1 Планарность

Геометрическим представлением графа $G = (V, E)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется такое его отображение в $\mathbb{R}^n$, при котором:

1. каждой вершине $v \in V$ сопоставлена точка в $\mathbb{R}^n$, причем разным вершинам – разные точки;

2. каждому ребру $(v, u) \in E$ сопоставлена непрерывная кривая, соединяющая точки, соответствующие вершинам v и u , и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам;

3. кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

Граф G называется планарным, если найдется его геометрическое представление на плоскости (т.е. в $\mathbb{R}^2$).
Геометрическое представление планарного графа в $\mathbb{R}^2$ назовем его **укладкой на плоскости**. Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область называется также внешней гранью.

1.1 Теорема Эйлера

Теорема 1.1. *Теорема Эйлера для планарных графов.*
Если $G = (V, E)$ – связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для каждой его укладки на плоскости верно равенство

$$p - q + r = 2,$$

где r – число граней в этой укладке.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по q при заданном p.
Базис индукции:
если $q = p - 1$, то G – дерево, т.е. планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.
Индуктивный переход:
рассмотрим связный планарный граф $G = (V, E)$ с p вершинами и $q > p$ ребрами. Пусть задана его укладка на плоскости, в которой r граней.
В графе G найдется хотя бы один цикл, и пусть e – любое ребро из какого-то его цикла.
Тогда граф $G' = (V, E \setminus e)$ – связный и планарный с p вершинами и $q - 1$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $r - 1$ граней, т. к. при удалении ребра e из укладки графа G две грани соединяются в одну.
Для графа G' верно предположение индукции, т.е.

$$p - (q - 1) + (r - 1) = 2,$$

откуда

$$p - q + r = 2.$$

□

Теорема 1.2. *Граф K_5 не является планарным.*

Доказательство. Доказательство проведем от обратного: пусть граф K_5 планарен. Тогда для произвольной его укладки на плоскости по теореме Эйлера получим

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 5$ – число вершин и $q = 10$ число ребер в графе, а r – число граней в этой укладке. Откуда $r = 7$.
Пусть q_i – число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \dots, r$.
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро считаем дважды.
Но $q_i \geq 3$, поэтому $3r \leq 2q$, или $r \leq \frac{2}{3}q$. Получаем: $7 \leq \frac{2}{3} \cdot 10$ – противоречие.
Значит, граф K_5 не является планарным. □

Теорема 1.3. *Граф $K_{3,3}$ не является планарным.*

Доказательство. Доказательство проведем от обратного: пусть граф $K_{3,3}$ планарен.
Тогда для произвольной его укладки на плоскости по теореме Эйлера получим

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 6$ – число вершин и $q = 9$ число ребер в графе, а r – число граней в этой укладке. Поэтому $r = 5$.
Пусть q_i – число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \dots, r$.
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро считаем дважды.
Но $q_i \geq 4$, т. к. в $K_{3,3}$ наименьшая длина цикла равна четырем, поэтому $4r \leq 2q$, или $r \leq \frac{q}{2}$.
Получаем: $5 \leq \frac{9}{2}$ — противоречие.
Значит, граф $K_{3,3}$ не является планарным. □

1.2 Гомеоморфизм

Рассмотрим бинарные отношения $R \subseteq X \times Y$ и $S \subseteq Y \times Z$, тогда $T = R \circ S$ называется композицией бинарных отношений R и S, при этом

$$xTy, \text{ если } \exists\, z : xRz \text{ и } zSy.$$

Пусть задано множество M, на котором определено бинарное отношение R такое, что xRy, если x является родителем y.
Тогда отношение «являться дедом» можно представить как композицию $R \circ R = R^2$ на множестве M, отношение «являться прадедом» можно представить как $R \circ R^2 = R^2 \circ R = R^3$ и т.д.
В конечном счёте можно ввести отношение «являться предком» с помощью транзитивного замыкания

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i,$$

при этом подразумевается, что x не может быть предком самому себе, если же это необходимо учесть, говорят о рефлексивно-транзитивном замыкании

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i = R^+ \cup R^0,$$

где $R^0 = \{(x, x) | x \in M\}$.
Введем отношение R следующим образом: два графа находятся в отношении R, если один можно свести к другому заменой вершины степени 2 на ребро между вершинами смежными ей, или наоборот, добавлением вершины степени два на ребро.
Отношением гомеоморфизма (или топологической эквивалентности) назовем рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R: R^*.

