状态转移矩阵的计算

➢ 对于给定的矩阵 A，计算 STM 闭合形式的方法：

1) 方法 1——直接计算

2) 方法 2—— 利用拉普拉斯变换

3) 方法 3——矩阵 A 对角化

状态转移矩阵的计算1）直接计算

用定义式 $e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$

例 1 假定 A 矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，求exp[At]

解：

$$\because \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\therefore \quad A = A^3 = A^5 = \cdots \quad \text{及} \quad A^2 = A^4 = A^6 = \cdots$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots & \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \cdots \\ 0 & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots \\ 0 & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

$$\dot{x}(t)=ax(t) \Rightarrow x(t)=e^{at}x(0)$$

➢ 求解 S 域内的解，有

$$\dot{x}(t)=ax(t) \xrightarrow{\text{LT}} sX(s)-x(0)=aX(s)$$

$$x(t)=L^{-1}[(s-a)^{-1}]x(0)$$

➢ 比较通过不同方式求得的解，它们应该相等。于是：

$$\boxed{e^{at}=L^{-1}[(s-a)^{-1}]}$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

设 $x_{ij}(t)(i\in\{1,\cdots,m\}, j\in\{1,\cdots,n\},\ t\in(0,\infty))$的拉氏变换为 $X_{ij}(s)$，

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \cdots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}$$ 的拉氏变换定义为

$$X(s)=L[X(t)]=\begin{bmatrix} X_{11}(s) & X_{12}(s) & \cdots & X_{1n}(s) \\ X_{21}(s) & X_{22}(s) & \cdots & X_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m1}(s) & X_{m2}(s) & \cdots & X_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

相应地， $X(s)$的反拉氏变换定义为

$$X(t)=L^{-1}[X(s)]=\begin{bmatrix} L^{-1}[X_{11}(s)] & L^{-1}[X_{12}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{1n}(s)] \\ L^{-1}[X_{21}(s)] & L^{-1}[X_{22}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{2n}(s)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L^{-1}[X_{m1}(s)] & L^{-1}[X_{m2}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{mn}(s)] \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

若 $X(t)$的拉氏变换为 $X(s)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$的拉氏变换为

$$\begin{bmatrix} L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{11}(t)}{\mathrm{d}t}\right] & L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{12}(t)}{\mathrm{d}t}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{1n}(t)}{\mathrm{d}t}\right] \\ L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{21}(t)}{\mathrm{d}t}\right] & L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{22}(t)}{\mathrm{d}t}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{2n}(t)}{\mathrm{d}t}\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{m1}(t)}{\mathrm{d}t}\right] & L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{m2}(t)}{\mathrm{d}t}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{\mathrm{d}x_{mn}(t)}{\mathrm{d}t}\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} sX_{11}(s) - x_{11}(0) & sX_{12}(s) - x_{12}(0) & \cdots & sX_{1n}(s) - x_{1n}(0) \\ sX_{21}(s) - x_{21}(0) & sX_{22}(s) - x_{22}(0) & \cdots & sX_{2n}(s) - x_{2n}(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ sX_{m1}(s) - x_{m1}(0) & sX_{m2}(s) - x_{m2}(0) & \cdots & sX_{mn}(s) - x_{mn}(0) \end{bmatrix}$$

$$= sX(s) - X(0)$$

微分性质依然成立

类似可证，线性性质也依然成立

若 $X(t)$的拉氏变换为 $X(s)$，则 $AX(t)B$的拉氏变换为 $AX(s)B$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

- 对比标量方程和状态方程，状态方程的解类似于标量方程的解；利用拉普拉斯变换求解状态方程

$n=1$　　$\dot{x}(t) = ax(t)$ $\longrightarrow$ $x(t) = e^{at}x(0)$

$\vdots$

$n\neq 1$　　$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$

LT

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)$$

于是

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}t}{1!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

例 假定 A 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$， 求exp[$At$]

解：

$$\because \boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\0&-1&s\end{bmatrix}^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s^2-1}&\frac{1}{s(s^2-1)}\\0&\frac{s}{s^2-1}&\frac{1}{s^2-1}\\0&\frac{1}{s^2-1}&\frac{s}{s^2-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})-\frac{1}{s}\\0&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})\\0&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})&\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})-1\\0&\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})&\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\0&\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})&\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

例　假定 A 矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}$，求exp[$At$]

解：　$\boldsymbol{\Phi}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}$　　$e^{At}=\boldsymbol{\Phi}(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s & -6\\ 1 & s+5\end{bmatrix}^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}$$

$$=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+3} & \frac{6}{s+2}-\frac{6}{s+3}\\ \frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+3} & \frac{-2}{s+2}+\frac{3}{s+3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

如果 A 是对角阵，则 exp[At] 也是对角阵

$$A = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n] \Leftrightarrow e^{At} = diag[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]$$

证：

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\exp\begin{bmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 t^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 t^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \cdots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n t + \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

