

1. *STR* Determinístico

1.	<i>STR</i> DETERMINÍSTICO	1
1.1.	PLANTEO DEL PROBLEMA	2
1.2.	PARTICULARIZACIONES DEL MÉTODO	12
1.2.1.	<i>Cancelación de Polos y Ceros</i>	12
1.2.2.	<i>Separación del Control de Perturbaciones y Seguimiento de Referencia</i>	15
1.2.3.	<i>Resumen de Equivalencias</i>	34
1.2.4.	<i>Controlador Adaptativo Directo</i>	35
1.1.1.	<i>Mejor Rechazo a Perturbaciones</i>	42
1.3.	PROCEDIMIENTO DE DISEÑO	46
1.4.	PARAMETRIZACIÓN DE YOULA-KUCERA	49
1.5.	PROCEDIMIENTO DE DISEÑO MODIFICADO	44
1.5.1.	<i>Cálculo de la ecuación diofantina</i>	50
1.6.	MODIFICACIÓN DEL ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN	59

1.1. Planteo del Problema

Proceso

$$A(q)y_k = B(q)(u_k + v_k)$$

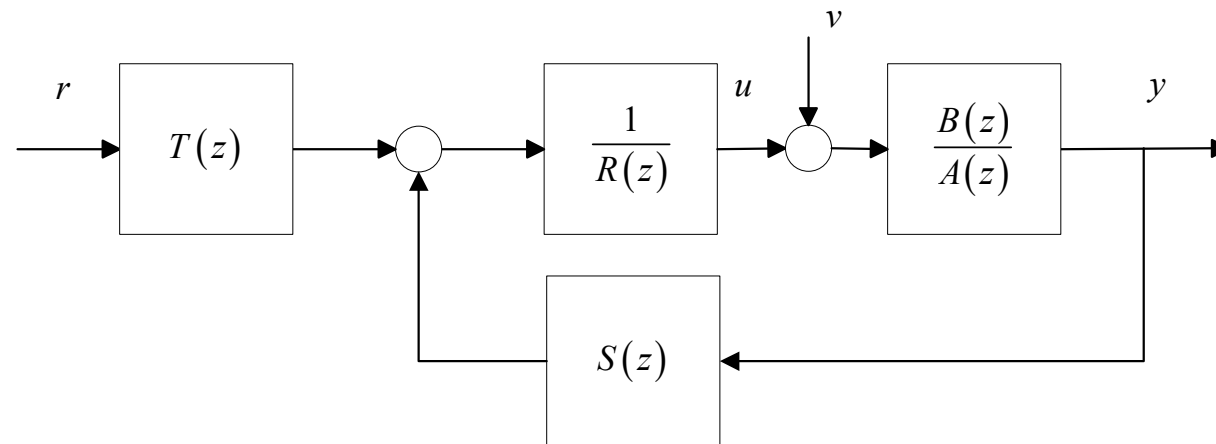
grado de B menor que grado de A .

A es mónico.

Ley de control lineal

$$R(q)u_k = T(q)r_k - S(q)y_k$$

R es mónico.



Relación entre las variables:

$$Y(q) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} R_c(q) + \frac{B(q)R(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} V(q)$$

$$U(z) = \frac{A(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} R_c(q) + \frac{B(q)S(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} V(q)$$

tiene una realimentación y un control en adelante

$$H_{ff}(q) = \frac{T(q)}{R(q)} \quad H_{fb}(q) = \frac{S(q)}{R(q)}$$

grado de S menor o igual que grado de R .

Condición de diseño: se fuerza el denominador para que valga

$$A_{lc} = A(q)R(q) + B(q)S(q) = A_m(q)$$

resultando una ecuación *Diofantina*

Siempre tiene solución si A y B no tienen raíces comunes.

Ejemplo 1 Ecuación Diofantina Sistema de Primer Orden

Caso 1

$$A = 1 + a_1 q^{-1}$$

$$B = b_1 q^{-1}$$

$$AR + BS = (1 + a_1 q^{-1})R + b_1 q^{-1}S = A_{lc}$$

$$(1 + a_1 q^{-1})1 + b_1 q^{-1}s_0 = 1 + a_{lc1} q^{-1}$$

$$1 + (a_1 + b_1 s_0) q^{-1} = 1 + a_{lc1} q^{-1}$$

$$s_0 = \frac{1}{b_1} (a_{lc1} - a_1)$$

Cálculo de T para que tenga ganancia unitaria

$$T = t_0$$

$$Y(q) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} R_c(q) = \frac{(b_1 q^{-1}) t_0}{(1 + a_1 q^{-1})1 + (b_1 q^{-1}) \frac{1}{b_1} (a_{lc1} - a_1)} R_c(q)$$

$$\frac{b_1 t_0}{1 + a_1 + a_{lc1} - a_1} = 1$$

$$t_0 = \frac{1 + a_{lc1}}{b_1} = \frac{A_{lc}(1)}{B(1)}$$

La ley de control resulta

$$u_k = t_0 r_k - s_0 y_k$$

Caso 2

$$A = 1 + a_1 q^{-1}$$

$$B = b_1 q^{-1}$$

$$AR + BS = (1 + a_1 q^{-1})R + b_1 q^{-1}S = A_{lc}$$

$$(1 + a_1 q^{-1})(1 + r_1 q^{-1}) + b_1 q^{-1} s_0 = 1 + a_{lc1} q^{-1} + a_{lc2} q^{-2}$$

$$1 + (a_1 + r_1 + b_1 s_0) q^{-1} + a_1 r_1 q^{-2} = 1 + a_{lc1} q^{-1} + a_{lc2} q^{-2}$$

$$s_0 = \frac{1}{b_1} \left(a_{lc1} - a_1 - \frac{a_{lc2}}{a_1} \right)$$

$$r_1 = \frac{a_{lc2}}{a_1}$$

Cálculo de T para que tenga ganancia unitaria

$$T = \frac{A_{lc}(1)}{B(1)} = t_0$$

$$\begin{aligned} Y(q) &= \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} R_c(q) = \\ &= \frac{(b_1 q^{-1}) t_0}{\left((1 + a_1 q^{-1}) \left(1 + \frac{a_{lc2}}{a_1} \right) + (b_1 q^{-1}) \frac{1}{b_1} \left(a_{lc1} - a_1 - \frac{a_{lc2}}{a_1} \right) \right)} R_c(q) \end{aligned}$$

$$\frac{b_1 t_0}{1 + a_{lc1} + a_{lc2}} = 1$$

$$t_0 = \frac{1 + a_{lc1} + a_{lc2}}{b_1}$$

La ley de control resulta

$$u_k = t_0 r_k - s_0 y_k - r_1 u_{k-1}$$

Caso 3

$$A = 1 + a_1 q^{-1}$$

$$B = b_1 q^{-1}$$

$$AR + BS = (1 + a_1 q^{-1})R + b_1 q^{-1}S = A_{lc}$$

Agregado de efecto integral

$$R = 1 - q^{-1}$$

$$S = s_0 + s_1 q^{-1}$$

$$(1 + a_1 q^{-1})(1 - q^{-1}) + b_1 q^{-1}(s_0 + s_1 q^{-1}) = 1 + a_{lc1} q^{-1} + a_{lc2} q^{-2}$$

$$1 + (a_1 - 1 + b_1 s_0) q^{-1} + (b_1 s_1 - a_1) q^{-2} = 1 + a_{lc1} q^{-1} + a_{lc2} q^{-2}$$

$$s_0 = \frac{1}{b_1} (a_{lc1} - a_1 + 1)$$

$$s_1 = \frac{1}{b_1} (a_{lc2} + a_1)$$

Cálculo de T para que tenga ganancia unitaria

$$T = t_0$$

$$\begin{aligned} Y(q) &= \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} R_c(q) = \\ &= \frac{(b_1 q^{-1}) t_0}{(1 + a_1 q^{-1})(1 - q^{-1}) + (b_1 q^{-1}) \left(\frac{1}{b_1} (a_{lc1} - a_1 + 1) + \frac{1}{b_1} (a_{lc2} + a_1) q^{-1} \right)} R_c(q) \end{aligned}$$

$$\frac{b_1 t_0}{a_{lc1} - a_1 + 1 + a_{lc2} + a_1} = 1$$

$$t_0 = \frac{1 + a_{lc1} + a_{lc2}}{b_1}$$

La ley de control resulta

$$u_k = u_{k-1} + t_0 r_k - s_0 y_k - s_1 y_{k-1}$$

Ejemplo 2 Ecuación Diofantina

$$A = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}$$

$$B = b_1q^{-1} + b_2q^{-2}$$

$$AR + BS = \left(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}\right)R + \left(b_1q^{-1} + b_2q^{-2}\right)S = A_{lc}$$

