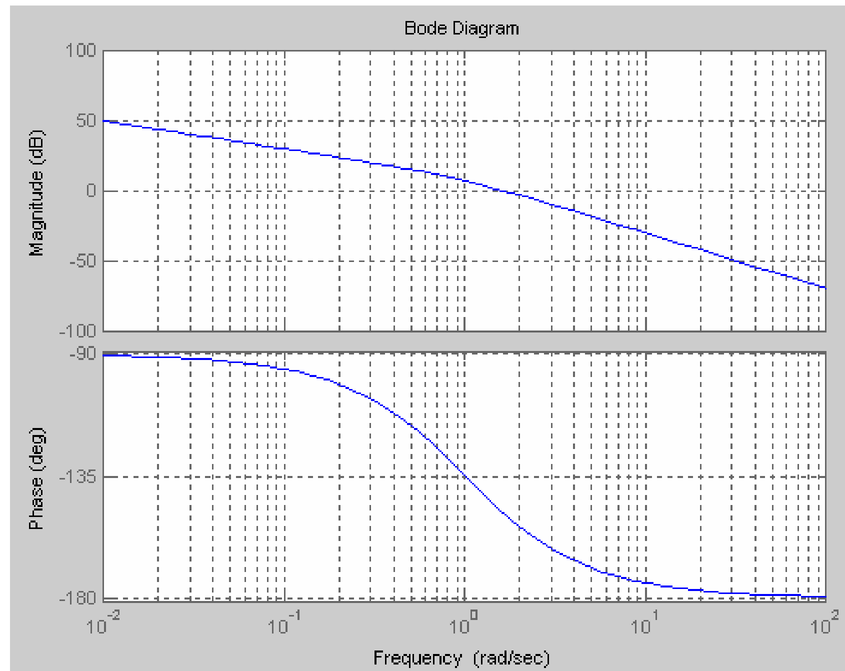
5-9

$$G(s)H(s)=\frac{3}{s(Ts+1)}$$

(例如T=1)

T≥1/3时





$$20\lg 3-20\lg\omega_c-20\lg\sqrt{T^2\omega_c^2+1}=0$$

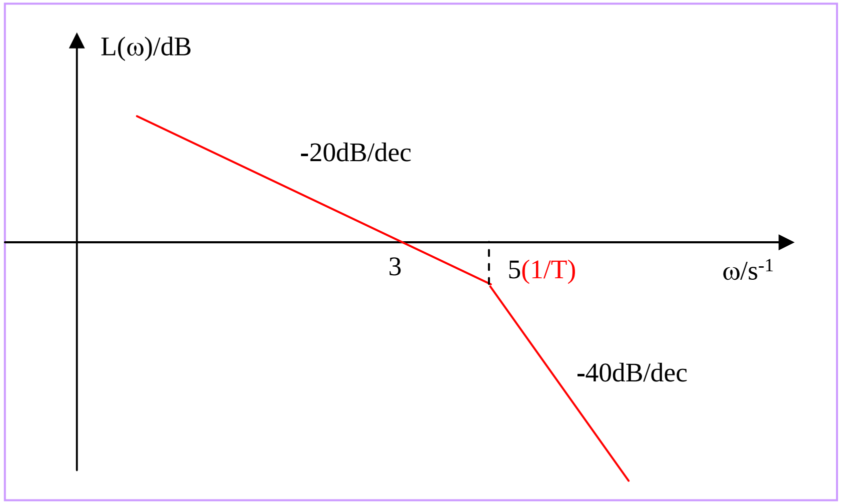
$$\omega_c=\frac{1}{T}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+36T^2}}{2}}$$

$$\gamma=180^{\mathrm{o}}-90^{\mathrm{o}}-\tan^{-1}T\omega_c$$

$$\gamma\,|_{T=1}\approx 35^{\mathrm{o}}$$

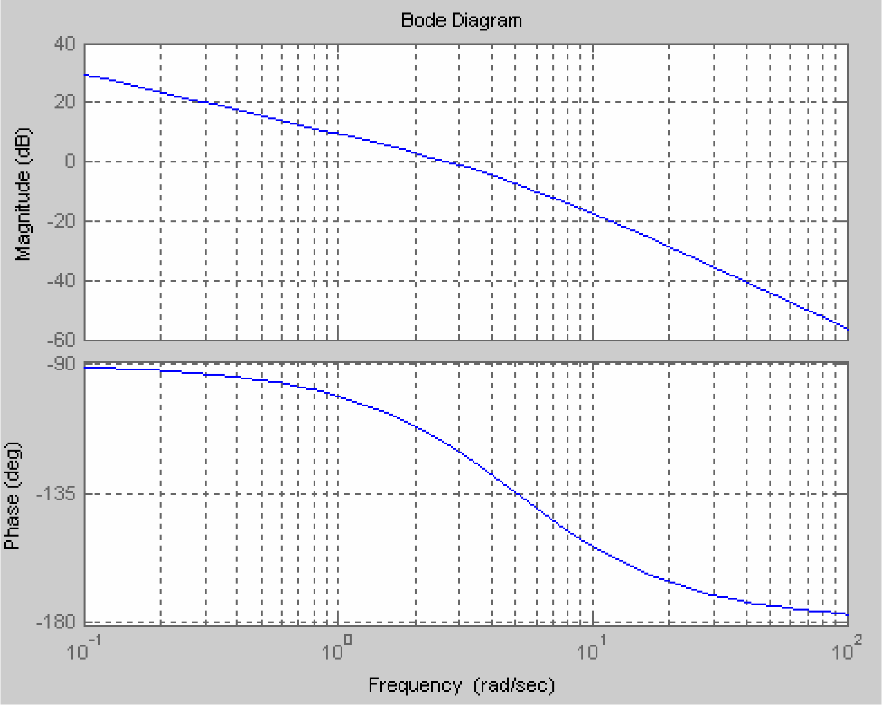
第五章 频率响应法

T<1/3时



$$\gamma = 180^{\circ} - 90^{\circ} - \tan^{-1} 3T$$

(例如T=1/5)



