Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 0.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-5;-3;4;10;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(4;0;1;1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(7;1;0;-2;3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-4;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_2(6;2;-3)$, $\boldsymbol{e}_3(1;1;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(11;-1;-4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(1;-2;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;2;1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;2;5;3)$, $\boldsymbol{a}_4(3;2;-2;-4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-10;-9;-9;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 3f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -12 & 10 & -18 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x_1^2+8x_1x_2-8x_1x_3-6x_2^2+4x_2x_3-9x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x^2 - 6xz + 3y^2 - 6yz - 4z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2 + 3xy + 3y^2 = 15$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 1.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-4;-2;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-3;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(0;-6;-7;2;-3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;3;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;3;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-21;15;-5)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;0;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;2;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-2;5;3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;1;2;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-5;8;11;6)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (-4t+5)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 3f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 10 \\ 7 & 12 & -10 \\ -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2 + 4xy + 4xz - 3y^2 - 7z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2 - 4xy + 6y^2 = 14$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 2.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-1;0;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-2;1;7;3)$, $\boldsymbol{a}_3(6;-9;1;0;-4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;2;1)$, $\boldsymbol{e}_2(3;3;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;-3;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-9;-5;-14)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;5;-6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;2;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-1;-2;4)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;3;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;1;4;-4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;-1;-2;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-5;-3;6)$, $\boldsymbol{b}(2;5;3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}10&-5&-10\\12&-6&-12\\4&-2&-4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3&-5&10\\4&0&0\\0&-3&9\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+6xy+12xz-5y^2-4yz-24z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $6x^2+8xz+6y^2-4yz+5z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $8x^2+8xy+8y^2=9$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 3.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;1;-3;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;3;1;4;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;2;1;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;2;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(2;5;-6)$, $\boldsymbol{e}_3(1;2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-10;-19;13)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(4;4;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-1;-2;-5)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;2;2;6)$, $\boldsymbol{a}_4(-4;-1;2;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-10;-10;1;-8)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(-5;-1;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-12&1&-15\\-9&7&-5\\12&-1&15\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&4&-5\\-2&-7&10\\2&-4&9\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+8x_1x_2+12x_1x_3-9x_2^2-20x_2x_3-24x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x^2-8xz-y^2+4yz$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-2xy+5y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 4.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;3;0;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(10;-5;1;4;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-8;-1;-1;-2;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-6;2;7)$, $\boldsymbol{e}_2(-4;1;5)$, $\boldsymbol{e}_3(-3;2;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-8;-4;14)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-2;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;3;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;2;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;1;-2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(7;-5;12;5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $< \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4 >$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (6t+4)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 2f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -10 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 5 \\ 17 & -6 & -13 \\ -10 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+2xy+6xz-2y^2-8yz-11z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x_1^2+6x_1x_2-2x_1x_3+11x_2^2-6x_2x_3+3x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2+8xy+y^2=9$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 5.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;-3;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(7;-5;3;-5;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(4;1;0;-2;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;2;8)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;0;-5)$, $\boldsymbol{e}_3(0;-3;-4)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(2;-9;0)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(1;-1;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-2;-4;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(1;3;-2;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-5;3;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;-1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-1;-2;3;1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $< \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4 >$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2,t,1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 7 \\ -5 & -10 & -5 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 18 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+12x_1x_2+4x_1x_3-19x_2^2-14x_2x_3-4x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x_1^2-2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3-2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-3x^2-8xy+3y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 6.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;2;-1;-1;0)$, $\boldsymbol{a}_2(7;3;4;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-10;-9;-1;4;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;0;5)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;1;-4)$, $\boldsymbol{e}_3(4;-1;7)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-2;2;1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(4;-2;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-3;2;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(8;-7;5;-10)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}(4;1;5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -14 \\ 0 & 4 & 12 \\ 4 & -2 & -12 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & 12 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 8 & -12 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2^2+12x_2x_3-13x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $4x_1^2-2x_1x_3+4x_2^2-2x_2x_3+5x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-2xy+5y^2=6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 7.