Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 0.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;5;0;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-9;-2;3;4;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;1;1;1;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-4;-2;-5)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;-1;-7)$, $\boldsymbol{e}_3(2;1;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-5;-1;-19)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-5;-1;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;2;-2;2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;3;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(1;1;-1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-8;-10;9;-8)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(-5;-2;-5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -13 & 11 \\ -2 & 9 & -7 \\ -3 & 13 & -10 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 14 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+8x_2x_3-24x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-9x^2-6xy-2xz-y^2+6yz-9z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2-4xy-y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 1.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-2;1;0;1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;-2;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;3;0;1;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;-1;1)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(2;-1;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-9;8;-4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(3;1;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-2;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;3;2;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;2;1;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-1;-3;-1;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 4f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -4 \\ 10 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 6 \\ -4 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2-4xy-4xz-4y^2+8yz-21z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-8x_1x_2-4x_1x_3-6x_2^2+2x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2+4xy+6y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 2.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-4;-1;1;3;-7)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;1;0;2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-1;-1;-1;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;-1;3)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;2;-5)$, $\boldsymbol{e}_3(2;0;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-2;5;-14)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-6;-1;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-4;1;0;3)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(6;-6;2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & -9 & 4 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+2xy+4xz-2y^2+2yz-14z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-8x_1x_2+4x_1x_3-6x_2^2+8x_2x_3-7x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $4x^2+6xy-4y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 3.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;3;-1;-4;2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;0;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-4;3;7;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;-4;-5)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-3;0;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(21;-14;-11)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-5;0;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;3;2;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;1;3;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;1;5;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(7;1;-14;-6)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (3t-2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 4f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2,t,1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -5 & -9 \\ 14 & 7 & 12 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 6 \\ -15 & -2 & 9 \\ -15 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2-4xy-4xz-5y^2+2yz-9z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $8x^2-4xy+5y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 4.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(0;1;-1;2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;8;-6;9;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;1;-5;-5)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(7;5;1)$, $\boldsymbol{e}_2(2;1;0)$, $\boldsymbol{e}_3(8;6;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(22;13;2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(3;-2;3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(4;2;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-1;1;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;-2;1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-2;0;0;2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(a;b;c)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(-5a-4b-9c;-9a-5b-7c;a-9b-8c)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-9&8&-4\\-6&4&-4\\6&-6&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-3&3&2\\-1&-5&-2\\0&-1&-4\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2-6xy+12xz-7y^2+4yz-19z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x_1^2+6x_1x_2-2x_1x_3-7x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-x^2+4xy+2y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 5.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;1;2;-5;-5)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;0;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;1;-1;7;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-4;-5;0)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;-5;1)$, $\boldsymbol{e}_3(1;4;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(14;6;8)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-5;6;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(3;-2;-2;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;1;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(3;-2;-3;1)$, $\boldsymbol{a}_4(4;-3;-4;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(9;-8;-10;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t))=(t+5)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+4f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2,t,1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}5&-11&-2\\10&-6&10\\-6&6&-4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&2&4\\-10&5&4\\0&2&7\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2-2xy+2xz-3y^2-2yz-4z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1x_2-8x_1x_3+8x_2x_3+15x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-2xy+5y^2=6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 6.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-2;3;4;5;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;4;7;4;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(0;-5;-10;-3;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;2;1)$, $\boldsymbol{e}_2(4;1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(0;-2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-4;-10;-6)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-5;-4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;2;2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;2;3;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;1;1;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-2;4;6;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 5\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -7 \\ 4 & -3 & -8 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -10 & -9 & 5 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2 - 6xy + 6xz - 5y^2 + 18yz - 24z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 - 12x_2x_3 + 10x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-6x^2 + 5xy + 6y^2 = 13$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 7.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;1;-1;0;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;5;-2;1;7)$, $\boldsymbol{a}_3(0;1;2;1;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2(8;3;3)$, $\boldsymbol{e}_3(4;1;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(0;-4;4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-6;4;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;2;2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-3;-2;-5)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-2;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;2;1;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;-5;-6;-9)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(1;-2;-2)$, $\boldsymbol{b}(-4;-6;5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -1 \\ 7 & 7 & 1 \\ 11 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 15 \\ 9 & 2 & -10 \\ -8 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2 + 12xy + 6xz - 14y^2 - 8yz - 8z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-3x^2 + 8xy - 2xz - 9y^2 + 4yz - 7z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $4x^2 + 4xy + 7y^2 = 8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 8.