

Лекция 3. Критерий полноты

1 Замкнутость и полнота

Пусть имеется некоторое непустое множество F булевых функций и дана функция f . Спрашивается, можно ли представить функцию f через функции множества F .

Определение 1: Выразимость

Говорят, что булева функция f выражима через функции множества F , если существует формула над F , реализующая функцию f .

Часто операцию порождения одних булевых функций через другие называют операцией суперпозиции.

Определение 2: Замыкание множества F

Множество всех функций, выражимых через функции множества F , называют замыканием множества F относительно операции суперпозиции и обозначают $[F]$.

Из определения видна справедливость аксиом замыкания:

1. $F \subseteq [F]$.
2. Если $F_1 \subseteq F_2$, то $[F_1] \subseteq [F_2]$.
3. $[[F]] = [F]$.

Определение 3: Замкнутый класс

Если для множества булевых функций F выполняется $F = [F]$, то F называют замкнутым классом функций.

Некоторые важные замкнутые классы:

- Класс C_0 булевых функций, тождественно равных 0.
- Класс C_1 булевых функций, тождественно равных 1.
- Класс T_0 булевых функций, сохраняющих константу 0. Т. е.

$$f(0, \dots, 0) = 0.$$

- Класс T_1 булевых функций, сохраняющих константу 1. Т. е.

$$f(1, \dots, 1) = 1.$$

С понятием замыкания тесно связано понятие полноты.

Определение 4: Полнота в классе

Пусть R – замкнутый класс, а Q – системы функций из R . Говорят что система функций Q полна в классе R , если $[Q] = R$.

Теорема 1

Пусть система булевых функций Q полна в замкнутом классе R . Пусть также P – некоторое множество функций из R и любая функция из Q реализуется формулой над P . Тогда множество P также полно в классе R .

Доказательство

- Возьмём произвольную функцию f из класса R . По условию теоремы её можно реализовать некоторой формулой Φ над Q .
- В свою очередь каждая функция из Q , участвующая в построении формулы Φ реализуема формулой над P .
- Заменяем в формуле Φ вхождение каждого символа функции из Q соответствующей формулой над P , получив тем самым формулу Φ' над P , реализующую ту же самую функцию f .

Следствие 2 из прошлой лекции показывает, что каждую не равную 0 булеву функцию можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n},$$

то есть формулой над множеством $\{\bar{}, \vee, \wedge\}$, а так как $0 = x \wedge \bar{x}$, получаем, что указанная система полна в классе P_2 .

2 Двойственность**Определение 5: Двойственность**

Функция $g(x_1, \dots, x_n)$ является двойственной к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если

$$g(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Функция, двойственная к $f(x_1, \dots, x_n)$, обозначается как $f^*(x_1, \dots, x_n)$.

Из определения двойственности и тождества $\bar{\bar{x}} = x$ следует, что

$$f^{**}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Пример 1

Пусть $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, тогда

$$f^*(x_1, x_2) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = x_1 \wedge x_2.$$

Таким образом, двойственные друг другу функции образуют пары, запишем некоторые из них.

f	f^*
0	1
\bar{x}	\bar{x}
$x \wedge y$	$x \vee y$
$x \oplus y$	$x \oplus y \oplus 1 = \overline{x \oplus y}$

Таблица 1: Двойственные функции

Теорема 2: О двойственных функциях

Если

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_0(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)),$$

то

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = g_0^*(g_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_n)).$$

Доказательство

Согласно определению двойственной функции имеем

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{g}_0(g_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, g_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)).$$

В правой части заменим каждую формулу $g_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ эквивалентной $\bar{\bar{g}}_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, получим

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{g}_0(\bar{\bar{g}}_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, \bar{\bar{g}}_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)).$$

Функция $\bar{\bar{g}}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ по определению есть $g_1^*(x_1, \dots, x_n)$, откуда

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{g}_0(\bar{g}_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, \bar{g}_m^*(x_1, \dots, x_n)).$$

Вновь по определению $\bar{g}_0(\bar{g}_1^*, \dots, \bar{g}_m^*) = g_0^*(g_1^*, \dots, g_m^*)$, тогда окончательно

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = g_0^*(g_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_n)).$$

Запишем важное следствие этой теоремы.

Следствие 1: Принцип двойственности

Если функция f реализуется формулой Φ , составленной из символов функций g_1, \dots, g_m , то двойственная функция f^* реализуется формулой Φ^* , которая получается из формулы Φ заменой каждого символа функции g_i ($1 \leq i \leq m$) символом двойственной функции g_i^* .

Таким образом, если установлено некоторое утверждение для функций f, g, \dots в котором фигурируют лишь понятия, базирующиеся лишь на формулах, то по принципу двойственности будет справедливо аналогичное утверждение о булевых функциях f^*, g^*, \dots .

Так, например, доказав дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции, мы можем сделать вывод относительно дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции. Аналогичное утверждение справедливо и для двух правил де Моргана.

Так же на основе принципа двойственности, можем записать аналог теоремы о разложении по первой переменной из прошлой лекции.