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(5;-1;4;1;7)$, $\boldsymbol{a}_2(0;-6;-1;1;-8)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-1;-1;0;-3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;3;0)$, $\boldsymbol{e}_2(1;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-4;-5;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(4;2;4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-2;3;5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;3;-3;2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-2;3;1)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-2;2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-3;-12;13;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (2t-3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)-3f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2,t,1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 6 & -1 & 12 \\ 15 & -15 & -16 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy-2xz-6y^2+16yz-20z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x_1^2+8x_1x_2+2x_1x_3+14x_2^2+8x_2x_3-x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-5x^2-6xy+3y^2=8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 8.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;0;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-8;-1;0;-1;7)$, $\boldsymbol{a}_3(3;6;5;1;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-3;1)$, $\boldsymbol{e}_2(1;2;3)$, $\boldsymbol{e}_3(1;3;0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(0;-4;13)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;4;-4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-3;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(3;-4;4;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-4;1;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-4;6;-7;5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 8 \\ -2 & -5 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x_1^2+6x_1x_2+6x_1x_3-7x_2^2+10x_2x_3-22x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-6x^2-12xy-6xz-y^2-4yz+2z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-9x^2-8xy+6y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 9.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-2;0;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;3;-1;3;2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-4;-1;-2;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;-2;-4)$, $\boldsymbol{e}_2(0;1;5)$, $\boldsymbol{e}_3(3;-5;-6)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(10;-13;0)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;-4;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;3;3;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;3;2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-3;4;3;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;-8;-7;12)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -1 \\ 16 & -1 & 7 \\ -12 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 14 & 12 & -2 \\ 16 & 12 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x_1^2+12x_1x_2-6x_1x_3-15x_2^2+6x_2x_3-10x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-6x^2+8xy-4xz-6y^2+4yz-3z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $9x^2-4xy+6y^2=10$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 10.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-2;-1;1;1;0)$, $\boldsymbol{a}_2(7;5;-4;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-5;-7;4;1;3)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;-2;1)$, $\boldsymbol{e}_2(3;3;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;2;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(16;19;10)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(2;1;5)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-3;-4;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-2;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(3;1;2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;7;13;8)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.
4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(a;b;c)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(7a-6b-9c;9a+b+4c;-9a+5b+6c)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-6&-2&6\\-12&-4&12\\-7&-1&5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-5&0&8\\16&3&-16\\-20&-8&3\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+12xy-6xz-14y^2+20yz-13z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $2x^2+8xz+2y^2+4yz+z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $3x^2+8xy-3y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 11.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;0;1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(4;-1;6;-5;-7)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;-1;0;2)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-2;-2;3)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;0;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-3;-1;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(13;3;-8)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;0;-5)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-3;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;2;3;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;4;3;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-4;11;12;8)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.
4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t))=-3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)-5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-4&-7&-6\\13&12&12\\-5&-1&-2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5&6&-3\\0&1&2\\12&18&2\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy+6xz-5y^2-8yz-14z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $x_1^2-6x_1x_2+6x_1x_3-7x_2^2+18x_2x_3-7x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $3x^2+2xy+3y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 12.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-2;5;0;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-1;-7;-3;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;-3;-1;-1)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-4;4;-5)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;3;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(18;-14;22)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(4;5;-3)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-2;-1;-4)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;2;5)$, $\boldsymbol{a}_4(2;1;1;4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-1;0;1;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.
4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (-3t+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \\ -8 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & 13 & -6 \\ 5 & 1 & -10 \\ -10 & 13 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+6xy+12xz-7y^2-20yz-18z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $4x^2+4xy+4y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 13.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;1;-1;0)$, $\boldsymbol{a}_2(5;-9;5;-3;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;6;-4;3;-1)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;2;-5)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(2;-1;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(9;0;11)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(6;-4;1)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;1;-1;-4)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;1;-2;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-5;2;-5;-4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.