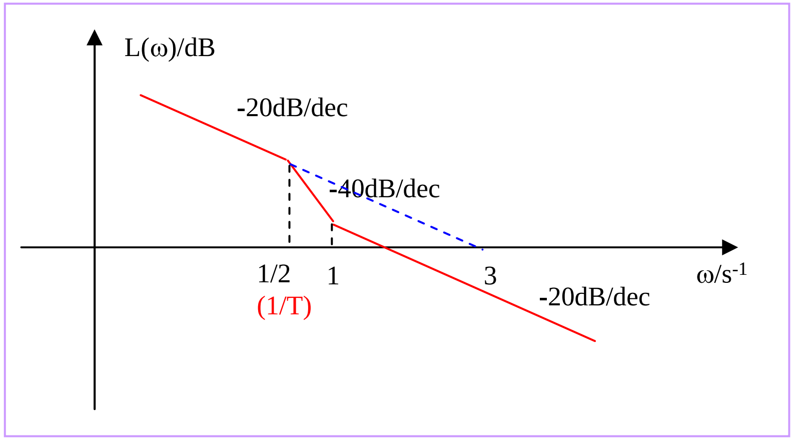
$$\gamma\big|_{T=1/5} \approx 60^{\circ}$$

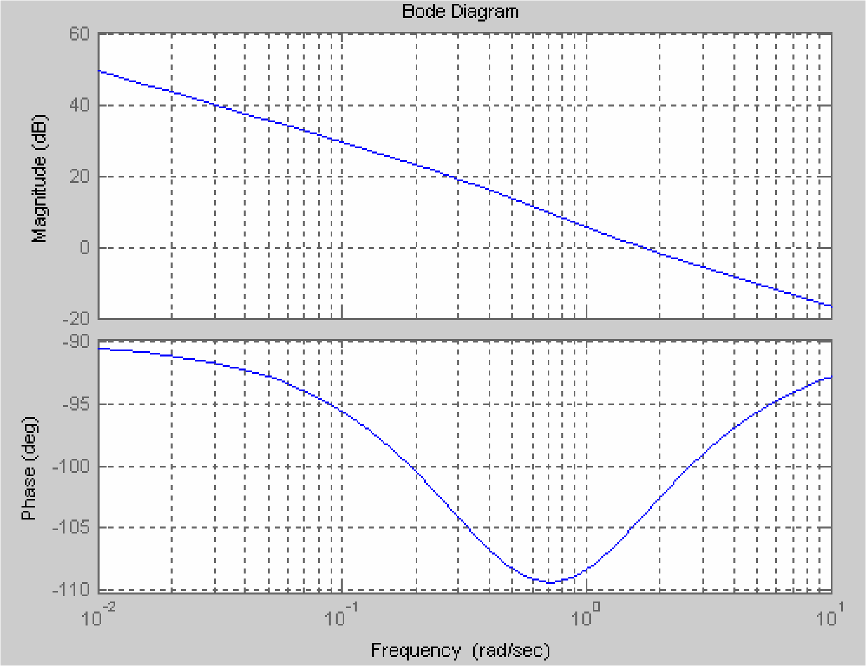
第五章 频率响应法

$$G(s)H(s)=\frac{3(s+1)}{s(Ts+1)}$$

T≥1时

(例如T=2)





