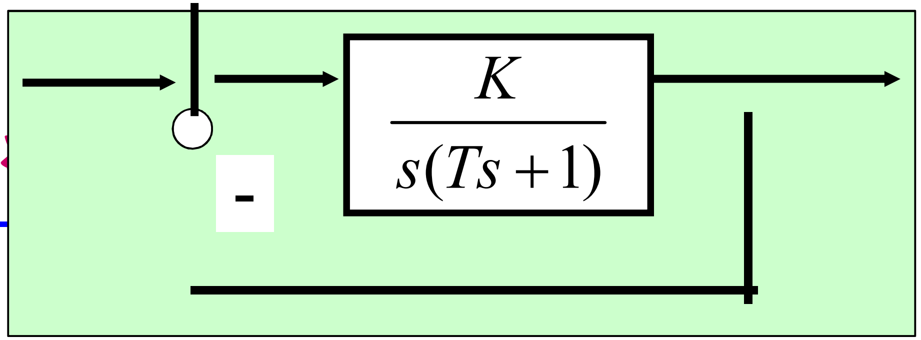
第六章 频率特性分析法

CHAPTER 6 Frequency Response

第六章主要内容

- ✓ 概述
- ✓ **Bode** 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ **Nyquist**稳定性判据
- ✓ 频域指标 **vs** 时域动态指标

频域指标与时域动态



典型单位负反馈二阶系统

开环传递函数$G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}=\dfrac{K/T}{s\left(s+1/T\right)}, K>0, T>0,$ 最小相位

闭环传递函数$\Phi(s)=\dfrac{K/T}{s^2+s/T+K/T}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \omega_n=\sqrt{K/T}, \zeta=1/\sqrt{4KT}>0$

开环频率特性$G(j\omega)=\dfrac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)}$

记开环频率特性的截止频率为ω_c

$$\left|G(j\omega_c)\right|=\frac{\omega_n^2}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+4\zeta^2\omega_n^2}}=1 \Rightarrow \left(\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}\right)-1=0$$

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)=\left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

当阻尼比ζ一定的情况下，开环截止频率ω_c越大，自然频率ω_n也越大，闭环系统的上升时间、峰值时间和调节时间越小，系统的响应速度加快

频域指标与时域动态

开环频率特性 $G(j\omega) = \dfrac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)}$

开环相频特性 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega}{2\zeta\omega_n}\right)$

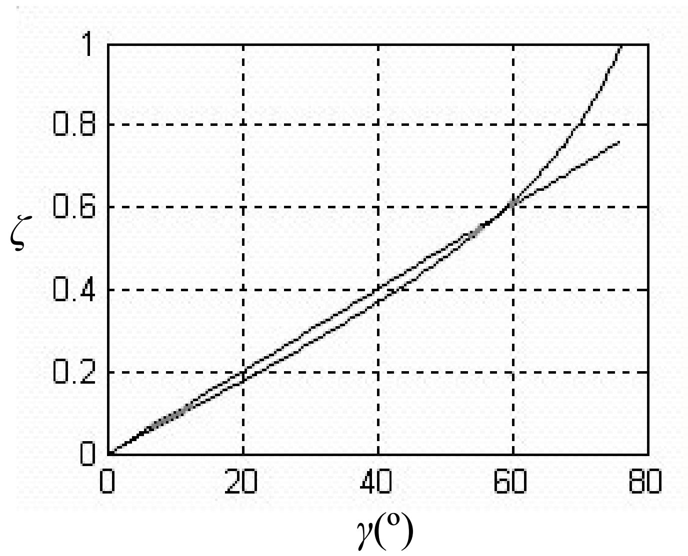
$$\gamma = 180^\circ + \angle G(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{atan}\frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$$

$$= 90^\circ - \operatorname{atan}\frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$$

$$= \operatorname{atan}\left(\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c}\right)$$

$$= \operatorname{atan}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}\right)$$

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right) = \left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$



γ 仅与 ζ 有关，ζ 为 γ 的增函数，且在 $\zeta \le 0.7$ 的范围内，可以近似地用一条直线表示它们之间的关系

$$\zeta \approx 0.01\gamma$$

频域指标与时域动态指标的关系

闭环频率特性$\Phi(j\omega) = \dfrac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2 + \mathrm{j}2\zeta(\omega/\omega_n)}$

