Содержание

1 Множества и отношения

1.1 Множества

Понятие множества является исходным не определяемым строго понятием. Основные предпосылки наивной теории множеств:

- множество может состоять из любых различимых объектов;
- множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;
- любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Чаще всего множества мы будем обозначать большими буквами латинского алфавита, а их элементы – малыми.

Принадлежность элемента a к множеству A записывается в виде

$$a \in A.$$

Так как множество полностью определяется набором входящих в него элементов, для того чтобы задать конкретное множество можно перечислить его элементы в фигурных скобках, при этом важно понимать что порядок, в котором перечисляются его элементы не имеет значения, а записи $\{0, 1, 2\}$, $\{1, 2, 0\}$, $\{1, 0, 2\}$ и т.д. задают одно и то же множество.

Задание множества с помощью непосредственного перечисления элементов не всегда бывает удобным, поэтому часто используют более общий способ – указание некоторого коллективизирующего свойства, которым обладают все элементы описываемого множества и только они.

Для записи этого свойства необходимо ввести понятия предиката и универсального множества.

Определение

Предикатом в теории множеств называется высказывание $P(x)$, зависящее от некоторого параметра x, принадлежащего некоторому множеству X.

Определение

Универсальным называют множество U, состоящее из всех возможных элементов, обладающих некоторым признаком.

Пусть переменное x задано на некотором универсальном множестве U, предполагая, что рассматриваются такие множества, элементы которого являются и элементами множества U. В таком случае свойство, которым обладают все элементы множества A может быть выражено посредством предиката $P(x)$, выполняющегося тогда и только тогда, когда переменное x принимает произвольное значение из множества A.

$$A = \{x : P(x)\}.$$

Предикат, задающий коллективизирующее свойство, может быть тождественно ложным, в этом случае описываемое множество не будет иметь ни одного элемента. Такое множество называется пустым и обозначается как $\varnothing$.

Операции над множествами

1. **Объединение** множеств $A \cup B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$
2. **Пересечение** $A \cap B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B.
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$
3. **Разность** $A \setminus B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$
4. **Симметрическая разность** $A \triangle B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B.
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
5. Для фиксированного универсального множества U можно определить **дополнение** $\overline{A}$ множества A следующим образом
$$\overline{A} = U \setminus A.$$

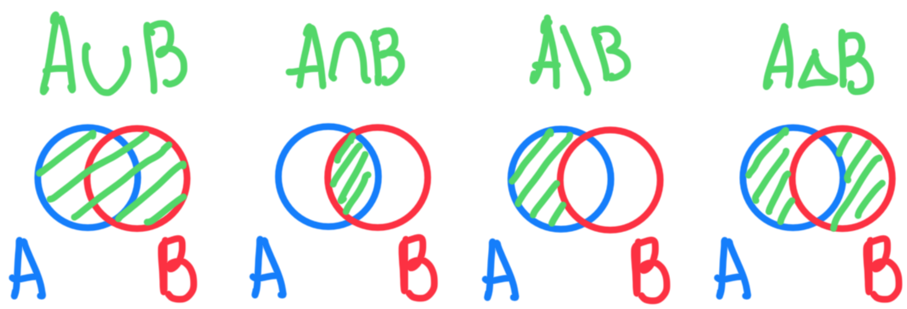

Рис. 1: Диаграммы Эйлера-Венна

Ещё одним важным понятием является понятие подмножества.

Определение

Говорят, что B является **подмножеством** множества A, если всякий элемент B является элементом A. Для обозначения этого факта используется запись
$$B \subseteq A,$$
где $\subseteq$ – символ включения.

Множества A и B называют равными, если они содержат одни и те же элементы.

$$A = B \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) .$$

Определение

Если $B \subseteq A$, но $B \neq A$, то пишут $B \subset A$ и B называют **строгим подмножеством** (собственным подмножеством) множества A, а символ $\subset$ – символом строгого включения.

Определение

Для всякого множества A может быть образовано множество всех подмножеств множества A, которое называется **булеаном** множества A и обозначается как

$$2^A = \{X : X \subseteq A\}.$$

Например, булеан множества $\{a, b\}$ состоит из четырёх множеств $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, а значит

$$2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} .$$

1.2 Кортежи

Определение

Пусть A и B – произвольные множества, тогда **неупорядоченной парой** на множествах A и B называют любое множество вида $\{a, b\}$, где $a \in A$ и $b \in B$ или $a \in B$ и $b \in A$. Если $A = B$, то говорят о неупорядоченной паре на множестве A.

Определение

Упорядоченной парой на множествах A и B называется пара вида (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. В отличие от неупорядоченной пары, она определяется не только самими элементами a и b, но и порядком, в котором они расположены.

Рассмотрим некоторое обобщение понятия упорядоченной пары на случай n элементов.

Определение

Упорядоченный набор из n-элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$, таких что $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$, называется **кортежем**. При этом число n называется длиной (размерностью) кортежа.

Также можно определить равенство кортежей, которое похоже на понятие равенства множеств с учётом порядка элементов.

Определение

Два кортежа $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называют **равными**, если $a_i = b_i$ при $i = \overline{1, n}$.

Определение

Множество всех кортежей длины n на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называют **декартовым (прямым) произведением** множеств $A_1, \ldots, A_n$ и обозначают

$$A_1 \times \ldots \times A_n.$$

Запишем несколько свойств прямого произведения:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

  Рассмотрим доказательство этого свойства методом двух включений.

  1. Если $(x, y) \in A \times (B \cup C)$, то $x \in A$ и $y \in B \cup C$.
  2. Если $y \in B$, то $(x, y) \in A \times B$, а если $y \in C$, то $(x, y) \in A \times C$.
  3. Тогда $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

  Доказательство аналогично предыдущему.

- $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.

  Для любого множества A множество $A \times \varnothing$ образовано парами (x, y), такими, что $x \in A$ и $y \in \varnothing$. Но таких элементов y, что $y \in \varnothing$, не существует, а значит не существует и упорядоченных пар (x, y) принадлежащих рассматриваемому множеству $A \times \varnothing$, т. е. $A \times \varnothing = \varnothing$.

Определение

Если все множества $A_i, i = \overline{1, n}$ декартова произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$ равны между собой, то указанное произведение называют n-й **декартовой степенью** множества A и обозначают A^n.

В данном определении полагают, что первая декартова степень множества A есть само множество A, т. е. $A^1 = A$.

1.3 Соответствия и бинарные отношения

Определение

Говорят, что задано **отображение** $f : A \to B$ из множества A в множество B, если каждому элементу $x \in A$ сопоставлен единственный элемент $y \in B$.
При этом элемент $y \in B$, который отображением f сопоставляется элементу $x \in A$, называется **образом** элемента x при отображении f и обозначается как $f(x)$.
Множество всех элементов $x \in A$, для которых $f(x) = y_0$, называют **прообразом** элемента $y_0 \in B$ при отображении f.

Определение

Каждое отображение однозначно определяется множеством упорядоченных пар $\{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$, которое является подмножеством прямого произведения $A \times B$ множества A на множество B и называется **графиком отображения** f.

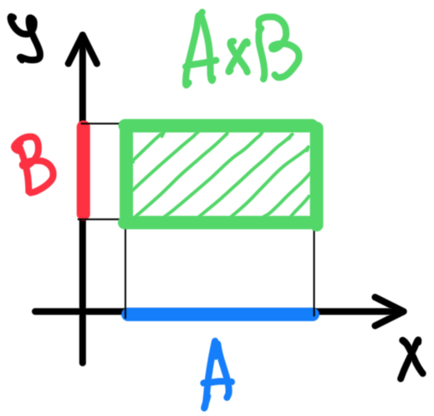

Рис. 2: График отображения

Определение

Отображение $f : A \to B$ называют **инъективным**, если каждый элемент из области значений имеет единственный прообраз, т.е. из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.

Определение

Отображение $f : A \to B$ называют **сюръективным**, если область значений совпадает со всем множеством B. В этом случае говорят об отображении множества A на множество B.

Определение

Отображение $f : A \to B$ называют **биективным**, если оно одновременно инъективно и сюръективно. В этом случае говорят о взаимно однозначном соответствии между множествами A и B.
Биекцию множества A на себя называют **автоморфизмом множества** A.

Замечание

Обобщением понятия отображения является **соответствие**, в этом случае полагают, что элементу $x \in A$ сопоставлен не один, а множество образов в множестве B. В этом случае говорят, что задано соответствие $\rho(x)$ из множества A в множество B.

Определение

Множество C_ρ упорядоченных пар (x, y), таких, что $x \in A, y \in B$ и элементы (x, y) связаны соответствием ρ, т.е. $y \in \rho(x)$, называется **графиком соответствия** ρ из множества A в множество B. При этом указанное множество C_ρ является подмножеством декартова произведения $A \times B$.

Определение

Соответствие $\rho \subseteq A \times A$ из множества A в себя называют **бинарным отношением** на множестве A.

Замечание

Часто бинарное отношение обозначают большой буквой латинского алфавита, при этом для краткости для элементов x и y, связанных бинарным отношением R, вместо $(x, y) \in R$ пишут xRy.

Пример

В качестве примера можно рассмотреть отношение нестрогого неравенства $\leq$ на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Каждому $x \in \mathbb{R}$ поставлены в соответствие такие $y \in \mathbb{R}$, для которых справедливо $x \leq y$. При этом вместо записи $(x, y) \in \leq$ используется краткая форма.

Пример

Пусть на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задано бинарное отношение $x \leq y$, тогда

$$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}.$$

График этого отношения показан на рисунке 3.

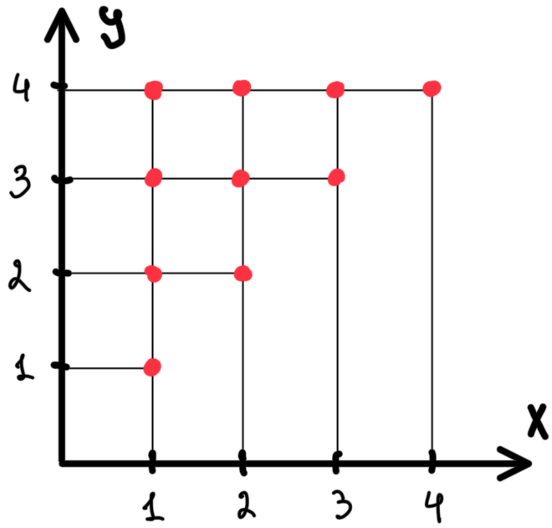

Рис. 3: График бинарного отношения

Пример

Пусть на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ задано бинарное отношение, состоящие из всех упорядоченных пар (x, y), таких, что $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.
График бинарного отношения показан на рисунке 4.

1.4 Композиция соответствий

Так как соответствия можно считать множествами, для них справедливы все операции над множествами, такие как: объединение, пересечение, разность, дополнение и др. При

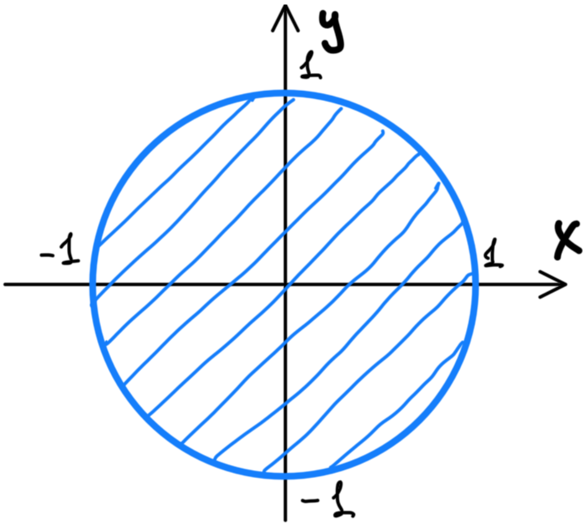

Рис. 4: График бинарного отношения

этом следует отметить, что говоря о дополнении соответствия из A в B, имеется ввиду дополнение до универсального соответствия из A в B, т.е. до декартова произведения $A \times B$.

Определение

Композицией (произведением) соответствий $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$ называют соответствие

$$\rho \circ \sigma = \{(x, y) : (\exists z \in B)\,((x, z) \in \rho) \wedge ((z, y) \in \sigma)\}.$$

Так как бинарное отношение является частным случаем соответствия, для двух бинарных отношений ρ и σ заданных на множестве A, можно говорить о композиции бинарных отношений на множестве A.

Пример

Зададим на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$ бинарные отношения $\rho = \{(x, y) : x + 1 < y\}$ и $\sigma = \{(x, y) : x - y = 2\}$ и построим композицию отношений $\rho \circ \sigma$.

1. Запишем $\rho(1) = \{3, 4\}$, $\sigma(3) = \{1\}$ и $\sigma(4) = \{2\}$.
2. Тогда $(\rho \circ \sigma)(1) = \sigma(3) \cup \sigma(4) = \{1, 2\}$.
3. Аналогично $(\rho \circ \sigma)(2) = \{2\}$, $(\rho \circ \sigma)(3) = \varnothing$ и $(\rho \circ \sigma)(4) = \varnothing$.
4. Тогда $\rho \circ \sigma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.

Определение

Матрицей M_ρ бинарного отношения ρ на множестве $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ называется квадратная матрица размерности $n \times n$, такая, что элемент m_{ij} определяется как

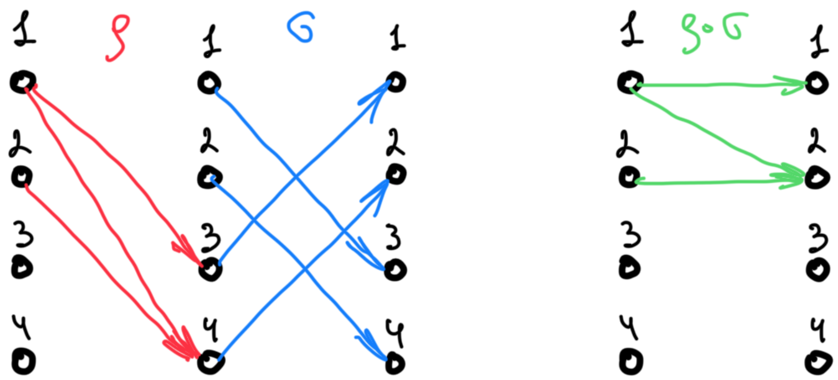

Рис. 5: Композиция бинарных отношений

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \rho a_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример

В качестве пояснения запишем матрицу бинарных отношений ρ и σ из предыдущего примера.

$$M_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание

Элемент $m_{i,j}$ матрицы композиции бинарных отношений можно найти как

$$m_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{n} \left(M_{i,k} \wedge M_{k,j} \right).$$

Пример

Тогда матрицу композиции отношений ρ и σ можно найти с помощью булева произведения матриц

$$M_{\rho\circ\sigma} = M_\rho \cdot M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подробнее построение этой матрицы на примере элемента $M_{1,2}^{\rho\circ\sigma}$, находящегося в первой строке и во втором столбце этой матрицы. Согласно правилам булева произведения матриц имеем

$$M_{1,2}^{\rho\circ\sigma} = \left(M_{1,1}^{\rho} \wedge M_{1,2}^{\sigma}\right) \vee \left(M_{1,2}^{\rho} \wedge M_{2,2}^{\sigma}\right) \vee \left(M_{1,3}^{\rho} \wedge M_{3,2}^{\sigma}\right) \vee \left(M_{1,4}^{\rho} \wedge M_{4,2}^{\sigma}\right) =$$
$$= (a_1\rho a_1 \wedge a_1\sigma a_2) \vee (a_1\rho a_2 \wedge a_2\sigma a_2) \vee (a_1\rho a_3 \wedge a_3\sigma a_2) \vee (a_1\rho a_4 \wedge a_4\sigma a_2) =$$
$$= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1.$$

Определение

Для любого бинарного отношения $\rho \subseteq A^2$ можно построить отношение ρ^* следующим образом: $x\rho y$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или существует последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n > 1$, такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для каждого $i = \overline{0, n-1}$ выполняется $x_i \rho x_{i+1}$.
Такое отношение ρ^* называется **рефлексивно-транзитивным замыканием** бинарного отношения ρ на соответствующем множестве.
При этом $\rho^0 = \mathrm{id}_A$, $\rho^1 = \rho$, $\rho^n = \rho \circ \rho^{n-1}$, $n > 1$ и

$$\rho^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho^i.$$

Пример

В качестве примера рассмотрим отношение ρ заданное на множестве людей A, такое что $x\rho y$, если x является родителем для y.
Тогда отношение $\rho^2 = \rho \circ \rho$ будет связывать y с бабушками/дедушками, отношение $\rho^3 = \rho \circ \rho \circ \rho$ – с прабабушками/прадедушками, а отношение $x\rho^* y$ будет свидетельствовать, что x является предком для y.
Однако надо заметить, что в данном примере всплывает вопрос является ли человек предком сам себе. Для того чтобы более корректно описывать такие детали вводят понятие транзитивного замыкания ρ^+ бинарного отношения ρ. Такое замыкание строится по аналогии с рефлексивно-транзитивным замыканием с той лишь разницей, что в него не входит диагональ множества, т. е. ρ^0.

