第五章 根轨迹分析法

Chapter 5 Root Locus

第五章内容

- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

广义根轨迹

1. 参数根轨迹
2. 正反馈系统根轨迹(或 K<0)
3. 纯滞后系统根轨迹

定义：

常规根轨迹------- 闭环系统特征方程的根是根轨迹增益的函数，

例如：

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

参数根轨迹 -------闭环系统特征方程的根是其他参数（非根轨迹增益）的函数，如时间常数 T. 例如

$$G(s)H(s)=\frac{2}{s(Ts+1)(s+1)}$$

绘制参数根轨迹的目的 -------了解闭环系统特征方程的根随其他参数变化的情况。

广义根轨迹——（1）参数根轨迹

分析方法：引入等效单位反馈系统和**等效传递函数**概念，然后采用常规根轨迹绘制法则。闭环特征方程：

$$1+G(s)H(s)=0$$

等效变换

$$A\frac{P(s)}{Q(s)}=-1$$

A是除**K**外任意的其他变化参数

P(s)和**Q(s)**是与**A**无关的首一多项式

$$Q(s)+AP(s)=1+G(s)H(s)=0$$

等效单位反馈系统的等效开环传递函数：

$$[G(s)H(s)]_e=A\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

广义根轨迹——（1）参数根轨迹

参数根轨迹绘制方法：

写出开环传递函数G(s)H(s)

特征方程1+G(s)H(s)=0

等效开环传递函数$[G(s)H(s)]_e$
(使关注的参数成为根轨迹增益)

用等效开环传递函数$[G(s)H(s)]_e$ 绘制 根轨迹

$$[G(s)H(s)]_e = \frac{A\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

注：这种方法的关键在于寻找“等效” $[G(s)H(s)]_e$，这里的“等效”仅仅是闭环极点相同这一点上成立，而闭环零点一般是不同的，不是闭环传递函数的“等效”。

例 5-13 开环传递函数G(s)H(s), 绘制参数 T变化时的根轨迹.

$$G(s)H(s)=\frac{2}{s(Ts+1)(s+1)}$$

1）特征方程:

$$\Delta(s)=s(Ts+1)(s+1)+2$$

$$Ts^2(s+1)+s^2+s+2=0$$

等效根轨迹增益

$$1+\frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}=0$$

闭环系统特征根相同!

等效开环传递函数:

$$[G(s)H(s)]_e=\frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

$$\Delta'(s)=1+[G(s)H(s)]_e=0$$

广义根轨迹——（1）参数根轨迹

$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

2) 开环极点： $n = 2, p_1 = -0.5 + j1.323, p_2 = -0.5 - j1.323$

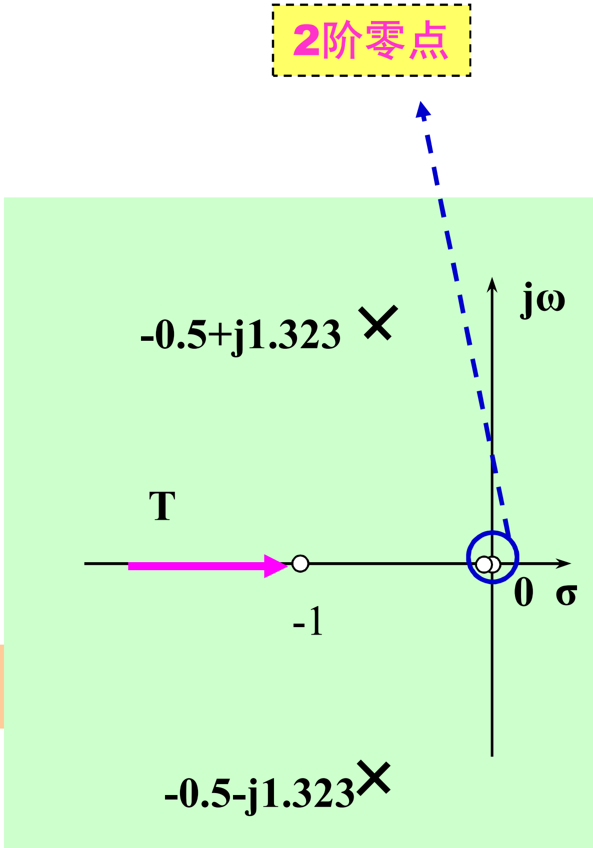
开环零点： $w = 3, z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = -1$

3) 3条根轨迹分支(注意：**w>n**)

4) 实轴上的根轨迹：**(∞ , -1]**

5) 极点**–0.5+j1.323**处的出射角Φ_{1_D}

$$\begin{aligned}\phi_{3_D} &= (1+2h)180^\circ + (\psi_1+\psi_2+\psi_3) - \phi_1 \\ &= (1+2h)180^\circ + (69.3^\circ + 110.7^\circ + 110.7^\circ) - 90^\circ \\ &= 20.7^\circ\end{aligned}$$



同样地, 极点 **–0.5-j1.323**处的出射角为 **–20.7°**

$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

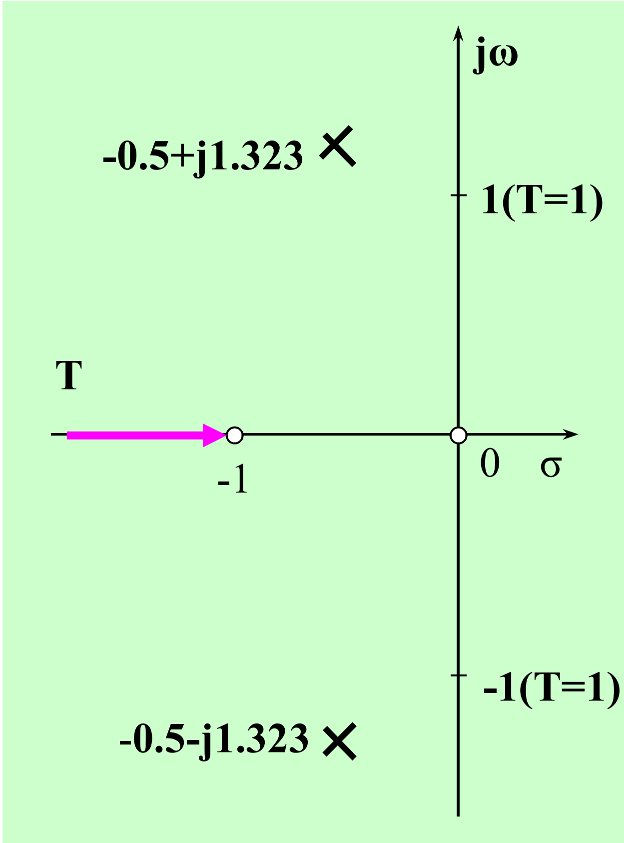
6) 根轨迹与虚轴的交点

特征方程： $\Delta(s) = s(Ts+1)(s+1)+2 = Ts^3+(T+1)s^2+s+2$

Routhian 表:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T & 1 \\ s^2 & T+1 & 2 \\ s^1 & 1-\dfrac{2T}{T+1} & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

$$1-\frac{2T}{T+1}=0 \quad \Rightarrow \quad T=1$$



由s² 行构造辅助方程:

$$(T+1)s^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j\sqrt{\frac{2}{T+1}}=\pm j1$$

广义根轨迹——（1）参数根轨迹

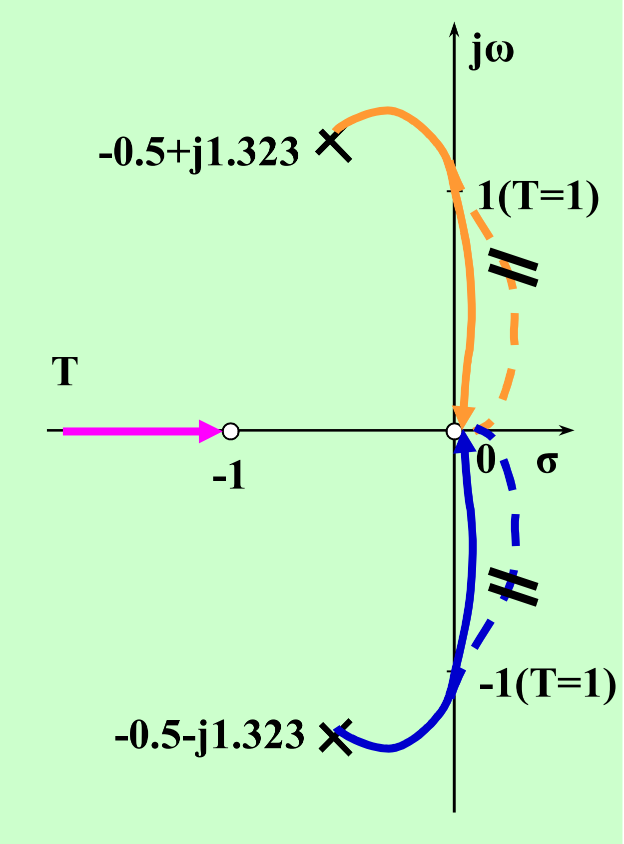
$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

根轨迹接近零点z_1=0时的方向(入射角)

$$\psi_{1_A} = \frac{(1+2h)180° + \left(\angle(z_1-p_1)+\angle(z_1-p_2)\right)-\angle(z_1-z_2)}{2} = \pm 90°$$

注意: 通常, 当极点数n小于零点数时,可以用 1/T 作为绘制根轨迹时的变化参数。问题?

