Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 0.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-4;6;-3;2)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-5;6;-4;5)$, $\boldsymbol{a}_3(0;-2;5;-1;-3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;-1;6)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1;3)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;-3;-4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-6;-6;-17)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(3;6;-4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;5;-2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(1;3;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-4;2;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;-3;1;-2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(5;6;6)$, $\boldsymbol{b}(5;6;5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-7&1&-5\\12&-2&8\\6&0&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-11&-3&-7\\-14&-12&-11\\18&9&12\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+4x_1x_2+12x_1x_3-3x_2^2-14x_2x_3-20x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $11x^2-12xy+6xz+6y^2-4yz+3z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2-4xy+5y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 1.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(5;-4;-4;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;1;-1;0;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-1;-7;1;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;1;2)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1;3)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;0;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(3;10;20)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-4;5;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;-2;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;3;-5)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-3;-2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(5;-12;-12;5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x}) = (-6x_1+2x_2+3x_3;-3x_1-x_2+3x_3;4x_1-4x_2+x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}13&-15&0\\10&-11&-1\\4&-5&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&-3&-4\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy+4xz-5y^2-6yz-7z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x^2+8xz-y^2-2yz-17z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $6x^2-4xy+9y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 2.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(4;1;0;5;6)$, $\boldsymbol{a}_2(3;1;2;4;5)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;1;3;3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;3;0)$, $\boldsymbol{e}_2(2;5;2)$, $\boldsymbol{e}_3(2;0;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(1;4;2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(3;4;-4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-3;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-1;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-2;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-3;-2;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-3;-2;-1;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(5;1;-1)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -8 & -9 \\ 11 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & 12 & -6 \\ -10 & 13 & -6 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2-2x_1x_2+6x_1x_3-2x_2^2+4x_2x_3-11x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x^2-4xz+y^2-6yz-11z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2+4xy-y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 3.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-1;0;-3;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;5;2;7;7)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;2;1;2;5)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;3;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;4;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(1;-2;4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-6;-3;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-2;-4;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;2;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-2;-3;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;1;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;4;13;13)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(5;-5;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -4 \\ 12 & 15 & 6 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 \\ -2 & -10 & -6 \\ 3 & 18 & 11 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy-4xz-10y^2+16yz-13z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+6x_1x_2-6x_1x_3-10x_2^2+18x_2x_3-10x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2-8xy-4y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 4.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;1;-5;1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;4;-5;-6;3)$, $\boldsymbol{a}_3(0;1;-2;-1;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;-2;3)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3(6;3;-7)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(21;10;-24)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(2;-4;-4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;3;2;-4)$, $\boldsymbol{a}_2(1;2;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;2;3;-5)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;3;-4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;1;1;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (6t+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 2f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 1 & -11 & 5 \\ 3 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x_1^2+6x_1x_2-6x_1x_3-6x_2^2+18x_2x_3-19x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $6x^2+12xy+4xz+11y^2+6yz+3z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $6x^2-4xy+9y^2=20$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 5.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;2;1;-3;0)$, $\boldsymbol{a}_2(2;1;3;1;5)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-3;-1;5;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;2;0)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;-1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(0;4;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(2;-9;1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(1;4;4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(3;-1;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-4;2;3;2)$, $\boldsymbol{a}_4(3;-2;-1;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(11;-7;-8;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(6;2;5)$, $\boldsymbol{b}(-6;-2;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -12 \\ -2 & -7 & -12 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & -5 & 6 \\ 4 & 1 & -4 \\ -20 & -10 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+6x_1x_2+2x_1x_3-11x_2^2+6x_2x_3-20x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $7x^2-8xy-2xz+y^2-4yz+3z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2+2xy+2y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 6.