定理：当且仅当$A \in R^{n\times n}$有n个独立（线性无关）的特征向量时，存在非奇异方阵T使$T^{-1}AT$为对角矩阵，其中，T的各列即是这n个特征向量

例：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 能否对角化？若能，求变换阵

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

求λ=5的特征向量,$(\lambda I-A)\phi=0$

$$\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=0$$

用高斯消去法，得$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=0$，解为$\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q\\q\\q\end{bmatrix},0\neq q\in C.$取$q=1,\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

例：$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

求$\lambda=-1$的特征向量，$\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=0$，解为$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ -q_1-q_2\end{bmatrix}, 0\neq\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}\in C^2$

取$q_1=1, q_2=0, \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$，取$q_1=0, q_2=1, \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$

3个线性无关的特征向量$\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$　　A可对角化

变换阵T即由n个线性无关的特征向量构成

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

定理：属于不同特征值的特征向量是线性无关的

推论：若$A\in R^{n\times n}$有n个互异特征值，A可对角化

形为 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ 的矩阵称为约当块

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda^m & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} & \frac{1}{2!}\frac{d^2(\lambda^m)}{d\lambda^2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}(\lambda^m)}{d\lambda^{n-1}} \\ & \lambda^m & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} & \ddots & \vdots \\ & & \lambda^m & \ddots & \frac{1}{2!}\frac{d^2(\lambda^m)}{d\lambda^2} \\ & & & \ddots & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} \\ & & & & \lambda^m \end{bmatrix}$$

$$\exp\left[\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} t\right] = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} \\ & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

由若干个约当块为对角块组成的块对角阵称为约当形矩阵

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&4&1&0\\0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{t}&te^{t}&0&0&0&0\\0&e^{t}&0&0&0&0\\0&0&e^{4t}&0&0&0\\0&0&0&e^{4t}&te^{4t}&\dfrac{t^{2}e^{4t}}{2}\\0&0&0&0&e^{4t}&te^{4t}\\0&0&0&0&0&e^{4t}\end{bmatrix}$$

定理：$\forall A\in R^{n\times n}$，存在非奇异方阵$T$使$T^{-1}AT$为约当形矩阵

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

对于任意非奇异矩阵 T，有

$$\exp[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}t]=\boldsymbol{T}^{-1}\exp[\boldsymbol{A}t]\boldsymbol{T}$$

即 $$\boldsymbol{T}\exp[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}t]\boldsymbol{T}^{-1}=\exp[\boldsymbol{A}t]$$

证：

$$(T^{-1}AT)^m=(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT)=T^{-1}A^mT$$

$$\begin{aligned}\exp[T^{-1}ATt]&=I+\frac{T^{-1}ATt}{1!}+\frac{(T^{-1}ATt)^2}{2!}+\cdots\\&=T^{-1}T+T^{-1}\frac{At}{1!}T+T^{-1}\frac{(At)^2}{2!}T+\cdots\\&=T^{-1}\left(I+\frac{At}{1!}+\frac{(At)^2}{2!}+\cdots\right)T=T^{-1}\exp[At]T\end{aligned}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

例：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$,求$e^{At}$

解：A可对角化，$T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$

$$T^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix},\quad \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{5t}&&\\&e^{-t}&\\&&e^{-t}\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{5t}+2e^{-t}&e^{5t}-e^{-t}&e^{5t}-e^{-t}\\e^{5t}-e^{-t}&e^{5t}+2e^{-t}&e^{5t}-e^{-t}\\e^{5t}-e^{-t}&e^{5t}-e^{-t}&e^{5t}+2e^{-t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

对于友矩阵 $A(A=A_C)$，当矩阵具有n个不同的特征值 λ_i 时，可以很容易地求得 T（称为 Vandermonde 矩阵，即范德蒙矩阵）

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1}AT = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$$

状态空间模型的解算

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$　　已知初始状态$\boldsymbol{x}(0)$和输入$\boldsymbol{u}(t)$,求$\boldsymbol{x}(t)$　$t \geq 0$

– 方法 1 直接求解方程（时域）

$$A(t) = B(t)C(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) & f(t) \\ g(t) & h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t)e(t)+b(t)g(t) & a(t)f(t)+b(t)h(t) \\ c(t)e(t)+d(t)g(t) & c(t)f(t)+d(t)h(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dot{a}(t)e(t)+a(t)\dot{e}(t)+\dot{b}(t)g(t)+b(t)\dot{g}(t) & \dot{a}(t)f(t)+a(t)\dot{f}(t)+\dot{b}(t)h(t)+b(t)\dot{h}(t) \\ \dot{c}(t)e(t)+c(t)\dot{e}(t)+\dot{d}(t)g(t)+d(t)\dot{g}(t) & \dot{c}(t)f(t)+c(t)\dot{f}(t)+\dot{d}(t)h(t)+d(t)\dot{h}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{a}(t) & \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) & \dot{d}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) & f(t) \\ g(t) & h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}(t) & \dot{f}(t) \\ \dot{g}(t) & \dot{h}(t) \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}C(t) + B(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}$$

