Содержание

1 Множества 2
1.1 Основные понятия и обозначения . . . 2

2 Определение графа 3
2.1 Простой граф . . . 3
2.2 Ориентированный граф . . . 4
2.3 Мультиграф . . . 5
2.4 Псевдограф . . . 6

3 Способы задания графов 7
3.1 Смежность, инцидентность и степени вершин . . . 7
3.2 Список смежности . . . 9
3.3 Матрица смежности $S(G)$ . . . 9
3.4 Матрица инцидентности $B(G)$ . . . 10

4 Изоморфизм графов 12
4.1 Определение изоморфизма . . . 12
4.2 Инварианты графов . . . 12

5 Связность 12
5.1 Отношение эквивалентности . . . 12
5.2 Отношение достижимости . . . 15
5.3 Связность . . . 15

1 Множества

1.1 Основные понятия и обозначения

Основные предпосылки канторовской (наивной) теории множеств:

- множество может состоять из любых различимых объектов;
- множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;
- любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладает.

Основные понятия и обозначения, связанные с множествами и операциями над ними:

1. Множества состоят из элементов. Запись $x \in M$ означает, что x является элементом множества M.

2. Множество A является подмножеством множества B, если все элементы A являются элементами B.
$$A \subset B.$$

3. Множества A и B равны, если они содержат одни и те же элементы.
$$A = B \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A.$$

4. Пустое множество $\varnothing$ не содержит ни одного элемента и является подмножеством любого множества.

5. Пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B.
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

6. Объединение $A \cup B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

7. Разность $A \setminus B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат A и не пренадлежат B.
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

8. Симметрическая разность $A \triangle B$ состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B.
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

2 Определение графа

2.1 Простой граф

$\boxed{G = (V, E), V \neq \varnothing, E \subseteq \{\{v_i, v_j\} | v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.}$
Пусть V – непустое множество,

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, V \neq \varnothing,$$

E – множество всех неупорядоченых пар элементов множества V, за исключением пар, состоящих из одинаковых элементов

$$E \subseteq \{\{v_i, v_j\} | v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.$$

Тогда пара множеств (V, E), называется **простым графом** и обозначается $G = (V, E)$. Элементы множества V называют **вершинами**, а элементы множества E – **рёбрами**.
Пример.
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_6\}\}$.

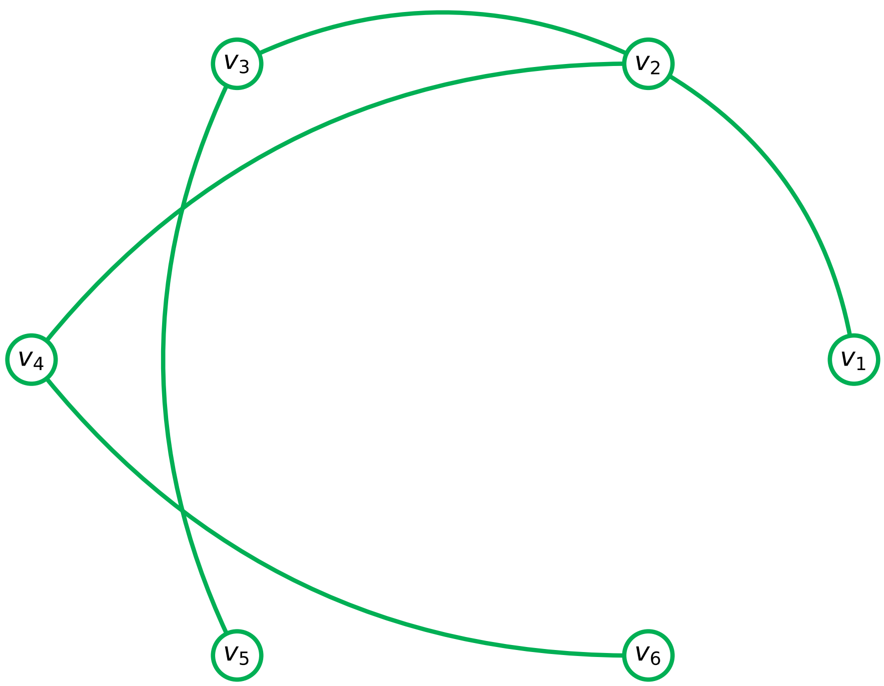

Рис. 1: Простой граф

Примечание.
Часто слово «простой» опускают, называя их графами.

