

Identificación y Control Adaptativo

Trabajo Practico 1

Truls Carlson

4 de noviembre de 2024

Índice

1. 1 - Enunciado del Problema	1
1.1. El tanque y sus parámetros	1
1.2. Descripción del problema	1
2. Ejercicio 1 - El modelo matemático no lineal de la planta	2
2.1. a) Simulación del sistema	2
2.2. b) Comparación de resultado analítico y simulando	3
3. Ejercicio 2 - Linealizar el modelo	4
4. Ejercicio 3 - Discretización el modelo	6
4.1. Método ZOH	6
4.2. Método Tustin	7
Referencias	10

1. 1 - Enunciado del Problema

1.1. El tanque y sus parámetros

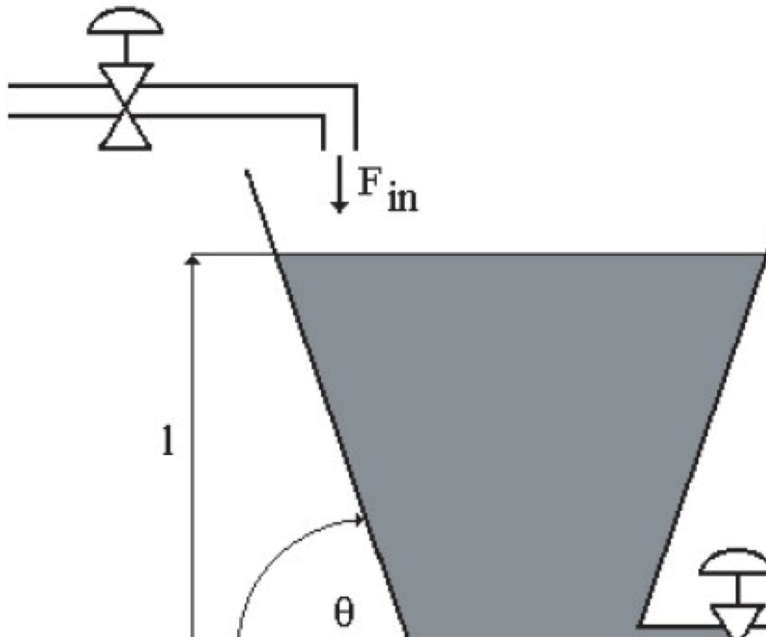


Figura 1: El tanque dado.

Con parametros

Parametro	Valor
Altura del tanque l	1 m
Ángulo de la pared θ	60°
Radio menor r_0	5 cm
Radio de orificio de salida r_o	2,54 cm
Caudal de entrada F_{in}	$0,0035 \text{ m}^3/\text{s}$
g	$9,81 \text{ m/s}^2$
Porcentaje de apertura k	$0 \leq k \leq 1$

1.2. Descripción del problema

Se deberá controlar la altura de líquido en el tanque en diferentes niveles, considerando perturbaciones en el caudal de entrada F_{in} . Se cuenta con una válvula proporcional la cual se comanda indicando el porcentaje de apertura (k) de la misma ($0 \leftrightarrow 100\%$).

2. Ejercicio 1 - El modelo matemático no lineal de la planta

2.1. a) Simulación del sistema

Tuvimos que hallar el modelo matemático. Para hacerlo, primero encontramos una expresión del volumen del tanque. Podemos expresar el radio en función de la altura como $r(h) = \frac{1}{\tan \theta} h + r_0$. El volumen es,

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h \pi r(\xi)^2 d\xi \\ &= \pi \int_0^h \left(\frac{1}{\tan \theta} \xi + r_0 \right)^2 d\xi, \quad \tan \theta = \sqrt{3} \\ &= \pi \left(\frac{1}{9} h^3 + \frac{r_0}{\sqrt{3}} h^2 + r_0^2 h \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Para encontrar el cambio en el tiempo, veremos en el flujo de entrada y salida, $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{out}$. F_{out} podemos expresar como $F_{out} = k\pi r_o^2 \sqrt{2gh}$. Entonces,

$$\begin{aligned} F_{in} - F_{out} &= \frac{d}{dt} V(h) \\ &= \frac{\partial}{\partial h} V(h) \dot{h} \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} h^2 + \frac{2r_0}{\sqrt{3}} h + r_0^2 \right) \dot{h} \\ \dot{h} &= \frac{F_{in} - F_{out}}{\pi \left(\frac{1}{3} h^2 + \frac{2r_0}{\sqrt{3}} h + r_0^2 \right)} \end{aligned} \quad (2)$$

Simulé el sistema en Simulink mediante bloques.