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-6;4;-3;1;-5)$, $\boldsymbol{a}_2(0;-2;3;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;-1;0;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-5;2;3)$, $\boldsymbol{e}_2(7;-3;-3)$, $\boldsymbol{e}_3(8;-3;-5)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(16;-6;-8)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-2;-2;2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;-1;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(2;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(3;2;2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;1;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(9;11;8;-12)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-5;5;1)$, $\boldsymbol{b}(2;-4;1)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -7 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x_1^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 16x_2^2 - 20x_2x_3 - 10x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-8xy - 4xz - 6y^2 - 8yz - 7z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $x^2 + 10xy + y^2 = 4$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 7.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;1;2;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;1;3;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(0;-2;-4;-5;2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(4;1;3)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(0;1;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(20;10;4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(6;-1;4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-2;-1;4;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;2;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-1;-4;3)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-1;-3;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-3;-4;8;-1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(6;2;-6)$, $\boldsymbol{b}(2;-2;-3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ 8 & 6 & 12 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -9 & 8 & 3 \\ 12 & -12 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-3x_2^2+6x_2x_3-11x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-14x_1^2+8x_1x_2+16x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-4x^2 - 6xy + 4y^2 = 5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 8.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(8;1;-2;-7;3)$, $\boldsymbol{a}_2(1;0;1;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;-8;5;-3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1;0)$, $\boldsymbol{e}_3(1;0;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-11;-4;6)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;2;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;-2;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;2;2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;3;3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-2;3;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-8;-10;1;-3)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (-4t-6)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 5f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -19 & -10 & -17 \\ 12 & 7 & 9 \\ 18 & 9 & 17 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 12 & -1 & 6 \\ 12 & -1 & 6 \\ -12 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2 + 8xy + 8xz - 10y^2 - 12yz - 11z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x^2 + 4xy + 2xz - y^2 + 2yz$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-3x^2 - 8xy + 3y^2 = 5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 9.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(7;0;2;1;5)$, $\boldsymbol{a}_2(4;1;1;2;3)$, $\boldsymbol{a}_3(1;2;0;3;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(5;-5;-4)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;2;3)$, $\boldsymbol{e}_3(-4;2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-5;-8;-23)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-1;5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;5;-2;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-2;1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(3;2;-1;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(6;6;-2;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(-1;2;-1)$, $\boldsymbol{b}(-1;-6;-3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \\ 10 & -10 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2 + 12xy - 4xz - 20y^2 + 8yz - 7z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_2^2 + 12x_2x_3 + 5x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2 + 6xy - 5y^2 = 6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 10.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;2;-2;-2;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;3;-4;-3;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;-6;5;7;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;1;8)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;0;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;-1;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(4;2;-8)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;6;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;-1;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-1;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-4;4;1)$, $\boldsymbol{a}_4(2;2;-3;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-1;13;-12;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(-9x_1-5x_2+2x_3;7x_1-8x_2-8x_3;-3x_1-4x_2+x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}8&-16&4\\2&-6&4\\4&-10&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4&2&-2\\6&2&6\\-3&-3&5\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2-2xy+6xz-2y^2+8yz-11z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $10x_1^2-6x_1x_2-6x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $9x^2+6xy+9y^2=4$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 11.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;0;4;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(7;-1;-5;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;-3;1;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-5;3;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(6;-5;3)$, $\boldsymbol{e}_3(4;-3;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-2;2;-1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-4;4;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;2;2;-5)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-2;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;1;2;-5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;-1;-6;14)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(-3;-1;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-4&5&-3\\1&-12&5\\2&-14&5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-12&-1&-7\\18&0&12\\12&1&7\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy+12xz-10y^2-20yz-21z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-7x_1^2+6x_1x_2-18x_1x_3+x_2^2+6x_2x_3-7x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2+8xy+5y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 12.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;-2;5;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;-2;2;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;0;1;3;1)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;2;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(2;-2;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-1;-3;-1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(3;0;6)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;2;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-3;3;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;2;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;-2;2;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;9;-6;4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.