1.5 Специальные свойства бинарных отношений

Определение

Бинарное отношение на множестве A состоящее из всех пар (x, x), т. е. пар с совпадающими компонентами, называется **диагональю множества** A и обозначается id_A.

Для множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ диагональ состоит из упорядоченных пар

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

График диагонали id_A показана на рисунке 6.

- Бинарное отношение ρ на множестве A называют **рефлексивным**, если диагональ множества A содержится в ρ: $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$, т.е. $x\rho x$ для любого $x \in A$.
- Бинарное отношение ρ на множестве A называют **иррефлексивным**, если

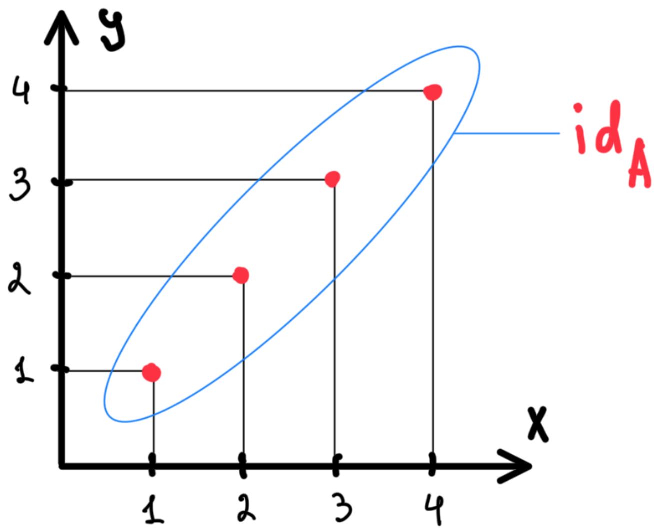

Рис. 6: Диагональ множества id_A

$\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing.$

Графики рефлексивного, иррефлексивного и нерефлексивного отношений показаны на рисунке 7.

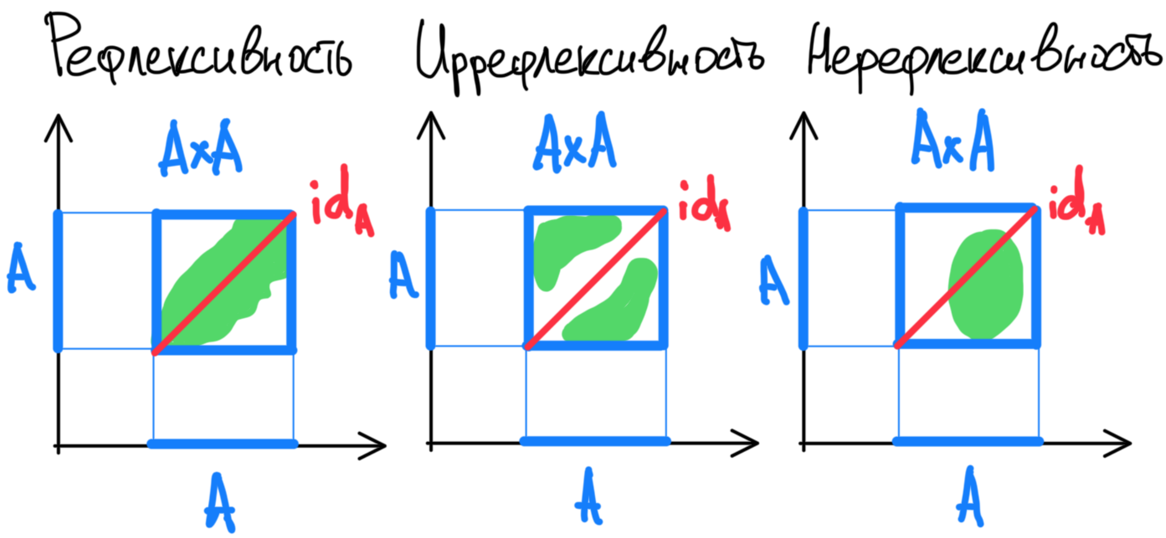

Рис. 7: Графики рефлексивного, иррефлексивного и нерефлексивного отношений

- Бинарное отношение ρ на множестве A называют **симметричным**, если для любых $x, y \in A$ из $x\rho y$ следует $y\rho x$.
- Бинарное отношение ρ на множестве A называют **антисимметричным**, если для любых $x, y \in A$ из одновременной справедливости $x\rho y$ и $y\rho x$ следует $x = y$.

Графики симметричного, антисимметричного и несимметричного отношений показаны на рисунке 8.

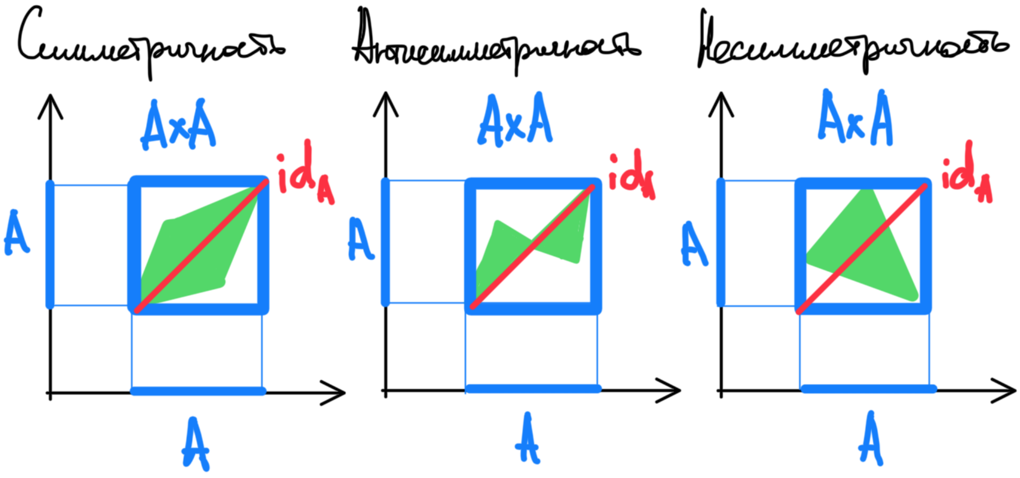

Рис. 8: Графики симметричного, антисимметричного и несимметричного отношений

- Бинарное отношение ρ на множестве A называют **транзитивным**, если для любых $x, y, z \in A$ из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$.

Замечание

Бинарное отношение на некотором множестве называют:

1. **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;
2. **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично;
3. **частичным порядком**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
4. **предпорядком** (квазипорядком), если оно рефлексивно и транзитивно;
5. **строгим порядком**, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
6. **строгим предпорядком**, если оно иррефлексивно и транзитивно.

Определение

Пусть A – произвольное множество. Семейство $(B_i)_{i \in I}$ непустых и попарно не пересекающихся множеств называют **разбиением множества** A, если объединение множеств семейства $(B_i)_{i \in I}$ равно A, т. е.

$$\bigcup_{i \in I} B_i = A.$$

В этом случае сами множества B_i называются элементами разбиения.

Определение

Пусть ρ – эквивалентность, заданная на множестве A и $x \in A$, тогда множество всех y, находящихся в отношении ρ к x, т. е. $\{y : y\rho x\}$ называют **классом эквивалентности** по отношению ρ и обозначают $[x]_\rho$.

Теорема о классах эквивалентности

Для любого отношения эквивалентности на множестве A множество классов эквивалентности образует разбиение множества A. Обратно, любое разбиение множества A задаёт на нём отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности совпадают с элементами разбиения.

Доказательство

- **Необходимость:**

  1. Заметим, что в силу рефлексивности для любого элемента $x \in A$ класс эквивалентности не пуст, так как $x \in [x]_\rho$.
  2. Убедимся, что любые два класса эквивалентности по отношению ρ либо не пересекаются, либо совпадают.
     - Пусть два класса эквивалентности $[x]_\rho$ и $[y]_\rho$ имеют общий элемент $z = [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Тогда $z\rho x$ и $z\rho y$.
     - В силу симметричности из $z\rho x$ имеем $x\rho z$.
     - В силу транзитивности из $x\rho z$ и $z\rho y$ имеем $x\rho y$.
     - Пусть $h \in [x]_\rho$, тогда $h\rho x$, а в силу $x\rho y$ имеем $h\rho y$ и, следовательно, $h \in [y]_\rho$.
     - Если $h \in [y]_\rho$, тогда $h\rho y$.
       В силу симметричности имеем $y\rho x$.
       В силу транзитивности получим $h\rho x$ и, следовательно, $h \in [x]_\rho$.

     Таким образом $[x]_\rho = [y]_\rho$.

- **Достаточность:**

  1. Пусть $(B_i)_{i\in I}$ – некоторое разбиение множества A.
  2. Рассмотрим отношение ρ, такое, что $x\rho y$ имеет место только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же элементу B_i данного разбиения, т. е.
     $$x\rho y \Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in B_i) \wedge (y \in B_i).$$
     Рефлексивность и симметричность введённого отношения очевидна.
  3. Если для любых x, y и z имеет место $x\rho y$ и $y\rho z$, то x, y и z в силу определения отношения ρ принадлежат одному и тому же элементу B_i разбиения. Следовательно, $x\rho z$ и отношение ρ транзитивно.

Таким образом ρ – эквивалентность на A.

2 Булевы функции

2.1 Булевы функции

Булевы функции определяются на множестве, состоящем из двух элементов. В качестве такого множества удобно рассмотреть множество $0, 1$, которое обозначается E_2.

Определение

Булевой функцией от n переменных называют произвольное отображение вида

$$f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}.$$

Множество всех булевых функций обозначается как P_2, а множество всех булевых функций от n переменных как $P_2^{(n)}$.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является отображением n-ой декартовой степени множества E_2 в множество E_2, поэтому её можно задать с помощью таблицы.

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	$f(0, 0, \ldots, 0)$
0	0	$\ldots$	1	$f(0, 0, \ldots, 1)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	1	$\ldots$	0	$f(1, 1, \ldots, 0)$
1	1	$\ldots$	1	$f(1, 1, \ldots, 1)$

Таблица 1: Табличное задание булевой функции

Заметим, что все 2^n наборов в левом столбце записывают в лексикографическом порядке, а значит для всех булевых функций от n переменных этот столбец будет одинаков.

Отсюда следуют два утверждения:

- Всякую булеву функцию от n переменных можно задать двоичным столбцом высоты 2^n.
- Всякий двоичный столбец высоты 2^n задаёт булеву функцию от n переменных.

Стало быть мы можем говорить о взаимно однозначном соответствии между множеством $P_2^{(n)}$ и множеством всех двоичных наборов длины 2^N, откуда следует, что число булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}.

Рассмотрим булевы функции от одной переменной.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 2: Булевы функции одной переменной

При этом заметим:

- Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются константами 0 и 1, а при обозначении так и пишут 0 и 1 не указывая явно переменную x.
- Значения функции $f_2(x)$ совпадает со значениями переменной x, поэтому её называют тождественной и при обозначении часто пишут лишь символ переменной x.

- Функция $f_3(x)$ осуществляет инвертирование значения переменной x, поэтому её называют отрицанием и обозначают $\overline{x}$.

Булевых функций от двух переменных будет уже $2^{2^2} = 16$, но ограничимся рассмотрением лишь 7 наиболее важных. Приведём эти функции в таблице 3.

Название		Дизъюнкция	Конъюнкция	Сложение по модулю 2	Импликация	Эквивалентность	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса
Обозначение		$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \vert x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$	$f_3(x_1, x_2)$	$f_4(x_1, x_2)$	$f_5(x_1, x_2)$	$f_6(x_1, x_2)$	$f_7(x_1, x_2)$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Таблица 3: Некоторые булевы функции двух переменных

В качестве булевой функции трёх переменных в таблице 4 приведём лишь один пример – мажоритарную функцию или функцию голосования.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица 4: Булева функция трёх переменных

Определение

Функция $f(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n)$ **существенно зависит** от переменной x_i, если найдутся такие значения $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, что

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Если функция $f(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, то переменная x_i называется существенной переменной функции $f(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n)$. В противном случае переменная называется несущественной или фиктивной.

Пример

В качестве примера рассмотрим функции $f(x, y) = x \vee y$ и $g(x, y, z) = xz \vee x\overline{z} \vee yz \vee y\overline{z}$. Заметим, что используя тождества булевой алгебры можно записать, что

$$g(x, y, z) = (x \vee y)(z \vee \overline{z}),$$

но так как $z \vee \overline{z} = 1$, то

$$g(x, y, z) = x \vee y = f(x, y),$$

поэтому функции f и g естественно рассматривать как равные, несмотря на то, что они зависят от разного числа переменных.

2.2 Формулы и эквивалетности

Хотя табличный способ задания булевых функция является универсальным, не практике он не является удобным, поэтому ставится вопрос о формульном задании булевых функций.

В теории булевых функций ставится задача представления булевой функции такой формулой, которая бы содержала строго определённое конечное множество элементарных булевых функций – главным образом тех, что мы определили ранее – функций одной и двух переменных. Иными словами, мы хотим определить нечто вроде функционального базиса, через элементы которого можно было бы выразить любую булеву функцию.

Стоит отметить, что одна и та же булева функция может быть представлена, вообще говоря, различными формулами как над одним и тем же базисом, так и над разными базисами. Для того, чтобы аккуратно определить механизм эквивалентного преобразования формул, необходимо уточнить понятие формулы.

Пусть задано непустое множество F булевых функций. Введём понятие формулы, составленной из символов функций множества F.