请你试试看这个例题!



广义根轨迹——（2）正反馈根轨迹

系统开环传递函数为**G(s)H(s)**：

$$G(s)H(s)=\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)\cdots(s-p_u)}=K[G(s)H(s)]_1=-1$$

- 若系统是正反馈系统，则其特征方程如下：

$$1-G(s)H(s)=0 \Rightarrow G(s)H(s)=1$$

正反馈系统的幅值条件和相角条件为

$$|G(s)H(s)|=1$$ ---- 幅值条件

$$\angle G(s)H(s)=0^\circ+k\cdot 360^\circ(k=0,1,2,\cdots)$$

---- 相角条件

- 若系统是负反馈系统，但**K<0**，如何考虑？

广义根轨迹——（2）正反馈根轨迹

比较正反馈系统和负反馈系统的根轨迹，不同之处在于相角条件

$$\angle G(s)H(s) = 0° + k \cdot 360°(k = 0,1,2,\cdots)$$ —— 正反馈

对比

$$\angle G(s)H(s) = 180° + k \cdot 360°(k = 0,1,2,\cdots)$$ —— 负反馈

对比：正反馈系统根轨迹被称为0° 根轨迹或负参数根轨迹(K<0)；

负反馈系统根轨迹被称为 180° 根轨迹.

常见零度根轨迹的来源：

1）s最高次幂的系数为负；

2）控制系统中包含正反馈内回路；

由于相角条件不同，所有与相角条件有关的根轨迹绘制法则也就不同

广义根轨迹——（2）正反馈根轨迹

回顾常规根轨迹的绘制法则

- 规则 1:根轨迹的起点和终点
- 规则 2:根轨迹的分支数、对称性和连续性
- 规则 3:根轨迹的渐近线
- 规则 4:实轴上的根轨迹
- 规则 5: 根轨迹的分离点和分离角
- 规则 6: 复数极点(或零点):出射角与入射角
- 规则 7: 根轨迹与虚轴的交点
- 规则 8:系统根之和守恒

广义根轨迹——（2）正反馈根轨迹

规则 3: 当s趋于∞时,根轨迹的渐近线与实轴的夹角 $\gamma = \frac{2k\pi}{n-w}$

规则 4: 实轴上的根轨迹

若实轴上的搜索点s右侧实数零极点数是**偶数**，则该点在根轨迹上

规则 6: 复数极点(或零点): 出射角(入射角)

出射角

$$\phi_{p_k} = 0^\circ + \sum_{j=1}^{w} \angle(p_k - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \angle(p_k - p_i)$$

入射角

$$\psi_{z_k} = 0^\circ + \sum_{i=1}^{n} \angle(z_k - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{w} \angle(z_k - z_j)$$

例 5-14 开环传递函数G(s)H(s), 分别绘制负反馈系统根轨迹和正反馈系统根轨迹:

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

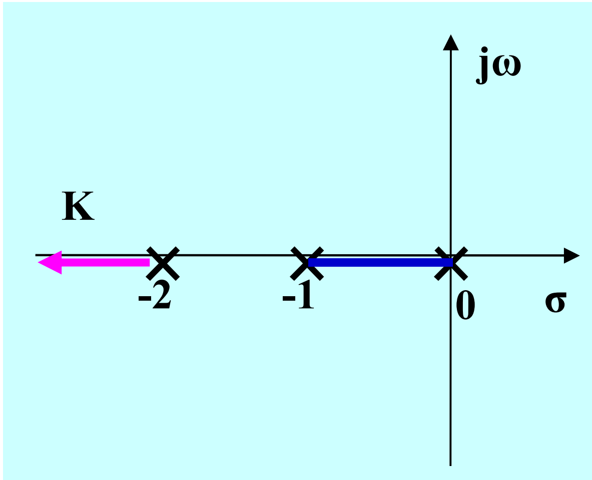
1.负反馈系统

1）开环极点： $n=3,\quad p_1=0,\quad p_2=-1,\quad p_3=-2$

开环零点： $w=0$

2) 根轨迹由3条分支

3) 实轴上的根轨迹: [-1, 0], (-∞,-2]



4) 渐近线的夹角 $\gamma=\dfrac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\dfrac{(1+2h)180^\circ}{3}=\pm60^\circ,180^\circ$

渐近线与实轴的交点 $\sigma_0=\dfrac{p_1+p_2+p_3}{n-w}=\dfrac{0-1-2}{3}=-1$

5) 实轴上[-1， 0]之间的分离点*d*

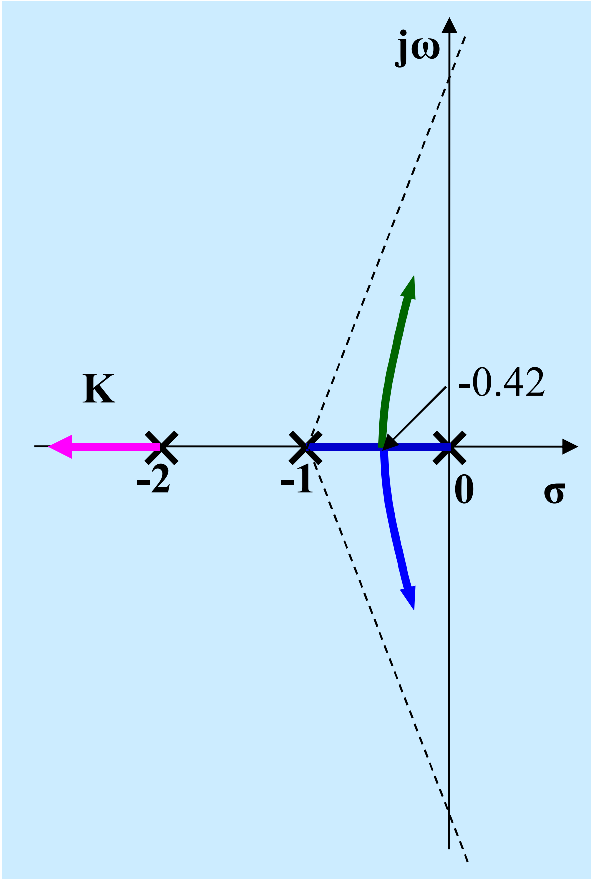
$$-K=s^3+3s^2+2s$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=3d^2+6d+2=0$$

$$d=-0.42$$

$$d=-1.58 \quad \text{(舍弃)}$$

分离角：$\dfrac{(2k+1)180^\circ}{l}=\dfrac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$



6) 根轨迹与虚轴的交点

$s = j\omega$代入特征方程

特征方程:

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + K = 0$$

$$\begin{cases} 3\omega = K \\ \omega^3 = 2\omega \end{cases}$$

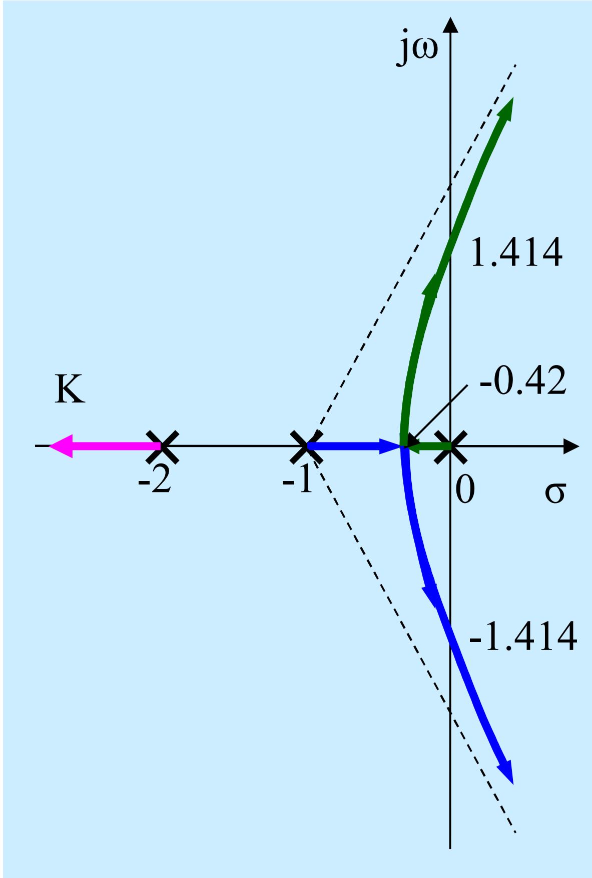
Routhian 表:

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6-K}{3}$	0
s^0	K	

$$\frac{6-K}{3} = 0 \Rightarrow K = 6$$

$$3s^2 + K = 0 \Rightarrow s = \pm j1.414$$

K>6 时，该系统不稳定



广义根轨迹——（2）正反馈根轨迹

2.正反馈系统（或K<0）

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

1) 开环极点：$n=3,\quad p_1=0,\quad p_2=-1,\quad p_3=-2$

开环零点：$w=0$

2) 有三条根轨迹分支

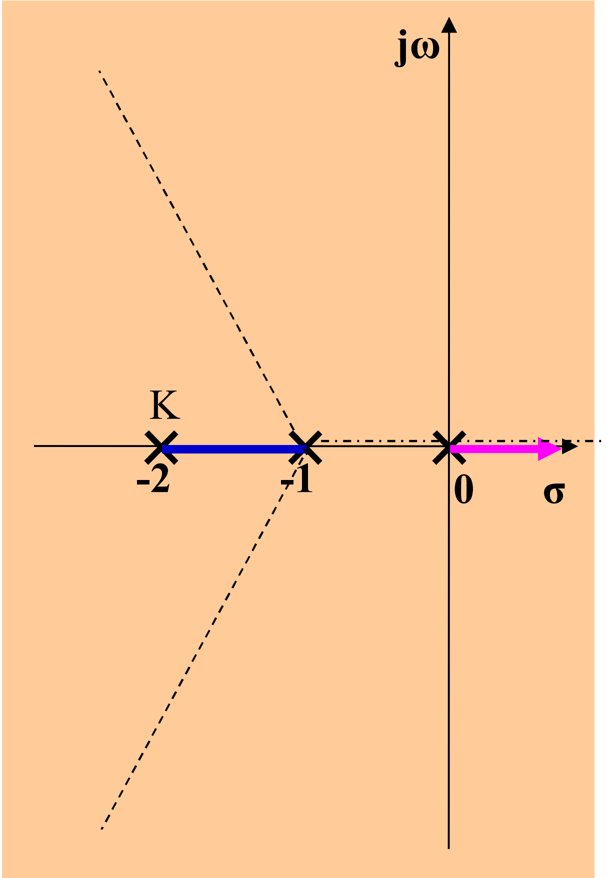
3) 实轴上的根轨迹[0, ∞),[-2, -1]

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma=\frac{2h\times180^\circ}{n-w}=\frac{2h\times180^\circ}{3}=\pm120^\circ,0^\circ$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3}{n-w}=\frac{0-1-2}{3}=-1$$



5) 实轴上[-2，-1]间的分离点 *d*

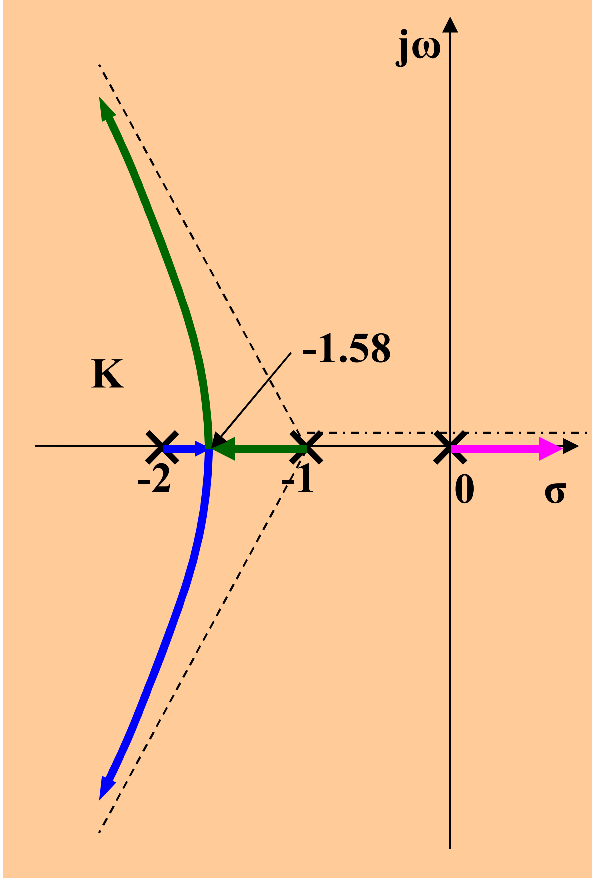
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$-K=s^3+3s^2+2s$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=3d^2+6d+2=0$$

$d=-0.42$ （舍弃）

$d=-1.58$



分离角：

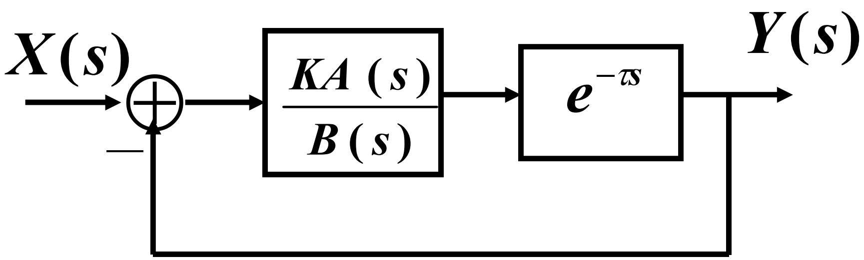
$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l}=\frac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

K>0 时正反馈系统不稳定

广义根轨迹——（3）含纯滞后环节系统的根轨迹

考虑如图所示具有纯滞后环节(滞后时间τ)的系统

$$G(s)H(s)=K\frac{A(s)}{B(s)}\cdot e^{-\tau s}$$



系统的特征方程为指数方程

$$1+G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}=0 \Leftarrow s=\sigma+j\omega$$

幅值条件 $\left|G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}\right|=1 \Rightarrow \left|G_1(\sigma+j\omega)H_1(\sigma+j\omega)\right|e^{-\sigma\tau}=1$

相角条件 $\angle G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}=(2h+1)\pi$

$$\angle G_1(\sigma+j\omega)H_1(\sigma+j\omega)=(2h+1)\pi+\omega\tau$$

其根轨迹分支数等于∞

其根轨迹依然关于实轴对称

幅值条件$K=|\sigma+\mathrm{j}\omega|\cdot|\sigma+\mathrm{j}\omega-p_1|e^{\sigma\tau}$ 相角条件$\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega)+\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega-p_1)+\omega\tau=(1+2h)\pi$

例5-15: $G(s)H(s)=\dfrac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)}=\dfrac{Ke^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{s(s-p_1)}$，负反馈，$K>0,\tau>0,p_1<0$

当ω=0时，即对实轴上的点，相角条件与不含纯滞后环节时相同，实轴根轨迹法则依然成立

无论有无纯滞后，（p_1,0）上都有实分离点

当$|\omega|$足够小时，相角条件可近似于无纯滞后的

$\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega)+\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega-p_1)=(1+2h)\pi$

这意味着对$(p_1,0)$,实分离点求法依然成立

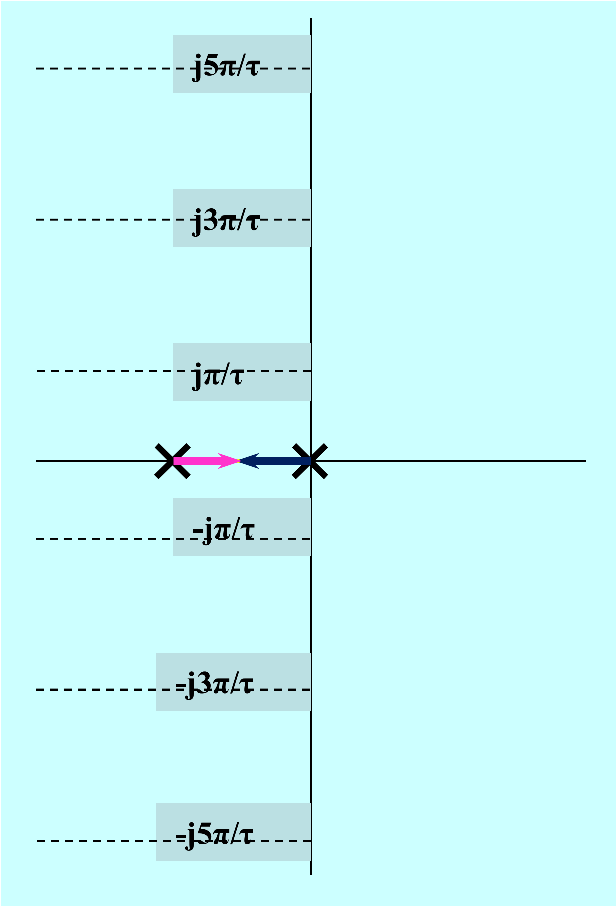
$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r-p_1}=0\Rightarrow 实分离点 r=\frac{p_1}{2}$$

起点：$K=|\sigma+j\omega|\cdot|\sigma+j\omega-p_1|e^{\sigma\tau}=0$

$\sigma+j\omega=0$，$\sigma+j\omega=p_1$，$\sigma=-\infty$

设$-\infty+\mathrm{j}\omega_1$是起点，由相角条件知

$$\omega_1=\frac{(-1+2h)\pi}{\tau},\quad h=0,\pm1,\pm2,\cdots$$



幅值条件$K=|\sigma+\mathrm{j}\omega|\cdot|\sigma+\mathrm{j}\omega-p_1|e^{\sigma\tau}$ 相角条件$\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega)+\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega-p_1)+\omega\tau=(1+2h)\pi$

例5-15: $G(s)H(s)=\dfrac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)}=\dfrac{Ke^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{s(s-p_1)}$，负反馈，$K>0,\tau>0,p_1<0$