$$20\lg 3+20\lg\sqrt{\omega_c^2+1}-20\lg\omega_c-20\lg\sqrt{T^2\omega_c^2+1}=0$$

$$\omega_c=\frac{1}{T}\sqrt{\frac{8+\sqrt{64+36T^2}}{2}}$$

$$\gamma=180^{\circ}+\tan^{-1}\omega_c-90^{\circ}-\tan^{-1}T\omega_c$$

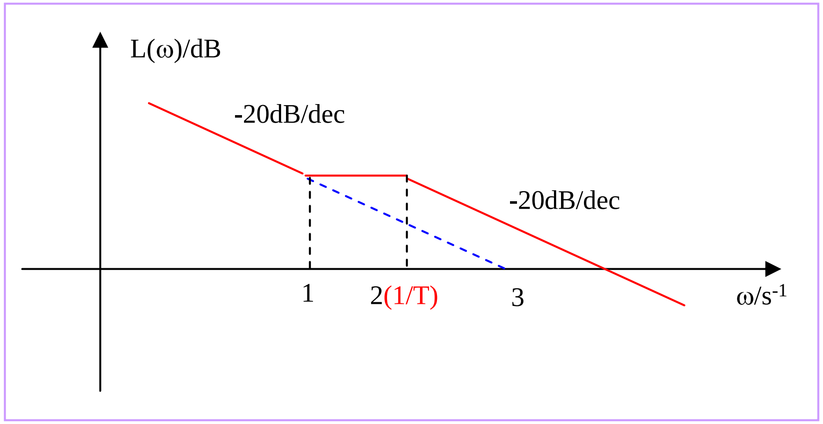
$$\gamma\,|_{T=1}\approx 90^{\circ}$$

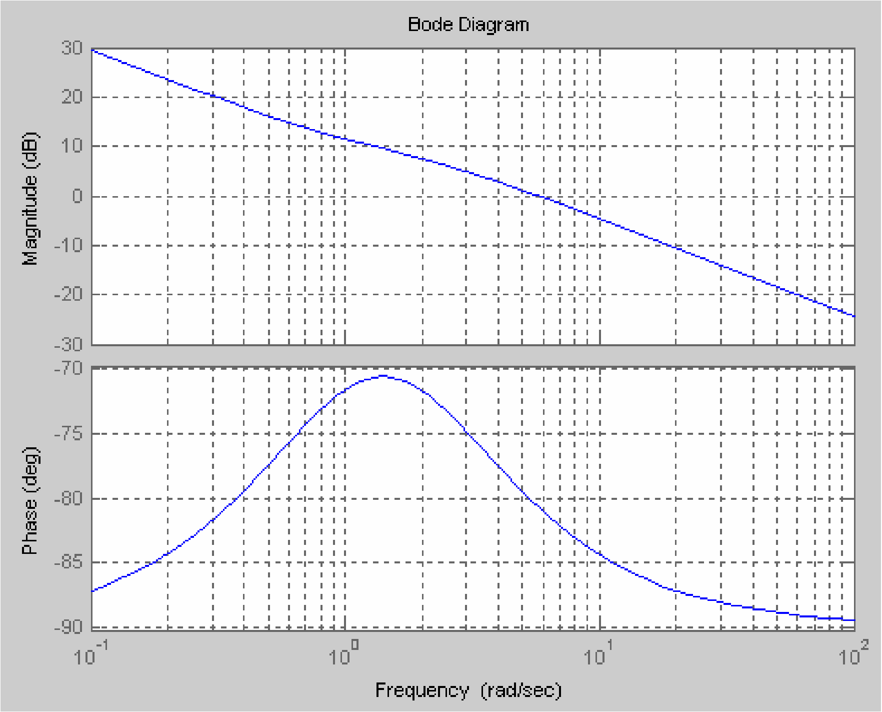
$$\gamma\,|_{T=2}\approx 75.77^{\circ}$$

第五章 频率响应法

(例如T=1/2)

1/3≤T<1时





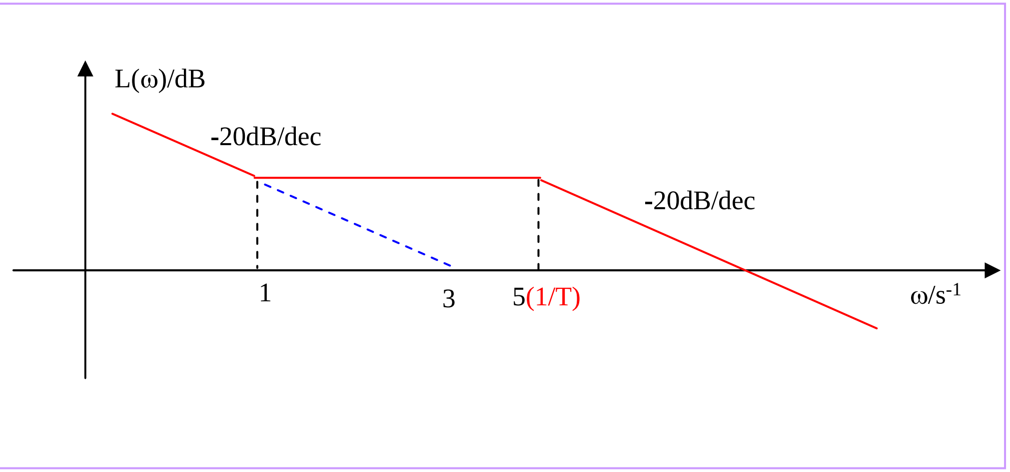
$\gamma|_{T=1/2} \approx 99^{o}$ （加上微分环节）

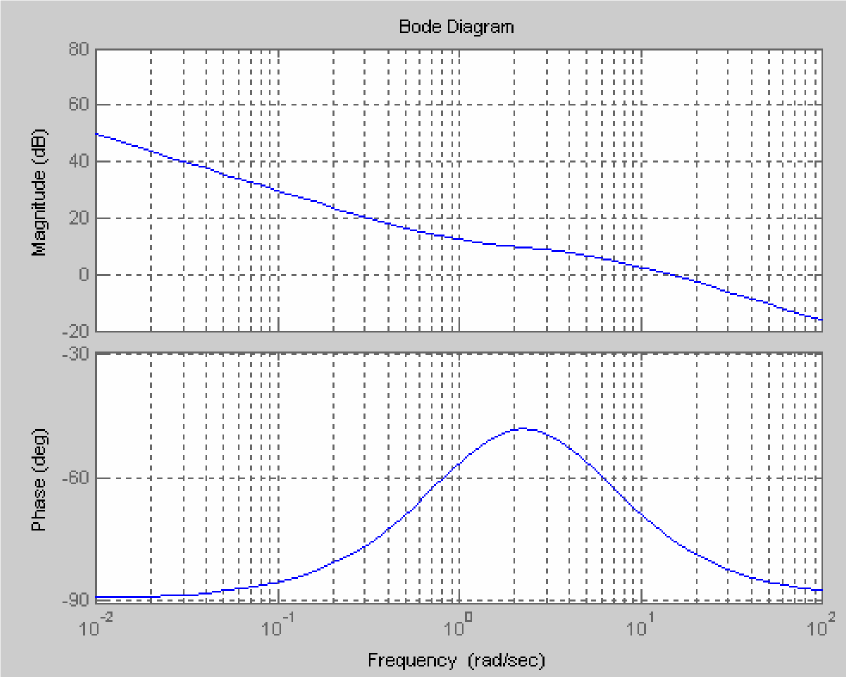
$\gamma|_{T=1/2} \approx 43.85^{o}$ （未加微分环节）