Теорема 3

Для любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ справедливо разложение

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \cdot (\bar{x}_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n)).$$

Следствие 1

Если булева функция не равна тождественно 1, то имеет место представление

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} (x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}).$$

Выражение в правой части утверждения носит название совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ).

Определение 6: Самодвойственность

Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ называют самодвойственной, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n).$$

Таким образом, функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах она принимает взаимно противоположные значения.

Множество всех самодвойственных функций обозначим S .

3 Полиномы Жегалкина

На прошлой лекции мы показали, что если булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не равна тождественно нулю, то справедливо представление

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

На основании этого представления и, учитывая, что

$$0 = x \wedge \bar{x},$$

можно сделать вывод о полноте системы $\{\bar{}, \vee, \wedge\}$ в классе P_2 .

Рассмотрим систему функций $\{1, \oplus, \wedge\}$. По теореме 1, учитывая полноту стандартного базиса, и на основе выражений

$$\bar{x} = x \oplus 1, \quad x \vee y = x \wedge y \oplus x \oplus y,$$

сделаем вывод о полноте системы $\{1, \oplus, \wedge\}$ в классе P_2 .

Это означает, что любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде формулы над множеством $\{1, \oplus, \wedge\}$ в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}.$$

Такое представление называется полиномом Жегалкина.

Одним из способов построения полинома Жегалкина основан на методе неопределённых коэффициентов.

В качестве примера рассмотрим построение полинома Жегалкина для функции $f(x, y, z)$, заданной двоичным набором (10011100).

Запишем функцию в виде полинома Жегалкина с неопределёнными коэффициентами a_0, \dots, a_7 .

$$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz.$$

Подставляя в функцию наборы $(0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots, (1, 1, 1)$, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} (0, 0, 0) & a_0 = 1, \\ (0, 0, 1) & a_0 \oplus a_3 = 0, \\ (0, 1, 0) & a_0 \oplus a_2 = 0, \\ (0, 1, 1) & a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 1, \\ (1, 0, 0) & a_0 \oplus a_1 = 1, \\ (1, 0, 1) & a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 1, \\ (1, 1, 0) & a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 0, \\ (1, 1, 1) & a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0. \end{array}$$

Решая систему, последовательно исключаем неизвестные, получим

$$\begin{array}{l} a_0 = 1, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 1, \\ a_3 = 1, \\ a_4 = 0, \\ a_5 = 1, \\ a_6 = 0, \\ a_7 = 0. \end{array}$$

Тогда полином Жегалкина для функции $f(x, y, z)$ примет вид

$$f(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus xz.$$

Определение 7: Линейная функция

Булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ назовём линейной, если её полином Жегалкина не содержит нелинейных слагаемых. Иными словами её можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n.$$

Множество всех линейных функций обозначим через L .

4 Монотонность

В математическом анализе монотонной мы называли функцию, значения которой не убывают с увеличением аргумента. Это понятие можно перенести и на булевы функции, если определить частичный порядок на множестве E_2^n .

При этом считаем, что набор (a_1, \dots, a_n) не превосходит набор (b_1, \dots, b_n) , если для любого i ($1 \leq i \leq n$) выполняется равенство $a_i \leq b_i$. Этот факт записывается в виде

$$(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n).$$

Определение 8: Монотонная функция

Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной, если для любых двух наборов (a_1, \dots, a_n) и (b_1, \dots, b_n) , таких что

$$(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n),$$

выполняется неравенство

$$f(a_1, \dots, a_n) \leq f(b_1, \dots, b_n).$$

Множество всех монотонных булевых функций обозначим как M .

5 Критерий полноты

В ходе лекции мы рассмотрели различные классы булевых функций, в том числе:

1. Класс T_0 булевых функций, сохраняющих константу 0.
2. Класс T_1 булевых функций, сохраняющих константу 1.
3. Класс S самодвойственных булевых функций.
4. Класс L линейных булевых функций.
5. Класс M монотонных булевых функций.

На основе анализа принадлежности системы булевых функций к этим классам функций можно сделать вывод о полноте рассматриваемой системы.

Теорема 4: Теорема Поста о полноте

Система булевых функций полна в P_2 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов

$$T_0, T_1, S, L, M.$$

Пример 2

Проверим систему функций $\{\vee, \rightarrow\}$ на полноту.

Составим таблицу истинности для функций указанной системы.

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$	$f_2(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Будем последовательно проверять принадлежность функций к классам T_0 , T_1 , S , L , M .

1. Для класса T_0 :

- f_1 сохраняет 0, так как $f_1(0, 0) = 0$;
- f_2 не сохраняет 0, так как $f_2(0, 0) = 1$.

2. Для класса T_1 :

- f_1 сохраняет 1, так как $f_1(1, 1) = 1$;
- f_2 сохраняет 1, так как $f_2(1, 1) = 1$.

Дальнейшая проверка не требуется, так как $\{\vee, \rightarrow\} \subseteq T_1$, а значит система функций не полна.