2.2 Ориентированный граф

$\boxed{G = (V, E), V \neq \varnothing, E \subseteq \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.}$

Пусть V – непустое множество,

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, V \neq \varnothing,$$

E – множество всех упорядоченых пар элементов множества V, за исключением пар, состоящих из одинаковых элементов

$$E \subseteq \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.$$

Тогда пара множеств (V, E), называется **ориентированным графом** и обозначается $G = (V, E)$. Элементы множества V называют **вершинами**, а элементы множества E – **дугами**.

Пример.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_2, v_4), (v_6, v_4)\}$.

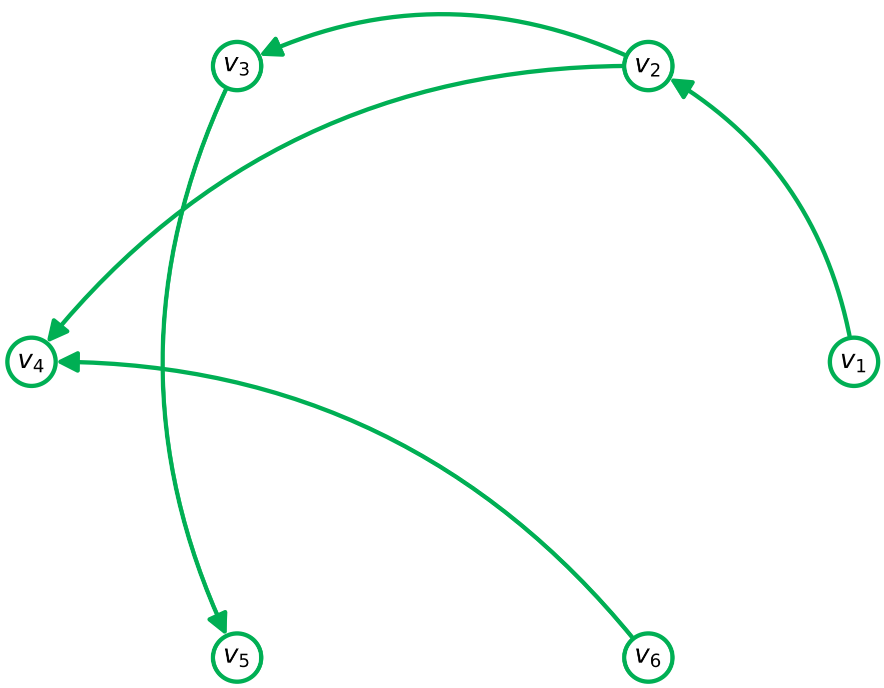

Рис. 2: Ориентированный граф

Примечание.

Ориентированные графы также называют орграфами. В простых графах рёбра – множества, в орграфах дуги – кортежи.

2.3 Мультиграф

$\boxed{G = (V, \mathbf{E}), V \neq \varnothing, \mathbf{E} = (E, m), E \subseteq \{\{v_i, v_j\} | v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}, m : E \to \mathrm{Z}^+.}$

Пусть V – непустое множество,

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V \neq \varnothing,$$

E – множество всех неупорядоченых пар элементов множества V, за исключением пар, состоящих из одинаковых элементов

$$E \subseteq \{\{v_i, v_j\} | v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.$$

$\mathbf{E}$ – мультимножество, построенное на множестве E, допускающее кратность элементов

$$\mathbf{E} = (E, m), m : E \to \mathrm{Z}^+.$$

Тогда пара множеств $(V, \mathbf{E})$, называется **мультиграфом** и обозначается $G = (V, \mathbf{E})$. Элементы множества V называют **вершинами**, а элементы мультимножества $\mathbf{E}$ – **рёбрами (дугами)**.

Пример.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_6\}\}$.