$\zeta > 0, \Phi(s)$无极点和零点在原点

记闭环频率特性$\Phi(\mathrm{j}\omega)$的带宽频率为ω_b

$$20\lg|\Phi(j\omega_b)| = 20\lg|\Phi(0)| - 3$$

$$|\Phi(j\omega_b)| = 10^{-\frac{3}{20}} = 0.708$$

$$\frac{1}{\left(1-(\omega_b/\omega_n)^2\right)^2 + 4\zeta^2(\omega_b/\omega_n)^2} = 0.708^2$$

$$\left(1-\frac{\omega_b^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega_b^2}{\omega_n^2}\right) - 2 = 0$$

$$\frac{\omega_b}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

当阻尼比ζ一定的情况下，闭环带宽频率ω_b越大，自然频率ω_n也越大，闭环系统的上升时间、峰值时间和调节时间越小，系统的响应速度加快

对高于带宽频率的正弦输入信号，系统输出将呈现较大的衰减

合理选择控制系统的带宽：
既以所需精度跟踪输入信号，又能抵制噪声扰动信号

频域指标与时域动态指标的关系

➢ 二阶系统频域指标与时域指标的关系

闭环谐振峰值 $M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \zeta \le 0.707$ ⇒ $\sigma = e^{-\pi\sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}} \times 100\%$ $M_r \ge 1$

闭环谐振频率 $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2},\quad \zeta \le 0.707$

闭环带宽频率 $\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$

开环截止频率 $\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}$

相位裕度 $\gamma = arctg\left(\dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}\right)$

调节时间 $T_s = \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$ $\omega_n T_s = \dfrac{7}{tg\gamma}$

二阶系统的谐振峰值 M_r =1.2~1.5时，对应的系统超调量σ= 20~30%，这时系统可以获得较为满意的过渡过程。如果M_r >2，则系统的超调量σ将超过40%。

频域指标与时域动态指标的关系

- 高阶系统：如存在主导极点，可采用二阶系统的公式；如不存在主导极点，有相应的频域与时域指标的近似公式：

谐振峰值 $$M_r = \frac{1}{|\sin\gamma|}$$

超调量 $$\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1),\ \ 1 \le M_r \le 1.8$$

调节时间 $$T_s = \frac{K_0\pi}{\omega_c}$$

$$K_0 = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2,\ \ 1 \le M_r \le 1.8$$

频域指标与时域动态指标的关系

- 一般情况下，若性能指标以稳态误差 e_{ss} 、峰值时间 T_p、最大超调量 σ 和过渡过程时间（调节时间）T_s 等时域性能指标给出时，应用根轨迹法进行综合比较方便

- 如果性能指标是以相位裕度 γ、幅值裕度 h 、谐振峰值 M_r、谐振频率 ω_r 和系统带宽 ω_b 等频域性能指标给出时，应用频率特性法进行综合与校正更合适

性能与方法

域 / 特性	时域 微分方程 分析法	复域 传递函数 根轨迹法	频域 频率特性 频率法（开环Bode图法） 开环因果且最小相位 主要用于0型、1型和2型
稳定性	自由响应收敛到零	闭环极点位于左半开平面	相位裕度大于0、幅值裕度大于1 截止频率附近相当宽的频段内斜率为-20dB/dec
稳态	对阶跃、斜坡、加速度等的稳态响应与输入信号间的差	原点处的开环极点数 工作点处的开环根轨迹增益	对数幅频曲线的起始斜率 低频段幅值
动态	调节时间T_s 最大超调量σ	主导极点的阻尼比ζ 主导极点的自然频率ω_n	相位裕度γ 截止频率ω_c