4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(3;-1;5)$, $\boldsymbol{b}(-6;-4;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -10 & -6 \\ 10 & 12 & 8 \\ -10 & -20 & -15 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -10 & 11 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2^2+2x_2x_3-7x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $2xz-2yz-z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $5x^2+6xy-3y^2=6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 14.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;1;-1;2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(8;3;-3;5;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;1;0;-2;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-2;0)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;5;7)$, $\boldsymbol{e}_3(0;8;5)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(9;4;-9)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;0;3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;1;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;3;-4;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;-3;-4;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-9;-2;-15;-6)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(4;5;-5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+6x_1x_2+2x_1x_3-10x_2^2-11x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $3x_1^2-2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-5x^2-6xy+3y^2=6$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 15.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;-9;2;3;-5)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;0;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(0;6;-1;-3;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-4;-2;5)$, $\boldsymbol{e}_2(6;1;-6)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;0;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-6;2;3)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-5;-3;2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;-2;-2;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(3;1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3(3;2;1;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-4;-2;-1;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(14;9;7;12)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(5;2;2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 11 \\ -6 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x_1^2+16x_1x_2+8x_1x_3-19x_2^2-4x_2x_3-19x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $6x_1x_2-4x_1x_3+8x_2^2-12x_2x_3+3x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $x^2+4xy-2y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 16.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-3;-1;9;2)$, $\boldsymbol{a}_2(5;-6;4;0;1)$, $\boldsymbol{a}_3(4;-5;3;1;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;6;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-3;0)$, $\boldsymbol{e}_3(2;-5;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-9;22;-4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(2;-4;-4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;2;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(2;3;2;4)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;1;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-1;-3;-4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-2;-4;6;4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}(-4;5;2)$, $\boldsymbol{b}(-3;6;-6)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 15 & 3\\ 2 & -10 & -4\\ 4 & 20 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-16 & 13 & 10\\ -19 & 15 & 11\\ -3 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+12x_1x_2+4x_1x_3-20x_2^2-16x_2x_3-7x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2-8x_1x_2-12x_1x_3+4x_2^2-6x_2x_3-8x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2+4xy+8y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 17.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-1;0;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(2;0;-1;-3;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-4;1;-5;-3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;4;4)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;5;6)$, $\boldsymbol{e}_3(1;-3;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-4;21;17)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;2;6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(3;-5;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;4;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;3;-1;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;-5;-1;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(1;-3;5)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-10 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -2\\ -16 & 7 & 12\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}6 & -2 & 6\\ -8 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+2xy+6xz-3y^2-10yz-12z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $6x_1^2-8x_1x_3+6x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-4x^2-6xy+4y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 18.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-7;-3;-1;5)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;-1;1;7;5)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;0;-2;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-4;-3;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-3;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;-1;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-3;-9;-1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(6;-2;-1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-2;3;3)$, $\boldsymbol{a}_3(2;1;-3;-4)$, $\boldsymbol{a}_4(1;1;-2;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-1;1;0;2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & -6 \\ 18 & -2 & -12 \\ 9 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -9 \\ -7 & -10 & 9 \\ -5 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2 + 2xy - 2xz - 2y^2 - 3z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $8x_1^2 - 6x_1x_2 - 18x_1x_3 + 6x_2x_3 + 8x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2 - 8xy - y^2 = 3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 19.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-5;-6;-1;-4;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;-5;-1;-4;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;1;3;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;2;0)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;-5;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(2;-3;8)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(14;22;6)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(4;1;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;-3;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(2;2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(1;3;-2;4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-6;-1;1;4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(5;-4;5)$, $\boldsymbol{b}(-2;5;-1)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -8 \\ -2 & -4 & -8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -12 & 5 & -4 \\ 12 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2 + 4xy - 2xz - 6y^2 + 8yz - 4z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $5x^2 - 8xy + 8xz + 5y^2 - 8yz + 5z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 20.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;2;2;1;0)$, $\boldsymbol{a}_2(3;8;4;5;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;3;1;2;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(1;2;2)$, $\boldsymbol{e}_3(1;3;2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-1;-15;-4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-2;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;2;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-2;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-2;2;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-5;4;-6;2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(4x_1-5x_2-5x_3;-4x_1-2x_2-6x_3;6x_1-2x_2+9x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-6&1&20\\-8&3&20\\-5&1&13\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-4&0&-1\\-9&0&-2\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2-6xy+6xz-5y^2+2yz-9z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-3x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+4x_2x_3-7x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-2x^2-4xy+y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 21.