Loại 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.

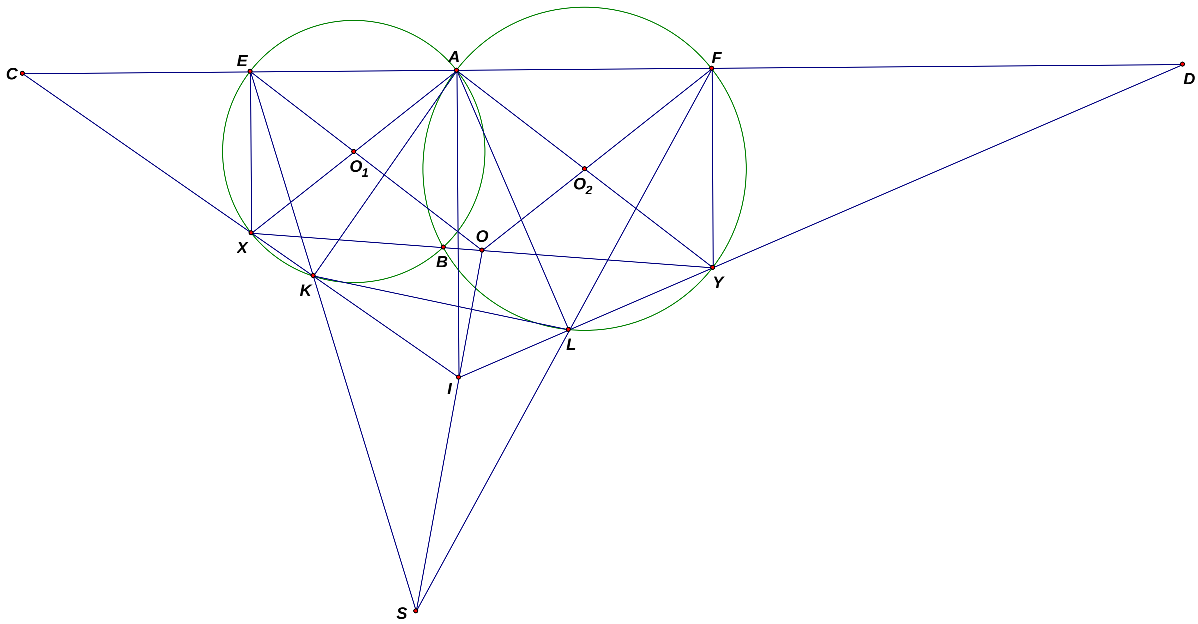
Câu 1. [Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định- năm 2015- Tỉnh Nam Định]

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. AX, AY lần lượt là các đường kính của (O_1) và (O_2). Gọi O là trung điểm của XY; I là điểm thuộc đường phân giác của góc $\widehat{XAY}$ sao cho OI không vuông góc với XY và I không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua A vuông góc với AI lần lượt cắt các đường tròn (O_1), (O_2) tại các điểm E, F khác A. IX cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai K, IY cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai L.

1.Gọi C là giao điểm của EF với IX. Chứng minh rằng OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK).

2. Chứng minh rằng 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy.

Lời giải



1. Không mất tính tổng quát giả sử I là điểm thuộc đường phân giác trong của góc $\widehat{XAY}$.

Ta có tứ giác AO_1OO_2 là hình bình hành nên suy ra $OO_1 \parallel HY$

Lại có $(EA, EO_1) = (AO_1, AE) = (AF, AO_2) \pmod{\pi} \Rightarrow EO_1 \parallel HY$

Do đó O, O_1, E thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có O, O_2, F thẳng hàngMặt khác

$$(CE, CK) = (AC, AK) + (AK, CK) = (AC, AK) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O_1E}, \overrightarrow{O_1K}\right) = (EO_1, EK) \pmod{\pi}$$

Do đó OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK)

2. Ta có $\widehat{AKI}=\widehat{ALI}=90^0$ nên 4 điểm A, I, K, L cùng thuộc đường tròn đường kính AI.

Mà $EF\perp AI$ nên suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Do đó $(AE, AK)=(LA, LK)\ (\text{mod } \pi)$ (1)

Mặt khác

$$(KE, KA)=(XE, XA)=(XE, EA)+(AE, AX)=\frac{\pi}{2}+(AE, AX)\ (\text{mod } \pi)$$

$$=\frac{\pi}{2}+(AY, AF)=(AF, FY)+(AY, AF)=(AY, FY)=(LA, LF)(\text{mod } \pi) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(EF, EK)=(EA, AK)+(AK, EK)=(LA, LK)+(LF, LA)=(LF, LK)\ (\text{mod } \pi)$$

Vậy 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn.

Gọi S là giao điểm của EK và FL

Vì 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn nên ta có

$$\overline{SE}.\overline{SK}=\overline{SF}.\overline{SL}\Rightarrow P_{S/(CEK)}=P_{S/(DFL)} \quad (3)$$

Ta có $\overline{IC}.\overline{IK}=\overline{ID}.\overline{IL}=IA^2\Rightarrow P_{I/(CEK)}=P_{I/(DFL)}$ (4)

Gọi D là giao điểm của EF với IY

Chứng minh tương tự câu 1) ta có OF là tiếp tuyến của đường tròn (DFL)

Mặt khác tứ giác $EFYX$ là hình thang vuông tại E, F và O là trung điểm của XY nên suy ra $OE=OF$. Do đó $P_{O/(CEK)}=OE^2=OF^2=P_{O/(DFL)}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra S, O, I cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(CEK), (DFL)$ nên S, O, I thẳng hàng. Vậy 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy tại S.

***) Chú ý: Nếu HS không sử dụng góc định hướng thì phải xét các trường hợp vị trí của điểm I (I nằm ngoài các đoạn XK, YL và I nằm trong các đoạn XK, YL)**

Câu 2. [Trường THPT Lương Văn Tụy- Ninh Bình- Vòng 2]

Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. M, N là trung điểm của AH, BC. Các đường phân giác của góc ABH, ACH cắt nhau tại P. Chứng minh:

a, Góc BPC là góc vuông

b, M,N,P thẳng hàng.

Câu 3. [SỞ Bình Định- năm học 2012-2013]

Trong tam giác ABC, M là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường phân giác trong của góc $\widehat{BCA}$. N,L lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ các đỉnh A,C xuống đường phân giác trong của góc ABC. Gọi F là giao điểm của các đường thẳng MN và AC, E là giao điểm của các đường thẳng BF và CL, D là giao điểm của các đường thẳng BL và AC. Chứng minh rằng $DE \parallel MN$.

Câu 4. [Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - năm 2015- Tỉnh Hòa Bình]

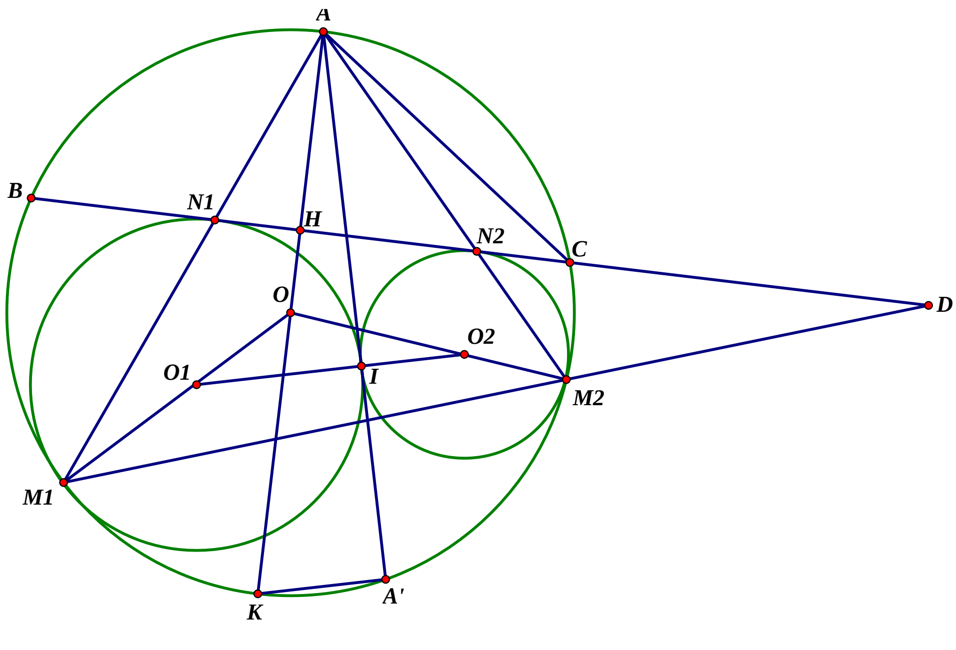
Cho (O) và hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với (O). Gọi I là tiếp điểm của (O_1) và (O_2); M_1,M_2 là tiếp điểm của (O) với $(O_1),(O_2)$. Tiếp tuyến chung tại I của $(O_1),(O_2)$ cắt (O) tại **A.** AM_1 cắt (O_1) tại N_1; AM_2 cắt (O_2) tại N_2.

Chứng minh rằng $OA \perp N_1N_2$.

N_1N_2 cắt (O) ở B,C; AI cắt (O) tại A'. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A'BC$.

Chứng minh rằng N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Lời giải



a) A thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên $\overline{AN_1}.\overline{AM_1}=\overline{AN_2}.\overline{AM_2}$ suy ra $N_1N_2M_2M_1$ là tứ giác nội tiếp dẫn đến

$$\widehat{AN_1N_2}=\widehat{AM_2M_1}\Rightarrow \frac{Sđ\,\overset{\frown}{BM_1}+Sđ\,\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{Sđ\,\overset{\frown}{BM_1}+Sđ\,\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}\Rightarrow OA\perp N_1N_2$$

b) Gọi H,K là giao điểm của AO với $BC,(O)$.

Tam giác ABK vuông tại B có BH là đường cao $\Rightarrow AB^2=\overline{AH}.\overline{AK}$

$\widehat{AM_1K}=90^o \Rightarrow HN_1M_1K$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AB^2=\overline{AH}.\overline{AK}=\overline{AN_1}.\overline{AM_1}=P_{A/(O_1)}=AI^2$

$\Rightarrow AB=AC=AI$

Suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC

Dẫn đến $\widehat{IBC}=\frac{1}{2}\widehat{IAC}=\frac{1}{2}\widehat{A'AC}=\frac{1}{2}\widehat{A'BC}$

Suy ra BI là phân giác của $\widehat{A'BC}$

Rõ ràng $A'I$ là phân giác của $\widehat{BA'C}$ (do $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$)

Vì thế I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'BC$

c)Giả sử O_1O_2 cắt N_1N_2 tại D, gọi R,R_1,R_2 là bán kính của (O), $(O_1),(O_2)$.

Rõ ràng D là tâm vị tự ngoài của (O_1) và $(O_2) \Rightarrow \frac{DO_1}{DO_2}=\frac{R_1}{R_2}$, lại có $\frac{M_2O_2}{M_1O_1}=\frac{R_2}{R_1}$

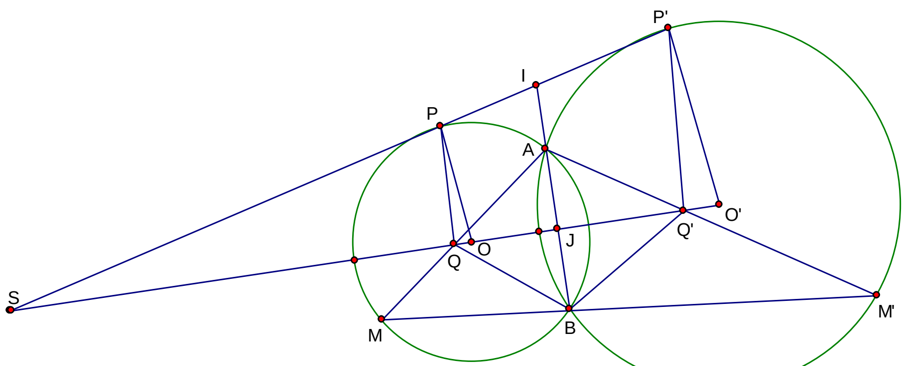
Suy ra $\frac{DO_1}{DO_2}.\frac{M_2O_2}{M_2O}.\frac{M_1O}{M_1O_1}=1$

Dẫn đến D,M_1,M_2 thẳng hàng (Menelauyt đảo)

Vậy N_1N_2,O_1O_2,M_1M_2 đồng quy.

Câu 5. **[ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI- CHUYÊN HẠ LONG]**
Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R\neq R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B. Một đường thẳng d d tiếp xúc với đường tròn (O) và (O') lần lượt tại P và P'. Gọi Q và Q' lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P và P' xuống OO'. Các đường thẳng AQ và AQ' cắt các đường tròn (O) tại M và M'. Chứng minh rằng M,M',B thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Gọi S là giao điểm của d và OO', khi đó S là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O) và (O'). Đặt $k=\frac{R'}{R}$, khi đó ta có: $V(S,k):(O)\to(O'),P\to P',Q\to Q'$

Gọi I,J là giao điểm của AB với PP' và OO'. Khi đó ta có:

$IP^2=\overline{IA}.\overline{IB}=\overline{IP'}^2\Rightarrow IP=IP'$

Mà $PQ//\ IJ//P'Q'$ nên $JQ=JQ'$

Suy ra AB là trung trực của QQ'.

Mà OO' là trung trực của AB. Vậy tứ giác $AQBQ'$ là hình thoi

Do đó $Q'B//\ AQ$ hay $Q'M'//\ QM$.

Giả sử $V(S,k)$ biến M thành B' khi đó $QM\ //\ Q'B'$

Mà M thuộc (O) suy ra B' thuộc (O') do đó $B'\equiv B$.

Vậy $V(S,k)$ biến M thành B.

Tương tự ta có $V(S,k)$ biến M' thành B. Suy ra M,B,M' thẳng hàng.

Câu 6. Cho ΔABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB tương ứng tại D,E,F. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Đường tròn đường kính GD cắt (I) tại R $(R\neq D)$. Gọi P,Q $(P\neq R,Q\neq R)$ tương ứng là giao của (I) với BR,CR. Hai đường thẳng BQ và CP cắt nhau tại X. Đường tròn (CDE) cắt QR tại M và đường tròn (BDF) cắt PR tại N. Chứng minh rằng PM,QN,RX đồng quy.

Hướng dẫn giải

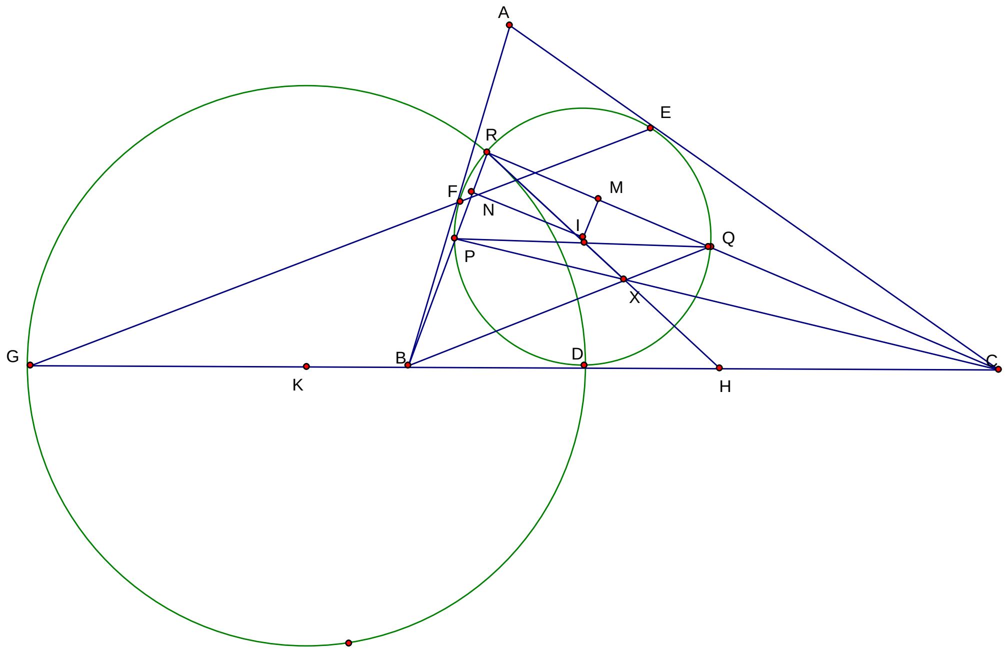
Gọi K là trung điểm đoạn GD. Ta có $(GDBC)=-1$, do đó $KD^2=KR^2=KB.KC,$ điều này suy ra KR là tiếp tuyến (RPC). Do đó $\angle KRB=\angle RCB$.

Mặt khác KD là tiếp tuyến của (I), do đó KR cũng là tiếp tuyến của (I).

Vì vậy $\angle KRB=\angle RQP\Rightarrow\angle RQP=\angle RCB\Rightarrow RQ\parallel BC$.

Suy ra RX đi qua trung điểm của đoạn PQ (bổ đề quen thuộc trong hình thang).

Từ đây suy ra PM,QN,RX là 3 đường trung tuyến của ΔRQP, suy ra ĐPCM.



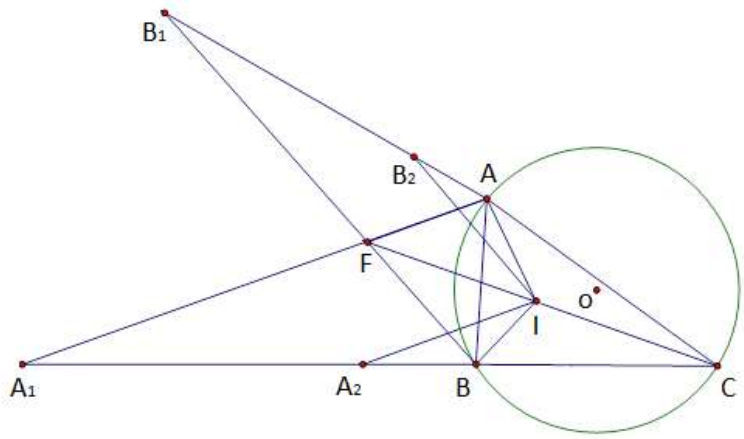
Câu 7. **[KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎIKHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘNĂM HỌC 2016 - 2017]**

Cho tam giác ΔABC có $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC và CA tại D, E tương ứng. Gọi M là trung điểm của BC và N là điểm đối xứng với D qua IM. Đường thẳng vuông góc với EN tại N cắt AI tại P, Q là giao điểm thứ hai của AN với (I). Chứng minh rằng $DP \perp EQ$.

Câu 8. **[ĐỀ XUẤT ĐỀ THI DUYÊN HẢI BẮC BỘ.Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Tỉnh Hòa Bình. Năm học 2012-2013]**

Cho tam giác ΔABC. Các phân giác ngoài của các góc $\hat{A}; \hat{B}; \hat{C}$ lần lượt cắt cạnh đối diện tại của tam giác ΔABC tại A_1, B_1, C_1. CMR A_1, B_1, C_1 thẳng hàng và thuộc đường thẳng vuông góc với OI ở đây O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ΔABC

Hướng dẫn giải



Qua I k $, B_2, C_2$.

Có A_2

IA_2B ch

$\Rightarrow \Delta A_2BI \sim \Delta A_2IC$

$$\Rightarrow \frac{A_2B}{A_2I}=\frac{A_2I}{A_2C} \Rightarrow A_2B.A_2C$$

$$\Leftrightarrow P_{A_2/(I;O)}=P_{A_2/(O)}$$

$CMT^2: P_{B_2/(I;O)}=P_{B_2/(O)}$

$P_{C_2/(I;O)}=P_{C_2/(O)}$

$\Rightarrow A_2,B_2,C_2 \in$ trục đt của $(I;O)$ và $(O) \Rightarrow (A_2B_2C_2)\perp OI$ (1)

$AA_1 \cap BB_1=\{F\}$

$\Rightarrow F$ là tâm đường tròn bàng tiếp $\widehat{C}$ của $\Delta ABC \Rightarrow C, I, F$ thẳng hàng.

C

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AA_1\perp AI\\ A_2I\perp AI\end{array}\right\}\Rightarrow A_2I//AA_1\Rightarrow \dfrac{CA_2}{CA_1}=\dfrac{CI}{CF}\\ CMT^2: IB_2//FB_2\Rightarrow \dfrac{CI}{CF}=\dfrac{CB_2}{CB_1}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{CA_2}{CA_1}=\frac{CB_2}{CB_1}$$

CMT^2: $\Rightarrow A_2B_2//A_1B_1$ (2)

$\Rightarrow B_2C_2//B_1C_1$ (3)

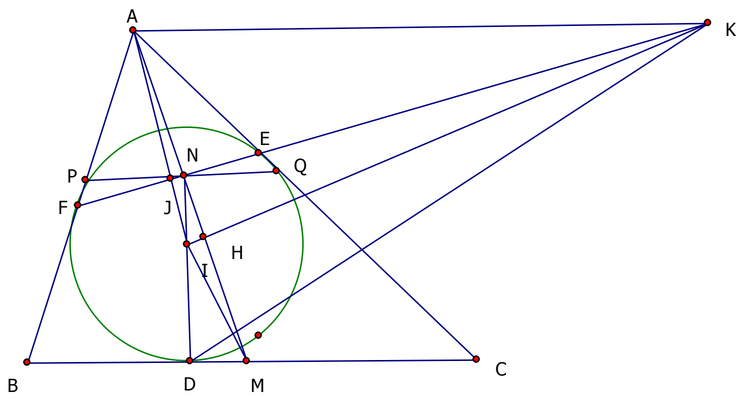
$(1)(2)(3)\Rightarrow A_1,B_1,C_1$ thẳng hàng và $(A_1B_1C_1)\perp OI$

Câu 9. **[Đề xuất lớp 11 Sở GD- ĐT Quảng Ninh- Trường THPT Chuyên Hạ Long]**

Giả sử đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự D, E, F. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt EF tại K. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $IM \perp DK$.

Hướng dẫn giải

Gọi N là giao điểm của ID và EF. Qua N N kẻ đường thẳng // BC cắt AB, AC theo thứ tự từ P, Q. Vì hai tứ giác $IFPN$ và $IQEN$ nội tiếp nên $\widehat{IFN}=\widehat{IPN}$



$\widehat{IEN}=\widehat{IQN}$

Mặt khác $\widehat{IEN}=\widehat{IFN}\Rightarrow \widehat{IPN}=\widehat{IQN}$. Do đó ΔIPQ cân tại I. Vậy N là trung điểm của PQ $\Rightarrow A, N, M$ thẳng hàng.

Lại có $IN\perp AK, KN\perp AI \Rightarrow N$ là trực tâm $\Delta AIK \Rightarrow AM\perp IK$

Gọi H là giao điểm của AM và IK

J là giao điểm của IA và EF

$$\Rightarrow \overline{IH}.\overline{IK} = \overline{IJ}.\overline{IA} = IE^2 = ID^2 \Rightarrow \Delta IHD : \Delta IDK(c-g-c) \rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IKD}$$

Mà $YIHMD$ nội tiếp nên $\widehat{IDH} = \widehat{IMH} \Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{IMH} \Rightarrow IM \perp DK$ (Đpcm).

Câu 10. **[ĐỀ NGHỊ THI CHỌN HSG VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LỚP 11 - Trêng T.H.P.T Chuyªn Th¸i B×nh.N¨m häc 2013-2014]**

Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi sao cho M thuộc AB, N thuộc AC và P, Q thuộc BC.

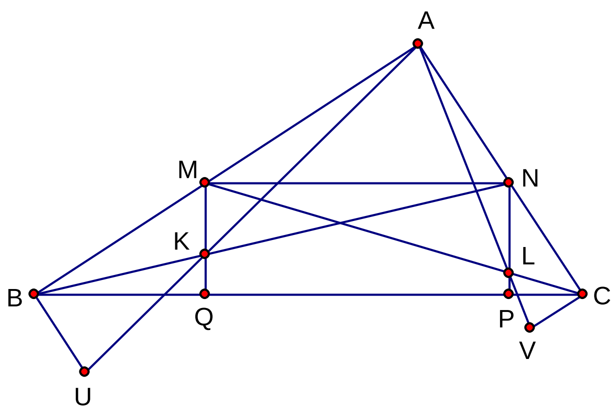
$K = BN \cap MQ$; $L = CM \cap NP$; $X = MP \cap NQ$; $Y = KP \cap LQ$. Chứng minh rằng.

1) $\widehat{KAB} = \widehat{LAC}$.

2) XY luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

1) Lấy U, V theo thứ tự thuộc AK, AL sao cho $\widehat{ABU} = \widehat{ACV} = 90°$ (h.1).



(h.2.1)

Ta có: $\dfrac{BU}{CV} = \dfrac{BU}{NA}.\dfrac{NA}{MA}.\dfrac{MA}{CV} = \dfrac{BK}{NK}.\dfrac{BA}{CA}.\dfrac{ML}{CL} = \dfrac{BQ}{NM}.\dfrac{BA}{CA}.\dfrac{MN}{CP}$

$$= \dfrac{BQ}{MQ}.\dfrac{CA}{BA}.\dfrac{NP}{CP} = \dfrac{BA}{CA}.\dfrac{CA}{BA}.\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{BA}{CA}.$$

Do đó các tam giác ABU, ACV đồng dạng.

Vậy $\widehat{KAB} = \widehat{LAC}$.

2) Đặt $Z = ML \cap NK$ (h.2.2).

Theo định lí Pappus: X, Y, Z thẳng hàng (1).

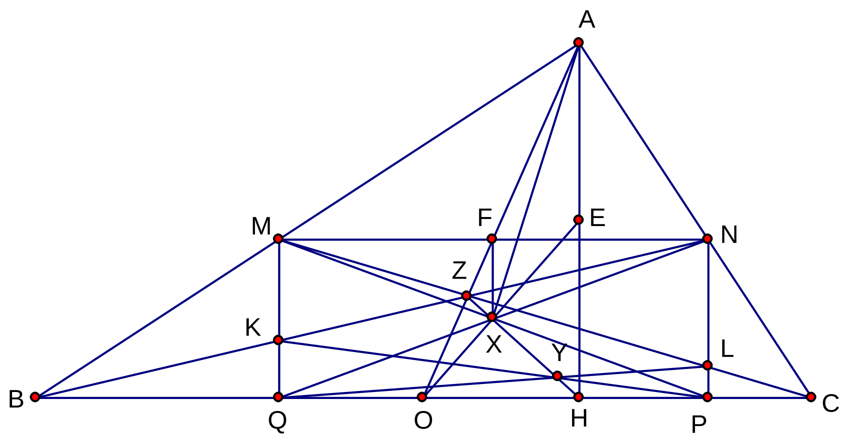
Gọi H là hình chiếu của A trên BC; O, F, E theo thứ tự là trung điểm của BC, MN, AH.

Dễ thấy A, Z, O, F thẳng hàng; E, X, O thẳng hàng; $FX \,//\, AH$.

Vậy $X(AHEF) = -1 = X(AZOF) = X(AZEF)$.

Do đó X, H, Z thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) suy ra XY đi qua H (đpcm).

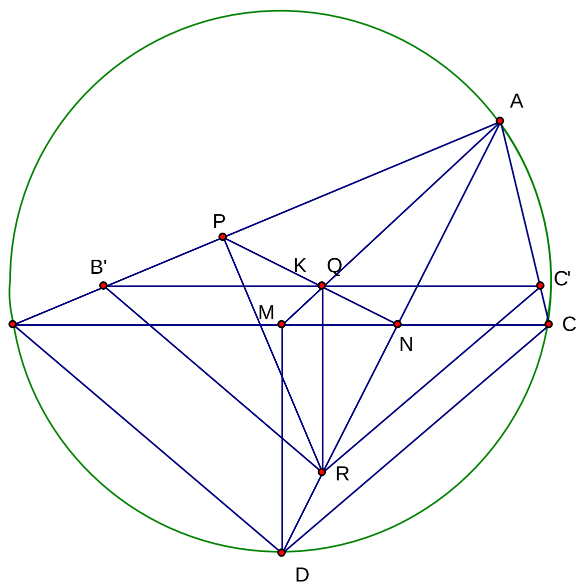


(h.2.2)

Câu 11. **[ĐỀ THI ĐỀ XUẤTTRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI-TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG]**

Cho tam giác ABC với $AB > AC$. Các đường trung tuyến và phân giác trong góc A cắt BC tại M và N tương ứng. Đường thẳng qua N vuông góc với AN cắt AB, AM lần lượt tại P và Q; đường thẳng qua P vuông góc với AB cắt đường thẳng AN tại R. Chứng minh QR vuông góc với BC.

Hướng dẫn giải



Gọi D là giao điểm thứ hai của AN với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, dễ thấy $DB = DC$ suy ra DM vuông góc với BC. Đặt $k = \dfrac{AR}{AD}$ và xét phép vị tự

$V_A^k : B \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto R$. Khi đó B' thuộc AB, C' thuộc AC và hai tam giác BCD và $B'C'R$ có các cạnh tương ứng song song.

Gọi K là giao điểm của PN với B′C′, ta có

$$\widehat{C'B'R} = \widehat{CBD} = \widehat{BAD} = 90^O - \widehat{ARP} = \widehat{RPN}$$

suy ra tứ giác RKPB′ nội tiếp. Từ đó $\widehat{B'KR} = \widehat{B'PR} = 90^0$.

Như vậy $V_A^k : M \mapsto K$ nên K là trung điểm B′C′, hay K thuộc AM, suy ra K trùng Q. Do B′C′ song song với BC mà QR vuông góc với B′C′ nên QR vuông góc với BC.

Câu 12. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG-ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** năm2015.**LẦN THỨ XI]**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H $(E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Lấy điểm T trên (O) sao cho $\widehat{ATH} = 90^o$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GTO cắt EF tại K $(K \neq G)$. Chứng minh rằng

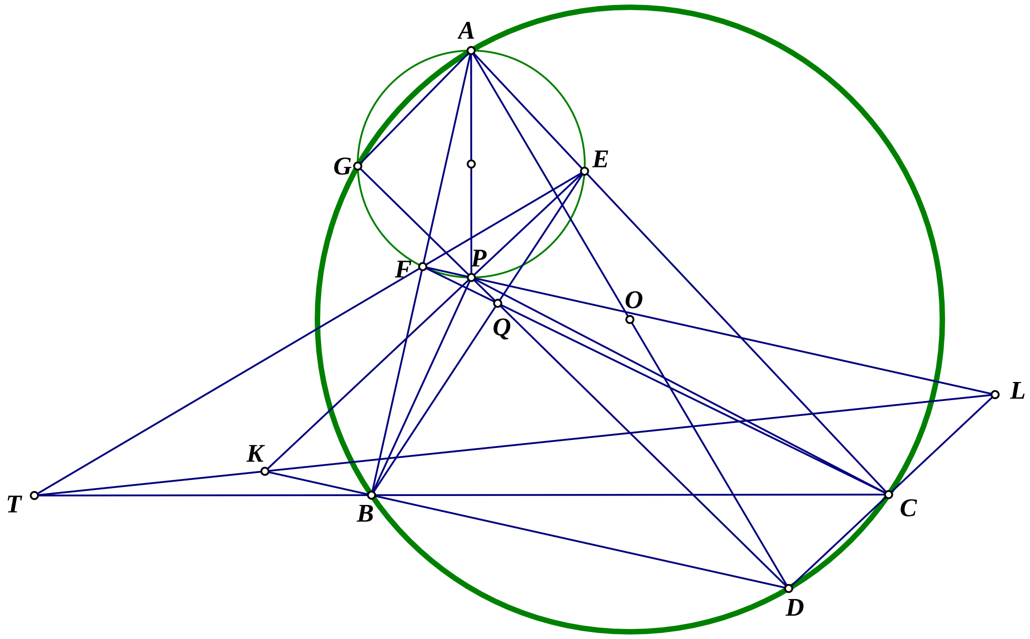
a) Ba điểm G, T, A thẳng hàng.

b) Đường thẳng OK vuông góc với đường thẳng AT.

Câu 13. **[Đề 59- TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC-ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘLẦN THỨ VIII- NĂM 2015.MÔN TOÁN - LỚP 11]**

Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AP \perp BC$. Đường tròn đường kính AP cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy.

Hướng dẫn giải



Gọi AD là đường kính của (O), dễ thấy G, P, D thẳng hàng và $PE \parallel CD; PF \parallel BD$. Giả sử PE, PF cắt DB, DC tại K, L; EF cắt BC tại T.

Theo định lý Desargues để chứng minh $BE,\ CF,\ GP$ (hay PD) đồng quy ta chỉ cần chứng minh T,K,L thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus ta được:

$$\frac{TB}{TC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1\Rightarrow\frac{TB}{TC}=\frac{FB}{EC}.\frac{AE}{AF}(1)$$

Dễ thấy tứ giác EFBC nội tiếp nên $\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{CF}(2)$

Cũng từ $EFBC$ nội tiếp suy ra

$\angle FCL=\angle FCA+\angle ACL=\angle EBA+90^0=\angle EBA+\angle ABK=\angle KBE$

Tứ giác $PKDL$ là hình bình hành suy ra $\angle PKB=\angle PLC$.

Suy ra $\Delta EBK:\ \Delta FCL\Rightarrow\frac{BE}{CF}=\frac{KB}{CL}(3)$.

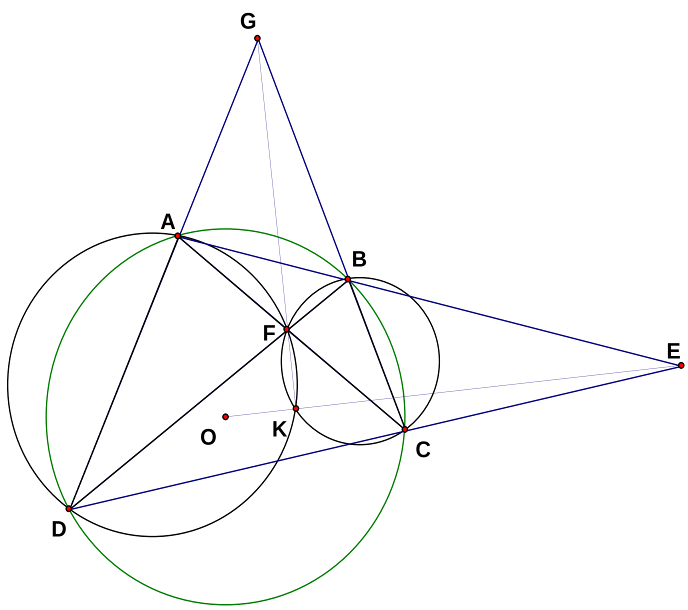
Ta có $BF.PL=CE.PK=S_{PKDL}\Rightarrow\frac{BF}{CE}=\frac{PK}{PL}=\frac{DL}{DK}(4)$

Thay $(2),(3),(4)$ vào (1) ta được $\frac{TB}{TC}=\frac{DL}{DK}.\frac{KB}{CL}\Rightarrow\frac{TB}{TC}.\frac{LC}{LD}.\frac{KD}{KB}=1$. Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác DBC ta suy ra T,K,L thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

Câu 14. **[SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÂM ĐỒNG- Trường THPT Chuyên BảoLộc-KỲ THI HSG KHU VỰC DH VÀ ĐBBB LẦN THỨ 9ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN: TOÁN; LỚP: 11]**

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC cắt nhau tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng hai đường thẳng EK và FK vuông góc.

Hướng dẫn giải



▪ Gọi G là giao điểm của AD và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Ta dùng kí hiệu (ABC), $(ABCD)$ tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tứ giác $ABCD$.

Ta có AD, BC, FK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(ABCD)$ và (ADF), $(ABCD)$ và (BCF), (ADF) và (BCF) nên AD, BC, FK đồng quy tại G hay F, K, G thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa K và G.

Ta có $\widehat{DKC} = (180^0 - \widehat{DKF}) + (180^0 - \widehat{CKF}) = \widehat{DAF} + \widehat{CBF} = \frac{1}{2}\widehat{DOC} + \frac{1}{2}\widehat{DOC} = \widehat{DOC}$

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm D, C, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là $(C1)$.

▪ Tương tự, các điểm A, B, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là $(C2)$.

Ta có AB, CD, OK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(ABCD)$ và $(C2)$, $(ABCD)$ *và* $(C1)$, $(C1)$ và $(C2)$ nên AB, CD, OK đồng quy tại E hay O, K, E thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O), ta có GF là đối cực của E nên GF vuông góc với OE

Mà G, K, F thẳng hàng; O, K, E thẳng hàng nên EK và FK vuông góc (điều phải chứng minh).

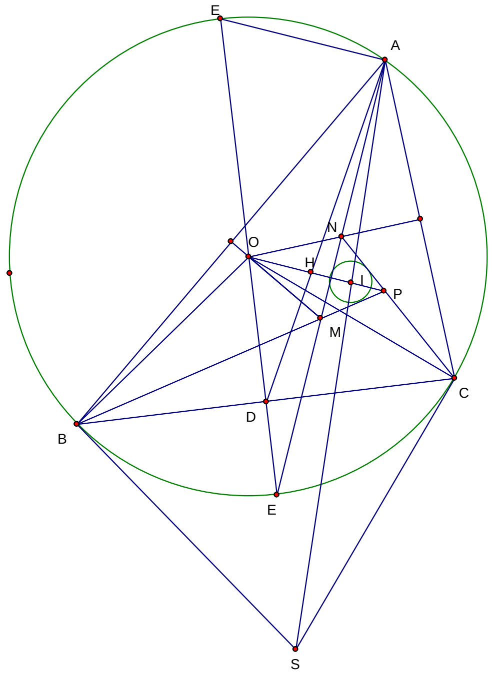
Câu 15. **[KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ IX, NĂM HỌC 2015 –2016. ĐỀ THI MÔN TOÁN – KHỐI 11]**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B,C cắt nhau tại S. Gọi d là đường thẳng chứa phân giác trong góc A của tam giác ABC. Các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC cắt d lần lượt tại M và N. Gọi P là giao điểm của BM và CN, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP, H là trực tâm của tam giác OMN.

a. Chứng minh H, I đối xứng với nhau qua d.

b. Chứng minh A, I, S thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh OP là trung trực của MN

Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi D là trung điểm của BC, E là giao điểm (khác A) của d với (O), F là trung điểm của MN.

Vì hai tam giác MAB và NAC cân nên dễ thấy:

$\widehat{PMN} = \widehat{PNM}, \widehat{OMN} = \widehat{ONM}$

Suy ra, tam giác PMN cân tại P và tam giác OMN cân tại O. Vậy OP là trung trực của MN.

+) Chứng minh H, I đối xứng với nhau qua d

Ta có: $\widehat{IMF} = \frac{1}{2}\widehat{BME} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}, \widehat{HMF} = \widehat{HON} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IMF} = \widehat{HMF}$.

Vậy hai điểm I và H đối xứng với nhau qua d.

b) Chứng minh AD, AS đối xứng với nhau qua AE

Gọi EK là đường kính của (O).

Ta có $(DSEK) = -1$ nên A$(DSEK) = -1$ mà AE và AK vuông góc với nhau suy ra AE là phân giác góc $\widehat{SAD}$.

Vậy AD, AS đối xứng với nhau qua AE.

+) Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục d ta thấy A, I, S thẳng hàng khi và chỉ khi A, H, D thẳng hàng. Ta dùng Melenauyt với tam giác OEF để chứng minh điều này.

$$\frac{HO}{HF}=\frac{FO}{FH}-1=\frac{MF\cot\frac{A}{2}}{MF\tan\frac{A}{2}}-1=\frac{\cos A}{\sin^2\frac{A}{2}};\quad \frac{DE}{DO}=\frac{R(1-\cos A)}{R\cos A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}\Rightarrow\frac{HO}{HF}.\frac{DE}{DO}.\frac{AF}{AE}=1.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 16. **[HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ- TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HÒA-2006]**

Cho tam giác ΔABC với H là trực tâm tam giác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua CA, F là điểm đối xứng của C qua AB. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi $OH=2R$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ΔABC. A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Gọi I, J, K là tam giác nhận A, B, C là trung điểm các cạnh JK, KI, IJ. Do đó G là trọng tâm tam giác IJK.

Từ cách dựng suy ra HA, HB, HC lần lượt là đường trung trực của JK, KI, IJ. Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kính 2R.*

Gọi D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường JK, KI, IJ. Do G là trọng tâm hai tam giác trên nên:

Xét $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ *biến* A, B, C, I, J, K thành A, B, C, A', B', C'

Có A' là trung điểm BC nên $OA'\perp BC$, $OD'\perp JK\Rightarrow OD\perp BC$. Vậy O, A', D' thẳng hàng. Do đó $A'D'\perp BC$.

Suy ra $A'D'//AD$ và $A'D=\frac{1}{2}AD\Rightarrow\angle GAD=\angle GA'D'$

$\Rightarrow\angle AGD=\angle A'GD'$

$\Rightarrow\angle AGD+\angle AGD'=\angle A'GD'+\angle AGD'=180^{o}$

Vậy D, G, D' thẳng hàng và $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ biến D thành D'

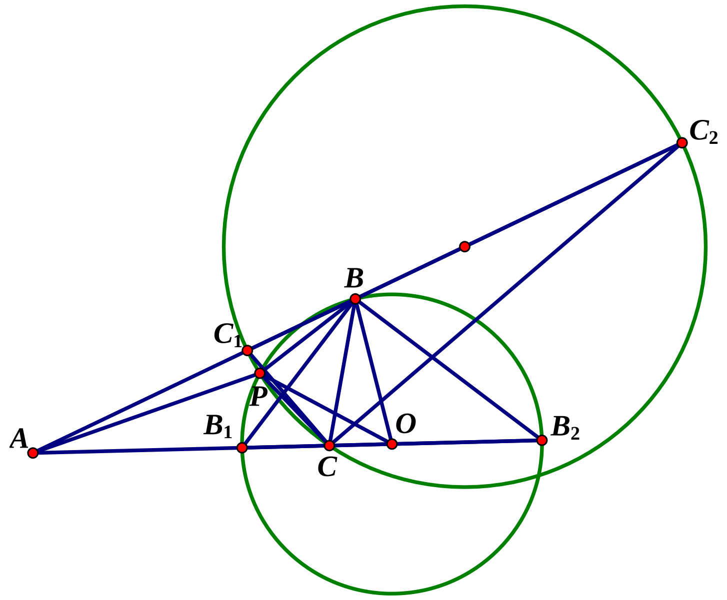
Tương tự có $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ biến E thành E' biến F thành F'.

D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi D', E', F' thẳng hàng. Do D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường JK, KI, IJ nên theo định lí Simson D', E', F' thẳng hàng $\Leftrightarrow O$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta IJK\Leftrightarrow OH=2R$

Câu 17. [HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ. **TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM** ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI 11NĂM 2015- **TỈNH QUẢNG NAM]**

Cho ΔABC nhọn có $\widehat{BAC}=30^0$. Hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ABC}$ lần lượt cắt đường thẳng AC tại B_1 và B_2; hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường thẳng AB tại C_1, C_2. Giả sử hai đường tròn đường kính B_1B_2 và C_1C_2 gặp nhau tại một điểm P nằm bên trong ΔABC. Chứng minh rằng $\widehat{BPC}=90^0$.

Hướng dẫn giải



Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng B_1B_2.

Khi đó hai điểm B và P nằm trên đường tròn tâm O bán kính OB_1.

Vì $\widehat{OBC}=\widehat{OBB_1}-\widehat{CBB_1}=\widehat{OB_1B}-\widehat{B_1BA}=\widehat{BAC}$ nên $\Delta OCB \backsim \Delta OBA$,

Suy ra $OC.OA=OB^2=OP^2$.

Từ đó $\Delta OCP \backsim \Delta OPA \Rightarrow \widehat{OPC}=\widehat{PAC}$.

Do đó

$$\widehat{PBC}-\widehat{PBA}=\left(\widehat{B_1BC}+\widehat{PBB_1}\right)-\left(\widehat{ABB_1}-\widehat{PBB_1}\right)=2\widehat{PBB_1}=\widehat{POB_1}=\widehat{PCA}-\widehat{OPC}$$

Như vậy $\widehat{PBC}-\widehat{PBA}=\widehat{PCA}-\widehat{PAC}$ suy ra $\widehat{PAC}+\widehat{PBC}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\,(1)$

Tương tự ta cũng có $\widehat{PAB}+\widehat{PCB}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\ (2)$.

Ngoài ra $\left(\widehat{PAC}+\widehat{PBC}\right)+\left(\widehat{PAB}+\widehat{PCB}\right)+\left(\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\right)=180^0\ (3)$

Từ $(1);(2);(3)$ ta đi đến $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=60^0$.

Suy ra $\widehat{BPC}=\left(\widehat{PBA}+\widehat{PAB}\right)+\left(\widehat{PCA}+\widehat{PAC}\right)=\widehat{BAC}+\left(\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\right)=90^0$.

Câu 18. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X, NĂM HỌC 2013-2014. TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ -HÒA BÌNH]**

Cho tam giác ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh AC, BC lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại điểm P. Một đường thẳng song song với AB tiếp xúc với đường tròn tâm I tại điểm Q nằm trong tam giác AB**C.**

a) Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của PE và PF với (O). Chứng minh rằng KL song song với EF

b) Chứng minh rằng: $\widehat{ACP} = \widehat{QCB}$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ.

Xét phép vị tự V tâm P biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự V biến E, Q, F lần lượt thành K, M, L.

Theo tính chất của phép vị tự ta có $EF // KL$ EF.

Ta có OK là ảnh của IE qua V, dẫn đến $OK // IE$ mà $IE \perp AC \Rightarrow OK \perp AC$, suy ra K là điểm chính giữa của cung AC. Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung AB.

b) Ta có

$$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BL} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{KA}$$

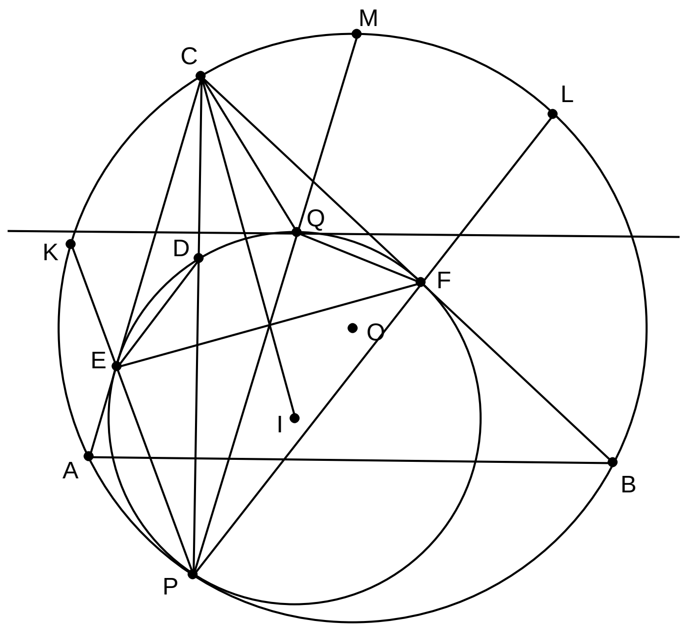
$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{CK}$$

$$\Leftrightarrow 2\overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MC} + 2\overset{\frown}{CK}$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{CK}$$

$\Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{PQ}$ (tính chất phép vị tự).

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{QFC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và $DE = QF$.



Lại có $CE = CF$ theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$, dẫn đến $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh

Câu 19. **[THI HSG VĨNH PHÚC NĂM 2008-2009]**

Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E là giao điểm của AC với BD. CMR nếu ba trung điểm của AD, BC, OE thẳng hàng thì $AB = CD$ hoặc $\widehat{AEB} = 90^0$

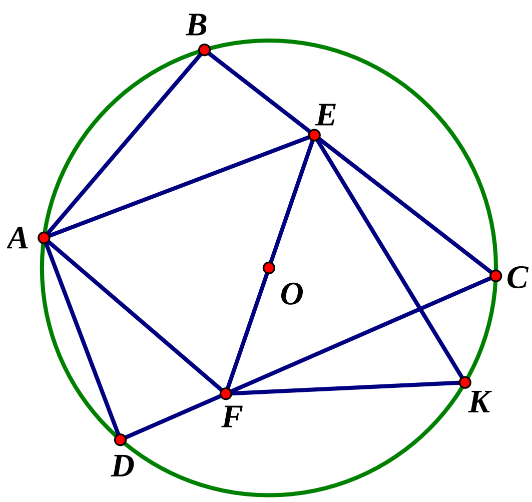
PHẦN HÌNH HỌC PHẲNG

LOẠI 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.

Câu 20. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH TỈNH YÊN BÁI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Đường vuông góc với AD tại A cắt BC ở E. Đường vuông góc với AB tại A cắt CD ở F. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{ECF}$ cùng bù với góc $\widehat{BAD}$, các đỉnh A, C lại thuộc hai phía của đường thẳng EF. Lấy K là điểm đối xứng của A qua EF.

Ta có $\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$ (do t/c đối xứng) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{ECF}$ suy ra tứ giác ECKF nội tiếp

Suy ra $\widehat{FCK} = \widehat{FEK}$ mà $\widehat{FEK} = \widehat{AEF}$ (t/c đối xứng).

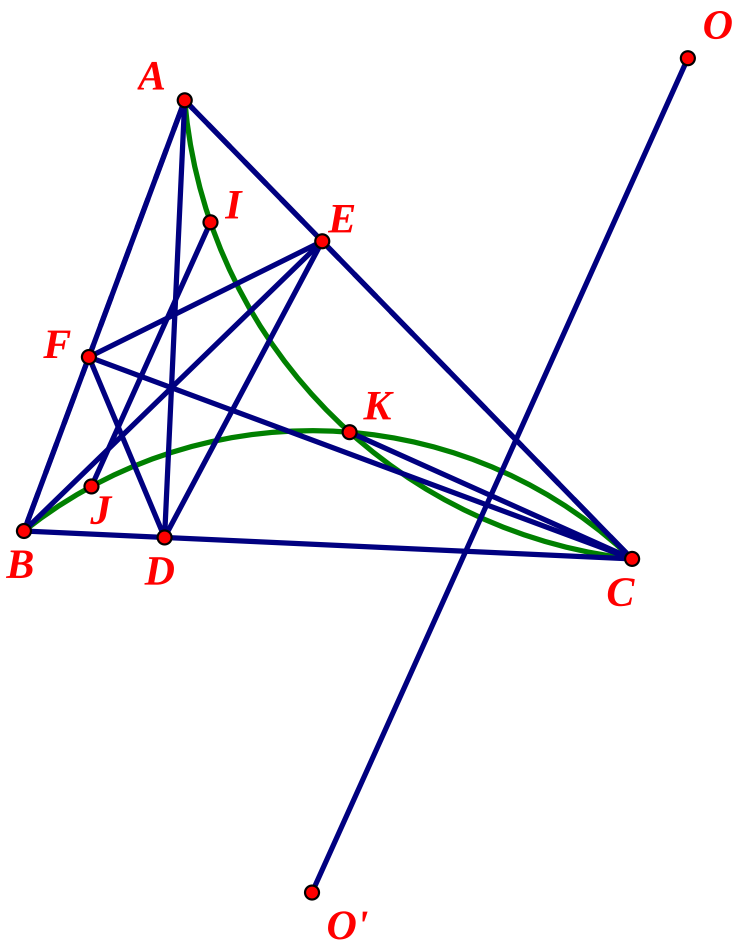
mặt khác $\widehat{AEF} = \widehat{DAK}$ (cùng phụ $\widehat{EAK}$), suy ra $\widehat{DCK} = \widehat{DAK}$ mà hai góc này ở hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh DK. suy ra tứ giác ADKC nội tiếp suy ra K thuộc (O).

Vậy EF là đường trung trực của dây AK suy ra E, O, F thẳng hàng.

Câu 21. [TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY NINH BÌNH]

Cho tam giác ABC nhọn. Gọi D, E, F tương ứng là chân ba đường cao từ A, B, C của tam giác. I và J tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AEF và BF**D.** O và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIC và BJ**D.** Chứng minh: OO' // IJ.

Hướng dẫn giải



Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDE.

Ta có: $\Delta BDF \backsim \Delta EDC \Rightarrow \Delta JDF \backsim \Delta KDC$ (vì J, K là tâm đường tròn nội tiếp hai tam giác)

Suy ra $\Delta DJK \backsim \Delta DFC$.

Ta có:

$$\widehat{JBD}+\widehat{JKC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\widehat{JKD}+\widehat{DKC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\widehat{DCF}+180^0-\widehat{KCD}-\widehat{KDC}=$$

$$=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+90^0-\widehat{DBA}+180^0-\frac{1}{2}\widehat{ACB}-\frac{1}{2}\widehat{EDC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\widehat{DAB}+180^0-\frac{1}{2}\widehat{ACB}-\frac{1}{2}\widehat{BAC}=180^0.$$

Suy ra tứ giác BJKC nội tiếp đường tròn. (1)

Tương tự AIKC nội tiếp đường tròn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OO'\perp CK$. (3)

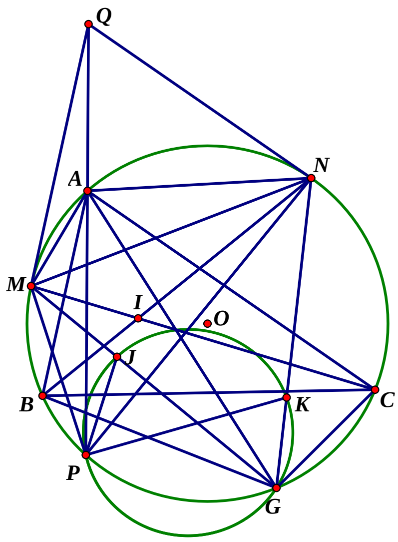
Ta có:

$$\widehat{IJK}=360^0-\widehat{IJB}-\widehat{BJK}=360^0-(180^0-\frac{1}{2}\widehat{BAC})-(180^0-\frac{1}{2}\widehat{BCA})=90^0-\frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

Suy ra $IJ\perp CK$. (4)

Từ (3) và (4) ta có OO' // IJ.

Câu 22. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG** TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại N khác B, đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại M khác **C.** Trên cung BC không chứa A của đường tròn (O) lấy điểm G tùy ý (G khác B, C). Gọi J, K lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABG, ACG. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GJK cắt đường tròn (O) tại điểm P khác G. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, N cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng ba điểm P, A, Q thẳng hàng.
Hướng dẫn giải



Ta có G, J, M và G, K, N thẳng hàng. Hai tam giác PJM và PKN có

$$\widehat{PMJ}=\widehat{PNK}\,;\ \widehat{PJM}=180^0-\widehat{PJG}=180^0-\widehat{PKG}=\widehat{PKN}\,.$$

Suy ra hai tam giác PJM và PKN đồng dạng. Do đó: $\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{MJ}{NK}$.

Vì J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABG và M là điểm chính giữa cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABG nên MJ = M**A.**

Tương tự NK = N**A.** Suy ra $\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{AM}{AN}$. Do đó PMAN là tứ giác điều hòa.

Vì PMAN là tứ giác điều hòa nội tiếp đường tròn (O) nên các tiếp tuyến của (O) tại M, N cắt nhau tại điểm Q trên PA hay ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

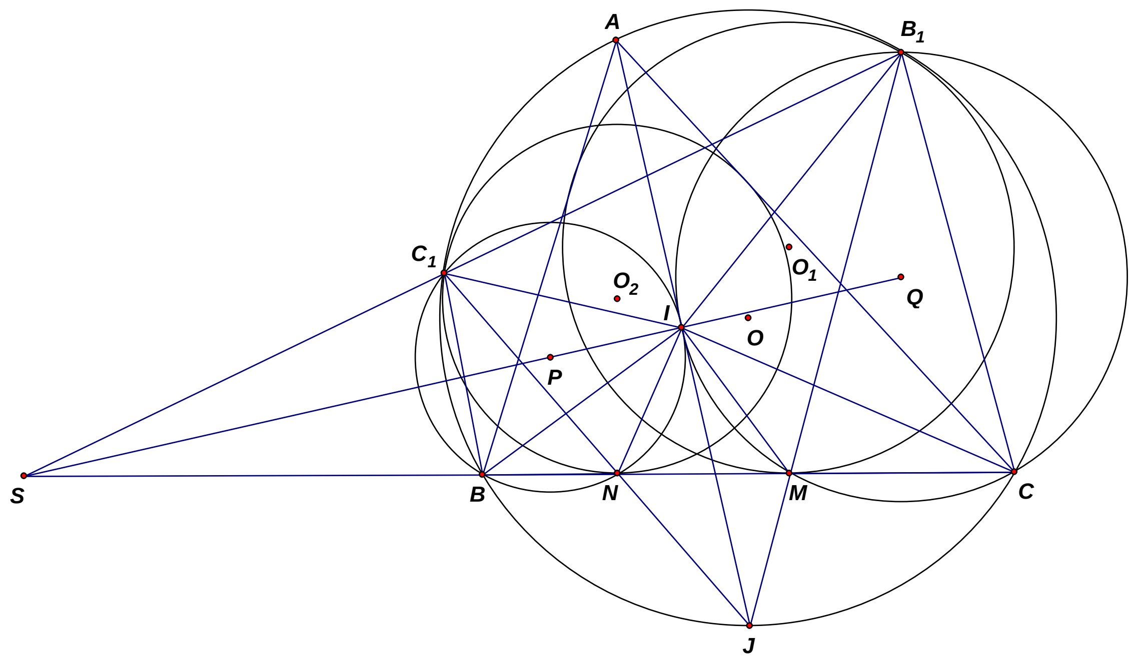
Câu 23. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG]

Cho tam giác ABC không cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Đường tròn (O_1) tiếp xúc với các cạnh BA, BC và tiếp xúc trong với (O) tại B_1. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với các cạnh CA, BC và tiếp xúc trong với (O) tại C_1.

Hướng dẫn giải

1. Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của BC với các đường tròn $(O_1), (O_2)$ và J là giao điểm của B_1M, C_1N. Chứng minh rằng AJ là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác B_1CM, C_1BN.

2. Gọi S là giao điểm của BC và B_1C_1. Chứng minh rằng $\widehat{AIS}=90^0$.



1. Gọi J_1, J_2 lần lượt là giao điểm thứ 2 của B_1M, C_1N với (O)

Ta có $\Delta O_1B_1M, \Delta OB_1J_1$ là các tam giác cân tại O_1, O, mà O, O_1, B_1 thẳng hàng nên suy ra $OJ_1 \parallel O_1M$. Do đó $OJ_1 \perp BC$

Chứng minh tương tự ta có $OJ_2 \perp BC$

Mà J_1, J_2 cùng phía đối với BC nên suy ra $J_1 \equiv J_2 \equiv J$. Suy ra J là điểm chính giữa của cung BC nên A, I, J thẳng hàng và $JB = JC = JI$.

Ta có $\Delta IBN \sim \Delta ABI$ nên $\widehat{BIN} = \widehat{BAI} = \widehat{BC_1N}$ suy ra tứ giác BC_1IN nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có tứ giác CB_1IM nội tiếp.

Mặt khác ta có $\overline{JM}.\overline{JB_1} = JB^2 = JC^2 = \overline{JN}.\overline{JC_1} = JI^2$

Vậy AJ là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác B_1CM, C_1BN.

2. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác B_1CM, C_1BN thì $PQ \perp AJ$ tại I.

Vì $\overline{JM}.\overline{JB_1} = JB^2 = JC^2 = \overline{JN}.\overline{JC_1} = JI^2$ nên tứ giác MNC_1B_1 nội tiếp.

Gọi $S_1 = PQ \cap BC$. Do ΔPBN và ΔQCM là các tam giác cân có các góc ở đỉnh bằng $2\widehat{BAJ}$ nên chúng đồng dạng. Suy ra $\widehat{PBN} = \widehat{PNB} = \widehat{QCM} = \widehat{QMC}$. Do đó $PB \| QN, PN \| QC$

$\Rightarrow \dfrac{S_1P}{S_1Q} = \dfrac{S_1B}{S_1M} = \dfrac{S_1N}{S_1C} \Rightarrow S_1B.S_1C = S_1M.S_1N$ do đó S_1 thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(MNC_1B_1), (ABC) \Rightarrow S_1 \in B_1C_1$ hay PQ, B_1C_1, BC đồng quy tại S_1 $S_1 \equiv S$.

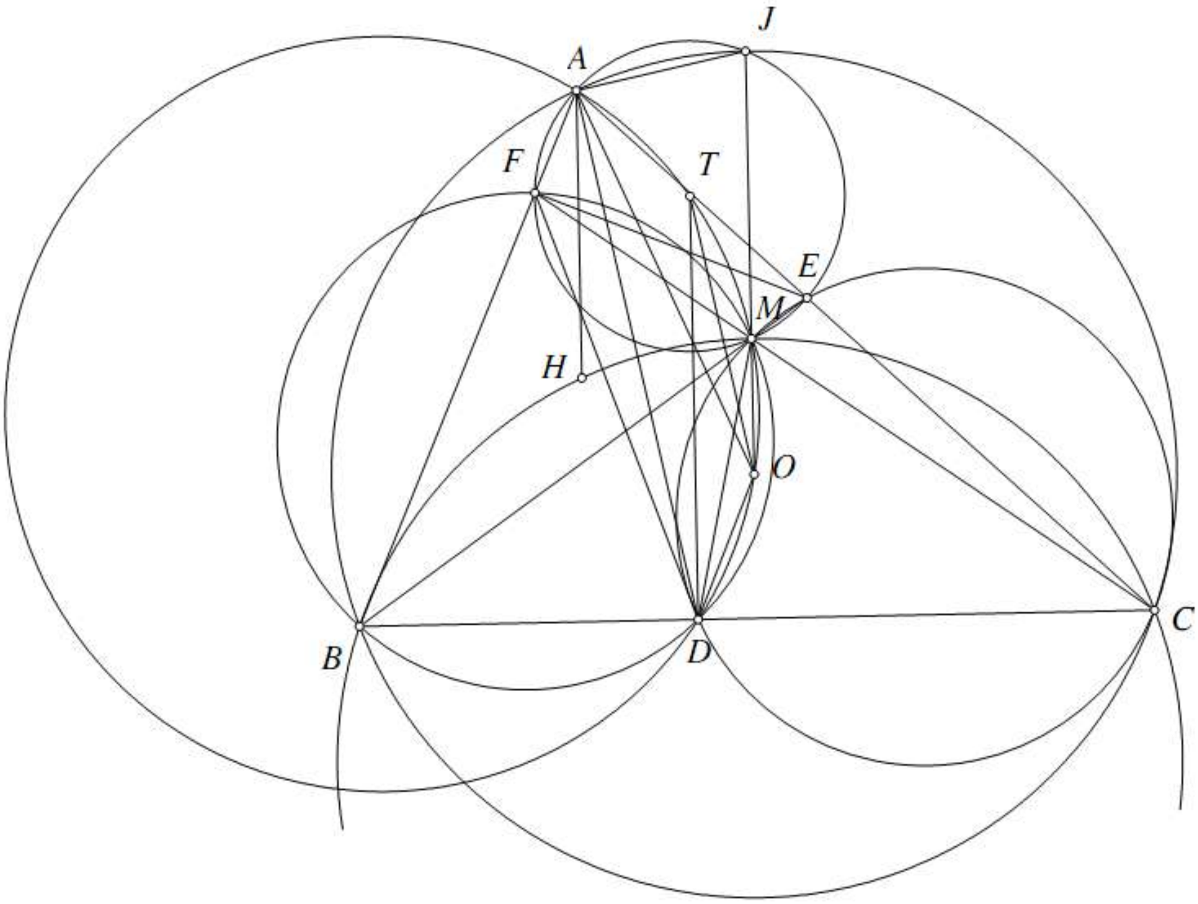
Vậy $\widehat{AIS} = 90^0$

Câu 24. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI TỈNH LÀO CAI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]**
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trực tâm tam giác ABC là H. Gọi M là điểm chính giữa cung BHC của đường tròn ngoại tiếp tam giác $BHC.BM$ giao AC tại E, CM giao AB tại F. Kẻ phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

a) Chứng minh $TD \perp BC$

b) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF bằng OD.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\widehat{FAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{MCB}$ nên tứ giác $FACD$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{DFC} = \widehat{DAC} = \widehat{MBC}$, ta thhu được tứ giác $FMDB$ nội tiếp, tương tự tứ giác $MECD$ nội tiếp.

Dễ có $M \in (AEF)$ (đường tròn qua 3 điểm A, E, F), gọi I là tâm của (AEF). Ta có:

$$TB^2 - TC^2 = \wp_{B/(T)} - \wp_{C/(T)} = BM.BE - CM.CF = BD.BC - CD.CB = BC(BD - CD)$$
$$= (BD + CD)(BD - CD) = BD^2 - CD^2$$

Suy ra $TD \perp BC$.

b) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \widehat{MDC}$ nên DA và DM đối xứng với nhau qua DT.

Do $BM = CM$ và $\widehat{BFM} + \widehat{CEM} = 180^0$ nên $R_{(BMF)} = R_{(BMF)}$. Suy ra $BF = CE$.

Ta có (AEF) giao (O) tại J là tâm của phép vị tự quay biến BF thành CE nên $JB = JC$. Do $OT \perp AJ$ và $AJ \perp AD$ nên $OT \parallel AD$.

Ta thu được $\widehat{TOM} = \widehat{ADT} = \widehat{TDM}$, suy ra tứ giác $TMOD$ nội tiếp. Mà $OM \parallel TD$ nên $TMOD$ là hình thang cân. Vậy $TM = OD$, hay $R_{(AEF)} = OD$.

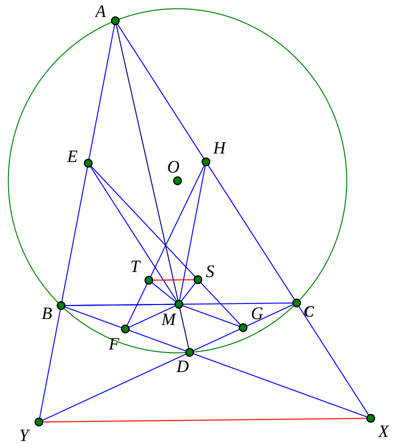
Câu 25. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN** CHU VĂN AN **TỈNH LẠNG SƠN TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]**

Cho tam giác *ABD* nội tiếp đường tròn (*O*). Gọi *M* là trung điểm của *BC* và *AM* cắt (*O*) tại ***D.*** Gọi *E, F, G, H* là trung điểm của *AB, BD, DC, CA*. Phân giác trong các góc $\widehat{EMG}; \widehat{FMH}$ cắt *EG, FH* tương ứng tại *S, T*. Gọi $X = AC \cap BD$ $Y = AB \cap CD$.

a. Chứng minh rằng $ST \parallel XY$.

b. $P = MS \cap FH; R = MT \cap EG$. Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của PR.

Hướng dẫn giải



a)

Ta có $\Delta ABM \backsim \Delta CDM; \Delta AMC \backsim \Delta BMD$ nên

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AC}{BD}.$$

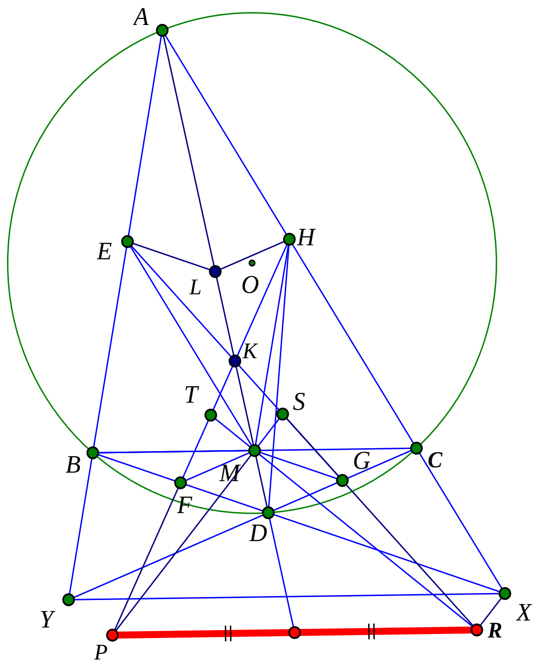
Hơn nữa, ME, MG, MF, MH là các đường trung tuyến tương ứng nên suy ra $\frac{ME}{MG} = \frac{AB}{CD} = \frac{AC}{BD} = \frac{MH}{MF}$. Vì MS, MT là phân giác nên $\frac{SE}{SG} = \frac{ME}{MG} = \frac{MH}{MF} = \frac{TH}{TF}$.

Chú ý $EFGH$ là hình bình hành nên $EH \parallel FG$, theo định lí ***Thales*** thì suy ra $ST \parallel EH \parallel FG$, suy ra $ST \parallel BD$ (1).

Mặt khác, áp dụng định lí ***Ceva*** cho tam giác ABC với các đoạn AM, CY, BX thì ta được $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{XC}{XA} \cdot \frac{YA}{YB} = 1 \Rightarrow \frac{XC}{XA} = \frac{YB}{YA}$ nên suy ra $XY \parallel BD$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $ST \parallel XY$.

b)



Gọi L là trung điểm của AD. Thế thì các tứ giác $LHMF$, $LEMG$, $EFGH$ là hình bình hành nên suy ra EG, FH, LM đồng quy tại trung điểm K mỗi đoạn thẳng.

Mặt khác, dễ thấy $\widehat{BMF}=\widehat{AMH}$; $\widehat{TMF}=\widehat{TMH}$ suy ra $\widehat{TMB}=\widehat{TMA}$, tức là MT là phân giác góc $\widehat{AMB}$.

Tương tự thì MS là phân giác góc $\widehat{AMC}$ nên suy ra $MT\perp MS$. Do đó MR là phân giác ngoài của $\widehat{EMG}$.

Tương tự thì MP là phân giác ngoài góc $\widehat{FMH}$. Suy ra $\frac{PH}{PF}=\frac{TH}{TF}=\frac{SE}{SG}=\frac{RE}{RG}\Rightarrow PR\parallel ST\parallel EH$. Dễ thấy AK đi qua trung điểm của EH nên cũng đi qua trung điểm của PR.

Nhận xét và bình luận và phát triển bài toán:

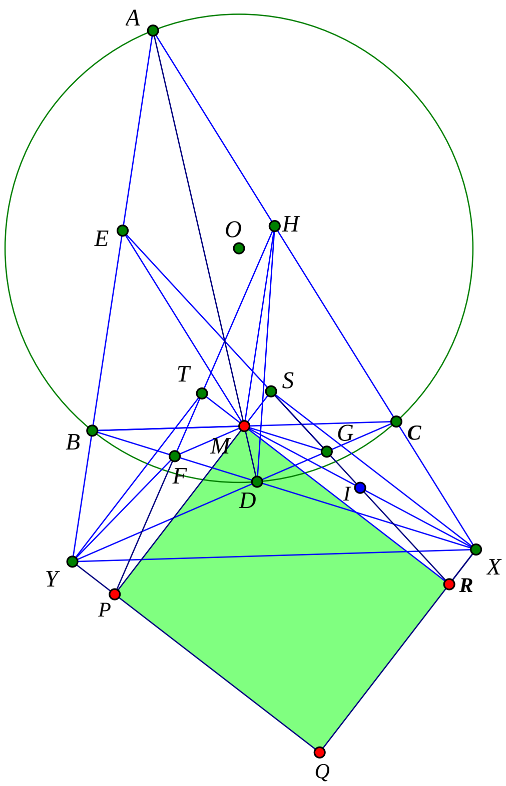
+ Ý a) là kết quả của các tỉ số đồng dạng kết hợp với đường phân giác. Cùng với việc chú ý tới định lí Thales và hình bình hành $EFGH$.

+ Ý b) là một hệ quả kéo theo với việc nhận thấy $MT\perp MS$ từ đó suy ra MS, MR là phân giác trong và ngoài của $\widehat{EMG}$.

+ Ta có thể thu được kết quả rất thú vị sau: Gọi $P=MS\cap FH; R=MT\cap EG; Q=YP\cap XR$. Khi đó $MPQR$ là hình chữ nhật.

Chứng minh: Dễ thấy $\Delta XCD\backsim\Delta XBA$ với XE, XG là trung tuyến tương ứng, do đó $\frac{XE}{XG}=\frac{AB}{CD}=\frac{ME}{MG}=k$ nên X, M nằm trên đường tròn ***Apollonius*** dựng trên E, G với tỉ số k. Do đó, $\frac{ME}{MG}=\frac{SE}{SG}=\frac{XE}{XG}=k$ nên M, X, S cùng nằm trên đường tròn *Apollonius* đó. Hơn nữa, dễ thấy $\widehat{BMF} = \widehat{AMH}$, $\widehat{TMF} = \widehat{TMH}$ suy ra $\widehat{TMB} = \widehat{TMA}$, tức là MT là phân giác góc $\widehat{AMB}$.

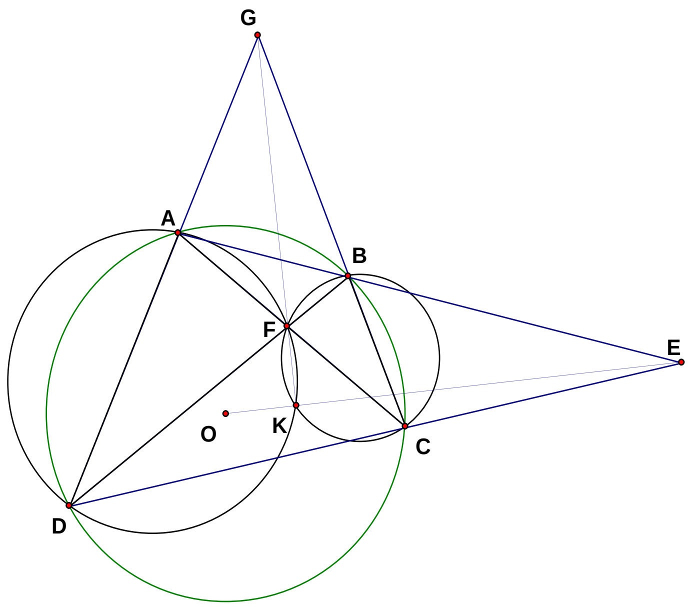
Tương tự thì MS là phân giác góc $\widehat{AMC}$ nên suy ra $MT \perp MS$ (3). Do đó, MR là phân giác ngoài của $\widehat{EMG}$ và MS là phân giác trong, nên đường tròn đường kính MS là đường tròn *Apollonius* dựng trên E, G. Do đó, tứ giác $MSXR$ nội tiếp. Gọi I là trùng điểm của MX. Xét tứ giác toàn phần $XDMCAB$, thì E, G, I thẳng hàng (nằm trên ***đường thẳngGauss***). Do đó, SR là đường kính đường tròn *Apollonius* đó. Vậy, $\widehat{MRX} = 90^0$ (3). Tương tự thì $\widehat{MPY} = 90^0$ (5). Từ (3), (4), (5) suy ra $MPQR$ là hình chữ nhật.



Câu 26. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2014 KỲ THI OLYMPIC TOÁN KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2014]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC cắt nhau tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng hai đường thẳng EK và FK vuông góc.

Hướng dẫn giải



▪ Gọi G là giao điểm của AD và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABC**D.**

Ta dùng kí hiệu (ABC), (ABCD) tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tứ giác ABC**D.**

Ta có AD, BC, FK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (ADF), (ABCD) và (BCF), (ADF) và (BCF) nên AD, BC, FK đồng quy tại G hay F, K, G thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa K và G.

Ta có $\widehat{DKC} = (180^0 - \widehat{DKF}) + (180^0 - \widehat{CKF}) = \widehat{DAF} + \widehat{CBF} = \frac{1}{2}\widehat{DOC} + \frac{1}{2}\widehat{DOC} = \widehat{DOC}$

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm D, C, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C_1).

▪ Tương tự, các điểm A, B, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C_2).

Ta có AB, CD, OK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (C_2),

(ABCD) và (C_1), (C_1) và (C_2) nên AB, CD, OK đồng quy tại E hay O, K, E thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O), ta có GF là đối cực của E

nên GF vuông góc với OE

Mà G, K, F thẳng hàng; O, K, E thẳng hàng nên EK và FK vuông góc (điều phải chứng minh).

Câu 27. **[Trường THPT Chuyên Hưng Yên ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 11VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ]**

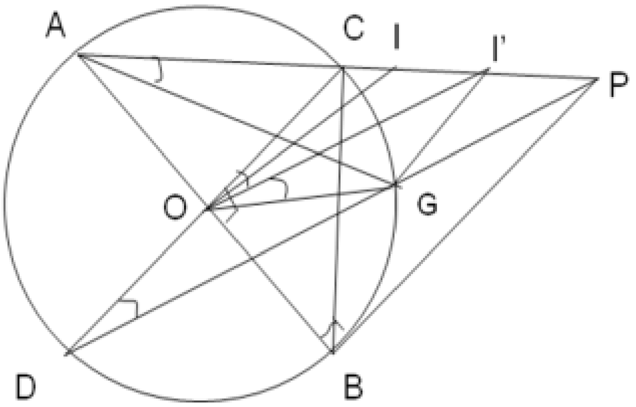
Cho đường tròn (τ) tâm O và AB, CD là hai đường kính của đường tròn đó. Tiếp tuyến với đường tròn (τ) tại B cắt AC tại P. Gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng DP với đường tròn (τ). Gọi I là trung điểm của AP. Chứng minh rằng

a) Các điểm O, B, C, I cùng nằm trên một đường tròn

b) Ba đường thẳng AG, BC, OP đồng qui.

Hướng dẫn giải

a). Ta có $OI // BP$ nên $\angle IOB = \angle OBP = 90^0$. Mà $\angle BCI = 90^0$ suy ra 4 điểm O, B, C, I nằm trên đường tròn (ω) đường kính BI.



b) Gọi I' là trung điểm của PC. Ta có $OI' // DP$ nên $\angle COI' = \angle CDG$ (1).

Mà $\angle CDG = \angle CAG$ (2). Tam giác CGP vuông tại G có $GI' = CI' = \frac{1}{2}CP$ suy ra

$\Delta OCI' = \Delta OGI'$ (c.c.c), do đó $\angle COI' = \angle I'OG$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta có $\angle CAG = \angle I'OG$ suy ra 4 điểm I', A, O, G nằm trên một đường tròn (ω').

Ta có $\wp_{O/(\omega)} = \wp_{O/(\omega')} = 0$

Hơn nữa $\wp_{P/(\omega)} = \overline{PI}.\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{PA}.2\overline{PI'} = \overline{PA}.\overline{PI'} = \wp_{P/(\omega')}$ suy ra OP là trục đẳng phương của hai đường tròn (ω) và (ω').