4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-4;2;-6)$, $\boldsymbol{b}(-3;1;-6)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -17 & 4 \\ 9 & 11 & 12 \\ -18 & -6 & -16 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -2 \\ -14 & -1 & -4 \\ 10 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+6xy+6xz-10y^2-12yz-19z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $2x^2-2xy+6xz+2y^2-6yz+10z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $3x^2+10xy+3y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 13.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;1;-3;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;1;-2;0;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-7;-3;5;-1;5)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;7;2)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;-2;4)$, $\boldsymbol{e}_3(2;1;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-10;-14;5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-6;6;0)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-2;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-1;2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(3;2;-3;4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-5;-5;2;-5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.
4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 12 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 15 & -10 \\ -2 & 10 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x_1^2+6x_1x_2+12x_1x_3-5x_2^2-8x_2x_3-18x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $3x_1^2+8x_1x_2-2x_1x_3+18x_2^2-8x_2x_3+3x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $-4x^2-8xy+2y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 14.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(0;-5;-5;1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(2;3;1;-1;0)$, $\boldsymbol{a}_3(3;7;4;-2;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2(0;1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;2;5)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(9;14;4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;5;1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-4;2;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-1;5;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-7;6;-12;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(4;5;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 4 & -2 & -4 \\ -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 4 \\ -4 & -6 & -6 \\ 9 & 14 & 14 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+2xy+6xz-2y^2-2yz-14z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $7x_1^2+6x_1x_2-18x_1x_3-x_2^2-6x_2x_3+7x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2-4xy-y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 15.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;-8;2;0;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-7;-3;-3;-5;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-1;1;1;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;-1;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(2;1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;0;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(14;0;-6)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;3;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-2;-3;4)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;2;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;1;-3;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-2;3;-7;2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x;y;z)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x}) = (-2x+2y+3z; -7x-4y+9z; 5x-6y+6z)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ -15 & 7 & -3 \\ 10 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & -5 & 7 \\ -8 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_2x_3-13x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x^2-4xy-4xz+2yz$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-4xy+2y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 16.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-7;0;-8;1;5)$, $\boldsymbol{a}_2(-5;-4;-4;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_3(4;-1;5;-1;-3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;0;1)$, $\boldsymbol{e}_2(4;-1;-3)$, $\boldsymbol{e}_3(2;-1;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-19;5;14)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;-2;3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;-1;-2;-4)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-1;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(2;2;1;4)$, $\boldsymbol{a}_4(1;1;1;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(5;5;3;10)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(-4;4;6)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\11&-7&-17\\-3&2&5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-5&6&-2\\-2&3&-2\\-3&9&-6\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+2x_1x_2+6x_1x_3-2x_2^2-19x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2xz-2yz+z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $6x^2-8xy+6y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 17.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(2;-1;-1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(4;-3;3;1;-5)$, $\boldsymbol{a}_3(-5;3;0;-2;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;-1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(1;1;4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-4;17;12)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-5;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;-4;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(4;4;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(2;2;-1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;0;3;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)-4f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2,t,1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}5&-8&5\\4&-13&10\\7&-18&13\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4&8&4\\2&10&4\\-4&-16&-6\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x_1^2+16x_1x_2+8x_1x_3-19x_2^2-10x_2x_3-10x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x_1^2+2x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2-4xy+5y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 18.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(2;-5;-1;1;4)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-4;0;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(0;-3;1;1;-10)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-1;0)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;0;1)$, $\boldsymbol{e}_3(1;-1;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(6;-2;-11)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(4;-4;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;2;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;2;-3;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-4;4;1;-1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(3;-1;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 16 \\ 3 & -9 & -13 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -6 \\ 2 & -7 & -6 \\ 6 & 14 & 17 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+4xy-4xz-5y^2+16yz-18z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x_1^2-4x_1x_3-x_2^2+8x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2-4xy+4y^2=8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 19.