1.3 Критерий планарности

Теорема 1.4 (Теорема Понтрягина-Куратовского)**.** *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* $K_{3,3}$ *и* K_5*.*

2 Задача правильной раскраски графа

Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф, а $x \in \mathbb{N}$, тогда произвольная функция вида

$$f : V \to \{1, 2, 3, \dots, x\}$$

называется вершинной x**-раскраской** графа G.
Раскраска называется **правильной**, если $f(u) \neq f(v)$ для любых смежных вершин u и v.
Очевидно, что для правильной раскраски полного графа, содержащего n вершин, требуется n красок. Для правильной раскраски любого дерева требуется 2 краски, для C_n требуется 2 краски, если n чётно, и 3, если n нечётно.
Хроматическое число графа – минимальное число красок, необходимое для правильной раскраски графа.

Теорема 2.1 (Теорема о пяти красках)**.** *Для любого планарного графа хроматическое число не больше пяти.*

Гипотеза Кэли
В 1879 году британский математик А.Кэли опубликовал в Трудах Лондонского географического общества статью, посвящённую проблеме раскраски карт, в которой была сформулирована гипотеза о четырёх красках – всякая карта 4-раскрашиваема.
Заметим, что любую географическую (политическую) карту можно взаимно однозначно сопоставить с планарным графом, то есть с графом, который может быть изображён на плоскости без пересечения рёбер. Вершины в нём будут соответствовать странам, а рёбра проводиться между граничащими странами.
Алгоритм последовательной раскраски

Начинаем с любой вершины, которую красим в первый цвет. Далее на каждом этапе выбираем для окраски вершину, смежную с какой-либо уже окрашенной, и красим её в следующий цвет. Так продолжаем до тех пор, пока все вершины не будут окрашены. Этот алгоритм даёт правильную раскраску, но не всегда минимальную. К сожалению, не существует эффективного алгоритма для получения минимальной правильной раскраски, в общем случае для этой задачи необходим полный перебор.

2.1 Хроматический многочлен

Пусть дан фиксированный граф $= (V, E)$ и фиксированное число красок x. Количество способов правильной x-раскраски графа G называется **хроматическим многочленом** $P(G, x)$. Стягивание ребра – замена концов ребра одной вершиной, соседями новой вершины становятся соседи этих концов. Будем обозначать за $G/\{u, v\}$ граф, полученный из графа G стягиванием ребра $\{u, v\}$.

Теорема 2.2. *Пусть u и v – несмежные вершины графа G, тогда*

$$P(G, x) = P(G + \{u, v\}, x) + P(G/\{u, v\}, x).$$

Доказательство. Рассмотрим все произвольные раскраски графа G.
Рассмотрим те из них, при которых вершины u и v окрашены в разные цвета. Если добавить к графу G ребро $\{u, v\}$, то они не изменятся, то есть останутся правильными.
Рассмотрим раскраски, при которых u и v одного цвета. Все эти раскраски останутся правильными и для графа, полученного из G слиянием вершин u и v.

□

Хроматическое число полного графа равняется числу его вершин $n = |V|$.

Теорема 2.3. *Пусть u и v – смежные вершины графа G, тогда $P(G, x) = P(G - \{u, v\}, x) - P(G/\{u, v\}, x)$.*

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы.

□

Хроматический многочлен полного графа

$$P(K_n, x) = x(x-1)\dots(x-n+1) = \frac{x!}{(x-n)!},$$

так как первую вершину полного графа K_n можно окрасить в любой из x цветов, вторую — в любой из оставшихся $x - 1$ цветов и т. д.
Очевидно, что если $x < n$, то $P(K_n, x) = 0$, так как один из его множителей 0.
Чтобы найти хроматический многочлен произвольного графа, нужно разложить его на полные графы.