第五章 频率响应法

(例如T=1/5)

T<1/3时





$$\gamma\,|_{T=1/5}\approx 105.4^{\circ}$$

第五章 频率响应法

5-11

(1)

$$\gamma = 180^{\circ} + \tan^{-1}\alpha\omega_c - 180^{\circ} = \tan^{-1}\alpha\omega_c = 45^{\circ}$$

$$\alpha\omega_c = 1$$

$$20\lg\sqrt{\alpha^2\omega_c^2 + 1} - 40\lg\omega_c = 0$$

$$\alpha = 2^{-\frac{1}{4}} = 0.841$$

(2)

$$\gamma = 180^{\circ} - 3\tan^{-1}0.01\omega_c = 45^{\circ} \qquad \tan^{-1}0.01\omega_c = 45$$

$$\omega_c = 100$$

$$20\lg K - 60\lg\sqrt{(0.01\omega_c)^2 + 1} = 0$$

$$K = 2^{\frac{3}{2}} = 2.828$$

第五章 频率响应法

5-13

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{40K}{s(s+2)(s+20)} = K$$

因为$K_v>5$，故K>5

$$\varphi(\omega_g) = -90^{\circ} - \tan^{-1}\frac{\omega_g}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega_g}{20} = -180^{\circ} \qquad \omega_g = 2\sqrt{10}$$

$$L(\omega_g) = 20\lg K - 20\lg\omega_g - 20\lg\sqrt{(\frac{\omega_g}{2})^2+1} - 20\lg\sqrt{(\frac{\omega_g}{20})^2+1}$$

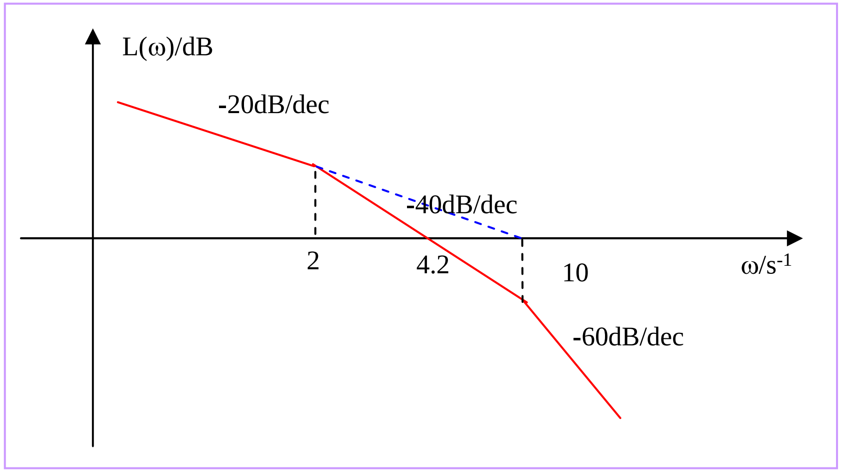
$$= 20\lg K - 20\lg 22$$

$$20\lg 22 - 20\lg K \geq 6 = 20\lg 2 \qquad K \leq 11$$

综上得K的取值范围：$5<K\leq 11$

第六章 自动控制系统设计

6-3



$$20\lg 10 - 20\lg\omega_c - 20\lg\sqrt{(\frac{\omega_c}{2})^2+1} - 20\lg\sqrt{(\frac{\omega_c}{10})^2+1} = 0$$

$$\omega_c = 4.2544$$

$$\gamma = 180^o - 90^o - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{10} = 2.1315^o$$

$$\frac{10\times 0.23\omega_c}{\omega_c\times 0.5\omega_c} = 1$$

$$\omega_c = 4.6$$

$$\gamma = 180^o + \tan^{-1}0.23\omega_c - 90^o - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{10} - \tan^{-1}0.023\omega_c = 39.36^o$$

第六章 自动控制系统设计

6-4 $$\phi = -180^{o} + 40^{o} + 12^{o} = -128^{o} = -90^{o} - \arctan\omega_c - \arctan 0.2\omega_c$$

$$\omega_c = 0.6$$

$$L(\omega_c) = 20\lg 8 - 20\lg 0.6 - 20\lg\sqrt{1+0.6^2}$$

$$= 20\lg\sqrt{1+(0.2\times 0.6)^2} = 20\lg 11 = 20\lg\beta$$

$$\beta = 11$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\beta T} = 0.01 \qquad \omega_2 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{5} = 0.12$$

$$G_c(s) = \frac{1+8.33s}{1+100s}$$

第六章 自动控制系统设计

6-5

$$G(s)=G_c(s)G_o(s)=\frac{20(s+0.15)(s+0.7)}{s(s+0.015)(s+2)(s+3)(s+7)}$$

令 $|G(j\omega)|=1$ $\omega_c=0.397$

$$\phi(\omega_c)=\arctan\frac{\omega_c}{0.15}+\arctan\frac{\omega_c}{0.7}-90^{\circ}-\arctan\frac{\omega_c}{0.015}-\arctan\frac{\omega_c}{2}-\arctan\frac{\omega_c}{3}-\arctan\frac{\omega_c}{T}$$