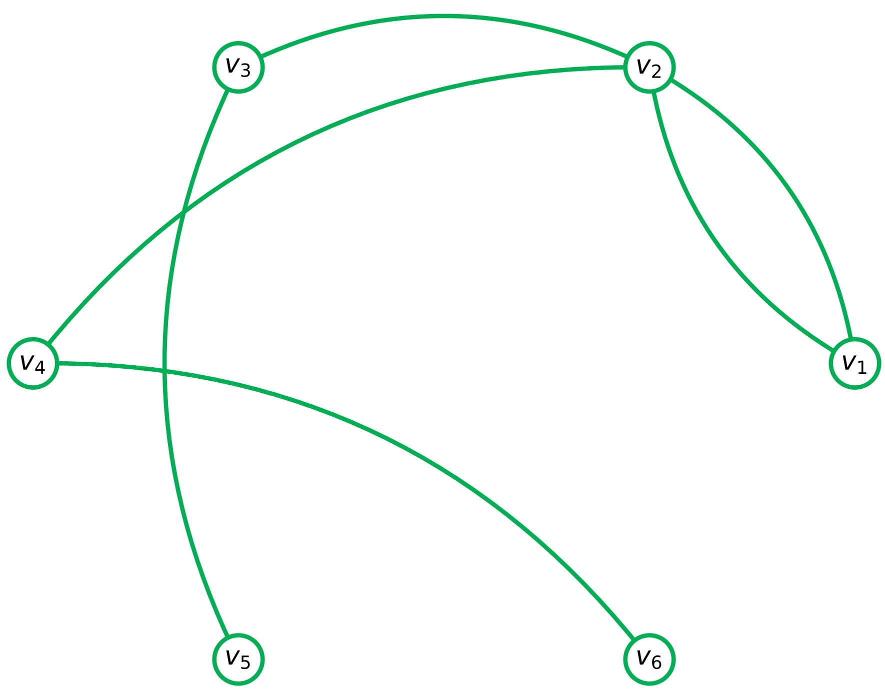

Рис. 3: Мультиграф

Примечание.

Могут быть ориентированными и неориентированными. Получаются из простых графов (орграфов) добавлением кратных рёбер (дуг).

2.4 Псевдограф

$\boxed{G = (V, \mathbf{E}), V \neq \varnothing, \mathbf{E} = (E, m), E \subseteq \{\{v_i, v_j\} | v_i, v_j \in V\}, m : E \to \mathrm{Z}^+.}$

Пусть V – непустое множество,

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, V \neq \varnothing,$$

E – множество всех неупорядоченых пар элементов множества V

$$E \subseteq \{\{v_i, v_j\} | v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.$$

$\mathbf{E}$ – мультимножество, построенное на множестве E, допускающее кратность элементов

$$\mathbf{E} = (E, m), m : E \to \mathrm{Z}^+.$$

Тогда пара множеств $(V, \mathbf{E})$, называется **псевдографом** и обозначается $G = (V, \mathbf{E})$. Элементы множества V называют **вершинами**, а элементы мультимножества $\mathbf{E}$ – **рёбрами (дугами)**. Рёбра (дуги), соединяющие одну и ту же вершину, называются **петлями**.

Пример.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_6\}\}$.

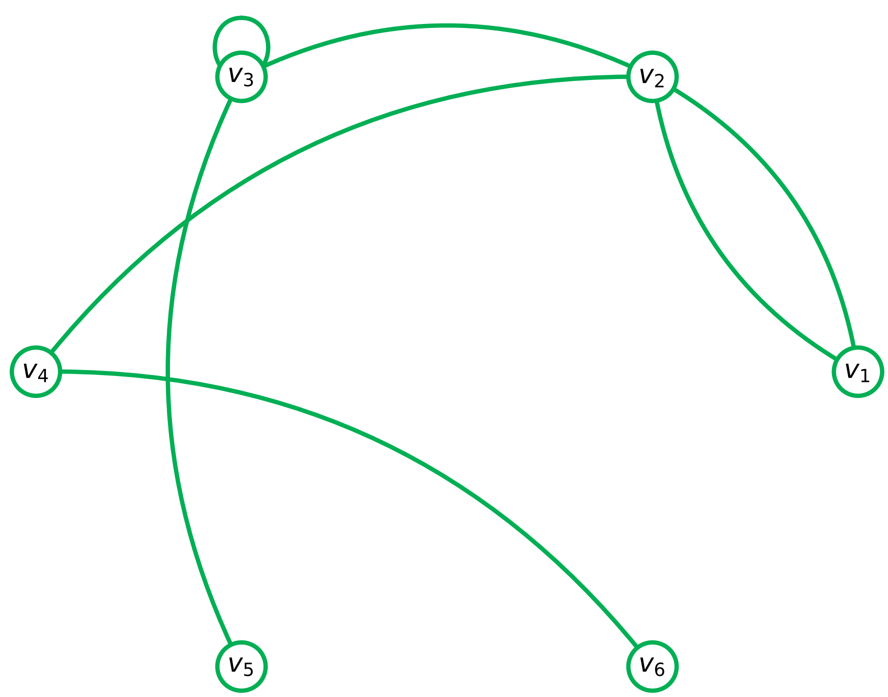

Рис. 4: Псевдограф

Примечание.

