

Оценка числа π методом Монте-Карло

Опыт с бросанием точки

Рассмотрим квадрат

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

выделим подмножество точек $A \subset \Omega$, лежащих внутри сегмента круга радиуса 1

$$A = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}.$$

Вероятность того, что случайно брошенная точка попадёт в область A равна

$$p = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2}{1 \cdot 1} = \frac{\pi}{4}.$$

С помощью генератора псевдослучайных чисел проведём численный эксперимент и получим оценку вероятности

$$\hat{p} = \frac{N_A}{N},$$

где N_A – число точек, “попавших” в круг, N – число бросков.

Тогда для оценки числа π получим

$$\hat{\pi} = 4 \cdot \hat{p}.$$

Задание

1. Написать функцию, со входным параметром `num_points` (число точек) и выходным параметром `pi_hat` – оценкой числа π .

Построить графики при разном числе точек.

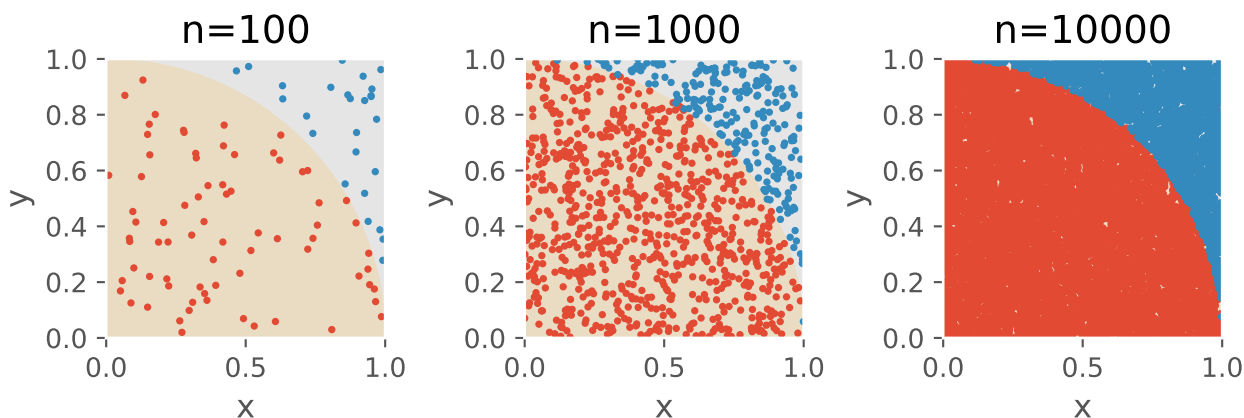


Рис. 1: Пример графика к заданию 1

2. Выполнить серию экспериментов и построить график невязок $|\hat{\pi} - \pi|$ при разных значениях `num_points`.

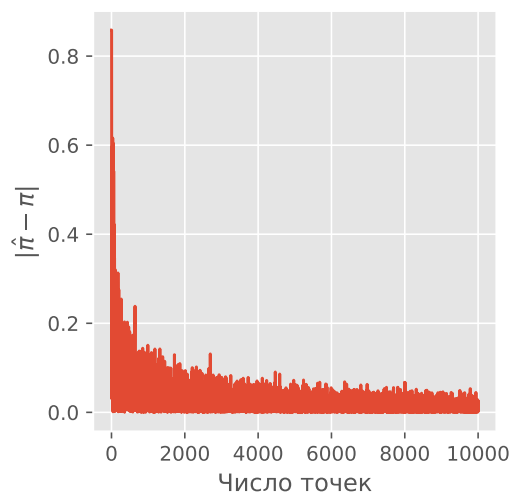


Рис. 2: Пример графика к заданию 2

3. Выполнить серию экспериментов при фиксированном значении `num_points`, построить график невязок $|\tilde{\pi} - \pi|$ в зависимости от числа усреднений N