设$m \times n$矩阵值函数$M(t)$和$n \times p$矩阵值函数$N(t)$均可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M(t)N(t)] = \frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}N(t) + M(t)\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = A(\beta) - A(\alpha)$$

对于矩阵值函数$A(t) = [a_{ij}(t)]$,定义$\int_\alpha^\beta A(t)\mathrm{d}t = \left[\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right]$

$$\int_\alpha^\beta AB(t)C\mathrm{d}t = A\int_\alpha^\beta B(t)\mathrm{d}tC$$

状态空间模型的解算

e^{-At} 是方阵，$x(t)$ 是 $n\times 1$ 的状态向量，于是有

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)] = e^{-At}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - e^{-At}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = e^{-At}[\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)]$$

对于状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)] = e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

将该方程在 0 到 t 的时间区间上进行积分

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$e^{At}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0)] = e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right]$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \quad t \geq 0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\ t \geq t_0$$

状态转移方程

令 $\beta = t - \tau$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)d\beta$$

状态空间模型的解算

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{Bu}(t-\beta)d\beta$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_{zi}(t)+\boldsymbol{x}_{zs}(t)$$

零状态响应：$x(0)=0$

零输入响应：$u(t)=0$

全响应 = 零输入响应+零状态响应

状态空间模型的解算

例　初始状态$x_1(0)=2, x_2(0)=1$，求单位阶跃 $u(t)=1$ 作用下的$y(t)$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\qquad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+2u(t)$$

解：由前例

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\because \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)d\beta$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}3e^{-2\beta}-2e^{-3\beta} & 6e^{-2\beta}-6e^{-3\beta}\\ -e^{-2\beta}+e^{-3\beta} & -2e^{-2\beta}+3e^{-3\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot 1\mathrm{d}\beta$$

$$=\begin{bmatrix}12e^{-2t}-10e^{-3t}\\ -4e^{-2t}+5e^{-3t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}6e^{-2\beta}-6e^{-3\beta}\\ -2e^{-2\beta}+3e^{-3\beta}\end{bmatrix}\mathrm{d}\beta$$

$$=\begin{bmatrix}12e^{-2t}-10e^{-3t}\\ -4e^{-2t}+5e^{-3t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\\ e^{-2t}-e^{-3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+9e^{-2t}-8e^{-3t}\\ -3e^{-2t}+4e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+9e^{-2t}-8e^{-3t}\\ -3e^{-2t}+4e^{-3t}\end{bmatrix}+2=3+6e^{-2t}-4e^{-3t}$$

状态空间模型的解算

– 方法 2　利用拉普拉斯变换（S 域）

状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\Big\downarrow \ \text{LT}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(s) &= [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0) + [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)\end{aligned}$$

$$\text{LT}^{-1}\ \Big\downarrow$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + L^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]$$

状态空间模型的解算

例 初始状态$x_1(0)=2, x_2(0)=1$，求单位阶跃 $u(t)=1$ 作用下的$y(t)$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+2u(t)$$

$$\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

解： 由前例

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}2s+16\\ s-2\end{bmatrix}+\frac{1}{s(s^2+5s+6)}\begin{bmatrix}6\\ s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+16s+6}{s(s+2)(s+3)}\\[2ex] \dfrac{s-1}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=3+6e^{-2t}-4e^{-3t}$$

$$Y(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+16s+6}{s(s+2)(s+3)}\\[2ex] \dfrac{s-1}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}+\frac{2}{s}=\frac{5s^2+25s+18}{s(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s}+\frac{6}{s+2}-\frac{4}{s+3}$$

状态空间模型的解算

例 已知系统的状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}3e^{-t}-2e^{-2t} & 3e^{-t}-3e^{-2t}\\ -4e^{-2t}+4e^{-t} & -3e^{-2t}+4e^{-t}\end{bmatrix}$$

请求出$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$和$\boldsymbol{A}$。

解: (1) 根据状态转移矩阵的运算性质有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(-t)=\begin{bmatrix}3e^{t}-2e^{2t} & 3e^{t}-3e^{2t}\\ -4e^{2t}+4e^{t} & -3e^{2t}+4e^{t}\end{bmatrix}$$

(2)关于$\boldsymbol{\Phi}(t)$的微分有

$$\frac{d}{dt}\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{A}\exp(\boldsymbol{A}t)=\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{A}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\exp(\boldsymbol{A}t)\right|_{t=0}=\boldsymbol{A}\exp(0)=\boldsymbol{A}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}=\left.\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\begin{bmatrix}-3e^{-t}+4e^{-2t} & -3e^{-t}+6e^{-2t}\\ 8e^{-2t}-4e^{-t} & 6e^{-2t}-4e^{-t}\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

Thanks!