Получаются из мультиграфов добавлением петель.

3 Способы задания графов

3.1 Смежность, инцидентность и степени вершин

- Вершины v_1 и v_2 называют **смежными**, если существует ребро $e = \{v_1, v_2\} \in E$, соединяющее их.
- Ребро e называют **инцидентным** вершине v, если она является одним из его концов.
- **Степенью вершины** $\deg(v)$ неориентированного графа называют число рёбер, инцидентных этой вершине
$$\deg(v) = |\{u : \{v, u\} \in E\}|.$$

Пример.
Дан граф $G = (V, E)$, такой что
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_6, v_4\}\}$.

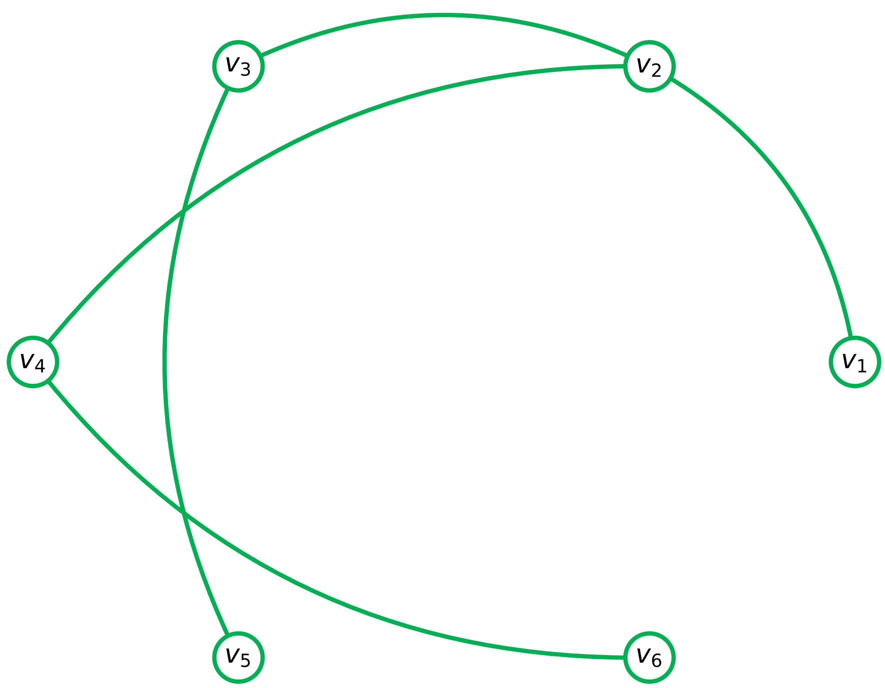

Рис. 5: $G = (V, E)$

Вершины v_1 и v_2 смежные, так как $\{v_1, v_2\} \in E$.
Вершины v_1 и v_6 не смежные, так как $\{v_1, v_6\} \notin E$.
$\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 3, \deg(v_3) = 2, \deg(v_4) = 2, \deg(v_5) = 1, \deg(v_6) = 1$.
$G_1 = (\{v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}) \subseteq G$.
Для ориентированных графов введены понятия полустепени захода и полустепени исхода вершины.

- **Полустепенью захода** $\deg^+(v)$ вершины v называют число заходящих в неё дуг.

- **Полустепенью исхода** $\deg^-(v)$ вершины v называют число исходящих из неё дуг.
- **Степенью вершины** $\deg(v)$ ориентированного графа называют сумму полустепеней захода и исхода этой вершины.

$$\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v).$$

Пример.
Дан граф $G = (V, E)$, такой что
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_2, v_4), (v_6, v_4)\}$.