终点$|s|\angle\gamma$

由相角条件知终点的ω必为常值

$\angle\gamma=0(\sigma=+\infty)$或$\pi(\sigma=-\infty)$

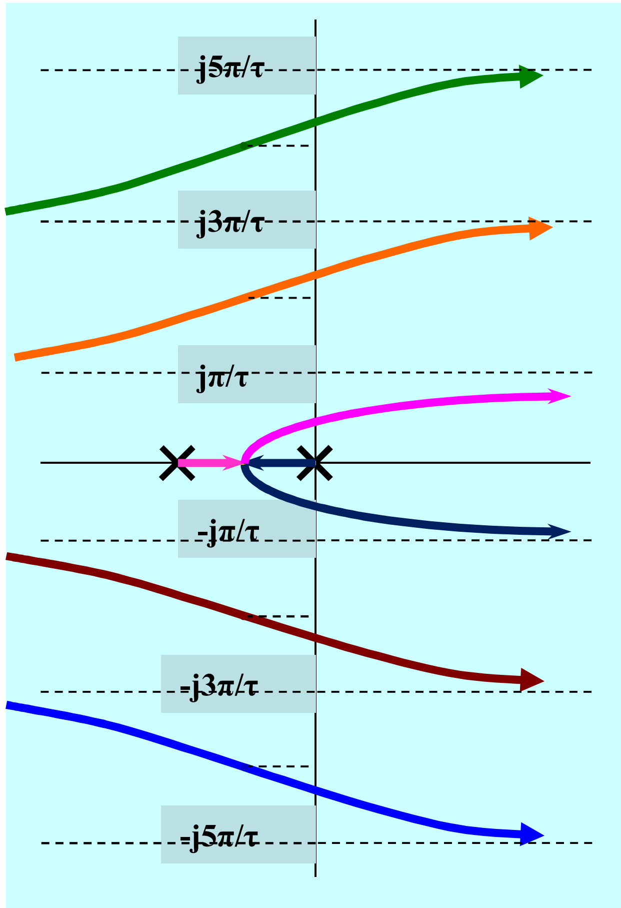
只能$+\infty+j\omega_2$是终点，由相角条件知

$$\omega_2=\frac{(1+2h)\pi}{\tau},\quad h=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

设$\sigma+j\dfrac{2h\pi}{\tau}\quad(h=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是根轨迹上的点

由相角条件知$\sigma=\dfrac{p_1}{2}$

这些点分别对应不同的K



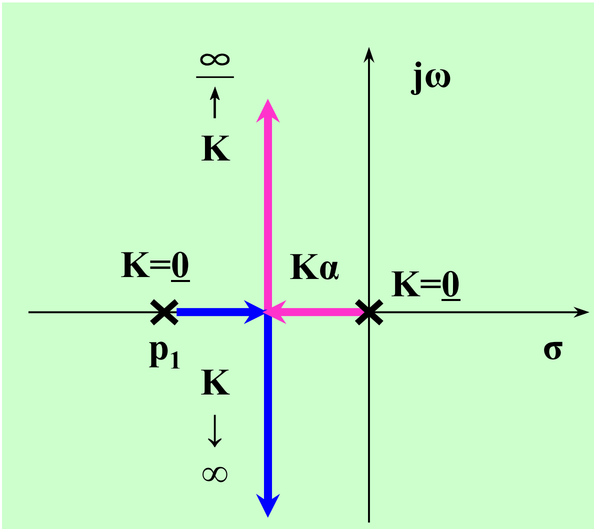
基于上述点，可大致勾勒根轨迹

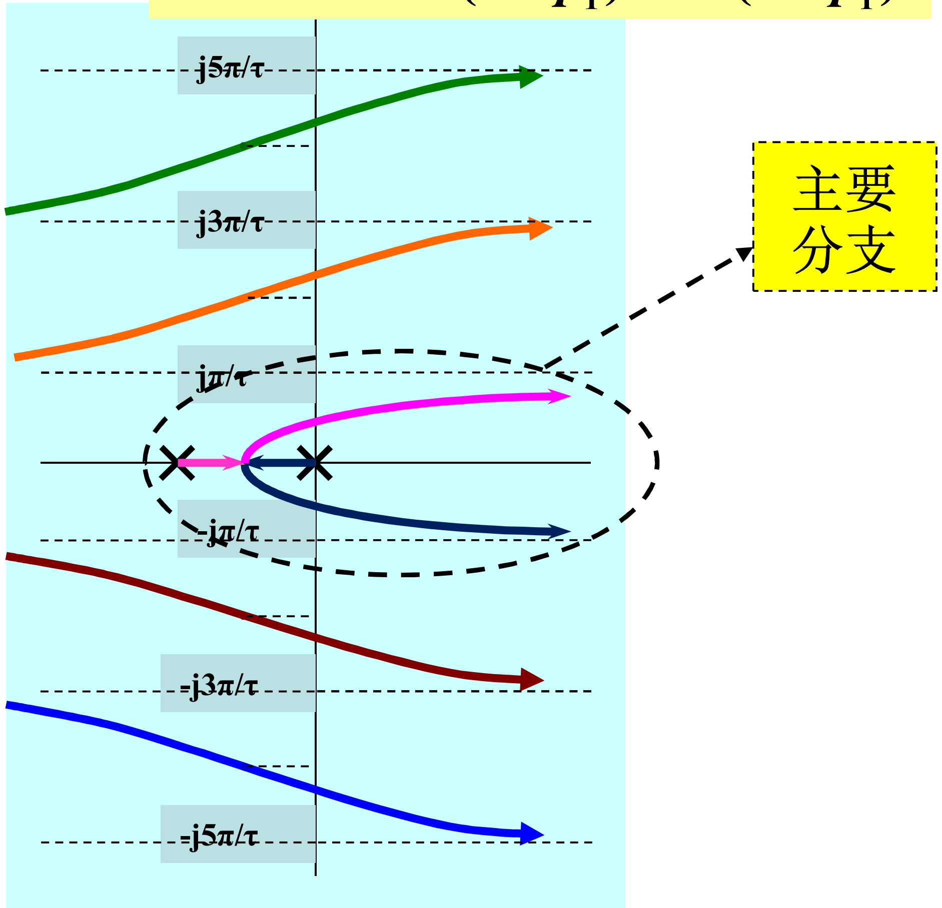
广义根轨迹——（3）含纯滞后环节系统的根轨迹

比较有/无纯滞后环节系统的根轨迹

$$G_1(s)H_1(s)=\frac{K}{s(s-p_1)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)}=\frac{Ke^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{s(s-p_1)}$$





例5-15的结论：

- 不含纯滞后的系统有两条根轨迹分支,且对所有的 **K>0**,系统是稳定的. 含纯滞后的系统有无穷多个根轨迹分支,且根轨迹渐近线平行于实轴.

- 有两条根轨迹分支接近原点,对系统的稳定性影响很大,称为主根轨迹,其余分支称为辅助根轨迹.

- 系统稳定的增益**K**的最大值由虚轴上满足相角条件的频率 **ω** 确定

$$\angle(\mathrm{j}\omega_3)+\angle(\mathrm{j}\omega_3-p_1)+\omega_3\tau=(1+2h)\pi$$

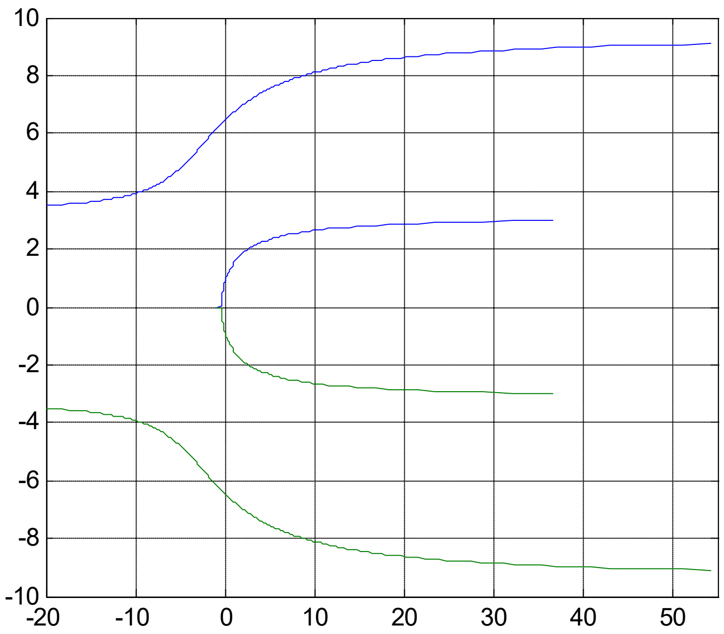
$$K=|\mathrm{j}\omega_3||\mathrm{j}\omega_3-p_1|=\omega_3\sqrt{p_1^2+\omega_3^{\ 2}}$$