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;1;-1;1;0)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;-2;5;-3;1)$, $\boldsymbol{a}_3(7;5;-8;6;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2(-7;-2;-3)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;-1;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(21;11;12)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-1;-1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;-1;1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;-3;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;-1;-1;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-1;0;-7;-8)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(-4;5;-6)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}3&-18&8\\3&-13&5\\4&-14&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&-4&-2\\-2&5&8\\-2&-2&3\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy+2xz-6y^2-4z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x^2+4xz-y^2-12yz+5z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-3x^2+8xy+3y^2=35$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 22.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(7;-3;-9;-8;-4)$, $\boldsymbol{a}_2(4;0;-6;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(6;-2;-8;-5;-3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;1;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(-5;-7;3)$, $\boldsymbol{e}_3(2;5;6)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-12;-17;7)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-4;2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;-3;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;3;-2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;4;-4;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(5;-12;9;10)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (-5t+2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - 4f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -12 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 12 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -17 & 12 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+2xy+6xz-2y^2-19z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-7x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2^2+2x_2x_3-4x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $6x^2+4xy+9y^2=35$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 23.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(2;-2;3;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(4;8;1;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(3;3;2;1;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(4;3;5)$, $\boldsymbol{e}_2(3;1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(4;4;7)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-7;-2;-2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(6;2;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;1;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;2;-1;-5)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-3;-1;5)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-2;6;1;-12)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 4f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1,t,t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -8 & -1 & 4 \\ 14 & -3 & -11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 9 & -4 & -2 \\ 19 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy+6xz-6y^2-4yz-18z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x^2-12xy-8xz-7y^2-12yz-2z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-2xy+5y^2=4$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 24.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;3;4;-8;1)$, $\boldsymbol{a}_2(0;1;-1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;7;0;-4;5)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;-2;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;4;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;1;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(9;-12;-8)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(2;-1;-4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-1;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-2;3;-2;-4)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;2;0;4)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $< \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_4 >$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(5;-6;2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 9 & -11 & -17 \\ -8 & 8 & 13 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2 + 4xy + 4xz - 6y^2 - 14z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $4xy + 4xz + 3y^2 - 2yz + 3z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $6x^2 + 2xy + 6y^2 = 5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 25.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-7;2;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;-1;-1;0)$, $\boldsymbol{a}_3(4;-2;1;0;1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;-2;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;3;0)$, $\boldsymbol{e}_3(-4;5;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(15;-24;-2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;-1;6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;-2;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-3;-2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;2;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-1;-8;-6;-11)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $< \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_4 >$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x} = (x;y;z)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x}) = (8x - 7y - 8z; -5x - 8y - 3z; 7x + 5y + 5z)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 9 \\ -6 & -2 & -6 \\ -12 & 1 & 17 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 6x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 6x_2^2 + 4x_2x_3 - 3x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 26.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-4;2;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-9;8;2;-5;-7)$, $\boldsymbol{a}_3(1;3;-3;0;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(0;2;-3)$, $\boldsymbol{e}_2(2;3;0)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;-1;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(7;10;2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(5;5;-5)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;1;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;1;2;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;3;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;2;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;2;7;-2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(-3;5;5)$, $\boldsymbol{b}(-4;-5;-2)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -7 \\ 4 & -8 & -5 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -12 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+12xy-6xz-15y^2+18yz-8z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $2x^2+4xy+8xz-y^2+4yz+2z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $4x^2+6xy+4y^2=7$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 27.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-5;-3;9;-6;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(3;1;-5;3;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;0;2;-1;-3)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2(2;7;7)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;-6;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-3;-14;-21)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;-6;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(3;-4;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;5;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;5;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;2;2;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-10;9;7;5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(6;-2;-1)$, $\boldsymbol{b}(-5;-6;-1)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -8 \\ 6 & 1 & -6 \\ 10 & 5 & -12 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 14 & 7 & -2 \\ -16 & -7 & 3 \\ 16 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy+4xz-12y^2-9z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+8x_1x_2-2x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+2x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $7x^2-8xy+y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 28.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(7;-3;-8;0;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-5;1;5;-1;0)$, $\boldsymbol{a}_3(3;-7;-7;-5;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(5;-3;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-2;1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(3;-2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(15;-9;1)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;-6;4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;1;-1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;-2;2;4)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;-1;2;3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;1;-1;-2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;3;-2;-5)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 4f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 18 \\ -2 & -2 & -5 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -13 & 8 & -15 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3-5x_2^2-2x_2x_3-3x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-3x^2-12xy-8xz-8y^2-12yz-3z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $x^2+8xy+y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 29.