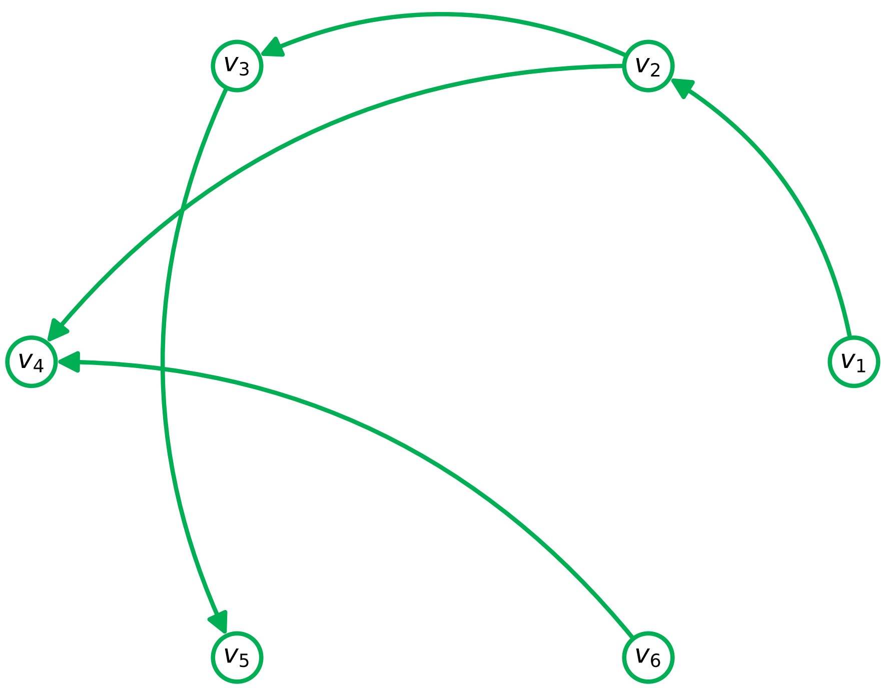

Рис. 6: $G = (V, E)$

Запишем степени вершин в таблицу.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\deg^+(v)$	0	1	1	2	1	0
$\deg^-(v)$	1	2	1	0	0	1
$\deg(v)$	1	3	2	2	1	1

Лемма 3.1 (О рукопожатиях). *Для любого графа $G = (V, E)$ справедливо*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Доказательство. Так как степень вершины – есть количество инцидентных вершине рёбер, при суммировании степеней всех вершин каждое ребро учитывается два раза. $\square$

3.2 Список смежности

Для того, чтобы составить список смежности необходимо для каждой вершины указать список смежных с ней вершин.
Пример.
Дан граф $G = (V, E)$, такой что
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_6, v_4\}\}$.

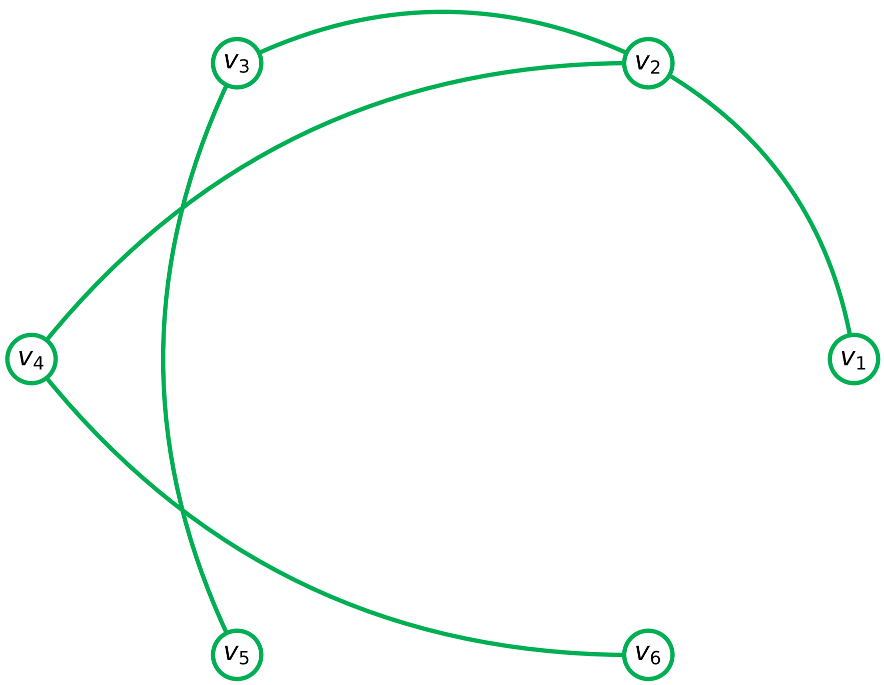

Рис. 7: Граф $G = (V, E)$

Запишем список смежности таблицей.