$$\left(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}\right)\left(1 + r_1q^{-1}\right) + \left(b_1q^{-1} + b_2q^{-2}\right)\left(s_0 + s_1q^{-1}\right) = 1 + a_{lc1}q^{-1} + a_{lc2}q^{-2} + a_{lc3}q^{-3}$$

$$1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + r_1q^{-1} + r_1a_1q^{-2} + r_1a_2q^{-3} + s_0b_1q^{-1} + s_0b_2q^{-2} + s_1b_1q^{-2} + s_1b_2q^{-3}$$

$$= 1 + a_{lc1}q^{-1} + a_{lc2}q^{-2} + a_{lc3}q^{-3}$$

$$1 + \left(a_1 + r_1 + s_0b_1\right)q^{-1} + \left(a_2 + r_1a_1 + s_0b_2 + s_1b_1\right)q^{-2} + \left(r_1a_2 + s_1b_2\right)q^{-3} = 1 + a_{lc1}q^{-1} + a_{lc2}q^{-2} + a_{lc3}q^{-3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{lc1} - a_1 \\ a_{lc2} - a_2 \\ a_{lc3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2 Misma Planta Controlador de Mayor Orden

$$A = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}$$

$$B = b_1q^{-1} + b_2q^{-2}$$

$$AR + BS = (1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2})R + (b_1q^{-1} + b_2q^{-2})S = A_{lc}$$

$$(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2})(1 + r_1q^{-1} + r_2q^{-2}) + (b_1q^{-1} + b_2q^{-2})(s_0 + s_1q^{-1}) = 1 + a_{lc1}q^{-1} + a_{lc2}q^{-2} +$$

$$1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + r_1q^{-1} + r_1a_1q^{-2} + r_1a_2q^{-3} + r_2q^{-2} + r_2a_1q^{-3} + r_2a_2q^{-4} + s_0b_1q^{-1} + s_0b_2q^{-2} +$$

$$= 1 + a_{lc1}q^{-1} + a_{lc2}q^{-2} + a_{lc3}q^{-3} + a_{lc4}q^{-4}$$

$$1 + (a_1 + r_1 + s_0b_1)q^{-1} + (a_2 + r_1a_1 + r_2 + s_0b_2 + s_1b_1)q^{-2} + (r_1a_2 + r_2a_1 + s_1b_2)q^{-3} + r_2a_2q^{-4}$$

$$= 1 + a_{lc1}q^{-1} + a_{lc2}q^{-2} + a_{lc3}q^{-3} + a_{lc4}q^{-4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{lc1} - a_1 \\ a_{lc2} - a_2 \\ a_{lc3} \\ a_{lc4} \end{bmatrix}$$

1.2. Particularizaciones del Método

1.2.1. Cancelación de Polos y Ceros

Se pueden cancelar polos y ceros suficientemente alejados del uno.

Sean los polinomios

$$A = A^+ A^- \quad [1.1]$$

$$B = B^+ B^-$$

donde A^+ y B^+ son los factores a cancelar, mónicos y estables.

el controlador resultante será

$$R = B^+ \bar{R}$$

$$S = A^+ \bar{S}$$

$$T = A^+ \bar{T}$$

el polinomio característico en lazo cerrado será

$$A_{lc} = AR + BS = A^+ B^+ (A^- \bar{R} + B^- \bar{S}) = A^+ B^+ \bar{A}_{lc}$$

los polinomios A^+ y B^+ son factores del polinomio en lazo cerrado

Haciendo la factorización

$$A_{lc} = A_c A_o$$

se toma

$$A_c = B^+ \bar{A}_c$$

$$A_o = A^+ \bar{A}_o$$

cancelando se obtiene

$$\bar{A}_{lc} = A^- \bar{R} + B^- \bar{S} = \bar{A}_c \bar{A}_o$$

El mínimo regulador causal se obtiene encontrando la única solución para el polinomio que cumple $\text{grado}(\bar{S}) < \text{grado}(A^-)$

La ley de control se escribe

$$B^+ \bar{R} u = A^+ \bar{T} r - A^+ \bar{S} y$$

o sea

$$u = \frac{A^+}{B^+} \left(\frac{\bar{T}}{\bar{R}} r - \frac{\bar{S}}{\bar{R}} y \right)$$

se cancelan los polos y ceros de la planta y se los ubica en otra parte como si no existieran.

La relación referencia-salida es

$$\frac{y}{r_c} = \frac{BT}{A_{lc}} = \frac{t_0 B^+ B^- A_0}{A_c A_0} = \frac{t_0 B^-}{\bar{A}_c}$$

se deben cancelar solo los modos estables.

Se define una zona en donde sí se pueden cancelar ceros.

En resumen, resulta:

$$\text{Sin cancelación: } y = \frac{B^+ B^- \bar{T}}{A^+ A^- \bar{R} + B^+ B^- \bar{S}} r + \frac{B^- B^+ \bar{R}}{A^+ A^- \bar{R} + B^+ B^- \bar{S}} v$$

$$\text{Con cancelación: } y = \frac{B^- \bar{T}}{A^- \bar{R} + B^- \bar{S}} r + \frac{B^- B^+ \bar{R}}{A^+ (A^- \bar{R} + B^- \bar{S})} v$$

$$u = \frac{A^+}{B^+} \left(\frac{\bar{T}}{\bar{R}} r - \frac{\bar{S}}{\bar{R}} y \right) + \frac{B^- \bar{S}}{A^- \bar{R} + B^- \bar{S}} v = \frac{A^+ A^- \bar{T}}{B^+ (A^- \bar{R} + B^- \bar{S})} r + \frac{B^- \bar{S}}{A^- \bar{R} + B^- \bar{S}} v$$

1.2.2. Separación del Control de Perturbaciones y Seguimiento de Referencia

Sea la respuesta deseada

$$y_m = H_m r = \frac{B_m}{A_m} r$$

para tener un seguimiento perfecto, B^- tiene que ser factor de B_m ya que no se pueden cancelar esos ceros.

Por lo tanto

$$B_m = \bar{B}_m B^-$$

Introduciendo

$$R = A_m B^+ \bar{R}$$

$$S = A_m A^+ \bar{S}$$

$$T = \bar{B}_m \bar{A}_{lc} A^+$$

La ley de control resulta

$$u = \frac{A^+}{B^+} \left(\frac{\bar{B}_m \bar{A}_{lc}}{A_m \bar{R}} r - \frac{\bar{S}}{\bar{R}} y \right)$$

Además, se cumple la ecuación

$$\bar{A}_{lc} = A^- \bar{R} + B^- \bar{S}$$

y

$$\frac{\bar{B}_m \bar{A}_{lc}}{A_m \bar{R}} = \frac{\bar{B}_m (A^- \bar{R} + B^- \bar{S})}{A_m \bar{R}} = \frac{\bar{B}_m A^-}{A_m} + \frac{\bar{B}_m B^- \bar{S}}{A_m \bar{R}} = \frac{B_m A^-}{A_m B^-} + \frac{B_m \bar{S}}{A_m \bar{R}}$$

