Conrete Mathematics

Dự tuyển 2022

September 28, 2023

Lời mở đầu

Dịch lậu Concrete Mathematics [?]!

Contents

Chương 1

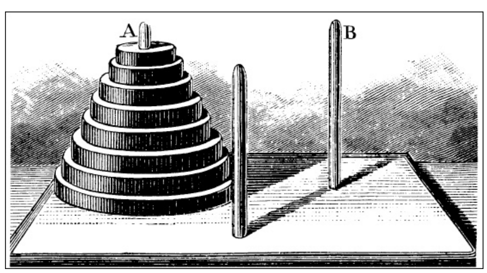
Các Bài toán Đệ quy

Ở chương này, chúng ta sẽ khám phá ba bài toán ví dụ. Chúng có hai điểm chung: đều đã được nghiên cứu rất kĩ bởi các nhà toán học; và lời giải của chúng đều sử dụng ý tưởng *đệ quy*, tức là lời giải cho mỗi bài toán phụ thuộc vào lời giải các bài toán con nhỏ hơn của bài toán đó.

1.1 Bài toán Tháp Hà Nội

Giơ tay nếu đây là lần đầu bạn nghe về bài toán này. Ok, số còn lại có thể lướt đến (1.1)

Chúng ta sẽ xem xét một câu đố thú vị, tên là Bài toán Tháp Hà Nội, được phát minh bởi nhà toán học người Pháp Edouard Lucas năm 1883. Chúng ta có một tháp gồm tám đĩa, được xếp theo thứ tự kích thước giảm dần trên một trong ba cột.



Mục tiêu của chúng ta, là di chuyển hết tòa tháp sang một trong các cột còn lại, trong đó mỗi lượt chỉ được di chuyển một đĩa từ cột này sang cột khác, và đĩa lớn không bao giờ được đặt trên đĩa nhỏ hơn.

Làm bằng vàng cơ à. Sao không phải bê tông?

Lucas còn viết một huyền thoại về tòa Tháp Brahma khổng lồ, với 64 đĩa làm bằng vàng nguyên chất và ba cột làm từ kim cương. Ông kể rằng, ngày mà thời gian bắt đầu trôi, Đấng Sáng Thế đã đặt những chiếc đĩa vàng này trên cột thứ nhất, rồi lệnh cho những nhà sư phải chuyển hết số đĩa sang cột thứ ba, theo quy tắc như trên. Họ làm việc vất vả xuyên cả ngày đêm. Khoảnh khắc họ đặt chiếc đĩa cuối cùng xuống, tòa Tháp sẽ sụp đổ, và thế giới sẽ đi đến hồi kết.

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_0 = 0; \\ &\mathrm{T}_n = 2\mathrm{T}_{n-1} + 1, \ \text{với } n > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Chương 2

Tổng

Chương 3

Các Hàm trên Số nguyên

Chương 4

Lí thuyết Số

Chương 5

Hệ số Nhị thức

Chương 6

Dãy số Đặc biệt

Một vài dãy số xuất hiện thường xuyên trong toán mà chúng ta có thể nhận biết ngay được và đặt tên cho chúng. Có thể nói đến những ví thân thuộc như dãy $\langle 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle$.

Trong Chapter 1,chúng ta đã tìm hiểu "số tam giác" $\langle 1, 3, 6, 10, \ldots \rangle$, trong Chapter 4 là dãy số nguyên tố $\langle 2, 3, 5, 7, \ldots \rangle$ còn Chapter 5 là dãy Catalan: $\langle 1, 2, 5, 14, \ldots \rangle$.

Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với một vài những dãy số quan trọng nữa: dãy Stirling $\left\{ {n \atop k} \right\}$ hoặc $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, dãy Euler $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$; những số trong các dãy này đều có liên quan phần nào đến hệ thức nhị phân $\binom{n}{k}$. Cuối cùng sẽ là những dãy như Harmonic series, Bernoulli series và Fibonacci.

6.1 Dãy Stirling

Chúng ta bắt đầu với dãy thân thuộc với hệ thức nhị phân,dãy Stirling. Dãy này có 2 loại, thường được gọi đơn giản là "Dãy Stirling dạng 1 và dạng 2". Mặc dù bản thân dãy số có đóng góp quan trọng vào lịch sử và những ứng dụng đa dạng, chúng vẫn chưa có một ký hiệu chính thức. Thông thường, chúng ta ký hiệu $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ cho số Stirling loại 1 và $\left\{ {n \atop k} \right\}$ cho số Stirling loại 2 (theo cách ký hiệu của Jovan Karamata).