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(7;-1;-1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(4;-4;-1;-10;2)$, $\boldsymbol{a}_3(8;0;-1;2;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;4;7)$, $\boldsymbol{e}_2(1;-2;6)$, $\boldsymbol{e}_3(3;3;8)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-6;-17;-4)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-2;-6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;2;1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-3;-2;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-3;-1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;1;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-9;-12;-6;-15)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 6f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 12 \\ -2 & -3 & -8 \\ 4 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -4 \\ 12 & -8 & -6 \\ 10 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+6xy+6xz-7y^2+10yz-21z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-4x_1x_3-4x_2x_3+7x_3^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2-4xy+3y^2=1$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 30.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;-4;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;-1;1;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-8;9;-6;4;7)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;-1;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(0;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3(1;-2;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(1;-11;13)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-5;-4)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;2;-2;5)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-1;-3;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(-7;5;-3;10)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (4t+3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 5f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \\ -20 & -13 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 18 & 12 \\ -1 & 6 & 3 \\ 0 & -12 & -9 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x^2+6xy-2xz-10y^2+8yz-3z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-3x_1^2-12x_1x_2-4x_1x_3-8x_2^2-6x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2+10xy+3y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 31.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(3;0;-1;-2;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;1;0;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(4;5;-3;-1;-8)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(1;-1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2(-3;2;3)$, $\boldsymbol{e}_3(1;1;-2)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-15;-1;22)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;-2;-6)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;1;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;3;-4;2)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-5;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-2;1;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;-3;4;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = 3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 8 \\ 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -16 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -2 \\ 20 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy+8xz-9y^2-10yz-19z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2^2-2x_2x_3-2x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $5x^2-6xy+5y^2=8$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 32.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-4;-3;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(7;-6;1;1;-5)$, $\boldsymbol{a}_3(-3;1;-2;1;2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;-2;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(2;1;4)$, $\boldsymbol{e}_3(3;2;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-13;-8;-13)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;2;-2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-2;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;1;2)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;5;3;2)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;1;-1;2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(0;2;3;-1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x;y;z)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x})=(-5x+6y;-6y+3z;-4x-4y+5z)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}-1&-6&2\\3&10&-3\\6&18&-5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-5&-6&11\\-3&-9&12\\-2&-4&5\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+6xy+12xz-5y^2-8yz-17z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-x^2+4xy-4xz-y^2-4yz+3z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $4x^2-8xy+10y^2=3$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 33.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-7;2;8;3;-5)$, $\boldsymbol{a}_2(1;0;-2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-1;1;1;0)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-2;3;5)$, $\boldsymbol{e}_2(-1;1;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;-1;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(12;-9;-24)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(2;-2;-3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;2;2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;2;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;5;3;-3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(7;-8;-9;-9)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(-6;-4;-6)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}19&17&-13\\-20&-18&13\\10&8&-8\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2&6&-4\\-6&11&-6\\-6&8&-3\end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-x_1^2+6x_1x_2-2x_1x_3-11x_2^2+18x_2x_3-21x_3^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-4x^2+2xy+2xz-4y^2+2yz-4z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2+10xy+3y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 34.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-2;5;3;-1)$, $\boldsymbol{a}_2(0;1;-3;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;3;-10;-2;4)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-3;5;1)$, $\boldsymbol{e}_2(8;-8;-1)$, $\boldsymbol{e}_3(-8;5;0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(1;-9;-3)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-1;-5;3)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;2;1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(-2;-3;-2;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-3;-1;-4)$, $\boldsymbol{a}_4(2;3;4;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(5;8;13;0)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (-t+2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -14 \\ -5 & 1 & 10 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -17 & 12 & -13 \\ -13 & 10 & -9 \\ 13 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-4x_1^2-8x_1x_2-8x_1x_3-7x_2^2+4x_2x_3-19x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x^2+4xy+2xz-2y^2-4yz+z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-2x^2-6xy-2y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 35.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-2;-3;1;5)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;-2;1;5;9)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;2;0;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-2;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(2;-3;-4)$, $\boldsymbol{e}_3(4;0;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-12;-4;-2)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-5;0;1)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;2;-2;-3)$, $\boldsymbol{a}_2(2;-3;2;4)$, $\boldsymbol{a}_3(1;-2;1;3)$, $\boldsymbol{a}_4(1;-1;1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(3;-6;2;9)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = (-5t+4)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 2f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ -2 & -10 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+12xy+6xz-14y^2-24z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $-5x^2+8xy-4xz+y^2-8yz+2z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $3x^2-4xy+6y^2=9$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.