Определение

Пусть f – обозначение функции от n переменных из множества F, а $x_1, \ldots, x_n$ – символы переменных.
Тогда выражение

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

считаем **формулой над** F.
Пусть также g – обозначение функции от m переменных из множества F, а $A_1, \ldots, A_m$ – либо формулы над F, либо символы переменных (необязательно различные).
Тогда выражение

$$g(A_1, \ldots, A_m)$$

считаем **формулой над** F.

Пример

В качестве примера определим множество F как

$$F = \{\overline{}, \vee, \wedge, \ , \oplus, \rightarrow, |\},$$

тогда следующие выражения будут являться формулами над F:

$$\overline{x}_1, \quad (x_1 \vee x_2) \wedge x_3, \quad \overline{(x_1 \oplus x_2)}|x_3, \quad x_1 \to (x_1 \vee x_3).$$

Определение

Формулы Φ и Ψ называются **эквивалентными**, если они реализуют одну и ту же булеву функцию.
Этот факт записывается как $\Phi = \Psi$.

Основные эквивалентности

Запишем наиболее употребительные эквивалентности для функций, определённых ранее.

1. $\overline{1} = x \wedge 0 = x \wedge \overline{x} = x \oplus x = 0$.
2. $\overline{0} = x \vee 1 = x \vee \overline{x} = x \to x = 1$.
3. $\overline{\overline{x}} = x \wedge x = x \vee x = x \wedge 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$.
4. $x \oplus 1 = x \to 0 = x|x = \overline{x}$.
5. $x \circ y = y \circ x$, где $\circ$ – любая из функций $\vee, \wedge, \oplus, |$ (коммутативность функции $\circ$).
6. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, где $\circ$ – любая из функций $\vee, \wedge, \oplus$ (ассоциативность функции $\circ$).
7. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции).
8. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции).
9. $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно сложения по модулю 2).
10. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ (правила де Моргана).
11. $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$, $x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$ (правила поглощения).
12. $x \oplus y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$,

    $x \vee y = ((x \wedge y) \oplus x) \oplus y = \overline{x} \to y$,

    $x \to y = \overline{x} \vee y = ((x \wedge y) \oplus x) \oplus 1$,

    $x|y = \overline{x \wedge y}$.

Справедливость этих эквивалентностей можно проверить непосредственно с помощью таблиц истинности.

Замечание

Если формула содержит множество символов различных функций, то при отсутствии дополнительных скобок вначале выполняют конъюнкцию, затем сложение по модулю 2, после дизъюнкцию затем импликация или штрих Шеффера.
Например, формулу

$$\overline{x} \wedge y \oplus z \to \overline{y} \wedge z \vee \overline{x}$$

следует понимать как

$$((\overline{x} \wedge y) \oplus z) \to ((\overline{y} \wedge z) \vee \overline{x}).$$

Определение

Множество булевых функций F называют:

- **замкнутым**, если любая формула над F представляет некоторую функцию из F;
- **полным**, если любая булева функция может быть представлена некоторой формулой над F.

2.3 Разложение булевой функции по переменным

Теорема о разложении по первой переменной

Для любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ справедливо представление

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n) \vee \overline{x}_1 \cdot f(0, x_2, \dots, x_n).$$

Доказательство

Рассмотрим произвольный двоичный набор $a = (a_1, \dots, a_n)$ и сравним значения левой и правой частей доказываемого представления.

- В левой части имеем $f(a)$.
- Если $a_1 = 0$, то выражение $a_1 \cdot f(1, a_2, \dots, a_n)$ обращается в 0, откуда получим
$$\overline{a}_1 \cdot f(0, a_2, \dots, a_n) = \overline{0} \cdot f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 \cdot f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a).$$
- Если же $a_1 = 1$, то выражение $\overline{a}_1 \cdot f(0, x_2, \dots, x_n)$ обращается в 0, тогда
$$a_1 \cdot f(1, a_2, \dots, a_n) = 1 \cdot f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a).$$

Замечание

Отметим, что аналогичным образом можно рассмотреть разложение по любой переменной.
Пусть $n \geq 2$, применим указанную теорему к функциям $f(1, x_2, \dots, x_n)$ и $f(0, x_2, \dots, x_n)$ и переменной x_2.

Получим представление

$$f(x_1,\dots,x_n) = x_1\cdot x_2\cdot f(1,1,\dots,x_n)\vee x_1\cdot \overline{x}_2\cdot f(1,0,\dots,x_n)\vee \\ \vee \overline{x}_1\cdot x_2\cdot f(0,1,\dots,x_n)\vee \overline{x}_1\cdot \overline{x}_2\cdot f(0,0,\dots,x_n).$$

Если ввести обозначения $x^1 = x$, $x^0 = \overline{x}$ и продолжить рассуждения, можно получить следующее утверждение.

Следствие 1. О разложении по первым m переменным

Для любой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ и любого m $(1\le m\le n)$ справедливо представление

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_m^{\sigma_m}\cdot f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,x_{m+1},\dots,\sigma_n).$$

Особый интересный вид следствие 1 принимает в случае, когда $m = n$. Тогда каждое дизъюнктивное слагаемое имеет вид

$$x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot f(\sigma_1,\dots,\sigma_n).$$

При этом:

- если $f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = 0$, то всё слагаемое равно нулю и его можно опустить (за исключением случая, когда функция f тождественно равна нулю, тогда вся формула в следствии 1 вырождается в константу);
- если $f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = 1$, то вместо $x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ можно записать эквивалентную формулу $x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n}$.

Таким образом мы приходим к утверждению.

Следствие 2. О разложении по всем переменным

Если булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ не равна тождественно нулю, то справедливо представление

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Правая часть выражения в следствии 2 носит название совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ).

Замечание

Следствие 2 показывает, что любую не равную тождественно 0 булеву функцию можно единственным образом представить в виде дизъюнкции конъюнкций одинаковой длины, составленных из переменных $x_1,\dots,x_n$ и их отрицаний.

СДНФ относится к более общему классу формул над множеством $\{\overline{\ },\vee,\wedge\}$, которые носят название дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). В отличие от СДНФ в ДНФ конъюнкции могут состоять из различных переменных и иметь различную длину.

3 Полнота системы булевых функций

3.1 Замкнутость и полнота

Пусть имеется некоторое непустое множество F булевых функций и дана функция f. Спрашивается, можно ли представить функцию f через функции множества F.

Определение

Говорят, что булева функция f **выразима** через функции множества F, если существует формула над F, реализующая функцию f.

Часто операцию порождения одних булевых функций через другие называют операцией суперпозиции.

Определение

Множество всех функций, выразимых через функции множества F, называют **замыканием множества** F относительно операции суперпозиции и обозначают $[F]$.

Из определения видна справедливость аксиом замыкания:

1. $F \subseteq [F]$.
2. Если $F_1 \subseteq F_2$, то $[F_1] \subseteq [F_2]$.
3. $[[F]] = [F]$.

Определение

Если для множества булевых функций F выполняется $F = [F]$, то F называют **замкнутым классом** функций.

Некоторые важные замкнутые классы:

- Класс C_0 булевых функций, тождественно равных 0.
- Класс C_1 булевых функций, тождественно равных 1.
- Класс T_0 булевых функций, сохраняющих константу 0. Т. е.

$$f(0,\ldots,0) = 0.$$

- Класс T_1 булевых функций, сохраняющих константу 1. Т. е.

$$f(1,\ldots,1) = 1.$$

С понятием замыкания тесно связано понятие полноты.

Определение

Пусть R – замкнутый класс, а Q – системы функций из R. Говорят что система функций Q полна в классе R, если $[Q] = R$.

Теорема о полноте в классе

Пусть система булевых функций Q полна в замкнутом классе R. Пусть также P – некоторое множество функций из R и любая функция из Q реализуется формулой над P. Тогда множество P также полно в классе R.

Доказательство

- Возьмём произвольную функцию f из класса R. По условию теоремы её можно реализовать некоторой формулой Φ над Q.
- В свою очередь каждая функция из Q, участвующая в построении формулы Φ реализуема формулой над P.
- Заменим в формуле Φ вхождение каждого символа функции из Q соответствующей формулой над P, получив тем самым формулу Φ' над P, реализующую ту же самую функцию f.

Следствие 2 из прошлой лекции показывает, что каждую не равную 0 булеву функцию можно представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n},$$

то есть формулой над множеством $\{\overline{}, \vee, \wedge\}$, а так как $0 = x \wedge \overline{x}$, получаем, что указанная система полна в классе P_2.

3.2 Двойственность

Определение

Функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ является **двойственной** к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n).$$

Функция, двойственная к $f(x_1, \ldots, x_n)$, обозначается как $f^*(x_1, \ldots, x_n)$.
Из определения двойственности и тождества $\overline{\overline{x}} = x$ следует, что

$$f^{**}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Пример

Пусть $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, тогда

$$f^*(x_1, x_2) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = x_1 \wedge x_2.$$

Таким образом, двойственные друг другу функции образуют пары, запишем некоторые из них.

Теорема о двойственных функциях

Если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_0(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

f	f^*
0	1
$\overline{x}$	$\overline{x}$
$x \wedge y$	$x \vee y$
$x \oplus y$	$x \oplus y \oplus 1 = \overline{x \oplus y}$

Таблица 5: Двойственные функции

то

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = g_0^*(g_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_n)).$$

Доказательство

Согласно определению двойственной функции имеем

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{g}_0(g_1(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n), \dots, g_m(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)).$$

В правой части заменим каждую формулу $g_i(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ эквивалентной $\overline{\overline{g}}_1(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$, получим

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{g}_0(\overline{\overline{g}}_1(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n), \dots, \overline{\overline{g}}_m(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)).$$

Функция $\overline{g}_i(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ по определению есть $g_1^*(x_1, \dots, x_n)$, откуда

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{g}_0(\overline{g}_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, \overline{g}_m^*(x_1, \dots, x_n)).$$

Вновь по определению $\overline{g}_0(\overline{g}_1^*, \dots, \overline{g}_m^*) = g_0^*(g_1^*, \dots, g_m^*)$, тогда окончательно

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = g_0^*(g_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_n)).$$

Запишем важное следствие этой теоремы.

Принцип двойственности

Если функция f реализуется формулой Φ, составленной из символов функций $g_1, \dots, g_m$, то двойственная функция f^* реализуется формулой Φ^*, которая получается из формулы Φ заменой каждого символа функции g_i $(1 \leq i \leq m)$ символом двойственной функции g_i^*.

Таким образом, если установлено некоторое утверждение для функций $f, g, \dots$ в котором фигурируют лишь понятия, базирующиеся лишь на формулах, то по принципу двойственности будет справедливо аналогичное утверждение о булевых функциях $f^*, g^*, \dots$.

Так, например, доказав дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции, мы можем сделать вывод относительно дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции. Аналогичное утверждение справедливо и для двух правил де Моргана.

Так же на основе принципа двойственности, можем записать аналог теоремы о разложении по первой переменной из прошлой лекции.

Теорема

Для любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ справедливо разложение

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \cdot (\overline{x}_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n)).$$

Если булева функция не равна тождественно 1, то имеет место представление

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}).$$

Выражение в правой части утверждения носит название совершенной конъюктивной нормальной формы (СКНФ).

Определение

Функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ называют **самодвойственной**, если

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f^*(x_1,\ldots,x_n).$$

Таким образом, функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах она принимает взаимно противоположные значения.

Множество всех самодвойственных функцию обозначим S.

3.3 Полиномы Жегалкина

На прошлой лекции мы показали, что если булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ не равна тождественно нулю, то справедливо представление

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

На основании этого представления и, учитывая, что

$$0 = x \wedge \overline{x},$$

можно сделать вывод о полноте системы $\{\overline{}, \vee, \wedge\}$ в классе P_2.

Замечание

Рассмотрим систему функций $\{1, \oplus, \wedge\}$. По теореме о полноте в классе, учитывая полноту стандартного базиса, и на основе выражений

$$\overline{x} = x \oplus 1, \quad x \vee y = x \wedge y \oplus x \oplus y,$$

сделаем вывод о полноте системы $\{1, \oplus, \wedge\}$ в классе P_2.

Это означает, что любую булеву функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ можно представить в виде формулы над множеством $\{1, \oplus, \wedge\}$ в виде

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigoplus_{\{i_1,i_2,\ldots,i_m\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} a_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}.$$

Такое представление называется полиномом Жегалкина или алгебраической нормальной формой (АНФ).

Одним из способов построения полинома Жегалкина основан на методе неопределённых коэффициентов.

Пример

В качестве примера рассмотрим построение полинома Жегалкина для функции $f(x, y, z)$, заданной двоичным набором (10011100).
Запишем функцию в виде полинома Жегалкина с неопределёнными коэффициентами $a_0, \dots, a_7$.

$$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_4xy \oplus a_5xz \oplus a_6yz \oplus a_7xyz.$$

Подставляя в функцию наборы $(0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots (1, 1, 1)$, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|l}
(0,0,0) & a_0 = 1, \\
(0,0,1) & a_0 \oplus a_3 = 0, \\
(0,1,0) & a_0 \oplus a_2 = 0, \\
(0,1,1) & a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 1, \\
(1,0,0) & a_0 \oplus a_1 = 1, \\
(1,0,1) & a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 1, \\
(1,1,0) & a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 0. \\
(1,1,1) & a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0.
\end{array}$$

Решая систему, последовательно исключаем неизвестные, получим

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 0, \\
a_2 &= 1, \\
a_3 &= 1, \\
a_4 &= 0, \\
a_5 &= 1, \\
a_6 &= 0, \\
a_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Тогда полином Жегалкина для функции $f(x, y, z)$ примет вид

$$f(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus xz.$$

Определение

Булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ назовём **линейной**, если её полином Жегалкина не содержит нелинейных слагаемых. Иными словами её можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \dots \oplus a_nx_n.$$

Множество всех линейных функцию обозначим через L.

3.4 Монотонность

В математическом анализе монотонной мы называли функцию, значения которой не убывают с увеличением аргумента. Это понятие можно перенести и на булевы функции, если определить частичный порядок на множестве E_2^n.

При этом считаем, что набор $(a_1, \dots, a_n)$ не превосходит набор $(b_1, \dots, b_n)$, если для любого i ($1 \le i \le n$) выполняется равенство $a_i \le b_i$. Этот факт записывается в виде

$$(a_1, \dots, a_n) \le (b_1, \dots, b_n).$$

Определение

Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется **монотонной**, если для любых двух наборов $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$, таких что

$$(a_1, \dots, a_n) \le (b_1, \dots, b_n),$$

выполняется неравенство

$$f(a_1, \dots, a_n) \le f(b_1, \dots, b_n).$$

Множество всех монотонных булевых функций обозначим как M.

3.5 Критерий полноты

В ходе лекции мы рассмотрели различные классы булевых функций, в том числе:

1. Класс T_0 булевых функций, сохраняющих константу 0.
2. Класс T_1 булевых функций, сохраняющих константу 1.
3. Класс S самодвойственных булевых функций.
4. Класс L линейных булевых функций.
5. Класс M монотонных булевых функций.

На основе анализа принадлежности системы булевых функций к этим классам функций можно сделать вывод о полноте рассматриваемой системы.

Теорема Поста о полноте

Система булевых функций полна в P_2 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном их классов

$$T_0,\ T_1,\ S,\ L,\ M.$$

Пример

Проверим систему функций $\{\vee, \to\}$ на полноту.
Составим таблицу истинности для функций указанной системы.

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$	$f_2(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Будем последовательно проверять принадлежность функций к классам T_0, T_1, S, L, M.

