

Міністерство освіти і науки України
Національний Університет
«Києво-Могилянська Академія»
Кафедра математики факультету інформатики

Надлишкове кодування на алгебраїчних кривих

Науковий керівник:

проф. Боднарчук Ю. В.

Виконав:

Трояновський М. М.

Київ 2011

Зміст

Вступ	2
1 Постановка задачі	3
2 Основні поняття	4
2.1 Лінійні коди	4
2.2 Алгебраїчні криві	4
2.3 Дивізори	5
3 Алгебро-геометричні коди	7
3.1 Означення	7
3.2 Приклад алгебро-геометричного коду	7
3.3 Кількість раціональних точок на алгебраїчній кривій .	11
3.4 Алгоритми декодування	11
Висновки	12
Список використаної літератури	13

Вступ

Надлишкове кодування відіграє значну роль у боротьбі з помилками, які виникають при передачі даних через зашумлені телекомунікаційне середовище. Загалом для надійної передачі інформації через ненадійні канали застосовують дві стратегії: виявлення та виправлення помилок. У першому випадку до блоку даних додають контрольну інформацію, за допомогою якої одержувач має змогу зрозуміти, що під час зв'язку відбулося пошкодження відповідного блоку, тому необхідно зробити запит на повторну передачу. Найпростішим прикладом такої контрольної інформації є біт парності, який додається до блоку бінарних даних таким чином, аби загальна кількість одиниць у блоці була парною. Це дає можливість одержувачу виявити помилку в одному біті переданого блоку, проте якщо помилок було більше, вони можуть скасувати одна одну; втім подібний метод можна досить просто узагальнити для виявлення будь-якої непарної кількості помилок.

Проте існують застосування, у яких одного виявлення факту помилки при передачі інформації замало, оскільки повторна передача блоку даних може бути занадто витратною: так при зв'язку із об'єктами у космосі, що віддалені від Землі на велику відстань існує значна затримка, яка буде лише збільшуватися при ретрансмісії; при односторонній передачі даних (наприклад, у телемовленні) ретрансмісія взагалі технічно неможлива. У таких випадках необхідно намагатися виправляти помилки наперед, додаючи до блоку даних надлишкову інформацію, яка дозволить одержувачу відновити блок навіть за наявності помилок передачі. Простим прикладом даного підходу може бути таке бінарне кодування: кожен біт передається тричі підряд, одержувач аналізує триплети та декодує їх у той біт,

якого кількісно більше у триплеті. Зрозуміло, що такий спосіб дозволяє виправити одну помилку в окремому триплеті, але ціна такої можливості досить велика: дані за такого підходу будуть передаватися втричі повільніше.

Природнім є бажання знайти способи надлишкового кодування, які з одного боку дозволятимуть виправляти значну кількість помилок, а з іншого боку не призводить до сповільнення передачі. Розвинутою в цьому аспекті є теорія лінійних кодів, де були встановлені нерівності, які дають можливість порівняти різні кодування між собою, а також обирати для практичного використання коду із граничними характеристиками. Зокрема, важливою є границя Сінглтона, яка стверджує, що для лінійного (n, k, d) -коду справжується нерівність: $d \leq n - k + 1$. Код який досягає відповідної рівності, називають кодом із максимально досяжною мінімальною відстанню, нетривіальним прикладом такого випадку слугують коди Ріда-Соломона.

Однак у теорії лінійних кодів також є проблемні місця. Так, у загальному випадку алгоритм декодування, а також визначення мінімальної дистанції лінійного коду є NP-складними. Тому для практичного використання необхідно використовувати коди зі специфічними властивостями, які дозволятимуть їх ефективно декодувати. У цій роботі описано алгебро-геометричні коди, для яких з одного боку відомий швидкий алгоритм декодування, а з іншого боку була доведена можливість перевершення цими кодами границі Варшавова-Гілберта.

1 Постановка задачі

Мета даної курсової роботи – описати наявні способи надлишкового кодування з використанням еліптичних кривих, характеристики отриманих кодів, базові алгоритми кодування та декодування, а

також їхні переваги у порівнянні з іншими кодами, попередньо визначивши основні теоретичні поняття.

