Conrete Mathematics

Dự tuyển 2022

November 12, 2023

Lời mở đầu

Dịch lậu Concrete Mathematics [?]!

Contents

1 Các Bài toán Đệ quy **7**

1.1 Bài toán Tháp Hà Tây 7

2 Tổng **13**

3 Các Hàm trên Số nguyên **15**

4 Lí thuyết Số **17**

5 Hệ số Nhị thức **19**

6 Dãy số Đặc biệt **21**

6.1 Dãy Stirling 21

6.1.1 Stirling loại 2 22

6.1.2 Stirling loại 1 23

7 Hàm sinh **27**

8 Xác suất Rời rạc **29**

8.1 Định nghĩa 29

9 Tiệm cận **33**

Chương 1

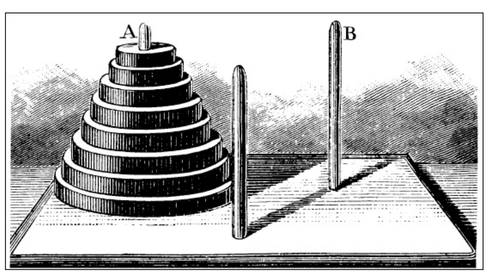
Các Bài toán Đệ quy

Ở chương này, chúng ta sẽ khám phá ba bài toán ví dụ. Chúng có hai điểm chung: đều đã được nghiên cứu rất kĩ bởi các nhà toán học; và lời giải của chúng đều sử dụng ý tưởng *đệ quy*, tức là lời giải cho mỗi bài toán phụ thuộc vào lời giải các bài toán con nhỏ hơn của bài toán đó.

1.1 Bài toán Tháp Hà Tây

Giơ tay nếu đây là lần đầu bạn nghe về bài toán này. Ok, số còn lại có thể lướt đến (1.1)

Chúng ta sẽ xem xét một câu đố thú vị, tên là Bài toán Tháp Hà Tây, được phát minh bởi nhà toán học người Pháp Edouard Lucas năm 1883. Chúng ta có một tháp gồm tám đĩa, được xếp theo thứ tự kích thước giảm dần trên một trong ba cột.



Mục tiêu của chúng ta, là di chuyển hết tòa tháp sang một trong các cột còn lại, trong đó mỗi lượt chỉ được di chuyển một đĩa từ cột này sang cột khác, và đĩa lớn không bao giờ được đặt trên đĩa nhỏ hơn.

Lucas còn viết một huyền thoại về tòa tháp Brahma khổng lồ, với 64 đĩa làm bằng vàng nguyên chất và ba cột làm từ kim cương. Ông kể rằng, ngày mà thời gian bắt đầu trôi, Đấng Sáng Thế đã đặt những chiếc đĩa vàng này

Làm bằng vàng cơ à. Sao không phải bê tông?

trên cột thứ nhất, rồi lệnh cho những nhà sư phải chuyển hết số đĩa sang cột thứ ba, theo quy tắc như trên. Họ làm việc vất vả xuyên cả ngày đêm. Khoảnh khắc họ đặt chiếc đĩa cuối cùng xuống, tòa Tháp sẽ sụp đổ, và thế giới sẽ đi đến hồi kết.

Không rõ ràng ngay lập tức rằng bài toán này có lời giải, nhưng khi quan sát kỹ hơn (hoặc biết trước bài toán này) sẽ thuyết phục chúng ta rằng nó có. Giờ câu hỏi chính được đưa ra: Chúng ta có thể làm tốt đến đâu? Ta cần ít nhất bao nhiêu lần di chuyển để hoàn thành được bài toán?

Một trong những hướng giải quyết tốt nhất cho những bài toán dạng trên: phương pháp tổng quát hóa. Tòa tháp Brahma có 64 đĩa còn tòa tháp Hà Tây có 8 đĩa; vậy ta sẽ tìm hiểu xem chuyện gì sẽ xảy ra nếu ta có n chiếc đĩa.

Một lợi thế của phương pháp này là ta có thể thu nhỏ bài toán hơn nữa. Thực ra, qua cả cuốn sách, ta sẽ thấy sự hiệu quả của việc XÉT NHỮNG TRƯỜNG HỢP NHỎ HƠN trước. Khá dễ dàng để nhận ra cách để di chuyển tòa tháp với 1 hoặc 2 đĩa. Và chỉ cần thử nghiệm nho nhỏ sẽ cho ta thấy được cách tối ưu để giải bài toán với 3 đĩa.