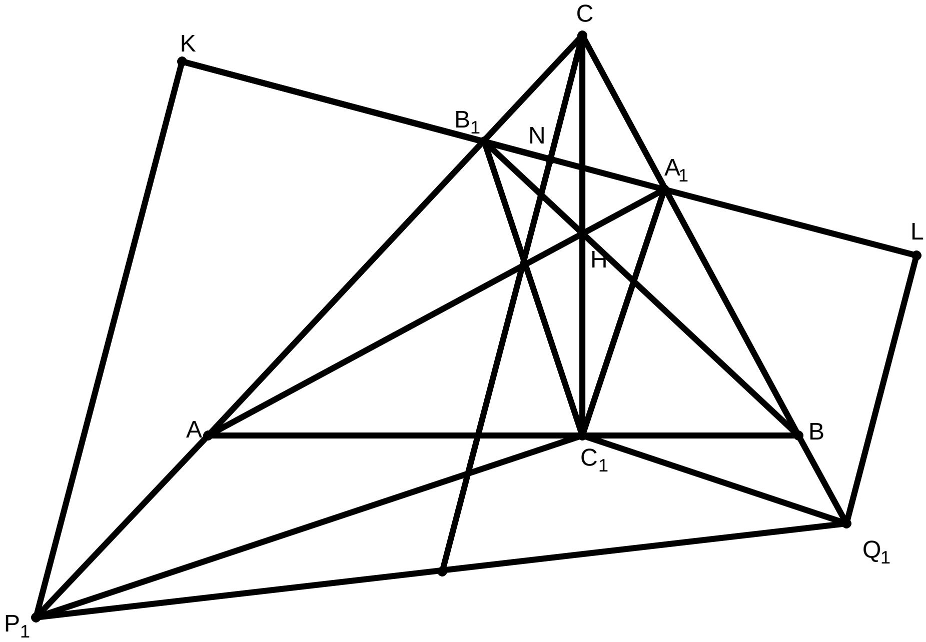
AG là trục đẳng phương của hai đường tròn (τ) và (ω'). BC là trục đẳng phương của hai đường tròn (τ) và (ω).

Vậy ba đường thẳng AG, BC, OP đồng qui tại S là tâm đẳng phương của ba đường tròn (τ), (ω) và (ω').

Câu 28. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ** HÒA BÌNH **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC THPT VÙNG DUYÊN HẢI &ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VII, NĂM HỌC 2011-2012]**
. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trực tâm H. Đường vuông góc kẻ từ H tới đường thẳng B_1C_1 và A_1C_1 lần lượt cắt các đường CA và CB tại P và Q. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ C tới A_1B_1 đi qua trung điểm của PQ.

Hướng dẫn giải

1. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trực tâm H. Đường vuông góc kẻ từ H tới đường thẳng B_1C_1 và A_1C_1 lần lượt cắt các đường CA và CB tại P và Q. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ C tới A_1B_1 đi qua trung điểm của PQ.



Xét phép vị tự V tâm C biến H thành C_1. Gọi P_1, Q_1 lần lượt là ảnh của P, Q qua phép vị tự V tâm **C.** Từ tính chất của phép vị tự có $C_1P_1 \perp C_1B_1$, $C_1Q_1 \perp C_1A_1$.

Gọi N, K, L lần lượt là hình chiếu của C, P_1, Q_1 trên A_1B_1. Khi đó ta có KLP_1Q_1 là hình thang vuông tại K và L, vì $CN \perp A_1B_1$ nên ta chỉ cần chứng minh N là trung điểm của KL thì CN trở thành đường trung bình của hình thang và do đó nó đi qua trung điểm của P_1Q_1, và theo tính chất của phép vị tự thì nó cũng đi qua trung điểm của PQ.

Có $\widehat{AB_1C} = \widehat{AA_1C} = 90^\circ \Rightarrow ABA_1B_1$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CB_1A_1} = \widehat{A_1BA}$.

Chứng minh tương tự có $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{C_1BC}$. Suy ra $\widehat{CB_1A_1} = \widehat{AB_1C_1}$ dẫn đến AC là đường phân giác ngoài của $\widehat{A_1B_1C_1}$.

Chứng minh tương tự có BC là đường phân giác ngoài của $\widehat{B_1A_1C_1}$. Do đó điểm C trở thành tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{C_1}$ của $\Delta A_1B_1C_1$

Từ tính chất của đường phân giác suy ra được $\Delta P_1B_1K = \Delta P_1B_1C_1 \Rightarrow KB_1 = B_1C_1$.

Chứng minh tương tự có $A_1L = A_1C_1$.

Dẫn đến nếu gọi p là nửa chu vi $\Delta A_1B_1C_1$ thì $KL = 2p$.

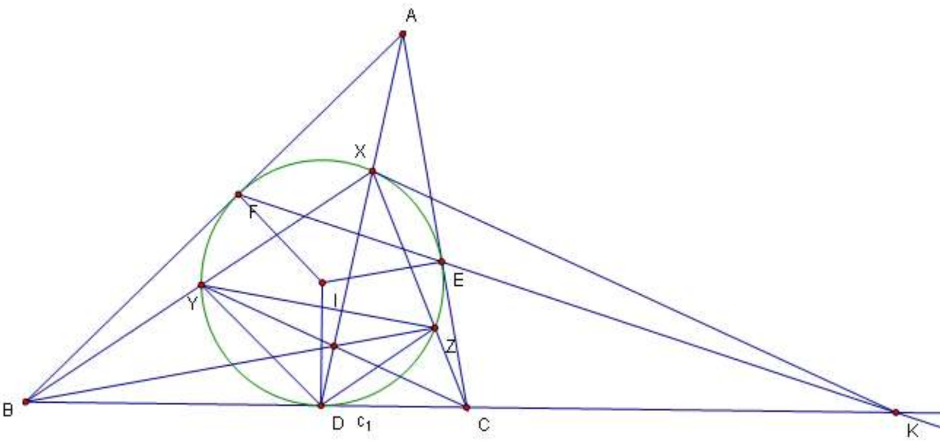
Do C là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{C_1}$ của $\Delta A_1B_1C_1$ nên tính được $B_1N = p - B_1C_1$

$\Rightarrow KN = KB_1 + B_1N = B_1C_1 + p - B_1C_1 = p = \frac{1}{2}KL$. Vậy N là trung điểm của KL. (đpcm)

Câu 29. **[Trêng THPT chuyªn BẮC GIANG tØnh BẮC GIANG TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG IX MÔN: TOÁN 11 n¨m häc 2012 – 2013]**

Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn (*I*) tâm *I*. Gọi *D*, *E*, *F* là tiếp điểm của (*I*) với *BC*, *CA*, *A***B.***AD* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *X*, *BX* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *Y*, *CX* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *Z*. Chứng minh rằng *BZ*, *CY*, *AX* đồng quy.

Hướng dẫn giải



Kẻ tiếp tuyến tại X của (I) cắt BC tại K.

Trong tứ giác XEDF ta có tiếp tuyến tại F, E và XD đồng quy tại A nên tứ giác XEDF là tứ giác điều hòa. Mà KX, KD là tiếp tuyến của (I) tại X, D nên $\overline{K, E, F}$

Mặt khác AD, BE, CF đồng quy nên $(KCBC) = -1$

Suy ra:

$$X(KDBC) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\overrightarrow{XK}, \overrightarrow{XB})}{\sin(\overrightarrow{XK}, \overrightarrow{XC})} : \frac{\sin(\overrightarrow{XD}, \overrightarrow{XB})}{\sin(\overrightarrow{XD}, \overrightarrow{XC})} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\widehat{XDY}\right)}{\sin\left(\widehat{XDZ}\right)} : \frac{\sin\left(-\widehat{YXD}\right)}{\sin\left(\widehat{DXZ}\right)} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\widehat{XDY}\right)}{\sin\left(\widehat{XDZ}\right)} : \frac{\sin\left(\widehat{YXD}\right)}{\sin\left(\widehat{DXZ}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{XY}{XZ} : \frac{YD}{DZ} = 1 \Rightarrow \frac{XY}{XZ} . \frac{DZ}{DY} = 1 \ (1)$$

Theo định lí Céva thì BZ, CY, AX đồng quy

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{YB}}{\overline{YX}} . \frac{\overline{ZX}}{\overline{ZC}} . \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{YB}{YX} . \frac{ZX}{ZC} . \frac{DC}{DB} = 1 (\text{do } D \in BC, Y \in BX, Z \in XC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{YB}{YX}.\frac{ZX}{ZC}.\frac{DC}{DB}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{YB}{BD}.\frac{DC}{ZC}.\frac{ZX}{XY}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{YD}{XD}.\frac{XD}{DZ}.\frac{ZX}{XY}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{YD}{DZ}.\frac{ZX}{XY}=1 \text{(luôn đúng theo (1))}$$

Vậy BZ, CY, AX đồng quy (đpcm).

Câu 30. ***[Trêng THPT TrÇn Nguyªn H·n* VÜnh Phóc n¨m 2009 – 2010]**

Cho tam gi¸c ABC c©n tại **A.** Gọi H là trung điểm của BC, D là h×nh chiếu vu«ng gãc của H trªn cạnh AC, M là trung điểm của H**D.**

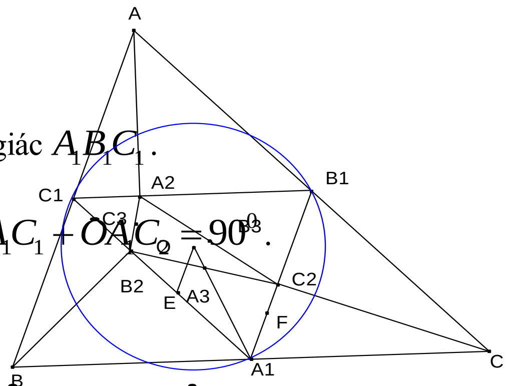
Chứng minh AM vu«ng gãc với B**D.**

Hướng dẫn giải

Câu 31. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]**

Kí hiệu A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác nhọn AB**C.**A_2, B_2, C_2 là hình chiếu của A, B, C trên B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Trung điểm các đoạn A_2B_2, C_2A_2, A_2B_2 là A_3, B_3, C_3. Chứng minh các đường thẳng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

Hướng dẫn giải



Cách 1: Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Ta có: $\widehat{B_1C_1A_1} = \widehat{BA_1C_1} = \widehat{C} = \widehat{A_1OC_2} \Rightarrow \widehat{BA_1C_1} + \widehat{OA_1C_2} = 90^0$.

Dựng hình bình hành OEA_1F có:

$$\frac{A_1E}{A_1F} = \frac{A_1E}{OE} = \frac{\sin\widehat{EOA_1}}{\sin\widehat{EA_1O}}, \frac{A_1B_2}{A_1C_2} = \frac{A_1B.\cos\widehat{BA_1B_2}}{A_1C.\cos\widehat{CA_1C_2}} = \frac{\sin\widehat{EOA_1}}{\sin\widehat{EA_1O}}.$$

Do đó $EF//B_2C_2$.

Vì A_1O đi qua trung điểm EF nên đi qua trung điểm $B_2C_2 \Rightarrow A_1A_3$ đi qua O. Tương tự B_1B_3, C_1C_3 đi qua O.

Cách 2: Dùng định lí Ceva dạng sin.

Đặt $\alpha_1 = \widehat{B_2A_1A_3}$, $\alpha_2 = \widehat{C_2A_1A_3}$, $S_{A_1B_2A_3} = \frac{1}{2}A_1B_2.A_1A_3\sin\alpha_1; S_{A_1C_2A_3} = \frac{1}{2}A_1C_2.A_1A_3\sin\alpha_2$

Lập tỉ số: $1 = \frac{A_1B_2}{A_1C_2}.\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \Rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{A_1C_2}{A_1B_2}$.

$$A_1B_2 = \frac{a}{2}\cos C,\ A_1C_2 = \frac{a}{2}\cos B \Rightarrow \frac{A_1C_2}{A_1B_2} = \frac{\cos B}{\cos C}.$$

Tương tự: $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{B_1A_2}{B_1C_2} = \frac{\cos C}{\cos A};\ \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{C_1B_2}{C_1A_2} = \frac{\cos A}{\cos B}$

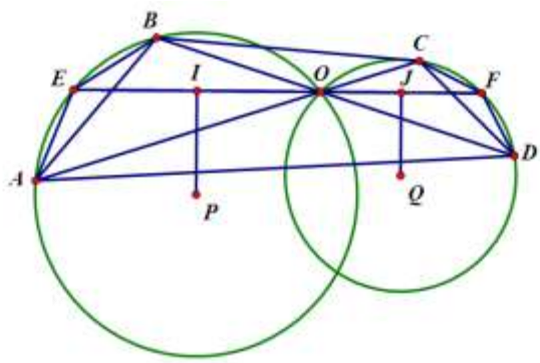
$\Rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}.\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}.\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1 \Rightarrow A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3$ đồng quy.

Câu 32. **[CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LẦN THỨ VII – NĂM 2014]**

Cho tứ giác lồi ABCD có các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O.

Gọi P, Q là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB và tam giác COD. Chứng minh rằng AB + CD $\le$ 4.PQ

Hướng dẫn giải



* Đường phân giác góc $\widehat{AOB}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB tại E $\ne$ O.

Tứ giác AEBO nội tiếp => $\widehat{EAO} + \widehat{EBO} = 180^0$

Nếu $\widehat{EAO} \ge 90^0 > \widehat{AOE}$ thì EO > EA

Nếu $\widehat{EBO} \ge 90^0 > \widehat{BOE}$ thì EO >EB = EA

Vậy ta luôn có EO > EA

* Đường phân giác góc $\widehat{COD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác COD tại F $\ne$ O. Tương tự ta có FO > FD

*Gọi I, J là hình chiếu của P, Q lên đường thẳng EF ta có:

AB < AE + EB $\le$ 2EO

CD < CF + FD $\le$ 2FO

=> AB + CD < 2EF = 4IJ $\le$ 4PQ

Câu 33. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG** QUẢNG NINH **ĐỀ THI OLYMPIC TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X MÔN: TOÁN - KHỐI: 11 Ngày thi: 01 tháng 08 năm 2014]**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh AC, BC lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại điểm P. Một đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với đường tròn tâm I tại điểm Q nằm trong tam giác AB**C.**

a) Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của PE và PF với (O). Chứng minh rằng KL song song với EF.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ACP} = \widehat{QCB}$.

Hướng dẫn giải

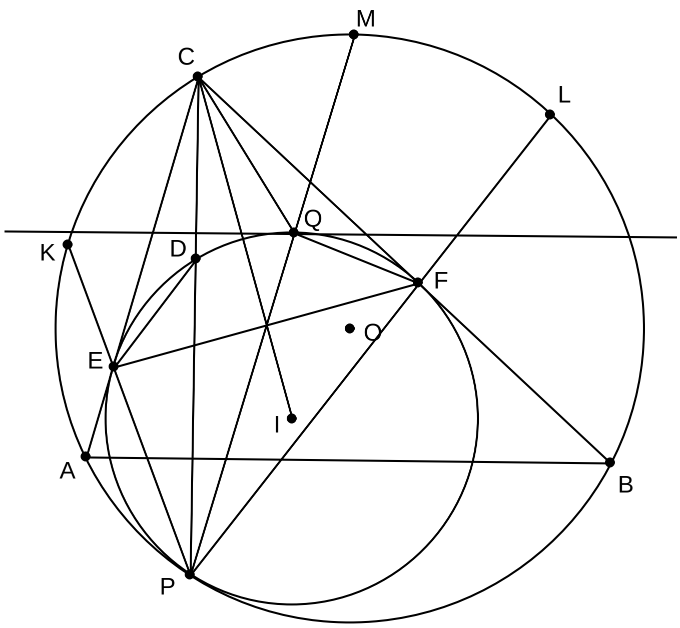
a. Xét phép vị tự $V_{(P;k)}$ tâm P biến đường tròn (I) thành đường tròn (O) nên biến điểm E thành điểm K và biến điểm F thành điểm L nên KL//EF.

b. Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ.

Xét phép vị tự $V_{(P;k)}$ biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự $V_{(P;k)}$ biến E, D, Q, F lần lượt thành K, C, M, L.

Do OK là ảnh của IE qua $V_{(P;k)}$, dẫn đến $OK // IE$ mà $IE \perp AC$ nên $OK \perp AC$, suy ra K là điểm chính giữa của cung A**C.**

Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung A**B.**



Nếu $AC \le BC$ thì ta có

$$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BL} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{KA}$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{CK}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CK}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{CK}$$

Trường hợp $AC > BC$ ta cũng chỉ ra được $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{CK}$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{FQ}$$ (tính chất phép vị tự).

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{QFC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.

Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$, dẫn đến $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 34. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC THPT VÙNG DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2012 – 2013]**

Cho tam giác *ABC*. Đường tròn (I) tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại *P*, *Q*, *R*. Một đường tròn đi qua *B*, *C* tiếp xúc với (I) tại *X*. Một đường tròn đi qua *C*, *A* tiếp xúc với (I) tại *Y*. Một đường tròn đi qua *A*, *B* tiếp xúc với (I) tại *Z*. Chứng minh rằng các đường thẳng *PX*,*QY*,*RZ* đồng quy.

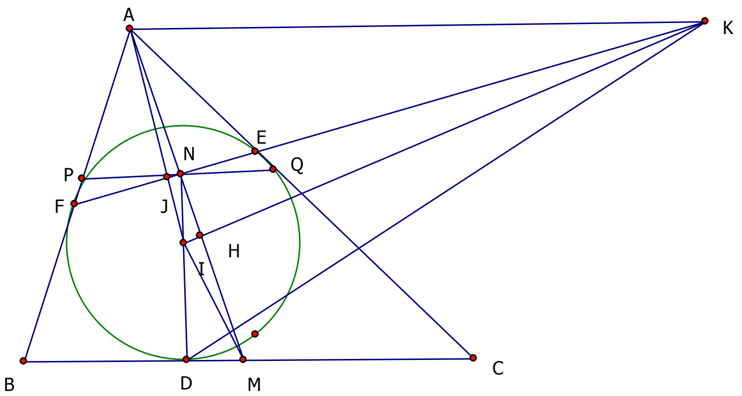
Hướng dẫn giải

Câu 35. **[Ngân hàng đề Trường THPT Chuyên Hạ Long - Sở GD- ĐT Quảng Ninh]**

Giả sử đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự D, E, F. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt EF tại K. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: IM $\perp$ DK.

Hướng dẫn giải

Gọi N là giao điểm của ID và EF. Qua N kẻ đường thẳng // BC cắt AB, AC theo thứ tự từ P,Q.
Vì hai tứ giác IFPN và IQEN nội tiếp nên $\widehat{IFN} = \widehat{IPN}$



$\widehat{IEN} = \widehat{IQN}$ 1.0 đ

Mặt khác $\widehat{IEN} = \widehat{IFN} \Rightarrow \widehat{IPN} = \widehat{IQN}$. Do đó ΔIPQ cân tại I. Vậy N là trung điểm của PQ -> A, N, M thẳng hàng. 0.5 đ

Lại có $IN \perp AK, KN \perp AI$ -> N là trực tâm $\Delta AIK \Rightarrow AM \perp IK$ 0.5 đ

Gọi H là giao điểm của AM và IK

J là giao điểm của IA và EF

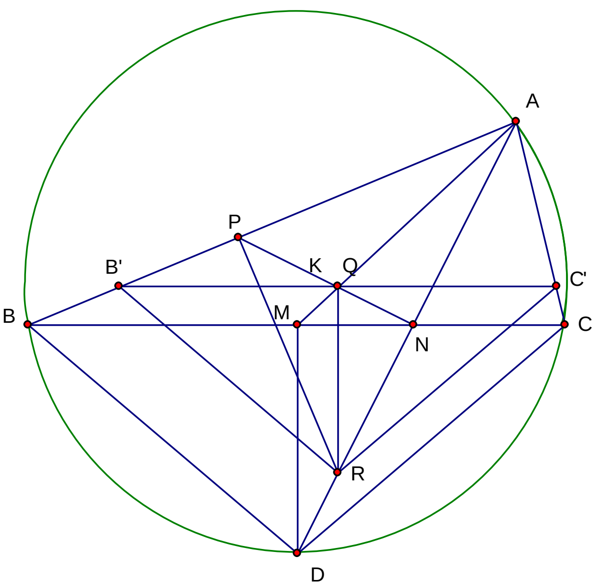
$\Rightarrow \overline{IH}.\overline{IK} = \overline{IJ}.\overline{IA} = IE^2 = ID^2 \Rightarrow \Delta IHD \backsim \Delta IDK(c-g-c) \to \widehat{IDH} = \widehat{IKD}$ 1.0 đ

Mà $YIHMD$ nội tiếp nên $\widehat{IDH} = \widehat{IMH} \Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{IMH} \Rightarrow IM \perp DK$ (Đpcm). 1.0đ

Câu 36. [TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI-**TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG -LỚP 11]**

Cho tam giác *ABC* với *AB* > *AC.* Các đường trung tuyến và phân giác trong góc *A* cắt *BC* tại *M* và *N* tương ứng. Đường thẳng qua *N* vuông góc với *AN* cắt *AB, AM* lần lượt tại *P* và *Q*; đường thẳng qua *P* vuông góc với *AB* cắt đường thẳng *AN* tại *R*. Chứng minh *QR* vuông góc với *BC.*

Hướng dẫn giải



Gọi *D* là giao điểm thứ hai của *AN* với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*, dễ thấy $DB = DC$ suy ra *DM* vuông góc với *BC.*

Đặt $k = \dfrac{AR}{AD}$ và xét phép vị tự $V_A^k : B \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto R$. Khi đó *B'* thuộc *AB, C'* thuộc *AC* và hai tam giác *BCD* và *B'C'R* có các cạnh tương ứng song song.

Gọi *K* là giao điểm của *PN* với *B'C'*, ta có

$\widehat{C'B'R} = \widehat{CBD} = \widehat{BAD} = 90^O - \widehat{ARP} = \widehat{RPN}$

suy ra tứ giác *RKPB'* nội tiếp. Từ đó $\widehat{B'KR} = \widehat{B'PR} = 90^0$.

Như vậy $V_A^k : M \mapsto K$ nên *K* là trung điểm *B'C'*, hay *K* thuộc *AM*, suy ra *K* trùng *Q*. Do *B'C'* song song với *BC* mà *QR* vuông góc với *B'C'* nên *QR* vuông góc với *BC.*

Câu 37. [TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI-**ĐỀ CHÍNH THỨC -LỚP 11]**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H $(E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Lấy điểm T trên (O) sao cho $\widehat{ATH} = 90^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GTO cắt EF tại K $(K \neq G)$. Chứng minh rằng

a) Ba điểm G, T, A thẳng hàng.

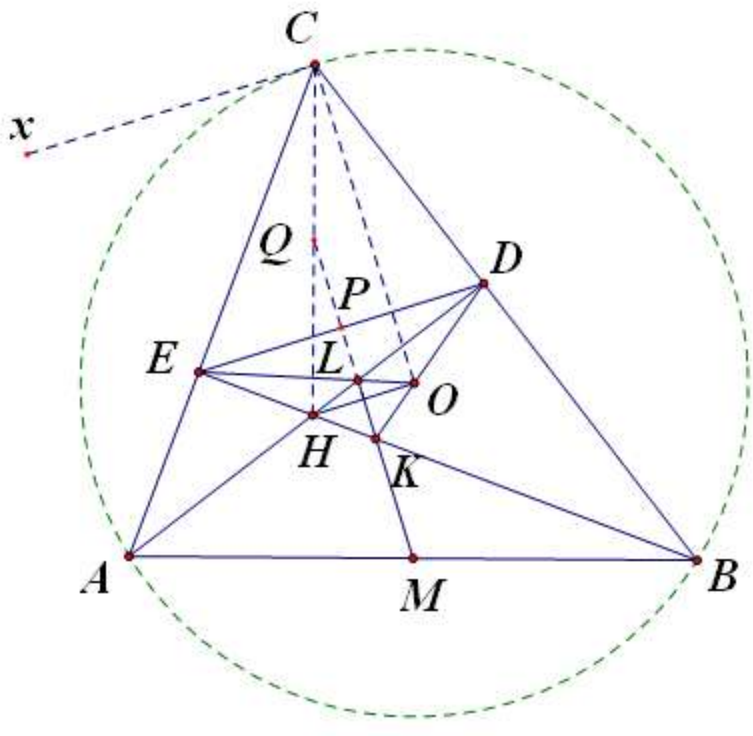
b) Đường thẳng OK vuông góc với đường thẳng AT.

Hướng dẫn giải

Câu 38. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI ĐỀ THI ĐỀ XUẤT KỲ THI HSG VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VII MÔN TOÁN: KHỐI 11 Năm học: 2013-2014]**

Cho tam giác nhọn *ABC* không cân. Gọi *H, O* lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC; D, E* lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh *A, B* của tam giác *AB**C.*** Các đường thẳng *OD* và *BE* cắt nhau tại *K*, các đường thẳng *OE* và *AD* cắt nhau tại *L*. Gọi *M* là trung điểm cạnh *A**B.*** Chứng minh rằng ba điểm *K, L, M* thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm *C, D, O, H* cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải



Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác *HAB* và ba điểm *K, L, M* ta có: *K, L, M* thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KH}}.\dfrac{\overline{LH}}{\overline{LA}}.\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{KB}}{\overline{KH}} = -\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LH}}$. (1)

Ta lại có $\dfrac{KB}{KH}=\dfrac{S_{BOD}}{S_{HOD}}$ (cùng cạnh đáy OD), $\dfrac{LA}{LH}=\dfrac{S_{AOE}}{S_{HOE}}$ (cùng cạnh đáy OE) và $S_{AOE}=S_{BOD}$.(Bởi vì $S_{AOE}=\dfrac{1}{2}AE.d(O,AE)=\dfrac{1}{2}c.\cos A.R.\cos B=\dfrac{1}{2}R.c.\cos A.\cos B$,

ở đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $c=AB$. Tương tự $S_{BOD}=\dfrac{1}{2}R.c.coA.\cos B$).

Từ các kết quả trên ta có (1) Û $S_{HOD}=S_{HOE}$ khi và chỉ khi OH // DE hoặc OH đi qua trung điểm ED.

Bằng cách vẽ tiếp tuyến Cx của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C, dễ dàng suy ra DE // Cx, suy ra CO vuông góc với DE.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của DE, HC. Dễ thấy tứ giác $CEHD$ nội tiếp, suy ra QP vuông góc với DE. Suy ra $CO//QP$.

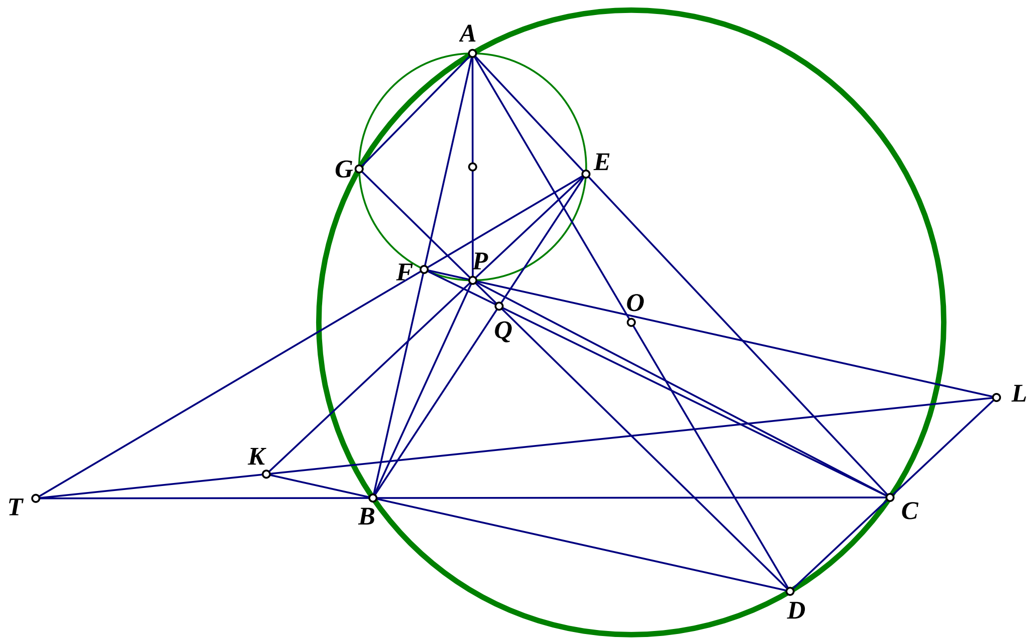
Nếu HO đi qua trung điểm DE suy ra P là trung điểm HO, suy ra $EHDO$ là hình bình hành, suy ra OD // EH và EO // HD. Điều này trái với giả thiết OD cắt BE cà OE cắt AD.

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi OH // DE khi và chỉ khi CO vuông góc với OH khi và chỉ khi E, H, O, D cùng nằm trên một đường tròn (vì ta luôn có tứ giác $CEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính CH).

Câu 39. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VIII- NĂM 2015 MÔN TOÁN - LỚP 11]**

Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AP\perp BC$. Đường tròn đường kính AP cắt các cạnh AC,AB lần lượt tại E,F và cắt đường tròn (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP,BE,CF đồng quy.

Hướng dẫn giải



Gọi AD là đường kính của (O), dễ thấy G,P,D thẳng hàng và $PE \parallel CD; PF \parallel BD$. Giả sử PE,PF cắt DB,DC tại K,L; EF cắt BC tại T.

Theo định lý Desargues để chứng minh BE, CF, GP (hay PD) đồng quy ta chỉ cần chứng minh T,K,L thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus ta được: $\frac{TB}{TC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1 \Rightarrow \frac{TB}{TC}=\frac{FB}{EC}.\frac{AE}{AF}$ (1)

Dễ thấy tứ giác $EFBC$ nội tiếp nên $\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{CF}$ (2)

Cũng từ $EFBC$ nội tiếp suy ra $\angle FCL=\angle FCA+\angle ACL=\angle EBA+90^0=\angle EBA+\angle ABK=\angle KBE$

Tứ giác $PKDL$ là hình bình hành suy ra $\angle PKB=\angle PLC$.

Suy ra ΔEBK : $\Delta FCL \Rightarrow \frac{BE}{CF}=\frac{KB}{CL}$ (3).

Ta có $BF.PL=CE.PK=S_{PKDL} \Rightarrow \frac{BF}{CE}=\frac{PK}{PL}=\frac{DL}{DK}$ (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được $\frac{TB}{TC}=\frac{DL}{DK}.\frac{KB}{CL} \Rightarrow \frac{TB}{TC}.\frac{LC}{LD}.\frac{KD}{KB}=1$. Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác DBC ta suy ra T,K,L thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

Câu 40. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẢO LỘC- **LÂM ĐỒNG- KỲ THI HSG KHU VỰC DH VÀ ĐBBB LẦN THỨ 9 ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN: TOÁN; LỚP: 11]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC cắt nhau tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng hai đường thẳng EK và FK vuông góc.

Hướng dẫn giải

▪ Gọi G là giao điểm của AD và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABC**D.**

Ta dùng kí hiệu (ABC), (ABCD) tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tứ giác ABC**D.**

Ta có AD, BC, FK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (ADF), (ABCD) và (BCF), (ADF) và (BCF) nên AD, BC, FK đồng quy tại G hay F, K, G thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa K và G.

Ta có $\widehat{DKC}=(180^0-\widehat{DKF})+(180^0-\widehat{CKF})=\widehat{DAF}+\widehat{CBF}=\frac{1}{2}\widehat{DOC}+\frac{1}{2}\widehat{DOC}=\widehat{DOC}$

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm D, C, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C_1).

▪ Tương tự, các điểm A, B, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C_2).

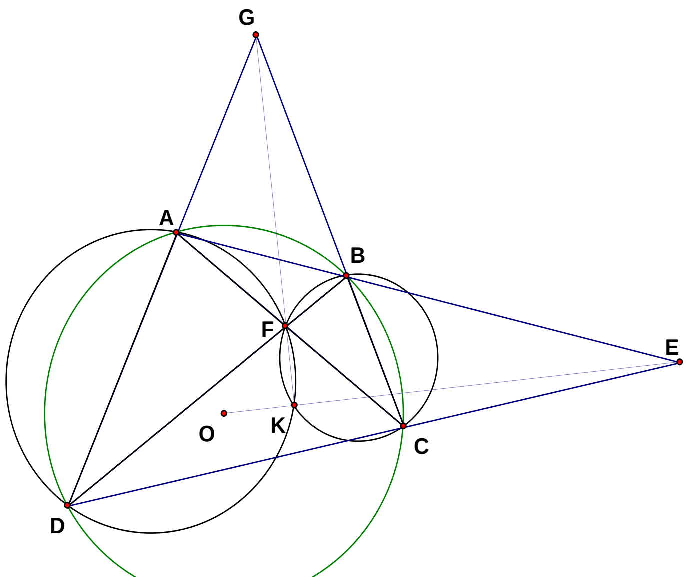
Ta có AB, CD, OK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (C_2),

(ABCD) và (C_1), (C_1) và (C_2) nên AB, CD, OK đồng quy tại E hay O, K, E thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O), ta có GF là đối cực của E

nên GF vuông góc với OE

Mà G, K, F thẳng hàng; O, K, E thẳng hàng nên EK và FK vuông góc (điều phải chứng minh).



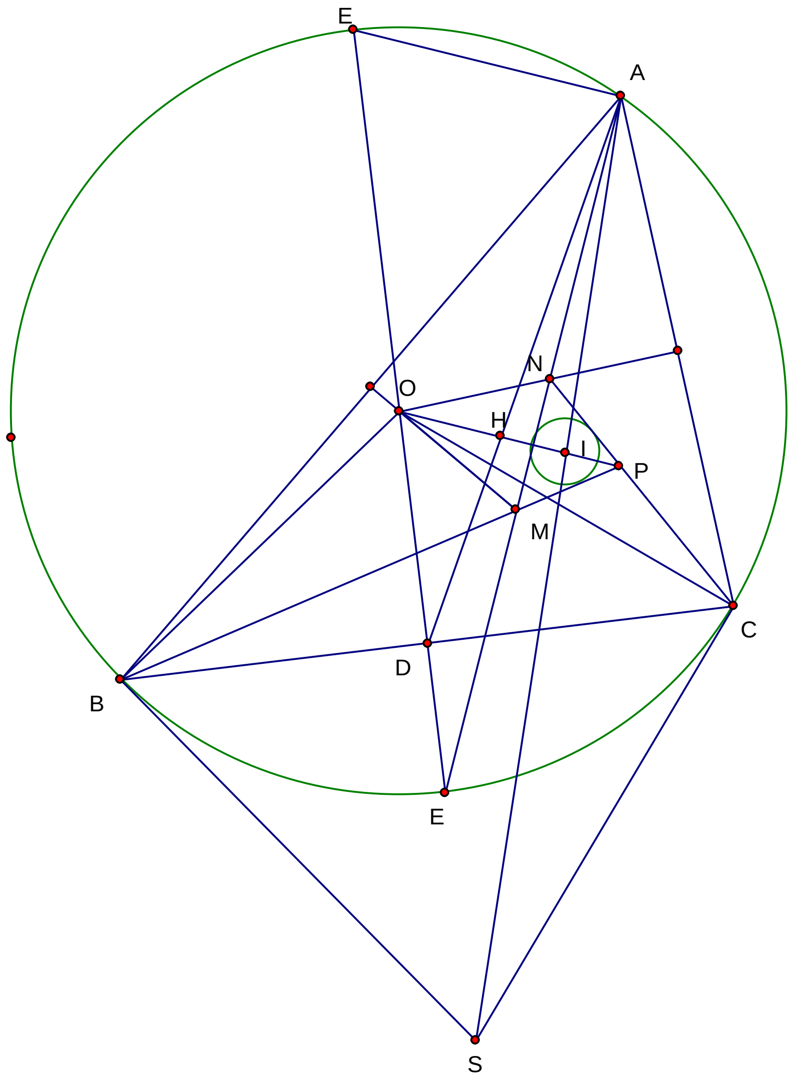
Câu 41. **[KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ IX, NĂM HỌC 2015 – 2016 ĐỀ THI MÔN TOÁN – KHỐI 11]**

Cho tamgiác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại S. Gọi d là đường thẳng chứa phân giác trong góc A của tam giác AB**C.** Các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC cắt d lần lượt tại M và N. Gọi P là giao điểm của BM và CN, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP, H là trực tâm của tam giác OMN.

a. Chứng minh H, I đối xứng với nhau qua d.

b. Chứng minh A, I, S thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



+) Chứng minh OP là trung trực của MN

Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi D là trung điểm của BC, E là giao điểm (khác A) của d với (O), F là trung điểm của MN.

Vì hai tam giác MAB và NAC cân nên dễ thấy:

$$\widehat{PMN}=\widehat{PNM},\ \widehat{OMN}=\widehat{ONM}$$

Suy ra, tam giác PMN cân tại P và tam giác OMN cân tại O. Vậy OP là trung trực của MN.

+) Chứng minh I, H đối xứng với nhau qua d

Ta có:

$$\widehat{IMF}=\frac{1}{2}\widehat{BME}=\frac{1}{2}\widehat{BAC},\ \widehat{HMF}=\widehat{HON}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}\Rightarrow\widehat{IMF}=\widehat{HMF}.$$

Vậy hai điểm I và H đối xứng với nhau qua d.

+) Chứng minh AD, AS đối xứng với nhau qua AE

Gọi EK là đường kính của (O).

Ta có (DSEK) = - 1 nên A (DSEK) = -1 mà AE và AK vuông góc với

nhau suy ra AE là phân giác góc SA**D.**

Vậy AD, AS đối xứng với nhau qua AE.

+) Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục d ta thấy A, I, S thẳng hàng khi và chỉ khi A, H, D thẳng hàng. Ta dùng Melenauyt với tam giác OEF để chứng minh điều này.

$$\frac{HO}{HF}=\frac{FO}{FH}-1=\frac{MF\cot\frac{A}{2}}{MF\tan\frac{A}{2}}-1=\frac{\cos A}{\sin^2\frac{A}{2}};\quad \frac{DE}{DO}=\frac{R(1-\cos A)}{R\cos A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \frac{HO}{HF}.\frac{DE}{DO}.\frac{AF}{AE}=1.$$

Ta có điều phải chứng minh

Câu 42. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HÒA** HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ]

Cho tam giác ABC với H là trực tâm tam giác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua CA, F là điểm đối xứng của C qua A**B.** Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi OH = 2R.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác AB**C.**A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, A**B.** Gọi I, J,K là tam giác nhận, A, B, C là trung điểm các cạnh JK, KI, IJ. Do đó G là trọng tâm tam giác IJK.

Từ cách dựng suy ra *HA, HB, HC* lần lượt là đường trung trực của *JK, KI, IJ.* Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kinh 2R.*

Gọi D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ*. Do G là trọng tâm hai tam giác trên nên:

Xét V(G; -1/2)biến A, B, C, I, J, K thành A', B', C', A, B, C.

Có A' là trung điểm BC nên $OA' \perp BC$, $OD' \perp JK$; suy ra $OD' \perp BC$. Vậy O, A', D' thẳng hàng. Do đó $A'D'$ vuông góc với B**C.**

Suy ra $A'D'$ // AD và $A'D = \frac{1}{2}AD \to \widehat{GAD} = \widehat{GA'D'} \to \Delta GAD = \Delta GA'D'$

$\to \widehat{AGD} = \widehat{A'GD'} \to \widehat{AGD} + \widehat{AGD'} = \widehat{A'GD'} + \widehat{AGD'} = 180^0$

Vậy D, G, D' Thẳng hàng và $V(G; -\frac{1}{2})$ biến D thành D'.