Bảng 258 và 259 biểu diễn các giá trị của $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ và $\left\{ {n \atop k} \right\}$, với $(n, k) \leq 9$. Khi nói đến dãy "1,7,6,1" thì có thể đó là $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ và dãy "6,11,6,1" thì là $\left\{ {n \atop k} \right\}$, cũng giống như cách mà chúng ta cho rằng dãy "1,4,6,4,1" là $\binom{n}{k}$ khi $n = 4$

6.1.1 Stirling loại 2

Dãy Stirling loại thứ 2 thường xuất hiện nhiều hơn cả,nên chúng ta hãy nói về nó trước. Chúng ta có thể định nghĩa $\left\{ {n \atop k} \right\}$ là cách chia n số vào k subset không rỗng. Ví dụ,ta có 7 cách chia một dãy 4 phần tử vào 2 phần:

(Stirling đã xét loại thứ 2 trước trong sách của ông. [?])

$$\begin{aligned} &\{1,2,3\} \cup \{4\} \\ &\{1,2,4\} \cup \{3\} \\ &\{1,3,4\} \cup \{2\} \\ &\{2,3,4\} \cup \{1\} \\ &\{1,2\} \cup \{3,4\} \\ &\{1,3\} \cup \{2,4\} \\ &\{1,4\} \cup \{2,3\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Vậy nên $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. Một điều thú vị đó là, những ngoặc { và } dùng để định nghĩa set được dùng để định nghĩa số Stirling trong trường hợp này. Cách ký hiệu này giúp ta có thể hiểu $\left\{ {n \atop k} \right\}$ như "n subset k".

Ta xét một số trường hợp của k:

- Nếu $(k, n) = (1, 0)$: Có 0 cách chọn 0 phần tử vào 1 subset.
- Nếu $k = 1, n > 0$:
  Chỉ có 1 cách chọn n phần tử vào 1 subset,chính là dãy ban đầu.
- Nếu $k = 2$:
  Có thể dễ dàng thấy rằng, $n = 0$ thì sẽ có 0 cách chia.

  Xét dãy $n, (n > 0)$ phần tử và 2 subset sẽ được chia,ta có thể thấy một trong 2 set sẽ chứa phần tử cuối và một vài phần tử của $n - 1$ phần tử còn lại. Tổng cộng sẽ có 2^{n-1} cách chia các phần tử đấy vào 2 subset và trừ đi trường hợp một trong 2 subset là rỗng, vậy ta có kết quả là:

$$\begin{gathered} \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \\ n \in \mathbb{Z}^+ \end{gathered} \tag{6.2}$$

Chúng ta có thể sử dụng cách lập luận vừa xong để suy được công thức truy hồi tính $\left\{ {n \atop k} \right\}$ với mọi k:

- Nếu ta đặt phần tử cuối cùng thành một nhóm riêng.
  Lúc đó ta sẽ còn $k - 1$ nhóm và $n - 1$ phần tử và $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ cách chọn cho phần còn lại.

- Nếu ta cho phần tử cuối cùng vào k nhóm hiện có. Sau khi bỏ phần tử cuối cùng đi,ta còn $n-1$ phần tử và k nhóm để phân chia, $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ cách. Vì ta đẩy phần tử cuối cùng vào một trong k nhóm nên cũng có k cách chia $n-1$ phần tử còn lại. Vậy tổng số sẽ là $k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ cách

Vậy

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \ \forall \ n \in \mathbb{Z}^{+} \tag{6.3}$$

6.1.2 Dãy Stirling loại 1

Sự khác nhau giữa định nghĩa của loại 1 và loại 2 đó chính là ở loại 2 chúng ta chia các phần tử vào những cycles (cách sắp xếp vòng tròn ?),

Chương 7

Hàm sinh

Chương 8

Xác suất Rời rạc

Những biến cố ngẫu nhiên xuất hiện rất nhiều, khi chúng ta muốn tìm hiểu về thế giới chúng ta đang sống. Trong toán học, *Lí thuyết Xác suất* cho phép chúng ta tính khả năng xảy ra của những biến cố phức tạp, với giả định là các biến cố này tuân theo những tiên đề nhất định. Lí thuyết này có ứng dụng quan trọng trong tất cả các nhánh khoa học, và liên quan chặt chẽ với các kĩ thuật chúng ta đã tìm hiểu trong các chương trước.

Xác suất được coi là "rời rạc", nếu có thể tính toán xác suất xảy ra của mọi biến cố bằng tổng thay vì tích phân. Chúng ta đang có nền tảng khá vững chắc với việc tính tổng, và chúng ta sẽ áp dụng nó cho một số vấn đề thú vị, liên quan đến xác suất và trung bình.

8.1 Định nghĩa

Lí thuyết Xác suất mở đầu với ý tưởng về *không gian xác suất*, là tập Ω gồm tất cả các biến cố có hể xảy ra, cùng một quy tắc gán xác suất $\Pr(\omega)$ cho mọi biến cố cơ bản $\omega \in \Omega$. Xác suất $\Pr(\omega)$ phải là một số thực không âm, và điều kiện

Với độc giả chưa quen thuộc với Lí thuyết Xác suất, thì xác suất cao là bạn nên đọc thử cuốn mở đầu của Feller [**?**].

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) = 1 \tag{8.1}$$

đúng trong mọi không gian xác suất rời rạc. Do đó, mỗi giá trị $\Pr(\omega)$ phải thuộc khoảng $[0, 1]$. Ta gọi Pr là một hàm phân phối xác suất, do nó phân phối tổng xác suất là 1 giữa các biến cố cơ bản ω.