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;2;-2;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-3;5;0;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-3;1;-3;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-5;-4;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(1;0;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-6;-3;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-4;-4;-4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-4;-1;5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;2;-4;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;1;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(4;-2;3;2)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-1;2;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-6;4;-10;-2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(-5;-3;4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -13 & 14 \\ 5 & 18 & -20 \\ 2 & 13 & -16 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 2 \\ 17 & -8 & 4 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2^2+8x_2x_3-11x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-4xy+2xz-2yz+z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $x^2+4xy-2y^2=4$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 20.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(9;-4;-7;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-1;2;0;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-9;3;1;-4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-5;-2;2)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;-3;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-7;1;6)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-13;-1;9)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;2;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;3;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;3;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-4;-1;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;12;4;-10)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(-5;-1;2)$, $\boldsymbol{b}(-3;3;-5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 \\ -4 & -8 & -1 \\ -8 & -16 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 4 \\ -9 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy+8xz-9y^2-10yz-18z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $7x_1^2+6x_1x_2+18x_1x_3-x_2^2+6x_2x_3+7x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2+8xy-3y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 21.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;-6;5;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(9;9;-4;-2;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(4;5;-3;-1;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(4;0;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(0;-3;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-24;-7;20)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(3;0;-6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-3;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;4;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;2;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;-1;1;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(6;2;-2;-6)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x;y;z)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x}) = (3x+5y-8z; 4y-6z; 6x+9y-7z)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 11 & -11 & -5 \\ -12 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x_1^2-6x_1x_2+12x_1x_3-5x_2^2+8x_2x_3-17x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $7x^2-6xy-18xz-y^2+6yz+7z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2-8xy-4y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 22.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;2;-5;-3;1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;2;1;-1;7)$, $\boldsymbol{a}_3(0;1;-1;-1;2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-2;-3;3)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;-2;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;0;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-10;-10;6)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;3;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-2;1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;3;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-1;1;2)$, $\boldsymbol{a}_4(1;1;-1;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(10;7;-7;-10)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 2f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 6 & 12 & 15 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 3 \\ 18 & 0 & 7 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+12xy+4xz-19y^2-10yz-5z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-10x_1^2-18x_1x_2-6x_1x_3-10x_2^2-6x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2+10xy+7y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 23.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;4;-3;-1;7)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;6;-1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-1;-1;0;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;5;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(3;8;0)$, $\boldsymbol{e}_3(2;2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(6;12;-2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;6;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-2;-2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(2;4;3;-4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(11;15;12;-13)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(-1;5;2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ -1 & -6 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -12 \\ -8 & -1 & 8 \\ 11 & 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2-4xy+8xz-3y^2+10yz-11z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x_1^2+8x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $8x^2-8xy-7y^2=8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 24.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(7;1;-2;-3;-5)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;0;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-1;-1;0;2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;-5;1)$, $\boldsymbol{e}_2(-4;7;-2)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;2;0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(1;-3;1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(3;1;6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;-4;-2;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;-2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;3;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;-2;-1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;12;7;-5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(6;-2;-6)$, $\boldsymbol{b}(2;-3;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & 6 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -12 & 6 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2+2x_2x_3-4x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x_1^2-12x_1x_3+3x_2^2+6x_2x_3+7x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2-10xy+7y^2=12$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 25.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;3;-1;0;2)$, $\boldsymbol{a}_2(0;2;-1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-6;-4;-1;7;9)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;-3;-4)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;1;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(3;7;9)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;5;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-1;-2;3)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;3;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-4;-1;5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-2;-7;-5;9)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(-3;3;2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ -16 & 3 & 6 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x_1^2+12x_1x_2-6x_1x_3-14x_2^2+20x_2x_3-13x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x_1^2+4x_1x_3+2x_2^2+8x_2x_3+3x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2-3xy+3y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 26.