Bước tiếp theo trong việc giải quyết vấn đề: đưa ra các ký hiệu phù hợp: ĐẶT TÊN VÀ CHINH PHỤC. Giả sử T_n là số lần di chuyển ít nhất để dịch chuyển n cái đĩa từ cột này sang cột khác mà tuân theo luật của Lucas. Vậy hiển nhiên $\mathrm{T}_1 = 1$ và $\mathrm{T}_2 = 3$.

Ta cũng có thể moi được thêm một số thông tin bằng cách xét đến trường hợp nhỏ nhất: Đương nhiên $\mathrm{T}_0 = 0$ vì không bước di chuyển nào cần để chuyển tháp có 0 đĩa! Những nhà toán học thông thái không bao giờ sợ phải nghĩ quá nhỏ, bởi vì những quy luật tổng quát sẽ dễ nhận thấy hơn khi các trường hợp đặc biệt đã được phân tích kỹ (kể cả khi những trường hợp đấy hiển nhiên).

Nhưng giờ hãy thay đổi cách nhìn của chúng ta và nhìn xa rộng hơn; làm thế nào để di chuyển tòa tháp với nhiều đĩa? Những thử nghiệm với 3 đĩa chứng tỏ rằng để tối ưu số cách di chuyển, ta sẽ dịch chuyển 2 đĩa đầu sang cột ở giữa, rồi di chuyển đĩa thứ ba và dịch chuyển 2 đĩa còn lại. Những nhận xét này gợi ý cho chúng ta cách để dịch chuyển n đĩa một cách tối ưu nhất: Đầu tiên, ta sẽ dịch chuyển $n-1$ đĩa nhỏ nhất sang cột ở giữa (cần T_{n-1} bước), rồi di chuyển đĩa lớn nhất (cần 1 bước) sang cột thứ ba, và cuối cùng dịch chuyển $n-1$ đĩa còn lại (cần thêm T_{n-1} bước). Như vậy, ta sẽ chuyển được n đĩa (với $n > 0$) qua nhiều nhất $2 \times \mathrm{T}_{n-1} + 1$ bước:

$$\mathrm{T}_n \leq 2 \times \mathrm{T}_{n-1} + 1, \qquad \text{với } n > 0.$$

Công thức trên sử dụng dấu '$\leq$' thay vì dấu '$=$' bởi vì cách xử lý của chúng ta chỉ chứng minh $2 \times \mathrm{T}_{n-1} + 1$ bước là đủ, nhưng ta vẫn chưa chứng minh tại sao $2 \times \mathrm{T}_{n-1} + 1$ bước là cần để giải quyết bài toán. (Độc giả nào thông minh có thể nghĩ ra cách chứng minh trực tiếp công thức).

Phần lớn các "lời giải" được xuất bản để giải bài toán của Lucas, như lời giải của Allardice và Fraser [7], đều không chứng minh vì sao $\mathrm{T}_n \geq 2 \times \mathrm{T}_{n-1} + 1$

Nhưng ta có thể tìm cách nào tốt hơn không? Thực ra là không. Đến một lúc nào đó ta sẽ phải di chuyển cái đĩa ở đáy. Khi ta làm thế, $n-1$ đĩa đầu phải ở trên phải ở cùng một cột nào đó, và nó sẽ mất ít nhất T_{n-1}. Nếu không cảnh giác, ta có thể di chuyển đĩa lớn nhất nhiều hơn 1 lần. Nhưng sau khi di chuyển đĩa lớn nhất lần cuối cùng, ta cần dịch chuyển lại tất cả $n-1$ đĩa còn lại (nhớ là tất cả đĩa này phải trên cùng 1 cột) lên trên thằng lớn nhất; bước này cũng cần ít nhất T_{n-1} bước. Vì thế, nên:

$$\mathrm{T}_n \geq 2 \times \mathrm{T}_{n-1} + 1, \qquad \text{với } n > 0.$$

Hai bất đẳng thức này, cùng với đáp án hiển nhiên với $n = 0$, cho ta:

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_0 = 0; \\ &\mathrm{T}_n = 2 \times \mathrm{T}_{n-1} + 1, \qquad \text{với } n > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

(Để ý rằng công thức trên đúng với những giá trị ta đã biết như $\mathrm{T}_1 = 1$ hay $\mathrm{T}_2 = 3$. Kinh nghiệm của chúng ta với những trường hợp nhỏ lẻ không những giúp chúng ta trong việc tìm ra công thức tổng quát, mà nó còn là công cụ tiện lợi để kiểm tra xem ta có mắc phải sai lầm chết người nào không. Những công cụ kiểm tra như thế này rất đáng giá khi ta đi sâu vào những kỹ thuật phức tạp hơn ở chương sau.)

Những tập hợp các biểu thức như (1.1) được gọi là công thức truy hồi. Chúng cho ta các giá trị tại biên và những biểu thức để tính giá trị tổng quát thông qua các giá trị trước. Đôi khi ta chỉ gọi một mình biểu thức là công thức truy hồi, dù cho thực tế nó cần giá trị biên để trở thành một công thức truy hồi.

Ừ, hình như mình nhìn thấy từ này rồi

Công thức truy hồi có thể giúp chúng ta tính được T_n với mọi n ta muốn. Nhưng không ai thich tính toán bằng công thức truy hồi cả; đặc biệt khi n khá lớn, nó sẽ tốn rất nhiều thời gian. Công thức truy hồi cũng chỉ thể hiện những thông tin gián tiếp và địa phương, không có tính tổng quát. Một thứ có thể giúp ta tránh khỏi những vấn đề này chính là *giải pháp cho công thức truy hồi*. Đó chính là một công thức đẹp, gọn, còn gọi là "dạng đóng" của T_n để chúng ta có thể tính toán nhanh, ngay cả cho giá trị lớn của n. Với "dạng đóng" của T_n, ta sẽ hiểu được bản chất của T_n là gì.

Vậy làm thế nào để chúng ta giải được công thức truy hồi này? Một cách ta có thể dùng là đoán đáp án, sau đó chứng minh rằng đáp án của chúng ta đúng. Và hy vọng lớn nhất của ta trong việc đoán đáp án chính là xét các trường hợp nhỏ của công thức truy hồi. Vậy ta tính toán được lần lượt, $T_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$, $T_4 = 2 \times 7 + 1 = 15$, $T_5 = 2 \times 15 + 1 = 31$, $T_6 = 2 \times 31 + 1 = 63$. Ô! Nhìn như nó theo công thức:

$$T_n = 2^n - 1, \qquad \text{với } n > 0. \tag{1.2}$$

Ít nhất nó đúng với $n \leq 6$.

Quy nạp chứng minh rằng ta có thể trèo lên cao đến tùy thích cứ như chúng ta đang trên một chiếc thang, bằng cách chứng minh rằng ta có thể trèo lên bậc thấp nhất (cơ sở) và từ đó chứng minh với mỗi bậc tiếp theo ta có thể leo đến bậc tiếp theo nữa (quy nạp)

Quy nạp là một trong những cách tổng quát để chứng minh rằng một nhận định nào đó về số nguyên n đúng với mọi $n \geq n_0$. Đầu tiên ta chứng minh nhận định đúng khi n đặt giá trị nhỏ nhất, n_0, đây được gọi là bước cơ sở. Tiếp theo, ta chứng minh nhận định đúng với $n > n_0$, giả sử nhận định đã được chứng minh đúng với mọi giá trị từ n_0 đến $n - 1$; đây được gọi là bước quy nạp. Dạng chứng minh như thế này cho ta vô tận kết quả chỉ trong hữu hạn bước làm.

Các dạng bài giải công thức truy hồi rất lý tưởng cho cách chứng minh bằng quy nạp. Ở ví dụ của ta, ta có thể suy luận ra (1.2) khá dễ dàng từ (1.1): Bước cơ sở hiển nhiên đúng, do $T_0 = 2^0 - 1 = 0$. Và qua bước quy nạp, ta tiếp tục chứng minh khẳng định đúng với $n > 0$ nếu ta giả sử (1.2) đúng khi n được thay thế bởi $n - 1$:

$$T_n = 2 \times T_{n-1} + 1 = 2 \times (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1.$$

Vậy (1.2) đúng với n. Tuyệt! Hành trình đi tìm T_n của chúng ta đã thành công mỹ mãn.