1. Для класса T_0:

- f_1 сохраняет 0, так как $f_1(0,0)=0$;
- f_2 не сохраняет 0, так как $f_2(0,0)=1$.

2. Для класса T_1:

   - f_1 сохраняет 1, так как $f_1(1,1)=1$;
   - f_2 сохраняет 1, так как $f_2(1,1)=1$.

   Дальнейшая проверка не требуется, так как $\{\vee, \to\} \subset T_1$, а значит система функций не полна.

4 Графы

4.1 Определение графа

Определение

Пусть V – непустое множество

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad V \neq \varnothing.$$

E – множество неупорядоченных пар элементов множества V, за исключением пар, состоящих из одинаковых элементов

$$E \subseteq \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.$$

Тогда пара множеств (V, E) называется **простым графом** и обозначается $G = (V, E)$, причём элементы множества V называются вершинами, а элементы множества E – рёбрами.

Пример

Рассмотрим пример, в котором множество вершин V состоит из 6 элементов

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

а множество рёбер состоит из 5 элементов

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_6\}\}.$$

Граф $G = (V, E)$ покажем на рисунке 9.

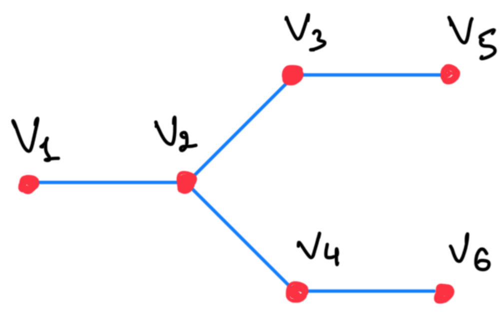

Рис. 9: Простой граф

В случае, если множество E образовано упорядоченными парами, говорят об ориентированном графе, а элементы множества E называют дугами.

Определение

Пусть V – непустое множество,

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, V \neq \varnothing,$$

E – множество всех упорядоченных пар элементов множества V, за исключением пар, состоящих из одинаковых элементов

$$E \subseteq \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.$$

Тогда пара множеств (V, E), называется **ориентированным графом** и обозначается $G = (V, E)$. Элементы множества V называют **вершинами**, а элементы множества E – **дугами**.

Пример

В качестве примера рассмотрим граф, образованный тем же множеством вершин V, что и в прошлом примере,

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

а множество E состоит из упорядоченных пар

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_2, v_4), (v_6, v_4)\}.$$

В этом случае дуга (v_i, v_j) имеет ориентацию, которую показывают стрелкой от вершины v_i к вершине v_j.
Описанный ориентированный граф показан на рисунке 10.

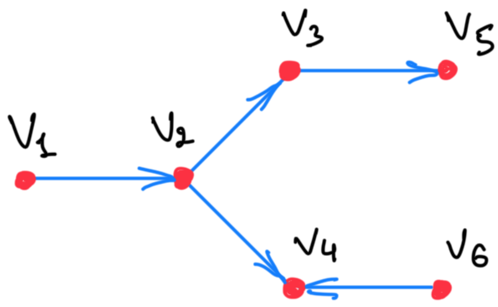

Рис. 10: Ориентированный граф

Для краткости ориентированные графы также называют орграфами. В случае орграфов в литературе встречается задание множества дуг E как подмножества декартова квадрата множества вершин V, тогда

$$E = V^2 \setminus \mathrm{id}_V.$$

Более общей конструкцией является мультиграф – граф в котором «разрешены» кратные рёбра (дуги в случае орграфов). Само название мультиграфа происходит от понятия мультимножества, дадим его ниже.

Определение

Пусть A – произвольное множество, тогда упорядоченная пара

$$\mathfrak{A} = (A, m),$$

где $m : A \to N$ – отображение, сопоставляющее каждому элементу множества A натуральное число, называемое кратностью, называется **мультимножеством**.

Необходимость введения такого понятия обусловлена тем, что множество, как мы и говорили в первой лекции, определяется набором входящих в него элементов, а значит $\{a, a\} = \{a\}$, что не позволяет задать кратность элементов.

Определение

Пусть V – непустое множество,

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}, V \neq \varnothing,$$

E – множество неупорядоченых пар элементов множества V, за исключением пар, состоящих из одинаковых элементов

$$E \subseteq \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.$$

$\mathfrak{E}$ – мультимножество, построенное на множестве E,

$$\mathfrak{E} = (E, m), \quad m : E \to \mathbb{N}.$$

Тогда упорядоченная пара $G = (V, \mathfrak{E})$, называется **мультиграфом**.

Пример

Рассмотрим мультиграф на множестве вершин V из предыдущих примеров.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

Элементы мультимножества $\mathfrak{E}$ для простоты перечислим в фигурных скобках, как и элементы простого множества, но будем иметь ввиду возможную кратность.

$$\mathfrak{E} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_6\}\}.$$

Описанный мультиграф $G = (V, \mathfrak{E})$ показан на рисунке 11.

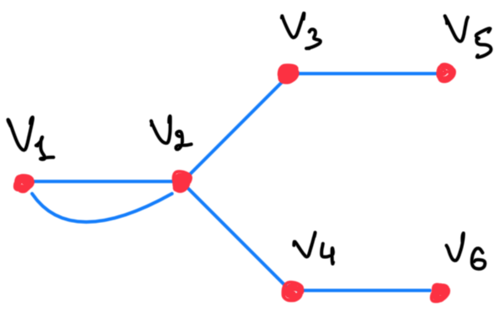

Рис. 11: Мультиграф

Аналогично предыдущему примеру можно построить ориентированный мультиграф.

Ещё одним обобщением является понятие псевдографа – мультиграфа, в котором «разрешены» петли, т. е. рёбра (дуги) начало и конец которых совпадают.

Определение

Пусть V – непустое множество,

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}, V \neq \varnothing,$$

E – множество неупорядоченых пар элементов множества V, за исключением пар, состоящих из одинаковых элементов

$$E \subseteq \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V\}.$$

$\mathfrak{E}$ – мультимножество, построенное на множестве E,

$$\mathfrak{E} = (E, m), \quad m : E \to \mathbb{N}.$$

Тогда упорядоченная пара $G = (V, \mathfrak{E})$, называется **псевдографом**.

Пример

Построим псевдограф на множестве вершин V из предыдущих примеров

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}.$$

Мультимножество рёбер зададим как

$$\mathfrak{E} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_6\}\}.$$

Описанный граф покажем на рисунке 12.

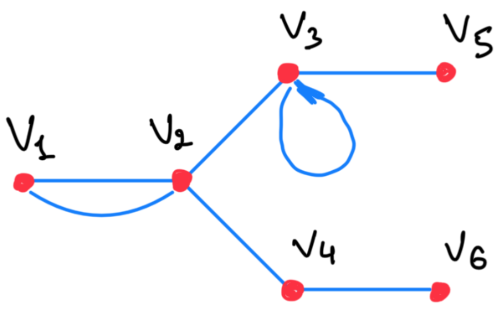

Рис. 12: Псевдограф

Аналогично можно построить ориентированный псевдограф.

4.2 Способы задания графов

Определение

Вершины u и v называют **смежными**, если существует ребро $e = \{u, v\} \in E$, соединяющее их.

Определение

Ребро e называют **инцидентным** вершине v, если она является одним из его концов.

Определение

Степенью вершины $\deg(v)$ неориентированного графа называют число рёбер, инцидентных этой вершине

$$\deg(v) = |\{u : \{v, u\} \in E\}|.$$

Пример

Рассмотрим в качестве примера граф, изображенный на рисунке 9.
Этот граф образован множеством вершин

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

и множеством рёбер

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_6, v_4\}\}.$$

При этом:

- Вершины v_1 и v_2 смежные, так как $\{v_1, v_2\} \in E$.
- Вершины v_1 и v_6 не смежные, так как $\{v_1, v_6\} \notin E$.
- Степени вершин: $\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 3, \deg(v_3) = 2, \deg(v_4) = 2, \deg(v_5) = 1, \deg(v_6) = 1$.

Для ориентированных графов введены понятия полустепени захода и полустепени исхода вершины.

Определение

Полустепенью захода $\deg^+(v)$ вершины v называют число заходящих в неё дуг.

Определение

Полустепенью исхода $\deg^-(v)$ вершины v называют число исходящих из неё дуг.

Определение

Степенью вершины $\deg(v)$ ориентированного графа называют сумму полустепеней захода и исхода этой вершины.

$$\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v).$$

Пример

В качестве примера рассмотрим граф, показанный на рисунке 10.
Данный граф образован множеством вершин

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

и множеством дуг

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_2, v_4), (v_6, v_4)\}.$$

Запишем степени вершин в таблицу.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\deg^+(v)$	0	1	1	2	1	0
$\deg^-(v)$	1	2	1	0	0	1
$\deg(v)$	1	3	2	2	1	1

Лемма о рукопожатиях

Для любого графа $G = (V, E)$ справедливо

$$\sum_{v\in V} \deg v = 2|E|.$$

Доказательство

Так как степень вершины – это количество инцидентных вершине рёбер, при суммировании степеней всех вершин каждое ребро учитывается два раза.

4.3 Список смежности

Ещё одним способом задания графа является список смежности. Для того, чтобы составить его необходимо для каждой вершины указать список смежных с ней вершин.

Пример

Рассмотрим построение списка смежности на примере графа с рисунка 9.
Данный граф образован множеством вершин

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

и множеством рёбер

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_6, v_4\}\}.$$

Запишем список смежности таблицей.

Вершина	$\deg(v)$	Список смежных вершин
v_1	1	v_2
v_2	3	v_1, v_3, v_4
v_3	2	v_2, v_5
v_4	2	v_2, v_6
v_5	1	v_3
v_6	1	v_4

4.4 Матрица смежности $A(G)$

Ещё одним распространённым способом задания графа является построение матрицы смежности (Adjacency matrix).

Определение

Пусть $A(G)$ – квадратная матрица размерности $n \times n$, где n – число вершин графа. Элементы этой матрицы определим как

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E.$$

Матрица, построенная по этим правилам, называется **матрицей смежности**.

Пример

Построим матрицу смежности для графа с рисунка 9.
Данный граф образован множеством вершин

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

и множеством рёбер

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_6, v_4\}\}.$$

В этом графе $n = |V| = 6$, значит матрица смежности $A(G)$ будет иметь размерность 6×6.
Так как в графе есть ребро $\{v_1, v_2\}$, элемент $a_{12} = 1$, так как в графе нет ребра $\{v_1, v_6\}$, элемент $a_{16} = 0$.
Повторив процедуру для всех рёбер получим

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перечислим несколько свойств этой матрицы для разных типов графов:

- У неориентированных графов матрица смежности является симметричной так как $\{v_1, v_2\} = \{v_2, v_1\}$.
- У неориентированных графов на главной диагонали матрицы смежности находятся нули.
- Для ориентированных графов условие имеет вид

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E.$$

- Для мультиграфов вместо единиц указывают кратность рёбер.
- Для псевдографов на главной диагонали указывают число петель.

4.5 Матрица инцидентности $B(G)$

Определение

Пусть $B(G)$ – матрица размерности $n \times m$, где n – число вершин графа, а m – число рёбер (дуг) графа.
Элементы этой матрицы определим как

$$b_{ij} = 1 \Leftrightarrow v_i \in e_j.$$

Матрица, построенная по этим правилам, называется **матрицей инцидентности неориентированного графа**.

Пример

Построим матрицу инцидентности для графа с рисунка 9.
В этом графе $n = |V| = 6$ и $m = |E| = 5$, а значит матрица будет иметь размерность 6×5.
Для удобства введём дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} e_1 &= \{v_1, v_2\}, \\ e_2 &= \{v_2, v_3\}, \\ e_3 &= \{v_3, v_5\}, \\ e_4 &= \{v_2, v_4\}, \\ e_5 &= \{v_6, v_4\}. \end{aligned}$$

Ребро e_1 инцидентно вершинам v_1 и v_2, поэтому $b_{11} = 1$ и $b_{21} = 1$.
Повторив процедуру для всех рёбер получим

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение

Пусть $B(G)$ – матрица размерности $n \times m$, где n – число вершин графа, а m – число рёбер (дуг) графа.
Элементы этой матрицы определим как

$$b_{i,j} = \begin{cases} +1, & e_j = (v_i, \bullet), \\ \text{-1}, & e_j = (\bullet, v_i), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица, построенная по этим правилам, называется **матрицей инцидентности ориентированного графа**.

Пример

В качестве примера рассмотрим граф, показанный на рисунке 10.
Данный граф образован множеством вершин

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

и множеством дуг

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_2, v_4), (v_6, v_4)\}.$$

Дуга $e_1 = (v_1, v_2)$ выходит из вершины v_1 и входит v_2, поэтому $b_{1,1} = +1$ и $b_{2,1} = -1$.
Повторив процедуру для всех дуг получим

$$B(G) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

4.6 Отношение достижимости

Определение

Путём в неориентированном графе из вершины v_1 в v_k называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер вида

$$v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{k-2}, \{v_{k-2}, v_{k-1}\}, v_{k-1}, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k.$$

Определение

Путём в ориентированном графе из вершины v_1 в v_k называется чередующаяся последовательность вершин и дуг вида

$$v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \ldots, v_{k-2}, (v_{k-2}, v_{k-1}), v_{k-1}, (v_{k-1}, v_k), v_k.$$

Заметим при этом, что путь называют **замкнутым**, если вершины v_1 и v_k совпадают. Если все вершины $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k˘1}, v_k$, кроме, может быть, v_1 и v_k, различны, то путь называют **простым**.

Определение

Простой незамкнутый путь называют **цепью**.

Определение

Говорят, что вершины u и v связаны **отношением достижимости**, если существует путь из u в v. Если же помимо пути из u в v существует путь и из v в u, говорят об отношении взаимной достижимости.

Теорема

Отношение достижимости для неориентированных графов является отношением эквивалентности.

Доказательство

В самом деле, проверим три условия:

1. Рефлексивность.

   Каждая вершина связана сама с собой;

2. Симметричность.

   Если вершина v связана с вершиной u, то u связана с v;

3. Транзитивность.

   Если вершина v связана с вершиной u, а u связана с w, то v связана с w.

Следовательно, отношение связности разбивает множество вершин V графа на классы эквивалентности, которые называются **компонентами связности**.

4.7 Связность

Определение

Неориентированный граф называют **связным**, если любые две его вершины u и v связаны отношением достижимости.

Определение

Ориентированный граф называют **сильно связным**, если любые две его вершины u и v связаны отношением взаимной достижимости.

Определение

Неориентированный граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называют **ассоциированным** с ориентированным графом $G = (V, E)$, если $V_1 = V$, и

$$E_1 = \{\{u, v\} | (u, v) \in E \text{ или } (v, u) \in E, u \neq v\}.$$

Определение

Ориентированный граф называют **слабо связным**, если ассоциированный с ним неориентированный граф связный.

4.8 Матрица достижимости

В ряде практических задач требуется определить существует ли путь из i-й вершины графа в j-ю. Иными словами необходимо определить связаны ли i-я и j-я вершины отношением достижимости.

Отношение достижимости можно рассматривать как рефлексивно-транзитивное замыкание отношения смежности.