2.2 Коэффициенты хроматического многочлена

Теорема 2.4. *Свободный член хроматического многочлена равен 0.*

Доказательство. По определению хроматического многочлена графа G, его значение в точке x равно количеству способов раскрасить вершины G правильным образом в x цветов. Количество способов раскрасить граф в 0 цветов равно 0. То есть $P(G, 0) = 0$. Из этого следует, что $P(G, x)$ кратен x, следовательно его свободный член равен 0. □

Теорема 2.5. *Старший коэффициент хроматического многочлена равен 1.*

Доказательство. Воспользуемся рекуррентной формулой

$$P(G, x) = P(G_1, x) + P(G_2, x),$$

где G_1 – граф, полученный из G добавлением отсутствующего в G ребра $\{u, v\}$, а G_2 – граф, полученный из G слиянием вершин u и v в одну и удалением возникших при этом кратных ребер. Применяя рекуррентную формулу повторно, хроматический полином можно представить в виде суммы хроматических полиномов полных графов, то есть

$$P(G, x) = P(K_n, x) + a_1 P(K_{n-1}, x) + a_2 P(Kn-2, x) + \dots = \frac{x!}{(x-n)!} + a_1 \frac{x!}{(x-n+1)!} + a_2 \frac{x!}{(x-n+2)!} + \dots$$

Из этой формулы видно, что хроматический многочлен имеет старший коэффициент, равный 1. □

Теорема 2.6. *Коэффициенты хроматического многочлена составляют знакопеременную последовательность.*

Доказательство. Индукция по количеству вершин.
База индукции:
Теорема верна для графа G из одной вершины, потому что $P(G, x) = x$.
Индукционный переход:
Предположим, что теорема верна для всех графов на n вершинах. Рассмотрим графы на $n+1$ вершине.
Индукционный переход будем доказывать индукцией по количеству ребер графа G. Если G не содержит ребер, то есть G является O_{n+1}, то его хроматический многочлен $P(G, x) = x^{n+1}$ обладает доказываемым свойством.
Теперь предположим, что для всех $(n+1, m)$-графов теорема верна.
Возьмем $(n+1, m+1)$-граф G_1 и его ребро $\{u, v\}$.
Обозначим за G граф, полученный из G_1 удалением ребра $\{u, v\}$ ($G = G1 - \{u, v\}$), а за G_2 – граф, полученный из G_1 слиянием вершин u и v.
Тогда из рекуррентной формулы следует $P(G_1, x) = P(G, x) - P(G_2, x)$.
Так как G – $(n+1, m)$-граф, а в G_2 – n вершин, то для G и G_2 теорема верна

$$P(G, x) = x^{n+1} - a_1 x^n + a_2 x^{n-1} - a_3 x^{n-2} + \dots,$$

$$P(G_2, x) = x^n - b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_n$ – некоторые неотрицательные целые числа.
Из этих равенств получаем

$$P(G_1, x) = x^{n+1} - (a_1 + 1)x^n + (a_2 + b_1)x^{n-1} + \dots.$$

Видно, что в этом полученном полиноме коэффициенты составляют знакопеременную последовательность. □

Теорема 2.7. *Второй коэффициент хроматического многочлена равен по модулю количеству ребер графа.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы видно, что при увеличении количества ребер графа на 1, второй коэффициент также увеличивается на 1. Так как для пустого графа второй коэффициент равен 0, то утверждение верно для любого графа. □

Пример.
Для графа G на рисунке 1 получим

$$P(G,x) = P(G_1,x) + P(G_2,x) = P(G_{11},x) + P(G_{12},x) + P(G_{21},x) + P(G_{22},x) =$$
$$= P(G_{111},x) + P(G_{112},x) + P(G_{12},x) + P(G_{21},x) + P(G_{22},x) =$$
$$= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 3x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) = x(x-1)(x-2)^3 =$$
$$= x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 20x^2 + 8x.$$

Тогда минимальный x, при котором $P(G,x) > 0$ будет хроматическим числом, в данном случае $\chi_G = 3$.
Также можно заметить, что старшая степень многочлена равна единице, второй коэффициент по модулю совпадает с числом рёбер $|-7| = |E|$, свободный член многочлена равен нулю коэффициенты образуют знакочередующуюся последовательность.