con lo que la ley de control se rescribe

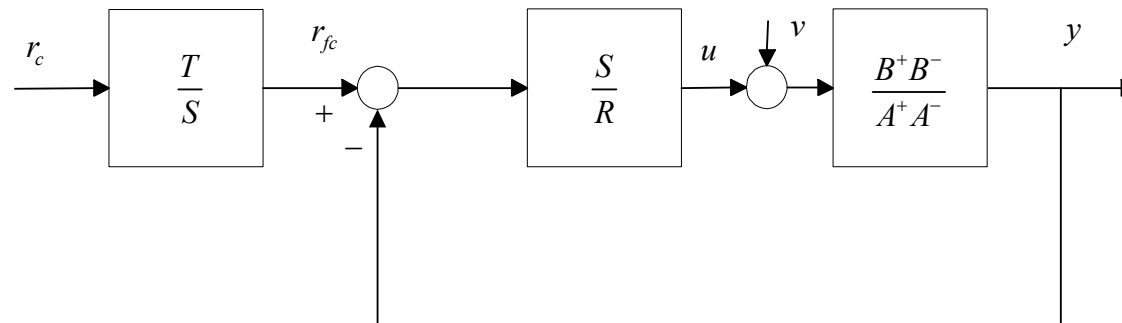
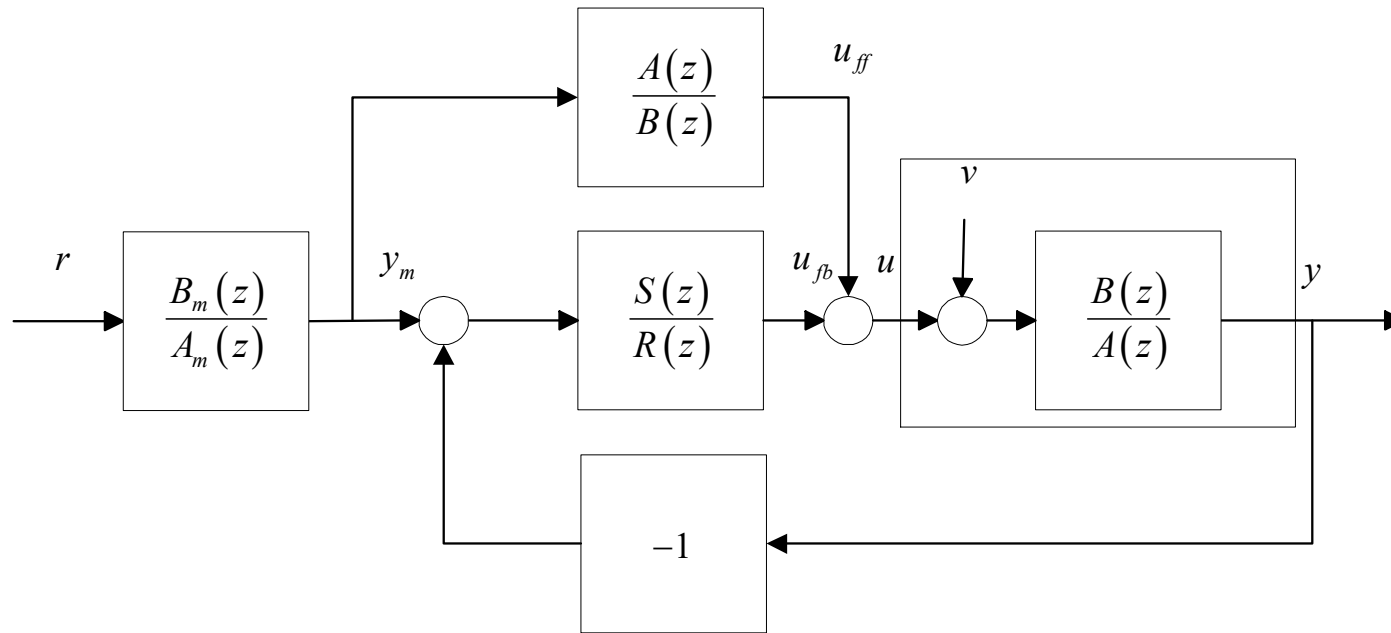
$$u = \frac{B_m A}{A_m B} r + \frac{A^+ \bar{S}}{B^+ \bar{R}} (y_m - y)$$

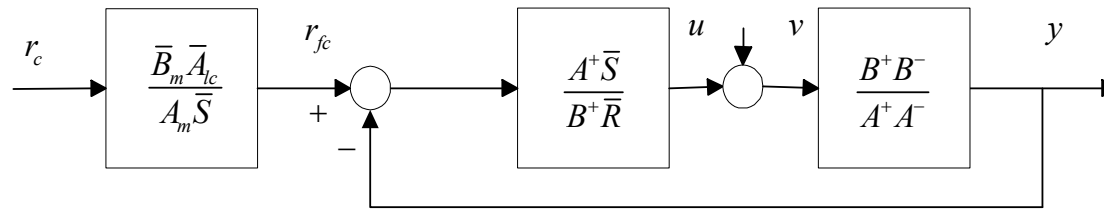
tiene dos componentes, una en adelante con función de transferencia

$$H_{ff} = \frac{B_m A}{A_m B} = \frac{\bar{B}_m A}{A_m B^+}$$

y una realimentación proporcional al error entre la salida del modelo y la salida real, con función de transferencia

$$H_{fb} = \frac{A^+ \bar{S}}{B^+ \bar{R}}$$





En resumen, resulta:

$$y = \frac{BT}{AR + BS} r + \frac{BR}{AR + BS} v = \frac{B^- \bar{B}_m}{A_m} r + \frac{B \bar{R}}{A^+ (A^- \bar{R} + B^- \bar{S})} v$$

$$u = \frac{A^+}{B^+} \left(\frac{\bar{B}_m \bar{A}_{lc}}{A_m \bar{R}} r - \frac{\bar{S}}{\bar{R}} y \right) + \frac{B^- \bar{S}}{A_m (A^- \bar{R} + B^- \bar{S})} v = \frac{AT}{AR + BS} r + \frac{BS}{AR + BS} v = \frac{\bar{B}_m A}{A_m B^+} r + \frac{1}{A_m}$$

Ejemplo 1.1. *Motor con Cancelación de Ceros*

el motor es

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

que discretizado, resulta

$$G(q) = \frac{K(q-b)}{(q-1)(q-a)} \quad [1.2]$$

con

$$K = e^{-T} - 1 + T$$

$$a = e^{-T} \quad [1.3]$$

$$b = 1 - \frac{T(1 - e^{-T})}{e^{-T} - 1 + T}$$

el cero es real negativo

para $T = 0,5\text{seg}$

$$G(q) = \frac{0,1065q + 0,0902}{q^2 - 1,6065q + 0,6065} \quad [1.4]$$

el modelo a seguir es

$$G_m(q) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)} = \frac{q(1 + p_1 + p_2)}{q^2 + p_1q + p_2} = \frac{q(1 + p_1 + p_2)}{(q - p_m)^2} \quad [1.5]$$

no tiene el cero de lazo abierto. Se debe cancelar

la función de transferencia en lazo abierto tiene un cero en b . Se factoriza B como

$$B^+ = q - b$$

$$B^- = K$$

$$A^+ = 1$$

$$A^- = A$$

por lo tanto

$$\bar{B}_m = \frac{B_m}{K} = \frac{1 + p_1 + p_2}{K}$$

Se hace

$$R = A_m B^+ \bar{R}$$

$$S = A_m A^+ \bar{S} \quad [1.6]$$

$$T = \bar{B}_m \bar{A}_{lc} A^+$$

La función de transferencia en lazo cerrado resulta

$$y = \frac{BT}{AR + BS} r + \frac{BR}{AR + BS} v = \frac{\bar{B}_m B^-}{A_m} r + \frac{B\bar{R}}{A^+ (A^- \bar{R} + B^- \bar{S})} v \quad [1.7]$$

La ley de control resulta

$$Ru = Tr - Sy$$

$$u = \frac{\bar{B}_m \bar{A}_{lc} A^+}{A_m B^+ \bar{R}} r - \frac{A_m A^+ \bar{S}}{A_m B^+ \bar{R}} y = \frac{\bar{B}_m \bar{A}_{lc} A^+}{A_m B^+ \bar{R}} r_c - \frac{A^+ \bar{S}}{B^+ \bar{R}} y \quad [1.8]$$

Se elige \bar{R} de orden cero y S de orden uno.

$$\bar{A}_{lc} = q^2 + \bar{a}_1 q + \bar{a}_2 = A^- \bar{R} + B^- \bar{S}$$

$$(q-1)(q-a)r_0 + K(s_0 q + s_1) = q^2 + \bar{a}_1 q + \bar{a}_2 \quad [1.9]$$

de donde,

$$r_0 = 1 \quad s_0 = \frac{1 + a + \bar{a}_d}{K} \quad s_1 = \frac{\bar{a}_2 - a}{K} \quad [1.10]$$

Además

$$T(q) = \bar{B}_m(q) = \frac{q(1 + p_1 + p_2)}{K} = t_0 q \quad [1.11]$$

$$T = \bar{B}_m \bar{A}_{lc} A^+ = \bar{B}_m \bar{A}_c = \frac{1 + p_1 + p_2}{K} (q^2 + \bar{a}_1 q + \bar{a}_2)$$

Si la referencia es constante se puede hacer

$$T = t_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{K} (1 + \bar{a}_d + \bar{a}_2) \quad [1.12]$$

La ley de control es

$$Ru = Tr - Sy$$

$$A_m(q - b)u = t_0 r - A_m(s_0 q + s_1)y$$

$$u = \frac{\bar{S}}{B^+ \bar{R}} \left(\frac{\bar{B}_m \bar{A}_{lc}}{A_m \bar{S}} r - y \right) = \frac{\bar{B}_m \bar{A}_{lc}}{B^+ \bar{R} A_m} r - \frac{\bar{S}}{B^+ \bar{R}} y \quad [1.13]$$

$$B^+ \bar{R} A_m u = \bar{B}_m \bar{A}_{lc} r - \bar{S} A_m y$$

$$(q - b)(q^2 + p_1q + p_2)u = t_0r - (q^2 + p_1q + p_2)(s_0q + s_1)y \quad [1.14]$$

$$\begin{aligned} & \left[q^3 + (p_1 - b)q^2 + (p_2 - bp_1)q - bp_2 \right] u = t_0r - \\ & - \left[s_0q^3 + (s_0p_1 + s_1)q^2 + (s_0p_2 + s_1p_1)q + s_1p_2 \right] y \end{aligned} \quad [1.15]$$

$$\begin{aligned} u_k = & - (p_1 - b)u_{k-1} - (p_2 - bp_1)u_{k-2} + bp_2u_{k-3} \\ & + t_0r - s_0y_k - (s_0p_1 + s_1)y_{k-1} - (s_0p_2 + s_1p_1)y_{k-2} - s_1p_2y_{k-3} \end{aligned}$$