2 Основні поняття

2.1 Лінійні коди

Лінійний код — векторний підпростір C розмірності k векторного простору \mathbb{F}_q^n розмірності n , де \mathbb{F}_q — скінченне поле із q елементів. d — мінімальна відстань за Хемінгом між кодовими словами. Максимальна кількість помилок, які може виправити код: $r = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$. Підсумовуючи ці основні характеристики, часто кажуть про лінійний код як про $(n, k, d)_q$ -код.

Нерівність Сінглтона: для (n, k, d) -коду виконується: $d \leq n - k + 1$, коди для яких виконується рівність $d = n - k + 1$ називають кодами із максимально досяжною мінімальною відстанню (maximum distance separable), вони є у певному сенсі найкращими. З цієї нерівності можна побачити, що, за фіксованого n , k та d не можуть бути одночасно великими.

Нерівність Варшамова-Гілберта: якщо виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^{d-1} C_{n-1}^i (q-1)^i < q^{n-k}$$

то існує лінійний $(n, k, d)_q$ -код.

2.2 Алгебраїчні криві

\mathbb{A}^n — n -вимірний афінний простір над полем k , точками якого будуть надори $P = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in k$. \mathbb{P}^n — n -вимірний проективний простір над k , точками якого є набори $Q = (y_0 : y_1 : \dots : y_n)$, $y_i \in k$, де не всі y_i дорівнюють нулю, при чому набори $(y_0 : y_1 : \dots : y_n)$ та $(\lambda y_0 : \lambda y_1 : \dots : \lambda y_n)$ при $\lambda \in k, \lambda \neq 0$ визначають одну й ту саму

точку. При цьому простір \mathbb{A}^n передбачає природне вкладення у \mathbb{P}^n , яке задається формулою $P = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : y_1 : \dots : y_n)$.

Гладка проективна алгебраїчна крива C у N -вимірному проективному просторі P^N над полем \mathbb{F} — це одновимірний многовид без особливостей, тобто сукупність розв’язків системи однорідних алгебраїчних рівнянь від $(N + 1)$ змінної із коефіцієнтами із \mathbb{F} таких, що матриця похідних у кожній точці задає рівняння прямої; розв’язки загалом потрібно розглядати з координатами у замиканні $\bar{\mathbb{F}}$ основного поля. Інтуїтивно гладкість означає відсутність точок повернення та самоперетину, одновимірність — єдиність дотичного напрямку у кожній точці.

З кривою C пов’язують поле $\mathbb{F}(C)$ раціональних функцій на ній, тобто відношень однорідних многочленів рівного степеню з точністю до рівнянь з C . Функція є регулярною в точці, якщо вона набуває у ній скінченного значення.

2.3 Дивізори

Дивізор алгебраїчної кривої C — це формальна сума її точок, взятих із певною кратністю:

$$D = \sum_{P \in C} n_P P, n_P \in \mathbb{Z},$$

де тільки скінченна кількість цілих чисел n_P відмінна від нуля.

Множина усіх дивізорів, позначена як Div , формує Абелеву групу із законом додавання:

$$\sum_{P \in C} n_P P + \sum_{P \in C} m_P P = \sum_{P \in C} (n_P + m_P) P$$

Степінь D — це цілочисельна сума його коефіцієнтів:

$$\deg(D) = \sum_{P \in C} n_P$$

$\forall D_1, D_2 \in \text{Div} : \deg(D_1) + \deg(D_2) = \deg(D_1 + D_2)$, тому відображення $\deg : \text{Div} \rightarrow \mathbb{Z}$ є гомоморфізмом. Множина Div^0 дивізорів ступеню 0 є підгрупою Div , а також ядром гомоморфізму \deg .

Порядок D у точці P — це цілий коефіцієнт при P : $\text{ord}_P(D) = n_P$.

Носій дивізора — $\text{supp}(D) = \{P | n_P \neq 0\}$.

Якщо у дивізора всі n_P — невід’ємні, такий дивізор називається ефективним. Поняття ефективності дозволяє задати відношення порядку на множині дивізорів.