Вершина v	deg(v)	Список смежных с v вершин
v_1	1	v_2
v_2	3	v_1, v_3, v_4
v_3	2	v_2, v_5
v_4	2	v_2, v_6
v_5	1	v_3
v_6	1	v_4

3.3 Матрица смежности $S(G)$

$S(G)$ – квадратная матрица размерности $n \times n$, где n – число вершин графа.

$$s_{i,j} = 1 \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E.$$

Пример.

Построим матрицу смежности для графа из предыдущего примера.
В этом графе $n = |V| = 6$, значит матрица смежности $S(G)$ будет иметь размерность 6×6.
Так как в графе есть ребро $\{v_1, v_2\}$, элемент $s_{1,2} = 1$, так как в графе нет ребра $\{v_1, v_6\}$, элемент $s_{1,6} = 0$.
Повторив процедуру для всех рёбер получим

$$S(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что для неориентированных графов матрица смежности является симметричной так как $\{v_1, v_2\} = \{v_2, v_1\}$.
Примечание.

- Для ориентированных графов условие имеет вид
$$s_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E.$$
- Для мультиграфов вместо единиц указывают кратность рёбер.
- Для псевдографов на главной диагонали указывают число петель.

3.4 Матрица инцидентности $B(G)$

$B(G)$ – матрица размерности $n \times m$, где n – число вершин графа, а m – число рёбер (дуг) графа.

$$b_{i,j} = 1 \Leftrightarrow v_i \in e_j.$$

Пример.
Построим матрицу инцидентности для графа из предыдущего примера.
В этом графе $n = |V| = 6$ и $m = |E| = 5$, а значит матрица будет иметь размерность 6×5.
Пусть

$$\begin{aligned} e_1 &= \{v_1, v_2\}, \\ e_2 &= \{v_2, v_3\}, \\ e_3 &= \{v_3, v_5\}, \\ e_4 &= \{v_2, v_4\}, \\ e_5 &= \{v_6, v_4\}. \end{aligned}$$

Ребро e_1 инцидентно вершинам v_1 и v_2, поэтому $b_{1,1} = 1$ и $b_{2,1} = 1$.
Повторив процедуру для всех рёбер получим

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для ориентированных графов матрица инцидентности составляется по следующему правилу

$$b_{i,j} = \begin{cases} +1, & e_j = (v_i, *), \\ \text{-1}, & e_j = (*, v_i), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример.
Дан граф $G = (V, E)$, такой что
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_2, v_4), (v_6, v_4)\}$.

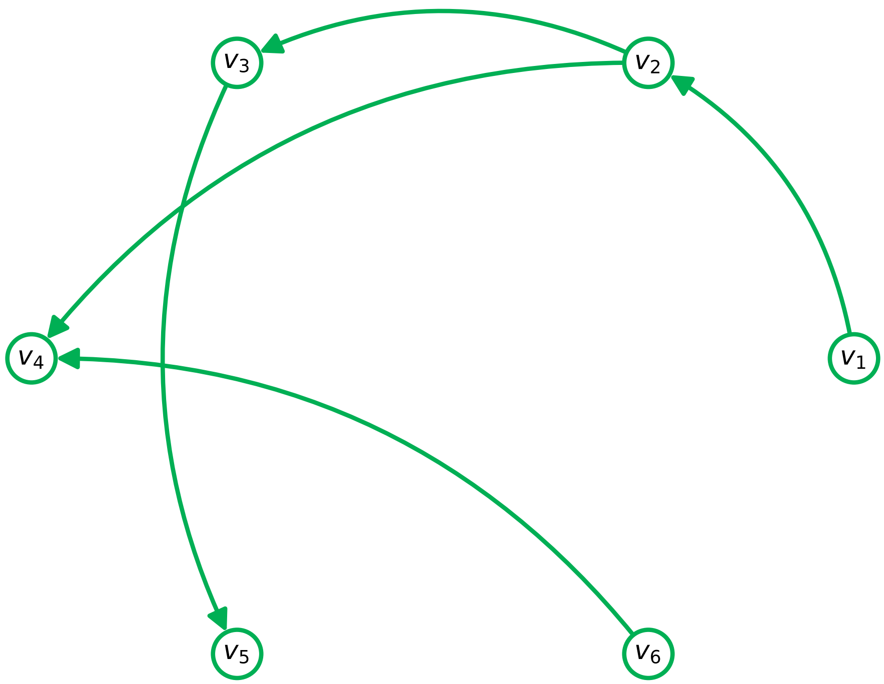

Рис. 8: Граф $G = (V, E)$

Дуга $e_1 = (v_1, v_2)$ выходит из вершины v_1 и входит v_2, поэтому $b_{1,1} = +1$ и $b_{2,1} = -1$.
Повторив процедуру для всех дуг получим