Tất nhiên công việc của các nhà sư vẫn chưa kết thúc; họ vẫn đang phải miệt mài di chuyển những cái đĩa, và sẽ di chuyển những cái đĩa này khá lâu, do với $n = 64$ thì ta sẽ có $2^64 - 1$ bước (tầm khoảng 18 tỷ tỷ bước). Kể cả với tốc độ thần kỳ 1 bước mỗi nano giây, họ sẽ phải tốn hơn 5 thiên niên kỷ chỉ để dịch chuyển tòa tháp Brahma. Bài toán gốc của Lucas dễ thở hơn một chút. Nó chỉ cần $2^8 - 1 = 255$ bước, sẽ mất khoảng 4 phút nếu nhanh tay.

Công thức truy hồi trong bài toán tháp Hà Tây khá điển hình trong những dạng có nhiều ứng dụng trong toán học. Khi đi tìm "dạng đóng" của một đại lượng nào đó ta quan tâm như T_n, ta cần đi qua 3 bước:

1. Xét các trường hợp bé trước. Làm thế giúp chúng ta có cái nhìn sâu sắc hơn về vấn đề và giúp ta ở bước 2 và 3.

Chứng minh là gì? "Một nửa của một phần trăm rượu nguyên chất"

2. Tìm và chứng minh một biểu thức toán học cho đại lượng ta quan tâm. Với bài toán tháp Hà Tây, đó là công thức truy hồi (1.1) giúp ta có thể tính được T_n với mọi n.

3. Tìm và chứng minh "dạng đóng" của biểu thức của chúng ta. Với bài toán tháp Hà Tây, đó chính là (1.2)

Bước thứ ba sẽ là bước ta sẽ tập trung nhiều qua cả quyển sách. Thực ra, ta sẽ thường xuyên bỏ qua bước 1 và 2, vì ta sẽ có công thức truy hồi qua các biểu thức toán học ngay từ đầu. Nhưng ngay cả thế, ta sẽ làm rất nhiều các bài toán con mà sẽ đưa ta qua cả 3 bước.

Nghiên cứu của ta về tháp Hà Tây đã dẫn chúng ta đến với kết quả đúng, nhưng ta vẫn cần một "phép màu quy nạp"; ta vẫn phải dựa vào những dự đoán đầy may rủi của mình. Một trong những mục tiêu hàng đầu của quyển sách này chính là giải thích vì sao một người có thể giải quyết những công thức truy hồi mà không cần đến tâm linh. Ví dụ, ta có thể đơn giản hóa công thức truy hồi (1.1) bằng cách cộng thêm 1 vào cả hai vế của biểu thức:

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_0 + 1 = 1 \\ &\mathrm{T}_n + 1 = 2 \times \mathrm{T}_{n-1} + 2, \qquad \text{với } n > 0. \end{aligned}$$

Bây giờ nếu ta đặt $\mathrm{U}_n = \mathrm{T}_n + 1$, ta có:

$$\begin{aligned} &\mathrm{U}_0 = 1 \\ &\mathrm{U}_n = 2 \times \mathrm{U}_{n-1}, \qquad \text{với } n > 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Thật thú vị: ta ẩn đi hệ số **+1** trong (1.1) bằng cộng thêm phần tử thay vì trừ nó đi

Thực sự không cần là thiên tài cũng thấy được dạng tổng quát của công thức truy hồi này: $\mathrm{U}_n = 2^n$; do vậy $T_n = 2^n - 1$. Ngay cả máy tính cũng suy luận ra được điều đó.

Chương 2

Tổng

Chương 3

Các Hàm trên Số nguyên

Chương 4

Lí thuyết Số

Chương 5

Hệ số Nhị thức

Chương 6

Dãy số Đặc biệt

Một vài dãy số xuất hiện thường xuyên trong toán mà chúng ta có thể nhận biết ngay được và đặt tên cho chúng. Có thể nói đến những ví thân thuộc như dãy $\langle 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle$.