Tương tự có $V(G;\ -\frac{1}{2})$ biến E thành E'.$V(G;\ -\frac{1}{2})$ biến F thành F'.

D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi D',E',F' thẳng hàng. Do D',E',F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ* nên theo định lí Simson D',E',F' thẳng hàng↔ O nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta IJK \leftrightarrow OH = 2R \rightarrow (đpcm)$.

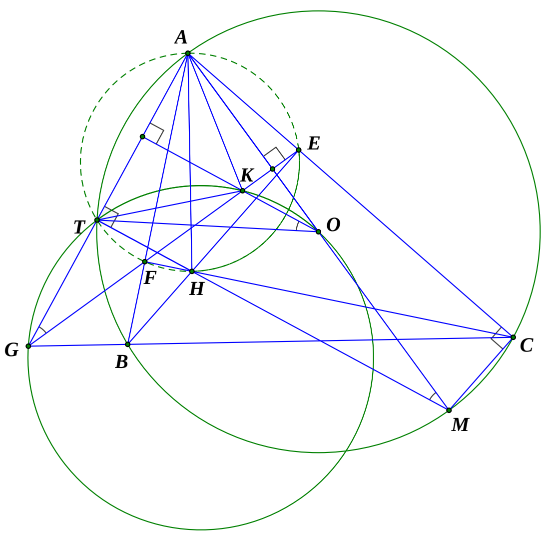
Câu 43. Cho **tam** giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H $(E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Lấy điểm T trên (O) sao cho $\widehat{ATH} = 90^{\circ}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GTO cắt EF tại K $(K \neq G)$. Chứng minh rằng

a) Ba điểm G, T, A thẳng hàng.

b) Đường thẳng OK vuông góc với đường thẳng AT.

a) Dễ thấy tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

Hướng dẫn giải



Hơn nữa, $\widehat{ATH} = \widehat{AFH} = \widehat{AEH}$

nênngũ giác $ATFHE$ nội tiếp.

Do đó AT, FE, BC là ba trục đẳng phương của $(ATFHE), (O)$ và $(BFEC)$ nên chúng

đồng quy tại G tức là ba điểm G, T, A thẳng hàng.

b) Nối TH cắt (O) tại M, suy ra A, O, M thẳng hàng.

Dễ thấy $\widehat{AEK} = \widehat{ABC} = \widehat{AMC} \Rightarrow$ AM $\perp$ EF.

Từ đó suy ra $\widehat{AGK} = \widehat{AMT}$. Do đó $\widehat{KOT} = \widehat{KGA} = \widehat{OMT}$ (1).

Hơn nữa, $\widehat{AOT} = 2\widehat{OMT}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KOT} = \widehat{KOA}$. Mà $OA = OT$ nên OT là trung trực của AT, suy ra $OK \perp AT$.

Câu 44. Tứ giác lồi $ABCD$ diện tích S và không có hai cạnh nào song song.Lấy điểm P_1 nằm trên đường thẳng CD sao cho P_1 và C nằm cùng **phía** so với đường thẳng AB và $S_{VABP_1} = \frac{S}{2}$ .Tương tự cũng có các điểm P_2, P_3, P_4 lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, AB và DA .Chứng minh P_1, P_2, P_3, P_4 thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi x là khoảng cách từ D đến AC và y là khoảng cách từ B đến AC. Ta có:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}}=\frac{y}{x+y}$$

Lấy Q_1 nằm trên đường thẳng BC sao cho $\frac{BQ_1}{BC}=\frac{x+y}{2y}$.Khi đó

$$S_{Q_1AB}=\frac{x+y}{2y}.S_{ABC}=\frac{S}{2}$$

$\Rightarrow P_1Q_1\parallel AB\Rightarrow\frac{EP_1}{P_1C}=\frac{BQ_1}{Q_1C}=\frac{y+x}{y-x}$,khi đó với mọi điểm O ta có

$$\overrightarrow{OP_1}=\frac{y-x}{2y}.\overrightarrow{OE}+\frac{y+x}{2y}.\overrightarrow{OC}\ (1)$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức dưới đây:

$$\overrightarrow{OP_2}=\frac{y-x}{2y}.\overrightarrow{OF}+\frac{y+x}{2y}.\overrightarrow{OA}\ (2)$$

$$\overrightarrow{OP_3}=\frac{x-y}{2x}.\overrightarrow{OE}+\frac{y+x}{2x}.\overrightarrow{OA}\,(3)$$

$$\overrightarrow{OP_4}=\frac{x-y}{2x}.\overrightarrow{OF}+\frac{y+x}{2x}.\overrightarrow{OC}\ (4)$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{y-x}{2y}.\overrightarrow{EF}+\frac{y+x}{2y}.\overrightarrow{CA}\ \text{(từ (1) và (2))}$$

$$\overrightarrow{P_3P_4}=\frac{x-y}{2x}.\overrightarrow{EF}+\frac{y+x}{2x}.\overrightarrow{AC}\ \text{(từ (3) và (4))}$$

Suy ra $\overrightarrow{P_1P_2}\parallel\overrightarrow{P_3P_4}$

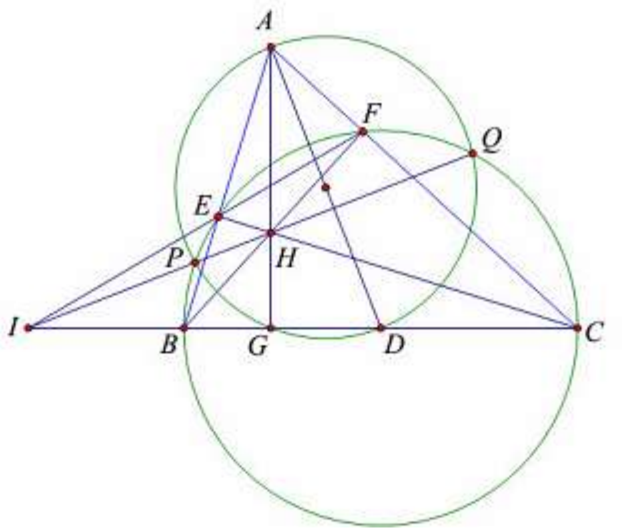
Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{P_3P_2}\parallel\overrightarrow{P_1P_4}$ và $\overrightarrow{P_3P_1}\parallel\overrightarrow{P_2P_4}$.Suy ra P_1,P_2,P_3,P_4 thẳng hàng.

Câu 45. Cho H là trực tâm tam giác ABC không cân góc A nhọn. Hình chiếu vuông góc của H trên AB,AC theo thứ tự là E,F. Gọi D là trung điểm $BC;P,Q$ là giao điểm của hai đường tròn đường kính AD và BC. Chứng minh H,P,Q thẳng hàng và các đường thẳng BC,EF,PQ đồng quy.

Hướng dẫn giải

Gọi G là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Ta có $P_{H/[BC]}=\overline{HE}.\overline{HC}=\overline{HG}.\overline{HA}=P_{H/[AD]}$ suy ra H nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BC và AD. Suy ra H, P, Q thẳng hàng.



Gọi I là giao điểm của EF và BC. (DEF) là đường tròn Euler của tam giác ABC nên G nằm trên (DEF). Do đó $P_{I/[BC]} = \overline{IB}.\overline{IC} = \overline{IE}.\overline{IF} = \overline{IG}.\overline{ID} = P_{I/[AD]}$

Suy ra I, P, G thẳng hàng hay BC, EF, PQ đồng quy tại I.

Câu 46. Cho tam giác ABC với H là trực tâm tam giác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua CA, F là điểm đối xứng của C qua AB. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi $OH = 2R$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Gọi I, J,K là tam giác nhận, A, B, C là trung điểm các cạnh JK, KI, IJ. Do đó G là trọng tâm tam giác IJK.

Từ cách dựng suy ra *HA, HB, HC* lần lượt là đường trung trực của *JK, KI, IJ*. Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kính 2R.*

Gọi D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ*. Do G là trọng tâm hai tam giác trên nên:

Xét V(G; -1/2) biến A, B, C, I, J, K thành A', B', C', A, B, C.

Có A' là trung điểm BC nên $OA' \perp$ BC, $OD' \perp$ JK; suy ra $OD' \perp$ BC. Vậy O, A', D' thẳng hàng. Do đó $A'D'$ vuông góc với BC.

Suy ra $A'D'$ // AD và $A'D = \frac{1}{2}AD \to \widehat{GAD} = \widehat{GA'D'} \to$ n GAD =n $GA'D'$

$\to \widehat{AGD} = \widehat{A'GD'} \to \widehat{AGD} + \widehat{AGD'} = \widehat{A'GD'} + \widehat{AGD'} = 180^0$

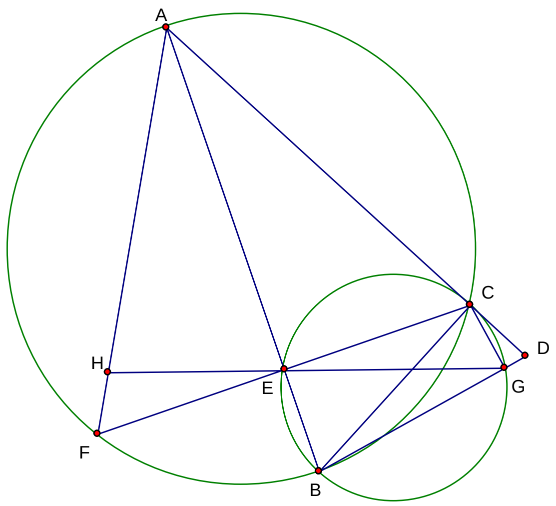
Vậy D, G, D' Thẳng hàng và $V\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ biến D thành D'.

Tương tự có $V\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ biến E thành E'.$V\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ biến F thành F'.

D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi D', E', F' thẳng hàng. Do D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường JK, KI, IJ nên theo định lí Simson D', E', F' thẳng hàng $\leftrightarrow$ O nằm trên đường tròn ngoại tiếp n $IJK \leftrightarrow OH = 2R \rightarrow (đpcm)$.

Câu 47. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm B, C và BC là đường kính của đường tròn (O_1). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O_1) tại điểm C cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai là A. Đường thẳng AB cắt đường tròn (O_1) tại E, $E \neq B$. Đường thẳng CE cắt đường tròn (O_2) tại F, $F \neq C$. Giả sử H là một điểm bất kì trên đoạn thẳng AF. Đường thẳng HE cắt đường tròn (O_1) tại G và đường thẳng BG cắt đường thẳng AC tại D. Chứng minh rằng $\dfrac{AH}{HF} = \dfrac{AC}{CD}$.

Hướng dẫn giải



Vì BC là đường kính của đường tròn (O_1) và ACD là tiếp tuyến nên $BC \perp AD \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0$.

Do đó AB là đường kính của (O_2).

Ta lại có $\widehat{BEC} = 90^0 \Rightarrow AB \perp CF \Rightarrow \widehat{FAB} = \widehat{CAB}$.

Nối CG, ta có $CG \perp BD$. Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{BCG} = \widehat{BEG} = \widehat{AEH}$

Xét tam giác AHE và tam giác ABD có:

$+ \widehat{HAE} = \widehat{BAD}$

$+ \widehat{AEH} = \widehat{ADB}$

Suy ra hai tam giác AHE và ABD đồng dạng. Do đó $\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AH.AD = AB.AE.$

Mặt khác AC là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) nên $AC^2 = AE.AB$.

Suy ra $AH.AD = AE.AB = AC^2 = AC.AF$

Vì vậy $\frac{AH}{AF}=\frac{AC}{AD}$

$$\frac{AH}{AF}=\frac{AC}{AD}\Leftrightarrow\frac{AH}{AH+HF}=\frac{AC}{AC+CD}\Rightarrow\frac{AH}{HF}=\frac{AC}{CD}$$

Câu 48. Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H,O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, hai đường cao AD,BE. OD cắt BE tại K, OE cắt AD tại L. Gọi M là trung điểm AB. Chứng minh rằng K,L,M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C,D,O,H cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải

Sử dụng Menelaus cho tam giác HAB và 3 điểm K, L, M thẳng hàng

Vậy

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}\cdot\frac{\overline{LM}}{\overline{LA}}\cdot\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1\Leftrightarrow\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}=-\frac{\overline{LA}}{\overline{LH}}\ (1)$$

$$\frac{KB}{KH}=\frac{S_{BOD}}{S_{HOD}}\ (2);\ \frac{LA}{LH}=\frac{S_{AOE}}{S_{HOE}}\ (3).$$

$$S_{AOE}=\frac{1}{2}AE.d\left(O;AE\right)=\frac{1}{2}.\mathrm{R}.AB.\mathrm{cosA}.\ \cos B$$

$$S_{BOD}=\frac{1}{2}AE.d\left(O;AE\right)=\frac{1}{2}.\mathrm{R}.AB.\mathrm{cosA}.\ \cos$$

Do đó hệ thức xảy ra khi và chỉ khi $S_{HOE}=S_{HOD}\Leftrightarrow OH//DE$ hoặc OH đi qua trung điểm P của DE.

Qua C kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (C) thì d song song với DE.

Do CO vuông góc với d nên CO vuông góc với DE.

Nếu OH đi qua P thì P là trung điểm của OH, hay EDOH là hình bình hành, suy ra EO và HD song song (trái giả thiết).

Vậy K, L,M thẳng hàng khi và chỉ khi OH song song với DE, hay OH vuông góc với CO, tương đương C, D, O, H cùng thuộc đường tròn đường kính CH.

Câu 49. Cho tam giác ABC. Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$ và giả sử $\widehat{KCB}=\frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên CK,M là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng MH vuông góc với BC.

Hướng dẫn giải

Gọi D là điểm đối xứng với B qua CK. Khi đó $\widehat{KCB}=\widehat{KCD}=\widehat{ACD}$. Do $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$ nên

$\frac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCB}}=2$. Vì $\frac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCB}}=\frac{\mathrm{ACsin}\widehat{\mathrm{ACK}}}{\mathrm{BCsin}\widehat{\mathrm{KCB}}}$

$$=\frac{2\mathrm{ACsin}\widehat{\mathrm{ACK}}\mathrm{cos}\widehat{\mathrm{KCB}}}{\mathrm{BCsin}\widehat{\mathrm{ACK}}}==\frac{2AC\cos\widehat{KCB}}{BC}$$ nên

$$\frac{2AC\cos\widehat{KCB}}{BC}=2\Rightarrow\cos\widehat{KCB}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow\cos\widehat{ACD}=\frac{DC}{AC}$$

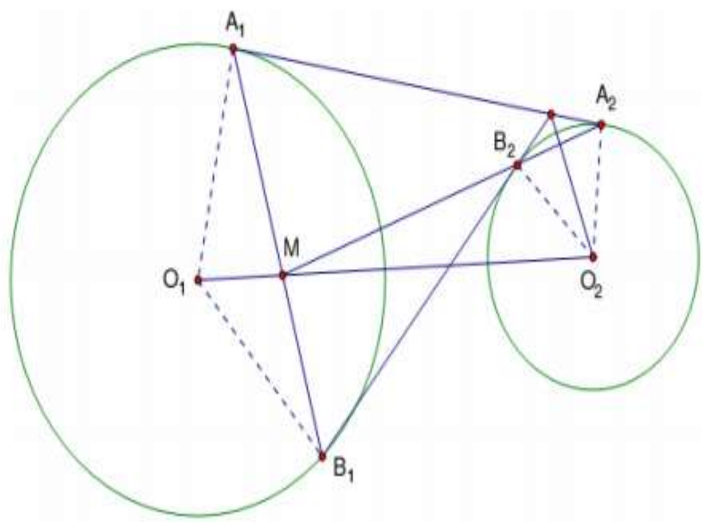
$\Rightarrow\widehat{ADC}=90^0$ và tứ giác CHDA là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow\widehat{KCB}=\widehat{ACD}=\widehat{AHD}$ (1)

Do AH và BD cùng vuông góc với CK nên AH // DB$\Rightarrow\widehat{HDB}=\widehat{AHD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp (DH cắt BC tại E, CK cắt BC tại F) suy ra H là trực tâm tam giác BCD $\Rightarrow$ BH $\perp$ CD$\Rightarrow$ BH//AD

Vậy tứ giác AHBD là hình bình hành, do M là trung điểm của AB nên H, M, D thẳng hang. Vậy MH $\perp$ BC.

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài A_1A_2, tiếp tuyến chung trong B_1B_2 của hai đường tròn ($A_1,B_1\in(O_1)$, $A_2,B_2\in(O_2)$). Chứng minh rằng ba đường thẳng A_1B_1, A_2B_2, O_1O_2 đồng quy.



Gọi M là giao điểm của A_1B_1 với A_2B_2. Dễ dàng có $A_1B_1\perp A_2B_2$.

Gọi (C_1),(C_2) lần lượt là các đường tròn đường kính A_1A_2,B_1B_2.

Do $\angle A_1MA_2=\angle B_1MB_2=90^0$ nên M nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2).

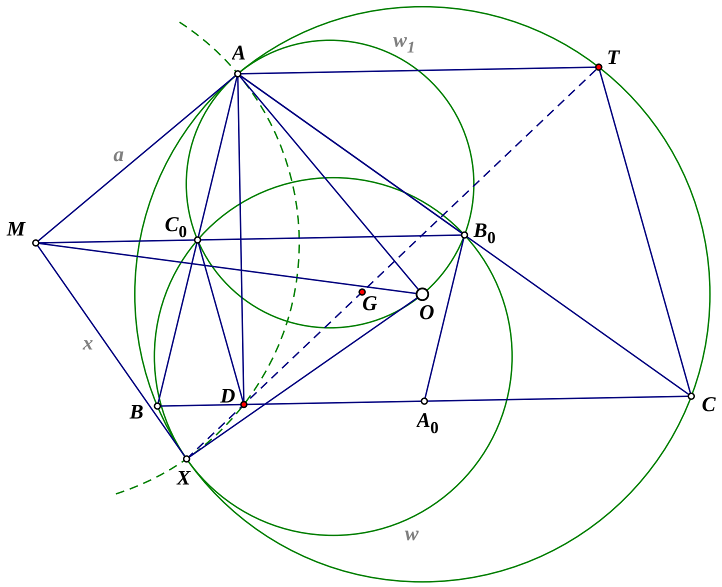
Mặt khác $O_1A_1^2=O_1B_1^2$ và O_1A_1, O_1B_1 lần lượt là tiếp tuyến của (C_1),(C_2) nên O_1 nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2).
Tương tự O_2 cũng nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)
Suy ra O_1,M.O_2 thẳng hàng.
Ta có dpcm.

Câu 50. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi B_0,C_0 là trung điểm của cạnh AC và $AB.D$ là hình chiếu của A trên BC. Gọi (ω) là đường tròn đi qua B_0,C_0 và tiếp xúc với (O) tại điểm X khác **A.**

a) Gọi T là giao điểm thứ hai của đường thẳng DX với (O). Chứng minh rằng $ATCB$ là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng đường thẳng DX đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Gọi a và x là tiếp tuyến tại A và X của đường tròn (O) và gọi (ω_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_0C_0. Dễ thấy a cũng là tiếp tuyến của (ω_1) tại A và a là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (ω_1).

Như vậy ba đường thẳng a, x và B_0C_0 lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O) và (ω_1); (O) và (ω); (ω) và (ω_1), do đó a, x và B_0C_0 đồng quy tại điểm M.

Ta có $MA = MD = MX$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADX. Chú ý là $O \in (\omega_1)$. Ta có

$\widehat{DAT} = \widehat{ADX} - \widehat{ATD} = \frac{1}{2}\left(360^0 - \widehat{AMX}\right) - \frac{1}{2}\widehat{AOX} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{AMX} + \widehat{AOX}\right) = 90^0$, suy ra $AD \perp AT \Rightarrow AT \parallel BC$. Do đó $ATCB$ là hình thang cân.

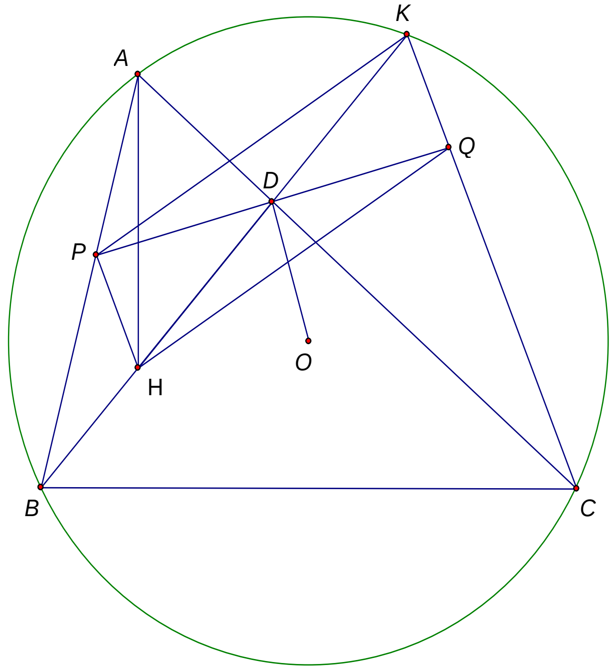
b) (2,0 điểm)

Gọi A_0 là trung điểm của B_0C_0. Xét phép vị tự $V_G^{-\frac{1}{2}}$ biến A a A_0; B a B_0; C a C_0; T a T', suy ra $\widehat{TCB} = \widehat{T'C_0B_0}$.

Mặt khác $\widehat{TCB} = \widehat{CBA} = \widehat{B_0C_0A} = \widehat{DC_0B_0}$. Do đó $T' \equiv D$, từ đó suy ra D, G, T thẳng hàng và ta có điều phải chứng minh.

Chú ý: Muốn cho bài toán khó lên thì có thể chỉ hỏi phần (b).

Câu 51. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, $AB < BC$. D là chân đường cao xuất phát từ B và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắtcạnh AB tại P. Chứng minh rằng $\angle DHP = \angle BAC$.



Gọi K là giao điểm của BD và $(O), K \neq B. Q$ là giao điểm của CK và PD.

Theo định lý con bướm, suy ra D là trung điểm của đoạn PQ.

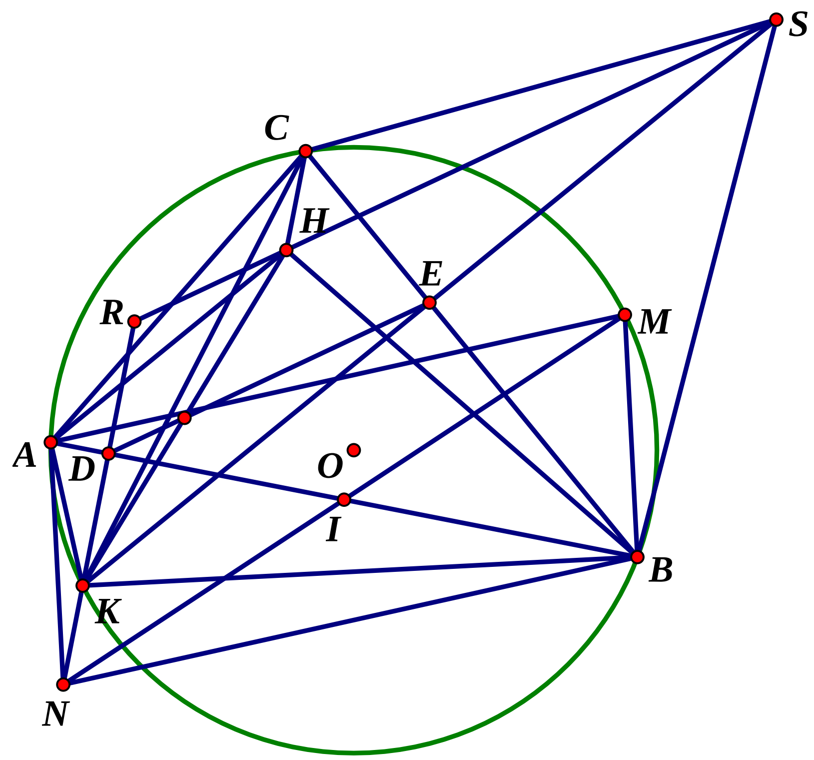
Mặt khác D là trung điểm của HK, do đó tứ giác $PHQK$ là một hình bình hành. Suy ra $\angle DHP = \angle HKQ$.

Mà $\angle HKQ = \angle BAC$, do vậy $\angle DHP = \angle BAC$.

Câu 52. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BC. N là điểm đối xứng của M qua trung điểm của AB.
a) Chứng minh rằng trực tâm K của tam giác NAB nằm trên đường tròn (O).

b) Giả sử NK cắt AB tại D, hạ KE vuông góc với BC tại E. Chứng minh rằng ba điểm D, E và trung điểm của HK thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh K thuộc đường tròn (O)

+N là điểm đối xứng của M qua trung điểm I của AB nên tứ giác ANBM là hình bình hành, suy ra $BN \parallel AM$ và $AN \parallel BM$

+Vì K là trực tâm tam giác NAB nên $BK \perp NA, AK \perp NB$,

Do đó $BK \perp BM$ và $AK \perp AM$

Từ đó suy ra tứ giác BKAM nội tiếp.

Vậy K thuộc đường tròn (O).

b)Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm của HK.

+ Gọi S là điểm đối xứng của K qua E; R là điểm đối xứng của K qua **D.** Ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BSC}$ (do BC là đường trung trực của SK)

+ Mặt khác $\widehat{BKC} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn cung BC) nên $\widehat{BSC} = \widehat{BAC}$.

+Mà $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^0$ nên $\widehat{BHC} + \widehat{BSC} = 180^0$

Suy ra tứ giác BHCS nội tiếp nên $\widehat{BHS} = \widehat{BCS} = \widehat{BCK} \quad (1)$

+ Tương tự tứ giác ABHR nội tiếp nên $\widehat{AHR} = \widehat{ABR} = \widehat{ABK} \quad (2)$

+ Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AHB} + \widehat{BHS} + \widehat{AHR} = \widehat{AHB} + \widehat{BCK} + \widehat{ABK} = \widehat{AHB} + \widehat{BCK} + \widehat{ACK} = 180^0$

Suy ra S, H, R thẳng hàng.

+ Vì DE là đường trung bình của tam giác KRS, nên DE đi qua trung điểm của HK.

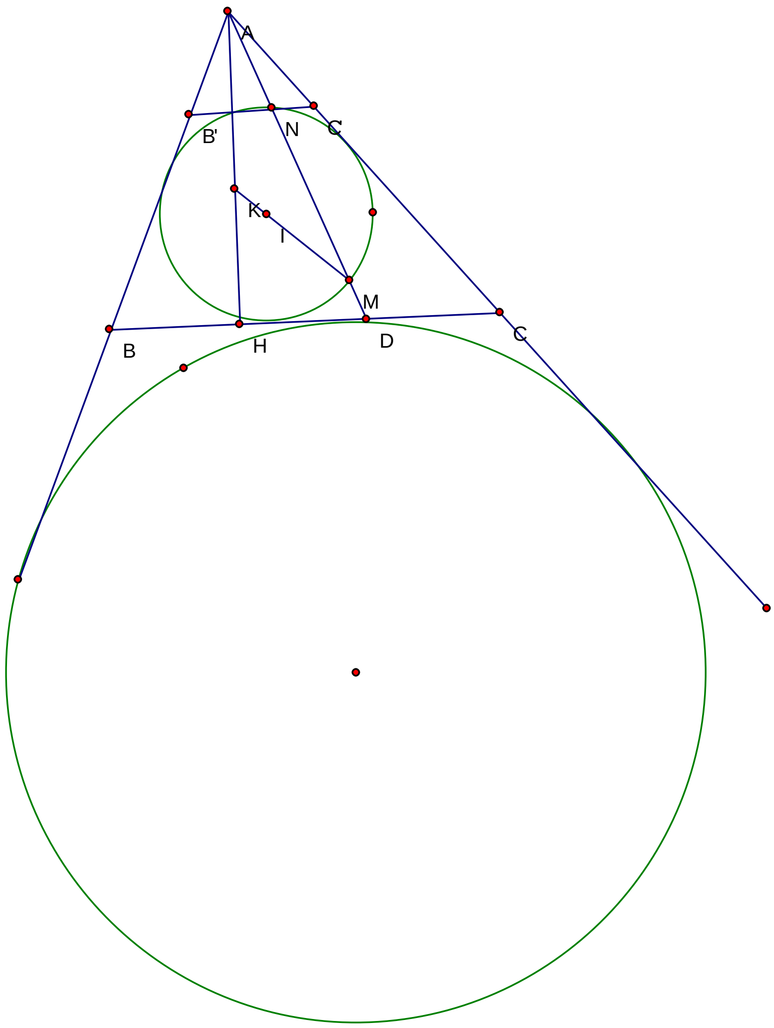
Câu 53. (Kỳ thi HSG trường THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng năm học 2014 – 2015) Hai đường tròn $(O'),(O'')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại D và cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại E,F tương ứng sao cho O,O',O'' không thẳng hàng. d là tiếp tuyến chung tại D của (O') và (O''). AB là đường kính của (O) sao cho AB vuông góc với d và A,E,O' cùng phía so với d. Chứng minh rằng AO',BO'',EF và d đồng quy.

Câu 54. (Đề thi đề xuất – trường THPT Chuyên Biên Hòa tỉnh Hà Nam – năm 2015) Cho ΔABC là tam giác nhọn với đường tròn nội tiếp (I). Gọi D là điểm của đường tròn bang tiếp góc A với BC. Gọi M,N là giao điểm của AD với (I) (N nằm giữa A và M. Giả sử IM cắt đường cao AH của ΔABC tại K.

a. Chứng minh $KA = KM$.

b. Gọi (O_a) là đường tròn có tâm nằm trên đường cao AH đi qua A và tiếp xúc với đường tròn (I) tại A_1. Các điểm B_1,C_1 xác định tương tự. Chứng minh AA_1,BB_1,CC_1 đồng quy tại 1 điểm.

Hướng dẫn giải:



a. Gọi J là tiếp điểm của (I) với BC.

Giả sử IJ cắt (I) tại điểm thứ 2 là $N' \neq E$. Qua N' vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB,AC tại điểm B',C'.

Ta có: $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=k \Rightarrow$ phép vị tự $V_A^k: B \to B'$; $V_A^k: C \to C'$

$\Rightarrow V_A^k: \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$. Do đó $\Rightarrow V_A^k: D \to N' \Rightarrow A, N', D$ thẳng hàng $\Rightarrow N' \equiv N$

Khi đó $NI//AK$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \frac{IN}{AK}=\frac{IM}{MK}$

Mà $IN=IM$ nên suy ra $KA=KM$

b. Từ câu a ta suy ra: đường tròn có tâm thuộc đường cao AH, đi qua A và tiếp xúc với (I) tại M thì $M \in AD$. Do đó $A_1 \in AD$.

Tương tự nếu gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bang tiếp góc B, C của ΔABC với CA, CB thì $B_1 \in BE; C_1 \in CF \Rightarrow AA_1, BB_1, CC_1$ đồng quy $\Leftrightarrow AD, BE, CF$ đồng quy.

Mặt khác nếu ta gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của ΔABC và p là nửa chu vi thì ta có:

$$BD=EC=p-c; DC=AF=p-b; AE=BE=p-a \Rightarrow \frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$$

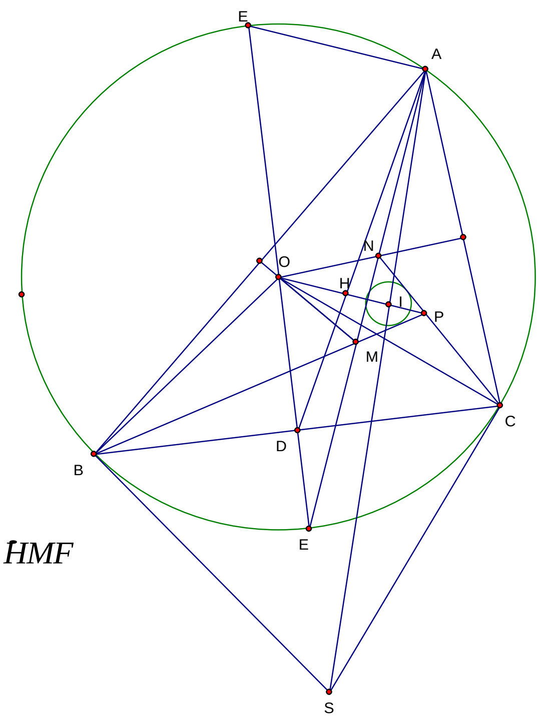
Theo định lý Ceva ta có AD, BE, CF đồng quy.

Câu 55. (Đề thi chọn HSG trường THPT chuyên Thái Bình – 2015) Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B cắt nhau tại S. Trung trực của AB, AC cắt d là phân giác trong góc A của ΔABC thứ tự tại M và N. Gọi P là giao của BM và CN, I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP.

a. Chứng minh H, I đối xứng nhau qua d với H là trực tâm của ΔOMN.

b. Chứng minh A, I, S thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi *D* là trung điểm của *BC*, *E* là giao của phân giác góc *A* với *(O)* khác **A.** *F* là trung điểm của *MN*.

a) +) Chứng minh *OP* là trung trực của *MN*

Vì hai tam giác cân *MAB* và *NAC* có các cặp góc tương ứng bằng nhau nên ta có: $\widehat{PMN}=\widehat{PNM}, \widehat{OMN}=\widehat{ONM}$. Suy ra tam giác PMN và OMN cân tại *P* và *O*. Vậy *OP* là trung trực của *MN*.

+) Chứng minh *I, H* đối xứng nhau qua *d*

Ta có:

$$\widehat{IMF}=\frac{1}{2}\widehat{BME}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}; \widehat{HMF}=\widehat{HON}=\frac{1}{2}\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IMF}=\widehat{HMF}$$

Ta được đpcm.

b)+) Chứng minh *AD, AS* đối xứng nhau qua *AE*

Gọi *EK* là đường kính của *(O)*. Ta có $(DSEK)=-1$ nên $A(DSEK)=-1$ mà *AE* và *AK* vuông góc với nhau suy ra AE là phân giác $\widehat{SAD}$. Ta có đpcm

Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục ta thấy *A, I, S* thẳng hàng khi và chỉ khi *A, H, D* thẳng hàng. Ta dùng định lý Menelaus với tam giác *OEF* để chứng minh điều này.

$$\frac{HO}{HF}=\frac{FO}{FH}-1=\frac{MF\cot\frac{A}{2}}{MF\tan\frac{A}{2}-1}=\frac{\cos A}{\sin^2\frac{A}{2}};\ \frac{DE}{DO}=\frac{R(1-\cos A)}{R\cos A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}$$

$$\Rightarrow\frac{HO}{HF}.\frac{DE}{DO}.\frac{AF}{AE}=1\Rightarrow \text{đpcm}$$

Câu 56. (Đề thi đề xuất thi HSG trường THPT Chu Văn An – Hà Nội – 2015) ΔABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD. M thuộc BC thỏa mãn $OM//AB$. DM cắt (O) tại P khác D. Chứng minh C,H,P thẳng hàng, với H là trực tâm ΔABC.

Hướng dẫn giải:

DP cắt AB tại E thì M là trung điểm DE (vì OM là đường trung bình).

$BHCD$ là hình bình hành nên DH cắt DC tại I là trung điểm mỗi đường.

Suy ra MI là đường trung bình của $\Delta DHE\Rightarrow MI//EH$; $EH//BC$

Kéo dài CH cắt (O) tại Q. Ta sẽ chứng minh $Q\equiv P$ bằng cách chứng minh Q, E, D thẳng hàng.

Vì $BD//CQ$ nên $BDCQ$ là hình thang cân (hình thang nội tiếp).

Ta có $\widehat{EQH}=\widehat{EHK}$ vì tam giác QBH cân tại B

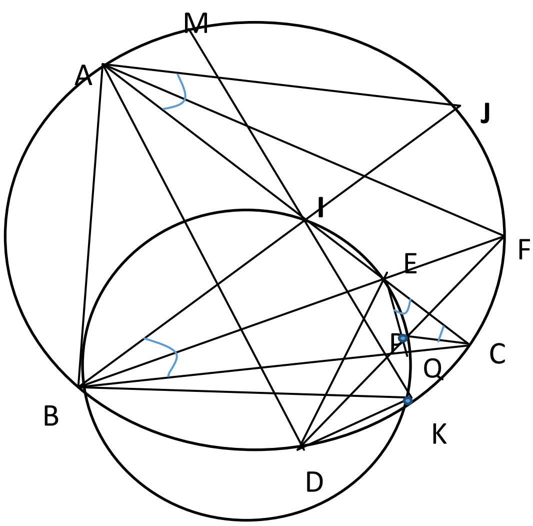
$\widehat{DQC}=\widehat{BCQ}$ vì hình thang $BDCQ$ cân

Nên $\widehat{EQH}=\widehat{DQC}$. Mà Q, H, C thẳng hàng nên E,Q,D thẳng hàng hay $Q\equiv P$.

Câu 57. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên Hưng Yên tỉnh Hưng Yên – 2015)

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D khác A. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. I là một điểm thay đổi trên cạnh $AC(I\neq E)$. Đường thẳng BI cắt (O) tại J khác B. Từ C kẻ đường thẳng song song với AJ cắt FD tại P. Đường tròn (T) ngoại tiếp ΔBIE cắt BC tại $Q(Q\neq B)$ và cắt (O) tại $K(K\neq B)$. Chứng minh E,P,Q thẳng hàng và đường thẳng KI luôn đi qua điểm cố định khi I thay đổi.

Hướng dẫn giải:



Gọi D là điểm chính giữa của cung $\overset\frown{BC}$ và E đối xứng với B qua AD nên $DB=DE=DC$.

$\widehat{DEF}=180^0-\widehat{DEB}=180^0-\widehat{DBE}=\widehat{DCF}$ vì $B,D,C,F\in(O)$

$\overset\frown{BD}=\overset\frown{DC}\Rightarrow\widehat{BFD}=\widehat{DFC}\Rightarrow\Delta DEF=\Delta DCF\,(g.c.g)$

$\Rightarrow DF$ là trung trực của EC.

$\Rightarrow\widehat{PEC}=\widehat{PCE}=\widehat{CAJ}$ (do $CP//AJ$)

Mà $\widehat{CAJ}=\widehat{CBI}$ (do $A,B,C,J\in(O)$)

Có $B,Q,E,I\in(T)\Rightarrow\widehat{QEC}=\widehat{QBI}=\widehat{CBJ}$

$\Rightarrow\widehat{PEC}=\widehat{QEC}$ và P, Q cùng phía đối với EC nên P,Q,E thẳng hàng.