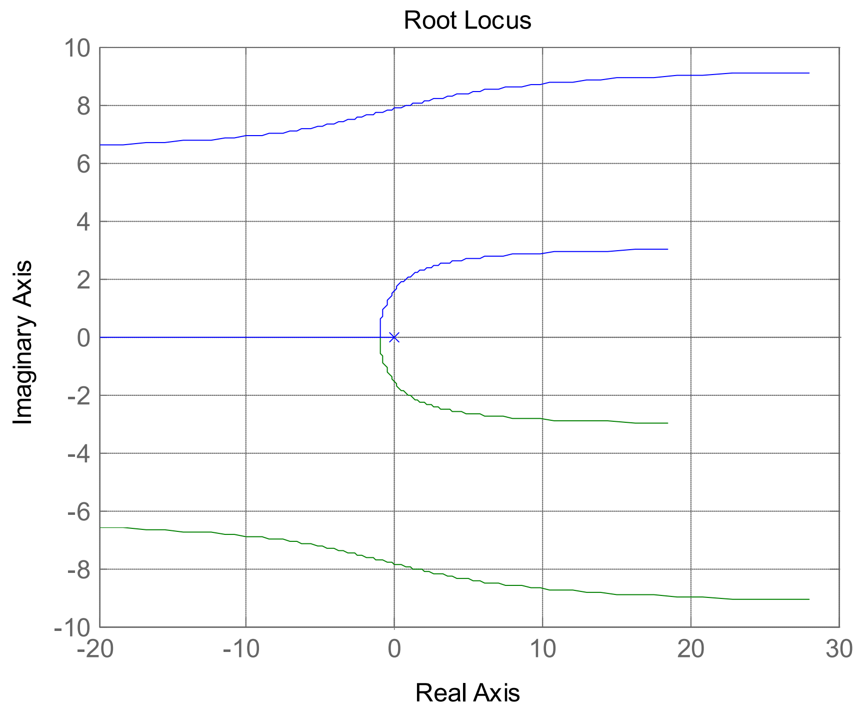
系统中若有纯滞后存在，相比无纯滞后系统会降低系统的稳定性。

广义根轨迹——（3）含纯滞后环节系统的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-s}}{s(s+1)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-s}}{s}$$





对比右图实分离点与无纯滞后的不同

也可以用其他的近似方法来处理纯滞后，如有理函数近似。其中**Pade**近似是一种常用的方法，近似后可以用根轨迹绘制法则绘制根轨迹

注意:K<0

$$G_1(s)H_1(s)=\frac{K}{s(s-p_1)}$$

$$e^{-\tau s}=\frac{e^{-\frac{\tau}{2}s}}{e^{\frac{\tau}{2}s}}\approx\frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s}=-\frac{s-\frac{2}{\tau}}{s+\frac{2}{\tau}}$$

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)}\approx\frac{-K(s-\frac{2}{\tau})}{s(s-p_1)(s+\frac{2}{\tau})}$$

广义根轨迹——（3）含纯滞后环节系统的根轨迹

例 5-16 控制系统的开环传递函数为

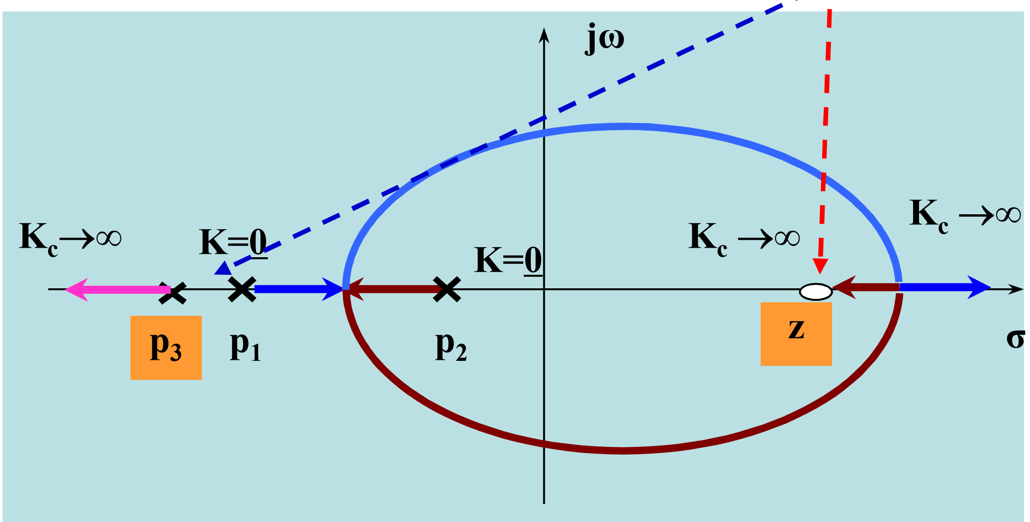
$$G(s)H(s)=\frac{K_cK_vK_0K_me^{-\tau s}}{(T_0s+1)(T_ms+1)}$$

绘制K_c 变化时的根轨迹.

解：采用**Pade's** 方法来近似纯滞后部分.

$$G(s)H(s)=-\frac{K_cK_vK_0K_m(s-\frac{2}{\tau})}{(T_0s+1)(T_ms+1)(s+\frac{2}{\tau})}=-\frac{K_r(s-\frac{2}{\tau})}{(s+\frac{1}{T_0})(s+\frac{1}{T_m})(s+\frac{2}{\tau})}$$

纯滞后时间τ越大，对系统的稳定性和其他特性的影响就越大



请比较：若该系统无纯滞后存在，稳定性？

广义根轨迹——多参数的处理（根轨迹簇）

■例5-17 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{k(\tau s+1)}{s(s+1)(s+4)}$

试绘制参数 ***k*** 和 τ 变化时的根轨迹（***K*>0, τ >0**）。

方法：（1）先画出当τ＝0时， ***k*** 变化时的根轨迹。与前无殊。

（2）当 τ ≠ 0时，取 ***k*** 为某些确定值，绘制参数 τ 变化的根轨迹，先写出等效开环传递函数

$$G'(s)=\frac{\tau ks}{s^3+5s^2+4s+k}$$

- 以τ 为参数的根轨迹的起始点均在 τ 为 **0** 时***k*** 为参数的根轨迹上
- 所以最后得到的将是一个根轨迹簇（对应每个***k***值都不同）
- 如此例，取 **k=20, k=8, k=40........**请你试试!

广义根轨迹——小结

- 参数根轨迹（即将开环传递函数中的其它参数作为可变参数）
  - 关键是由系统闭环特征方程写出等效开环传递函数，将可变参数置于根轨迹增益K_r的位置。
- 对于K＜0情况（正反馈系统）——零度根轨迹
  - 若无特殊要求，实际上是写出开环传递函数后，视其根轨迹增益K_r前的符号决定（设K_r总是＞0）是采取K＞0或K＜0的规则
- 纯滞后的处理　为方便分析，可采用pade多项式近似纯滞后环节（在低频时较为适用）
- 多个可变参数的根轨迹——根轨迹簇——参见例5-17
  - 实际上也只能先选定一个，再画其他的
- 多回路系统的根轨迹——“先内后外”

根轨迹方法举例

例5-18 单位负反馈系统(K>0)的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+2s+2)}$$

绘制根轨迹。

注意有一个在S右半面的开环极点？

解：1) 开环极点: $n=4,\quad p_1=0,\quad p_2=1,\quad p_{3,4}=-1\pm j1$

开环零点: $w=1, z_1=-1$

2) 有4条根轨迹分支

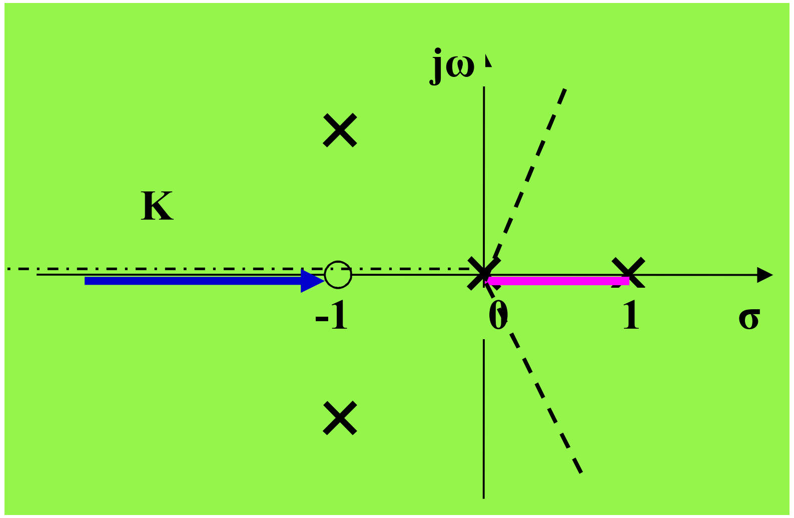
3) 实轴上的根轨迹 [0 , 1], (-∞, -1]

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\pm60^\circ,180^\circ$$

与实轴的交点

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4-z_1}{n-w}=0$$



根轨迹方法举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+2s+2)}$$

5) 实轴上的分离点

$$s^4+s^3-2s+K(s+1)=0 \;\Rightarrow\; -K=\frac{s^4+s^3-2s}{s+1}$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=d^4+2d^3+d^2-\frac{2}{3}=0$$

$d_1=0.55$　$d_2=-1.55$　$d_{3,4}=-0.5\pm j0.75$ (舍弃)