Trong Chapter 1,chúng ta đã tìm hiểu "số tam giác" $\langle 1, 3, 6, 10, \ldots \rangle$, trong Chapter 4 là dãy số nguyên tố $\langle 2, 3, 5, 7, \ldots \rangle$ còn Chapter 5 là dãy Catalan: $\langle 1, 2, 5, 14, \ldots \rangle$.

Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với một vài những dãy số quan trọng nữa: dãy Stirling $\left\{ {n \atop k} \right\}$ hoặc $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, dãy Euler $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$; những số trong các dãy này đều có liên quan phần nào đến hệ thức nhị phân $\binom{n}{k}$. Cuối cùng sẽ là những dãy như Harmonic series, Bernoulli series và Fibonacci.

6.1 Dãy Stirling

Chúng ta bắt đầu với dãy thân thuộc với hệ thức nhị phân,dãy Stirling. Dãy này có 2 loại, thường được gọi đơn giản là "Dãy Stirling dạng 1 và dạng 2". Mặc dù bản thân dãy số có đóng góp quan trọng vào lịch sử và những ứng dụng đa dạng, chúng vẫn chưa có một ký hiệu chính thức. Thông thường, chúng ta ký hiệu $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ cho số Stirling loại 1 và $\left\{ {n \atop k} \right\}$ cho số Stirling loại 2 (theo cách ký hiệu của Jovan Karamata).

Bảng 258 và 259 biểu diễn các giá trị của $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ và $\left\{ {n \atop k} \right\}$, với $(n, k) \leq 9$. Khi nói đến dãy "1,7,6,1" thì có thể đó là $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ và dãy "6,11,6,1" thì là $\left\{ {n \atop k} \right\}$, cũng giống như cách mà chúng ta cho rằng dãy "1,4,6,4,1" là $\binom{n}{k}$ khi $n = 4$

6.1.1 Stirling loại 2

(Stirling đã xét loại thứ 2 trước trong sách của ông. [?])

Dãy Stirling loại thứ 2 thường xuất hiện nhiều hơn cả,nên chúng ta hãy nói về nó trước. Chúng ta có thể định nghĩa $\left\{ {n \atop k} \right\}$ là cách chia n số vào k subset không rỗng. Ví dụ,ta có 7 cách chia một dãy 4 phần tử vào 2 phần:

$$\begin{aligned}
&\{1,2,3\} \cup \{4\} \\
&\{1,2,4\} \cup \{3\} \\
&\{1,3,4\} \cup \{2\} \\
&\{2,3,4\} \cup \{1\} \\
&\{1,2\} \cup \{3,4\} \\
&\{1,3\} \cup \{2,4\} \\
&\{1,4\} \cup \{2,3\}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Vậy nên $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. Một điều thú vị đó là, những ngoặc { và } dùng để định nghĩa set được dùng để định nghĩa số Stirling trong trường hợp này. Cách ký hiệu này giúp ta có thể hiểu $\left\{ {n \atop k} \right\}$ như "n subset k".

Ta xét một số trường hợp của k:

- Nếu $(k, n) = (1, 0)$: Có 0 cách chọn 0 phần tử vào 1 subset.
- Nếu $k = 1, n > 0$:
  Chỉ có 1 cách chọn n phần tử vào 1 subset,chính là dãy ban đầu.
- Nếu $k = 2$:
  Có thể dễ dàng thấy rằng, $n = 0$ thì sẽ có 0 cách chia.

  Xét dãy $n, (n > 0)$ phần tử và 2 subset sẽ được chia,ta có thể thấy một trong 2 set sẽ chứa phần tử cuối và một vài phần tử của $n - 1$ phần tử còn lại. Tổng cộng sẽ có 2^{n-1} cách chia các phần tử đấy vào 2 subset và trừ đi trường hợp một trong 2 subset là rỗng, vậy ta có kết quả là:

$$\begin{gathered}
\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \\
n \in \mathbb{Z}^+
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Chúng ta có thể sử dụng cách lập luận vừa xong để suy được công thức truy hồi tính $\left\{ {n \atop k} \right\}$ với mọi k:

- Nếu ta đặt phần tử cuối cùng thành một nhóm riêng.
  Lúc đó ta sẽ còn $k - 1$ nhóm và $n - 1$ phần tử và $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ cách chọn cho phần còn lại.