$$B(G) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

4 Изоморфизм графов

4.1 Определение изоморфизма

Изоморфизмом простых графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, называется биекция

$$f : V_1 \to V_2$$

такая, что любые две вершины v и u графа G_1 смежны тогда и только тогда, когда вершины $f(v)$ и $f(u)$ смежны в графе G_2.
Если изоморфизм графов G_1 и G_2 установлен, они называются изоморфными и вводится обозначение

$$G_1 \simeq G_2.$$

В случае применения понятия изоморфизма к ориентированным или взвешенным графам, накладываются дополнительные ограничения на сохранение ориентации дуг и значений весов.
Графы G_1 и G_2 являются изоморфными, если путём перестановки строк и столбцов в матрице смежности $S(G_1)$ одного графа удаётся получить матрицу смежности $S(G_2)$ другого графа. Однако, перебор всех возможных перестановок характеризуется вычислительной сложностью $O(N!)$.

4.2 Инварианты графов

Пусть F – функция на графах, то есть отображение, сопостовляющее каждому графу какое-либо значение. Тогда функция F называется **инвариантом** графов, если на любых двух изоморфных графах, она принимает одинаковое значение.
Некоторые простейшие инварианты:

- количество вершины в графе;
- количество рёбер в графе;
- количество компонент связности в графе;
- диаметр графа;
- длина минимального простого цикла,
- спектр графа (упорядоченный набор собственных чисел матрицы смежности).

На рисунке 9 показаны два изоморфных графа.

5 Связность

5.1 Отношение эквивалентности

Пусть A и B – произвольные множества, тогда множество

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ и } b \in B\},$$

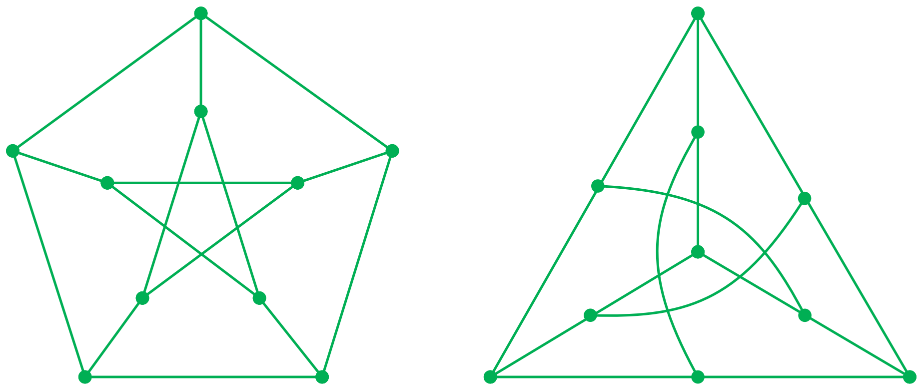

Рис. 9: Изоморфные графы

образованное всеми упорядоченными парами (a, b) называется **прямым** или **декартовым произведением** множеств A и B.

Пример.

Пусть $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{a, b\}$.

	1	3	5
a	$(1, a)$	$(3, a)$	$(5, a)$
b	$(1, b)$	$(3, b)$	$(5, b)$

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b)\}$.

Бинарным отношением на двух множествах A и B называют всякое подмножество декартового произведения этих множеств

$$R \subseteq A \times B.$$

Вместо $(a, b) \in R$ часто пишут aRb.

Бинарным отношением на множестве A называют всякое подмножество декартового произведения на себя

$$R \subseteq A^2 = A \times A.$$

Бинарное отношение называется **отношением эквивалентности**, если выполняются следующие свойства:

- рефлексивность: $xRx, \forall x \in X$;
- симметричность: $xRy \Rightarrow yRx, \forall x, y \in X$;
- транзитивность: xRy и $yRz \Rightarrow xRz, \forall x, y, z \in X$.

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве M и $a \in M$.