Ganancia Estática

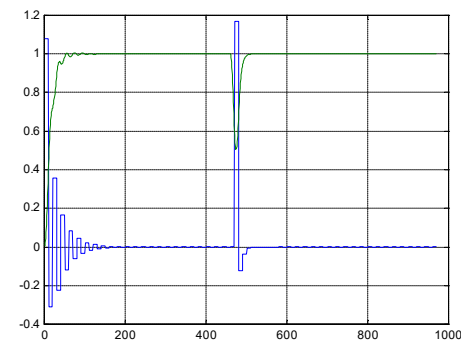
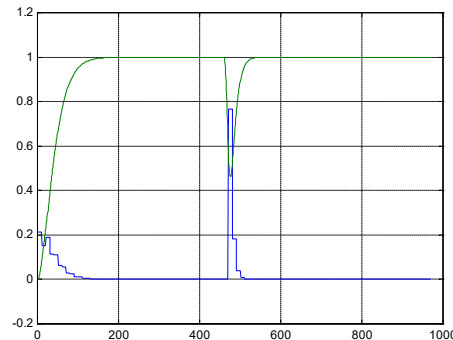
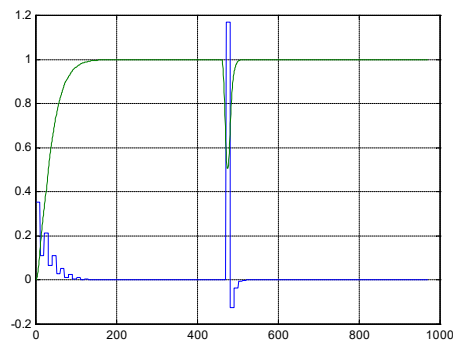
$$y = \frac{BT}{AR + BS} r + \frac{BR}{AR + BS} v \quad [1.16]$$

Se aplica un escalón de $r = 1$ y $v = -0,2$

$$y = \frac{B(1)T(1)}{A(1)R(1) + B(1)S(1)} 1 - \frac{B(1)R(1)}{A(1)R(1) + B(1)S(1)} 0,2 \quad [1.17]$$

$$y = t_0 \frac{B(1)}{A(1) + B(1)S(1)} 1 - \frac{B(1)}{A(1) + B(1)S(1)} 0,2 \quad [1.18]$$

Si no se adapta $y_{\infty} = 0,5656$



Las dos primeras figuras corresponden a igual modelo, pero diferente comportamiento en lazo cerrado. En la tercera se varía el modelo.

La oscilación en el control es por la cancelación del cero real negativo.

Decrece aumentando el período de muestreo.

Ejemplo 1.2. *Motor sin Cancelación de Ceros*

el cero aparece en lazo cerrado

$$H_m(z) = \frac{1 + p_1 + p_2}{1 - b} \frac{z - b}{z^2 + p_1 z + p_2} \quad [1.19]$$

$$B^+ = 1$$

$$B^- = K(z - b) \quad [1.20]$$

por lo tanto

$$\bar{B}_m = \frac{1 + p_1 + p_2}{K(1 - b)} \quad [1.21]$$

el observador debe cumplir

$$\text{grad}(A_0) \geq 2\text{grad}(A) - \text{grad}(A_m) - \text{grad}(B^+) - 1 = 1 \quad [1.22]$$

el observador se puede elegir como

$$A_o(z) = z \quad [1.23]$$

Los grados de \bar{R} y S deben satisfacer

$$\begin{aligned} grad(\bar{R}) &= grad(A_0) + grad(A_m) - grad(A) = 1 \\ grad(S) &= grad(A) - 1 = 1 \end{aligned} \quad [1.24]$$

Se elige \bar{R} de orden cero y S de orden uno.

$$A_{lc} = A(q)R(q) + B(q)S(q) = A_m(q) \quad [1.25]$$

$$(z-1)(z-a)(z+r_1) + K(z-b)(s_0z + s_1) = z^3 + p_1z^2 + p_2z \quad [1.26]$$

Se calcula la igualdad para $z=b$, $z=1$ y $z=a$ obteniendo tres ecuaciones

$$r_1 = -b + \frac{b(b^2 + p_1b + p_2)}{(b-1)(b-a)}$$

$$K(1-b)(s_0 + s_1) = 1 + p_1 + p_2 \quad [1.27]$$

$$K(a-b)(s_0a + s_1) = a^3 + p_1a^2 + p_2a$$

de donde se determinan los parámetros

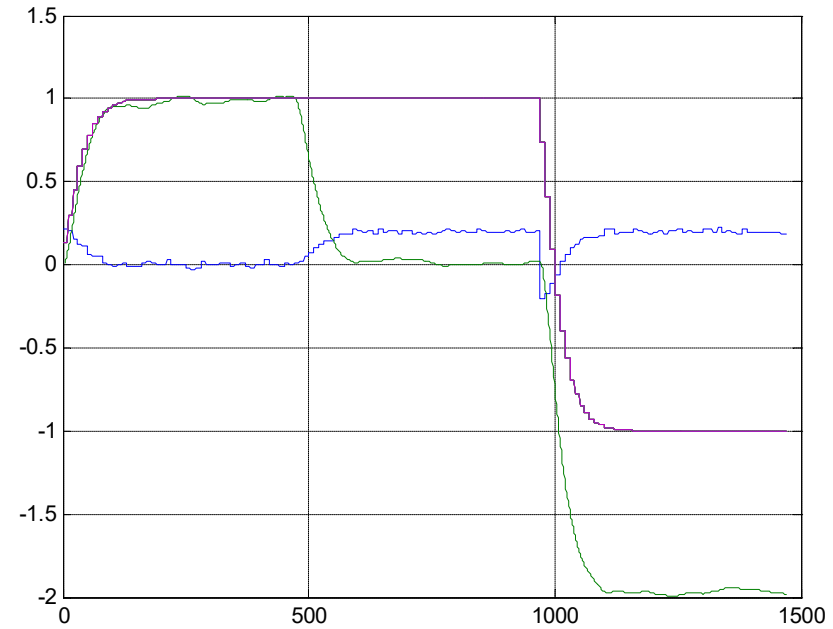
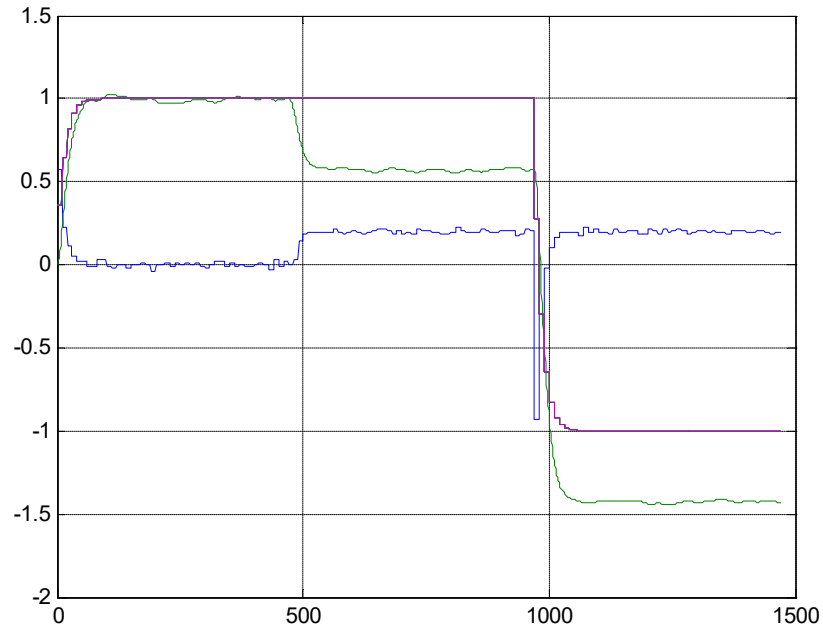
Además

$$T(z) = A_0(z)\bar{B}_m(z) = z \frac{1 + p_1 + p_2}{K(1-b)} = t_0z \quad [1.28]$$