- Nếu ta cho phần tử cuối cùng vào k nhóm hiện có. Sau khi bỏ phần tử cuối cùng đi,ta còn $n-1$ phần tử và k nhóm để phân chia, $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ cách. Vì ta đẩy phần tử cuối cùng vào một trong k nhóm nên cũng có k cách chia $n-1$ phần tử còn lại. Vậy tổng số sẽ là $k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ cách

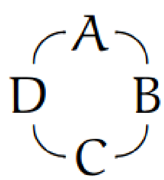
Vậy

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \; \forall \; n \in \mathbb{Z}^+ \tag{6.3}$$

6.1.2 Stirling loại 1

Sự khác nhau giữa định nghĩa của loại 1 và loại 2 đó chính là ở loại 2 chúng ta chia các phần tử vào những cycles (cách sắp xếp vòng tròn ?).

Cycle có thể hiểu như là một cách sắp xếp vòng tròn như hình sau:



Cycle trong hình có thể được viết gọn lại dưới dạng $[A, B, C, D]$. Ta hiểu rằng: $[A, B, C, D] = [B, C, D, A] = [C, D, A, B] = [D, A, B, C]$

Đằng khác: $[A, B, C, D]$ khác $[A, C, B, D]$ cũng như $[D, C, B, A]$

Xét thử một ví dụ: Có bao nhiêu cách để chia được 2 cycles từ 4 phần tử phân biệt: Ta thử liệt kê:

$$\begin{aligned} &[1,2,3][4],\; [1,2,4][3],\; [1,3,4][2], [2,3,4][1],\\ &[1,3,2][4],\; [1,4,2][3],\; [1,4,3][2], [2,4,3][1],\\ &[1,2][3,4],\; [1,3][2,4],\; [1,4][2,3]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Vậy có 11 cách đê chia 4 phần tử vào 2 cycle hay tức là $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$

"There are nine and sixty ways of constructing tribal lays, And-every-single-one-of-them-is-right"
- Rudyard Kipling

Ta xét một chút về tính chất của cycle

Một cycle đơn(cycle với một phần tử) có tính chất giống hệt với một tập hợp(set) với 1 phần tử. Tương tự như vậy, cycle đôi(có 2 phần tử) cũng hoạt động giống như một set có 2 phần tử,bởi vì $[A, B] = [B, A]$ cũng như $\{A, B\} = \{B, A\}$. Nhưng sẽ có 2 3-cycle khác nhau $[A, C, B]$ và $[A, B, C]$. Có thể nhận thấy rằng 11 cách sắp xếp từ (6.1) có thể được biến đổi từ (6.4);

Tổng quát hơn, nếu có $n!$ cách sắp xếp n phần tử vào 1 set thì sẽ có $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ cách sắp xếp n phần tử vào 1 cycle. Vậy:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \tag{6.5}$$

Cũng dễ nhận thấy rằng là số cách chia n phần tử vào k cycle sẽ luôn nhiều hơn vào k set hay tức là:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \ \forall \ (n, k) \in \mathbb{N} \tag{6.6}$$

bởi vì với mỗi một phần được chia vào một subset thì sẽ có ít nhất một cycle tương ứng.

Đẳng thức tại (6.6) xảy ra khi mọi cycle trong dãy đều là đơn hoặc đôi, khi đó mỗi một cycle tương ứng với một subset. Điều này xảy ra khi $k = n$ hoặc $k = n - 1$

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = 1 \\ \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} \end{gathered} \tag{6.7}$$

(Việc chia n phần tử vào $n - 1$ cycle cũng giống như việc chọn 2 phần tử cùng một subset/cycle)

Qua những ví dụ ở trên,ta có thể thấy có một mối liên hệ giữa số Stirling loại 1 cũng như loại 2. Chúng ta hoàn toàn có thể dựng được công thức cho số Stirling loại 1 tương tự như loại 2:

- TH1: Ta nhét vật cuối cùng thành 1 cycle riêng:
  Khi đó sẽ có $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ cách để nhét $n - 1$ vật còn lại vào $k - 1$ nhóm.