$$=101^{\circ}$$

$$\gamma=180^{\circ}+\phi(\omega_c)-\xi=180^{\circ}-101^{\circ}-4^{\circ}=75^{\circ}$$

$$\phi(\omega_g)=\arctan\frac{\omega_g}{0.15}+\arctan\frac{\omega_g}{0.7}-90^{\circ}-\arctan\frac{\omega_g}{0.015}-\arctan\frac{\omega_g}{2}-\arctan\frac{\omega_g}{3}-\arctan\frac{\omega_g}{7}$$

$$=180^{\circ}$$

$\omega_g=5.66$ $20\lg K_g=-L(\omega_g)=24.708dB$ 证毕

第六章 自动控制系统设计

6-6

$$G_0(s)=\frac{K}{s(1+s)(1+0.5s)} \qquad G_c(s)G_0(s)=\frac{K(1+s)}{s(1+100s)(1+s)(1+0.5s)}$$

从而 $$G_c(s)=\frac{(1+s)}{(1+100s)}$$

$$20\lg 5=20\lg K-20\lg 1 \qquad \therefore K=5$$

$$G_c(s)G_0(s)=\frac{5(1+s)}{s(1+100s)(1+s)(1+0.5s)}$$

第六章 自动控制系统设计

$$L(0.01)=20\lg 5-20\lg 0.01=20\lg 500$$

$$L(0.1)=20\lg 500-40(\lg 0.1-\lg 0.01)=20\lg 5$$

$$L(0.1)-20(\lg \omega_c-\lg 0.1)=0$$

$$\therefore \omega_c=0.5$$

$$\gamma=180^{\circ}+\tan^{-1}5-90^{\circ}-\tan^{-1}50-\tan^{-1}0.5-\tan^{-1}0.25=39.2^{\circ}$$

$$-90^{\circ}+\tan^{-1}10\omega-\tan^{-1}100\omega-\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}\frac{\omega}{2}=-180^{\circ}$$

$$\Rightarrow \omega_g=1.32$$

$$K_g=\frac{1}{|G_c(j\omega)G_0(j\omega)|}=\frac{1.32\times 132\times 1.65\times 1.20}{5\times 13.24}=5.2$$

第六章 自动控制系统设计

6-7 $$K=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{K}{s(s+1)}=2\Rightarrow K=2$$

$$\because \xi=0.5, t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=2 \qquad \therefore \xi=0.5, \omega_n=4$$

$$s_d=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-2\pm j2\sqrt{3}$$

$$u=|s_d|\cdot|s_d+1|=14.42$$

$$\phi=-180^{\circ}-\angle G_0(s_d)=-180^{\circ}+120^{\circ}+106.1^{\circ}=46.1^{\circ}$$

$$\cot\gamma=(\frac{u}{K}-\cos\phi)\frac{1}{\sin\phi}\Rightarrow\gamma=6.3^{\circ}$$

第六章 自动控制系统设计

$$\delta = 180^{\circ} - \gamma - \theta = 113.7^{\circ}$$

$$|z_c| = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\omega_n = 0.48 \qquad |p_c| = \frac{\sin(\gamma+\phi)}{\sin(\delta-\phi)}\omega_n = 3.43$$

$$\beta = \frac{|p_c|}{|z_c|} = 7.15$$

$$\therefore G_c(s) = 7.15\frac{s+0.48}{s+3.43}$$

第六章 自动控制系统设计

6-13 $$\sigma_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.05 \Rightarrow \xi = 0.7237$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 5.53$$

$$G(s) = \frac{k(s+\alpha)}{s(s+3)} \qquad G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k(s+\alpha)}{s^2+(3+k)s+k\alpha}$$

$$\therefore k\alpha = \omega_n{}^2, 3+k = 2\xi\omega_n$$

$$\therefore k = 5, \alpha = 6.12$$

第七章 离散系统分析

7-1

$$C(Z)=\frac{Z}{(Z-1)^2(Z-2)}=\frac{Z}{(Z-1)}\left(\frac{1}{Z-1}\cdot\frac{1}{Z-2}\right)$$

$$=\frac{Z}{(Z-1)}\cdot\left(\frac{1}{Z-2}-\frac{1}{Z-1}\right)$$

$$=\frac{Z}{(Z-1)}\cdot\frac{1}{Z-2}-\frac{Z}{(Z-1)^2}.$$

$$=Z\left(\frac{1}{Z-2}-\frac{1}{Z-1}\right)-\frac{Z}{(Z-1)^2}$$

$$=\frac{Z}{Z-2}-\frac{Z}{Z-1}-\frac{Z}{(Z-1)^2}$$

$$C(kT)=2^k-1-\frac{t}{T}=2^k-1-k$$

第七章 离散系统分析

例7-11

$$C(S)=\frac{1-e^{-S}}{S^2(S+1)}$$

$$=(1-e^{-S})\left(\frac{1}{S^2}-\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}\right)$$

$$\frac{1}{S^2(S+1)}=\frac{1}{S}\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{S+1}\right)$$

$$=\frac{1}{S^2}-\frac{1}{S(S+1)}$$

$$=\frac{1}{S^2}-\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}$$

$$=\left(\frac{1}{S^2}-\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}\right)-\left(\frac{1}{S^2}-\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}\right)e^{-S}$$