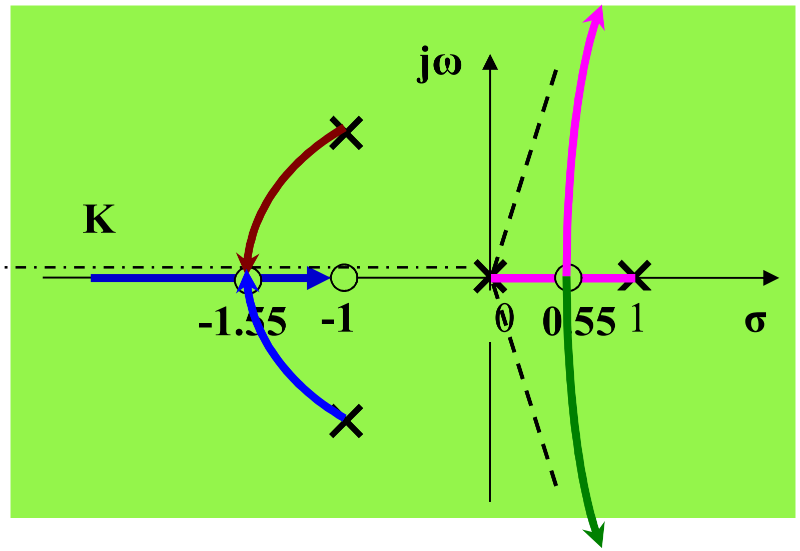
分离角：$\dfrac{(2k+1)180^\circ}{l}=\dfrac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$

6) 极点 –1+j1处的出射角 Φ_{3_D}

$$\begin{aligned}\phi_{3_D}&=(1+2h)180^\circ-(\phi_1+\phi_2+\phi_4)+\psi_1\\&=(1+2h)180^\circ-(135^\circ+153.4^\circ+90^\circ)+90^\circ\\&=-108.6^\circ\end{aligned}$$

极点-1-j1处的出射角为108.6°．

7)与虚轴没有交点.



因此，该系统不稳定。

根轨迹方法举例

例 5-19 某单位负反馈系统（K>0）的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

绘制其根轨迹。

解：1) 开环极点：　$n=4,\quad p_1=0,\quad p_2=1,\quad p_{3,4}=-2\pm j2\sqrt{3}$

开环零点：　$w=1, z_1=-1$

2) 有4条根轨迹分支

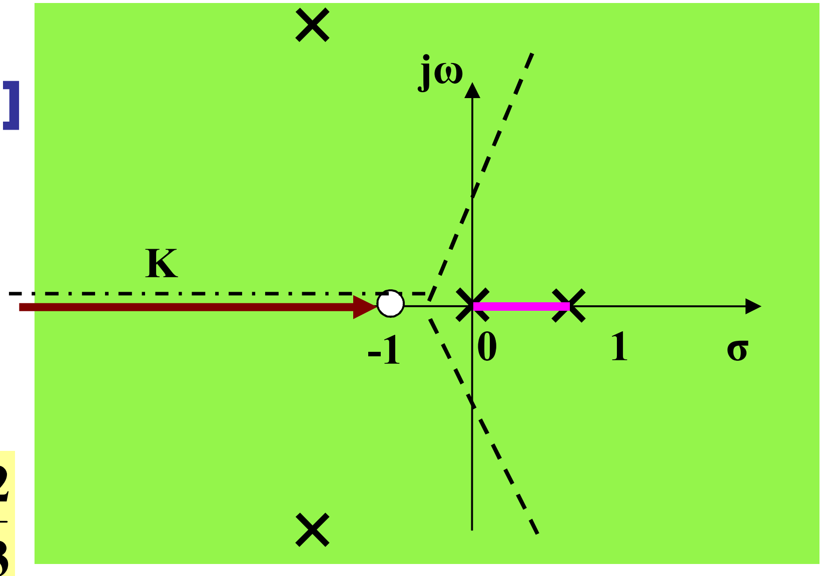
3) 实轴上的根轨迹 [0 , 1], (-∞, -1]

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\pm 60^\circ,180^\circ$$

与实轴的交点

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4-z_1}{n-w}=-\frac{2}{3}$$



根轨迹方法举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

5) 实轴上的分离点

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=3s^4+10s^3+21s+24s-16=0$$

$d_1=0.46$　$d_2=-2.22$

$d_{3,4}=-0.79\pm j2.46$　(舍弃)

分离角

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l}=\frac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

6) 极点 –2+j3.46处的出射角 Φ_{3_D}

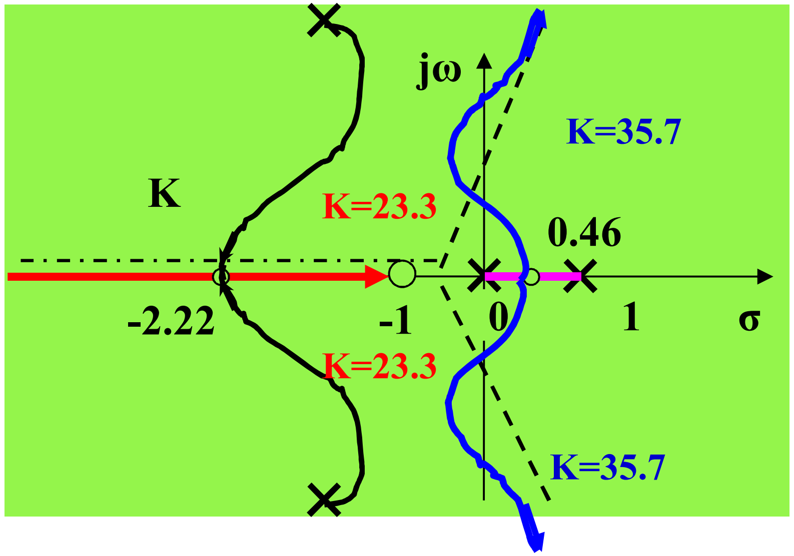
$$\phi_{3_D}=(1+2h)180^\circ-(\phi_1+\phi_2+\phi_4)+\psi_1$$
$$=-54.5^\circ$$

极点 **-2-j3.46** 处的出射角为 **54.5°**

7) 与虚轴的交点　$s_{1,2}=\pm j1.56(K=23.3)$

$s_{3,4}=\pm j2.56(K=35.7)$

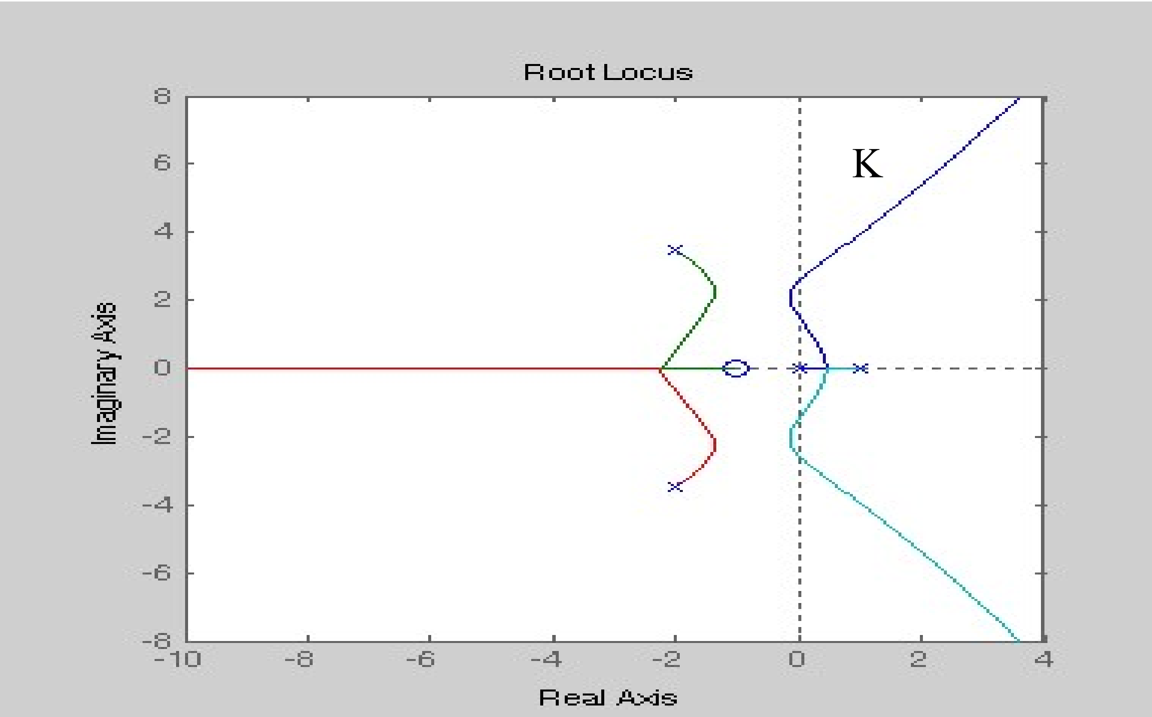
当$23.3<K<35.7$时系统稳定



该系统是条件稳定.

根轨迹方法举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$



例 5-20 单位反馈系统开环传递函数 $G(s)H(s)=\dfrac{K(1-s)}{s(s+2)}$

绘制根轨迹(其中 K>0).