Довільну ненульову раціональну функцію $f \in \mathbb{K}(X)$ можна пов’язати із дивізором $(f) = \sum \text{ord}_P(f)P$. Таке визначення є коректним, бо у такої функції на X є скінченна кількість нулів та полюсів, тому $\text{ord}_P(f) \neq 0$ для скінченного числа точок P .

Нехай X — гладка проективна крива роду g та канонічного класу K . Теорема Рімана-Роха стверджує, що для будь-якого дивізора $D \in \text{Div}(X)$ виконується співвідношення

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg D - g + 1$$

тут $\ell(D)$ — розмірність простору раціональних функцій на кривій, полюси яких у кожній точці не гірші, ніж відповідні коефіцієнти D . Зазначене співвідношення грає ключову роль для визначення конструктивних характеристик алгеброгеометричного коду.

3 Алгебро-геометричні коди

3.1 Означення

Алгебро-геометричні коди — це клас лінійних кодів, які вперше були описані Валерієм Денисовичем Гоппою, тому їх часто називають кодами Гоппи, проте це іноді може вносити неясність, оскільки такі коди не єдині, які називають на його честь. Його ідеєю було сконструювати код, за допомогою обчислення функцій із простору Рімана-Роха на раціональних точках алгебраїчної кривої.

$L(D)$ — це \mathbb{F} -векторний простір для будь-якого раціонального дивізора кривої, визначеної над \mathbb{F} . Згадавши, що лінійний код — це просто векторний підпростір \mathbb{F}^n , виникає природне бажання побудувати код. Проте $L(D)$ є векторним простором функцій, тому він не зобов'язаний бути кодом; однак лінійна властивість просторів Рімана-Роха дозволяє сконструювати лінійний код. Окрім того, теорема Рімана-Роха дозволяє визначити характеристики коду.

3.2 Приклад алгебро-геометричного коду

Нехай ми маємо криву C над скінченним полем \mathbb{F} , скінченну множину точок $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ і дивізор D , відокремлений (disjoint) від P_i . Код Гоппи $GC = GC(\mathcal{P}, D, C)$ визначають як

$$GC = \{(\phi(P_1), \dots, \phi(P_n)) \mid \phi \in L(D)\}$$

Зазначений запис є функціональним кодом (L -конструкція). Код лишків (residue code, Ω -конструкція) визначають як

$$GC' = \{c \in \mathbb{F}^n \mid c \cdot (\phi(P_1), \dots, \phi(P_n)) = 0, \forall \phi \in L(D)\}$$

Конструктивні характеристики коду можна оцінити такими спів-

відношеннями:

$$n = |\mathcal{P}|, k \geq n - a + g - 1, d \geq a - 2g + 2$$

Для прикладу нехай C — еліптична крива, задана за допомогою $f = X^3 + Y^2Z + YZ^2$ над \mathbb{F}_4 ($w^2 + w + 1 = 0$). Це несингулярна крива роду 1 із дев'ятьма раціональними точками, одна з яких, $Q = (0 : 1 : 0)$, — нескінченно віддалена точка. Утворимо множину \mathcal{P} усіма точками, окрім Q , тоді

$$P_1 = (0 : 0 : 1); P_2 = (0 : 1 : 1); P_3 = (1 : w : 1); P_4 = (1 : w^2 : 1);$$

$$P_5 = (w : w : 1); P_6 = (w : w^2 : 1); P_7 = (w^2 : w : 1); P_8 = (w^2 : w^2 : 1)$$

Нехай дивізор $D = 5Q$, тоді $L(D)$ — п'ятивимірний простір із базисом $L(5Q) = \langle 1, x, y, x^2xy \rangle$.