- TH2: Ta nhét vật cuối cùng vào k cycle hiện có:
  Với mỗi cycle,sẽ có $n - 1$ vị trí mà đặt được vật cuối.
  Mà có $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ cách sắp xếp $n - 1$ vật còn lại vào k nhóm Sẽ có:

  $$(n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

  cho trường hợp này.

Vậy, công thức truy hồi tổng quát là:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \ \forall \ n \ \in \mathbb{N}^* \tag{6.8}$$

So sánh (6.8) và (6.3) ta có thể thấy được một sự khá giống nhau trong công thức. Từ điều này có thể cho ta một chút gợi ý về mối quan hệ giữa cycle và hoán vị

Xét hoán vị $\{p[1], p[2], ..., p[n]\}$ của $1, 2, 3, ..., n$, ta luôn có thể "phân rã" dãy này thành các cycle. Bằng cách nào ? Ta bắt đầu lấy $p[m] = p[p[m]]$ cứ tiếp tục cho đến lúc $p[i] = p[m]$ thì ta được một cycle. Vậy mỗi một hoán vị thì có thể định nghĩa một cách sắp xếp cycle hoặc ngược lại. Giờ ta có thể hiểu $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ theo một cách định nghĩa khác:

Số hoán vị của n vật mà có thể "phân rã" về đúng k cycle. Nếu chúng ta cộng hết $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ với mọi k thì kết quả sẽ được là tổng số hoán vị:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n! \ \forall \ n \ \in \mathbb{N} \tag{6.9}$$

Số Stirling khá hữu dụng nếu bạn biết sử dụng 2 công thức (6.3) và (6.8) Ví dụ như biểu diễn x^n bằng $x^{\underline{n}}$:

Ta xét một vài trường hợp đầu tiên:
$x^0 = x^{\underline{0}}$;
$x^1 = x^{\underline{1}}$;
$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$;
$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$;
$x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$;
Có thể thấy các hệ số giống hệ công thức

Chương 7

Hàm sinh

Chương 8

Xác suất Rời rạc

Những biến cố ngẫu nhiên xuất hiện rất nhiều, khi chúng ta muốn tìm hiểu về thế giới chúng ta đang sống. Trong toán học, *Lí thuyết Xác suất* cho phép chúng ta tính khả năng xảy ra của những biến cố phức tạp, với giả định là các biến cố này tuân theo những tiên đề nhất định. Lí thuyết này có ứng dụng quan trọng trong tất cả các nhánh khoa học, và liên quan chặt chẽ với các kĩ thuật chúng ta đã tìm hiểu trong các chương trước.

Xác suất được coi là "rời rạc", nếu có thể tính toán xác suất xảy ra của mọi biến cố bằng tổng thay vì tích phân. Chúng ta đang có nền tảng khá vững chắc với việc tính tổng, và chúng ta sẽ áp dụng nó cho một số vấn đề thú vị, liên quan đến xác suất và trung bình.

8.1 Định nghĩa

Với độc giả chưa quen thuộc với Lí thuyết Xác suất, thì xác suất cao là bạn nên đọc thử cuốn mở đầu của Feller [**?**].

Lí thuyết Xác suất mở đầu với ý tưởng về *không gian xác suất*, là tập Ω gồm tất cả các biến cố có hể xảy ra, cùng một quy tắc gán xác suất $\Pr(\omega)$ cho mọi biến cố cơ bản $\omega \in \Omega$. Xác suất $\Pr(\omega)$ phải là một số thực không âm, và điều kiện

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) = 1 \tag{8.1}$$

đúng trong mọi không gian xác suất rời rạc. Do đó, mỗi giá trị $\Pr(\omega)$ phải thuộc khoảng $[0, 1]$. Ta gọi Pr là một hàm phân phối xác suất, do nó phân phối tổng xác suất là 1 giữa các biến cố cơ bản ω.

Đây là một ví dụ: Khi chúng ta tung một cặp xúc xắc, tập Ω các biến cố cơ bản là $D^2 = \{$⚀⚀, ⚀⚁, ..., ⚅⚅$\}$, trong đó

$$\mathrm{D} = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$$

Gọi là dice, đừng gọi die.

là tập tất cả sáu giá trị có thể của một con xúc xắc. Hai cách tung ⚀⚁ và ⚁⚀ được coi là phân biệt; nên không gian xác suất này có tất cả $6^2 = 36$ phần tử.