Đây là một ví dụ: Khi chúng ta tung một cặp xúc xắc, tập Ω các biến cố cơ bản là $D^2 = \{$⚀⚀, ⚀⚁, ..., ⚅⚅$\}$, trong đó

$$\mathrm{D} = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$$

Gọi là dice, đừng gọi die.

là tập tất cả sáu giá trị có thể của một con xúc xắc. Hai cách tung ⚀⚁ và ⚁⚀ được coi là phân biệt; nên không gian xác suất này có tất cả $6^2 = 36$ phần tử.

“Loaded dice” cẩn thận cướp cò đấy.

Chúng ta thường giả định rằng xúc xắc là “công bằng” — tức là mỗi sáu khả năng của một con xúc xắc đều có xác suất $\frac{1}{6}$, và mỗi một trong 36 khả năng trong Ω có xác suất $\frac{1}{36}$. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể xét đến những xúc xắc “không công bằng”, với một hàm phân phối xác suất khác. Chẳng hạn, giả sử:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}_1(⚀) &= \mathrm{Pr}_1(⚅) = \frac{1}{4};\\
\mathrm{Pr}_1(⚁) &= \mathrm{Pr}_1(⚂) = \mathrm{Pr}_1(⚃) = \mathrm{Pr}_1(⚄) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Khi đó ta có $\sum_{d\in D} \mathrm{Pr}_1(\mathrm{d}) = 1$, nên Pr_1 là một hàm phân phối xác suất trên tập d, và ta có thể gán xác suất cho các phần tử của $\Omega = \mathrm{d}^2$ theo quy tắc

$$\mathrm{Pr}_{11}(\mathrm{dd}) = \mathrm{Pr}_1(\mathrm{d}) = \mathrm{Pr}_1(\mathrm{d}') \tag{8.2}$$

Chẳng hạn, $\mathrm{Pr}_{11}(⚅⚂) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Phân phối xác suất này là hợp lệ, do

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}_{11}(\omega) = \sum_{\mathrm{dd}\in\mathrm{D}^2} \mathrm{Pr}_{11}(\mathrm{dd}) &= \sum_{\mathrm{d},\mathrm{d}'\in\mathrm{D}} \mathrm{Pr}_1(\mathrm{d})\,\mathrm{Pr}_1(\mathrm{d}')\\
&= \sum_{\mathrm{d}\in\mathrm{D}} \mathrm{Pr}_1(\mathrm{d})\,\mathrm{Pr}_1(\mathrm{d}') = 1\cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Ta cũng có thể xét trường hợp có một xúc xắc công bằng và một xúc xắc không công bằng,

$$\mathrm{Pr}_{01}(\mathrm{dd}) = \mathrm{Pr}_0(\mathrm{d})\,\mathrm{Pr}_1(\mathrm{d}'),\ \text{trong đó}\ \mathrm{Pr}_0(\mathrm{d}) = \frac{1}{6}, \tag{8.3}$$

Nếu tất cả các mặt của khối lập phương là giống nhau, thì làm sao ta phân biệt được mặt nào là mặt ngửa?

khi đó $\mathrm{Pr}_{01}(⚅⚂) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{48}$. Xúc xắc ngoài đời thực không thực sự công bằng, do chúng không đối xứng một cách hoàn hảo; nhưng thường thì xác suất của chúng vẫn gần với $\frac{1}{6}$.

Một *biến cố* là một tập con của Ω. Chẳng hạn, trong một trò tung xúc xắc, tập hợp

$$\{⚀⚀, ⚁⚁, ⚂⚂, ⚃⚃, ⚄⚄, ⚅⚅\}$$

là biến cố "tung ra hai viên trùng nhau". Mỗi phần tử ω của Ω được gọi là *biến cố cơ bản*, do chúng không thể được chia thành các tập hợp nhỏ hơn; ta có thể hiểu ω như một biến cố $\{\omega\}$ gồm một phần tử.

Xác suất của một biến cố A được định nghĩa bởi công thức

$$\Pr(\omega \in \mathrm{A}) = \sum_{\omega \in \mathrm{A}} \Pr(\omega) \tag{8.4}$$

và một cách tổng quát, với $\mathrm{R}(\omega)$ là một mệnh đề chứa ω, ta viết '$\Pr(\mathrm{R}(\omega))$' để biểu thị tổng của tất cả $\Pr(\omega)$ mà $\mathrm{R}(\omega)$ là đúng. Như vậy, chẳng hạn, xác suất tung ra hai viên trùng nhau với xúc xắc công bằng là $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{1}{6}$; nhưng khi cả hai viên đều không công bằng, với hàm phân phối xác suất $\Pr_1$, xác suất là $\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{16} = \frac{3}{16} > \frac{1}{6}$. Với các viên xúc xắc không công bằng này, biến cố "tung ra hai viên trùng nhau" có xác suất xảy ra cao hơn.

Chương 9

Tiệm cận