У цьому випадку конструктивна мінімальна відстань коду дорівнює 5, тому код буде здатен виправити дві помилки. Перевірочна матриця виглядатиме таким чином:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x(P_1) & x(P_2) & \dots & x(P_8) \\ y(P_1) & y(P_2) & \dots & y(P_8) \\ x^2(P_1) & x^2(P_2) & \dots & x^2(P_8) \\ xy(P_1) & xy(P_2) & \dots & xy(P_8) \end{pmatrix}$$

Після обчислень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & w & w & w^2 & w^2 \\ 0 & 1 & w & w^2 & w & w^2 & w & w^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & w^2 & w^2 & w & w \\ 0 & 0 & w & w^2 & w^2 & 1 & 1 & w \end{pmatrix}$$

Програмний код, який реалізує описаний вище приклад у математичному середовищі Magma:

```
> A<x,y> := AffineSpace(FiniteField(4),2);
> f:=x^3+y^2+y;
> C:=Curve(A,f);
> P1:=Places(C,1);
> Div := DivisorGroup(C);
> P1;
[
    Place at (0 : 1 : 0),
    Place at (0 : 0 : 1),
    Place at (0 : 1 : 1),
    Place at ($.1 : $.1 : 1),
    Place at ($.1 : $.1^2 : 1),
    Place at ($.1^2 : $.1 : 1),
    Place at ($.1^2 : $.1^2 : 1),
    Place at (1 : $.1 : 1),
    Place at (1 : $.1^2 : 1)
]
> D:=5*P1[1];
> P2:=[P1[2],P1[3],P1[4],P1[5],P1[6],P1[7],P1[8],P1[9]];
```

```

> D0:=Div!D;
> D0;
Divisor on Curve over GF(2^2) defined by
$.1^3 + $.2^2*$.3 + $.2*$.3^2
> RiemannRochSpace(D0);
KModule of dimension 5 over GF(2^2)
Mapping from: KModule of dimension 5 over GF(2^2) to Function Field of
over GF(2^2) defined by
$.1^3 + $.2^2*$.3 + $.2*$.3^2
> Basis(D0);
[
    1,
    x,
    x^2,
    y,
    x*y
]
> GC:=AlgebraicGeometricCode(P2,D0);
> GC;
[8, 5, 3] Linear Code over GF(2^2)
Generator matrix:
[ 1 0 0 0 0 $.1^2 $.1^2 1]
[ 0 1 0 0 0 $.1^2 $.1 0]
[ 0 0 1 0 0 $.1 1 $.1]
[ 0 0 0 1 0 $.1 0 $.1^2]
[ 0 0 0 0 1 1 1 1]

```

3.3 Кількість раціональних точок на алгебраїчній кривій

Нерівність Серре дає оцінку кількості точок N на кривій роду g , визначеної над \mathbb{F}_q :

$$|N - (q + 1)| \leq g[2\sqrt{q}]$$

Оскільки ця величина визначає довжину відповідного алгебро-геометричного коду, доцільно застосовувати криві із найбільшою кількістю раціональних точок.

3.4 Алгоритми декодування

Основний алгоритм декодування коду $C = (X, \mathcal{P}, D)_\Omega$ за допомогою допоміжного дивізора виглядає таким чином:

1. Обчислити базис f_i простору $L(D)$, базис g_j простору $L(D')$ і базис h_k простору $L(D - D')$.
2. Для даного вектора $v \in \mathbb{F}_q^n$ обчислити синдроми $s(v, g_j, h_k)$ та $s(v, f_i)$.
3. Знайти розв'язок y системи лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{\ell} s_{ij} x_i = 0$$

4. Знайти (за допомогою перебору точок P_i ті i , для яких $g_y(P_i) = 0$).
5. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{i \in I_y} f_j(P_i) z_i = s(v, f_j)$$

Висновки

Попри специфічні властивості алгеброгеометричні коди поки масово не застосовують в індустрії, де знайшли використання коди Ріда-Соломона, які поступово витісняються LDPC-кодами. Проте теорія, яка є підґрунтям для побудови алгеброгеометричних кодів досі активно розвивається, тому є можливість виявлення нових, більш швидких алгоритмів кодування та декодування, а також покращення характеристик коду, зокрема можливість декодувати поза конструктивною відстанню. Окрім того, дослідження у даній галузі можуть дозволити зробити додаткові узагальнення у теорії кодування.