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;1;-7;-3;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(3;-2;-1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(0;1;-4;-2;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-6;6;5)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;5;6)$, $\boldsymbol{e}_3(3;-4;-4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(23;-7;4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-4;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(3;-1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;3;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-4;1;2;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-10;5;9;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-4;3;-3)$, $\boldsymbol{b}(-4;2;4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \\ 10 & 15 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+6xy+12xz-7y^2-4yz-19z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2-2xy+3y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 9.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-3;1;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;-5;2;0)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-4;8;-3;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2(2;2;1)$, $\boldsymbol{e}_3(8;3;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-19;-3;-7)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(1;6;1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(3;-2;2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-4;2;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-1;1;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;-4;6;6)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-3;-4;3)$, $\boldsymbol{b}(-4;1;3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 8 \\ 3 & -5 & -4 \\ -6 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+6xy-6xz-5y^2+2yz-9z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-8x_1^2-6x_1x_2-12x_1x_3-4x_2x_3-3x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2-4xy+7y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 10.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-2;-1;1;5;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(0;-5;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;2;0;3;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;1;0)$, $\boldsymbol{e}_2(1;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;0;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-14;4;-10)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(4;5;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;2;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-1;-2;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;1;3;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(2;6;1)$, $\boldsymbol{b}(1;5;1)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 10 & 6 \\ -9 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 8 \\ 7 & -5 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2 - 4xy + 8xz - 6y^2 - 15z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $6x^2 - 8xy + 6y^2 = 1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 11.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;0;2;-1;4)$, $\boldsymbol{a}_2(3;9;-1;-4;7)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;-1;0;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-2;0;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(2;-1;4)$, $\boldsymbol{e}_3(1;1;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(0;4;-1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;3;1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;2;3;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;3;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(2;3;3;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;5;6;-3)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(-4;2;5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -3 & 8 & 12 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2+10x_2x_3-20x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $7x^2 + 8xy + 8xz + y^2 + 4yz + 8z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $4x^2 + 6xy - 4y^2 = 5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 12.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(9;-3;7;-1;6)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;1;-1;0;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-5;1;-5;1;-4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;1;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(-8;6;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-4;3;0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-8;7;-10)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-3;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;1;-4)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;-1;5)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;2;2;1)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;2;1;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-3;8;8;3)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 3f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -2 \\ 12 & 13 & 17 \\ -4 & -17 & -19 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ -6 & -10 & -1 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+6x_1x_2+2x_1x_3-10x_2^2-4x_2x_3-3x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $7x_1^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-x^2+8xy+5y^2=21$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 13.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(5;2;10;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(-5;-1;-10;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-4;0;-9;1;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;0;5)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;-1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(3;7;0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(12;15;9)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;4;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(3;-1;-1;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;1;2;3)$, $\boldsymbol{a}_4(-4;-1;3;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-8;-3;6;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x}) = (-x_1+2x_2-9x_3; 2x_1-2x_2+5x_3; -3x_1+9x_2+7x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -12 & -9 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -15 & 4 & -14 \\ -8 & 3 & -7 \\ 16 & -4 & 15 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3-11x_2^2+4x_2x_3-16x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $4x_1^2-4x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-x^2-6xy+7y^2=7$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 14.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;1;2;1;0)$, $\boldsymbol{a}_2(0;3;5;4;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;3;4;5;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;-5;-5)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-2;-2)$, $\boldsymbol{e}_3(2;-6;-5)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(5;-19;-13)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;-4;4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-2;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-1;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;3;-1;4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;-5;8;-7)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 2f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -9 \\ -3 & -8 & 9 \\ -12 & -16 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ -15 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2 + 8xy + 12xz - 9y^2 - 20yz - 23z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 - 3x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 15.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(0;2;5;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;4;1;-5;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-1;2;2;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;5;-7)$, $\boldsymbol{e}_2(1;4;-4)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;2;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-2;20;-11)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(6;2;1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(2;1;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;-1;2;1)$, $\boldsymbol{a}_4(3;1;-1;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;1;2;-2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-2;-5;-6)$, $\boldsymbol{b}(-4;3;4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -15 & 7 & -6 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 15 \\ -3 & -5 & 15 \\ -2 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2 + 4xy - 2xz - 5y^2 + 2yz - 3z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-3x_1^2 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 10x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-2x^2 - 8xy - 2y^2 = 3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 16.