Классом эквивалентности M_a называется множество всех элементов из M, находящихся в отношении R к элементу a.

$$M_a = \{x \in M | xRa\}.$$

Свойства классов эквивалентности:

1. $a \in M_a$.

   Доказательство. По определению $M_a = \{x \in M | xRa\}$, а значит для a должно выполняться $a \in M_a \Leftrightarrow aRa$, что в свою очередь справедливо в силу рефлексивности отношения эквивалентности.

   $\square$

   Следствие: $M_a \neq \varnothing$.

2. $M_a = M_b \Leftrightarrow aRb$.

   Необходимость. Так как $M_a \neq \varnothing$ и $M_b \neq \varnothing$ существует общий элемент $c \in M_a \cap M_b$. При этом для $a \in M_a$ и $b \in M_b$ справедливо cRa и cRb. Но тогда по симметричности получим aRc, а по транзитивности aRb. $\square$

   Достаточность. Пусть заданы классы эквивалентности M_a и M_b, а также известно, что aRb. Тогда возьмём $c \in M_a$, для него cRa, а значит по транзитивности cRb и $c \in M_b$. Если же $c \in M_b$, для него cRb, а значит по симметричности bRc и по транзитивности aRc, откуда $c \in M_a$. А значит $M_a = M_b$. $\square$

3. $M_a \neq M_b \Rightarrow M_a \cap M_b = \varnothing$.

   Доказательство. Допустим, что существует $c = M_a \cap M_b \neq \varnothing$, тогда $c \in M_a$ и $c \in M_b$, а значит cRa и cRb. По симметричности и транзитивности получим aRb, а по свойству 2 следует, что $M_a = M_b$ – противоречие, значит $c = \varnothing$. $\square$

4. $\bigcup\limits_{a \in M} M_a = M$.

   Справедливо так как любой элемент $x \in M$ можно отнести к какому-либо классу эквивалентности $x \in M_x$.

Совокупность подмножеств M_i, где $i \in I$, множества M называется **разбиением множества** M, если выполняются следующие условия:

1. Каждое из подмножеств M_i непусто.

2. Объединение всех подмножеств M_i равно множеству M.

3. Два различных подмножества M_i и M_j, где $i \neq j$, не имеют общих элементов.

Теорема 5.1. *Пусть R – отношение эквивалентности на множестве M. Тогда совокупность классов эквивалентности множества M образует его разбиение.*

Доказательство. По свойствам. $\square$

5.2 Отношение достижимости

Дадим ещё ряд определений.

- **Путём** в неориентированном графе из вершины v_1 в v_k называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер вида
$$v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{k-2}, \{v_{k-2}, v_{k-1}\}, v_{k-1}, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k.$$
- **Путём** в ориентированном графе из вершины v_1 в v_k называется чередующаяся последовательность вершин и дуг вида
$$v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \ldots, v_{k-2}, (v_{k-2}, v_{k-1}), v_{k-1}, (v_{k-1}, v_k), v_k.$$
- Путь называют **замкнутым**, если вершины v_1 и v_k совпадают.
- Путь называют **простым**, если все вершины $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k\text{˘}1}, v_k$, кроме, может быть, v_1 и v_k, различны.
- Простой незамкнутый путь называют **цепью**.
- Вершину v называют **достижимой** из вершины u, если существует путь из u в v.

5.3 Связность

Теорема 5.2. *Отношение достижимости для неориентированных графов является отношением эквивалентности.*

В самом деле, проверим три условия:

1. рефлексивность: каждая вершина связана сама с собой;
2. симметричность: если вершина v связана с вершиной u, то u связана с v;
3. транзитивность: если вершина v связана с вершиной u, а u связана с w, то v связана с w.

Следовательно, отношение связности разбивает множество вершин V графа на классы эквивалентности, которые называются **компонентами связности**.
Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называют **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$.
Неориентированный граф называют **связным**, если любые две его вершины u и v связаны отношением взаимной достижимости.
Компонента связности графа — это его максимальный связный подграф.
Ориентированный граф называют **сильно связным**, если любые две его вершины u и v связаны отношением взаимной достижимости.
Неориентированный граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называют **ассоциированным** с ориентированным графом $G = (V, E)$, если $V_1 = V$, и
$$E_1 = \{\{u, v\} | (u, v) \in E \text{ или } (v, u) \in E, u \neq v\}.$$
Ориентированный граф называют **слабо связным**, если ассоциированный с ним неориентированный граф связный.