Đường thẳng IK cắt (O) tại M khác K

$(KB,KI)\equiv(EB,EI)(\bmod\pi)$ vì $B,K,E,I\in(T)$

$(KD, KB) \equiv (AD, AB) (\bmod \pi)$ vì $B, D, K, A \in (O)$

$(KD, KI) \equiv (KD, KB) + (KB, KI) (\bmod \pi) \equiv (AD, AB) + (EB, EI) (\bmod \pi)$

$\equiv (AE, AD) + (EB, EA) (\bmod \pi) \equiv \dfrac{\pi}{2} (\bmod \pi)$ do AD là trung trực của $BE \Rightarrow BE \perp AD$

$\Rightarrow \widehat{DKM} = 90^0 \Rightarrow DM$ là đường kính của (O)

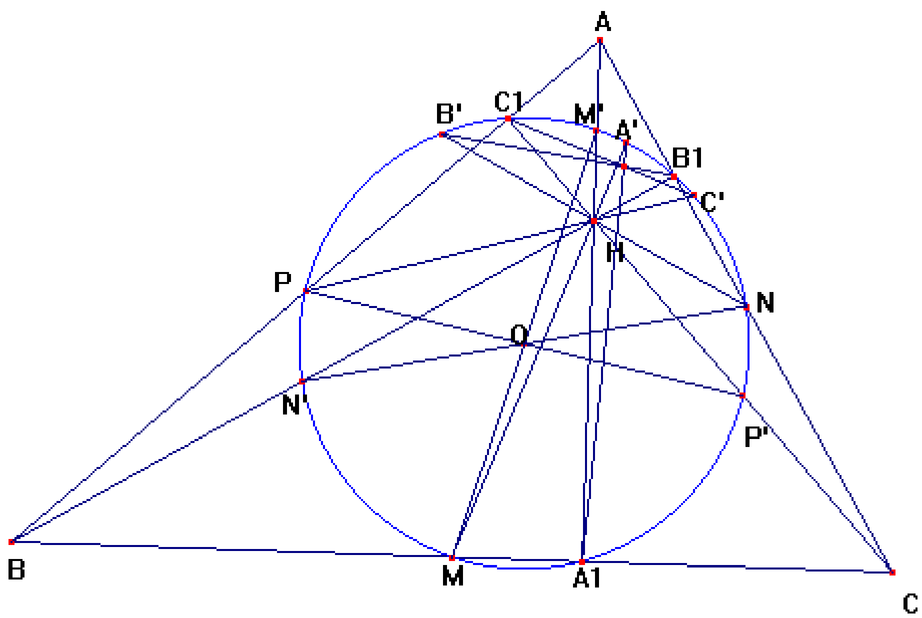
Mà D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A thì M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A nên M cố định. Vậy đường thẳng KI luôn qua điểm M cố định khi I thay đổi.

Câu 58. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Lào Cai – trại hè Hùng Vương lần thứ X)

Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B cắt AC tại P, PD cắt đường tròn (O) lần nữa tại G. Gọi W là giao điểm của AG với BC. Chứng minh 3 điểm O,P,Q thẳng hàng.

Câu 59. (Đề thi đề xuất HSG Vùng duyên hải và đồng bằng Bắc Bộ lần thứ VI - trường THPT chuyên Lào Cai) Cho ΔABC có trực tâm H, ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Gọi (W) là đường tròn ngoại tiếp ΔMNP (còn gọi là đường tròn Euler của ΔABC). Kí hiệu A', B', C' là các giao điểm thứ hai của MH, NH, PH và (W). Chứng minh rằng A_1A', B_1B', C_1C' đồng quy tại một điểm X nằm trên đường thẳng đi qua trọng tâm và trực tâm ΔABC (còn gọi là đường thẳng Euler của ΔABC).

Hướng dẫn giải:



Ta kí hiệu đường tròn qua 3 điểm T, U, V là (TUV).

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác M, N, P. Ta biết rằng (W) đi qua 9 điểm: M, N, P, A_1, B_1, C_1 và trung điểm AH, BH, CH. Giả sử M', N', P' là điểm đối xứng với M, N, P qua O.

Xét phép nghịch đảo cực H và giữ bất biến (W). Phép nghịch đảo này biến A_1A', B_1B', C_1C' tương ứng thành các đường tròn $(HMM'), (HNN'), (HPP')$.

Ta sẽ chỉ ra rằng trục đẳng phương của (HNN') và (HPP') là đường thẳng Euler của tam giác ABC (do đường thẳng này bất biến qua phép nghịch đảo nói trên). Thật vậy:

Trục đẳng phương của (*W*) và (*HNN'*) là *NN'*;

Trục đẳng phương của (*W*) và (*HPP'*) là *PP'*;

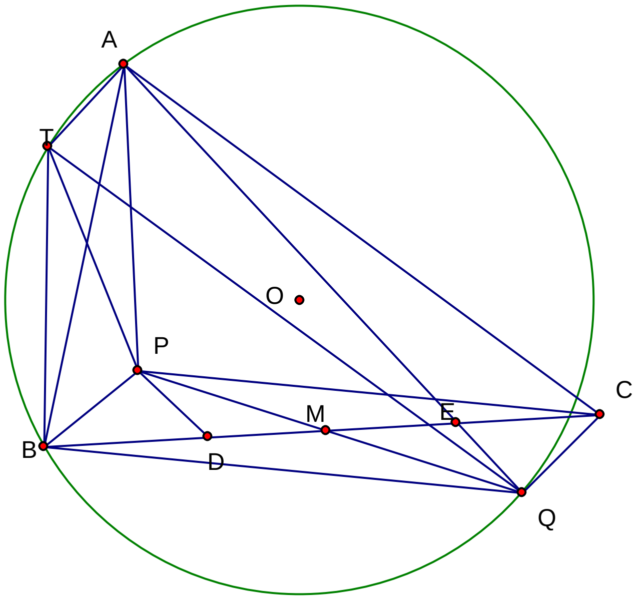
Do đó trục đẳng phương của (*HNN'*) và (*HPP'*) đi qua *H* và giao của *NN'* và *PP'*. Nhưng ta biết rằng tâm *O* của (*W*) cũng nằm trên đườngthẳng Euler của tam giác *ABC.* Do đó trục đẳng phương của (*HNN'*) và (*HPP'*) chính là đường thẳng Euler của tam giác *ABC.*

Tương tự, trục đẳng phương của (*HPP'*) và (*HMM'*), trục đẳng phương của (*HMM'*) và (*HNN'*) cũng là đường thẳng Euler của tam giác *ABC.*

Do đó ba đường tròn $(HMM'),(HNN'),(HPP')$ cùng đi qua một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác *ABC.* Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 60. (Đề đề nghị chọn HSG khu vực duyên hải đồng bằng Bắc Bộ 2015 – trường THPT chuyên Bắc Ninh) Cho ΔABC nhọn với $AB < AC$. Giả sử D và E là các điểm trên cạnh BC sao cho $BD = CE$ và D nằm giữa B và E. Giả sử P là điểm thuộc miền trong của ΔABC sao cho $PD // AE$ và $\widehat{PAB} = \widehat{EAC}$. Chứng minh rằng: $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$.

Hướng dẫn giải:



Vẽ hình bình hành *BPCQ*, khi đó *PQ* và *BC* giao nhau tại trung điểm *M* của mỗi đường.

Do đó *DE* và *PQ* cũng giao nhau tại trung điểm M của mỗi đường suy ra *PDQE* là hình bình hành. Suy ra $QE // PD$ từ đó *A*, *E*, *Q* thẳng hàng.

Vẽ hình bình hành *BPAT*. Khi đó ta cũng suy ra *TACQ* là hình bình hành.

Ta có $\widehat{TQA} = \widehat{QAE} = \widehat{EAC} = \widehat{BAP} = \widehat{APT}$.

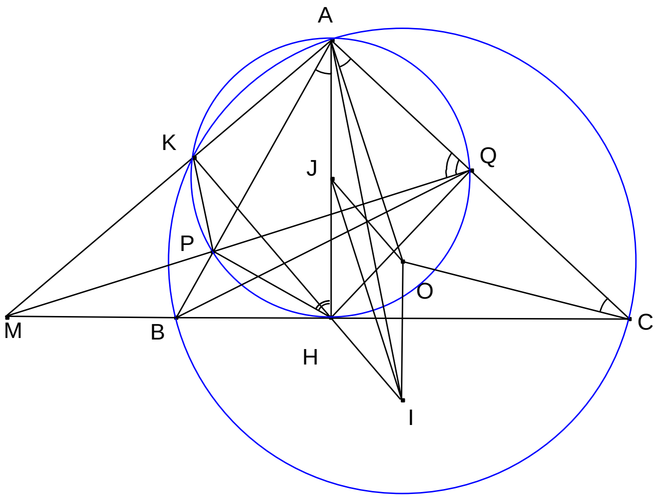
Do đó tứ giác TAQB nội tiếp.

Ta thấy qua phép tịnh tiến véc tơ $\overrightarrow{BP}$ thì tam giác *BQT* biến thành tam giác *PCA.*

Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{TQB} = \widehat{TAB} = \widehat{ABP}$ (đpcm)

Câu 61. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Thái Nguyên, trại hè Hùng Vương lần thứ 10) Cho tam giác *ABC* nhọn ($AB < AC$) có *AH* là đường cao. *P*, *Q* là chân các đường vuông góc hạ từ *H* xuống *AB*, *AC.* Gọi *M* là giao của *PQ* và *BC*, *K* là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* và *AM*, *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *BPC.* Chứng minh *K*, *H*, *I* thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Dễ dàng chứng minh được $PQCB$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $MB.MC = MP.MQ$. Do hai tam giác MHP và MQH đồng dạng nên $MH^2 = MP.MQ$.

Vậy có $MH^2 = MB.MC = MP.MQ = MK.MA$ suy ra $AKPH$ là tứ giác nội tiếp. Vậy $HK \perp AM$

Ta có năm điểm A, K, P, H, Q cùng thuộc đường tròn tâm J là trung điểm của AH. Bây giờ ta lại có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQCB$ nên $IJ \perp PQ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta dễ dàng chứng minh được $OA \perp PQ$. Từ đó $OA // IJ$.

Lại có $OI \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow OI // AH$. Từ đó $AJIO$ là hình bình hành. Dễ dàng suy ra $JHIO$ cũng là hình bình hành. Mà JO vuông góc với AK (do AK là trục đẳng phương của hai đường tròn (J) và (O)). Vậy HI cũng vuông góc với AK. Lại có KH vuông góc với AK nên K, H, I thẳng hàng.

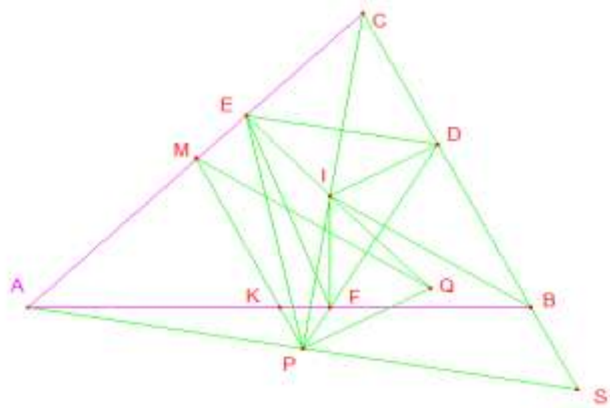
Câu 62. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Sơn La, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Các cạnh BC, CA, AI lần lượt tiếp xúc với đường tròn (I) tại D, E, F. Gọi M, K lần lượt là các trung điểm các cạnh AC và AB, P là giao điểm của các đường thẳng MK và CI.

a. Chứng minh rằng các điểm D, F, P thẳng hàng.

b. Gọi Q là điểm thỏa $QP \perp MK$ và $QM // BI$. Chứng minh $QI \perp AC$.

Hướng dẫn giải:

a. Kéo dài AP cắt CB tại S. Vì M, K là các trung điểm AC và AB nên P là trung điểm AS.



+ Trong tam giác CAS có CP là trung tuyến và phân giác nên $CA = CS$

+Đặt $p = AB + BC + CA$. Có $AF = p - BC$ (1)

+ $SD = CS - CD = CA - \left(p - AB\right) = AB + AC - p$

$= AB + BC + CA - BC - p = p - BC$.

$\Rightarrow SD = p - BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AF = SD$. Chú ý: $BD = BF, PA = PS$.

Trong tam giác ABS có $\frac{FA}{FB}.\frac{DB}{DS}.\frac{PS}{PA} = 1 \Rightarrow P, F, D$ thẳng hàng.

b. Có CI là trung trực của ED nên tam giác PDE cân tại P.

$+\ \widehat{PED} = \widehat{PDE} = 180^0 - \left(90^0 - \frac{C}{2}\right) - \left(90^0 - \frac{B}{2}\right) = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2} = \widehat{AEF}$

+ Giả sử Q_1 là điểm thỏa mãn $Q_1M \parallel BI, Q_1I \perp AC$ suy ra Q, I, E thẳng hàng.

+ Có $\widehat{PEA} = 180^0 - \widehat{PED} - \widehat{DEC} = 180^0 - \left(90^0 - \frac{A}{2}\right) - \left(90^0 - \frac{C}{2}\right) = \frac{A}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 - \frac{B}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{PEQ_1} = 90^0 - \widehat{PEA} = \frac{B}{2}$,(3)

Nhưng $PM \parallel CB, MQ_1 \parallel BI \Rightarrow \widehat{PMQ_1} = \widehat{IBD} = \frac{B}{2}$,(4)

+ Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $PMEQ_1$ nội tiếp

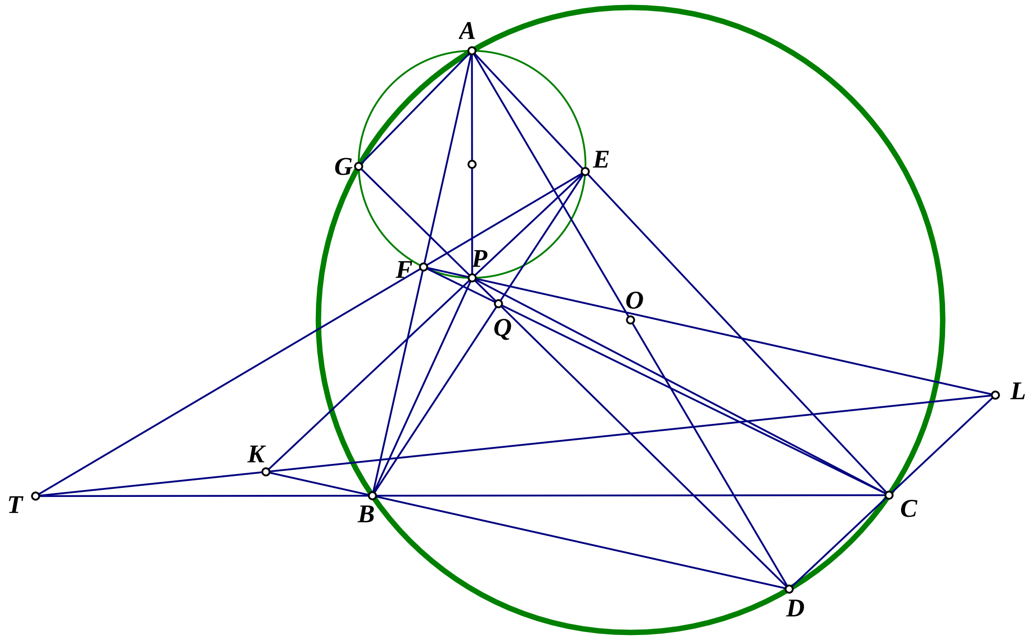
$\Rightarrow QI \perp AC.$

$\Rightarrow \widehat{Q_1PM} = \widehat{Q_1EM} = 90^0$ hay $Q_1P \perp MK$

+ Suy ra $Q_1 \equiv Q$ tức $QI \perp AC$. *Suy ra điều phải chứng minh.*

Câu 63. (Đề thi đề xuất chọn HSG vùng duyên hải đồng bằng Bắc Bộ năm 2015 -trường THPT chuyên Vĩnh Phúc) Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AP \perp BC$. Đường tròn đường kính AP cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy.

Hướng dẫn giải:



Gọi AD là đường kính của (O), dễ thấy G,P,D thẳng hàng và $PE \parallel CD; PF \parallel BD$. Giả sử PE,PF cắt DB,DC tại K,L; EF cắt BC tại T.

Theo định lý Desargues để chứng minh BE, CF, GP (hay PD) đồng quy ta chỉ cần chứng minh T,K,L thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus ta được: $\frac{TB}{TC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1 \Rightarrow \frac{TB}{TC}=\frac{FB}{EC}.\frac{AE}{AF}$ (1)

Dễ thấy tứ giác $EFBC$ nội tiếp nên $\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{CF}$ (2)

Cũng từ $EFBC$ nội tiếp suy ra

$\angle FCL = \angle FCA + \angle ACL = \angle EBA + 90^0 = \angle EBA + \angle ABK = \angle KBE$

Tứ giác $PKDL$ là hình bình hành suy ra $\angle PKB = \angle PLC$.

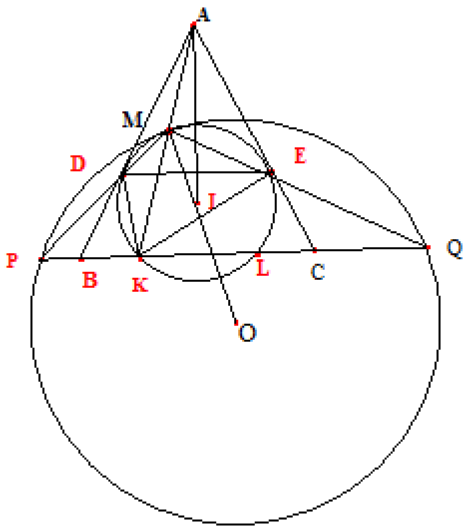
Suy ra $\Delta EBK : \Delta FCL \Rightarrow \frac{BE}{CF}=\frac{KB}{CL}$ (3).

Ta có $BF.PL = CE.PK = S_{PKDL} \Rightarrow \frac{BF}{CE}=\frac{PK}{PL}=\frac{DL}{DK}$ (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được $\frac{TB}{TC}=\frac{DL}{DK}.\frac{KB}{CL} \Rightarrow \frac{TB}{TC}.\frac{LC}{LD}.\frac{KD}{KB}=1$. Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác DBC ta suy ra T,K,L thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

Câu 64. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Hà Giang, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho tam giác ABC cân tại A. Một đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh AB, AC và cắt cạnh BC lần lượt tại K và L. Đoạn AK cắt đường tròn ω tại M. Gọi P và Q lần lượt là điểm đối xứng của K qua B và C. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Chứng minh rằng các điểm M, O và tâm đường tròn ω thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Gọi I là tâm của ω; D, E theo thứ tự là tiếp điểm của ω và AB, AC; (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ.

Dễ thấy tứ giác $MDKE$ điều hòa. Do đó

$D(MKBE) = D(MKDE) = -1$

Dễ thấy $DE // PK$, mà $BP = BK$ nên $D(PKBE) = -1$.

Vậy $D(MKBE) = D(PKBE)$. Từ đó $DM \equiv DP$ hay M, D, P thẳng hàng.

Chứng minh tương tự M, E, Q thẳng hàng.

Kết hợp với $DE // PK$ suy ra $\frac{\overline{MP}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{ME}} = k$

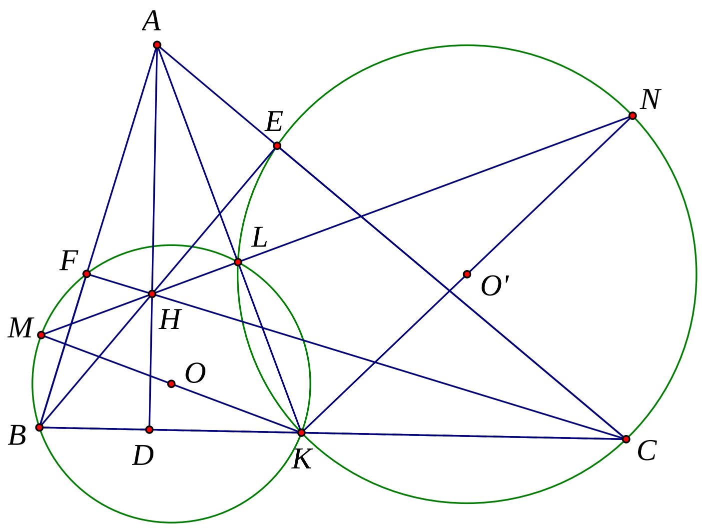
Do đó qua phép vị tự tâm M tỉ số k các điểm M, D, E theo thứ tự biến thành các điểm M, P, Q.

Vậy qua phép vị tự tâm M đường tròn ω biến thành đường tròn (O).

Do đó M, I, O thẳng hàng.

Câu 65. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Lai Châu, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Cho K là một điểm tùy ý trên cạnh BC (K khác B, C). Kẻ đường kính KM của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và đường kính KN của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK. Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Gọi L là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (BKF) và (CKE).

Ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Do đó $\overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AE}.\overline{AC} \Rightarrow A$ thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (BFK) và (CEK). Suy ra A, L, K thẳng hàng.

Vì tứ giác $BFHD$ nội tiếp nên $\overline{AH}.\overline{AD} = \overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AL}.\overline{AK}$. Do đó tứ giác $DHLK$ nội tiếp. Suy ra $HL \perp AK$.

Mà $ML \perp AK$ nên M, H, L thẳng hàng.

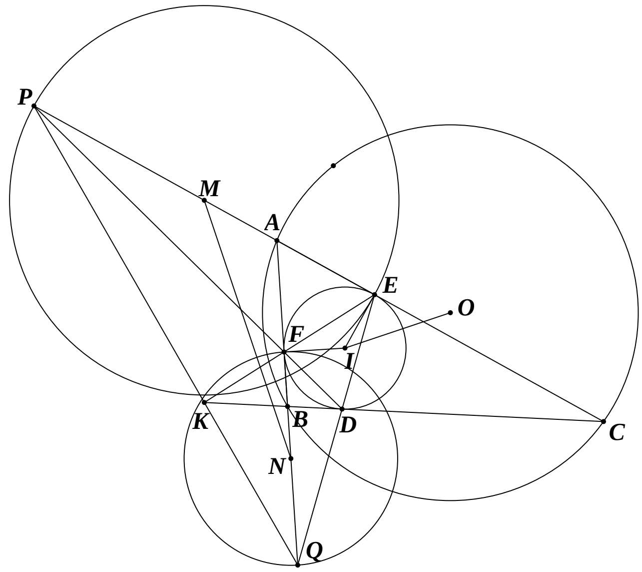
Tương tự N, H, L thẳng hàng. Từ đó suy ra M, H, N thẳng hàng.

LOẠI 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.

Câu 1. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG]

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (C_1) tâm I. Đường tròn (C_1) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi P là giao của FD và CA, Q là giao của DE và AB, K là giao của EF và BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của PE và QF. Chứng minh rằng OI vuông góc MN, với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Xét 2 đường tròn: (M, ME) và (N, NF).

Ta có $P_{I/(M)} = IE^2 = \text{IF}^2 = P_{I/(N)}$. (1) Gọi R là bán kính đường tròn (ABC). Vì D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (C_1) với các cạnh ΔABC nên AD, BE, CF đồng quy.

Suy ra $(QFBA) = -1$

$\Rightarrow NF^2 = NB.NA = NO^2 - R^2$.

Ta có $(PEAC) = -1$

$\Rightarrow ME^2 = MA.MC = MO^2 - R^2$.

Khi đó:

$P_{O/(M)} = MO^2 - ME^2 = R^2, P_{O/(N)} = NO^2 - NF^2 = R^2 \Rightarrow P_{O/(M)} = P_{O/(N)}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra OI là trục đẳng phương của (M) và (N)

$\Rightarrow OI \perp MN$.

Câu 2.ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI ĐB&DHBB

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có $AC > BC$. Giả sử H là trực tâm tam giác ABC, đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt AB tại điểm thứ hai là E ($E \neq B$). Đường thẳng đi qua D, vuông góc với DO cắt BC tại F và cắt đường tròn (O) tại hai điểm I, J.

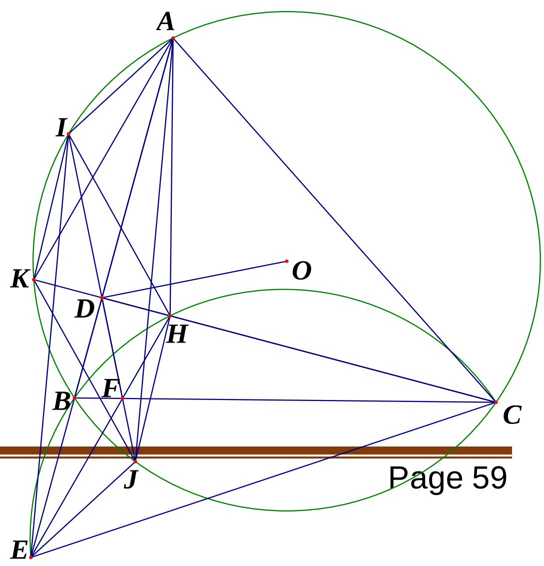
a) Chứng minh tứ giác $IHJE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh H, E, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Giả sử ta có hình vẽ như trên (các trường hợp khác tương tự).

Gọi K là giao điểm thứ hai của CH và đường tròn (O)



Ta có D là trung điểm KH và D cũng là trung điểm IJ, suy ra tứ giác IHJK là hình bình hành.

Suy ra $\widehat{IKJ} = \widehat{IHJ}$ (1).

Lại có tứ giác BHCE nội tiếp, suy ra $\widehat{CEB} + \widehat{CHB} = 180^0$. Mà $\widehat{CAB} + \widehat{CHB} = 180^0$.

Suy ra $\widehat{CEB} = \widehat{CAB}$, như vậy tam giác CEA cân tại C, $CD \perp AE$ nên D là trung điểm AE.

Suy ra tứ giác IAJE là hình bình hành và $\widehat{IEJ} = \widehat{IAJ}$ (2).

Lại có $\widehat{IKJ} + \widehat{IAJ} = 180^0$ (3) (do tứ giác IAJK nội tiếp).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{IHJ} + \widehat{IEJ} = 180^0$, như vậy tứ giác IHJE nội tiếp. Giả sử (O_1) và (O_2) là đường tròn ngoại tiếp các tứ giác IHJE và BHCE. Ta có HE chính là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Lại có $\overline{FI}.\overline{FJ} = \overline{FB}.\overline{FC}$ (cùng là $P_{F/(O)}$).

Mà $\overline{FI}.\overline{FJ} = P_{F/(O_1)}$; $\overline{FB}.\overline{FC} = P_{F/(O_2)}$. Suy ra $P_{F/(O_1)} = P_{F/(O_2)}$.

Suy ra F thuộc HE là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Vậy H, E, F thẳng hàng.

Câu 3.TRƯỜNG THPT CHUYÊNNGUYỄN TẤT THÀNH

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tâm I, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Đường thẳng AI cắt đường tròn (I) tại M, N sao cho M nằm giữa A và N. Đường thẳng DM và EF cắt nhau tại K, đường thẳng NK cắt đường tròn tâm (I) tại điểm thứ hai là P khác N. Đường thẳng AI và EF cắt nhau tại Q.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $PQID$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng: Các điểm A, P, D thẳng hàng.

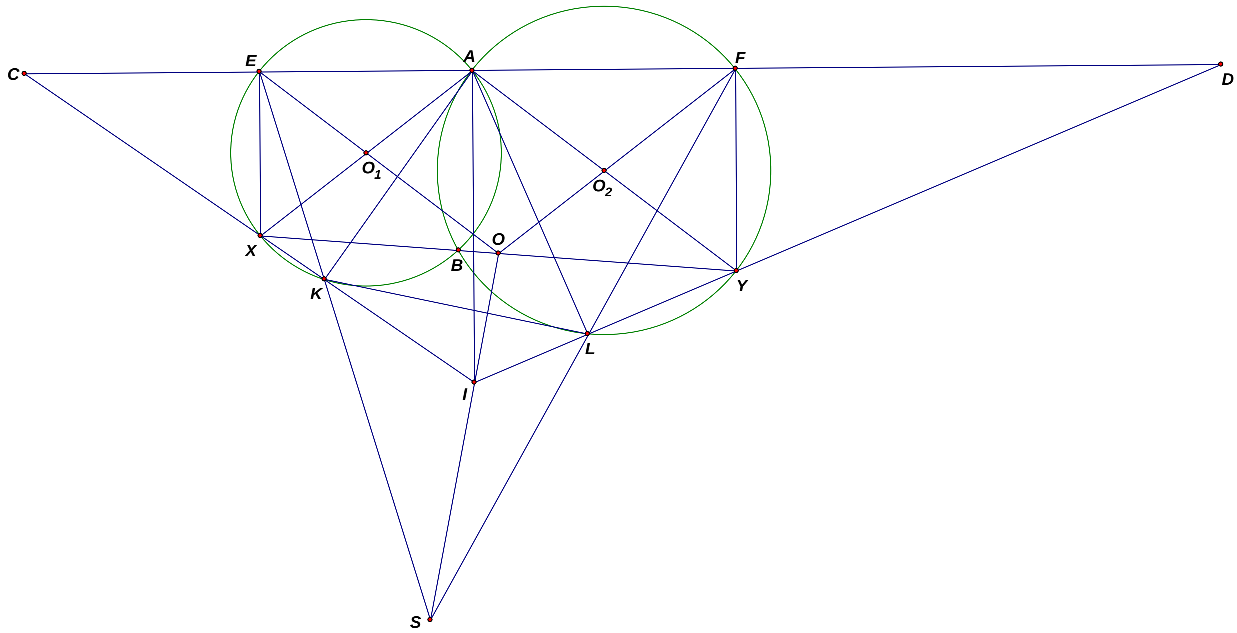
Câu 4.HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊNVÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. AX, AY lần lượt là các đường kính của (O_1) và (O_2). Gọi O là trung điểm của XY; I là điểm thuộc đường phân giác của góc $\widehat{XAY}$ sao cho OI không vuông góc với XY và I không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua A vuông góc với AI lần lượt cắt các đường tròn (O_1), (O_2) tại các điểm E, F khác A. IX cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai K, IY cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai L.

1. Gọi C là giao điểm của EF với IX. Chứng minh rằng OE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK.

2. Chứng minh rằng ba đường thẳng EK, FL và OI đồng quy.

Hướng dẫn giải



1. Không mất tính tổng quát giả sử I là điểm thuộc đường phân giác trong của góc $\widehat{XAY}$.

Ta có tứ giác AO_1OO_2 là hình bình hành nên suy ra $OO_1 \parallel AY$

Lại có $(EA, EO_1) = (AO_1, AE) = (AF, AO_2) \pmod{\pi} \Rightarrow EO_1 \parallel AY$

Do đó O, O_1, E thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có O, O_2, F thẳng hàngMặt khác

$$(CE, CK) = (AC, AK) + (AK, CK) = (AC, AK) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O_1E}, \overrightarrow{O_1K}\right) = (EO_1, EK) \pmod{\pi}$$

Do đó OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK) 2. Ta có $\widehat{AKI} = \widehat{ALI} = 90^0$ nên 4 điểm A, I, K, L cùng thuộc đường tròn đường kính AI.

Mà $EF \perp AI$ nên suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Do đó $(AE, AK) = (LA, LK) \pmod{\pi}$ (1) Mặt khác

$$(KE, KA) = (XE, XA) = (XE, EA) + (AE, AX) =$$

$$\frac{\pi}{2} + (AE, AX) \pmod{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} + (AY, AF) = (AF, FY) + (AY, AF) = (AY, FY) = (LA, LF) \pmod{\pi} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(EF, EK) = (EA, AK) + (AK, EK) = (LA, LK) + (LF, LA) = (LF, LK) \pmod{\pi}$$

Vậy 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn. Gọi S là giao điểm của EK và FL

Vì 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn nên ta có

$\overline{SE}.\overline{SK} = \overline{SF}.\overline{SL} \Rightarrow P_{S/(CEK)} = P_{S/(DFL)}$ (3)Ta có

$\overline{IC}.\overline{IK} = \overline{ID}.\overline{IL} = IA^2 \Rightarrow P_{I/(CEK)} = P_{I/(DFL)}$ (4) Gọi D là giao điểm của EF với IY

Chứng minh tương tự câu 1) ta có OF là tiếp tuyến của đường tròn (DFL)

Mặt khác tứ giác $EFYX$ là hình thang vuông tại E, F và O là trung điểm của XY nên suy ra $OE = OF$. Do đó $P_{O/(CEK)} = OE^2 = OF^2 = P_{O/(DFL)}$ (5) Từ (3), (4), (5) suy ra S, O, I cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(CEK), (DFL)$ nên S, O, I thẳng hàng. Vậy 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy tại S.

) Chú ý: Nếu HS không sử dụng góc định hướng thì phải xét các trường hợp vị trí của điểm I (I nằm ngoài các đoạn XK, YL và I nằm trong các đoạn XK, YL)

II. Bài toán vecto và quan hệ vuông góc

Câu 66. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2000-2011 toán 10)

a. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm I thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Có kết luận gì về điểm I, hãy chứng minh điều đó.

b. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BI và CJ. Chứng minh rằng đường cao AH nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BI và CJ.

Câu 67. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2004-2005)

a. Cho tứ giác $ABCD$, với $AB = a$, $BC = b$, $DA = d$. Chứng minh rằng:
$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = a^2 - b^2 + c^2 - d^2$.

b. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Dựng ra phía ngoài tam giác các đoạn thẳng PN, NE sao cho $PD \perp AB$, $PD = AB$ và $NE \perp AC$, $NE = AC$. Từ D dựng đường thẳng DF song song và cùng hướng với BC sao cho $DF = \frac{BC}{2}$
.

Chứng minh $EF \perp AM$.

Câu 68. (THPT Chuyên Bắc Giang – Tỉnh Bắc Giang – Thi Toán Khối 11)

Cho tam giác ABC. Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$ và giả sử $\widehat{KCB} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên CK, M là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh $MH \perp BC$.

Lời giải

Gọi D là điểm đối xứng với B qua CK. Khi đó

$\widehat{KCB} = \widehat{KCD} = \widehat{ACD}$. Do $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$ nên $\dfrac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCB}} = 2$.

Vì $\dfrac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCB}} = \dfrac{AC\sin\widehat{ACK}}{BC\sin\widehat{KCB}}$

$= \dfrac{2AC\sin\widehat{ACK}\cos\widehat{KCB}}{BC\sin\widehat{ACK}} == \dfrac{2AC\cos\widehat{KCB}}{BC}$ nên

$\dfrac{2AC\cos\widehat{KCB}}{BC} = 2 \Rightarrow \cos\widehat{KCB} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow$

$\cos\widehat{ACD} = \dfrac{DC}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0$ và tứ giác CHDA là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KCB} = \widehat{ACD} = \widehat{AHD}$ (1)

Do AH và BD cùng vuông góc với CK nên AH // DB $\Rightarrow \widehat{HDB} = \widehat{AHD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp (DH cắt BC tại E, CK cắt BC tại F) suy ra H là trực tâm tam giác BCD $\Rightarrow$ BH $\perp$ CD $\Rightarrow$ BH//AD

Vậy tứ giác AHBD là hình bình hành, do M là trung điểm của AB nên H, M, D thẳng hang. Vậy MH $\perp$ BC.

Câu 69. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2000-2001 lớp 10)

a. Cho tam giác ABC có ba điểm A', B', C' là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tính giá trị biểu thức $s = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}$.

b. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 5$; $AC = 7$. AD và CE là phân giác trong cắt nhau tại P. Tính AP.

Câu 70. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2005-2006 lớp 12)

Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ACM và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh $GI \perp CM$.

IV. Bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng và tính chất đồng quy

Câu 71. (THPT Chuyên Cao Bằng – Thi Olympic 2014 – Toán 11)

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài A_1A_2, tiếp tuyến chung trong B_1B_2 của hai đường tròn ($A_1, B_1 \in (O_1)$, $A_2, B_2 \in (O_2)$). Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, O_1O_2 đồng quy.

Câu 72. (THPT Chu Văn An – Hà Nội – Đề xuất đề thi học sinh giỏi Toán 11- 2015)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD. M thuộc BC thỏa mãn $OM // AB$. DM cắt (O) tại P khác D. Chứng minh C, H, P thẳng hàng với H là trực tâm tam giác ABC.

Lời giải

DP cắt AB tại E thì M là trung điểm DE (vì OM là đường trung bình)

BHCD là hình bình hành nên DH cắt DC tại I là trung điểm mỗi đường

Suy ra MI là đường trung bình của ΔDHE → MI // EH

→ EH // BC

Kéo dài CH cắt (O) tại Q. Ta sẽ c/m Q ≡ P, bằng cách c/m Q, E, D thẳng hàng.

Vì BD // CQ nên BDCQ là hình thang cân (hình thang nội tiếp).

Ta có: $\widehat{EQH} = \widehat{EHK}$ **vì ΔQBH cân tại B**

$\widehat{DQC} = \widehat{BCQ}$ **vì hình thang BDCQ cân**

Nên $\widehat{EQH} = \widehat{DQC}$

Mà Q, H, C thẳng hàng, nên E, Q, D thẳng hàng, hay Q≡P (đpcm

Câu 73. (THPT Chuyên tỉnh Lào Cai – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho đường tròn tâm O **và hai đường kính** AB**,** CD**. Tiếp tuyến với đường tròn** (O) **tại** B **cắt** AC **tại** P**,** PD **cắt đường tròn** (O) **lần nữa tại** G**. Gọi** W **là giao điểm của** AG **và** BC**. Chứng minh ba điểm** O**,** P**,** W **thẳng hàng.**

Câu 74. (THPT Chuyên Hưng Yên- Thi Môn Toán Khối 11 -2015)

Cho tam giác ABC **nội tiếp đường tròn** (O)**. Đường phân giác trong của góc** $\angle BAC$ **cắt** (O) **tại** D **khác** A**. Gọi** E **là điểm đối xứng với** B **qua** AD**.** BE **cắt** (O) **tại** F **khác** B**.** I **là một điểm thay đổi trên cạnh** AC $(I \neq E)$**. Đường thẳng** BI **cắt** (O) **tại** J **khác** B**. Từ** C **kẻ đường thẳng song song với** AJ **cắt** FD **tại** P**. Đường tròn** (T) **ngoại tiếp** ∇BIE **cắt** BC **tại** Q $(Q \neq B)$ **và cắt** (O) **tại** K $(K \neq B)$**. Chứng minh** E**,** P**,** Q **thẳng hàng và đương thẳng** KI **luôn đi qua điểm cố định khi** I **thay đổi.**

Lời giải

+) D **là điểm chính giữa của cung** $\widehat{BC}$ **của** (O) **và E đối xứng** B **qua** AD **nên**

$$DB = DE = DC$$

$\widehat{DEF} = 180^0 - \widehat{DEB} = 180^0 - \widehat{DBE} = \widehat{DCF}$ **(vì** $B, D, C, F \in (O)$**).**

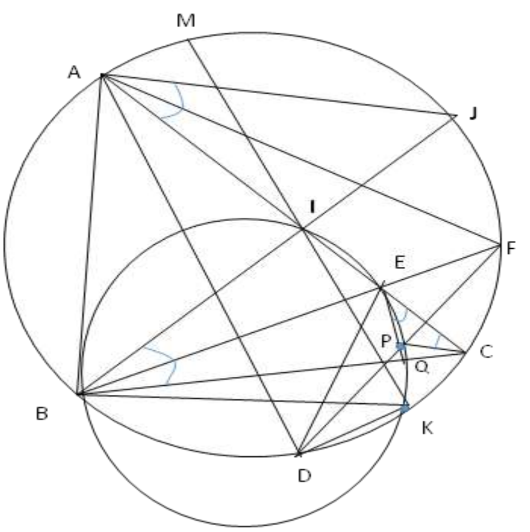
$\widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{DFC} \Rightarrow \Delta DEF = \Delta DCF$ **(g.c.g)** $\Rightarrow DF$ **là trung trực** EC**.**

$\Rightarrow \widehat{PEC} = \widehat{PCE} = \widehat{CAJ}$

Mà $\widehat{CAJ} = \widehat{CBJ}$ **(do** $A,$

Có $B, Q, E, I \in (T) \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{PEC} = \widehat{QEC}$ **và** P, Q ... **ng.**



+) **Đường thẳng** IK **cắt** (O) **tại** M **khác** K

$(KB, KI) \equiv (EB, EI)(mod\pi)$ **(vì** $B, K, E, I \in (T)$**).**

$(KD, KB) \equiv (AD, AB)(mod\pi)$ **(vì** $B, D, K, A \in (O)$**).**

$$(KD, KI) \equiv (KD, KB) + (KB, KI)(mod\pi) \equiv (AD, AB) + (EB, EI)(mod\pi)$$
$$\equiv (AE, AD) + (EB, EA)(mod\pi)$$
$$\equiv \frac{\pi}{2}(mod\pi)(\text{do } AD \text{ là trung trực của } BE \Longrightarrow BE \perp AD).$$

$\Rightarrow \widehat{DKM} = 90^0 \Rightarrow DM$ **là đường kính của** (O).