Проведём рассуждения в несколько этапов:

- Если ρ – отношение смежности вершин графа, а для вершин v_i и v_j справедливо $v_i \rho v_j$, то указанные вершины смежны, следовательно существует путь длины 1 из v_i в v_j.
- Аналогично, если справедливо $v_i \rho^2 v_j$, то существует путь длины 2 из v_i в v_j и т. д.
- Тогда замыкание

$$\rho^* = \bigcup_{i=0}^{n-1}$$

является отношением достижимости, а его матрица образуется как

$$P = A^0 \vee A^1 \ldots \vee A^{n-1}.$$

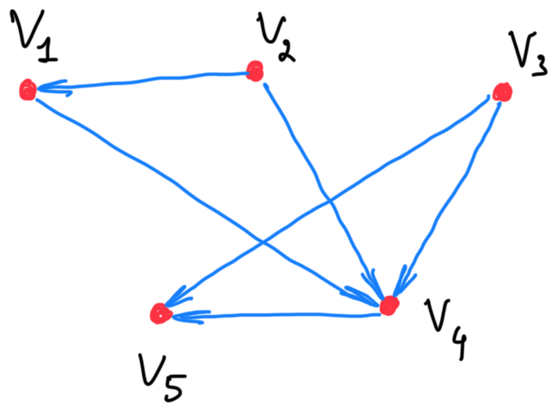

Рис. 13: Граф $G = (V, E)$

Пример

Рассмотрим построение матрицы достижимости на примере графа, показанного на рисунке 13.
Матрица смежности этого графа имеет вид

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу отношения ρ^2 с помощью булева произведения матрицы A на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$P = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание

Если вместо булевых операций использовать обычное сложение и умножение матриц, мы получим матрицу P', элемент ${p'}_{ij}$ которой показывает число различных путей из i-й вершины в j-ю.

4.9 Гомоморфизмы и изоморфизмы графов

Определение

Пусть $G = (V_G, E_G)$ и $H = (V_H, E_H)$ – два графа.
Гомоморфизмом графов из G в H называется отображение $\varphi : V_G \to V_H$, сохраняющее смежность

$$\{u, v\} \in E_G \Rightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_H.$$

Обозначение: $\varphi : G \to H$.

Замечание

Гомоморфизм не обязан быть инъективным, сюръективным или сохранять несмежность. Вершины могут «склеиваться», а рёбра могут переходить в петли (если графы псевдографы).

Определение

Биективный гомоморфизм $\varphi : G \to H$ называется **изоморфизмом**, если обратное отображение $\varphi^{-1} : H \to G$ также является гомоморфизмом. Графы G и H называются **изоморфными** ($G \cong H$), если существует хотя бы один изоморфизм между ними.

Замечание

Существует эквивалентная формулировка.
Биекция $\varphi : V_G \to V_H$ является **изоморфизмом** тогда и только тогда, когда для любых $u, v \in V_G$:

$$\{u, v\} \in E_G \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_H.$$

Изоморфные графы идентичны с точностью до перенумерации вершин.

4.10 Инварианты графов

При проверке графов на изоморфизм используются **инварианты** – характеристики, сохраняющиеся при изоморфизме.

Определение

Свойство P графа или числовая характеристика $f(G)$ называются **инвариантами**, если для любых изоморфных графов $G \cong H$ выполняется $P(G) = P(H)$ или $f(G) = f(H)$ соответственно.

Необходимое условие изоморфизма

Если $G \cong H$, то все их инварианты совпадают. Если хотя бы один инвариант различается, то графы не изоморфны.

Некоторые инварианты графов:

- число вершин и число рёбер графа;
- радиус и диаметр графа;
- спектры матриц смежности/инцидентности/Лапласа;
- число компонент связности;
- хроматическое число графа;
- наличие эйлеровых и гамильтоновых циклов;
- длина минимального цикла графа.

Замечание

Не существует эффективного алгоритма проверки графов на изоморфизм. В общем случае задача решается либо полным перебором, либо доказывается, что графы не являются изоморфными с помощью инвариантов.

5 Обход графов

Для определения количества и состава компонент связности используют алгоритмы обхода графов: поиск в глубину и поиск в ширину.

5.1 Поиск в глубину (англ. Depth-first search, DFS)

Идея DFS состоит в том, чтобы идти «вглубь» графа, насколько это возможно.

Рекурсивный вариант алгоритма:

1. Все вершины графа отмечаем, как не посещенные. Выбирается первая вершина и помечается как посещённая.
2. Для последней посещённой вершины выбирается первая смежная не посещенная вершина, ей присваивается значение посещённой. Если таких вершин нет, то берётся предыдущая помеченная как посещённая вершина.
3. Предыдущий шаг повторяется до тех пор, пока все вершины не будут помечены как посещённые.

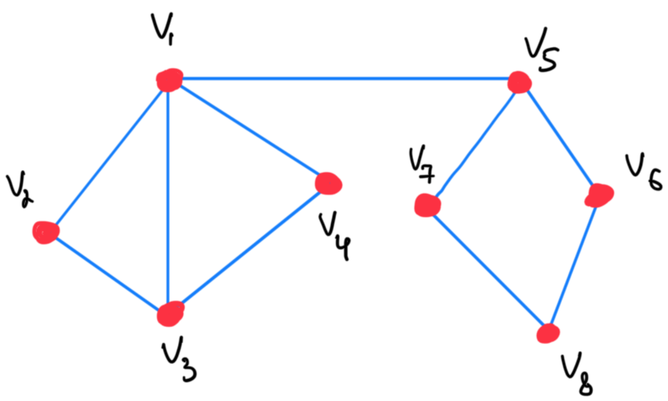

Рис. 14: Пример графа

Пример

Рассмотрим шаги алгоритма на примере графа, показанного на рисунке 14.

1. Стартовая вершина v_1, с ней смежны v_2, v_3, v_4 и v_5. Из v_1 переходим в первую смежную непосещённую вершину v_2.
2. Аналогичным образом из v_2 переходим в v_3, а из v_3 в v_4.
3. Больше нет смежных с v_4 вершин, поэтому возвращаемся в v_3.
4. Аналогичным образом из v_3 возвращаемся в v_2, а оттуда в v_1.
5. С v_1 смежна непосещённая вершина v_5, переходим в неё и продолжаем аналогичным образом обходить оставшиеся вершины.

6. Получившийся порядок обхода вершин:

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_7.$$

Определение

Стек (англ. stack — стопка) – абстрактный тип данных, представляющий собой список элементов, организованных по принципу LIFO (англ. last in – first out, «последним пришёл – первым вышел»).

Нерекурсивного вариант алгоритма:

1. Все вершины графа отмечаем, как не посещённые. Выбирается первая вершина и помечается как посещённая. Эту вершину помещаем в стек.
2. Пока стек не пустой:
   (a) Извлекаем последнюю добавленную вершину.
   (b) Просматриваем все смежные с ней не посещённые вершины, помещаем их в стек и отмечаем как посещённые. Порядок выхода вершин из стека и будет порядком обхода вершин графа.
3. Если после завершения алгоритма не все вершины были рассмотрены, то необходимо запустить алгоритм от одной из нерассмотренных вершин.

Пример

Рассмотрим шаги алгоритма на примере графа, показанного на рисунке 14.

1. Изначально все вершины отмечены как не посещённые, а стек пуст.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
0	0	0	0	0	0	0	0

Стек				

2. Помещаем вершину v_1 в стек и отмечаем её как посещённую.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	0	0	0	0	0	0	0

Стек				
v_1				

3. Извлекаем вершину v_1 из стека, добавляем туда смежные с v_1 вершины v_2, v_3, v_4, v_5 и отмечаем их как посещённые.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	1	1	1	1	0	0	0

Стек				
v_2	v_3	v_4	v_5	

4. Извлекаем вершину v_5 из стека, добавляем туда смежные с v_5 вершины v_6, v_7 и отмечаем их как посещённые.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	1	1	1	1	1	1	0

Стек				
v_2	v_3	v_4	v_6	v_7

5. Извлекаем вершину v_7 из стека, добавляем туда смежную с v_7 вершину v_8 и отмечаем её как посещённую.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	1	1	1	1	1	1	1

Стек				
v_2	v_3	v_4	v_6	v_8

6. Все вершины отмечены как посещённые, удаляя оставшиеся вершины из стека, запишем получившийся порядок обхода:

$$v_1, v_5, v_7, v_8, v_6, v_4, v_3, v_2.$$

5.2 Поиск в ширину (англ. Breadth-first search, BFS)

Идея алгоритма состоит в распределении вершин по уровням, характеризующим удалённость от первой вершины.

Определение

Очередь – абстрактный тип данных с дисциплиной доступа к элементам «первый пришёл – первый вышел» (FIFO, англ. first in, first out).

Рассмотрим шаги алгоритма:

1. Всем вершинам графа присваивается значение не посещённой. Выбирается первая вершина и помечается как посещённая и заносится в очередь.
2. Посещается первая вершина из очереди (если она не помечена как посещённая). Все её соседние вершины заносятся в очередь и отмечаются как посещённые. После этого она удаляется из очереди. Порядок обхода вершин графа определяется порядком выхода вершин из очереди.
3. Повторяется шаг 2 до тех пор, пока очередь не станет пустой.
4. Если после завершения алгоритма не все вершины были рассмотрены, то необходимо запустить алгоритм от одной из нерассмотренных вершин.

Пример

Рассмотрим шаги алгоритма на графе из предыдущего примера.

1. Изначально все вершины отмечены как не посещённые, а очередь пуста.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
0	0	0	0	0	0	0	0

Очередь				

2. Помещаем вершину v_1 в очередь и отмечаем её как посещённую.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	0	0	0	0	0	0	0

Очередь				
v_1				

3. Помещаем смежные с v_1 вершины v_2, v_3, v_4, v_5 в очередь и отмечаем их как посещённые. Удаляем из очереди v_1.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	1	1	1	1	0	0	0

Очередь				
v_2	v_3	v_4	v_5	

4. У вершин v_2, v_3, v_4 нет смежных не посещённых вершин, удаляем их из очереди и помещаем смежные с v_5 вершины v_6 и v_7 в очередь, отмечаем их как посещённые.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	1	1	1	1	1	1	0

Очередь				
v_6	v_7			

5. Помещаем вершину смежную с v_6 вершину v_8 в очередь и отмечаем её как посещённую. Удаляем вершину v_6 из очереди.

Посещённость вершин							
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	1	1	1	1	1	1	1

Очередь				
v_7	v_8			

6. Все вершины отмечены как посещённые, удаляя оставшиеся вершины из очереди, запишем получившийся порядок обхода:

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8.$$

В ходе выполнения алгоритмов DFS и BFS на выходе мы получаем лес – граф, различные компоненты связности которого являются деревьями. А значит эти алгоритмы можно использовать для исследования неориентированных графов на связность и выделения в ориентированных графах компонент слабой связности.

Для поиска компонент сильной связности используется алгоритм Косарайю (алгоритм Косараджу, Kosaraju's algorithm), в основе которого лежат два прохода DFS.

5.3 Алгоритм Косараджу для поиска компонент сильной связности

Рассмотрим шаги алгоритма:

1. Запускаем DFS на исходном графе G, запоминая времена выхода $\tau(v)$ для каждой вершины.
2. Транспонируем граф $G^T = (G)^T$, меняя направление дуг на противоположное.
3. Запускаем DFS на транспонированном графе G^T, выбирая в качестве стартовой непосещённую вершину с максимальным значением $\tau(v)$.
4. Полученные в шаге 3 подграфы и образуют компоненты сильной связности.

Рассмотрим шаги алгоритма на рисунке 15.

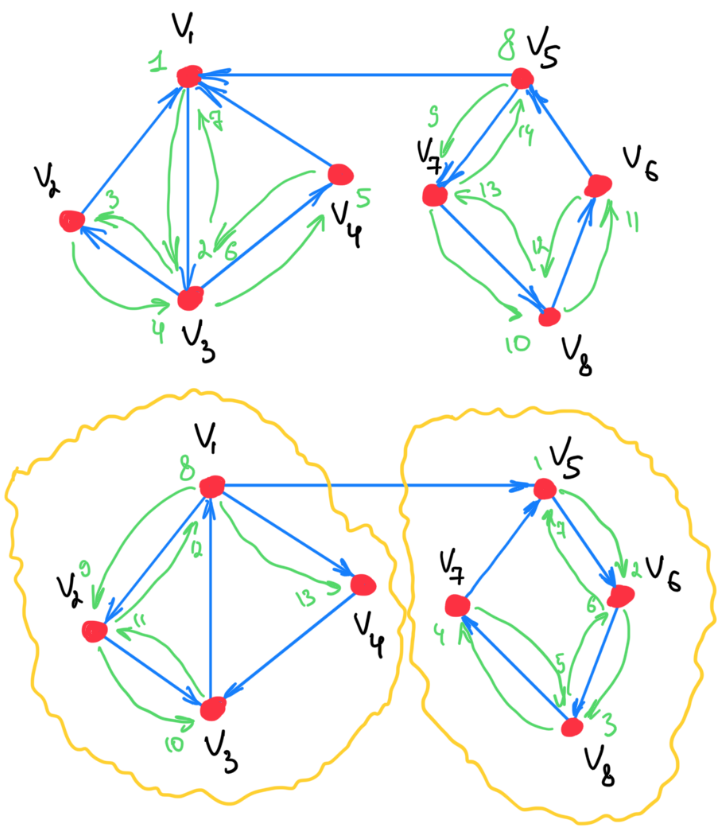

Рис. 15: Выделение компонент сильной связности

5.4 Конденсация и база графа

Введём обозначение $R(v)$ для множества вершин, достижимых из вершины v.

Определение

Подмножество вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V$ ориентированного графа $G = (V, E)$ называется его **базой**, если из вершин этого множества достижимы все остальные вершины и оно минимально по включению.

База существует в любом ориентированном графе. Любые две вершины базы не достижимы одна из другой.

Для построения базы используется конденсация графа, то есть такой граф G^c, в котором каждая сильно связная компонента исходного графа стянута в одну вершину.

Определение

Граф конденсации $G^c = (V^c, E^c)$ ориентированного графа $G = (V, E)$ – ориентированный граф с множеством вершин

$$V^c = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\},$$

где каждая V_i – множество вершин сильно связной компоненты орграфа G.
Вершины V_i и V_j графа конденсаций соединяются дугой, если в исходном ориентированном графе существовала дуга (v, u), где $v \in V_i$, $u \in V_j$.

При построении графа конденсаций можем выделить следующие шаги:

1. Определить для каждой вершины v множество достижимых из неё вершин $R(v)$.
2. Выделить наибольшие по включению классы вершин $V_1, V_2, \ldots, V_k$, достижимых друг из друга. Эти классы будут вершинами графа G^c.
3. Построить множество дуг графа конденсации по определению.

Множество вершин, содержащих ровно одну вершину из множества новых вершин $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$, имеющих нулевую полустепень захода, образует базу.

6 Расстояния в графах

6.1 Основные определения

Определение

Взешенным называется граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некоторое число – вес, иначе говоря задана функция $f : E \to \mathbb{R}$.

Определение

Длиной $l(v_1, v_k)$ пути

$$P = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{k-2}, \{v_{k-2}, v_{k-1}\}, v_{k-1}, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k)$$

называется суммарный вес рёбер, входящих в путь.

$$l(v_1, v_k) = \sum_i \omega_i.$$

Определение

Расстоянием $\rho(u, v)$ между двумя вершинами v и u называется длина кратчайшего пути, соединяющего эти вершины.

$$\rho(u, v) = \min_i l(u, v).$$

Определение

Эксцентриситетом $\varepsilon(v)$ вершины v называют расстояние до максимально удаленной от нее вершины.

$$\varepsilon(v) = \max_i \rho(u_i, v).$$

Для графа, у которого не определен вес его ребер, расстояние определяется в виде числа ребер (иными словами вес каждого ребра считаем равным единице).