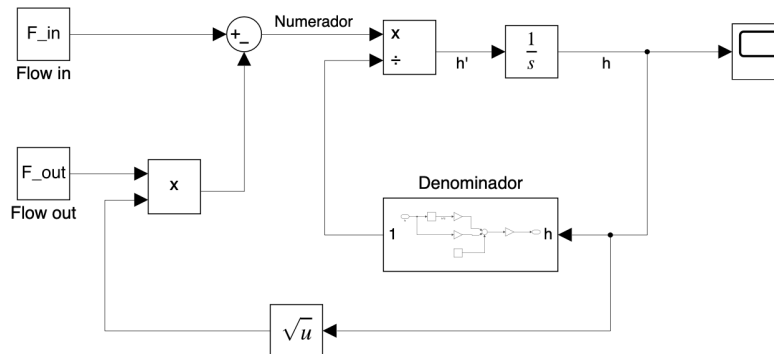


Figura 2: El sistema en Simulink.

2.2. b) Comparación de resultado analítico y simulando

Debíamos encontrar en cuánto tiempo se vacía el tanque si $h(t_1) = 60\text{cm}$, $F_{in}(t) = 0$ y $k(t) = 50\%$ para todo $t \geq t_1$. Para obtener el resultado analítico, tuvimos que encontrar $h(t)$. Podemos expresar 2 como,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{-c\sqrt{h}}{\pi \left(\frac{1}{3}h^2 + \frac{2r_0}{\sqrt{3}}h + r_0^2 \right)}, \quad c = \pi r_o^2 \sqrt{2g} \\ \int_{t_1}^t d\tau &= -\frac{\pi}{c} \int_{h(t_1)}^{h(t)} \left(\frac{\frac{1}{3}h^2 + \frac{2r_0}{\sqrt{3}}h + r_0^2}{\sqrt{h}} \right) dh \\ &\vdots \\ t &= 41,25 \end{aligned} \quad (3)$$

Al simular, obtenemos el siguiente resultado:

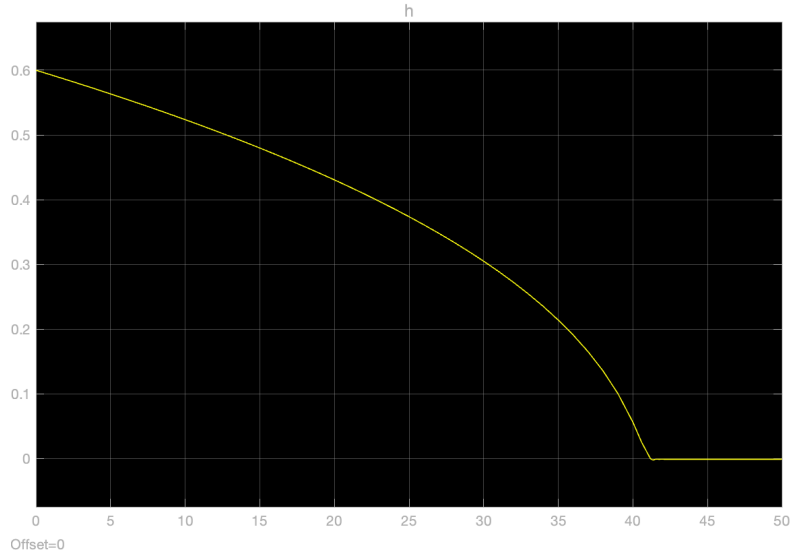


Figura 3: Gráfico del nivel de agua en el tanque con las condiciones dadas.