Mà D **là điểm chính giữa cung** $\widehat{BC}$ **chứa** A**thì** M là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$**không** chứa A**nên** M **cố định. Vậy đường thẳng** KI **luôn qua điểm** M **cố định khi** I **thay đổi.**

Câu 75. (THPT Chuyên tỉnh Thái Nguyên – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho tam giác ABC **nhọn** $(AB < AC)$ **có** AH **là đường cao.** P, Q **là chân đường vuông góc hạ từ** H **xuống** AB, AC. **Gọi** M **là giao của** PQ **và** BC, K **là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác** ABC **và** AM, I **là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác** BPC. **Chứng minh** K, H, I **thẳng hàng.**

Lời giải

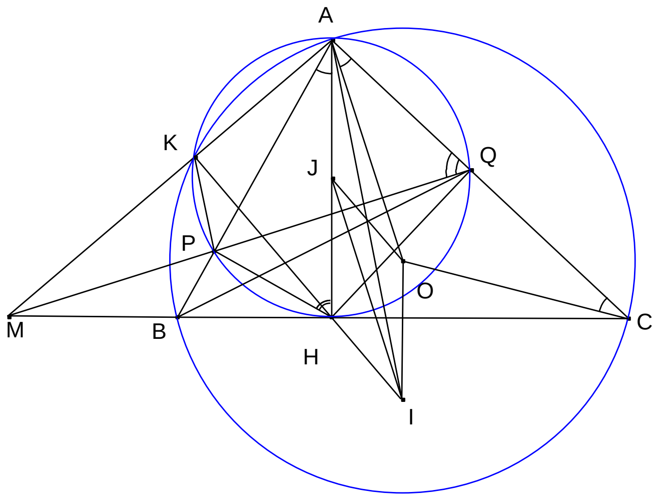
Dễ dàng chứng minh được ***PQCB*** **là tứ giác nội tiếp.**

Ta có ***MB.MC*** **=** ***MP.MQ*****. Do hai tam giác** ***MHP*** **và** ***MQH*** **đồng dạng nên** $MH^2 = MP.MQ$.

Vậy có $MH^2 = MB.MC = MP.MQ = MK.MA$ **suy ra** ***AKPH*** **là tứ giác nội tiếp. Vậy** $HK \perp AM$.

Ta có năm điểm ***A, K, P, H, Q*** **cùng thuộc đường tròn tâm** ***J*** **là trung điểm của** ***AH*****. Bây giờ ta lại có** ***I*** **là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác** ***PQCB*** **nên** $IJ \perp PQ$. **Gọi** ***O*** **là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác** ***ABC*** **ta dễ dàng chứng minh được** $OA \perp PQ$ **. Từ đó** ***OA*** **//** ***IJ*****.**

Lại có $OI \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow OI // AH$ **. Từ đó** ***AJIO*** **là hình bình hành. Dễ dàng suy ra** ***JHIO*** **cũng là hình bình hành. Mà** ***JO*** **vuông góc với** ***AK*** **(do** ***AK*** **là trục đẳng phương của hai đường tròn (*****J*****) và (*****O*****)). Vậy** ***HI*** **cũng vuông góc với** ***AK*****. Lại có** ***KH*** **vuông góc với** ***AK*** **nên** ***K, H, I*** **thẳng hàng.**



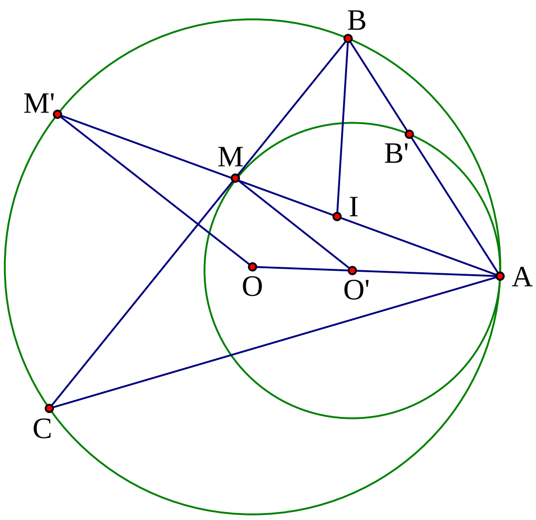
Câu 76. (THPT Chuyên tỉnh Tuyên Quang – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc với nhau tại A, (O') nằm trong (O), BC là một dây cung của (O) tiếp xúc với (O') tại M. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. Ba điểm A, I, M thẳng hàng.

b. Khi dây BC thay đổi thì điểm I thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Gọi M' là giao điểm thứ hai của MA với (O) và B' là giao điểm thứ hai của BA với (O') (khác A).

Đặt $k = \dfrac{R}{R'}$. Ta thấy $V_A^k(O') = O, V_A^k(M) = M'$, suy ra O'M // OM'. Vì O'M ⊥ BC nên OM' ⊥ BC, do đó M' là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$. Vậy AM là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, hay I thuộc đường thẳng AM.

b) Theo tính chất của phân giác thì $\dfrac{IA}{IM}=\dfrac{BA}{BM}$.

Mặt khác, theo tính chất của phương tích thì

$$BM^2=BB'.BA\Rightarrow\frac{IA}{IM}=\frac{AB}{\sqrt{BB'.AB}}=\sqrt{\frac{AB}{BB'}}.$$

Vì $V_A^k(B')=B$ **nên**

$$\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AB'}\Rightarrow AB=k.AB'\Rightarrow AB=k(AB-BB')\Rightarrow\frac{AB}{BB'}=\frac{k}{k-1}.$$

Do đó

$$\frac{IA}{IM}=\sqrt{\frac{k}{k-1}}\Rightarrow AI=\sqrt{\frac{k}{k-1}}(AM-AI)\Rightarrow\overrightarrow{AI}=q.\overrightarrow{AM},\ q=\frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}{1+\sqrt{\frac{k}{k-1}}}.$$

Vậy $V_A^q(M)=I$ **. Do** $M\in(O')$ **nên** $I\in(O'')=V_A^q((O'))$ **cố định.**

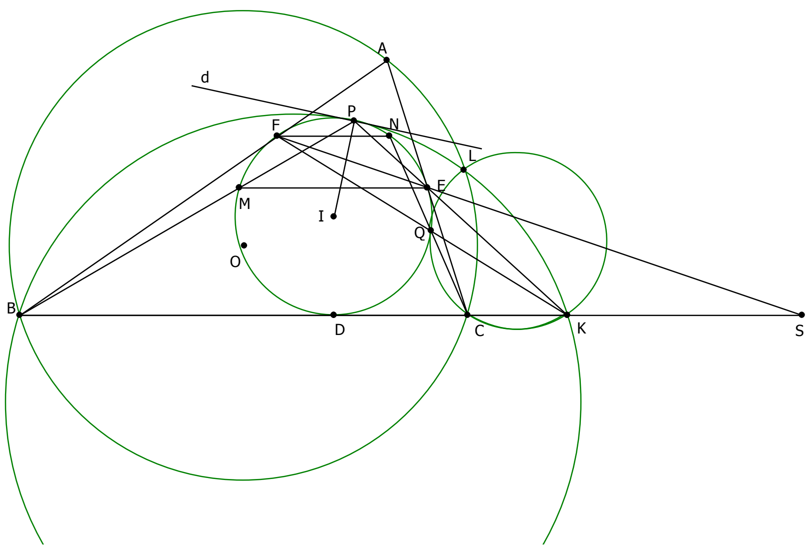
Câu 77. THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Tỉnh Yên Bái – Thi Toán Khối 11)

Cho tam giác ABC **không cân tại** A**. Gọi** (O) **và** (I) **theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp tam giác** ABC**.** (I) **tiếp xúc với** AC**,** AB **tại** E**,** F**. Các điểm** M**,** N **thuộc** (I) **sao cho** EM **song song** BC **và** FN **song song** BC**. Gọi** P**,** Q **lần lượt là giao điểm của** BM**,** CN **với** (I)**. Chứng minh rằng**

a. BC**,** EP**,** FQ **đồng quy tại một điểm, gọi đó là điểm** K**.**

b. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BPK**,** CQK **cùng tiếp xúc với** (I) **và cùng đi qua một điểm thuộc** (O)**.**

Lời giải



a) Gọi S **là giao điểm của** BC **và** EF**. Gọi** D **là tiếp điểm của** (I) **với** BC**. Ta có** $DMFP$ **là tứ giác**

điều hòa $\Rightarrow E(DSPM)=E(DFPM)=-1$

Mà *EM//DS*.

Do đó *EP* đi qua trung điểm của *DS*.

Tương tự *FQ* đi qua trung điểm của *DS*.

Vậy *BC, EP, FQ* đồng quy tại trung điểm của *DS*. Kí hiệu là *K*.

b) Kí hiệu (*XYZ*) là đường tròn ngoại tiếp tam giác *XYZ*.

Gọi *d* là tiếp tuyến với (*I*) tại *P*. Ta có:

$(KP,KB)\equiv(EP,EM)(\text{mod}\,\pi)\equiv(d,PM)(\text{mod}\,\pi)\equiv(d,PB)(\text{mod}\,\pi)$.

Suy ra *d* tiếp xúc với (*BPK*) tại *P*. Vậy (*PBK*) tiếp xúc với (*I*).

Tương tự (*CQK*) tiếp xúc với (*I*).

Kí hiệu *EE, FF* theo thứ tự chỉ tiếp tuyến với (*I*) tại *E, F*. Gọi *L* là giao điểm khác *K* của (*BPK*) và (*CQK*). Ta có:

$(LB,LC)\equiv(LB,LK)+(LK,LC)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(PB,PK)+(QK,QC)(\text{mod}\,\pi)\,(P\in(LBK);Q\in(LKC))$

$\equiv(PM,PE)+(QF,QN)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(EM,EE)+(FF,FN)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(AB,AC)(\text{mod}\,\pi)(FN//EM;FF\equiv AB;EE\equiv AC)$.

Suy ra *L* thuộc (*ABC*). Điều đó có nghĩa là đường tròn ngoại tiếp các tam giác *BPK* và *CQK* cùng đi qua một điểm thuộc (*O*).

Câu 78. (Sở GDĐT Nghệ An – Chọn đội tuyển dự thi HSG quốc gia lớp 12- 2006-2007)

Cho tam giác ABC. Gọi hai điểm B',C' lần lượt là trung điểm các cạnh AC, AB và H là hình chiếu của A lên BC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C'$, $BC'H$, $B'CH$ đồng quy tại một điểm đồng thời đường thẳng đi qua điểm đó và điểm H đi qua trung điểm đoạn thẳng $B'C'$.

Loại 2: Chứng minh tính chất: tam giác, tứ giác, đường tròn.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 2)- năm học 2001-2002]

Trong mặt phẳng, cho tứ giác (lồi) có: tổng khoảng cách từ mỗi đỉnh đến các cạnh là một số không đổi đối với tất cả các đỉnh. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành.

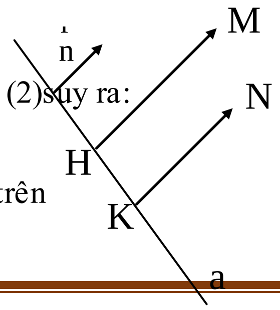
Lời giải

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến đơn vị của đường thẳng a, $\vec{n}$ có gốc trên a. M và N là hai điểm ở về một nữa mặt phẳng có bờ a chứa vectơ $\vec{n}$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{HM}.\vec{n}=t_M.\vec{n}^2$ (1) $\overrightarrow{KN}.\vec{n}=t_N.\vec{n}^2$ (2)

Từ giả thiết ta được: $t_M = d(M,a)$ và $t_N = d(N,a)$ và từ (1) và (2) suy ra:

$\overrightarrow{MN}.\vec{n}=d(N,a)-d(M,a)$ (3).



Gọi $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$, $\vec{n_3}$, $\vec{n_4}$ là các vectơ pháp tuyến đơn vị có gốc trên các cạnhAB,BC,CD,DA và ở miền trong tứ giác ABC**D.**

Gọi k là tổng khoảng cách từ một đỉnh đến các đường thẳng chứa cạnh của tứ giác.
Khi đó ta có:
$\overrightarrow{AB}(\vec{n_1}+\vec{n_2}+\vec{n_3}+\vec{n_4})$
= [d(B,AB) – d(A,AB)] + [d(B,BC) – d(A,BC)] + [d(B,CD) – d(A,CD)] + [d(B,DA) – d(A,DA)]
Do đó: $\overrightarrow{AB}(\vec{n_1}+\vec{n_2}+\vec{n_3}+\vec{n_4}) = k - k = 0$ (4). Tương tự ta có: $\overrightarrow{BC}(\vec{n_1}+\vec{n_2}+\vec{n_3}+\vec{n_4}) = 0$ (5).

Vì A,B,C không thẳng hàng nên từ (4) và (5) ta suy ra: $\vec{n_1}+\vec{n_2}+\vec{n_3}+\vec{n_4} = \vec{0}$ (6).
Từ (6) suy ra: $\vec{n_1}^2+\vec{n_2}^2+2\vec{n_1}.\vec{n_2} = \vec{n_3}^2+\vec{n_4}^2+2\vec{n_3}.\vec{n_4}$ nên: $(\vec{n_1},\vec{n_2}) = (\vec{n_3},\vec{n_4})$ (7).
Từ (6) suy ra: $\vec{n_2}^2+\vec{n_3}^2+2\vec{n_2}.\vec{n_3} = \vec{n_1}^2+\vec{n_4}^2+2\vec{n_1}.\vec{n_4}$ nên: $(\vec{n_2},\vec{n_3}) = (\vec{n_1},\vec{n_4})$ (8).
Do: $(\vec{n_1},\vec{n_2}) + (\vec{n_2},\vec{n_3}) + (\vec{n_3},\vec{n_4}) + (\vec{n_1},\vec{n_4}) = 360^0$ nên:
$(\vec{n_1},\vec{n_2})+(\vec{n_2},\vec{n_3}) = (\vec{n_3},\vec{n_4})+(\vec{n_1},\vec{n_4}) = 180^0$, suy ra: $(\vec{n_1},\vec{n_3}) = 180^0$, tương tự: $(\vec{n_2},\vec{n_4}) = 180^0$. (9)

Từ (9) suy ra các cạnh đối của tứ giác song song nhau: AB // CD, BC // A**D.** Vậy ABCD là hình bình hành.
Cách khác: Sau khi chứng minh được (6). Gọi 0 là một điểm tùy ý.

Đặt: $\overrightarrow{ON_1} = \vec{n_1}$, $\overrightarrow{ON_2} = \vec{n_2}$, $\overrightarrow{ON_3} = \vec{n_3}$, $\overrightarrow{ON_4} = \vec{n_4}$ suy ra N_i thuộc đường tròn tâm O, bán kính 1. Do (6) suy ra O là trọng tâm của tứ giác $N_1N_2N_3N_4$ suy ra O là trung điểm của đoạn nối hai trung điểm của hai cạnh N_1N_2, N_3N_4 và từ đó suy ra: N_1N_2 // N_3N_4, suy ra $N_1N_2N_3N_4$ là hình chữ nhật, suy ra:

$\vec{n_2} = -\vec{n_4}$, $\vec{n_1} = -\vec{n_3}$ nên AB // CD, BC // A**D.** Vậy ABCD là hình bình hành.

Câu 2. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng B-Vòng 2)- năm học 2000-2001]
Cho đường thẳng cố định a và một điểm A cố định trên a. Gọi (C) là đường tròn lưu động ở trong một nửa mặt phẳng (α) có bờ a. (C) có bán kính không đổi R và luôn tiếp xúc với a, gọi M là tiếp điểm. Gọi I là tâm của đường tròn (C).

Chứng minh rằng trong mặt phẳng chứa đường tròn (C), có một parabol (P) cố định sao cho trục đẳng phương của (C) và đường tròn đường kính AI luôn luôn tiếp xúc (P) khi M thay đổi trên a.

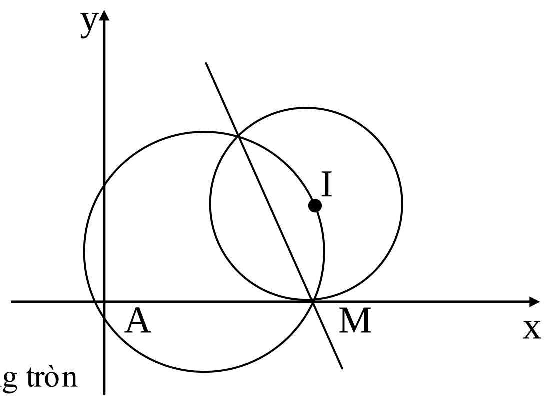
Trong mặt phẳng chọn hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxy, với Ox trùng với a, nửa mặt phẳng α là nửa mặt phẳng y > 0, O trùng **A.** Đặt M(m;0) có tâm I(m;R).
Phương trình của (C) là:
(C): $(x - m)^2 + (y - R)^2 = R^2$ hay

(C): $x^2 + y^2 - 2mx - 2Ry + m^2 = 0$.

Phương trình đường tròn đường kính AI là:

(C’): $(x - m/2)^2 + (y - R/2)^2 = \dfrac{m^2 + R^2}{4}$ hay

(C’): $x^2 + y^2 - mx - Ry = 0$.



Phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C’) là:

(d): $mx + Ry - m^2 = 0 \Leftrightarrow$ (d): $y = f(x) = -\dfrac{m}{R}x + \dfrac{m^2}{R}$.

Xét hàm số $y = g(x) = -\dfrac{1}{4R}x^2$.

Hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{m}{R}x + \dfrac{m^2}{R} = -\dfrac{1}{4R}x^2 \\ -\dfrac{m}{R} = -\dfrac{x}{2R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2m)^2 = 0 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow x = 2m$.

Vậy Parabol $y = f(x) = -\dfrac{1}{4R}x^2$ luôn tiếp xúc với trục đẳng phương (d).

Loại 2: Chứng minh các tính chất:tam giác, tứ giác đường tròn.

Câu 3. **[ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ IX TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ-2013]**

Cho ΔABC cân tại A. Gọi D là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc $\widehat{BAC}$ tại E nằm trong ΔABC. Đường tròn ngoại tiếp ΔABE giao với BD tại F (khác B), AF giao với BE tại I. CI giao với BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

Câu 4. **[ĐỀ DUYÊN HẢI LỚP 11 MÔN TOÁN – Trường THPT Nguyễn Trãi, tỉnh Hải Dương]**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và có trực tâm H. P là một điểm bất kì trên (O). Gọi Q, R, S là các điểm đối xứng với P lần lượt qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng bốn điểm H, Q, R, S nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải

- Gọi M, N, K, I lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, PH.

Xét phép vị tự

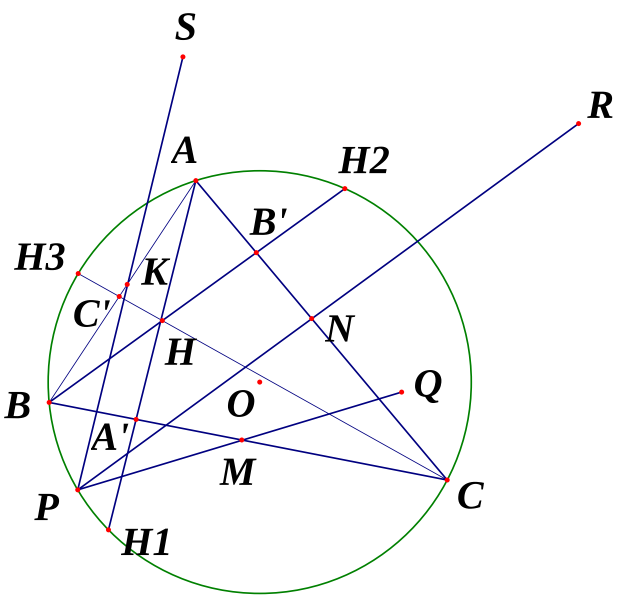
$V_P^2: M \mapsto Q, N \mapsto R, K \mapsto S, I \mapsto H$

Suy ra phép vị tự này biến đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP hay đường tròn

Ơle của tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác QRS.

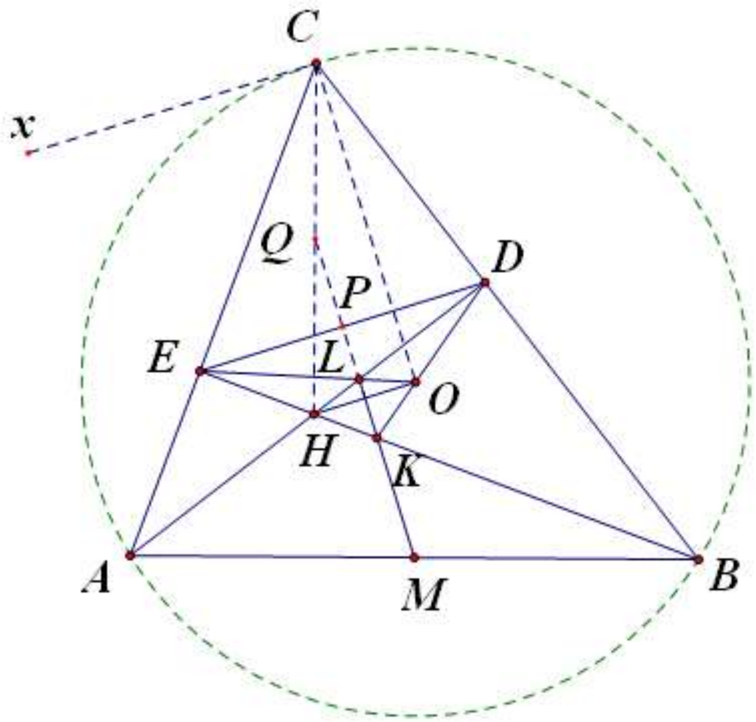
Từ đó để chứng minh H thuộc đường tròn (QRS) ta chứng minh I thuộc đường tròn Ơle của tam giác ABC.

- Xét phép vị tự $V_H^2: A' \mapsto H_1, B' \mapsto H_2, C' \mapsto H_3$, suy ra phép vị tự này biến đường tròn Ơle của tam giác ABC thành đường tròn (O), mà $V_H^2: I \mapsto P;\ P \in (O) \Rightarrow I$ nằm trên đường tròn Ơle của tam giác ABC (đpcm).



Câu 5. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI TỔ TOÁN – TIN HỌC ĐỀ THI ĐỀ XUẤT KỲ THI HSG VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VII. MÔN TOÁN: KHỐI 11.Năm học: 2013-2014]**

Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H,O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D,E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K, các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng ba điểm K,L,M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C,D,O,H cùng nằm trên một đường tròn.



Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác HAB và ba điểm K,L,M ta có:

K,L,M thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}.\frac{\overline{LH}}{\overline{LA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{KB}}{\overline{KH}} = -\frac{\overline{LA}}{\overline{LH}}$ (1)

Ta lại có $\dfrac{KB}{KH}=\dfrac{S_{BOD}}{S_{HOD}}$ (cùng cạnh đáy OD), $\dfrac{LA}{LH}=\dfrac{S_{AOE}}{S_{HOE}}$ (cùng cạnh đáy OE) và

$S_{AOE}=S_{BOD}$.(Bởi vì $S_{AOE}=\dfrac{1}{2}AE.d(O,AE)=\dfrac{1}{2}c.\cos A.R.\cos B=\dfrac{1}{2}R.c.\cos A.\cos B$,

ở đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $c=AB$. Tương tự

$S_{BOD}=\dfrac{1}{2}R.c.coA.\cos B$).

Từ các kết quả trên ta có (1) Û $S_{HOD}=S_{HOE}$ khi và chỉ khi $OH//DE$ hoặc OH đi qua trung điểm DE.

Bằng cách vẽ tiếp tuyến Cx của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C, dễ dàng suy ra $DE//Cx$, suy ra CO vuông góc với DE.

Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của DE,HC. Dễ thấy tứ giác $CEHD$ nội tiếp, suy ra QP vuông góc với DE. Suy ra $CO//QP$.

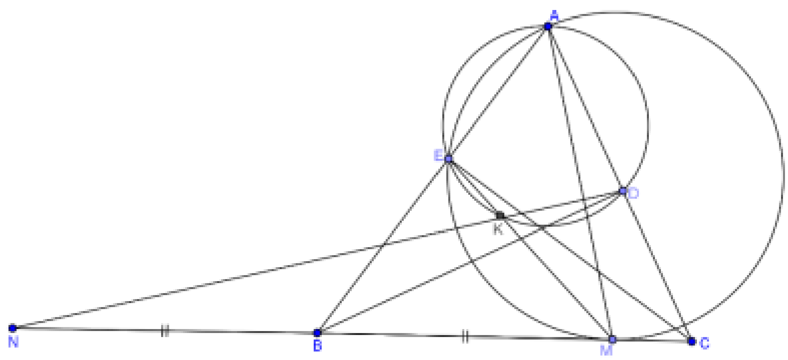
Nếu OH đi qua trung điểm DE suy ra P là trung điểm OH, suy ra $EHDO$ là hình bình hành, suy ra $OD//EH$ và $EO//HD$. Điều này trái với giả thiết OD cắt BE và OE cắt AD.

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi $OH//DE$ khi và chỉ khi CO vuông góc với OH khi và chỉ khi E, H, O, D cùng nằm trên một đường tròn (vì ta luôn có tứ giác $CEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính CH).

Câu 6. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH ĐIỆN BIÊN ĐỀ THI MÔN TOÁN LỚP 11]**

Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD,CE. Một đường tròn (O) đi qua hai điểm A và E tiếp xúc với cạnh BC tại điểm M. Đường thẳng ME cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AED tại điểm thứ hai K. Hai đường thẳng DK và BC cắt nhau tại N. Chứng minh rằng đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEN.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{NME}=\widehat{EAM}$ (cùng bằng một nửa số đo cung EM);

mà $\widehat{MAC}=\widehat{EAC}-\widehat{EAM}$ nên suy ra

$$\widehat{MAC}=(180^0-\widehat{EKD})-\widehat{NME}=180^0-\widehat{MKN}-\widehat{NMK}=\widehat{MNK}=\widehat{CND}$$

suy ra ΔCAM và ΔCND đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CD}=\frac{CA}{CN}\Rightarrow CM.CN=CA.CD \ (1)$$

<u>Nhận xét:</u>

Trong tam giác nhọn ABC tùy ý ta có: $BC^2=BE.BA+CD.CA$.

Thậy vậy

$$BC^2=BD^2+DC^2=AB^2-AD^2+DC^2$$

$$=BE.AB+AE.AB-AD^2+DC^2$$

$$=BE.AB+AD.AC-AD^2+DC^2$$

$$=BE.AB+AD.CD+DC^2=BE.AB+CD.CA$$

Kết hợp nhận xét trên với (1) suy ra $CM.CN=BC^2-BE.BA$.

Lại có $BE.BA=BM^2$ (cùng bằng phương tích của điểm B đối với (O)), nên suy ra:

$$CM.CN=BC^2-BM^2=(BC+BM)(BC-BM)=(BC+BM)CM$$

$$\Rightarrow CN=BC+BM\Rightarrow BN=BM\Rightarrow BN^2=BM^2=BE.BA$$

suy ra đường thẳng BN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔAEN tại điểm N.

Vậy đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔAEN.

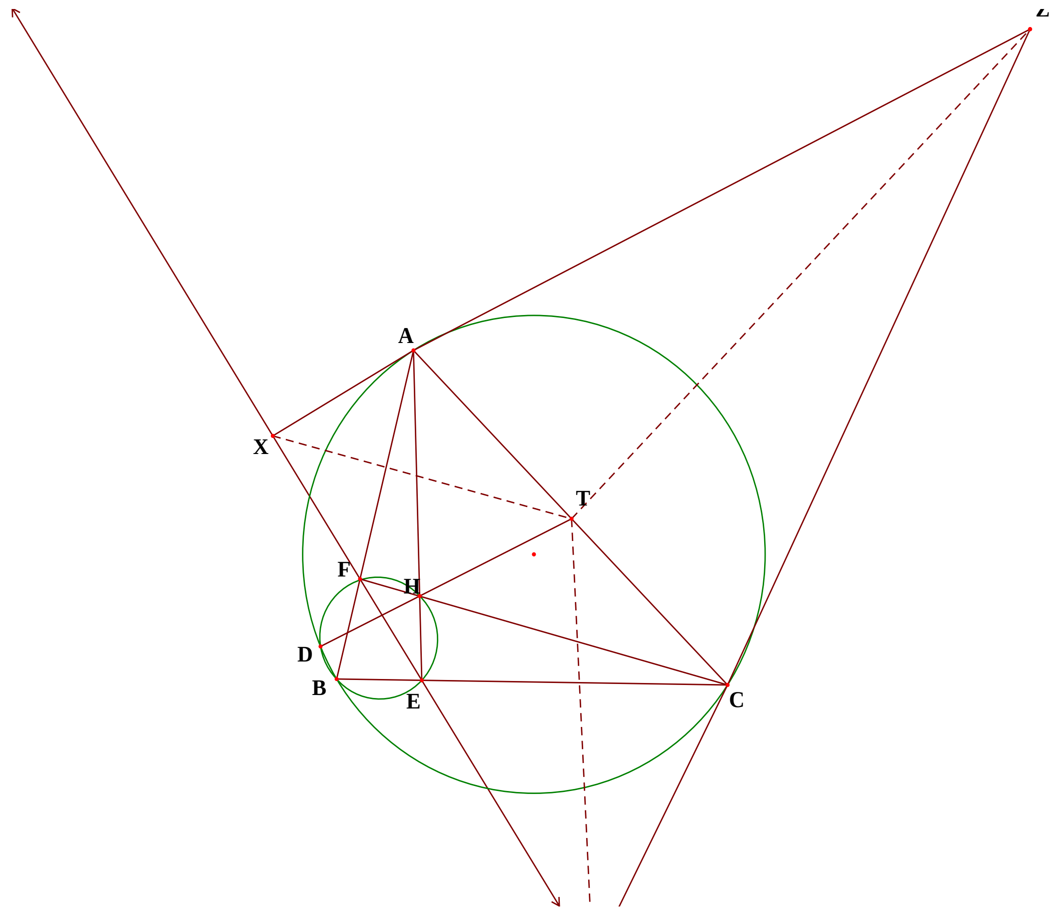
Câu 7. **[Ngân hàng đề Hùng Vương-Trường CHUYÊN BẮC GIANG – năm-Tỉnh BẮC GIANG]**
Cho tam giác nhọn ABC không cân tại B, T là trung điểm cạnh AC, E và F tương ứng là chân đường cao hạ từ A, C của tam giác. Z là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, X là giao điểm của ZA và EF, Y là giao điểm của ZC và EF

a) Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EBF cắt nhau tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên DT.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

Hướng dẫn giải



a) ZT là phân giác góc $\widehat{AZC}$.

Do $\widehat{XAB} = \widehat{ACB} = \widehat{BFE} = \widehat{AFX}$ và $TA = TF$, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF, do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

b)Giả sử $AB < BC$, khi đó D nằm trên cung nhỏ AB. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH. Ta có được BD và LO vuông góc.

Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. $OLHT$ là hình bình hành nên LO song song với HT, do đó D, H, T thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc $\widehat{ADT} = \widehat{AXT}$ và TY là đường trung trực của DC.

Chứng minh được góc $\widehat{CDT} = \widehat{CYT}$ nên $CTDY$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc $\widehat{XDY} + \widehat{XZY} = \widehat{XDT} + \widehat{TDY} + \widehat{XZY} = \widehat{ZAT} + \widehat{ZCT} + \widehat{XZY} = 180^o$, do đó $DXZY$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 8. **[THI HSG LỚP 11 THPT NĂM HỌC 2010-2011-THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC]**

Cho tam giác ABC. Phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1. Đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng CC_1 tại điểm I; đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng BC tại điểm N; đường thẳng BB_1 cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm P. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IPC_1. Đường thẳng OP cắt đường thẳng BC tại điểm M. Biết rằng $BM = MN$ và $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$. Tính các góc của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

* Dễ thấy $\widehat{IPC_1} = 90^0$, do đó O là trung điểm của IC_1.

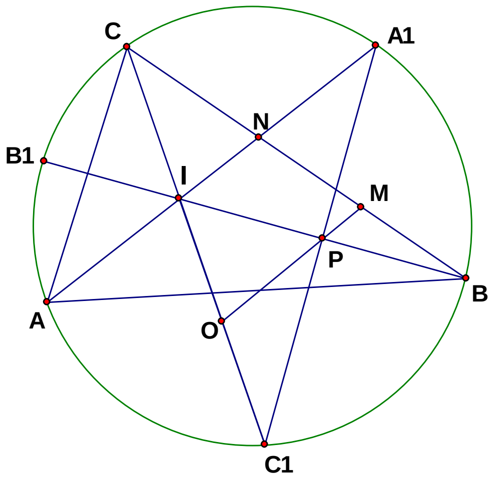
* $\widehat{IOP} = 2\widehat{IC_1P} = \widehat{CAB} = \widehat{CC_1B} \Rightarrow BC_1 // OP$

* Do BM=MN; $OI = OC_1 \Rightarrow IN // C_1B$

Do đó $\widehat{CIA_1} = \widehat{BAC}$, mà $\widehat{CIA_1} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)$

Vậy $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACB}$

Cùng với $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$ ta được $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 72^0; \widehat{ABC} = 36^0$



$$\Leftrightarrow \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{CK}$$

Trường hợp $AC > BC$ ta cũng chỉ ra được $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{CK}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PQ}$ (tính chất phép vị tự).

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{QFC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.

Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$, dẫn đến $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 9. **[§Ò thi hsg 11 tØnh nghÖ an - N¨m häc 2002-2003]**

Trong tam gi¸c ABC, D lµ trung ®iÓm cña c¹nh B**C.** Gi¶ sö gãc $\widehat{BAD} = 15^0; \widehat{CAD} = 30^0$. H·y tÝnh tan**C.**

Hướng dẫn giải

§Æt BD =CD = a vµ AC =b. ¸p dông ®Þnh lý sin trong ΔACD vµ ΔABC ta cã:

$$2a=\frac{b}{\sin(C+30^0)};\ 2a\sqrt{2}=\frac{b}{\sin(C+45^0)}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{\sin(C+30^0)}{\sin(C+45^0)}\Leftrightarrow\sqrt{2}=\frac{\sin C.\cos30^0+\cos C.\sin30^0}{\sin C\cos45^0+\cos C.\sin45^0}$$

$$\Leftrightarrow\cos C=(\sqrt{3}-2)\sin C\Leftrightarrow \text{tg}C=\frac{1}{\sqrt{3}-2}=-(2+\sqrt{3})$$

Câu 10. **[TRƯỜNG THPT NGUYỄN HỮU THẬN QUẢNG TRỊ Năm học: 2011 – 2012]**

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho đường tròn (C_1) có tâm $I_1(2;3)$, bán kính $R_1=1$ và đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;0)$ và bán kính $R_2=2$. Xác định phép vị tự tâm I, tỉ số k biến (C_1) thành (C_2) biết I nằm giữa hai điểm I_1, I_2.

Hướng dẫn giải

Theo giải thiết suy ra $|k|=\frac{R_2}{R_1}=\frac{2}{1}=2\Leftrightarrow k=\pm2$. Mặt khác I_1, I_2 nằm khác phía đối với I nên suy ra $k=-2$.

Gọi $I(x;y)$, ta có $\overrightarrow{II_2}=-2\overrightarrow{II_1}\Leftrightarrow\begin{cases}-1-x=-2(2-x)\\0-y=-2(3-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=3\\3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ Vậy I(1;2)

Câu 11. [KỲ THI OLYMPIC 30-4 Lần 16 (3-4-2010) Toán Khối 11]

Hãy tìm bên trong một tứ giác lồi một điểm sao cho các đoạn thẳng nối điểm đó và trung điểm các cạnh đối diện chia tứ giác thành 4 phần có diện tích bằng nhau bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Câu 12. **[Ngân hàng đề Hùng Vương-Trường CHUYÊN BẮC GIANG – năm-Tỉnh BẮC GIANG]**

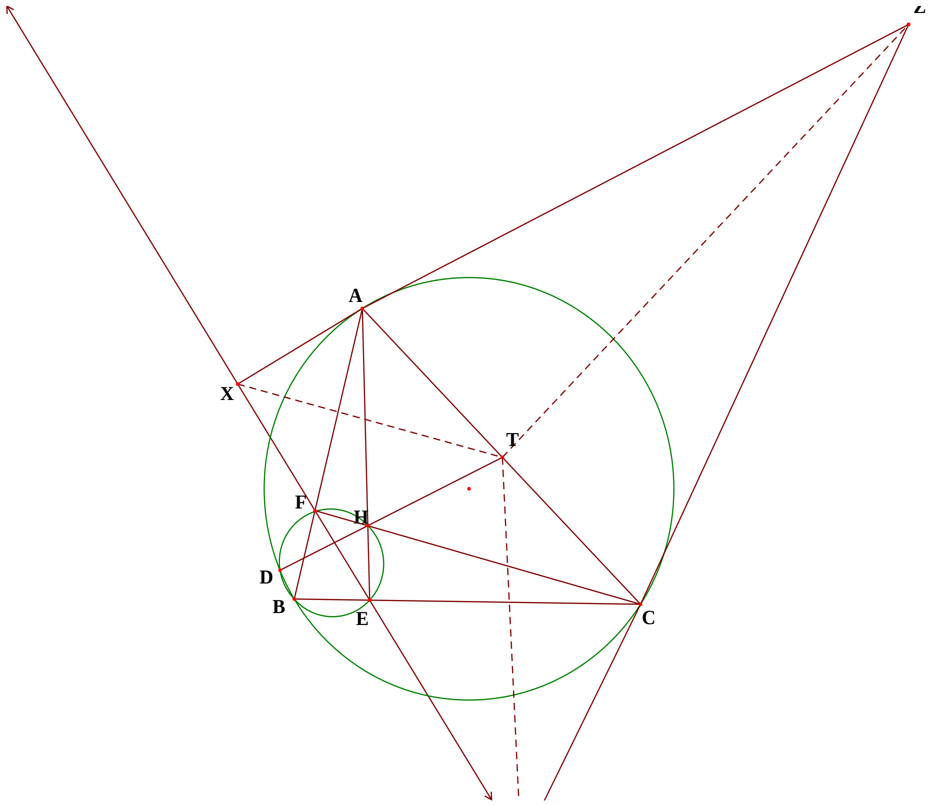
Cho tam giác nhọn ABC không cân tại B, T là trung điểm cạnh AC, E và F tương ứng là chân đường cao hạ từ A, C của tam giác. Z là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, X là giao điểm của ZA và EF, Y là giao điểm của ZC và EF

a) Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EBF cắt nhau tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên DT.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

Hướng dẫn giải



a) ZT là phân giác góc $\widehat{AZC}$.