Определение

Радиус $r(G)$ графа $G = (V, E)$ – минимальный эксцентриситет его вершин.

$$r(G) = \min_i \varepsilon_i.$$

Определение

Диаметр $d(G)$ графа $G = (V, E)$ – максимальный эксцентриситет его вершин.

$$d(G) = \max_i \varepsilon_i.$$

Определение

Центром $O(G)$ связного графа $G = (V, E)$ называют множество вершин, у которых эксцентриситет равен радиусу графа.

$$O(G) = \{v | v \in V, \varepsilon(v) = r(G)\}.$$

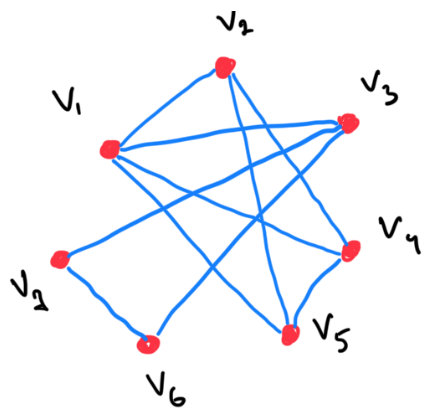

Рис. 16: Граф $G = (V, E)$

Пример

В качестве примера рассмотрим граф, изображенный на рисунке 16.
Приняв веса всех его рёбер равными единице, составим таблицу расстояний между вершинами и определим эксцентриситеты вершин.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$\varepsilon(v_i)$
v_1	0	1	1	1	1	2	2	2
v_2	1	0	2	1	1	3	3	3
v_3	1	2	0	2	2	1	1	2
v_4	1	1	2	0	1	3	3	3
v_5	1	1	2	1	0	3	3	3
v_6	2	3	1	3	3	0	1	3
v_7	2	3	1	3	3	1	0	3

По найденным эксцентриситетам можно определить диаметр, радиус и центр графа.

$$d(G) = 3,$$

$$r(G) = 2,$$

$$O(G) = \{v_1, v_3\}.$$

6.2 Алгоритм Дейкстры

Алгоритм позволяет построить кратчайшие пути от корневой вершины до остальных вершин графа.

Алгоритм работает на как на неориентированных, так и на ориентированных графах (в этом случае учитывается направление) в том случае, если все веса графа неотрицательны.

Рассмотрим шаги алгоритма:

1. Корневой вершине приписывают метку $\mu_1 = 0$, а остальным вершинам метку ∞.
2. На i-м шаге выбирают вершину v_i, метка которой минимальна. Метку этой вершины называют постоянной.
3. Перебирают все смежные с v_i вершины, метка которых не является постоянной.
4. Если вершина v_j смежна с v_i и имеет метку μ_j, тогда метку вершины v_j изменяют по правилу
$$\mu_j = \min(\mu_i + \rho(v_i, v_j), \mu_j).$$
5. Алгоритм заканчивает работу, когда все вершины имеют постоянные метки.

Постоянную метку будем выделять прямоугольником, а в качестве индекса будем указывать вершину-предка. Так, запись $\boxed{1_{v_1}}$ говорит о том, что значение метки равно единице, а вершина-предок в дереве кратчайших путей – v_1.

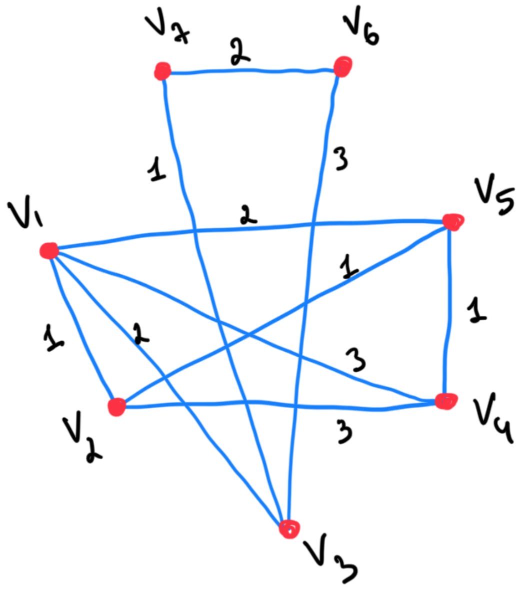

Рис. 17: Взвешенный граф

Пример

Рассмотрим работу алгоритма на примере графа G, показанного на рисунке 17. Пусть v_1 – корневая вершина, выполним первый шаг алгоритма

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Шаг 1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Вершина v_1 смежна с v_2, v_3, v_4 и v_5.

$$\mu_2 = \min(\mu_1 + \rho(v_1, v_2), \mu_2) = \min(0 + 1, \infty) = 1,$$
$$\mu_3 = \min(\mu_1 + \rho(v_1, v_3), \mu_3) = \min(0 + 2, \infty) = 2,$$
$$\mu_4 = \min(\mu_1 + \rho(v_1, v_4), \mu_4) = \min(0 + 3, \infty) = 3,$$
$$\mu_5 = \min(\mu_1 + \rho(v_1, v_5), \mu_5) = \min(0 + 2, \infty) = 2.$$

Минимальная метка у вершины v_2, она становится постоянной.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Шаг 1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Шаг 2		$\boxed{1_{v_1}}$	2_{v_1}	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞

Вершина v_2 смежна с v_4 и v_5.

$$\mu_4 = \min(\mu_2 + \rho(v_2, v_4), \mu_4) = \min(1 + 3, 3) = 3,$$
$$\mu_5 = \min(\mu_2 + \rho(v_2, v_5), \mu_5) = \min(1 + 1, 2) = 2.$$

Минимальная метка у вершины v_3, она становится постоянной.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Шаг 1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Шаг 2		$\boxed{1_{v_1}}$	2_{v_1}	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 3			$\boxed{2_{v_1}}$	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞

Вершина v_3 смежна с v_6 и v_7.

$$\mu_6 = \min(\mu_3 + \rho(v_3, v_6), \mu_6) = \min(2 + 3, \infty) = 5,$$
$$\mu_7 = \min(\mu_3 + \rho(v_3, v_7), \mu_7) = \min(2 + 1, \infty) = 3.$$

Минимальная метка у вершины v_5, она становится постоянной.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Шаг 1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Шаг 2		$\boxed{1_{v_1}}$	2_{v_1}	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 3			$\boxed{2_{v_1}}$	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 4				3_{v_1}	$\boxed{2_{v_1}}$	5_{v_3}	3_{v_3}

Вершина v_5 смежна с v_4.

$$\mu_4 = \min(\mu_5 + \rho(v_5, v_4), \mu_4) = \min(2 + 1, 3) = 3,$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Шаг 1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Шаг 2		$\boxed{1_{v_1}}$	2_{v_1}	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 3			$\boxed{2_{v_1}}$	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 4				3_{v_1}	$\boxed{2_{v_1}}$	5_{v_3}	3_{v_3}
Шаг 5				$\boxed{3_{v_1}}$		5_{v_3}	3_{v_3}

Вершина v_4 не смежна ни с одной вершиной с непостоянной меткой. Минимальная метка у вершины v_7, она становится постоянной.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Шаг 1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Шаг 2		$\boxed{1_{v_1}}$	2_{v_1}	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 3			$\boxed{2_{v_1}}$	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 4				3_{v_1}	$\boxed{2_{v_1}}$	5_{v_3}	3_{v_3}
Шаг 5				$\boxed{3_{v_1}}$		5_{v_3}	3_{v_3}
Шаг 6						5_{v_3}	$\boxed{3_{v_3}}$

Вершина v_7 смежна с v_6.

$$\mu_6 = \min(\mu_7 + \rho(v_7, v_6), \mu_6) = \min(3 + 2, 5) = 5.$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Шаг 1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Шаг 2		$\boxed{1_{v_1}}$	2_{v_1}	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 3			$\boxed{2_{v_1}}$	3_{v_1}	2_{v_1}	∞	∞
Шаг 4				3_{v_1}	$\boxed{2_{v_1}}$	5_{v_3}	3_{v_3}
Шаг 5				$\boxed{3_{v_1}}$		5_{v_3}	3_{v_3}
Шаг 6						5_{v_3}	$\boxed{3_{v_3}}$
Шаг 7						$\boxed{5_{v_3}}$	

Таким образом, значения постоянных меток указывают на кратчайшее расстояние от корневой вершины, а двигаясь в обратном направлении по меткам от потомков к предкам, можно восстановить дерево кратчайших путей.
Для вершины v_7 постоянная метка равна 3_{v_3}, следовательно, кратчайший путь из v_1 в v_7 имеет длину 3. Так как для вершины v_7 предком является v_3, а для v_3 предком является v_1, кратчайший путь имеет вид

$$P = (v_1, \{v_1, v_3\}, v_3, \{v_3, v_7\}, v_7),$$
$$\rho(v_1, v_3) + \rho(v_3, v_7) = 2 + 1 = 3.$$

6.3 Алгоритм Флойда-Уоршелла

Определение

Путь $v_{i0} \to v_{i1} \to \dots \to v_{im}$ длины m называют **путём ранга** k при $m > 1$, если k – наибольшее из чисел $i_1, \dots, i_{m-1}$, и путём ранга 0 при $m = 1$. Путь нулевой длины также считают путём ранга 0.
Таким образом, **ранг пути** – максимальный номер вершины, в которую разрешено заходить по пути из v_i в v_j (исключая вершины v_i и v_j).

Обозначим через $C^{(k)}$ матрицу стоимостей прохождения между различными парами вершин по всем путям ранга, не превосходящего k. Элемент $c_{ij}^{(k)}$ содержит стоимость прохождения из вершины v_i в v_j по всем путям рангов $0, 1, \ldots, k-1, k$.

Алгоритм работает на как на неориентированных, так и на ориентированных графах (в этом случае учитывается направление) в том случае, если граф не содержит циклов отрицательного веса.

Идея алгоритма заключается в сравнении стоимостей путей:

- из вершины v_i в вершину v_j по пути ранга не превосходящего $k-1$, т.е. минуя вершину v_k;
- из вершины v_i в вершину v_k, после чего по пути из вершины v_k в вершину v_j.

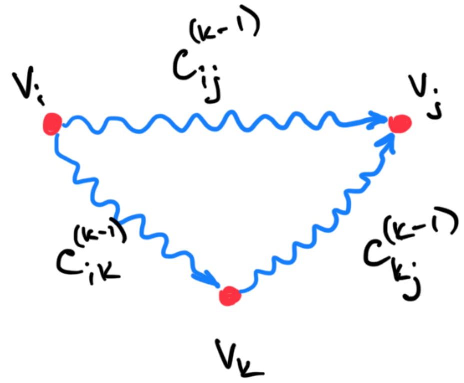

Рис. 18: Схема путей

Тогда матрицу стоимостей можно найти последовательно вычисляя $C^{(k)}$, $k = \overline{0, k}$ с помощью рекуррентной формулы

$$c_{ij}^{(k)} = \min\left(c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)}\right).$$

Рассмотрим шаги алгоритма:

1. Инициализируют матрицу стоимостей $C^{(0)}$ с помощью весов рёбер графа.
2. Рекурсивно вычисляют матрицу стоимостей $C^{(k)}$, $k = \overline{0, k}$.
3. Алгоритм заканчивает работу, ранг рассмотренных путей равен числу вершин $k = |V|$.

В случае, если необходимо не только знать кратчайшие расстояния, но и иметь возможность восстановить кратчайший путь, вводится вспомогательная матрица $D^{(k)}$ (см. пример).

Пример

Рассмотрим алгоритм на примере графа $G = (V, E)$ (рисунок 17).

1. При $k = 0$ инициализируем матрицу стоимостей $C^{(0)}$ с помощью весов рёбер.

   Для восстановления кратчайших путей введём вспомогательную матрицу $D^{(k)}$ той же размерности, что и $C^{(k)}$.

2. В ячейку $d_{ij}^{(k)}$ на каждой итерации будем помещать значение k, если $c_{ij}^{(k)}$ изменилось.

$$C^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty & \infty & 3 & 1 \\ 3 & 3 & \infty & 0 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

- При $k = 1$ пересчитаем коэффициенты матрицы
  $c_{23}^{(1)} = \min(c_{23}^{(0)}, c_{21}^{(0)} + c_{13}^{(0)}) = \min(\infty, 1 + 2) = 3,$
  $c_{32}^{(1)} = \min(c_{32}^{(0)}, c_{31}^{(0)} + c_{12}^{(0)}) = \min(\infty, 2 + 1) = 3,$
  $c_{34}^{(1)} = \min(c_{34}^{(0)}, c_{31}^{(0)} + c_{14}^{(0)}) = \min(\infty, 2 + 3) = 5,$
  $c_{43}^{(1)} = \min(c_{43}^{(0)}, c_{41}^{(0)} + c_{13}^{(0)}) = \min(\infty, 3 + 2) = 5,$
  $c_{35}^{(1)} = \min(c_{35}^{(0)}, c_{31}^{(0)} + c_{15}^{(0)}) = \min(\infty, 2 + 2) = 4,$
  $c_{53}^{(1)} = \min(c_{53}^{(0)}, c_{51}^{(0)} + c_{13}^{(0)}) = \min(\infty, 2 + 2) = 4,$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

- При $k = 2$ коэффициенты матрицы не меняются

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

- При $k = 3$ пересчитаем коэффициенты матрицы
  $c_{16}^{(3)} = \min(c_{16}^{(2)}, c_{13}^{(2)} + c_{36}^{(2)}) = \min(\infty, 2 + 3) = 5,$
  $c_{61}^{(3)} = \min(c_{61}^{(2)}, c_{63}^{(2)} + c_{31}^{(2)}) = \min(\infty, 3 + 2) = 5,$
  $c_{17}^{(3)} = \min(c_{17}^{(2)}, c_{13}^{(2)} + c_{37}^{(2)}) = \min(\infty, 2 + 1) = 3,$
  $c_{71}^{(3)} = \min(c_{71}^{(2)}, c_{73}^{(2)} + c_{31}^{(2)}) = \min(\infty, 1 + 2) = 3,$
  $c_{26}^{(3)} = \min(c_{26}^{(2)}, c_{23}^{(2)} + c_{36}^{(2)}) = \min(\infty, 3 + 3) = 6,$
  $c_{62}^{(3)} = \min(c_{62}^{(2)}, c_{63}^{(2)} + c_{32}^{(2)}) = \min(\infty, 3 + 3) = 6,$
  $c_{27}^{(3)} = \min(c_{27}^{(2)}, c_{23}^{(2)} + c_{37}^{(2)}) = \min(\infty, 3 + 1) = 4,$
  $c_{72}^{(3)} = \min(c_{72}^{(2)}, c_{73}^{(2)} + c_{32}^{(2)}) = \min(\infty, 1 + 3) = 4,$