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(0;-2;-7;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;3;10;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;4;-1;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;-2;-5)$, $\boldsymbol{e}_2(2;1;5)$, $\boldsymbol{e}_3(-4;-3;-4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(14;11;7)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(2;1;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(1;2;3;4)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-2;-2;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-1;-1;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;5;10;15)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-3;2;-2)$, $\boldsymbol{b}(2;6;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}6&-3&5\\16&-8&14\\2&-1&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-6&-4&-2\\4&2&2\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+6x_1x_2-2x_1x_3-10x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-4x^2+8xy-2xz+2y^2-4yz$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2+8xy-y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 17.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-10;-4;-1;7;5)$, $\boldsymbol{a}_2(3;1;1;-2;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;0;-1;-1;2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-4;-5;6)$, $\boldsymbol{e}_2(1;3;-4)$, $\boldsymbol{e}_3(1;-2;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-14;-15;17)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;5;2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;2;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;-4;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-2;5;3)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;1;-2;-4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;-3;8;4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(-5;-1;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-5&6&2\\-15&14&3\\6&-6&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1&4&-4\\4&-7&8\\5&-10&11\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy+6xz-6y^2-4yz-19z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-4x^2+2xy+4xz-4y^2+4yz-z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2-2xy+7y^2=8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 18.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;1;-1;2;0)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;4;3;-7;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;6;1;-3;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(5;4;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(6;3;-2)$, $\boldsymbol{e}_3(0;4;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(15;7;-5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;-6;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;3;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(3;-2;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-2;-2;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-5;1;0;-2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(x_1+7x_2-8x_3;-9x_1-2x_2+5x_3;9x_1+7x_2+6x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}13&-1&-6\\14&1&-8\\16&-1&-7\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-3&2&0\\-18&-2&-6\\12&-6&1\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2^2+16x_2x_3-13x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $14x_1^2-16x_1x_2+8x_1x_3+2x_2^2-4x_2x_3-x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2+2xy+7y^2=12$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 19.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-2;-1;0;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-5;-1;3;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(3;1;-1;-1;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;2;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;5;-4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-6;16;-15)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;0;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-2;1;-5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(6;-5;3;-13)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(6;-2;3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-2&-2&-5\\-12&0&18\\4&-2&-11\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-6&-10&-13\\-5&0&-6\\15&6&20\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x^2+8xy-8xz-8y^2-11z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-3x_1^2+6x_1x_3-3x_2^2+2x_2x_3-12x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-2x^2+6xy-2y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 20.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;4;2;-3;1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;8;6;5;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(0;-1;-1;-2;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2(7;3;2)$, $\boldsymbol{e}_3(6;3;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(4;2;3)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-2;6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-2;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(3;-3;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;3;1;3)$, $\boldsymbol{a}_4(3;-4;-1;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-9;8;2;1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 2f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -20 & -4 \\ 6 & 16 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x_1^2+8x_1x_2-8x_1x_3-7x_2^2+20x_2x_3-18x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-14x^2-8xy+8xz+y^2+2yz+z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-3x^2-6xy+5y^2=8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 21.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;0;-2;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-5;-2;-4;7;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-1;1;2;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(4;1;-6)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;1;5)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;0;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-11;-11;6)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(1;0;1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;-1;4)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-1;2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;1;-1;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;1;3;1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 4 & -11 & 8 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -17 & -7 & 16 \\ 19 & 11 & -17 \\ -16 & -5 & 15 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy-4xz-10y^2+20yz-21z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-10x_1^2-6x_1x_2-6x_1x_3-2x_2^2-2x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2-4xy+5y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 22.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(5;1;0;-4;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(2;3;3;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-5;-6;-5;5;2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(5;0;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(-7;1;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-4;1;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-20;5;4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;-6;6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(2;2;-3;-5)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(2;1;-2;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;3;-6;-9)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(2;-6;1)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 9 \\ -8 & -12 & -9 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -12 & -3 & -4 \\ -12 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy-4xz-9y^2+12yz-8z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x^2-8xy+4xz+3y^2-4yz$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $10x^2+8xy+10y^2=7$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 23.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;0;1;3;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;1;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(5;-3;-1;9;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-5;6;3)$, $\boldsymbol{e}_2(5;-6;-2)$, $\boldsymbol{e}_3(6;-7;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-18;22;13)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-3;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;-1;2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;-1;3;-4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(13;4;-9;13)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(-4;6;4)$, $\boldsymbol{b}(3;2;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -9 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x^2-8xy-8xz-6y^2+4yz-25z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy-4xz-4y^2-2yz-4z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-4xy+2y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 24.