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;1;5;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;2;0;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;-1;1;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;6;0)$, $\boldsymbol{e}_3(1;-3;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(2;-9;-2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-4;1;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;-3;4)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;3;-5)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-2;-3;5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;-3;-8;11)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(8x_1+9x_2+8x_3;-7x_1-4x_2+7x_3;-9x_1+4x_2+4x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-3&-16&10\\4&7&0\\0&10&-9\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}8&12&0\\-5&-9&1\\-6&-12&2\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+4x_1x_2+12x_1x_3-5x_2^2-18x_2x_3-25x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x^2+2xy-8xz+y^2+8yz-14z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2+4xy+4y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 27.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;0;-1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(6;1;-5;-7;8)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;-1;-3;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;-1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-6;2;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;1;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(3;1;12)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(6;5;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;3;-2;5)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-1;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;2;-2;5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;2;0;2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(6;6;-5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}8&5&-6\\-13&-14&0\\9&5&-7\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-3&-4&2\\1&-8&2\\2&-8&0\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+4xy+4xz-6y^2+12yz-21z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+2x_2^2+8x_2x_3+18x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-6xy+5y^2=6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 28.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(2;1;1;-4;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-3;2;-3;-8)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;0;-1;3;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;3;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(4;1;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-5;-12;13)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-1;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-1;-2;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-2;-2;4)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-1;-1;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-5;-1;0;1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(4;-6;-3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & -10 & -9 \\ 7 & 7 & 9 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 3x_2^2 + 10x_2x_3 - 21x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-6xy - 6xz - 8y^2 - 18yz - 8z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 29.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(0;5;4;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(7;-4;1;9;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-3;-3;-2;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;-1;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-3;0;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(7;-2;6)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-4;-1;4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-2;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-1;2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-10;3;9;-12)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(-3;4;-4)$, $\boldsymbol{b}(2;4;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2 + 4xy + 8xz - 4y^2 - 12yz - 13z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-x^2 - 10xy - y^2 = 4$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 30.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;1;5;-2;5)$, $\boldsymbol{a}_2(1;0;2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;1;0;3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(4;-5;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(2;-3;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;1;0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-13;19;8)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-2;0;3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;4;3;2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(-4;-1;-1;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-2;-10;-8;-6)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(2;-2;3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & -6 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -18 \\ 0 & -5 & 9 \\ 3 & -10 & 16 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+6xy+2xz-10y^2-11z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $x^2-6xy+y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 31.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(2;-4;-3;-3;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-1;3;0;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-1;-2;-1;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;4;-7)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;3;-8)$, $\boldsymbol{e}_3(1;-4;8)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-19;4;-24)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;-2;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(4;3;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;2;2;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(3;2;2;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-6;-7;-9;11)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(-4;4;6)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 2 \\ 3 & -9 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -10 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -12 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2-4xy+4xz-5y^2-2yz-9z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $5x^2-8xy-12xz+5y^2+12yz+10z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $9x^2+2xy+9y^2=8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 32.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(4;-9;3;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-4;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-10;1;-3;5)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-1;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(1;2;0)$, $\boldsymbol{e}_3(1;1;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-1;-5;5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-6;-1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-1;3;1)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-1;-1;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-1;3;-3;2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -4 \\ -10 & -10 & 8 \\ -18 & -10 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 16 & -4 \\ -2 & -12 & 2 \\ -5 & -20 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+4xy-4xz-3y^2+2yz-4z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 - 11x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2 - xy + 2y^2 = 3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 33.