$c_{46}^{(3)} = \min(c_{46}^{(2)}, c_{43}^{(2)} + c_{36}^{(2)}) = \min(\infty, 5+3) = 8,$
$c_{64}^{(3)} = \min(c_{64}^{(2)}, c_{63}^{(2)} + c_{34}^{(2)}) = \min(\infty, 3+5) = 8,$
$c_{47}^{(3)} = \min(c_{47}^{(2)}, c_{43}^{(2)} + c_{37}^{(2)}) = \min(\infty, 5+1) = 6,$
$c_{74}^{(3)} = \min(c_{74}^{(2)}, c_{73}^{(2)} + c_{34}^{(2)}) = \min(\infty, 1+5) = 6,$
$c_{56}^{(3)} = \min(c_{56}^{(2)}, c_{53}^{(2)} + c_{36}^{(2)}) = \min(\infty, 4+3) = 7,$
$c_{65}^{(3)} = \min(c_{65}^{(2)}, c_{63}^{(2)} + c_{35}^{(2)}) = \min(\infty, 3+4) = 7,$
$c_{57}^{(3)} = \min(c_{57}^{(2)}, c_{53}^{(2)} + c_{37}^{(2)}) = \min(\infty, 4+1) = 5,$
$c_{75}^{(3)} = \min(c_{75}^{(2)}, c_{73}^{(2)} + c_{35}^{(2)}) = \min(\infty, 1+4) = 5,$

$$C^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 8 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- При $k = 4$ коэффициенты матрицы не меняются

$$C^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 8 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- При $k = 5$ пересчитаем коэффициенты матрицы
$c_{24}^{(5)} = \min(c_{24}^{(4)}, c_{25}^{(4)} + c_{54}^{(4)}) = \min(3, 1+1) = 2,$
$c_{42}^{(5)} = \min(c_{42}^{(4)}, c_{45}^{(4)} + c_{52}^{(4)}) = \min(3, 1+1) = 2,$

$$C^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 8 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- При $k = 6$ коэффициенты матрицы не меняются

$$C^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 8 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- При $k = 7$ коэффициенты матрицы не меняются

$$C^{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 8 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Итоговая матрица кратчайших расстояний C и вспомогательная матрица D имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 8 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Восстановим путь из v_4 в v_6

$$v_4 \to \cdots \to v_6,$$

так как $d_{46} = 3 \neq 0$, добавляем в путь вершину v_3,

$$v_4 \to \cdots \to v_3 \to v_6,$$

так как $d_{43} = 1 \neq 0$, добавляем в путь вершину v_1, а так как $d_{41} = 0$, восстановление закончено, полученный путь

$$v_4 \to v_1 \to v_3 \to v_6.$$

7 Планарность. Вершинная раскраска графа

7.1 Планарность

Определение

Геометрическим представлением графа $G = (V, E)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется такое его отображение в $\mathbb{R}^n$, при котором:

1. каждой вершине $v \in V$ сопоставлена точка в $\mathbb{R}^n$, причем разным вершинам – разные точки;
2. каждому ребру $(v, u) \in E$ сопоставлена непрерывная кривая, соединяющая точки, соответствующие вершинам v и u , и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам;
3. кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

Определение

Граф G называется **планарным**, если найдется его геометрическое представление на плоскости (т.е. в $\mathbb{R}^2$).

Определение

Геометрическое представление планарного графа в $\mathbb{R}^2$ назовем его **укладкой на плоскости**.

Определение

Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область называется также внешней гранью.

7.2 Теорема Эйлера

Теорема Эйлера для планарных графов

Если $G = (V, E)$ – связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для каждой его укладки на плоскости верно равенство

$$p - q + r = 2,$$

где r – число граней в этой укладке.

Доказательство

Докажем теорему индукцией по q при заданном p.

- *База индукции:* Если $q = p - 1$, то G – дерево, т.е. планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

- *Индукционный переход:* Рассмотрим связный планарный граф $G = (V, E)$ с p вершинами и $q > p - 1$ ребрами. Пусть задана его укладка на плоскости, в которой r граней.

  В графе G найдется хотя бы один цикл, и пусть e – любое ребро из какого-то его цикла.

  Тогда граф $G' = (V, E \setminus e)$ – связный и планарный с p вершинами и $q - 1$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $r - 1$ граней, т.к. при удалении ребра e из укладки графа G две грани соединяются в одну.

  Для графа G' верно предположение индукции, т.е.

  $$p - (q - 1) + (r - 1) = 2,$$

  откуда

  $$p - q + r = 2.$$

Теорема

Граф K_5 не является планарным.

Доказательство

Доказательство проведем от обратного: пусть граф K_5 планарен.
Тогда для произвольной его укладки на плоскости по теореме Эйлера получим

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 5$ – число вершин и $q = 10$ число ребер в графе, а r – число граней в этой укладке. Откуда $r = 7$.
Пусть q_i – число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \dots, r$.
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро считаем дважды.
Но $q_i \geq 3$, поэтому $3r \leq 2q$, или $r \leq \dfrac{2}{3}q$. Получаем $7 \leq \dfrac{2}{3} \cdot 10$ – противоречие.
Значит, граф K_5 не является планарным.

Теорема

Граф $K_{3,3}$ не является планарным.

Доказательство

Доказательство проведем от обратного: пусть граф $K_{3,3}$ планарен.
Тогда для произвольной его укладки на плоскости по теореме Эйлера получим

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 6$ – число вершин и $q = 9$ число ребер в графе, а r – число граней в этой укладке. Поэтому $r = 5$.

Пусть q_i – число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \ldots, r$.
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро считаем дважды.
Но $q_i \geq 4$, т. к. в $K_{3,3}$ наименьшая длина цикла равна четырем, поэтому $4r \leq 2q$, или $r \leq \frac{q}{2}$.
Получаем $5 \leq \frac{9}{2}$ — противоречие.
Значит, граф $K_{3,3}$ не является планарным.

Определение

Элементарным подразделением назовём операцию, заменяющую ребро $\{u, v\}$ путём из двух рёбер $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$, где w — новая вершина.

Определение

Два графа называются **гомеоморфными**, если они могут быть получены из одного графа последовательностью элементарных подразделений рёбер.

Замечание

Существует и другое определения гомеоморфизма графов.
Введем отношение ρ следующим образом: два графа находятся в отношении ρ, если один можно свести к другому заменой вершины степени 2 на ребро между вершинами смежными ей, или наоборот, добавлением вершины степени два на ребро.
Отношением гомеоморфизма (или топологической эквивалентности) назовем рефлексивно-транзитивное замыкание отношения ρ: ρ^*.

Теорема Понтрягина-Куратовского

Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ и K_5.

7.3 Задача правильной раскраски графа

Определение

Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф, а $x \in \mathbb{N}$, тогда произвольная функция вида

$$f : V \to \{1, 2, 3, \ldots, x\}$$

называется вершинной **x-раскраской** графа G.

Определение

Раскраска называется **правильной**, если $f(u) \neq f(v)$ для любых смежных вершин u и v.

Очевидно, что для правильной раскраски полного графа, содержащего n вершин, требуется n красок. Для правильной раскраски любого дерева требуется 2 краски, для C_n

требуется 2 краски, если n чётно, и 3, если n нечётно.

Определение

Хроматическое число графа – минимальное число красок, необходимое для правильной раскраски графа.

Теорема о пяти красках

Для любого планарного графа хроматическое число не больше пяти.

Замечание

В 1879 году британский математик А.Кэли опубликовал в Трудах Лондонского географического общества статью, посвящённую проблеме раскраски карт, в которой была сформулирована гипотеза о четырёх красках – всякая карта 4-раскрашиваема. Заметим, что любую географическую (политическую) карту можно взаимно однозначно сопоставить с планарным графом, то есть с графом, который может быть изображён на плоскости без пересечения рёбер. Вершины в нём будут соответствовать странам, а рёбра проводиться между граничащими странами.

Алгоритм последовательной раскраски:

1. Начинаем с любой вершины, которую красим в первый цвет.
2. Далее на каждом этапе выбираем для окраски вершину, смежную с какой-либо уже окрашенной, и красим её в следующий цвет.
3. Так продолжаем до тех пор, пока все вершины не будут окрашены.

Этот жадный алгоритм даёт правильную раскраску, но не всегда минимальную. К сожалению, не существует эффективного алгоритма для получения минимальной правильной раскраски, в общем случае для этой задачи необходим полный перебор.

7.4 Хроматическое число и хроматический многочлен

Определение

Пусть дан фиксированный граф $= (V, E)$ и фиксированное число красок x. Количество способов правильной x-раскраски графа G называется **хроматическим многочленом** $P(G, x)$.

Замечание

Стягивание ребра – замена концов ребра одной вершиной, соседями новой вершины становятся соседи этих концов. Будем обозначать за $G/\{u, v\}$ граф, полученный из графа G стягиванием ребра $\{u, v\}$.

Теорема о разложении графа

Пусть u и v – несмежные вершины графа G, тогда

$$P(G,x) = P(G+\{u,v\},x) + P(G/\{u,v\},x).$$

Доказательство

Рассмотрим все произвольные раскраски графа G.

- Рассмотрим те из них, при которых вершины u и v окрашены в разные цвета. Если добавить к графу G ребро $\{u,v\}$, то они не изменятся, то есть останутся правильными.
- Рассмотрим раскраски, при которых u и v одного цвета. Все эти раскраски останутся правильными и для графа, полученного из G слиянием вершин u и v.

Следствие

Пусть u и v – смежные вершины графа G, тогда $P(G,x) = P(G-\{u,v\},x) - P(G/\{u,v\},x)$.

Замечание

Хроматическое число полного графа равняется числу его вершин $n = |V|$.
Хроматический многочлен полного графа можно представить в виде

$$P(K_n,x) = x(x-1)\dots(x-n+1) = \frac{x!}{(x-n)!},$$

так как первую вершину полного графа K_n можно окрасить в любой из x цветов, вторую — в любой из оставшихся $x-1$ цветов и т. д.
Очевидно, что если $x < n$, то $P(K_n,x) = 0$, так как один из его множителей 0.
С помощью теоремы о разложении графа, хроматический многочлен произвольного графа можно представить в виде линейной комбинации хроматических многочленов полных графов.

7.5 Коэффициенты хроматического многочлена

Утверждение

Свободный член хроматического многочлена равен 0.

Доказательство

По определению хроматического многочлена графа G, его значение в точке x равно количеству способов раскрасить вершины G правильным образом в x цветов. Количество способов раскрасить граф в 0 цветов равно 0. То есть $P(G,0) = 0$. Из этого следует, что $P(G,x)$ кратен x, следовательно его свободный член равен 0.

Утверждение

Старший коэффициент хроматического многочлена равен 1.

Доказательство

Воспользуемся теоремой **??**, и представим хроматический полином в виде суммы хроматических полиномов полных графов, то есть

$$P(G,x) = P(K_n,x) + a_1P(K_{n-1},x) + a_2P(Kn-2,x) + \dots =$$
$$= \frac{x!}{(x-n)!} + a_1\frac{x!}{(x-n+1)!} + a_2\frac{x!}{(x-n+2)!} + \dots$$

Из этой формулы видно, что хроматический многочлен имеет старший коэффициент, равный 1.

Утверждение

Коэффициенты хроматического многочлена составляют знакопеременную последовательность.

Доказательство

Воспользуемся индукцией по количеству вершин n:

- *База индукции:* Теорема верна для графа G из одной вершины, потому что $P(G,x) = x$.
- *Индукционный переход:* Предположим, что теорема верна для всех графов на n вершинах. Рассмотрим графы на $n+1$ вершине.

  Индукционный переход будем доказывать индукцией по количеству ребер m.

  – *База индукции:* Если G не содержит ребер, то есть G является O_{n+1}, то его хроматический многочлен $P(G,x) = x^{n+1}$ обладает доказываемым свойством.

  – *Индукционный переход:* Пусть для всех $(n+1,m)$-графов теорема верна. Возьмем $(n+1,m+1)$-граф G_1 и его ребро $\{u,v\}$.
    Обозначим за G граф, полученный из G_1 удалением ребра $\{u,v\}$ ($G = G1 - \{u,v\}$), а за G_2 – граф, полученный из G_1 слиянием вершин u и v.
    Тогда из рекуррентной формулы следует $P(G_1,x) = P(G,x) - P(G_2,x)$.
    Так как G – $(n+1,m)$-граф, а в G_2 – n вершин, то для G и G_2 теорема верна

    $$P(G,x) = x^{n+1} - a_1x^n + a_2x^{n-1} - a_3x^{n-2} + \dots,$$

    $$P(G_2,x) = x^n - b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots,$$

    где $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_n$ – некоторые неотрицательные целые числа.
    Из этих равенств получаем

    $$P(G_1,x) = x^{n+1} - (a_1+1)x^n + (a_2+b_1)x^{n-1} + \dots.$$

Видно, что в этом полученном полиноме коэффициенты составляют знакопеременную последовательность.

Утверждение

Второй коэффициент хроматического многочлена равен по модулю количеству ребер графа.

Доказательство

Из доказательства предыдущего утверждения видно, что при увеличении количества ребер графа на 1, второй коэффициент также увеличивается на 1. Так как для пустого графа второй коэффициент равен 0, то утверждение верно для любого графа.

Пример

В качестве примера для графа G на рисунке 1 получим

$$\begin{gathered}
P(G,x) = P(G_1,x) + P(G_2,x) = P(G_{11},x) + P(G_{12},x) + P(G_{21},x) + P(G_{22},x) = \\
= P(G_{111},x) + P(G_{112},x) + P(G_{12},x) + P(G_{21},x) + P(G_{22},x) = \\
= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 3x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) = \\
= x(x-1)(x-2)^3 = x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 20x^2 + 8x.
\end{gathered}$$

Тогда минимальный x, при котором $P(G,x) > 0$ будет хроматическим числом, в данном случае $\chi_G = 3$.
Также можно заметить, что старшая степень многочлена равна единице, второй коэффициент по модулю совпадает с числом рёбер $|-7| = |E|$, свободный член многочлена равен нулю коэффициенты образуют знакочередующуюся последовательность.