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;-1;3;4;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;1;-3;-4;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-4;2;-8;-9;3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;3;1)$, $\boldsymbol{e}_2(-6;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-4;3;0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-14;7;-1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(6;4;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-2;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;3;4;2)$, $\boldsymbol{a}_4(1;3;3;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-5;-14;-15;4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (t+4)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -11 & 14 \\ -7 & -9 & 13 \\ -10 & -14 & 19 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2-2xy+6xz-3y^2+10yz-13z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-6x_1^2-2x_1x_3-6x_2^2+4x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2+6xy-3y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 25.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;7;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;1;0)$, $\boldsymbol{a}_3(2;3;1;0;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;0;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;-1;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-9;-2;-5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;-4;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;4;-2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-2;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;4;-3;4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-7;11;-6;5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(-2;3;5)$, $\boldsymbol{b}(6;3;1)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -14 \\ 3 & 0 & 10 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x_1^2-8x_1x_2+8x_1x_3-7x_2^2+20x_2x_3-20x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x^2+6xz-2y^2-4yz+10z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-2x^2+4xy+y^2=6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 26.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-2;-5;-1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(3;9;-2;0;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;4;2;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(4;0;7)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(3;-3;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(1;-5;-5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(4;2;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-2;3;-2;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;4;-2;4)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;2;-4;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(5;-10;1;-9)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(a;b;c)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(-6a+9b+7c;-7a+5b+3c;5b-4c)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -1\\ 16 & 0 & 8\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}7 & -15 & -3\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 4\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2-4xy+12xz-3y^2+10yz-20z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x^2+4xy+4xz-y^2-8yz-z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2-4xy+5y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 27.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-2;-1;1;0)$, $\boldsymbol{a}_2(3;-3;3;-4;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-5;7;-1;2;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;1;3)$, $\boldsymbol{e}_3(0;2;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(0;-5;-2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-6;6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-1;1;-4)$, $\boldsymbol{a}_4(2;2;-1;5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;1;-1;4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(-1;-3;2)$, $\boldsymbol{b}(4;3;5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 19 & 10\\ -4 & 17 & 7\\ 4 & -13 & -3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}16 & 7 & -6\\ -14 & -5 & 6\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy+4xz-6y^2+4yz-23z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x^2+8xy-4xz+2y^2-4yz-z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2+4xy+8y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.
Вариант 28.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;0;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(0;1;-1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;-4;1;-2;5)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-2;1)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;2;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;1;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-2;5;1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-2;3)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;-2;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-2;3;1)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-1;1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(7;-5;8;2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.
4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(-6x_1-2x_2-8x_3;-8x_1-7x_2-8x_3;-9x_1+9x_2+7x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-13&-6&15\\4&1&-5\\-8&-4&9\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5&2&-12\\-4&-1&12\\8&4&-11\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+12x_1x_2+4x_1x_3-20x_2^2-8x_2x_3-7x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $-3x_1^2-8x_1x_2-2x_1x_3-18x_2^2-8x_2x_3-3x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $4x^2+8xy-2y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.
Вариант 29.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;-5;3;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;-1;1;0)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-2;2;0;-1)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-2;0)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;5;-5)$, $\boldsymbol{e}_3(1;0;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(11;-5;15)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-5;-2;2)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;1;-4;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-2;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-1;6;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;-6;10;-10)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.
4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(-9x_1+4x_2+3x_3;-6x_1-9x_2-9x_3;-9x_1+x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}6&3&-1\\-7&-3&2\\2&1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1&-4&-12\\-4&0&14\\2&-2&-11\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy-2xz-5y^2+6yz-3z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2-2x_1x_2-4x_1x_3-2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $8x^2+4xy+5y^2=4$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 30.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-7;0;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;2;-3;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(0;4;1;1;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-6;-5)$, $\boldsymbol{e}_2(0;2;1)$, $\boldsymbol{e}_3(1;-5;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-10;4;-15)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-6;-1;-6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(3;-2;2;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;3;-3;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;3;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;1;-1;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-10;9;-8;-3)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(-4;-4;6)$, $\boldsymbol{b}(2;-6;2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & -7 \\ -6 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-3x_2^2+2x_2x_3-5x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $8xy+2xz-6y^2-4yz-4z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-x^2+4xy+2y^2=9$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 31.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;2;0;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-1;1;1;4)$, $\boldsymbol{a}_3(-8;4;1;-4;8)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;-1;3)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-2;2)$, $\boldsymbol{e}_3(0;-7;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-7;-18;-4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(3;0;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;2;-2;2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(3;-4;3;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-3;3;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-7;10;-7;4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(1;-1;-3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -18 \\ 2 & -1 & -4 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy+4xz-10y^2-4yz-7z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $10x^2+12xy-6xz+5y^2-4yz+2z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2-4xy+6y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 32.