解：

$$G(s)H(s)=\frac{K(1-s)}{s(s+2)}=\frac{-K(s-1)}{s(s+2)}$$

注意选取K<0的规则

1) 开环极点: $n=2,\quad p_1=0,\quad p_2=-2$

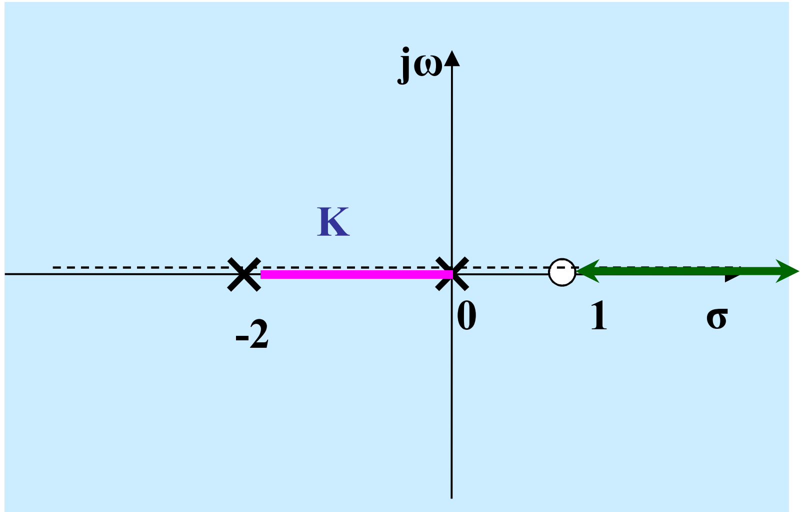
开环零点: $w=1, z_1=1$

2) 有2条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹 [0 , -2], [1,∞)

4) 渐近线与实轴的夹角 $\gamma=\dfrac{2h\cdot 180^\circ}{n-w}=0^\circ$

与实轴的交点 $\sigma_0=\dfrac{p_1+p_2-z_1}{n-w}=\dfrac{0-2-1}{2-1}=-3$



根轨迹方法举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(1-s)}{s(s+2)}$$

5) 实轴上的分离点

$$\frac{d(-K)}{ds}\Big|_{s=d}=s^2-2s-2=0$$

$$d_1=-0.71$$

$$d_2=2.71$$

分离角

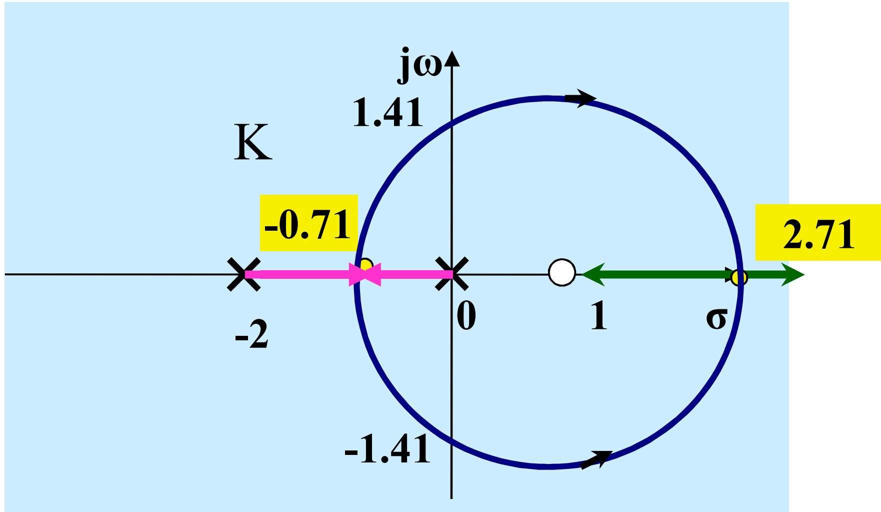
$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l}=\frac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

6) 根轨迹与虚轴的交点

$$\Delta\Big|_{s=jw}=s^2+(2-K)s+K=0$$

$$w=\pm\sqrt{2},\qquad K=2$$

因此, 系统是条件稳定 (当0<K<2).



例5-21 设一控制系统的前向通道传递函数**G(s)**与反馈通道传递函数分别如下，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)} \qquad H(s)=(s+1)$$

解：开环传递函数**G(s)H(s)**出现了零极点对消情况，此时如何绘制根轨迹？先作一分析:

闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

先不对消极点，闭环特征方程：

$$[s(s+2)+k](s+1)=0$$

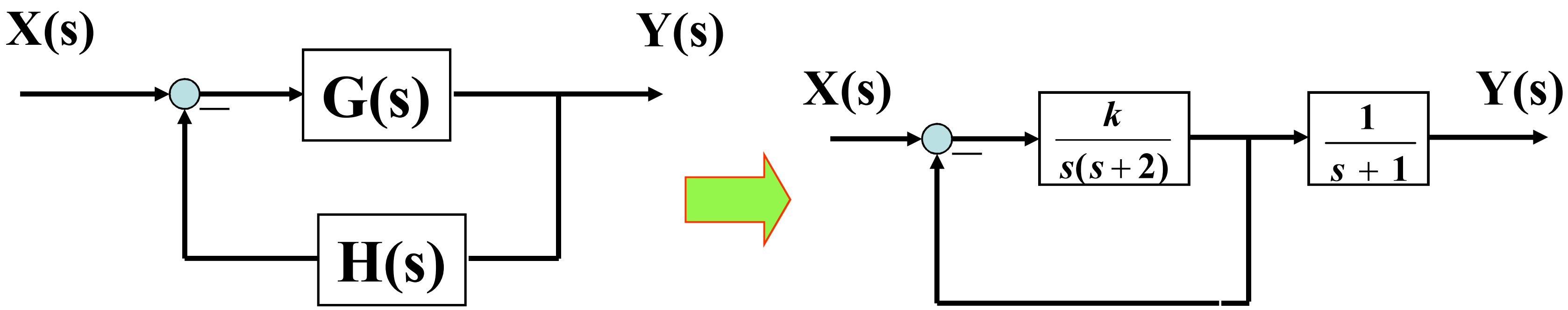
若**GH**对消极点，闭环特征方程变成：

$$s(s+2)+k=0$$

基于对消极点后的**GH**绘制根轨迹的话，闭环系统少了一个极点。因此，在绘制好根轨迹后，应将对消的极点也作为一个闭环极点补上**(**它不随***k***变化而变化**)**。

例5-21　设一控制系统的前向通道传递函数G(s)与反馈通道传递函数分别如下，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)} \qquad H(s)=(s+1)$$



基于对消极点后的GH绘制根轨迹的话，闭环系统少了一个极点。因此，在绘制好根轨迹后，应将对消的极点也作为一个闭环极点补上(它不随k变化而变化)。对此例而言，对消的闭环极点正好落在根轨迹上。

■例5-22　一控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

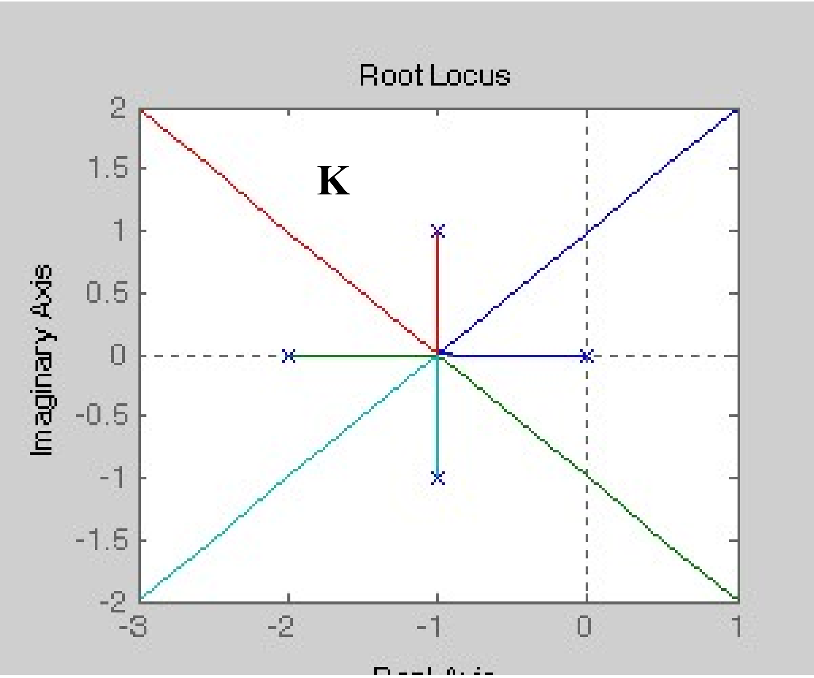
其中p_2、p_3为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设p_1=-2。

(1) p_2 = -1+j，p_3= -1-j

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}=\frac{K}{s(s+2)(s+1-j)(s+1+j)}$$