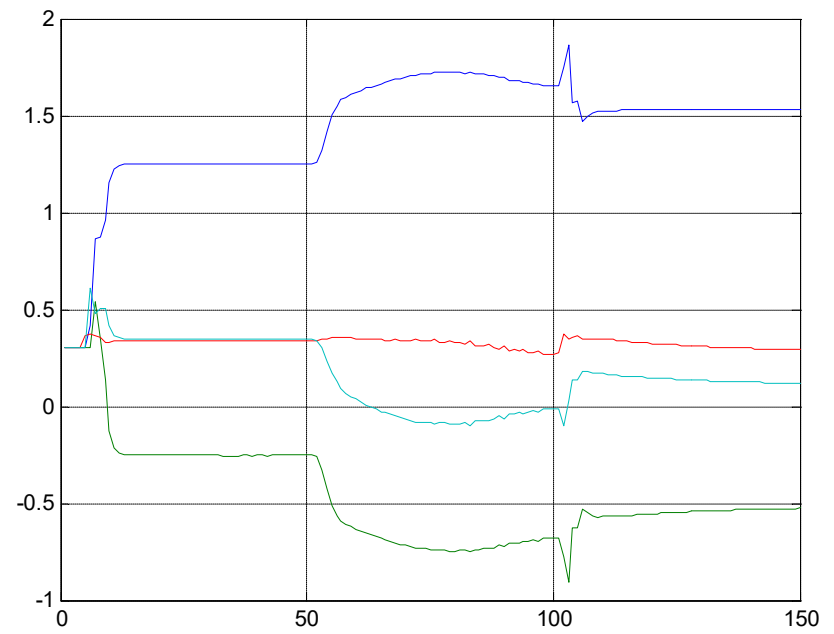
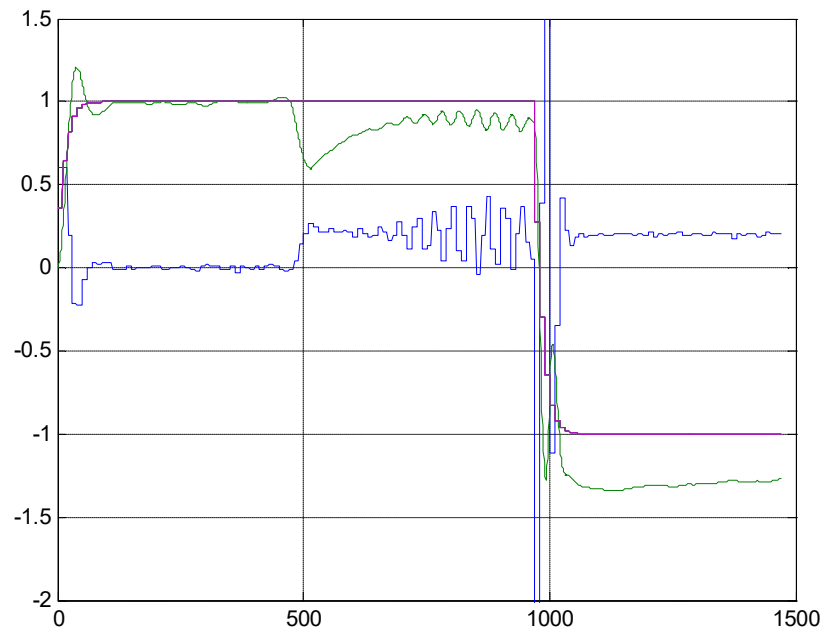
La ley de control es

$$R(q)u_k = T(q)r_k - S(q)y_k \quad [1.29]$$

$$u_k = t_0 r_k - s_0 y_k - s_1 y_{k-1} - r_1 u_{k-1} \quad [1.30]$$



Caso Adaptativo



Ganancia Estática

$$y = \frac{BT}{AR + BS}r + \frac{BR}{AR + BS}v \quad [1.31]$$

Se aplica un escalón de $r = 1$ y $v = -0,2$

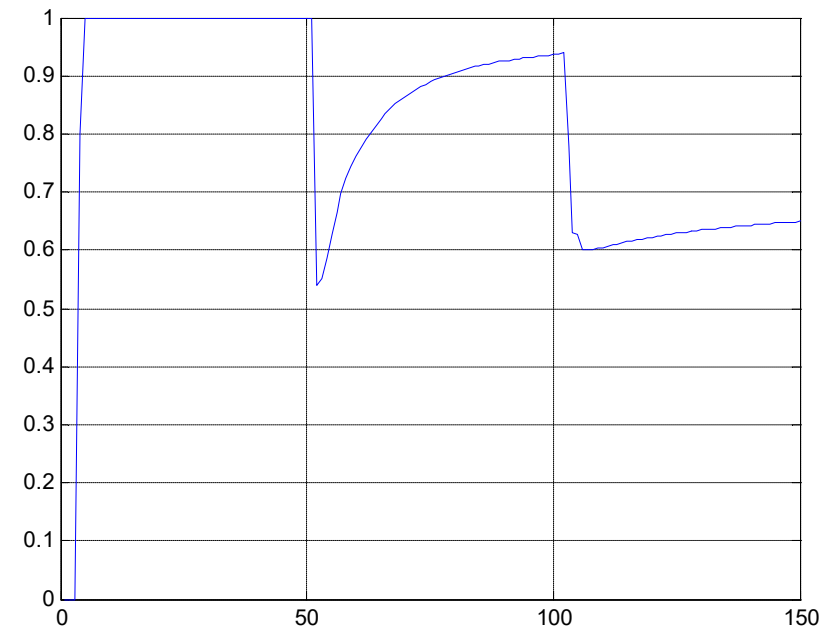
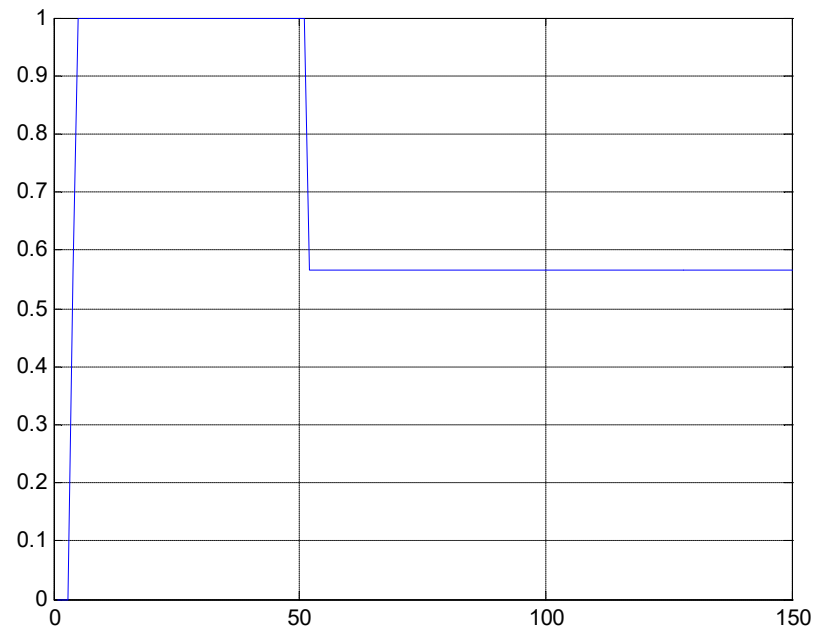
$$y = \frac{B(1)T(1)}{A(1)R(1) + B(1)S(1)}1 - \frac{B(1)R(1)}{A(1)R(1) + B(1)S(1)}0,2 \quad [1.32]$$

Si no se adapta $y_{\infty} = 0,5656$

Ganancia estática:

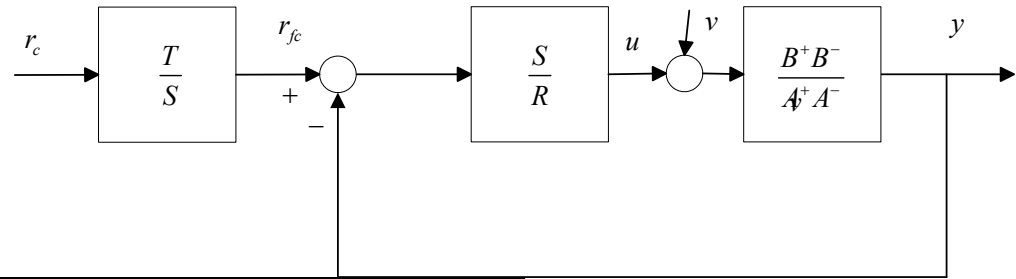
Primera figura: si no se adapta.