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(8;-1;2;-3;-5)$, $\boldsymbol{a}_2(1;0;1;-2;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-6;1;0;-1;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-2;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_2(3;2;2)$, $\boldsymbol{e}_3(3;2;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(18;13;17)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;5;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;2;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;5;3;1)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;-2;-1;-5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(5;-4;-4;14)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(-5x_1+9x_2-3x_3;-x_1+4x_2-7x_3;-4x_1+9x_2+2x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-8&10&3\\-3&3&2\\5&-11&-7\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-3&5&8\\-2&14&4\\-2&-8&5\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy-4xz-10y^2+12yz-5z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $4x^2+4xy-8xz+7y^2+4yz+4z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2-10xy+7y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 33.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-4;-3;-3;4;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(6;2;7;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-5;-2;-6;3;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;1;0)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;-2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;-3;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(1;-1;-7)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;6;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-1;2;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;1;-2;5)$, $\boldsymbol{a}_4(1;3;2;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-2;4;1;1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(-2;5;-1)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-13&15&-8\\-7&13&-8\\20&-12&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&6&12\\-4&9&10\\2&-2&0\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2-2xy+2xz-3y^2+10yz-11z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x_1^2+12x_1x_3-x_2^2-8x_2x_3+8x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-4x^2-8xy+2y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 34.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(9;3;-3;4;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;-1;2;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(7;4;1;7;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(7;1;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(-4;3;-5)$, $\boldsymbol{e}_3(-6;0;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-12;0;2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-5;3;-1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;3;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;2;3;-4)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;2;2;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-6;-2;0;-8)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 2f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & -6 \\ 6 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ 1 & 10 & 3 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3-3x_2^2-2x_2x_3-5x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3-14x_2^2-16x_2x_3-2x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2 - 8xy - 4y^2 = 3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 35.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(0;1;1;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;2;0;-5;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-5;-9;8;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;1;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-1;-3)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;1;5)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-1;-1;2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-6;-3;6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;4;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;1;-3;2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-3;2;1)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-4;3;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-8;4;-10;6)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(2;3;4)$, $\boldsymbol{b}(5;-2;2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 16 & 8 \\ -5 & 17 & 6 \\ 6 & -16 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -3 & 0 & -9 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2 + 8xy + 4xz - 12y^2 - 16yz - 9z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $5x^2 - 8xy - 4xz - y^2 - 8yz - 2z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 36.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(5;-2;-1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;0;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;5;-1;-6;-4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;-3;1)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;-6;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;-2;0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(9;-8;5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(2;-3;-1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;-4;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-4;1;2;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(3;-2;-4;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;2;7;8)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-6;1;1)$, $\boldsymbol{b}(3;4;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -14 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -2 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -5 & -9 & 4 \\ -10 & -11 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x_1^2+8x_1x_2-8x_1x_3-7x_2^2+2x_2x_3-11x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x_1^2-8x_1x_3+2x_2^2-8x_2x_3+6x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2+6xy+5y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 37.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-4;-8;-3;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;6;2;-2;5)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;3;1;-1;3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;1;0)$, $\boldsymbol{e}_2(-6;-5;2)$, $\boldsymbol{e}_3(3;2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-20;-19;7)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-2;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;2;2;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;2;6)$, $\boldsymbol{a}_4(3;-2;-1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(13;-9;-6;1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -10 \\ 9 & 1 & 4 \\ -4 & -5 & -11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -10 \\ -6 & 0 & 6 \\ 12 & -4 & -14 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+2xy+6xz-3y^2-2yz-13z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $8x^2-12xy+6xz+3y^2-4yz$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2+2xy+5y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 38.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-5;1;4;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;4;1;5;0)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;-1;2;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;-1;1)$, $\boldsymbol{e}_2(1;3;-4)$, $\boldsymbol{e}_3(5;-1;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-22;14;3)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-2;-3;3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;2;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-2;-3;3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-1;-2;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-4;2;9;-7)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(4;1;-3)$, $\boldsymbol{b}(5;-3;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 12 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -4 & 10 & -14 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+4xy+12xz-4y^2-16yz-21z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $4x_1^2-2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+7x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $9x^2+10xy+9y^2=8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ6-21.

Вариант 39.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-2;-3;-1;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;1;-1;0)$, $\boldsymbol{a}_3(0;-5;-3;4;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;-1;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-2;2)$, $\boldsymbol{e}_3(7;2;5)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-2;6;-5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;3;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;1;3;4)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;2;3)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;3;3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;1;4;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-4;-2;-3;-8)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(4;3;6)$, $\boldsymbol{b}(2;5;5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & -5 \\ -2 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 13 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -1 \\ 6 & -5 & -1 \\ -12 & 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+2xy+6xz-2y^2-2yz-14z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x_1^2-2x_1x_2-4x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-x^2+4xy-y^2=2$.