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{N} \sum_i \hat{\pi}_i.$$

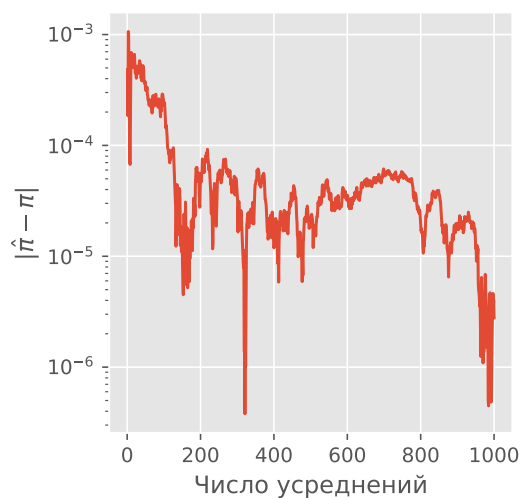


Рис. 3: Пример графика к заданию 3

Опыт Бюффона о бросании иглы

На столе нарисованы параллельные линии на расстоянии $2a$ друг от друга. На стол бросается игла длины $2l$ ($l \leq a$), при этом x – расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, φ – угол между прямой и иглой.

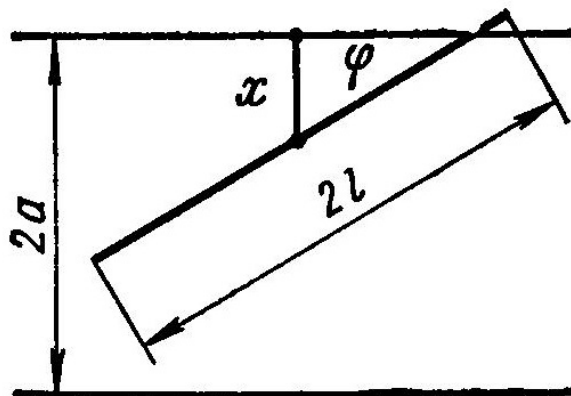


Рис. 4: Схема опыта Бюффона

Условие пересечения иглы и прямой имеет вид

$$x \leq l \sin \varphi.$$

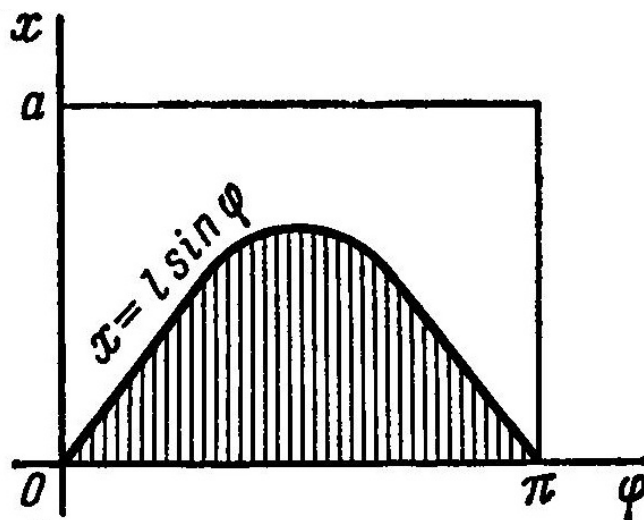


Рис. 5: Иллюстрация к условию пересечения

Тогда вероятность пересечения найдём как

$$p = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = \frac{2l}{\pi a}.$$

С помощью генератора псевдослучайных чисел проведём численный эксперимент и получим оценку вероятности

$$\hat{p} = \frac{N_A}{N},$$

где N_A – число игл, пересекающих прямые, N – общее число брошенных игл.

Тогда для оценки числа π получим

$$\hat{\pi} = \frac{2l}{\hat{p}a}.$$

Задание

1. Написать функцию, вычисляющую оценку числа π . Входными параметрами:

- `num_lines` – количество линий;
- `width` – расстояние между линиями;
- `num_needles` – количество иголок;
- `needle_length` – длина иглы.

Выходной параметр: `pi_hat` – оценка числа π .

2. Построить график, иллюстрирующий эксперимент.