Література

- [1] С. Г. Влэдуц Д. Ю. Ногин, М. А. Цфасман. Алгеброгеометрические коды. Основные понятия / М. А. Цфасман С. Г. Влэдуц, Д. Ю. Ногин. — Издательство Московского центра непрерывного образования, 2003.
- [2] Гоппа, В. Д. Алгебраико-геометрические коды / В. Д. Гоппа // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1982. — Vol. 46, № 4. — P. 762–781.
- [3] Гоппа, В. Д. Коды, ассоциированные с дивизорами / В. Д. Гоппа // Пробл. передачи информ. — 1977. — Vol. 13, № 1. — P. 33–39.
- [4] Hao, Chen. Algebraic geometric codes with applications / Chen Hao // Frontiers of Mathematics in China. — 2007. — Vol. 2, № 1. — P. 1–11.
- [5] Цфасман, М. А. Коды Гоппы, лежащие выше границы Варшавова–Гилберта / М. А. Цфасман // Пробл. передачи информ. — 1982. — Vol. 18, № 3. — P. 3–6.
- [6] А. М. Барг Г. Л. Кацман, М. А. Цфасман. Алгеброгеометрические коды по кривым малых родов / М. А. Цфасман А. М. Барг, Г. Л. Кацман // Пробл. передачи информ. — 1987. — Vol. 23, № 1. — P. 42–46.
- [7] Cheng, Qi. Hard problems of algebraic geometry codes.
- [8] Shokrollahi, M. Amin. Decoding algebraic-geometric codes beyond the error-correction bound / M. Amin Shokrollahi, Hal Wasserman // STOC '98: Proceedings of the thirtieth annual ACM sym-

- posium on Theory of computing. — New York, NY, USA: ACM, 1998. — P. 241–248.
- [9] Dai, Zhuo Jia. — Algebraic Geometric Coding Theory. — Master's thesis, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Australia, 2006.
- [10] Goppa, V. D. Geometry and Codes / V. D. Goppa; Ed. by M. Hazewinkel. — New York: Springer-Verlag, 2002.
- [11] Goldschmidt, D. M. Algebraic functions and projective curves / D. M. Goldschmidt. — Springer, 2002.
- [12] А. Г. Ростовцев, Е. Б. Маковенко. Теоретическая криптография / Е. Б. Маковенко А. Г. Ростовцев. — АНО НПО «Профессионал», 2004.
- [13] Coblitz, N. Algebraic Aspects of Cryptography / N. Coblitz. — Springer, 2002.
- [14] Pellikaan, Ruud. On a decoding algorithm for codes on maximal curves / Ruud Pellikaan // IEEE Transactions on Information Theory. — 1989. — Vol. 35, № 6. — P. 1228–1232.
- [15] Porter, S. C. Decoding geometric goppa codes using an extra place / S. C. Porter, Ba-Zhong Shen, Ruud Pellikaan // IEEE Transactions on Information Theory. — 1992. — Vol. 38, № 6. — P. 1663–1676.
- [16] Høholdt, Tom. On the decoding of algebraic-geometric codes / Tom Høholdt, Ruud Pellikaan // IEEE Transactions on Information Theory. — 1995. — Vol. 41, № 6. — P. 1589–1614.

- [17] Fast decoding of algebraic-geometric codes up to the designed minimum distance / Shojiro Sakata, Jørn Justesen, Y. Madelung et al. // IEEE Transactions on Information Theory. — 1995. — Vol. 41, № 6. — P. 1672–1677.
- [18] Duursma, Iwan M. Majority coset decoding / Iwan M. Duursma // IEEE Transactions on Information Theory. — 1993. — Vol. 39, № 3. — P. 1067–.
- [19] Feng, Gui Liang. Decoding algebraic-geometric codes up to the designed minimum distance / Gui Liang Feng, Thammavarapu R. N. Rao // IEEE Transactions on Information Theory. — 1993. — Vol. 39, № 1. — P. 37–45.
- [20] Wocjan, P. — The Brill–Noether Algorithm: Construction of Geometric Goppa Codes and Absolute Factorization. — Master’s thesis, University of Kalsruhe, 1999. <http://www.cs.caltech.edu/wocjan/>.
- [21] Hess, Florian. Computing riemann-roch spaces in algebraic function fields and related topics / Florian Hess // J. Symb. Comput. — 2002. — Vol. 33, № 4. — P. 425–445.