A partir de la figura, podemos ver que el resultado simulado es más o menos igual al resultado analítico.

3. Ejercicio 2 - Linealizar el modelo

Linealizaremos a un punto de trabajo de $\bar{h} = 60\text{cm}$ de altura. Primer encontramos el punto de trabajo de la válvula que satisface $F_{in} = F_{out}$.

$$\begin{aligned} F_{in} &= F_{out} \\ F_{in} &= \bar{k}\pi r_o^2 \sqrt{2g\bar{h}} \\ \bar{k} &= \frac{F_{in}}{\pi r_o^2 \sqrt{2g\bar{h}}} \\ \bar{k} &\approx 0,503 \end{aligned} \tag{4}$$

Podemos expresar 2 como $\dot{h} = f(h, k)$. Entonces, para linealizar, usamos la formula,

$$\begin{aligned} \dot{h} &= f(\bar{h}, \bar{k}) + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{\bar{h}, \bar{k}} (h - \bar{h}) + \left. \frac{\partial f}{\partial k} \right|_{\bar{h}, \bar{k}} (k - \bar{k}) \\ \dot{h} &= \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{\bar{h}, \bar{k}} (h - \bar{h}) + \left. \frac{\partial f}{\partial k} \right|_{\bar{h}, \bar{k}} (k - \bar{k}) \end{aligned} \tag{5}$$

Usé Matlab para obtener las diferenciales,

```
1 syms h k
2
3 h_bar = 0.6; %punto de trabajo
4 k_bar = F_in / (a*sqrt(2*9.81*h_bar));
5
6 F_out = k*a*sqrt(2*g);
7
8 f = (F_in - F_out*sqrt(h)) / (pi * ((h^2)/3 + 2*r_0*h/sqrt(3) +
   r_0^2));
9
10 dfdh = diff(f, h);
11 dfdh_eval = double(vpa(subs(dfdh, [h, k], [h_bar, k_bar])));
12
13 dfdk = diff(f, k);
14 dfdk_eval = double(vpa(subs(dfdk, [h, k], [h_bar, k_bar])));
15
16 k_list = [0.05, 0.15, 0.30, 0.50, 0.90];
```

Listing 1: Código para obtener las diferenciales.

Entonces simulé el sistema lineal en Simulink mediante bloques.

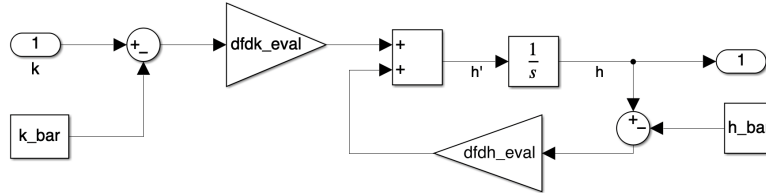


Figura 4: El sistema lineal en Simulink.

Al simular con los diferentes valores de la apertura de valvula, obtenemos el siguiente resultado:

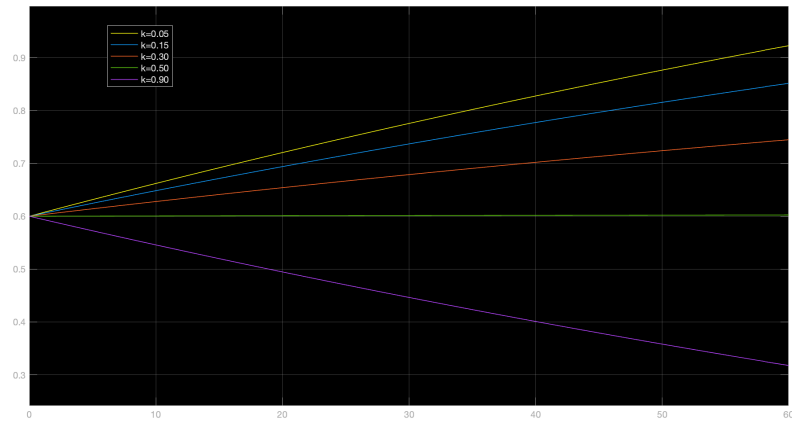


Figura 5: El sistema simulando con diferentes k .