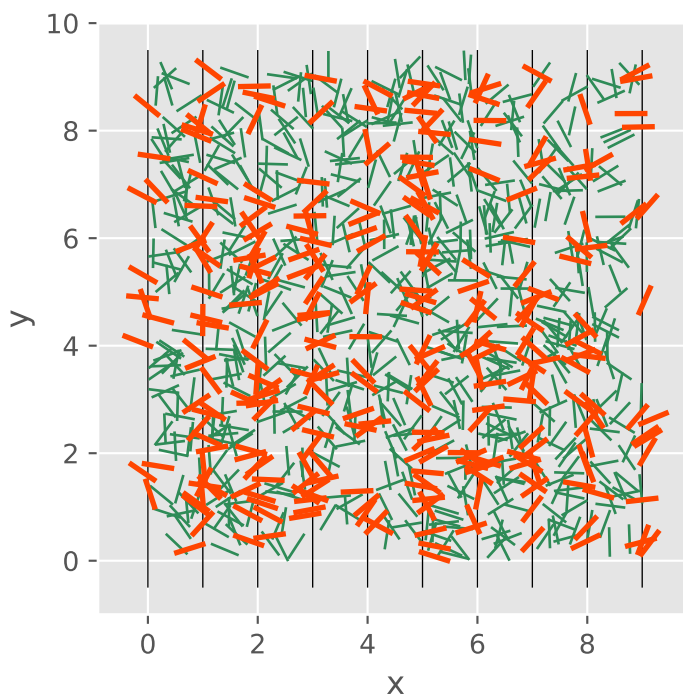


Рис. 6: Пример графика к заданию 2

3. Выполнить серию экспериментов и построить график невязок $|\hat{\pi} - \pi|$ при разных значениях `num_needles`.

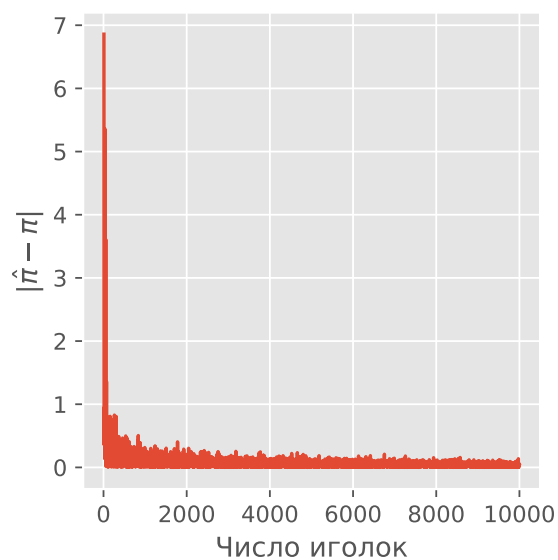


Рис. 7: Пример графика к заданию 3

4. Выполнить серию экспериментов при фиксированных значениях параметров, построить график невязок $|\tilde{\pi} - \pi|$ в зависимости от числа усреднений N

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{N} \sum_i \hat{\pi}_i.$$

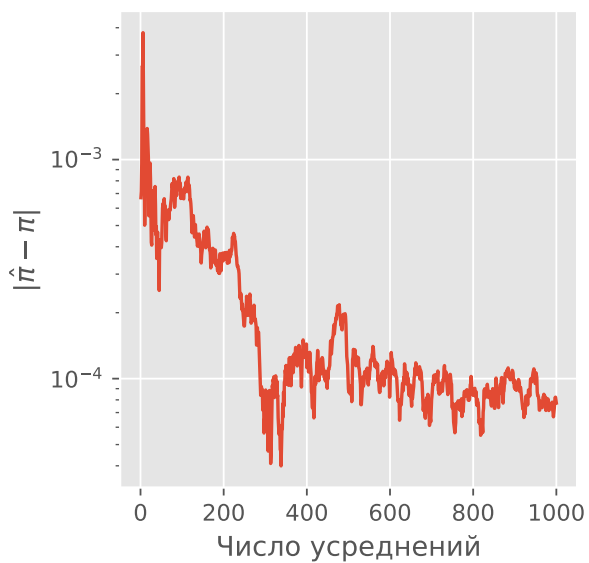


Рис. 8: Пример графика к заданию 4