Segunda figura: adaptando



Caso Adaptativo

$$\hat{G}(q) = \frac{\hat{K}(q - \hat{b})}{(q - 1)(q - \hat{a})}$$



Polos reales	1.0000	0.6065	
Cero real	-0.8467		
Polos estim	0.9139	0.8632	
Cero estim	-0.2389		
Polos R reales	-0.8467	0.6 (modelo)	0.6 (modelo)
Polos S reales	0.5132	0.6 (modelo)	0.6 (modelo)
Polos R estim	-0.2389	0.6	0.6
Polos S estim	0.5879	0.6	0.6

$$AR + BS = A_m A^+ B^+ (A^- \bar{R} + B^- \bar{S})$$

1.2.3. Resumen de Equivalencias

$$Ay = Bu \quad A = A^+ A^- \quad B = B^+ B^-$$

$$u = \frac{1}{R} (Tr - Sy)$$

$$M = \frac{B_m}{A_m} \quad B_m = \bar{B} B^-$$

$$\bar{A}_{lc} = A^- \bar{R} + B^- \bar{S} \quad A_{lc} = \bar{A}_{lc} A_m A^+ B^+$$

$$R = A_m B^+ \bar{R}$$

$$S = A_m A^+ \bar{S}$$

$$T = \bar{B}_m \bar{A}_{lc} A^+$$

$$y = \frac{BT}{AR + BS} r + \frac{BR}{AR + BS} v = \frac{\bar{B}_m B^-}{A_m} r + \frac{B\bar{R}}{A^+ \bar{A}_{lc}} v$$

1.2.4. Controlador Adaptativo Directo

El método anterior se denomina Control Adaptativo *Indirecto*

Pasos:

En cada período de muestreo,

- Se identifican los a_i y los b_i
- Se calculan los polinomios R, S y T.

Una variante de este método es el Control Adaptativo *Directo*.

Idea básica:

Planta original en lazo abierto

$$Ay = Bu$$

$$A_{lc} = AR + BS \text{ es un dato}$$

$$ARy = BRu$$

$$ARy + BSy = BRu + BSy$$

$$(AR + BS)y = B(Ru + Sy)$$

$$A_{lc}y = B(Ru + Sy)$$

$$y = B \left(R \left(\frac{1}{A_{lc}} u \right) + S \left(\frac{1}{A_{lc}} y \right) \right)$$

$$y = B(Ru_f + Sy_f)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} r_0 \cdots r_l & s_0 \cdots s_l \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} u_{fk} \cdots u_{fk-l} & y_{fk} \cdots y_{fk-l} \end{bmatrix}$$

Caso Planta de Fase Mínima.

$$Ay = Bu$$

$$A^+A^-y = B^+B^-u$$

$$A^+A^-\bar{R}y = B^+B^-\bar{R}u$$

$$A^+A^-\bar{R}y + B^-A^+\bar{S}y = B^+B^-\bar{R}u + B^-A^+\bar{S}y$$

$$A^+\bar{A}_{lc}y = B^-\left(B^+\bar{R}u + A^+\bar{S}y\right)$$

$$R = A_m B^+ \bar{R}$$

$$S = A_m A^+ \bar{S}$$

$$T = \bar{B}_m \bar{A}_{lc} A^+$$

$$A^+\bar{A}_{lc}y = B^-\frac{1}{A_m}(Ru + Sy)$$

Como se pueden cancelar los ceros, $B^- = q^{-d}b_0 = q^{-d} \times cte$, $A^+ = 1$ y \bar{A}_{lc}, A_m son datos

(ese d no se conoce)

$$y = b_0 \frac{1}{\bar{A}_{lc} A_m} (Ru + Sy)$$

$$y = b_0 (Ru_f + Sy_f)$$

donde

$$u_f = \frac{1}{\bar{A}_{lc} A_m} u \quad y_f = \frac{1}{\bar{A}_{lc} A_m} y$$

Se identifica el sistema

$$y = \tilde{R}u_f + \tilde{S}y_f$$

El \tilde{R} estimado no necesariamente es mónico.

Se supone $\hat{\tilde{r}}_0 = \hat{b}_0 \hat{r}_0$. Lo que implica $\hat{b}_0 = \frac{1}{\hat{\tilde{r}}_0}$

$$\hat{R} = \frac{\hat{\tilde{R}}}{\hat{b}_0} \quad \hat{S} = \frac{\hat{\tilde{S}}}{\hat{b}_0}$$

No necesariamente llega al mismo R y S que en el cálculo, pero funciona...

Cómo encontrar T

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$y = \frac{BT}{AR + BS} r = \frac{b_0 B^+ T}{b_0 A_o A_m B^+} r = \frac{T}{A_o A_m} r$$

Para tener ganancia unitaria se elige

$$t_0 = A_o (1) A_m (1)$$

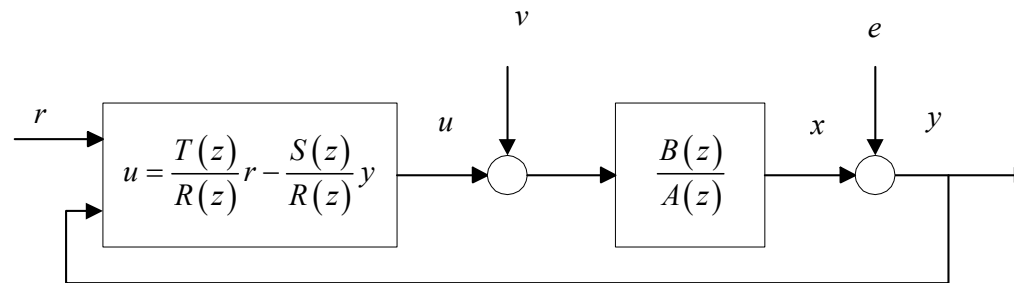
1.1.1. Mejor Rechazo a Perturbaciones

Ahora hay dos perturbaciones:

v a la entrada

e ruido de medición (salida)

Se diseña un regulador quedando como la figura



El sistema queda

$$Ax = B(u + v) \quad [1.33]$$

$$y = x + e$$

resolviendo

$$\begin{aligned}
x &= \frac{BT}{AR + BS}r + \frac{BR}{AR + BS}v - \frac{BS}{AR + BS}e \\
y &= \frac{BT}{AR + BS}r + \frac{BR}{AR + BS}v + \frac{AR}{AR + BS}e \quad [1.34] \\
u &= \frac{AT}{AR + BS}r + \frac{BS}{AR + BS}v - \frac{AS}{AR + BS}e
\end{aligned}$$

Si v es un escalón, B o R deben tener una raíz en 1 .

Si v es periódica, de período nT , B o R debe haber n raíces en 1 tal que

$$v_{k+n} - v_k = (q^n - 1)v_k = 0$$

Si v es una senoide de frecuencia ω_0 , B o R debe tener una dinámica tal que haga

$$y_k - 2 \cos(\omega_0 T) y_{k-1} + y_{k-2} = 0 \quad [1.35]$$

El ruido de medición tiene, generalmente, alta frecuencia.

No se quiere que influya en x

La frecuencia de Nyquist es la máxima frecuencia de interés y corresponde a $z = -1$.

Una forma de eliminar esta frecuencia es hacer que S tenga un término $z + 1$

R es para perturbaciones a la entrada

S es para perturbaciones a la salida.

Procedimiento de Diseño Modificado

Se puede modificar el procedimiento para tener en cuenta las perturbaciones.

Se supone conocida la característica de la perturbación.

La perturbación es:

$$A_d v = d$$

siendo d un impulso

Ejemplo: escalón

$$A_d = q - 1$$

En lazo cerrado,

$$y = \frac{BT}{AR + BS} r + \frac{BR}{(AR + BS) A_d} d$$

$$u = \frac{AT}{AR + BS} r - \frac{BS}{(AR + BS) A_d} d$$

La dinámica de la perturbación aparece en lazo cerrado

En general, A_d es inestable o está en el límite.

Si se quiere mantener acotada la salida, A_d debe ser factor de R

Esto puede hacer y finita, pero u infinita

Es lo que pasa con un PID.

1.3. Procedimiento de Diseño

Datos:

Se necesita:

$A(z)$, $B(z)$ sin factores comunes

polinomio característico en lazo cerrado deseado $A_{lc}(z)$

términos deseados en el regulador, $R_d(z)$ y $S_d(z)$

función de transferencia deseada $B_m(z) / A_m(z)$

Condición de Exceso de Polos

$$\text{grad}(A_m) - \text{grad}(B_m) \geq \text{grad}(A) - \text{grad}(B) \quad [1.36]$$

Condición de Seguimiento del Modelo

El factor B^- no debe ser cancelado por lo que se debe cumplir

$$B_m = B^- \tilde{B} \quad [1.37]$$

Condición de Grados de Polinomios

se debe cumplir

$$\text{grad}(A_{lc}) = 2\text{grad}(A) + \text{grad}(A_m) + \text{grad}(R_d) + \text{grad}(S_d) - 1 \quad [1.38]$$

Paso 1

Factorizar A y B como

$$A = A^+ A^- \quad [1.39]$$

$$B = B^+ B^-$$

donde A^+ y B^+ son los factores a cancelar.