Вариант 36.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-3;-2;2;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;3;0;-1;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;2;1;-1;-1)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(4;2;5)$, $\boldsymbol{e}_2(2;-1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(1;3;3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-5;-10;-12)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(4;5;3)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-3;1;2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-4;1;2;3)$, $\boldsymbol{a}_3(-4;1;3;1)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-1;-2;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;-3;-3;1)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $< \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4 >$.
4. Оператор A в пространстве $\mathcal{P}_2[t]$ многочленов степени не выше второй задан соотношением $A(f(t)) = -2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) + 2f(t)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{t^2, t, 1\}$.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x_1^2+8x_1x_2+8x_1x_3-10x_2^2-4x_2x_3-27x_3^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $-x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2-4x_2x_3+2x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $3x^2-2xy+3y^2=4$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.
Вариант 37.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-2;-1;0)$, $\boldsymbol{a}_2(1;3;0;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;3;3;2;-1)$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(-1;-3;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(2;1;1)$, $\boldsymbol{e}_3(-1;-5;-3)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(14;14;11)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(0;2;-6)$.
3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(-1;3;-1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(3;-4;3;-3)$, $\boldsymbol{a}_3(2;-3;1;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(-1;1;-1;1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(11;-12;8;-14)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $< \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4 >$.
4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}(1;5;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.
5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -18 \\ 1 & 3 & -9 \\ 2 & 6 & -12 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 18 & -5 & 10 \\ 20 & -5 & 10 \\ -10 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2+6xy+12xz-7y^2-20yz-19z^2$ к диагональному виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.
7. Привести квадратичную форму $-2x^2+8xy+12xz-2y^2-12yz-7z^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.
8. Построить кривую $-x^2-4xy+2y^2=2$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 38.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-2;-3;0;2;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;-2;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(4;1;-2;0;-1)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(2;-3;-2)$, $\boldsymbol{e}_2(2;-5;-3)$, $\boldsymbol{e}_3(1;-1;-1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(-2;-5;-3)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;0;0)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(2;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1;-3;2;1)$, $\boldsymbol{a}_3(1;1;1;-2)$, $\boldsymbol{a}_4(1;2;-1;-1)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(4;3;-1;-2)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. Оператор A в пространстве $\mathcal{V}$ задан соотношением $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}(1;5;-4)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -5 & 13 \\ -13 & -9 & 18 \\ -12 & -7 & 16 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 12 \\ -3 & -9 & 12 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-2x^2-4xy+4xz-6y^2-4yz-9z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $11x_1^2+6x_1x_2+6x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $2x^2+8xy+2y^2=5$.

Индивидуальное ДЗ по курсу «Линейная алгебра» 2022. Группа МТ12-21.

Вариант 39.

1*. Найти нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$, равную ноль-вектору (если она существует). Сделать вывод относительно их линейной зависимости или независимости. $\boldsymbol{a}_1(-1;-1;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(-3;2;0;1;-4)$, $\boldsymbol{a}_3(9;4;-6;-7;-2)$.

2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{e}_1(3;-2;2)$, $\boldsymbol{e}_2(2;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3(-2;2;1)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе и вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном, если в исходном базисе $\boldsymbol{b}(8;-4;7)$, в новом базисе $\boldsymbol{c}(-3;6;2)$.

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a}_1(1;-1;-1;2)$, $\boldsymbol{a}_2(2;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-1;1;2;-3)$, $\boldsymbol{a}_4(2;-1;-1;3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}(2;-4;-5;7)$ в построенном ортонормированном базисе, если $\boldsymbol{b}$ принадлежит $<\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4>$.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $A(\boldsymbol{x}) = (2x_1-8x_2-7x_3; 9x_1-5x_2-4x_3; -3x_1+4x_2+9x_3)$. Доказать линейность оператора A и найти его матрицу в этом базисе.

5*. Найти собственные значения и собственные векторы операторов A и B. Если возможно, привести матрицу оператора (A или B или обоих) к диагональному виду и записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -6 \\ -3 & -11 & 12 \\ -15 & -15 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 6 \\ 6 & 8 & -8 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму $-3x^2-6xy-6xz-5y^2+6yz-25z^2$ к каноническому виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

7. Привести квадратичную форму $x^2+8xz+y^2-4yz+2z^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования.

8. Построить кривую $-6x^2-8xy+9y^2=10$.