Do $\widehat{XAB} = \widehat{ACB} = \widehat{BFE} = \widehat{AFX}$ và $TA = TF$, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF , do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

b)Giả sử $AB < BC$, khi đó D nằm trên cung nhỏ AB. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH . Ta có được BD và LO vuông góc.

Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. $OLHT$ là hình bình hành nên LO song song với HT , do đó D , H , T thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc $\widehat{ADT} = \widehat{AXT}$ và TY là đường trung trực của DC .

Chứng minh được góc $\widehat{CDT} = \widehat{CYT}$ nên $CTDY$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc $\widehat{XDY} + \widehat{XZY} = \widehat{XDT} + \widehat{TDY} + \widehat{XZY} = \widehat{ZAT} + \widehat{ZCT} + \widehat{XZY} = 180^o$, do đó $DXZY$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 13. **[Ngân hàng đề Trêng T.H.P.T Chuyªn Th¸i B×nh- ĐỀ ĐỀ NGHỊ THI CHỌN HSG VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LỚP 11**

N¨m häc 2013-2014]

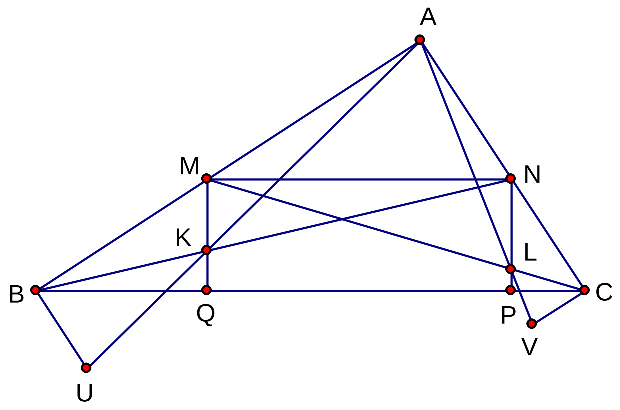
Cho tam giác ABC vuông tại **A.** Hình chữ nhật MNPQ thay đổi sao cho M thuộc AB, N thuộc AC và P, Q thuộc B**C.** K = BN ∩ MQ; L = CM ∩ NP;X =MP ∩ NQ;Y =KP ∩ LQ Chứng minh rằng.

1) $\widehat{KAB} = \widehat{LAC}$.

2) XY luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

1) Lấy U, V theo thứ tự thuộc AK, AL sao cho $\widehat{ABU}=\widehat{ACV}=90^\circ$ (h.1).



(h.2.1)

$$\text{Ta có } \frac{BU}{CV}=\frac{BU}{NA}\cdot\frac{NA}{MA}\cdot\frac{MA}{CV}=\frac{BK}{NK}\cdot\frac{BA}{CA}\cdot\frac{ML}{CL}=\frac{BQ}{NM}\cdot\frac{BA}{CA}\cdot\frac{MN}{CP}$$

$$=\frac{BQ}{MQ}\cdot\frac{CA}{BA}\cdot\frac{NP}{CP}=\frac{BA}{CA}\cdot\frac{CA}{BA}\cdot\frac{BA}{CA}=\frac{BA}{CA}.$$

Do đó các tam giác ABU, ACV đồng dạng.

Vậy $\widehat{KAB}=\widehat{LAC}$.

2)Đặt $Z=ML\cap NK$ (h.2.2).

Theo định lí Pappus, X, Y, Z thẳng hàng (1).

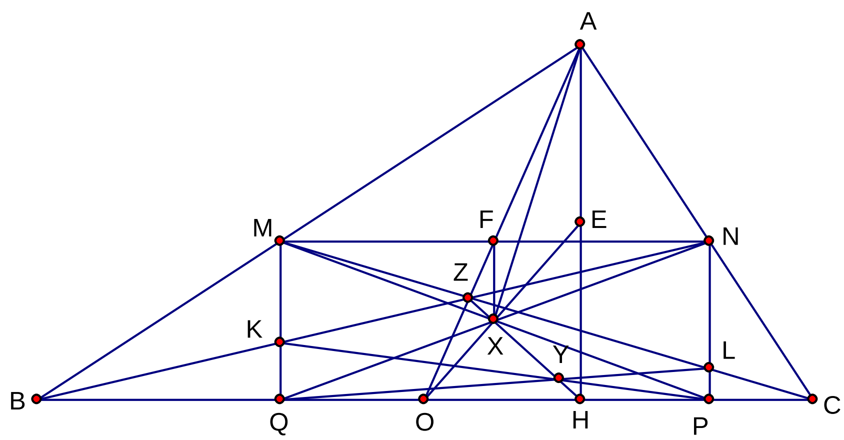
Gọi H là hình chiếu của A trên BC; O, F, E theo thứ tự là trung điểm của BC, MN,AH.

Dễ thấy A, Z, O, F thẳng hàng; E, X, O thẳng hàng; FX // AH.

Vậy $X(AHEF)=-1=X(AZOF)=X(AZEF)$.

Do đó X, H, Z thẳng hàng (2).

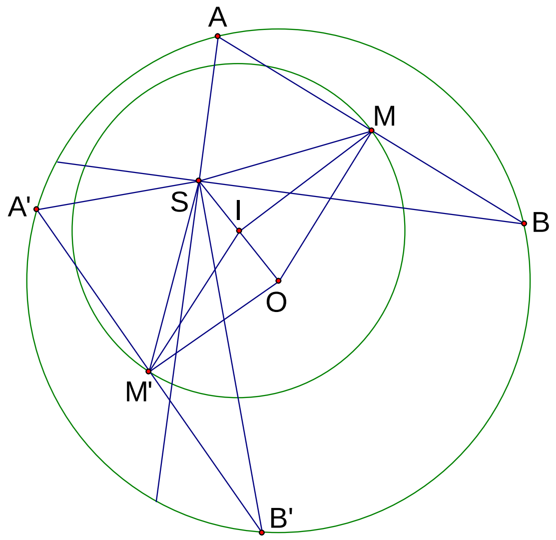
Từ (1) và (2) suy ra XY đi qua H (đpcm).



(h.2.2)

Câu 14. Cho đường tròn (O, R) và một điểm S ở trong đường tròn. Xét tất cả các góc vuông đỉnh S: gọi giao điểm của hai cạnh góc vuông với đường tròn là A, **B.** Tìm tập hợp trung điểm M của A**B.**

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm SO, đặt $SO = a$ (không đổi)

Ta có $MI^2 = \dfrac{MS^2 + MO^2}{2} - \dfrac{SO^2}{4} = \dfrac{MS^2 + MO^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

Mặt khác $P_{M/(O)} = MA.MB = R^2 - MO^2$ mà $MA = MB = SM$

nên $MS^2 = R^2 - MO^2 \Leftrightarrow MS^2 + MO^2 = R^2$

$\Rightarrow MI^2 = \dfrac{R^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ không đổi.

Vì I cố định nên M thuộc đường tròn tâm I bán kính $MI = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$

Đảo lại, trên đường tròn (I) lấy M' tuỳ ý $\Rightarrow M'I = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$. Lấy M' làm tâm quay một cung tròn bán kính M'S cắt (O) tại A'.

Ta có M'A' = M'S. Kéo dài M'A' cắt (O) tại B'.

Xét tam giác M'SO có: $M'S^2 + M'O^2 = \dfrac{1}{2}\left(4M'I^2 + SO^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(2R^2 - a^2 + a^2\right) = R^2$

$\Leftrightarrow M'A'^2 + M'O^2 = OA'^2$

Hay tam giác OM'A' vuông tại M' suy ra M' là trung điểm A'B'

nghĩa là M'A'=M'B'=M'S hay tam giác SA'B' vuông tại S.

Câu 15. **[Ngân hàng đề** Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, tỉnh Hải Dương **- ĐỀ ĐỀ NGHỊ THI CHỌN HSG VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LỚP 11 N¨m häc …]**

()

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và có trực tâm H. P là một điểm bất kì trên (O). Gọi Q, R, S là các điểm đối xứng với P lần lượt qua trung điểm các cạnh BC, CA, A**B.** Chứng minh rằng bốn điểm H, Q, R, S nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải

- Gọi M, N, K, I lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, PH. Xét phép vị tự

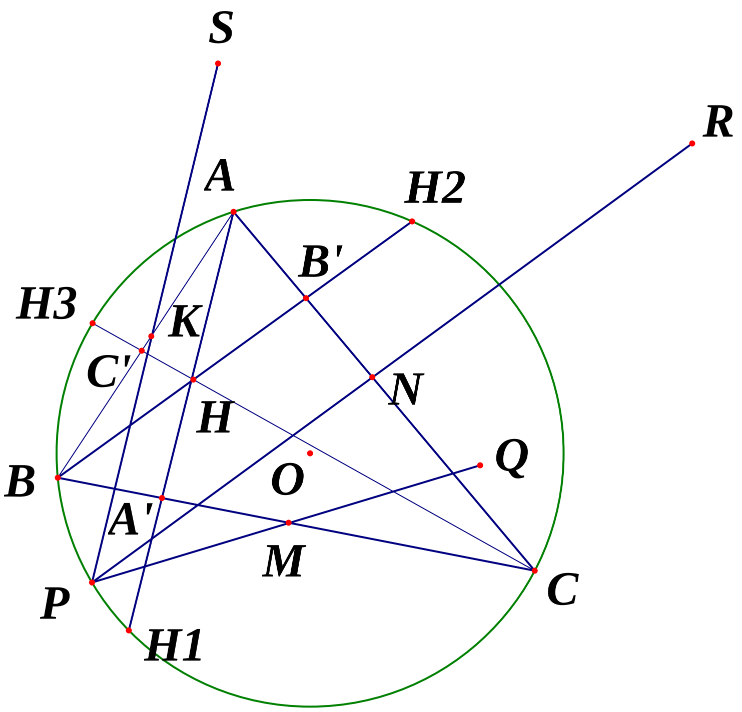
$V_P^2: M a \quad Q, N a \quad R, K a \quad S, I a \quad H$

Suy ra phép vị tự này biến đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP hay đường tròn

Ơle của tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác QRS.

Từ đó để chứng minh H thuộc đường tròn (QRS) ta chứng minh I thuộc đường tròn Ơle của tam giác AB**C.**

- Xét phép vị tự $V_H^2: A' a \quad H_1$, $B' a \quad H_2$, $C' a \quad H_3$, suy ra phép vị tự này biến đường tròn Ơle của tam giác ABC thành đường tròn (O), mà $V_H^2: I a \quad P$; $P \in (O) \Rightarrow$ I nằm trên đường tròn Ơle của tam giác ABC (đpcm).



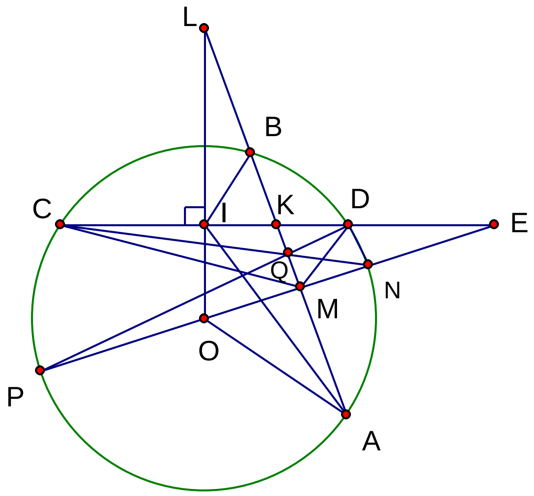
Câu 16. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM QUẢNG NAM KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2013 ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN: TOÁN, LỚP 11]**

Cho đường tròn (O;R) và một điểm I cố định ở trong đường tròn ($I \neq O$), đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt đường tròn tại C và D; A là một điểm nằm trên đường tròn, tia đối xứng với tia IA qua đường thẳng CD cắt đường tròn tại **B.** Gọi M là trung điểm của A**B.**

a) Chứng minh đường thẳng AB đi qua một điểm cố định L khi A thay đổi trên đường tròn (O;R).

b) Gọi N, P là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn (O). Đường thẳng CN và DP cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng các điểm Q, N là những tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Hướng dẫn giải



Gọi L là giao điểm của AB và OI; K là giao điểm của AB và CD.

Ta có IE $\perp$ OL và IE là phân giác của góc $\widehat{AIB}$, suy ra: (ABKL)=-1

Suy ra: $MA^2 = MB^2 = \overline{MK}.\overline{ML}$ (M là trung điểm của AB, New-tơn)

$= (\overline{ML} + \overline{LK}).\overline{ML}$

$= ML^2 - \overline{LK}.\overline{LM}$

Mà ta lại có: $P_L/(IOMK) = \overline{LI}.\overline{LO} = \overline{LK}.\overline{LM}$

Do đó: $MA^2 = ML^2 - \overline{LK}\,\overline{LM} = ML^2 - \overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $ML^2 - MA^2 = \overline{LI}.\overline{LO} \Leftrightarrow LO^2 - OM^2 - MA^2 = \overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $OL^2 - OA^2 = \overline{LI}.\overline{LO}$

$= (\overline{LO} + \overline{OI})\overline{LO}$

$= LO^2 - \overline{OI}.\overline{OL}$

Suy ra $OA^2 = \overline{OI}.\overline{OL}$. Suy ra $\overline{OL} = \dfrac{R^2}{\overline{OI}}$. Vậy L cố định.

Trước hết ta chứng minh MK là phân giác của góc CMD.

Gọi E là giao điểm của OM với CD

Ta có: ΔOIE~ΔOML

Suy ra: $\overline{OM}.\overline{OE} = \overline{OI}.\overline{OL} = OA^2 = R^2$

Suy ra: $OE^2 - \overline{OM}.\overline{OE} = OE^2 - R^2$

Suy ra: $\overline{OE}.\overline{ME} = IE^2 + OI^2 - R^2 = IE^2 - (R^2 - OI^2) = IE^2 - IC^2$

Ta có: $P_E/(OIRM) = \overline{KE}.\overline{IE} = \overline{OE}.\overline{ME}$

Do đó ta suy ra: $\overline{KE}.\overline{IE} = IE^2 - IC^2$

Suy ra: $IC^2 = IE^2 - \overline{IE}.\overline{KE} = \overline{IE}(\overline{IE} - \overline{KE}) = \overline{IE}.\overline{IK}$

Theo hệ thức Newton, ta suy ra: (CDKE)=-1 (1)

Mà MK $\perp$ME nên MK là phân giác trong của góc $\widehat{CMD}$ (2)

Theo chứng minh trên ta có: $\overline{OM}.\overline{OE} = R^2 = ON^2$

Suy ra: (PNME)= -1

Suy ra: (NPME)= -1 (3)

Từ (1) và (3) ta suy ra: CN, PD, KM đồng quy tại Q.

Mà góc $Q\hat{D}N = 90^0$ nên QMND là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $Q\hat{D}M = Q\hat{N}M = C\hat{D}P$

Suy ra DP là phân giác trong của góc $C\hat{D}M$. (4)

Từ (2) và (4), ta có Q là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CMD

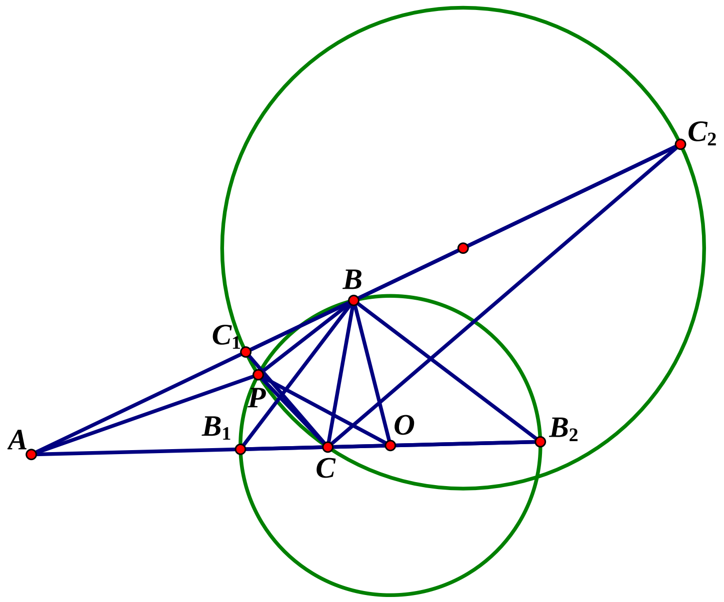
Ta lại có DN$\perp$DP suy ra DN là phân giác ngoài của góc $\widehat{CDM}$. Suy ra N là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác CM**D.**

Vậy Q, N lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CM**D.**

Câu 17. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM TỈNH QUẢNG NAM** NĂM 2015 **]**

Cho $VABC$ nhọn có $\widehat{BAC} = 30^0$. Hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ABC}$ lần lượt cắt đường thẳng AC tại B_1 và B_2; hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường thẳng AB tại C_1, C_2. Giả sử hai đường tròn đường kính B_1B_2 và C_1C_2 gặp nhau tại một điểm P nằm bên trong $VABC$. Chứng minh rằng $\widehat{BPC} = 90^0$.

Hướng dẫn giải



Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng B_1B_2.

Khi đó hai điểm B và P nằm trên đường tròn tâm O bán kính OB_1.

Vì $\widehat{OBC} = \widehat{OBB_1} - \widehat{CBB_1} = \widehat{OB_1B} - \widehat{B_1BA} = \widehat{BAC}$ nên $\Delta OCB \backsim \Delta OBA$,

Suy ra $OC.OA = OB^2 = OP^2$.

Từ đó $\Delta OCP \backsim \Delta OPA \Rightarrow \widehat{OPC} = \widehat{PAC}$.

Do đó

$$\widehat{PBC} - \widehat{PBA} = \left(\widehat{B_1BC} + \widehat{PBB_1}\right) - \left(\widehat{ABB_1} - \widehat{PBB_1}\right) = 2\widehat{PBB_1} = \widehat{POB_1} = \widehat{PCA} - \widehat{OPC}$$

Như vậy $\widehat{PBC} - \widehat{PBA} = \widehat{PCA} - \widehat{PAC}$ suy ra $\widehat{PAC} + \widehat{PBC} = \widehat{PBA} + \widehat{PCA}$ (1)

Tương tự ta cũng có $\widehat{PAB} + \widehat{PCB} = \widehat{PBA} + \widehat{PCA}$. (2)

Ngoài ra $\left(\widehat{PAC} + \widehat{PBC}\right) + \left(\widehat{PAB} + \widehat{PCB}\right) + \left(\widehat{PBA} + \widehat{PCA}\right) = 180^0$ (3)

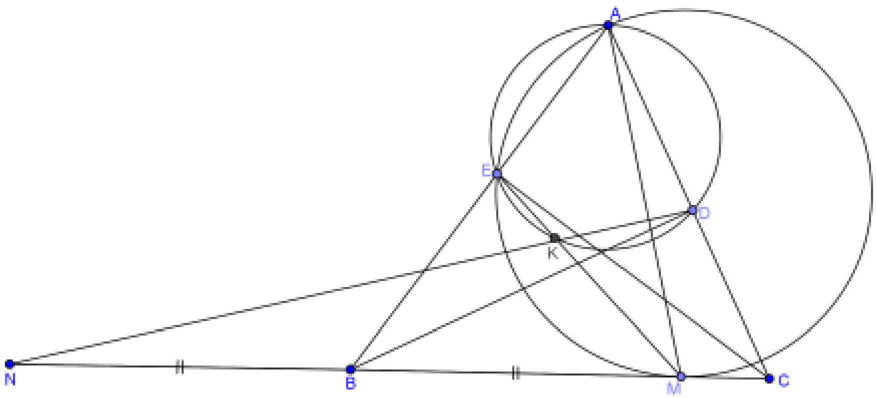
Từ (1), (2) và (3) ta đi đến $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = 60^0$.

Suy ra $\widehat{BPC} = \left(\widehat{PBA} + \widehat{PAB}\right) + \left(\widehat{PCA} + \widehat{PAC}\right) = \widehat{BAC} + \left(\widehat{PBA} + \widehat{PCA}\right) = 90^0$.

Câu 18. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH ĐIỆN BIÊN TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI LỚP 11]**

Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD, CE. Một đường tròn (O) đi qua hai điểm A và E tiếp xúc với cạnh BC tại điểm M. Đường thẳng ME cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AED tại điểm thứ hai K. Hai đường thẳng DK và BC cắt nhau tại N. Chứng minh rằng đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEN.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{NME} = \widehat{EAM}$ (cùng bằng một nửa số đo cung EM);

mà $\widehat{MAC} = \widehat{EAC} - \widehat{EAM}$ nên suy ra

$$\widehat{MAC} = (180^0 - \widehat{EKD}) - \widehat{NME} = 180^0 - \widehat{MKN} - \widehat{NMK} = \widehat{MNK} = \widehat{CND}$$

suy ra ΔCAM và ΔCND đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{CA}{CN} \Rightarrow CM.CN = CA.CD \ (1)$$

<u>*Nhận xét:*</u> Trong tam giác nhọn ABC tùy ý ta có: $BC^2 = BE.BA + CD.CA$.

Thậy vậy

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = AB^2 - AD^2 + DC^2$$

$$= BE.AB + AE.AB - AD^2 + DC^2$$

$$= BE.AB + AD.AC - AD^2 + DC^2$$

$$= BE.AB + AD.CD + DC^2 = BE.AB + CD.CA$$

Kết hợp nhận xét trên với (1) suy ra $CM.CN = BC^2 - BE.BA$.

Lại có $BE.BA = BM^2$ (cùng bằng phương tích của điểm B đối với (O)), nên suy ra: $CM.CN = BC^2 - BM^2 = (BC + BM)(BC - BM) = (BC + BM)CM$

$$\Rightarrow CN = BC + BM \Rightarrow BN = BM$$

$\Rightarrow BN^2 = BM^2 = BE.BA$ suy ra đường thẳng BN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEN tại điểm N. Vậy đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ANE.

Câu 19. **[Truêng PT CÊp 2+ 3 T©n S¬n B¾c giang N¨m häc 2008 – 2009]**

Cho tam gi¸c ABC néi tiÕp ®êng trßn **(C)**. §iÓm A' lµ ¶nh cña A qua phÐp ®èi xøng trôc B**C.** T×m quü tÝch ®iÓm A' khi A di ®éng trªn **(C)**.

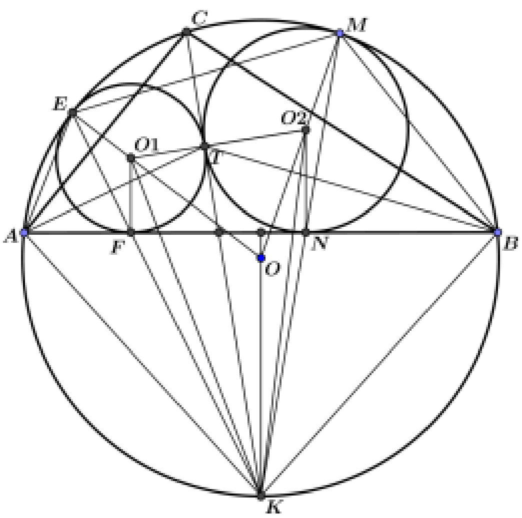
Hướng dẫn giải

Câu 20. **[Chuyên Lê Quý Đôn - Đà NẵngKỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ IX, NĂM HỌC 2015 – 2016]**

Cho đường tròn (O) và dây *A**B.*** Các đường tròn (O_1) và (O_2) nằm về một phía đối với đường thẳng *AB*, tiếp xúc với nhau tại *T* đồng thời tiếp xúc với *AB* và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Tiếp tuyến chung tại *T* của các đường tròn (O_1) và (O_2) cắt đường tròn (O) tại *C* (với *C* thuộc nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng *AB* có chứa hai đường tròn (O_1) và (O_2)).

Chứng minh rằng *T* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *AB**C.***

Hướng dẫn giải



+ Gọi *E, F, M, N* lần lượt là tiếp điểm (O_1), (O_2) với đường tròn (O) và *AB* như hình vẽ. Gọi *K* là giao điểm thứ hai của *EF* với (O).

Ta có các điểm $E,\ O_1,\ O$ thẳng hàng; các điểm $M,\ O_2,\ O$ thẳng hàng.

+ Hơn nữa $\widehat{EKO}=\widehat{OEF}=\widehat{O_1FE}\Rightarrow O_1F//OK\Rightarrow OK\perp AB$.

Vậy *K* là điểm chính giữa cung *A**B.***

Như vậy *EF* đi qua điểm chính giữa *K* của cung *A**B.***

+ Chứng minh tương tự ta cũng có *MN* cũng đi qua *K*.

+ Từ đó $\widehat{MEF}=\widehat{MNB}$ nên tứ giác *EFNM* là tứ giác nội tiếp, do đó

$P_{K/(O_1)}=\overline{KF}.\overline{KE}=\overline{KN}.\overline{KM}=P_{K/(O_2)}$.

Vậy điểm K nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2), suy ra ba điểm C, T, K thẳng hàng.

Từ đó điểm T nằm trên phân giác của $\widehat{ACB}$ (1)

+ Ta có các cặp tam giác đồng dạng ΔKAF và ΔKEA; ΔKBN và ΔKMB.

Từ đó $KA^2 = \overline{KF}.\overline{KE} = KT^2$, suy ra $KA = KT$.

Ta lại có $KA = KB$, suy ra $KA = KB = KT$.

Vì vậy các tam giác KAT và KBT cùng cân tại K.

Do đó $\widehat{CAT} = \widehat{ATK} - \widehat{ACT} = \widehat{TAK} - \widehat{BAK} = \widehat{TAB}$.

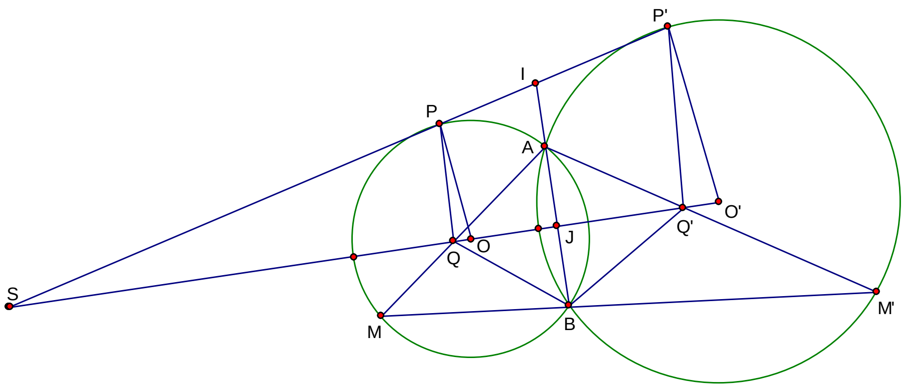
Suy ra AT là phân giác của $\widehat{CAB}$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (đpcm).

Câu 21. **[CHUYÊN CAO BẰNG TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG NĂM 2013]**

Cho hai đường tròn (O, R) và (O’, R’) với $R \neq R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và **B.** Một đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) và (O’) lần lượt tại P và P’. Gọi Q và Q’ lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P và P’ xuống OO’. Các đường thẳng AQ và AQ’ cắt các đường tròn (O) và (O’) tạiM và M’.Chứng minh rằng MM’ qua **B.**

Hướng dẫn giải



Gọi S là giao điểm của d và OO’, khi đó S là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O) và (O’). Đặt $k = \dfrac{R'}{R}$, khi đó ta có.

$V(S,k):(O) \to (O'), P \to P', Q \to Q'$

Gọi I, J là giao điểm của AB với PP’ và OO’. Khi đó ta có

$IP^2 = \overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IP'}^2 \Rightarrow IP = IP'$

Mà PQ // IJ // P’Q’ nên JQ = JQ’

Suy ra AB là trung trực của QQ’.

Mà OO’ là trung trực của A**B.** Vậy tứ giác AQBQ’ là hình thoi

Do đó Q’B //AQ hay Q’M’ // QM.

Giả sử V(S, k) biến M thành B’ khi đó QM // Q’B’

Mà M thuộc (O) suy ra B’ thuộc (O’) do đó B’ trùng với **B.**

Vậy V(S, k) biến M thành **B.**

Tương tự ta có V(S, k) biến M’ thành **B.**

Suy ra M, B, M’ thẳng hàng hay MM’ qua B

Câu 22. [Trường THPT Chuyên Hạ Long **Đề thi Trại Hè Hùng Vương năm 2013]**

Cho tam giác ABC cân tại **A.** Gọi D là trung điểm A**C.** Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc $\widehat{BAC}$ tại E nằm trong tam giác AB**C.** Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE giao với BD tại F (khác B), AF giao với BE tại I. CI giao với BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

Hướng dẫn giải

Gọi D’ là trung điểm của AB và M là trung điểm cạnh B**C.**

Ta có D’ nằm trên đường tròn ngoại tiếp △BC**D.** Do tính đối xứng nên suy ra $\overset{\frown}{D'E}=\overset{\frown}{ED}$ suy ra $\widehat{ABI}=\widehat{D'BE}=\widehat{EBD}=\widehat{IBK}$

suy ra I nằm trên phân giác góc $\widehat{ABK}$ hay BI là tia phân giác góc $\widehat{ABK}$ (1) 1.0 đ

Ta có: $\widehat{DFA}=180^o-\widehat{BFA}=180^O-\widehat{BEA}=\widehat{MEB}=\frac{1}{2}\widehat{CEB}=\frac{1}{2}\widehat{CDB}$

=> $\widehat{DFA}=\widehat{DAF}$ suy ra △AFD cân tại **D.** 1.0 đ

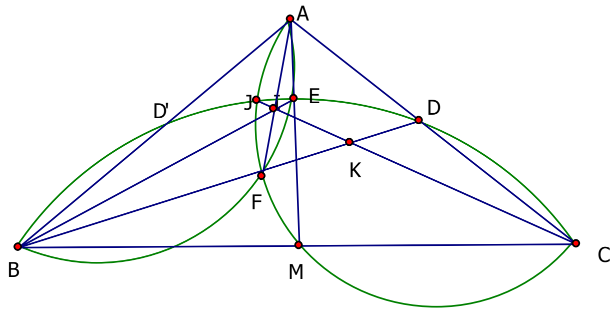
Do I**A.**IF = IE.IB nên I thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Từ đó CI đi qua giao điểm thứ hai J của hai đường tròn này. 1,0đ

Ta có $\widehat{DCJ}=\widehat{DJC}=\widehat{DBC}$ nên $DA^2=DC^2=DK.DB$

Suy ra $\widehat{DAK}=\widehat{DBA}$ hay $\widehat{FAD}-\widehat{FAK}=\widehat{DFA}-\widehat{BAF}$. Từ đó $\widehat{FAK}=\widehat{BAF}$.

Ta có (đpcm) 1.0đ



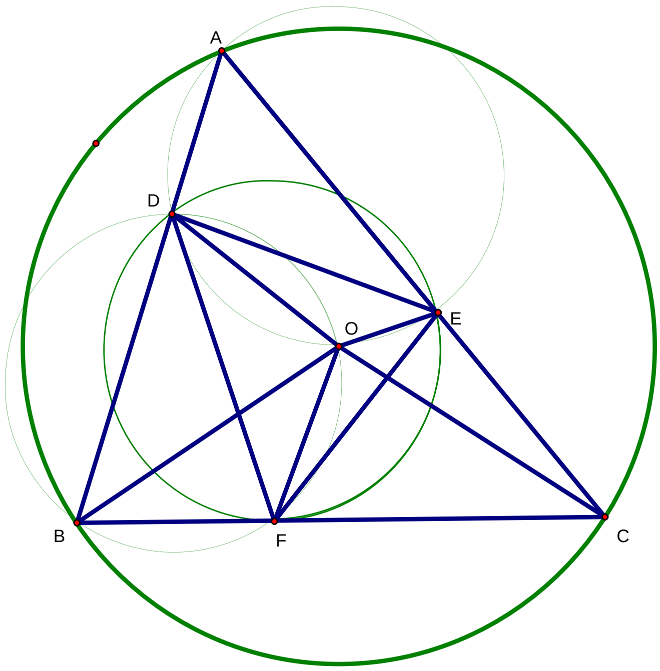
Câu 23. **[CHUYÊN HÙNG VƯƠNG ĐỀ THI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG 2013]**

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{BOC} = \widehat{ABC}, \widehat{COE} = \widehat{ACB}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOD cắt cạnh BC tại B và F. Chứng minh rằng:

a) $ADOE$ là một tứ giác nội tiếp.

BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Hướng dẫn giải



Ký hiệu $\widehat{BAC} = \hat{A}, \widehat{ABC} = \hat{B}, \widehat{ACB} = \hat{C}$.

a) Từ giả thiết, ta có

$\widehat{DOE} = 360^0 - \widehat{DOB} - \widehat{BOC} - \widehat{COE} = 360^0 - \hat{B} - \hat{C} - 2\hat{A} = 180^0 - \hat{A}$

Suy ra $ADOE$ là một tứ giác nội tiếp.

b) Trước hết, ta chứng minh $CEOF$ là một tứ giác nội tiếp.

Thật vậy, $\widehat{EOF} = 360 - \widehat{EOD} - \widehat{DOF} = 360 - (180 - \hat{A}) - (180 - \hat{B}) = \hat{A} + \hat{B}$.

Từ đó $\widehat{EOF} + \widehat{ECF} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$ hay $CEOF$ là một tứ giác nội tiếp.

Do $ADOE$ là một tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CFE} = \widehat{COE} = \hat{C}$ (1)

Ta chứng minh $\widehat{EOF} = \hat{C}$ (2),

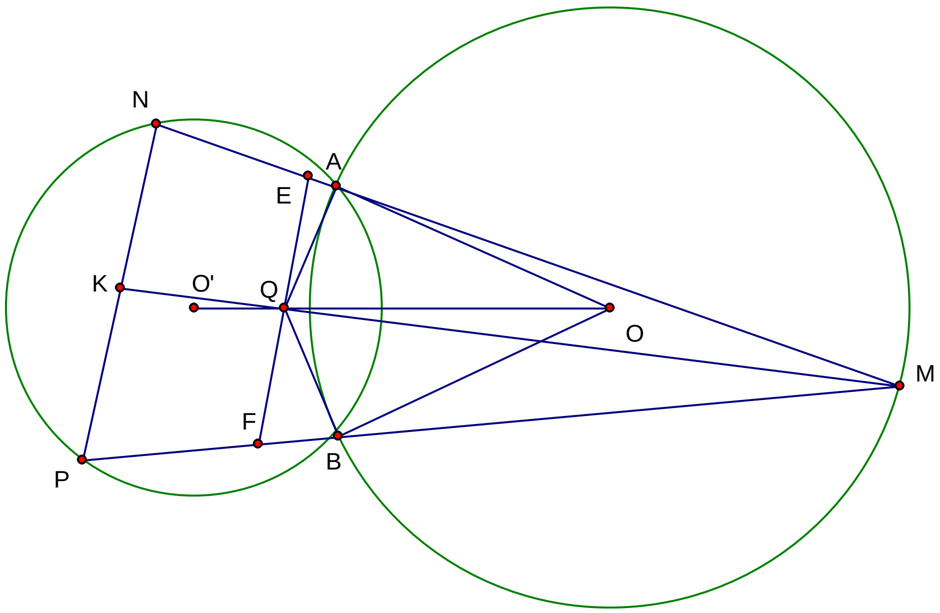
thật vậy $\widehat{EDF} = \widehat{EDO} + \widehat{ODF} = \widehat{EAO} + \widehat{OBF} = \widehat{OCA} + \widehat{OCB} = \hat{C}$.

Từ (1) và (2) suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Câu 24. **[Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Tỉnh Hòa Bình-ĐỀ XUẤT ĐỀ THI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG** Năm học 2012-2013]

Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại A và **B.** M là một điểm thuộc đường tròn (O). MA cắt lại đường tròn (O’) lần thứ hai tại N, MB cắt lại đường tròn (O’) lần thứ hai tại P. Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng MQ đi qua trung điểm của NP.

Hướng dẫn giải



Qua Q kẻ EF // NP ($E \in MN$, $F \in MP$)

$\Rightarrow$ Yêu cầu đề bài trở thành chứng minh Q là trung điểm EF.

Ta có: $\widehat{AEQ} = \widehat{ANP} = \widehat{ABM}$

(Do ANPB là tứ giác nội tiếp)

Lại có $\widehat{ABM} = \widehat{MAx} = \widehat{QAE}$

$\Rightarrow \triangle QAE$ cân tại Q

Chứng minh tương tự $\triangle QBF$ cân tại Q

$\begin{cases} QA = QF \\ QB = QF \end{cases}$ mà $\begin{matrix} QA = QB \\ \Rightarrow QE = QF \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Q là trung điểm EF

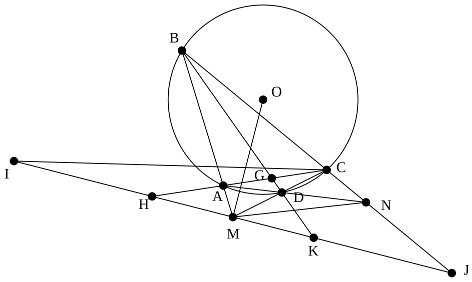
$\Rightarrow$ MQ đi qua trung điểm NP

Câu 25. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN TỈNH HƯNG YÊN NĂM 2016]**

Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, **B.** Một đường thẳng qua B cắt hai đường tròn (O_1), (O_2) tại điểm thứ hai là C, ***D.*** Gọi M là trung điểm của CD; Đường thẳng AM cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai là P; Đường thẳng (d) qua M và vuông góc với O_1M cắt đường thẳng AC tại Q. Chứng minh đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Bổ đề: Tứ giác ABCD nội tiếp (O); Gọi M là giao điểm của AB và C**D.** Đường thẳng d qua M và d ⊥ OM. Đường thẳng d cắt BD, AC, AD, BC lần lượt tại K, H, I, J. Chứng minh MH = MK; MI = MJ.



Gọi *N* là giao điểm của *AD* và *BC*; G là giao điểm của *AC* và B**D.**

Dựng hai tiếp tuyến *NP*, *NQ* của (*O*) (*P*, *Q* là các tiếp điểm).

PQ cắt *BC*, *AD* tại *Z* và *T*.

Ta có: (*NZCB*) = (*NTDA*) = - 1 nên *ZT*, *CD*, *AB* đồng quy tại *M*.

(*NZCB*) = (*NTAD*) = - 1 nên *ZT*, *CA*, *BD* đồng quy tại *G*

Do đó *P*,*Q*, *Z*, *T*, *G*,*M* thẳng hàng.

Theo định lý Brocard, *O* là trực tâm tam giác *GMN* nên *NG* // d (1)

Ta có, (*NTDA*) = - 1 nên *G*(*NTDA*) = - 1 (2)

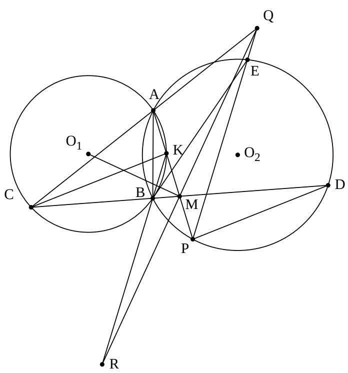
Từ (1) và (2) suy ra *M* là trung điểm của *HK*.

Ta có, *ABCDMN* là tứ giác toàn phần nên (XGDB) = -1

⇒*N*(XGDB) = -1 (3).