“Loaded dice” cẩn thận cướp cò đấy.

Chúng ta thường giả định rằng xúc xắc là “công bằng” — tức là mỗi sáu khả năng của một con xúc xắc đều có xác suất $\frac{1}{6}$, và mỗi một trong 36 khả năng trong Ω có xác suất $\frac{1}{36}$. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể xét đến những xúc xắc “không công bằng”, với một hàm phân phối xác suất khác. Chẳng hạn, giả sử:

$$\Pr{}_1(⚀) = \Pr{}_1(⚅) = \frac{1}{4};$$
$$\Pr{}_1(⚁) = \Pr{}_1(⚂) = \Pr{}_1(⚃) = \Pr{}_1(⚄) = \frac{1}{8}.$$

Khi đó ta có $\sum_{d \in D} \Pr{}_1(\mathrm{d}) = 1$, nên $\Pr{}_1$ là một hàm phân phối xác suất trên tập d, và ta có thể gán xác suất cho các phần tử của $\Omega = \mathrm{d}^2$ theo quy tắc

$$\Pr{}_{11}(\mathrm{dd}) = \Pr{}_1(\mathrm{d}) = \Pr{}_1(\mathrm{d}') \tag{8.2}$$

Chẳng hạn, $\Pr{}_{11}(⚅⚂) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Phân phối xác suất này là hợp lệ, do

$$\begin{aligned}\Pr{}_{11}(\omega) &= \sum_{\mathrm{dd} \in \mathrm{D}^2} \Pr{}_{11}(\mathrm{dd}) = \sum_{\mathrm{d},\mathrm{d}' \in \mathrm{D}} \Pr{}_1(\mathrm{d}) \Pr{}_1(\mathrm{d}') \\ &= \sum_{\mathrm{d} \in \mathrm{D}} \Pr{}_1(\mathrm{d}) \Pr{}_1(\mathrm{d}') = 1 \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Ta cũng có thể xét trường hợp có một xúc xắc công bằng và một xúc xắc không công bằng,

$$\Pr{}_{01}(\mathrm{dd}) = \Pr{}_0(\mathrm{d}) \Pr{}_1(\mathrm{d}'),\ \text{trong đó}\ \Pr{}_0(\mathrm{d}) = \frac{1}{6}, \tag{8.3}$$

Nếu tất cả các mặt của khối lập phương là giống nhau, thì làm sao ta phân biệt được mặt nào là mặt ngửa?

khi đó $\Pr{}_{01}(⚅⚂) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$. Xúc xắc ngoài đời thực không thực sự công bằng, do chúng không đối xứng một cách hoàn hảo; nhưng thường thì xác suất của chúng vẫn gần với $\frac{1}{6}$.

Một *biến cố* là một tập con của Ω. Chẳng hạn, trong một trò tung xúc xắc, tập hợp

$$\{⚀⚀, ⚁⚁, ⚂⚂, ⚃⚃, ⚄⚄, ⚅⚅\}$$

là biến cố "tung ra hai viên trùng nhau". Mỗi phần tử ω của Ω được gọi là *biến cố cơ bản*, do chúng không thể được chia thành các tập hợp nhỏ hơn; ta có thể hiểu ω như một biến cố $\{\omega\}$ gồm một phần tử.

Xác suất của một biến cố A được định nghĩa bởi công thức

$$\Pr(\omega \in \mathrm{A}) = \sum_{\omega \in \mathrm{A}} \Pr(\omega) \tag{8.4}$$

và một cách tổng quát, với $\mathrm{R}(\omega)$ là một mệnh đề chứa ω, ta viết '$\Pr(\mathrm{R}(\omega))$' để biểu thị tổng của tất cả $\Pr(\omega)$ mà $\mathrm{R}(\omega)$ là đúng. Như vậy, chẳng hạn, xác suất tung ra hai viên trùng nhau với xúc xắc công bằng là $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$; nhưng khi cả hai viên đều không công bằng, với hàm phân phối xác suất $\Pr_1$, xác suất là $\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}>\frac{1}{6}$. Với các viên xúc xắc không công bằng này, biến cố "tung ra hai viên trùng nhau" có xác suất xảy ra cao hơn.

Chương 9

Tiệm cận