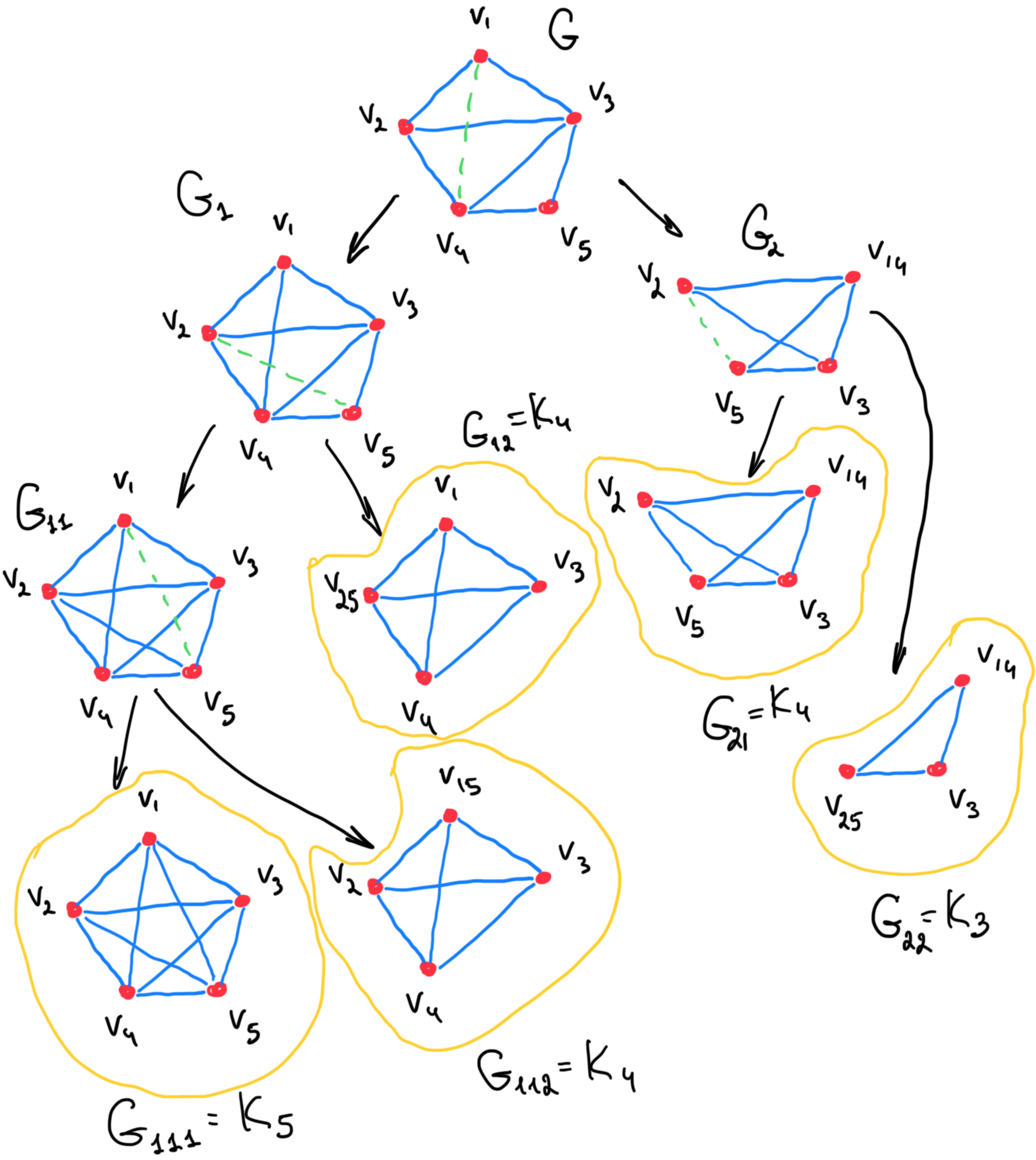

Рис. 19: Схема разложения графа

8 Эйлеровы и гамильтоновы графы

8.1 Эйлеровы графы

Определение

Граф G называется **эйлеровым**, если в нём существует цикл, проходящий по всем рёбрам ровно один раз.

Замечание

Эйлеров граф содержит не более одной нетривиальной компоненты связности.

Лемма

Пусть в конечном графе $G = (V, E)$ степень каждой вершины не меньше 2

$$\forall v \in V : \deg(v) \geq 2,$$

тогда граф G содержит цикл.

Доказательство

Построим максимальный простой путь (маршрут без повторения вершин), начиная с произвольной вершины $v_1 \in V$.

1. Выбираем вершину v_2, смежную с v_1.

2. Для последней вершины v_k построенного пути выбираем смежную вершину v_{k+1}, отличную от v_{k-1} (такая существует, поскольку $\deg(v_k) \geq 2$).

3. Продолжаем процесс, пока на очередном шаге не попадём в вершину v_m, уже содержащуюся в построенном пути.

Такая вершина v_m обязательно появится, так как множество вершин V конечно, а путь мы строим, добавляя новые вершины, пока это возможно. Пусть $v_m = v_j$ для некоторого $j < m$ (то есть вершина v_j встретилась ранее в последовательности). Тогда последовательность вершин $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_{m-1}, v_m = v_j)$ образует простой цикл. Действительно:

- Все рёбра (v_i, v_{i+1}) существуют по построению.

- Вершины $v_j, v_{j+1}, \dots, v_{m-1}$ различны, так как мы строили путь без повторений до момента m.

Таким образом, в графе G существует цикл.

8.2 Критерий эйлеровости

Критерий эйлеровости

Граф $G = (V, E)$ является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин чётны.

$$\forall v \in V(G) : \deg(v) \equiv 0 \pmod 2.$$

Доказательство

- **Необходимость:**
  - Предположим, что G содержит эйлеров цикл $\mathcal{C}$.
  - Рассмотрим произвольную вершину v графа G. Всякий раз, когда цикл $\mathcal{C}$ проходит через v, он входит в неё по одному ребру и выходит по другому. Следовательно, каждое посещение v в цикле (кроме начальной точки, если она совпадает с v) учитывает два инцидентных ребра.
  - Если цикл начинается и заканчивается в v, то первое ребро выхода и последнее ребро входа также составляют пару. Таким образом, все рёбра, инцидентные v, разбиваются на пары, и степень $\deg(v)$ чётна для любой $v \in V(G)$.

- **Достаточность:** Проведём доказательство индукцией по числу рёбер m.

  База индукции. Если $m = 0$, граф состоит из одной вершины, и тривиальный цикл (длина 0) является эйлеровым.

  Индукционный переход. Предположим, что для любого связного графа с числом рёбер, меньшим m, и с чётными степенями вершин утверждение верно (существует эйлеров цикл).

  Рассмотрим связный граф G с m рёбрами, у которого все степени чётны.

  - Поскольку G связен и $m > 0$, минимальная степень вершины не меньше 2 (иначе степень 0 означает изолированную вершину, что противоречит связности). По лемме выше G содержит хотя бы один простой цикл. Выберем произвольный простой цикл C в G.
  - Удалим из G все рёбра цикла C, получив граф $G' = G - E(C)$. При этом из степени каждой вершины, принадлежащей C, вычитается 2, поэтому чётность степеней сохраняется: все вершины в G' имеют чётную степень (возможно, равную 0).
  - Граф G' может распасться на несколько компонент связности $H_1, H_2, \ldots, H_k$. Каждая компонента H_i:
    1. связна по определению,
    2. содержит рёбер меньше, чем m (так как мы удалили хотя бы одно ребро цикла C),
    3. все её вершины имеют чётную степень (свойство, унаследованное от G').

    По предположению индукции, в каждой **нетривиальной** компоненте H_i (содержащей хотя бы одно ребро) существует эйлеров цикл $\mathcal{C}_i$.

– Теперь построим эйлеров цикл в исходном графе G. Начнём движение по циклу C. Всякий раз, когда мы попадаем в вершину v, принадлежащую некоторой нетривиальной компоненте H_i, мы сворачиваем с C и проходим весь эйлеров цикл $\mathcal{C}_i$ компоненты H_i, начиная и заканчивая в v. Затем возвращаемся в v и продолжаем движение по оставшейся части цикла C.

  Поскольку:

  1. каждое ребро G принадлежит либо C, либо ровно одной компоненте H_i,
  2. цикл C и все $\mathcal{C}_i$ покрывают каждое ребро ровно один раз,
  3. маршрут остаётся замкнутым (мы всегда возвращаемся в точки отклонения),

  полученный маршрут является эйлеровым циклом в G.

  Таким образом, утверждение верно для графа с m рёбрами.

Теорема

В ориентированном графе $G = (V, E)$ существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда:

1. степень полузахода любой вершины равна ее степени полуисхода;
2. все компоненты слабой связности кроме, может быть одной, не содержат ребер.

8.3 Гамильтоновы графы

Определение

Гамильтонов путь (гамильтонова цепь) в графе $G = (V, E)$ — это простой путь, содержащий все вершины графа ровно по одному разу.

Определение

Гамильтонов цикл — это простой цикл, содержащий все вершины графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется **гамильтоновым графом**.

Определение

Граф называется **полугамильтоновым**, если он содержит гамильтонов путь, но не содержит гамильтонова цикла.

Пример

1. **Полный граф** K_n $(n \geq 3)$ всегда гамильтонов. Любая перестановка вершин задаёт гамильтонов цикл.
2. **Цикл** C_n тривиально гамильтонов.
3. **Граф Петерсена** имеет гамильтонов путь, но не цикл, хотя все его вершины имеют степень 3.

8.4 Достаточные условия гамильтоновости графа

Теорема Дирака

Если в простом графе G с $n \geq 3$ вершинами минимальная степень $\delta(G) \geq \dfrac{n}{2}$, то G гамильтонов.

Теорема Оре

Если в простом графе G с $n \geq 3$ вершинами для любых двух несмежных вершин u и v выполняется $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, то G гамильтонов.

Теорема Поша

Пусть G — простой граф с $n \geq 3$ вершинами.
Если:

- для каждого k, где $1 \leq k < \dfrac{n-1}{2}$, число вершин степень которых не превосходит k меньше k;
- при нечётном n число вершин степени $\dfrac{n-1}{2}$ не превосходит $\dfrac{n-1}{2}$, то G гамильтонов.

Теорема Хватала

Пусть G — простой граф с $n \geq 3$ вершинами, и пусть $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ — последовательность степеней его вершин. Если для каждого $k < n/2$ выполняется $d_k > k$ или $d_{n-k} \geq n - k$, то G гамильтонов.

В отличие от эйлеровых графов, для гамильтоновых графов **не существует** простого необходимого и достаточного условия. Полученные теоремы дают либо достаточные условия, которые часто слишком сильны для практического применения, либо необходимые, которые не являются достаточными.

9 Основы цикломатики в графах

9.1 Основные понятия и определения

Определение

Цикломатическое число (цикломатическая характеристика, число циклового ранга) графа $G = (V, E)$

$$\nu(G) = |E| - |V| + p,$$

где:

- $|E|$ — число рёбер,
- $|V|$ — число вершин,
- p — число компонент связности.

Определение

Коцикломатическое число (число коциклового ранга) графа $G = (V, E)$

$$\mu(G) = |V| - p.$$

Фундаментальное соотношение

Для любого графа $G = (V, E)$ справедливо

$$\boxed{\nu(G) + \mu(G) = |E|.}$$

Доказательство

Непосредственно:

$$\nu(G) + \mu(G) = (|E| - |V| + p) + (|V| - p) = |E|.$$

9.2 Пространство над полем $\mathbb{F}_2$

Определение

Поле $\mathbb{F}_2$ — поле из двух элементов $\{0, 1\}$ с операциями:

- Сложение по модулю 2: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$.
- Умножение: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

Определение

Пространство всех подмножеств рёбер $\mathcal{E}(G)$ — векторное пространство над $\mathbb{F}_2$, где:

- векторы — подмножества рёбер $A \subseteq E(G)$;
- сложение — симметрическая разность: $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

- умножение на скаляр: $0 \cdot A = \varnothing$, $1 \cdot A = A$;
- нулевой вектор — пустое множество $\varnothing$;
- размерность: $\dim \mathcal{E}(G) = |E(G)|$.

9.3 Цикловое пространство

Определение

Чётный подграф — подграф, у всех вершин которого чётная степень.

Определение

Цикловое пространство $\mathcal{C}(G)$ — подпространство $\mathcal{E}(G)$, состоящее из всех чётных подграфов графа G.

Основная теорема о размерности циклового пространства

Для любого графа $G = (V, E)$ справедливо

$$\dim \mathcal{C}(G) = \nu(G) = |E| - |V| + p,$$

где $\nu(G)$ – цикломатическое число графа.

Доказательство

Пусть T — остовный лес графа G (объединение остовных деревьев всех компонент).

1. Дерево на n_i вершинах имеет $n_i - 1$ ребро, поэтому в T содержится $\sum_{i=1}^{p}(n_i - 1) = |V| - p$ рёбер.
2. Каждое ребро $e \notin T$ порождает единственный **фундаментальный цикл** C_e — цикл, образованный добавлением e к T.
3. Циклы $\{C_e \mid e \notin T\}$ линейно независимы: каждый содержит уникальное ребро $e \notin T$, не входящее в другие циклы.
4. Эти циклы порождают всё $\mathcal{C}(G)$: любой чётный подграф можно представить как сумму некоторых C_e.
5. Число таких циклов $|E| - (|V| - p) = |E| - |V| + p = \nu(G)$.

Замечание

Свойства циклового пространства:

1. $\mathcal{C}(G)$ является линейным пространством над $\mathbb{F}_2$.
2. Нулевой элемент — $\varnothing$ (пустой подграф).
3. Каждый элемент $A \in \mathcal{C}(G)$ является своим собственным противоположным:

$A + A = \varnothing$.

4. Фундаментальные циклы относительно любого остовного леса образуют базис.

9.4 Пространство разрезов и его связь с цикловым пространством

Определение

Разрез в графе G — множество рёбер, удаление которых увеличивает число компонент связности.

Определение

Пространство разрезов $\mathcal{D}(G)$ — подпространство $\mathcal{E}(G)$, состоящее из всех разрезов и их линейных комбинаций.

Размерность пространства разрезов

Для любого графа G

$$\dim \mathcal{D}(G) = \mu(G) = |V| - p,$$

где $\mu(G)$ – коцикломатическое число графа.

Доказательство

Пусть T — остовный лес графа G.

1. Для каждого ребра $e \in T$ существует единственный **фундаментальный разрез** D_e — множество рёбер, соединяющих компоненты, полученные удалением e из T.

2. Разрезы $\{D_e \mid e \in T\}$ линейно независимы: каждый содержит уникальное ребро $e \in T$, не входящее в другие разрезы.

3. Эти разрезы порождают всё $\mathcal{D}(G)$.

4. Число таких разрезов: $|T| = |V| - p = \mu(G)$.

Замечание

Скалярное произведение для пространства $\mathcal{E}(G)$ определяется как

$$\langle A, B\rangle = |A \cap B| \pmod 2.$$

Ортогональность циклового пространства и пространства разрезов

Для любого цикла $C \in \mathcal{C}(G)$ и любого разреза $D \in \mathcal{D}(G)$:

$$|C \cap D| \equiv 0 \pmod 2.$$

То есть, цикл и разрез пересекаются по чётному числу рёбер.

Доказательство

Пусть $D = \delta(S)$ — разрез, порождённый множеством вершин $S \subset V$.

$$\delta(S) = \{(u, v) \in E : u \in S, v \notin S\}.$$

Рассмотрим цикл C. При обходе цикла происходит чётное число переходов через границу множества S, так как начинаем и заканчиваем в одной и той же компоненте относительно разреза D.

Теорема о полной структуре

Для произвольного графа G справедливо

$$\mathcal{E}(G) = \mathcal{C}(G) \oplus \mathcal{D}(G) \quad \text{(прямая сумма).}$$

Пример

Цикл C_n $(n \geq 3)$:

$$\begin{aligned} |V| = n, \quad |E| = n, \quad p = 1 \\ \nu(C_n) = n - n + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{C}(C_n) = 1 \\ \mu(C_n) = n - 1 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{D}(C_n) = n - 1 \end{aligned}$$

Цикловое пространство $\mathcal{C}(C_n)$ состоит только из пустого множества и самого цикла C_n.

Пример

Полный граф K_4:

$$\begin{aligned} |V| = 4, \quad |E| = 6, \quad p = 1 \\ \nu(K_4) = 6 - 4 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{C}(K_4) = 3 \\ \mu(K_4) = 4 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{D}(K_4) = 3 \end{aligned}$$

Пространства $\mathcal{C}(K_4)$ и $\mathcal{D}(K_4)$ трёхмерны, $\mathcal{E}(K_4)$ шестимерно.

Пример

Дерево T_n с n вершинами:

$$\begin{aligned} |V| = n, \quad |E| = n - 1, \quad p = 1 \\ \nu(T_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{C}(T_n) = 0 \\ \mu(T_n) = n - 1 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{D}(T_n) = n - 1 \end{aligned}$$

Цикловое пространство тривиально (только $\varnothing$), пространство разрезов совпадает со всем $\mathcal{E}(T_n)$.