$$=g_1(s)-g_2(s)$$

有$g_2(s)=g_1(s)e^{-S}$

$$g_1(t)=L^{-1}g_1(s)=L^{-1}\left(\frac{1}{S^2}-\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}\right)$$

$$=t-1+e^{-t}$$

$$G_1(Z)=Z^{-1}(t-1+e^{-t})$$

$$=\frac{TZ}{(Z-1)^2}-\frac{Z}{Z-1}+\frac{Z}{Z-e^{-1}}\text{（其中T=1）}$$

第七章 离散系统分析

$$G_2(Z) = Z^{-1} G_1(Z)$$

$$G(Z) = G_1(Z) - G_2(Z) = (1 - Z^{-1})\ G_2(Z)$$

$$= (1 - Z^{-1})\left(\frac{Z}{(Z-1)^2} - \frac{Z}{Z-1} + \frac{Z}{Z-e^{-1}}\right)$$

$$= \frac{e^{-1}Z + 1 - 2e^{-1}}{Z^2 - (1+e^{-1})Z + e^{-1}}$$

事 实 上 ， 有

$g_2(s) = g_1(s)e^{-s}$

则 $g_2(t) = g_1(t - T)$

$G_2(Z) = Z^{-1} G_1(Z)$

更 进 一 步 ， 有

$g_2(s) = g_1(s)e^{-kS}$

则 $g_2(t) = g_1(t - kT)$

$G_2(Z) = Z^{-k} G_1(Z)$

第七章 离散系统分析

7-5

系统的开环传递函数为

$$G(S)=\frac{k}{S(T_1S+1)}=\frac{k}{S}-\frac{kT_1}{T_1S+1}$$

开环脉冲传递函数为

$$G(Z)=\frac{kZ}{Z-1}-\frac{kZ}{Z-e^{-\frac{T}{T_1}}}$$

则闭环离散系统的特征方程为

$$1+G(Z)=0$$

即 $$1+\frac{kZ}{Z-1}-\frac{kZ}{Z-e^{-\frac{T}{T_1}}}=0$$

$$Z^2+(k-ke^{-\frac{T}{T_1}}-e^{-\frac{T}{T_1}}-1)Z+e^{-\frac{T}{T_1}}=0$$

第七章 离散系统分析

令 $Z = \dfrac{r+1}{r-1}$, 得

$$= 0$$

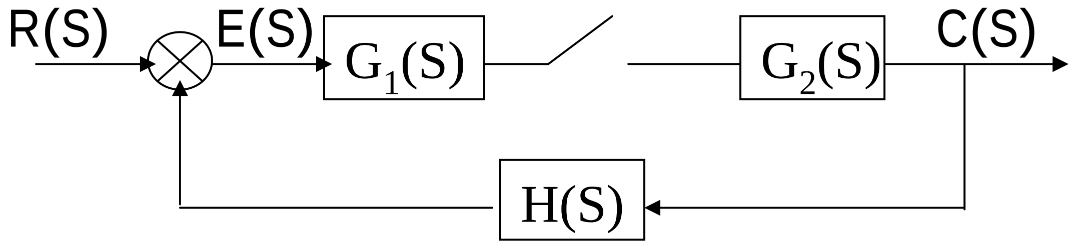
对应的劳斯阵为

r^2	$k(1-e^{-T/T_1})$	$e^{-T/T_1}(k+2)+2-k$
r^1	$2(1-e^{-T/T_1})$	0
r^0	$e^{-T/T_1}(k+2)+2-k$	

$$\begin{cases} 1-e^{-\frac{T}{T_1}} > 0 \\ e^{-\frac{T}{T_1}}(k+2)+2-k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T > 0 \\ k < \dfrac{2e^{-\frac{T}{T_1}}+2}{1-e^{-\frac{T}{T_1}}} \end{cases}$$

第七章 离散系统分析

习题练习



推导该离散系统的输出量C（Z）的表达式。

$$[E(S)\cdot G_1(S)]^* G_2(S) = C(S)$$

$$\therefore C^*(S) = EG_1^*(S)\cdot G_2^*(S)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\text{又 Q } E(S) = R(S) - C(S)\ H(S)$$

$$= R(S) - EG_1^*(S)\cdot G_2(S)\cdot H(S)\cdots\cdot(2)$$

（2）式左右同乘$G_1(S)$，得

$$E(S)\ G_1(S) = R(S)\ G_1(S) - EG_1^*(S)\cdot G_2(S)\cdot H(S)\cdot G_1(S)$$

第七章 离散系统分析

采样后，有

$$EG_1^*(S)=RG_1^*(S)-EG_1^*(S)\cdot G_2HG_1^*(S)$$

是否等价于

$G_1G_2H^*(S)$

$$\Rightarrow EG_1^*(S)=\frac{RG_1^*(S)}{1+G_1G_2H^*(S)}$$，代入（1）式

$$\Rightarrow C^*(S)=\frac{RG_1^*(S)}{1+G_1G_2H^*(S)}\cdot G_2^*(S)$$

离散化，有

$$C(Z)=\frac{RG_1(Z)\ G_2(Z)}{1+G_1G_2H^*(Z)}$$

第八章 非线性系统分析

8-3　(1) $\ddot{X} + \dot{X} + X = 0$

先求奇点，令 $\begin{cases} \dot{X} = 0 \\ \ddot{X} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = 0 \\ \dot{X} + X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = 0 \\ X = 0 \end{cases}$