Cuando la apertura de la valvula $k < \bar{k}$, el nivel de agua en el tanque sube, y si $k > \bar{k}$ el nivel de agua en el tanque baja. La línea verde representa $k \approx \bar{k}$, por lo tanto el nivel de agua será constante.

4. Ejercicio 3 - Discretización el modelo

4.1. Método ZOH

Tenemos que discretizar el sistema lineal. Podemos escribir el sistema linealizado 5 como,

$$\dot{h} = A(h - \bar{h}) + B(k - \bar{k}) \quad (6)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{\bar{h}, \bar{k}}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial k} \right|_{\bar{h}, \bar{k}}, \quad (7)$$

Desde [1] calculamos el modelo discreto del sistema como,

$$h[n+1] = A_d(h[n] - \bar{h}) + B_d(k[n] - \bar{k}) \quad (8)$$

donde

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = A^{-1}(A_d - I)B \quad (9)$$

y T_s es el tiempo del muestreo.

Simulé el sistema en simulink con mediante bloques,

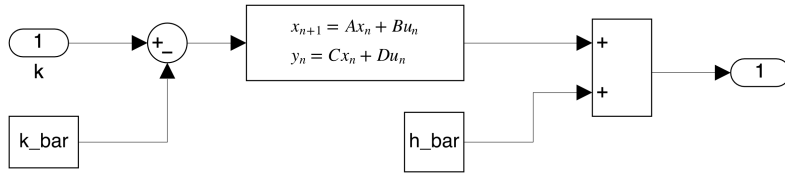


Figura 6: El sistema discreto de ZOH en Simulink.

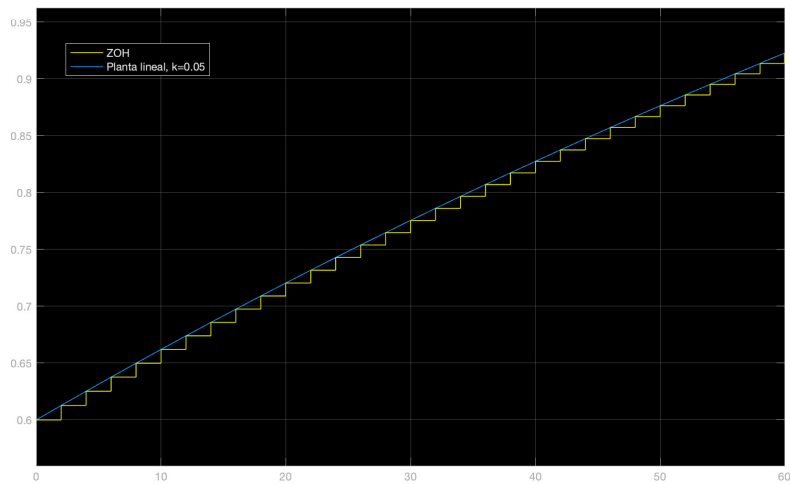


Figura 7: Simulación del modelo ZOH y la planta lineal, con $T_s = 2$.

4.2. Método Tustin

Las desviaciones desde el punto de trabajo se puede escribir como, $\tilde{h} = h - \bar{h}$ y $\tilde{k} = k - \bar{k}$. Entonces calculamos la función de transferencia desde 6,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{h}} &= A\tilde{h} + B\tilde{k} \\ \mathcal{L}\{\dot{\tilde{h}}\}(s) &= \mathcal{L}\{A\tilde{h} + B\tilde{k}\}(s) \\ s\tilde{H}(s) &= A\tilde{H}(s) + B\tilde{K}(s) \\ \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{K}(s)} &= \frac{B}{s - A} \\ G(s) &= \frac{B}{s - A}\end{aligned}\tag{10}$$

Desde [2] transformamos el sistema continuo a sistema discreto como,

$$\begin{aligned}G(z) &= G(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} \\ G(z) &= \frac{BT_s(z+1)}{(2 - AT_s)z - AT_s - 2}\end{aligned}\tag{11}$$

Usé matlab para obtenerlo,

```
1 G = tf([0 dfdk_eval], [1 -dfd_h_eval]);
2 Gz = c2d(G, Ts, 'Tustin');
3 [num,den] = tfdata(Gz, 'v');
```

Listing 2: Obtener la función de transferencia discreto con el método Tustin.