系统校正的频域法

（1）稳

相位裕度γ不低于45度

幅值裕度不低于6dB

（2）快

相位裕度γ在45度到60度之间

尽可能大的开环截止频率ω_c

（3）准

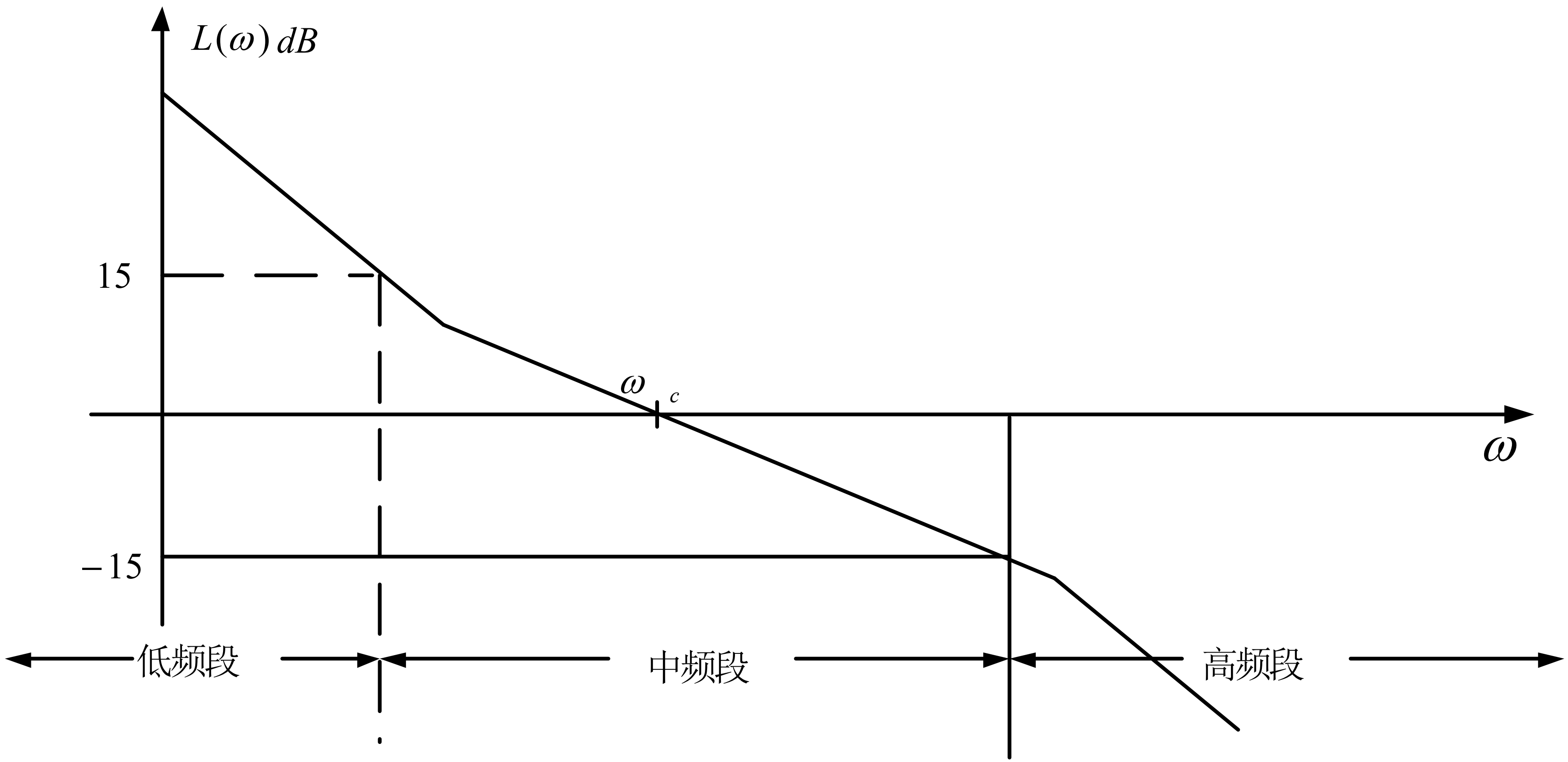
开环幅频起始斜率为-20dB/dec或-40dB/dec

低频段应有较高幅值

（4）抗干扰

开环高频段应有尽可能大的斜率。高频段特性是由小时间常数的环节决定的，由于其转折频率远离截止频率ω_c，所以对系统动态响应影响不大。但从系统的抗高频干扰能力来看，则需引起重视。

三个频段



Thanks !