得奇点为（0，0）

对原式做拉氏变换，得 $S^2 X(S) + SX(S) + X(S) = 0$

即$S^2 + S + 1 = 0$，解得特征根为$-0.5+0.866j$

所以（0，0）为稳定焦点

第八章 非线性系统分析

(6) $\ddot{X}+\dot{X}+X^{2}-1=0$

先求奇点，令 $\begin{cases}\dot{X}=0\\ \ddot{X}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{X}=0\\ X^{2}-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{X}=0\\ X=\pm 1\end{cases}$

得奇点为（1，0）和（−1，0）

$$X^{2}-1=(X^{2}-1)/_{X=1}+\frac{d(X^{2}-1)}{dx}/_{X=1}(X-1)$$
$$=2(X-1)$$

➢当奇点为（1，0）时

原式可线性化为 $\ddot{X}+\dot{X}+2(X-1)=0$

令 $Y=X-1$，得 $\ddot{Y}+\dot{Y}+2Y=0$

$\Rightarrow$ 特征根为 $-0\cdot5\pm1\cdot323j\Rightarrow$（1，0）稳定焦点

第八章 非线性系统分析

- 当奇点为（-1，0）时

原式可线性化为 $\ddot{X}+\dot{X}-2(X-1)=0$

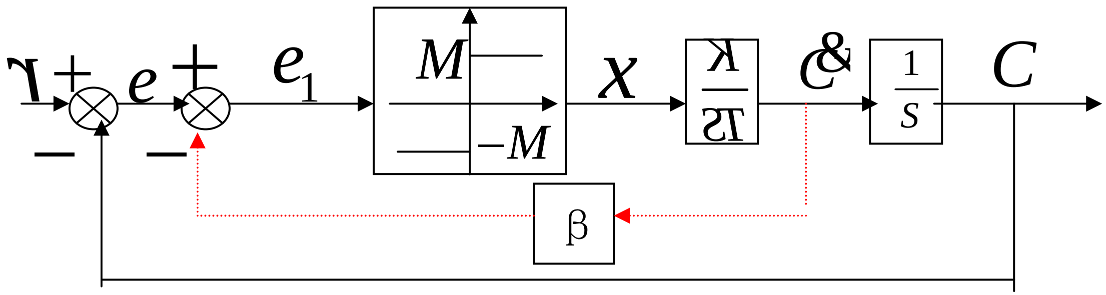
令 $Y=X-1$，得 $\ddot{Y}+\dot{Y}-2Y=0$

$\Rightarrow$ 特征根为 -2 和 1 $\Rightarrow$（-1，0）鞍点

对应图象参考课本 $P267$

第八章 非线性系统分析

8-5



输 入 r是 单 位 阶 跃 信 号

(1)当没有速度反馈时

$$有\ e=r-c,\ \dot{e}=-\dot{c}$$

$$x\cdot\frac{k}{TS}=\dot{c}$$

$$\Rightarrow\quad \ddot{e}=-\ddot{c}=-\frac{k}{T}x$$

第八章 非线性系统分析

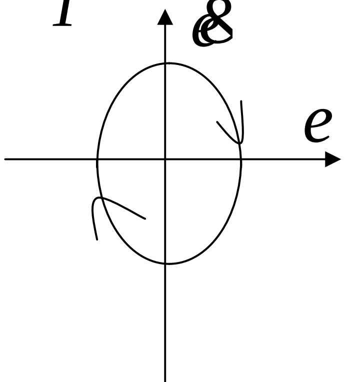
$$\begin{cases} \ddot{e} = -\frac{k}{T}M, e>0 \\ \ddot{e} = \frac{k}{T}M, e<0 \end{cases}$$

$$\because \ddot{e} = \dot{e}\frac{d\dot{e}}{de}$$

$$\begin{cases} \dot{e}\frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{k}{T}M, e>0 \\ \dot{e}\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{k}{T}M, e<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{两边积分}} \begin{cases} \dot{e}^2 = -\frac{2k}{T}Me + b_1, e>0 \\ \dot{e}^2 = \frac{2k}{T}Me + b_2, e<0 \end{cases}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \ddot{e}\,dt = \int_{0^-}^{0^+} (-\ddot{C})\,dt = -\dot{C}/_{0^-}^{0^+}$$

$\dot{e}(0+) - \dot{e}(0-) = 0$, 无跳变



第八章 非线性系统分析

(2)当有速度反馈时

有$e=r-c$，$e_1=e-\beta\dot{c}=e+\beta\dot{e}$

$$\begin{cases} X=M,\ e+\beta\dot{e}>0 \\ X=-M,\ e+\beta\dot{e}<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{T}{k}\ddot{e}=M,\ e+\beta\dot{e}>0 \\ -\frac{T}{k}\ddot{e}=M,\ e+\beta\dot{e}>0 \end{cases}$$

$$x\cdot\frac{k}{TS}=\dot{c}$$

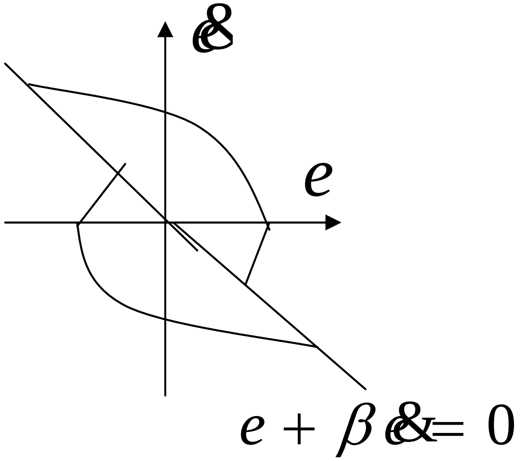
有

$$\begin{cases} \ddot{e}=-\ddot{c}=-\frac{k}{T}x \\ X=-\frac{T}{k}\ddot{e} \end{cases}$$