Le simulé y recibí,

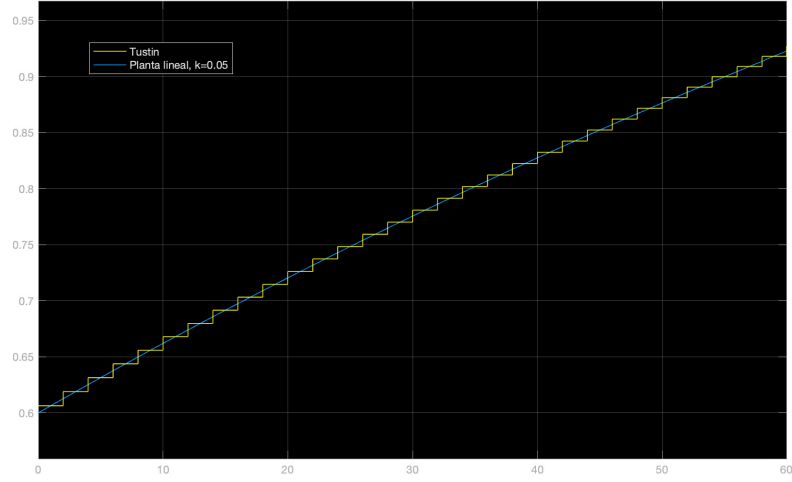


Figura 8: Simulación del modelo Tustin y la planta lineal, con $T_s = 2$

A partir de las figuras 7 y 8 podemos ver las diferencias de funcionamiento entre los dos métodos. El método ZOH asume que la señal de entrada permanece constante durante cada intervalo de muestreo. Por otro lado, el método de Tustin utiliza una transformación bilineal, que aproxima la derivada en el sistema continuo al promediar la diferencia entre muestras sucesivas. Por eso el ZOH se encuentra debajo del gráfico y el Tustin se encuentra en el gráfico.

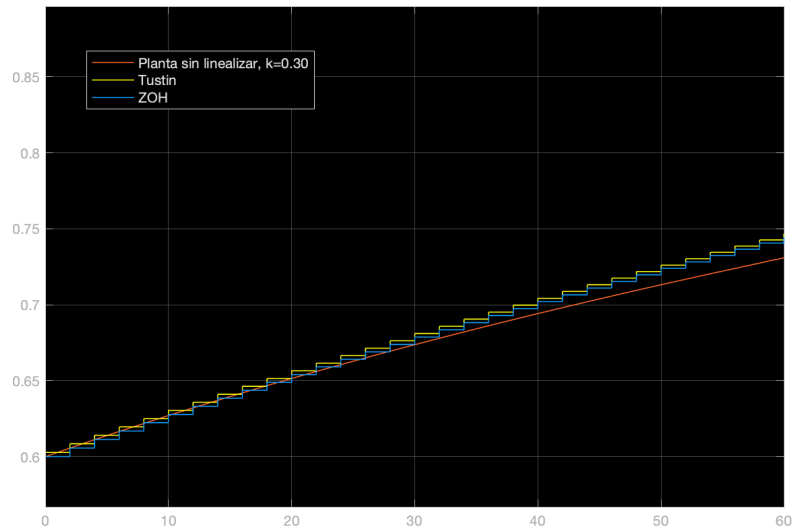


Figura 9: Simulación del modelo Tustin, ZOH y la planta sin linealizar

A partir de la figura 9 podemos ver que los sistemas discretos se desvían más de la planta sin linealizar a medida que nos alejamos del punto de trabajo.

Referencias

- [1] Discretization. <https://en.wikipedia.org/wiki/Discretization>.
Accedido: 20-10-2024.
- [2] Bilinear transform. https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_transform.
Accedido: 25-10-2024.