Paso 2

Resolver la ecuación

$$A^- R_d \bar{R} + B^- S_d \bar{S} = \bar{A}_{lc} \quad [1.40]$$

para calcular \bar{R} y \bar{S}

Paso 3

la ley de control es

$$Ru = Tr - Sy \quad [1.41]$$

donde

$$\begin{aligned} R &= A_m B^+ R_d \bar{R} \\ S &= A_m A^+ S_d \bar{S} \\ T &= \bar{B}_m A^+ \bar{A}_{lc} \\ B_m &= \bar{B}_m B^- \end{aligned} \quad [1.42]$$

la característica en lazo cerrado es

$$A_{lc} = A^+ B^+ A_m \bar{A}_{lc} \quad [1.43]$$

La condición de grado surge de [1.40] ya que el mínimo regulador se obtiene con

$$\text{grad}(\tilde{S}) = \text{grad}(A^-) + \text{grad}(R_d) - 1 \quad [1.44]$$

por lo que, de [1.42]

$$\begin{aligned} \text{grad}(S) &= \text{grad}(A^-) + \text{grad}(A^+) + \text{grad}(A_m) + \text{grad}(R_d) + \text{grad}(S_d) - 1 \\ &= \text{grad}(A) + \text{grad}(A_m) + \text{grad}(R_d) + \text{grad}(S_d) - 1 \end{aligned} \quad [1.45]$$

como $\text{grad}(S) = \text{grad}(R)$, resulta [1.38]

1.4. Parametrización de Youla-Kucera

Teorema 1. Teorema de Youla-Kucera

Sea un sistema $\frac{B(z)}{A(z)}$ y $\frac{S^0(z)}{R^0(z)}$ un regulador que estabiliza la planta, entonces, todo regulador que estabiliza al sistema $\frac{B(z)}{A(z)}$ puede describirse como:

$$\frac{S(z)}{R(z)} = \frac{S^0(z) + Q(z)A(z)}{R^0(z) - Q(z)B(z)} \quad [1.46]$$

con $Q(z)$ estable

Demostración

Primero se debe demostrar que la planta, con el regulador [1.46] es estable, para lo que se introduce $Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, con lo que se puede escribir,

$$\frac{S}{R} = \frac{XS^0 + YA}{XR^0 - YB} \quad [1.47]$$

en lazo cerrado queda

$$AR + BS = A(XR^0 - YB) + B(XS^0 + YA) = X(AR^0 + BS^0) \quad [1.48]$$

dado que X y $AR^0 + BS^0$ son estables, el sistema lo será.

Para probar que todos los polinomios son estables, se considera un regulador S/R que estabiliza el sistema, dando una función característica

$$AR + BS = C \quad [1.49]$$

de donde, la ecuación [1.46] queda

$$SR^0 - QSB = RS^0 + QRA \quad [1.50]$$

por lo tanto

$$Q = \frac{SR^0 - RS^0}{AR + BS} = \frac{SR^0 - RS^0}{C} \quad [1.51]$$

que es estable ya que C lo es.

1.4.1. Cálculo de la ecuación diofantina

se considerar que se tiene una solución a la ecuación

$$AR^0 + BS^0 = A_{lc}^0 \quad [1.52]$$

Nuevo controlador con polinomios R y S

$$\begin{aligned} R &= XR^0 + YB \\ S &= XS^0 - YA \end{aligned} \quad [1.53]$$

Satisfacen la ecuación

$$AR + BS = XA_{lc}^0 \quad [1.54]$$

Si ya se obtuvo el controlador que satisface A_{lc}^0 , se puede obtener un nuevo controlador, con este método.

Si queremos que nuestro R tenga la forma

$$R = R'A_d$$

Elegimos X cualquier polinomio estable (van a ser los nuevos polos en lazo cerrado)

Ejemplo 1.3. *Acción Integral*

$$A_d = q - 1$$

Elegimos

$$X = q + x_0$$

El cálculo de R resulta

$$R = R'(q - 1) = XR^0 + YB$$

$$R'(q - 1) = (q + x_0)R^0 + y_0B$$

Haciendo $q = 1$,

$$y_0 = -\frac{(1 + x_0)R^0(1)}{B(1)}$$

El nuevo controlador resulta:

$$R = (q + x_0) R^0(q) - \frac{(1 + x_0) R^0(1)}{B(1)} B(q)$$

$$S = (q + x_0) S^0(q) + \frac{(1 + x_0) R^0(1)}{B(1)} A(q)$$

Ejemplo 1.4. *Control del Motor con Acción Integral*

Planta discretizada

$$G(q) = \frac{b_0 q + b_1}{q^2 + a_1 q + a_2} \quad [1.55]$$

El regulador calculado anteriormente era

$$R(q) = q + r_1 \quad [1.56]$$

$$S(q) = qs_0 + s_1 \quad [1.57]$$

$$T(q) = qt_0 \quad [1.58]$$

$$r_1 = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{b_1 \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^2 + p_1 \frac{b_1}{b_0} + p_2}{\left(\frac{b_1}{b_0} - 1 \right) \left(\frac{b_1}{b_0} - a_2 \right)} \quad [1.59]$$

$$k_1 = \frac{(1 + p_1 + p_2)}{b_0 \left(1 - \frac{b_1}{b_0} \right)} \quad k_2 = \frac{a_2^3 + p_1 a_2^2 + p_2 a_2}{b_0 \left(a_2 - \frac{b_1}{b_0} \right)} \quad [1.60]$$

$$s_0 = \frac{k_2 - k_1}{a_2 - 1} \quad s_1 = k_1 - s_0 \quad t_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_0 \left(1 - \frac{b_1}{b_0}\right)} \quad [1.61]$$

La ley de control era

$$u_k = t_0 r_k - s_0 y_k - s_1 y_{k-1} - r_1 u_{k-1} \quad [1.62]$$

Nuevo diseño:

$$R_i(q) = (q + x_1) R^0(q) - \frac{(1 + x_1) R^0(1) B(q)}{B(1)} \quad [1.63]$$

$$S_i(q) = (q + x_1) S^0(q) - \frac{(1 + x_1) R^0(1) A(q)}{B(1)}$$

$$R_i(q) = (q + x_1)(q + r_1) - \frac{(1 + x_1)(1 + r_1)}{(b_0 + b_1)} (b_0 q + b_1) \quad [1.64]$$

$$S_i(q) = (q + x_1)(q s_0 + s_1) - \frac{(1 + x_1)(1 + r_1)}{(b_0 + b_1)} (q^2 + a_1 q + a_2) \quad [1.65]$$

$$R_i(q) = q^2 + q r_{i1} + r_{i2} \quad [1.66]$$

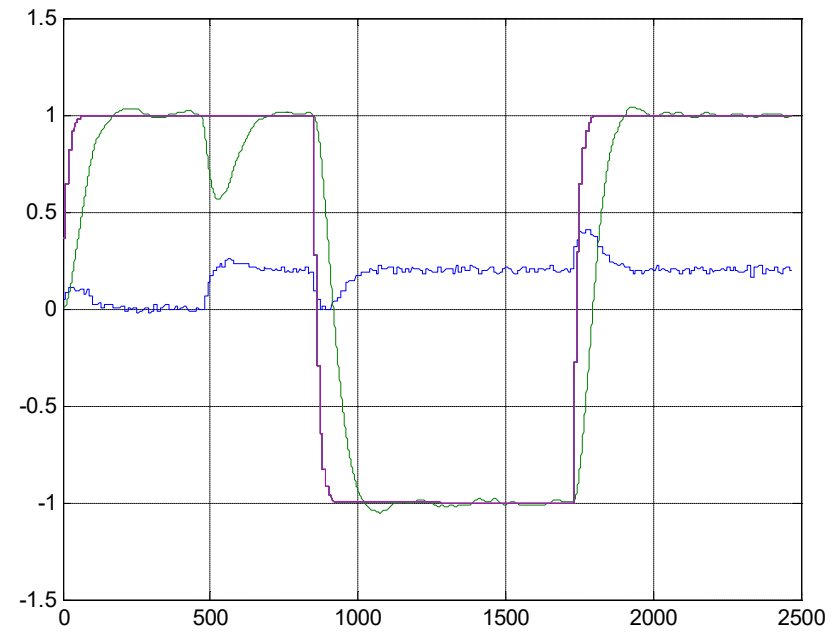
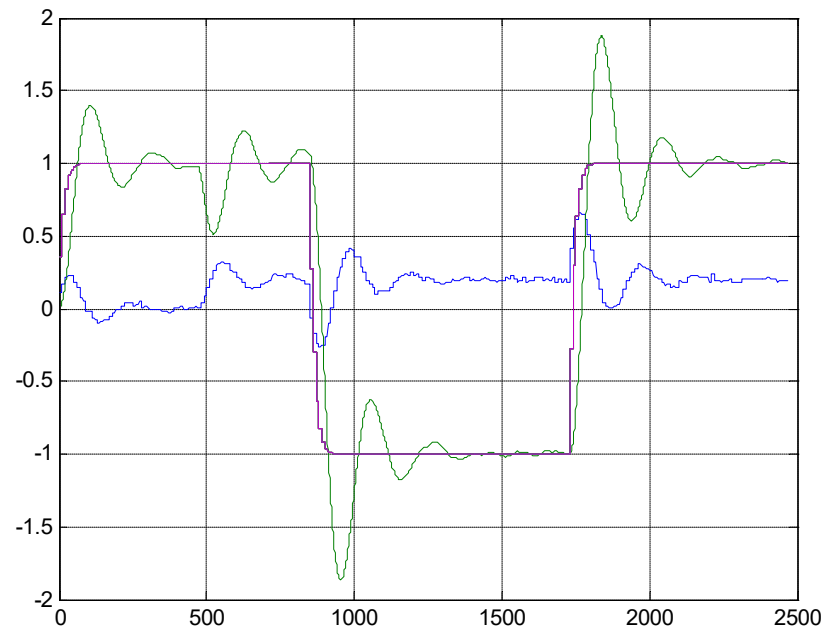
$$S_i(q) = q^2 s_{i0} + q s_{i1} + s_{i2} \quad [1.67]$$