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;2;-1;2;6)$, $\boldsymbol{a}_2(-5;6;-1;-10;10)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;1;0;-3;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;5;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(1;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(2;2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-11;9;-7)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;-4;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-3;-1;5)$, $\boldsymbol{a}_2(1;2;1;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-3;-1;5)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-1;-1;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;1;0;-1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -6\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -12 & -4 & 8 \\ 13 & -8 & -2 \\ -6 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-5x_2^2-2x_2x_3-14x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $6x_1x_3+4x_2x_3-12x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $6x^2 - 4xy + 3y^2 = 3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 34.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;-2;-6;0;1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;3;-1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-7;-8;-4;-2;3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;5;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-2;1)$, $\boldsymbol{e}_3(3;-4;4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(11;-18;9)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(2;-6;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-2;3;1;4)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;1;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;1;2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(5;1;-4;7)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-3;-2;4)$, $\boldsymbol{b}(-6;1;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 11 \\ -13 & 12 & 3 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy+4xz-11y^2+4yz-18z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2-2x_1x_3-2x_2^2-4x_2x_3-6x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2+2xy+2y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 35.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;2;-1;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;8;-1;5;0)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-9;2;-6;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;3;-4)$, $\boldsymbol{e}_2(2;1;-2)$, $\boldsymbol{e}_3(7;3;-7)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-12;-14;17)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-5;5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;2;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-3;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;2;2;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;-7;-8;12)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x}) = (2x_1-2x_2+4x_3; 7x_1-2x_2+4x_3; 9x_1+4x_2+8x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -6 & 9 & -9 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+8x_1x_2+8x_1x_3-11x_2^2-10x_2x_3-13x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-7x_1^2+12x_1x_2-12x_1x_3-2x_2^2+8x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $9x^2+4xy+6y^2=20$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 36.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(0;1;3;-10;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-5;2;1;-4;10)$, $\boldsymbol{a}_3(1;0;1;-3;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(0;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(4;2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-6;-4;2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;6;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;2;-4;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-1;2;2)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;-2;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;6;-3;3)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(-1;-6;-5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}9&2&2\\-12&-1&-4\\-12&-4&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3&-3&15\\-6&1&-17\\-4&2&-13\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x_1^2+16x_1x_2-8x_1x_3-19x_2^2+10x_2x_3-11x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-3x_1^2+2x_1x_2-8x_1x_3-3x_2^2+8x_2x_3-18x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2-8xy-8y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 37.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;-6;-1;-2;-7)$, $\boldsymbol{a}_2(0;1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(4;0;3;-4;2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;-1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(2;5;6)$, $\boldsymbol{e}_3(1;3;4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(6;7;7)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(1;-1;4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;6;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;2;-1;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;-9;-6;-5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(-1;5;6)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-11&-12&-18\\5&17&10\\1&-11&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-11&18&6\\-2&6&-3\\-2&6&-3\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x_1^2+12x_1x_2+12x_1x_3-14x_2^2-20x_2x_3-16x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x^2-4xy-4xz+2yz$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $x^2+8xy+y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 38.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;6;0;-1;-4)$, $\boldsymbol{a}_2(4;1;1;0;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(5;-4;2;1;2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-4;-3;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-5;-6;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(13;5;-5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;1;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(3;-2;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(3;-3;2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;3;1;-1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(a;b;c)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(-6a-9b-c;-8a+2b-8c;6a+b-9c)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-13\\7&3&-17\\4&3&-12\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-7&-6&4\\-2&-9&3\\-6&-12&4\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+6x_1x_2+6x_1x_3-11x_2^2-6x_2x_3-28x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x^2-8xy-4xz-y^2-4yz+2z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-4xy+2y^2=6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ5-21.

Вариант 39.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-5;7;2;-3;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;0;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;3;1;-2;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(4;4;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-1;0)$, $\boldsymbol{e}_3(-6;-5;4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(23;7;-11)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-2;-1;4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(2;1;3;1)$, $\boldsymbol{a}_3(3;-1;1;5)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;2;1;-5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-3;5;5;-11)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(-4;-3;-5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}2&-12&0\\-8&-10&16\\0&-8&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-18&-16&-14\\9&8&7\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2-4xy+8xz-5y^2+2yz-13z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x_1^2-8x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2-2xy+3y^2=4$.