第八章 非线性系统分析

同理得

$$\begin{cases} \dot{e}^2 = -\dfrac{2k}{T}Me + b_1, \quad e + \beta\dot{e} > 0 \\ \dot{e}^2 = \dfrac{2k}{T}Me + b_2, \quad e + \beta\dot{e} < 0 \end{cases}$$



$$\because e_1 = e - \beta\dot{C} = r - C - \beta\dot{C}$$

$$\dot{e}_1 = -\dot{C} - \beta\ddot{C} = -\dot{C} - \beta\frac{k}{T}X$$

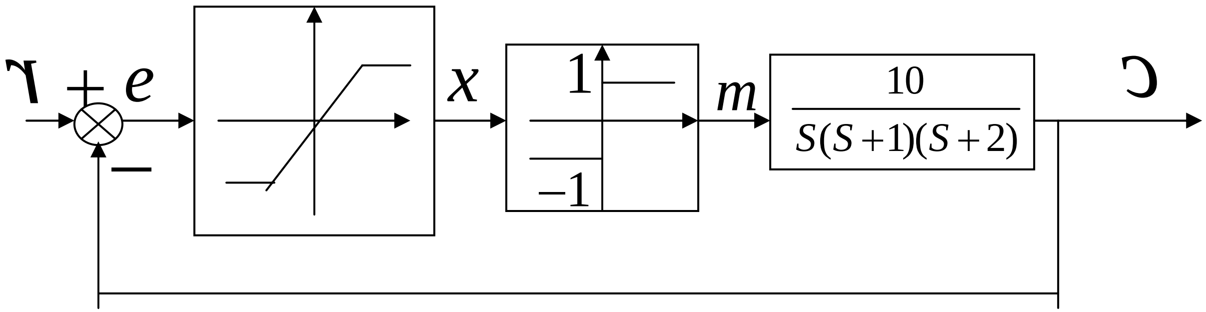
$$\ddot{e}_1 = -\ddot{C} - \beta\frac{k}{T}\dot{X} = -\frac{k}{T}X - \beta\frac{k}{T}\dot{X}$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\ddot{e}_1 dt = \int_{0^-}^{0^+}\left(-\frac{k}{T}X\right)dt + \int_{0^-}^{0^+}\left(-\beta\frac{k}{T}\dot{X}\right)dt = 0 - \beta\frac{k}{T}X \Big/_{0^-}^{0^+}$$

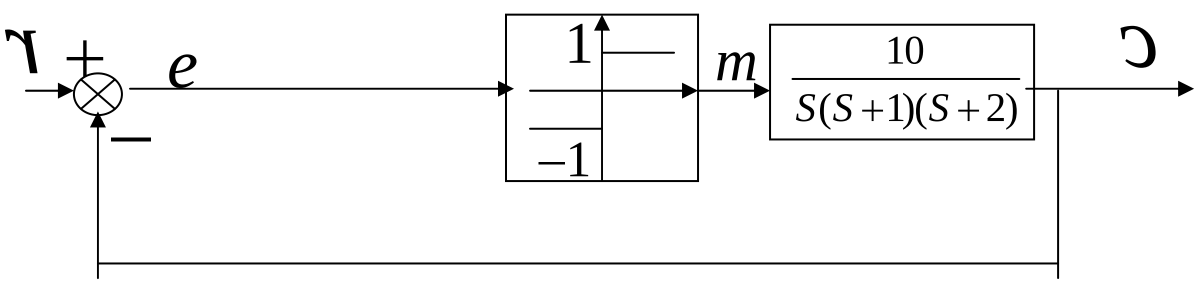
$$\dot{e}_1(0+) - \dot{e}_1(0-) = \begin{cases} -2\dfrac{\beta kM}{T}, \quad e_1 > 0 \\ 2\dfrac{\beta kM}{T}, \quad e_1 < 0 \end{cases}$$ 存在跳变

第八章 非线性系统分析

8-12



首先，等效非线性环节为



第八章 非线性系统分析

Q 在正弦信号作用下

$$y(t)=\begin{cases}1, t\geq 0\\ -1, t<0\end{cases}$$ 是奇函数，

$$\therefore A_1=0,$$

$$B_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin wt dwt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cdot\sin wt dwt$$

$$=\frac{4}{\pi}\qquad N(A)=\frac{B_1}{A}+\frac{A_1}{A}j=\frac{4}{\pi A}$$

$$-\frac{1}{N(A)}=-\frac{\pi A}{4}$$

第八章 非线性系统分析

$$G_0(w)=\frac{10}{jw(jw+1)(jw+2)}$$

$$=\frac{-30w^2}{9w^4+(2w-w^3)^2}+\frac{-10(2w-w^3)j}{9w^4+(2w-w^3)^2}$$

令$G_0(w)=-\dfrac{1}{N(A)}$

得:$2w-w^3=0\Rightarrow w=\sqrt{2}$

$$-\frac{\pi A}{4}=\frac{-30w^2}{9w^4+(2w-w^3)^2}$$

$$A=\frac{60}{9\pi}=2\cdot 123$$