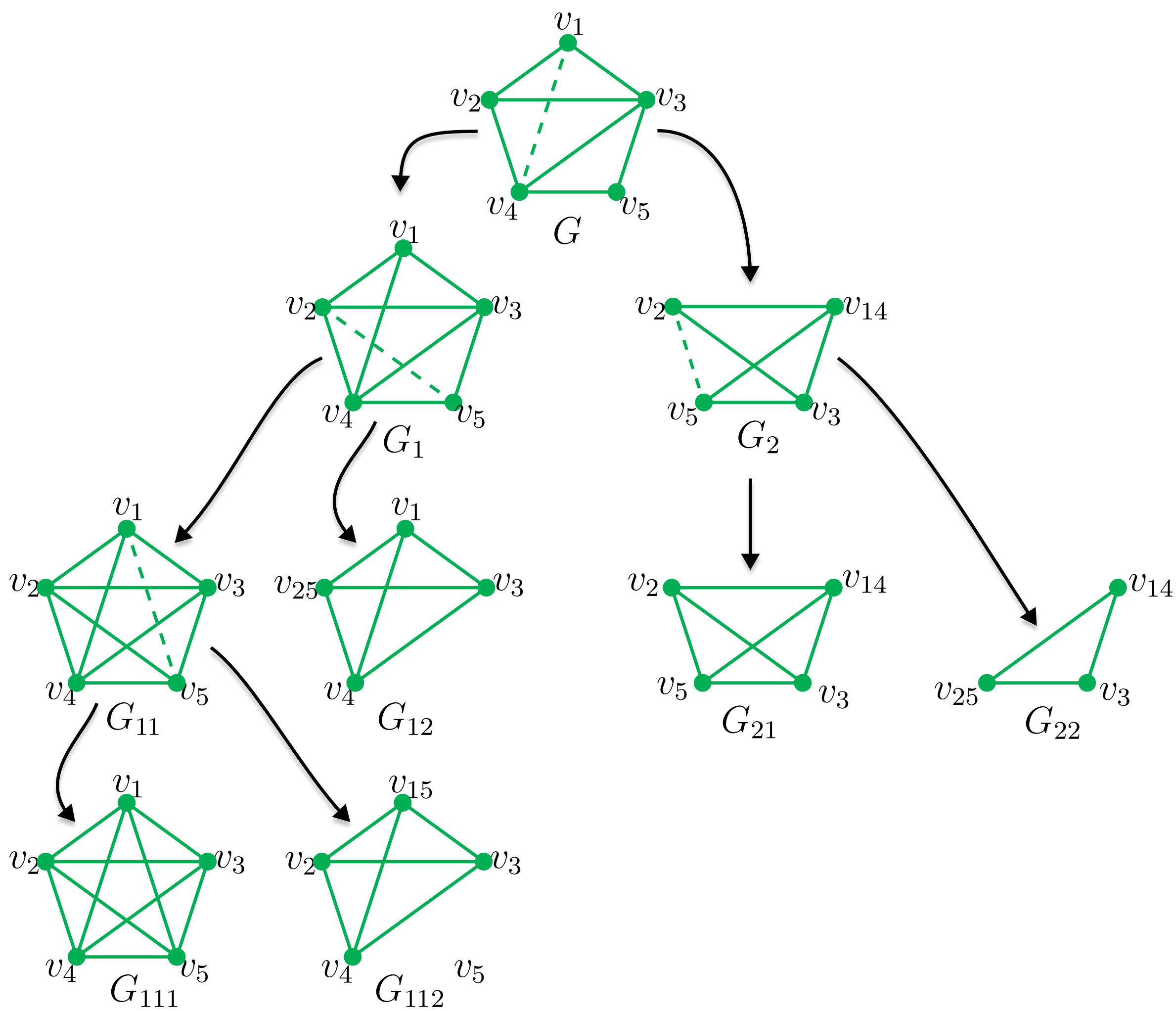

Рис. 1: Схема разложения графа для определения хроматического многочлена