$$S_i(q) = q^2 \left(s_0 - \frac{(1+x_1)(1+r_1)}{(b_0+b_1)} \right) + q \left(x_1 s_0 + s_1 - a_1 \frac{(1+x_1)(1+r_1)}{(b_0+b_1)} \right) + x_1 s_1 - a_2 \frac{(1+x_1)(1+r_1)}{(b_0+b_1)} \quad [1.68]$$

Nueva ley de control:

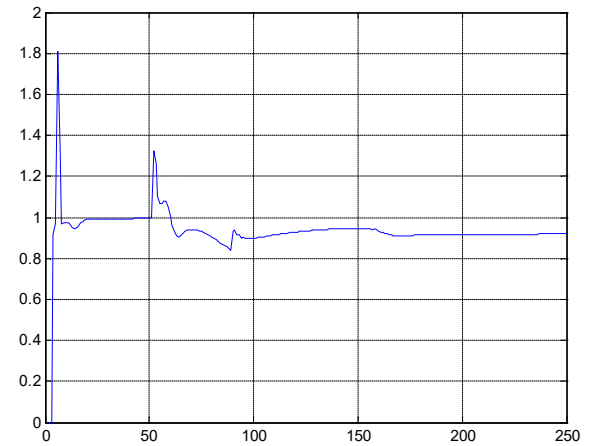
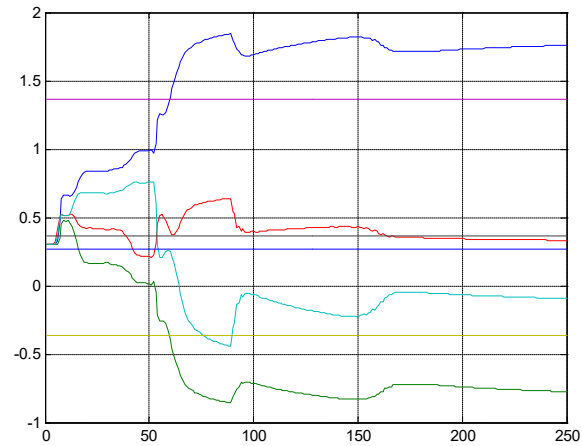
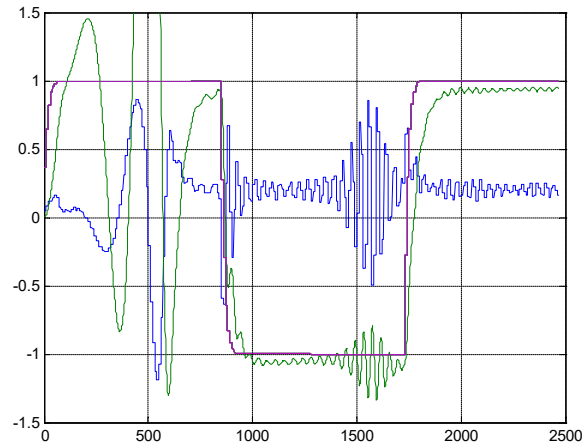
$$u_k = t_0 r_k - s_{i0} y_k - s_{i1} y_{k-1} - s_{i2} y_{k-2} - r_{i1} u_{k-1} - r_{i2} u_{k-2} \quad [1.69]$$

$x1=.8$ y $x1=.9$

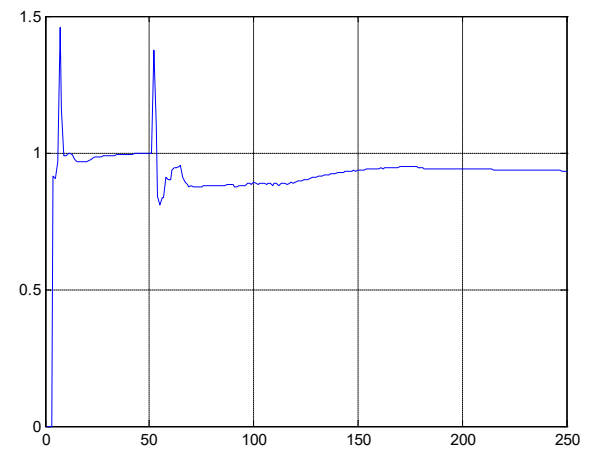
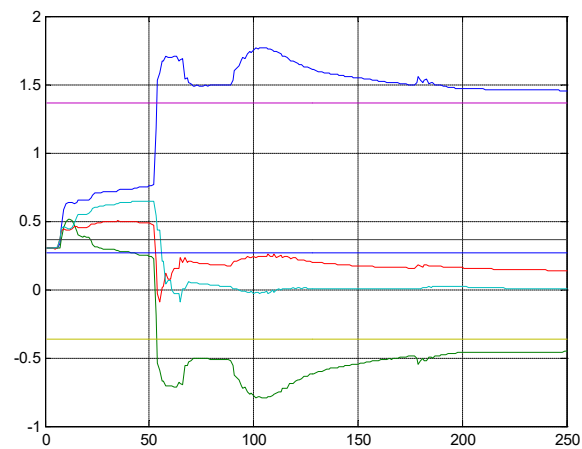
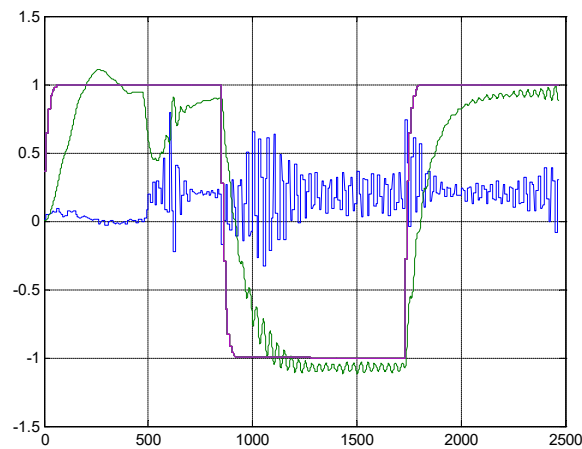


Caso Adaptativo

$x1=.8$, $ff=1$



$x1=.9$, $ff=1$



1.5. Modificación del Algoritmo de Identificación

Planta

$$Ay_k = B(u_k + v_k)$$

Si se tiene un modelo,

$$\hat{A}\hat{y}_k = \hat{B}u_k$$

El error de ecuación o error de salida (*equation/output error*), se define

$$\varepsilon_k = Ay_k - B(u_k + v_k) - (\hat{A}\hat{y}_k - \hat{B}u_k) = Bv_k$$

Depende de la perturbación. Si es un escalón, puede ser grande.

Si la perturbación es

$$A_d v = e$$

siendo e un impulso y

$$A_d = 1 - q^{-1}$$

Multiplicamos la planta por A_d

$$A_d Ay_k = A_d B(u_k + v_k) = A_d Bu_k + e_k$$

O

$$Ay_{fk} = Bu_{fk} + e_k$$

Donde

$$y_{fk} = A_d y_k$$

$$u_{fk} = A_d u_k$$

Usando la entrada y salida filtrada, disminuye el sesgo en la estimación de A y B.

Comparación PID vs STR