参见PPT5-2例5-12



根轨迹方法举例

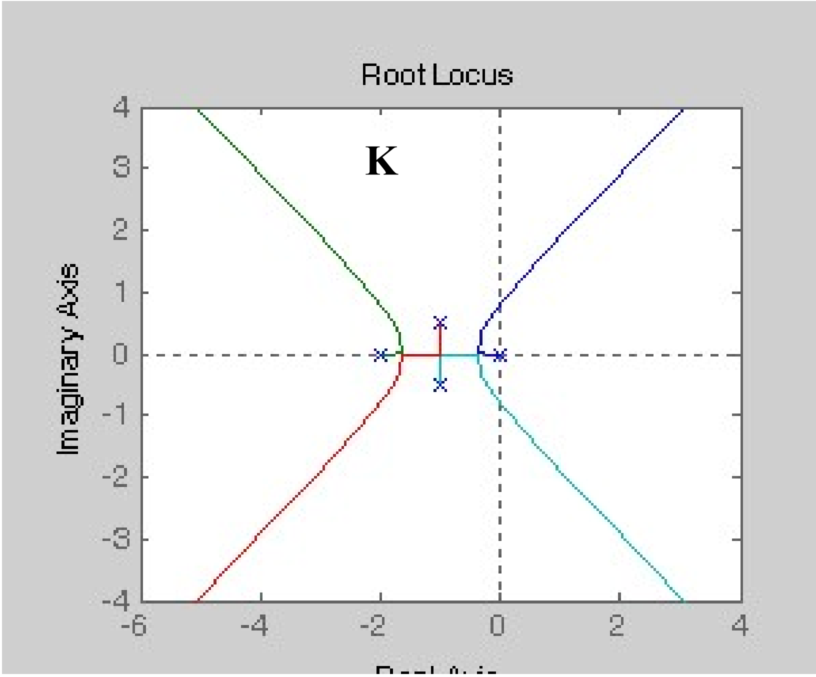
■例5-22　一控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

其中p_2、p_3为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设$p_1=-2$。

(2) $p_2=-1+0.5j$，$p_3=-1-0.5j$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+1.25)}$$
$$=\frac{K}{s(s+2)(s+1-j0.5)(s+1+j0.5)}$$



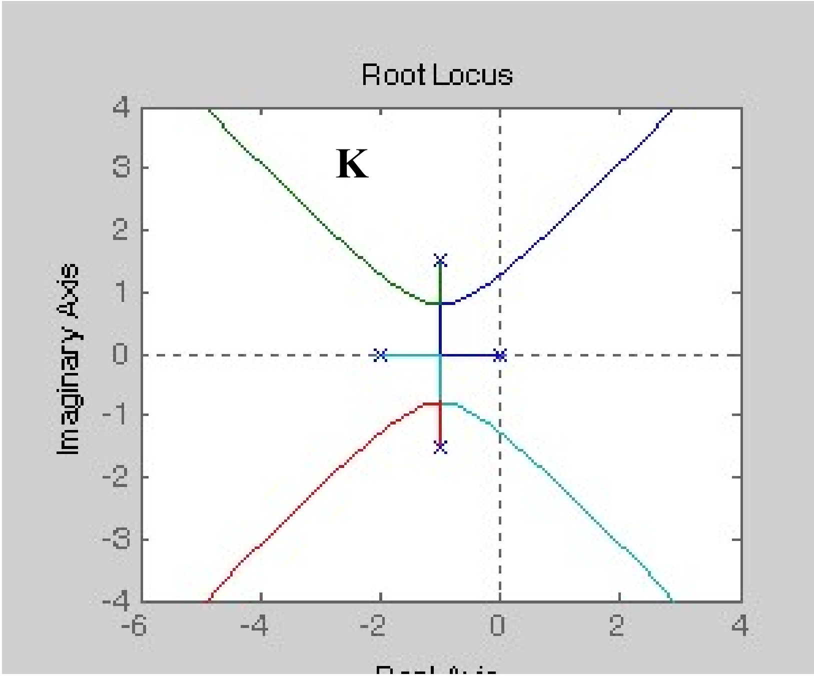
■例5-22　一控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

其中p_2、p_3为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设p_1=-2。

(3) p2= -1+1.5j，p3= -1-1.5j

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+3.25)}$$
$$=\frac{K}{s(s+2)(s+1-j1.5)(s+1+j1.5)}$$



根轨迹方法举例

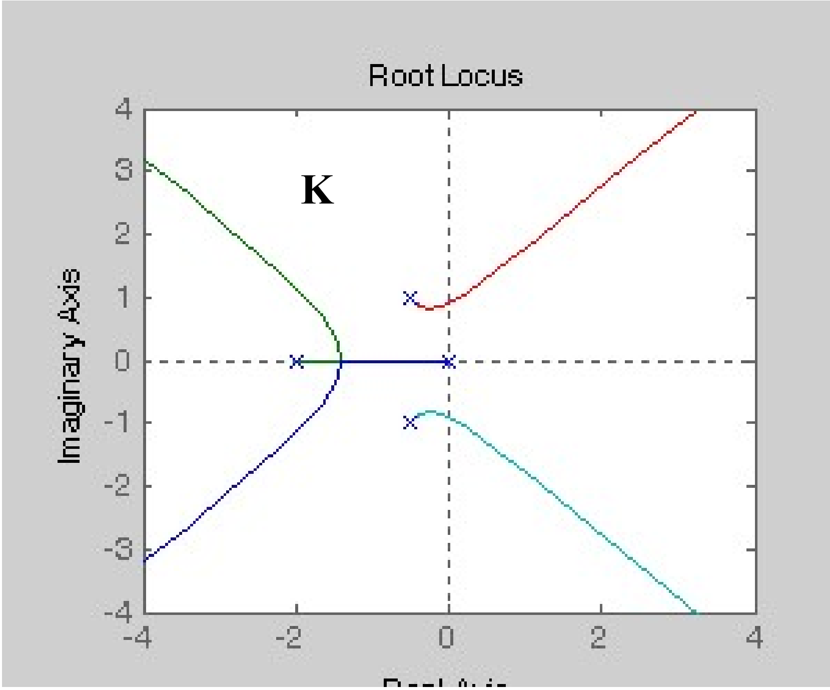
■例5-22　一控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

其中p_2、p_3为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设p_1=-2。

(4) p2= -0.5+j，p3= -0.5-j

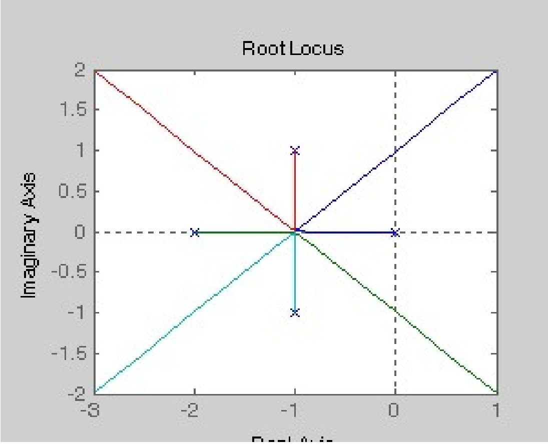
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+s+1.25)}$$
$$=\frac{K}{s(s+2)(s+0.5-j)(s+0.5+j)}$$



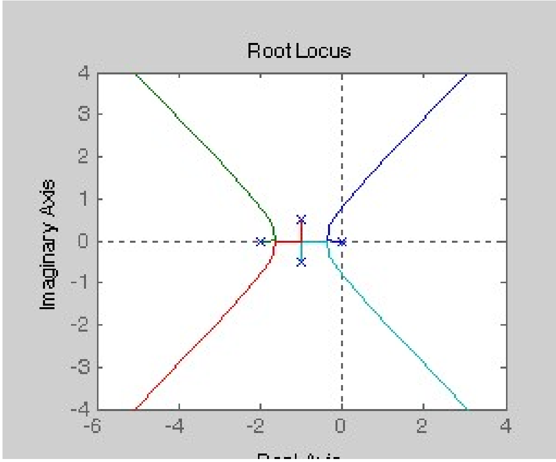
根轨迹方法举例

根轨迹

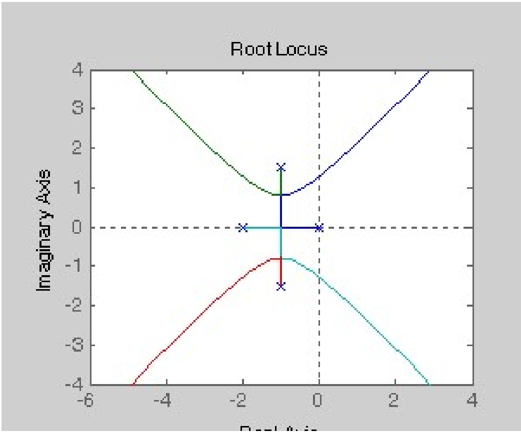
$$(1) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$



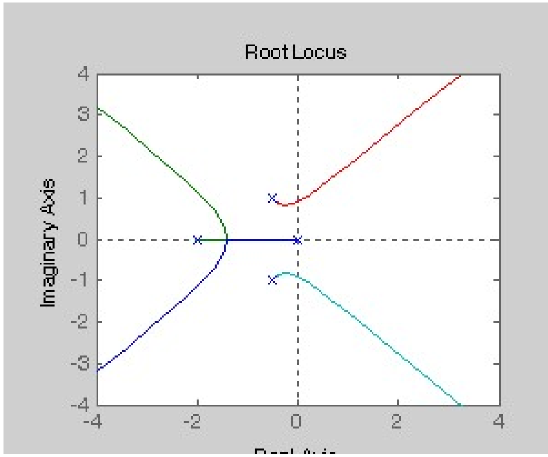
$$(2) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+1.25)}$$



$$(3) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+3.25)}$$



$$(4) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+s+1.25)}$$



Thanks!