Từ (1) và (3) suy ra *M* là trung điểm của IJ.

Trở lại bài toán:



Gọi K = AM ∩ (O_1); R = BK ∩ d

Ta có *CK* // *PD* và *M* là trung điểm của *CD* nên *CKDP* là hình bình hành. Suy ra *M* là trung điểm của *PK*.

Theo bổ đề, ta có: *M* là trung điểm của *QR* nên *KRPQ* là hình bình hành. Do đó, *RK* // *PQ*.

Gọi *E* là giao điểm của *PQ* và (O_2).

Ta có: $\widehat{QPK} = \widehat{PKB}$; $\widehat{QPK} = \widehat{ABE}$ nên $\widehat{PKB} = \widehat{ABE}$

Suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{EBK}$ hay BE là tiếp tuyến của (O_1) nên E cố định.

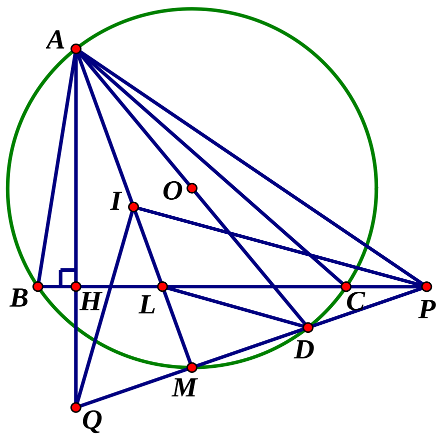
Vậy PQ luôn đi qua điểm E cố định.

Câu 26. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH ĐIỆN BIÊN NĂM 2016]**
Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH và tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) và D là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MD cắt các đường thẳng BC, AH theo thứ tự tại P và Q.

a. Chứng minh rằng tam giác IPQ vuông.

b. Đường thẳng DI cắt (O) tại điểm E khác **D.** Hai đường thẳng AE và BC cắt nhau tại điểm F. Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác APF.

Hướng dẫn giải



Các hình vẽ sau cho trường hợp $AB < AC$.

a. (3 điểm)

Ta có: $\angle OAC = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle AOC$

$= 90^0 - \angle ABC = \angle BHA$

và AI là phân giác $\angle BAC$ nên

$$\angle HAI = \angle OAI.$$

Suy ra ΔAQD cân tại $A \Rightarrow MQ = MD$ (1).

Gọi L là giao điểm AM và BC.

Khi đó $\angle LPD = 90^0 - \angle HQP$

$= 90^0 - \angle ADM = \angle LAD$.

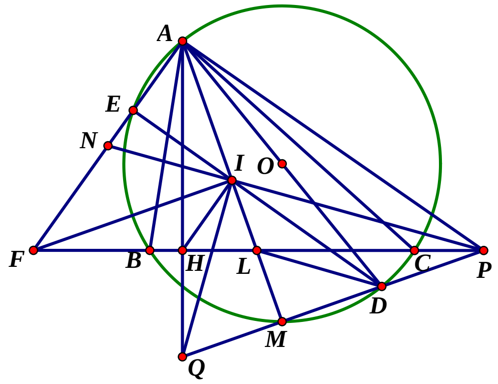
Do đó tứ giác $ALDP$ nội tiếp được

$\Rightarrow MD.MP = ML.MA$ (2).

Ta có $\Delta MLC \sim \Delta MCA$ $(g-g)$ nên $\dfrac{ML}{MC} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MC^2 = ML.MA$ (3). Lại có $\angle MIC = \angle MCI=$

$\frac{A+C}{2}$ nên ΔMIC cân tại $M \Rightarrow MC = MI$ (4).

Từ (1), (2), (3), (4) ta có: $MI^2 = MC^2 = ML.MA = MD.MP = MQ.MP$. Suy ra tam giác IPQ vuông tại I.



b. (2 điểm)

Từ câu **a.** ta suy ra $HIPQ$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle IHP = \angle IQP = \angle IDM = \angle EAM$

do đó tứ giác $AIHF$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle AIF = \angle AHF = 90^0$.

Gọi N là trung điểm của đoạn FA.

Khi đó $\angle NIA = \angle NAI = \angle EDM$

$= \angle IQP = \angle MIP$

nên N, I, P thẳng hàng.

Theo tính chất phân giác và giả thiết thì

$$\frac{IA}{IL} = \frac{BA}{BL} = BA : \frac{AB.BC}{AB+AC} = BA : \frac{AB.BC}{2BC} = 2.$$

Áp dụng định lý Menelauyt cho tam giác AFL với cát tuyến NIP ta có

$$\frac{AN}{NF}.\frac{FP}{PL}.\frac{LI}{IA} = 1 \Leftrightarrow 1.\frac{FP}{PL}.\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow L \text{ là trung điểm của } PF.$$

Từ đó suy ra I là trọng tâm của tam giác APF.

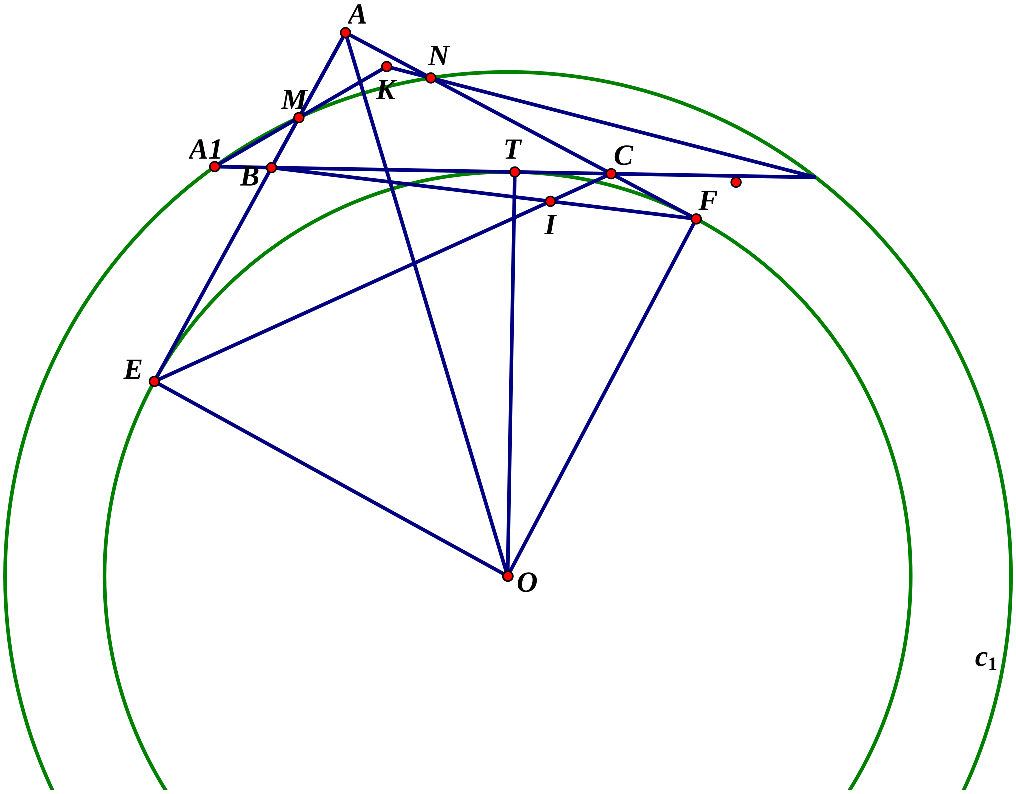
Câu 27. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ TỈNH HÒA BÌNH TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]

Cho tam giác ABC, đường tròn tâm O bàng tiếp góc A tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại T, F, E. Hai đường thẳng BE, CF cắt nhau tại I

a) Chứng minh A, I, T thẳng hàng

b) Vẽ đường tròn tâm O khác đường tròn bàng tiếp góc A ở trên cắt đoạn AB,AC tại M, N; cắt đường thẳng BC tại A_1, A_2 với A_1 thuộc tia đối BC, A_2 thuộc tia đối CB. A_1M cắt A_2N tại K. Chứng minh rằng K nằm trên đường thẳng AI

Hướng dẫn giải



a) Cần chứng minh AT, BF,CE đồng quy. Áp dụng định lí Ceva với tam giác ABC $\frac{TB}{TC}.\frac{FC}{FA}.\frac{EA}{EB}=1$ suy ra A,I,T thẳng hàng.

b) $A_1B=BM,\ A_2C=CN$

+ $A_2N\cap AI=K_1\Rightarrow\frac{AK_1}{AT}=\frac{AN}{AF}$

+ $A_1M\cap AI=K_2\Rightarrow\frac{AK_2}{AT}=\frac{AM}{AE}$

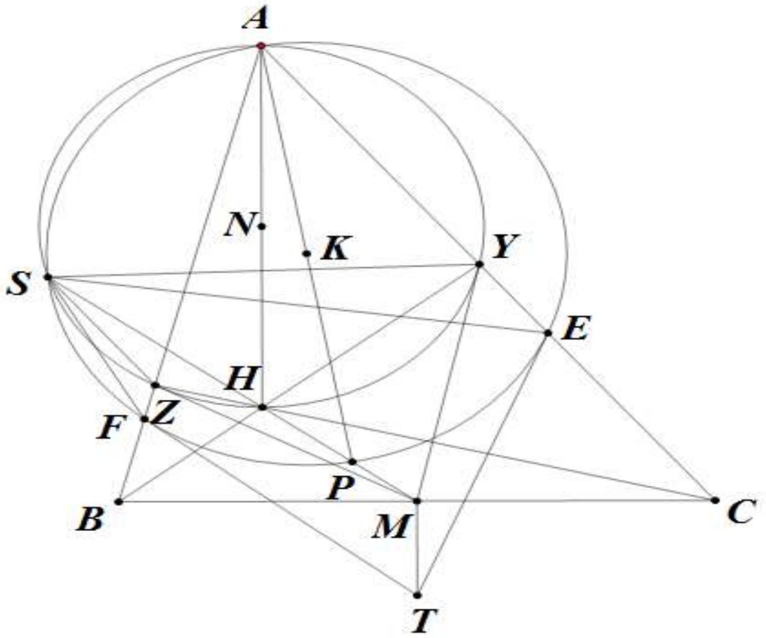
Cần chứng minh AM=AN

Ta có AO vuông góc với MN suy ra tam giác AMN cân dẫn đến AM=AN $\Rightarrow K_1\equiv K_2$

Câu 28. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2014 – 2015]**

Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC}\neq 90^0$) có H là trực tâm và M là trung điểm của B**C.** P là một điểm thuộc đường thẳng HM, đường tròn (K) đường kính AP cắt AC, AB lần lượt tại E, F khác **A.** Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực B**C.**

Hướng dẫn giải



Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến với (K) tại E, F. Y, Z theo thứ tự là giao điểm của CH, BH và CA, AB. (N) là đường tròn đường kính AH, S là giao điểm thứ hai của (K) và (N). Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1. P trùng với H. Dễ thấy $E \equiv Y, F \equiv Z$. Do đó $T \equiv M$.

Trường hợp 2. P không trùng với H.

Dễ thấy các tam giác SEY, SFZ đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác SEF, SYZ đồng dạng cùng hướng (1).

Từ (1), chú ý rằng TE, TF tiếp xúc với (K) tại E,F và MY, MZ tiếp xúc với (N) tại Y, Z suy ra các tam giác TEF, MYZ đồng dạng cùng hướng (2).

Từ (1), (2) suy ra các tam giác STF, SMZ đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác STM, SFZ đồng dạng cùng hướng (3).

Dễ thấy: $\widehat{ASH} = 90^0 = \widehat{ASP}$. Do đó: SH=SP.

Kết hợp với P thuộc HM suy ra SM=SH(4).

Từ (3), (4) suy ra:

$$(TM, AH) \equiv (TM, FZ) + (FZ, AH)$$
$$\equiv (SM, SZ) + (AZ, AH) (\bmod \pi)$$
$$\equiv (SH, SZ) + (SZ, SH) \equiv 0 (\bmod \pi)$$

Vậy $TM \parallel AH \perp BC$.

Nói cách khác,tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC.

Câu 29. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM 2015]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O và có AC vuông góc với BD tại điểm H. Gọi I, J, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng tám điểm I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của đoạn thẳng OH.

b) Chứng minh rằng giao điểm của IK và JL nằm trên đường thẳng OH.

Hướng dẫn giải

ớc hết ta chứng minh H, I, P thẳng hàng. Thật vậy, $\widehat{AHI} = 90^0 - \widehat{IAH} = 90^0 - \widehat{HDC} = \widehat{HCD} = \widehat{PHC}$ (vì HP là trung tuyến của tam giác vuông HCD)

ra I, H, P thẳng hàng. Tương tự cũng có J, H, Q thẳng hàng, K, H, M

ng hàng, L, H, N thẳng hàng.

ràng I và K nằm trên đường tròn đường kính MP, J và L nằm trên đường

đường kính NQ. (1)

t khác, MNPQ là hình bình hành và MN song song AC, NP song song

, AC vuông góc BD nên MN vuông góc NP, vì vậy MNPQ là hình chữ

t. Do đó đường tròn đường kính MP cũng là đường tròn đường kính NQ

(1) và (2) suy ra I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có

là trung điểm của MP và NQ, gọi tâm đó là T. Hơn nữa, OM song song

(vì cùng vuông góc với AB), OP song song HM(vì cùng vuông góc với

) nên OMHP là hình bình hành, do đó trung điểm T của MP cũng là

ng điểm của OH.

y I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung

m của OH.

2 điểm) Ta sẽ dùng phép nghịch đảo để chứng minh phần này.

hiệu (T) là đường tròn được nêu trong phần (a).Ta có

$_{/(T)} = \overline{HI}.\overline{HP} = \overline{HJ}.\overline{HQ} = \overline{HK}.\overline{HM} = \overline{HL}.\overline{HN} = k$ nên phép nghịch đảo cực H

ơng tích k biến I thành P, J thành Q, K thành M, L thành N.

xét hai trường hợp:

Nếu IK và JL đều không đi qua H: thế thì phép nghịch đảo nêu trên biến

thành đường tròn (HPM), biến JL thành đường tròn (HQN). Gọi G là

o điểm của IK và JL, phép nghịch đảo trên biến G thành G' thì G' thuộc

hai đường tròn (HPM) và (HQN). Vậy đường thẳng HG' là trục đẳng

ơng của hai đường tròn này.

có MNPQ là hình chữ nhật tâm T nên $\overline{TM}.\overline{TP} = \overline{TN}.\overline{TQ} \Rightarrow P_{T/(HPM)} = P_{T/(HQN)}$

đó T thuộc trục đẳng phương HG'. Mà T là trung điểm của OH và H, G,

thẳng hàng nên G nằm trên đường đẳng OH.(đpcm)

Nếu IK hoặc JL đi qua H: giả sử IK đi qua H, thế thì AB song song CD

ABCD là hình thang nội tiếp đường tròn (O), do đó ABCD là hình thang

. Khi đó I, H, O, K thẳng hàng nên giao điểm của IK và JL nằm trên

ờng thẳng OH.(đpcm)

Câu 30. **[SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 11 NĂM HỌC 2014 – 2015]**

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R, trên cạnh BC lấy các điểm E,F sao cho điểm E nằm giữa hai điểm B,F và $\widehat{BAE}=\widehat{CAF}$. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng AB và AC, kéo dài AE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Chứng minh rằng tứ giác $AMDN$ và tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

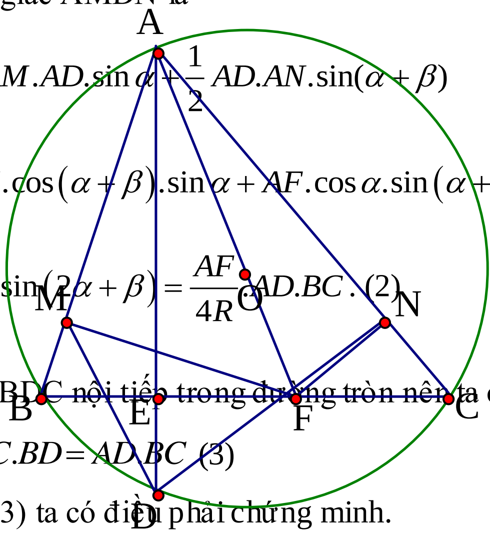
Hướng dẫn giải

Chứng minh rằng tứ giác AMDN và tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Đặt $\widehat{BAE}=\widehat{CAF}=\alpha,\widehat{EAF}=\beta.$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AF.\sin\left(\alpha+\beta\right)+\dfrac{1}{2}AC.AF.\sin\alpha=\dfrac{AF}{4R}\left(AB.CD+AC.BD\right)$ (1)

Diện tích tứ giác AMDN là



$S_{AMDN}=\dfrac{1}{2}AM.AD.\sin\alpha+\dfrac{1}{2}AD.AN.\sin(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{1}{2}AD.\left[AF.\cos\left(\alpha+\beta\right).\sin\alpha+AF.\cos\alpha.\sin\left(\alpha+\beta\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}AD.AF.\sin\left(2\alpha+\beta\right)=\dfrac{AF}{4R}AD.BC$. (2)

Vì tứ giác ABDC nội tiếp trong đường tròn nên ta có:

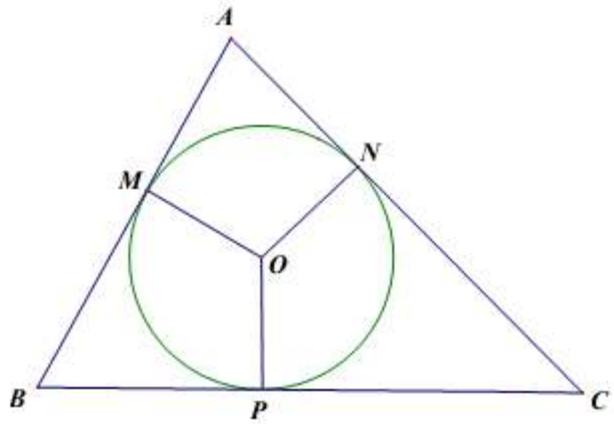
$AB.CD+AC.BD=AD.BC$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

Câu 31. **[SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 11 NĂM HỌC 2015 – 2016]**

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng $\dfrac{OA^2}{bc}+\dfrac{OB^2}{ca}+\dfrac{OC^2}{ab}=1$, với $a=BC,b=AC,c=AB$.

Hướng dẫn giải



Gọi M,N,P lần lượt là các tiếp điểm của (O) với AB, AC, BC.

Ta có $AM = AN$, $OM = ON$ nên

$$S_{AMON} = \frac{1}{2}AM^2.\sin A + \frac{1}{2}OM^2.\sin \widehat{MON}$$
$$= \frac{1}{2}\left(AM^2 + OM^2\right).\sin A = \frac{1}{2}.OA^2.\sin A$$

Tương tự: $S_{BPOM} = \frac{1}{2}.OB^2.\sin B$, $S_{CPON} = \frac{1}{2}.OC^2.\sin C$

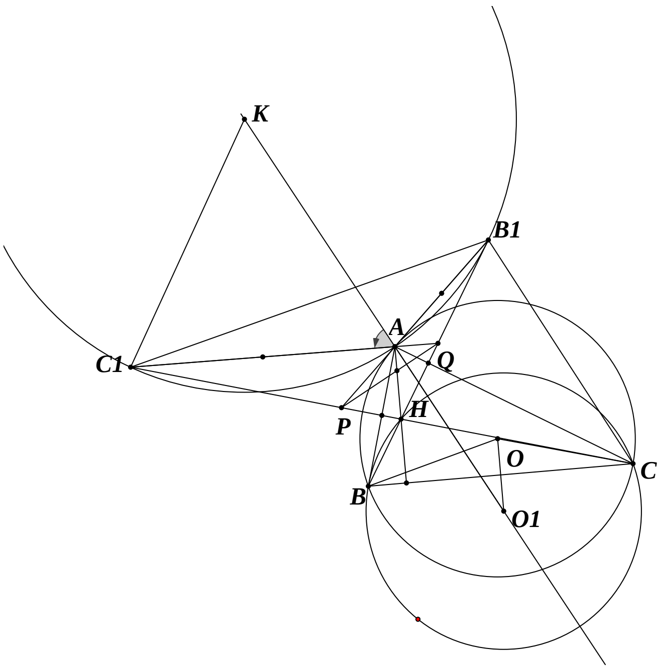
Khi đó:

$$\frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ca} + \frac{OC^2}{ab} = \frac{OA^2.\sin A}{bc.\sin A} + \frac{OB^2.\sin B}{ca.\sin B} + \frac{OC^2.\sin C}{ab.\sin C}$$

$$= \frac{2\left(S_{AMON} + S_{BPOM} + S_{CPON}\right)}{2S_{ABC}} = \frac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}} = 1$$

Câu 32. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH TỈNH YÊN BÁI NĂM 2015]** . Cho tam giác ABC. Gọi B_1 là điểm đối xứng của B qua AC, C_1 là điểm đối xứng của C qua các đường thẳng AB, O_1 là điểm đối xứng của O qua BC. Chứng minh rằng: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 nằm trên đường thẳng AO_1.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trực tâm ΔABC. Gọi AB_1, CH cắt nhau tại P, AC_1 và BH cắt nhau tại Q. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1.

Dễ thấy O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.

Xét tứ giác B_1AHC. Ta có $\widehat{HCA} = 90^0 - \widehat{CAB} = \widehat{ABH} = \widehat{HB_1A}$. Vì vậy B_1AHC nội tiếp đường tròn (w_1).Tương tự C_1AHB nội tiếp đường tròn (w_2).

Trục đẳng phương của (K) và (w_1) là AB1, Trục đẳng phương của (O_1) và (w_1) là CH. Nên P là tâm đẳng phương của (O_1), (K) và (w_1) và nó phải nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (K).

Tương tự ta Chứng minh được Q nằm trên trục đẳng phương của các đường tròn (O_1) và (K). Vì vậy, PQ vuông góc O_1K.

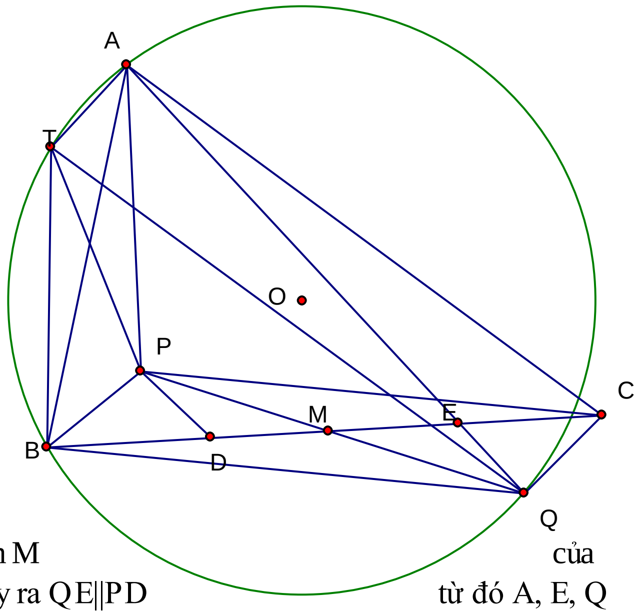
Lại có $\widehat{QC_1P} = \widehat{ABH} = \widehat{QB_1P}$ (cùng chắn cung AH của (w_2) nên PQB_1C_1 nội tiếp và tam giác AQP đồng dạng tam giác AC_1B_1.

Ta lại có $\widehat{C_1AK} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{C_1KA} = 90^0 - \widehat{AB_1C_1} = 90^0 - \widehat{PQA}$ nên KA là đường vuông góc PQ.

Vậy KA và O_1K vuông góc PQ nên A, K, O_1 thẳng hàng.

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Giả sử D và E là các điểm trên cạnh BC. sao cho $BD = CE$ và D nằm giữa B và E. Giả sử P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $PD \parallel AE$ và $\angle PAB = EAC$. Chứng minh rằng: $\angle PBA = PCA$.

Hướng dẫn giải



Vẽ hình bình hành $BPCQ$, khi đó PQ và BC giao nhau tại trung điểm M của mỗi đường.

Do đó DE và PQ cũng giao nhau tại trung điểm M của mỗi đường suy ra PDQE là hình bình hành. Suy ra QE||PD từ đó A, E, Q thẳng hàng.

Vẽ hình bình hành BPAT. Khi đó ta cũng suy ra TACQ là hinh bình hành.

Ta có ∠TQA= ∠QAE= ∠EAC= ∠BAP= ∠APT.

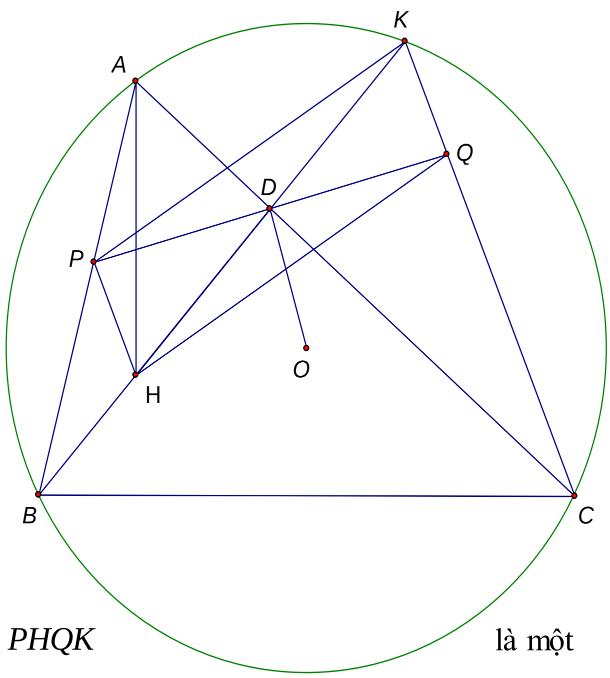
Do đó tứ giác TAQB nội tiếp.

Ta thấy qua phép tịnh tiến véc tơ $\overrightarrow{BP}$ thì tam giác BQT biến thành tam giác PC**A.**

Do đó ∠ACB= ∠TQB= ∠TAB= ∠ABP (ĐPCM).

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, $AB < BC$. D là chân đường cao xuất phát từ B và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt cạnh AB tại P. Chứng minh rằng $\angle DHP = \angle BAC$.

Hướng dẫn giải



Gọi K là giao điểm của BD và $(O), K \neq B$. Q là giao điểm của CK và PD.

Theo định lý con bướm, suy ra D là trung điểm của đoạn PQ.

Mặt khác D là trung điểm của HK, do đó tứ giác $PHQK$ là một hình bình hành. Suy ra $\angle DHP = \angle HKQ$.

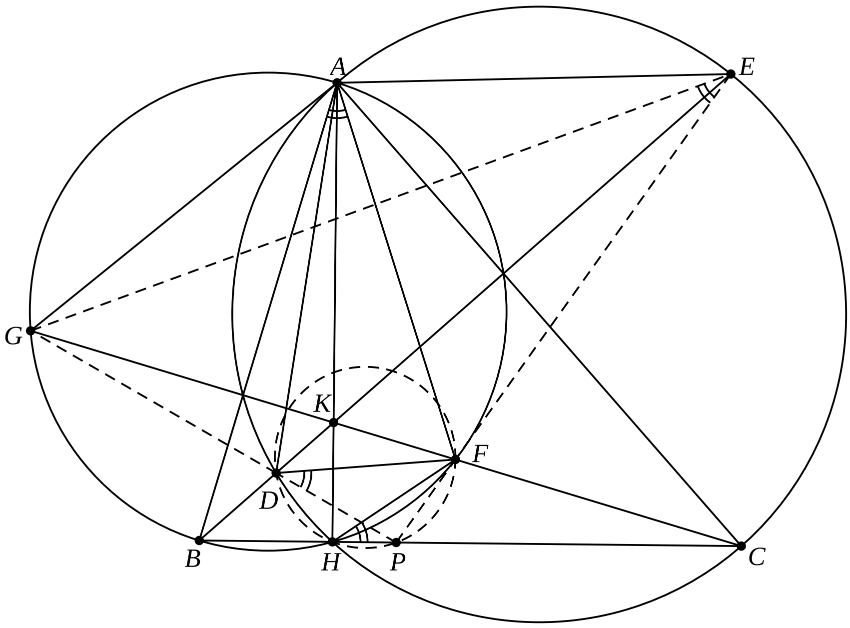
Mà $\angle HKQ = \angle BAC,$ do vậy $\angle DHP = \angle BAC$.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH, trực tâm K. Đường thẳng BK cắt đường tròn đường kính AC tại D, E $\left(BD < BE\right)$ Đường thẳng CK cắt đường tròn đường kính AB tại F, G $(CF < CG)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DHF cắt BC tại điểm thứ hai là P.

a) Chứng minh rằng các điểm G, H, P, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, PK đồng quy.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $P_{K/(AGHF)} = \overline{KG}.\overline{KF} = \overline{KA}.\overline{KH} = P_{K/(ADHE)} = \overline{KD}.\overline{KE}$. Suy ra tứ giác $GDFE$ nội tiếp. Dẫn đến $\widehat{GDF} + \widehat{GEF} = 180^0$ (1).

Từ giả thiết ta có AB, AC lần lượt là đường trung trực của GF, DE. Suy ra A là tâm của đường tròn $(GDFE)$. Suy ra $\widehat{GEF} = \dfrac{1}{2}\widehat{GAF} = \widehat{BAF}$ (2).

Ta có $\widehat{FDP} = \widehat{FHP}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{FP}$ của đường tròn (DHF)). Xét đường tròn đường kính AB ta có $\widehat{FHP} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sd}\overset{\frown}{BH} + \text{sd}\overset{\frown}{HF}\right) = \dfrac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{BF} = \widehat{BAF} = \widehat{GEF}$ (do (2)).

Suy ra $\widehat{FDP} = \widehat{GEF}$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{GDF} + \widehat{FDP} = 180^0$. Suy ra G, D, P thẳng hàng.

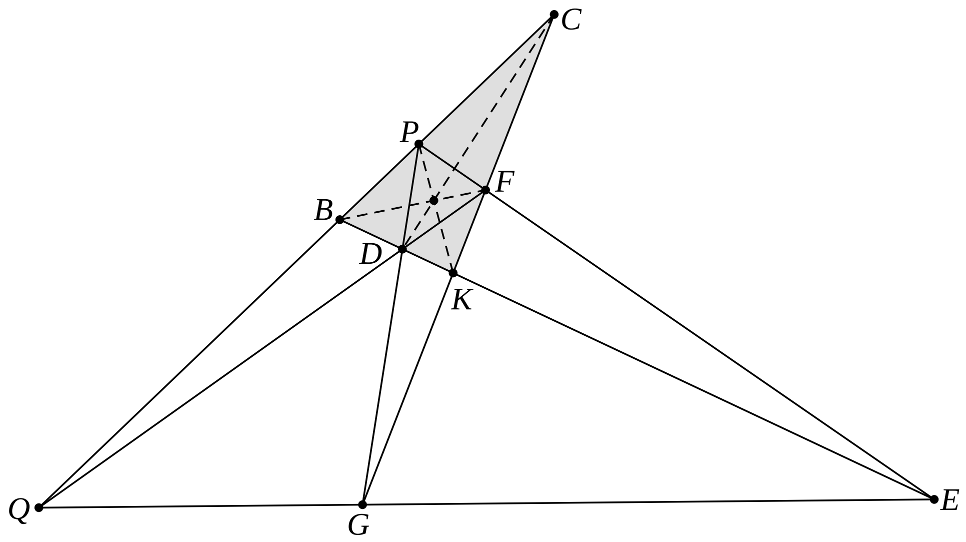
Tương tự E, F, P thẳng hàng.

Vì A là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{GAF}$ của đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AHG} = \widehat{AHF}$. Tương tự $\widehat{AHE} = \widehat{AHD}$. Suy ra

$$\widehat{GHE} = \widehat{AHG} + \widehat{AHE} = \widehat{AHF} + \widehat{AHD} = \widehat{DHF} = \widehat{DPF} = \widehat{GPE}.$$

Suy ra các điểm G, H, P, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Nhận thấy rằng, ba đường tròn ($GDFE$), ($DHPF$), ($GHPE$) có 3 trục đẳng phương DF, GE, HP đồng quy (tại Q). Từ đó, *ta xét bài toán tổng quát như sau*: "Cho tam giác PGE. Điểm Q thuộc tia đối của tia GE. Đường thẳng đi qua Q cắt cạnh PG, PE lần lượt tại D, F. Gọi K là giao điểm của GF và DE. Đường thẳng PQ cắt EK, GK lần lượt tại B, **C.** Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, PK đồng quy".



Xét tam giác CQG,ta có $(EDKB) = -1$ (hàng điểm điều hoà cơ bản).

Suy ra $\dfrac{EK}{EB} = \dfrac{DK}{DB}$ (*).Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CBK với cát tuyến PFE ta có $\dfrac{PB}{PC}.\dfrac{FC}{FK}.\dfrac{EK}{EB} = 1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\dfrac{PB}{PC}.\dfrac{FC}{FK}.\dfrac{DK}{DB} = 1$. Áp dụng định lý Ceva cho tam giác CBK suy ra BF, CD, PK đồng quy.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm M, N nằm trên các cạnh BC, CD sao cho $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NC}{2ND}$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của BD với AM, AN. Chứng minh rằng diện tích tứ giác $IJMN$ bằng diện tích tam giác AIJ.

Hướng dẫn giải

Đặt $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NC}{2ND} = \text{k}$.Ta có $\dfrac{S_{\text{VAMN}}}{S_{\text{VAIJ}}} = \dfrac{\frac{1}{2}AM.AN.\sin\text{MAN}}{\frac{1}{2}AI.AJ.\sin\text{IAJ}} = \dfrac{AM.AN}{AI.AJ}$

$= \dfrac{AI + IM}{\text{AI}}.\dfrac{\text{AJ} + JN}{\text{AJ}} = \left(1 + \dfrac{IM}{\text{AI}}\right)\left(1 + \dfrac{JN}{\text{AJ}}\right)$ (1)

+) $\dfrac{BC}{BM} = \dfrac{\text{BM} + CM}{\text{BM}} = 1 + \dfrac{1}{\text{k}} = \dfrac{\text{k}+1}{\text{k}}$ (2), $\dfrac{DC}{DN} = \dfrac{\text{DN} + CN}{\text{DN}} = 1 + \dfrac{CN}{\text{DN}} = 1 + 2k$ (3)

+) Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{IM}{AI} = \dfrac{\text{BM}}{\text{AD}} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{\text{k}}{\text{k}+1}$; $\dfrac{JN}{AJ} = \dfrac{\text{DN}}{\text{AB}} = \dfrac{DN}{DC} = \dfrac{1}{2\text{k}+1}$

+) thay vào (1) $\dfrac{S_{VAMN}}{S_{VAIJ}} = \left(1+\dfrac{k}{k+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2k+1}\right) = 2$

hay $S_{\Delta AMN} = 2\, S_{\Delta AIJ}$, $S_{IMNJ} = S_{\Delta AMN} - S_{\Delta AIJ} = 2\, S_{\Delta AIJ} - S_{\Delta AIJ} = S_{\Delta AIJ}$.

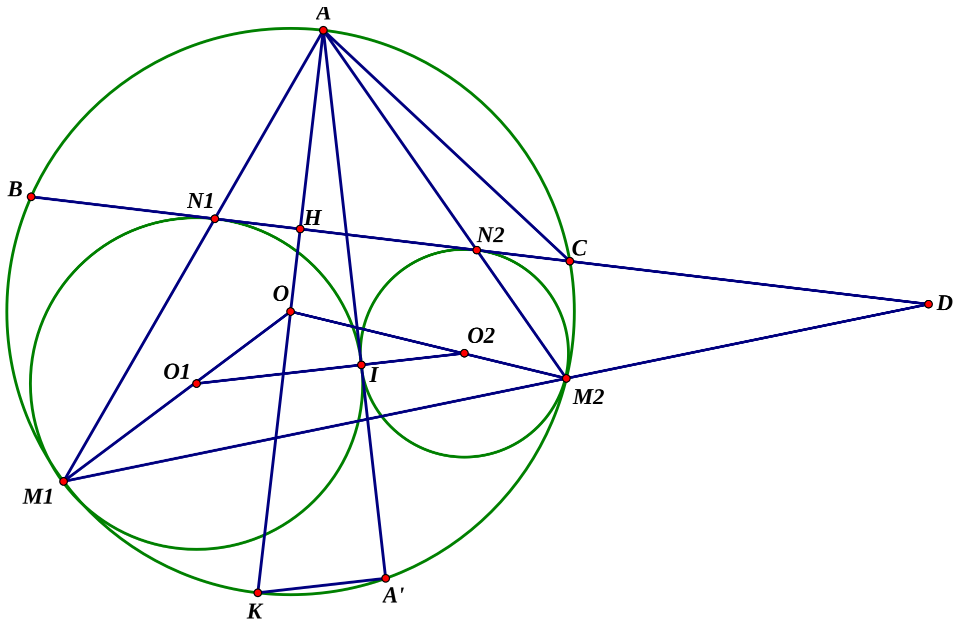
Bài 5. Cho (O) và hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với (O). Gọi I là tiếp điểm của (O_1) và (O_2); M_1, M_2 là tiếp điểm của (O) với $(O_1),(O_2)$. Tiếp tuyến chung tại I của $(O_1),(O_2)$ cắt (O) tại **A.** AM_1 cắt (O_1) tại N_1; AM_2 cắt (O_2) tại N_2.

a) Chứng minh rằng $OA \perp N_1N_2$.

b) N_1N_2 cắt (O) ở B,C; AI cắt (O) tại A'. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A'BC$.

c) Chứng minh rằng N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Hướng dẫn giải



A thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên $\overline{AN_1}.\overline{AM_1} = \overline{AN_2}.\overline{AM_2}$ suy ra $N_1N_2M_2M_1$ là tứ giác nội tiếp dẫn đến

$$\widehat{AN_1N_2} = \widehat{AM_2M_1} \Rightarrow \frac{Sđ\,\overset{\frown}{BM_1} + Sđ\,\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{Sđ\,\overset{\frown}{BM_1} + Sđ\,\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow OA \perp N_1N_2$

----

b) Gọi H, K là giao điểm của AO với $BC,(O)$.

Tam giác ABK vuông tại B có BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = \overline{AH}.\overline{AK}$

$\widehat{AM_1K} = 90^o \Rightarrow HN_1M_1K$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AB^2 = \overline{AH}.\overline{AK} = \overline{AN_1}.\overline{AM_1} = P_{A/(O_1)} = AI^2$

$\Rightarrow AB = AC = AI$

Suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC

Dẫn đến $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{IAC} = \frac{1}{2}\widehat{A'AC} = \frac{1}{2}\widehat{A'BC}$

Suy ra BI là phân giác của $\widehat{A'BC}$

Rõ ràng $A'I$ là phân giác của $\widehat{BA'C}$ (do $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$)

Vì thế I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'BC$

----

c)Giả sử O_1O_2 cắt N_1N_2 tại D, gọi R, R_1, R_2 là bán kính của (O), (O_1), (O_2).

Rõ ràng D là tâm vị tự ngoài của (O_1) và $(O_2) \Rightarrow \frac{DO_1}{DO_2} = \frac{R_1}{R_2}$, lại có $\frac{M_2O_2}{M_1O_1} = \frac{R_2}{R_1}$

Suy ra $\frac{DO_1}{DO_2} . \frac{M_2O_2}{M_2O} . \frac{M_1O}{M_1O_1} = 1$

Dẫn đến D, M_1, M_2 thẳng hàng (Menelauyt đảo)

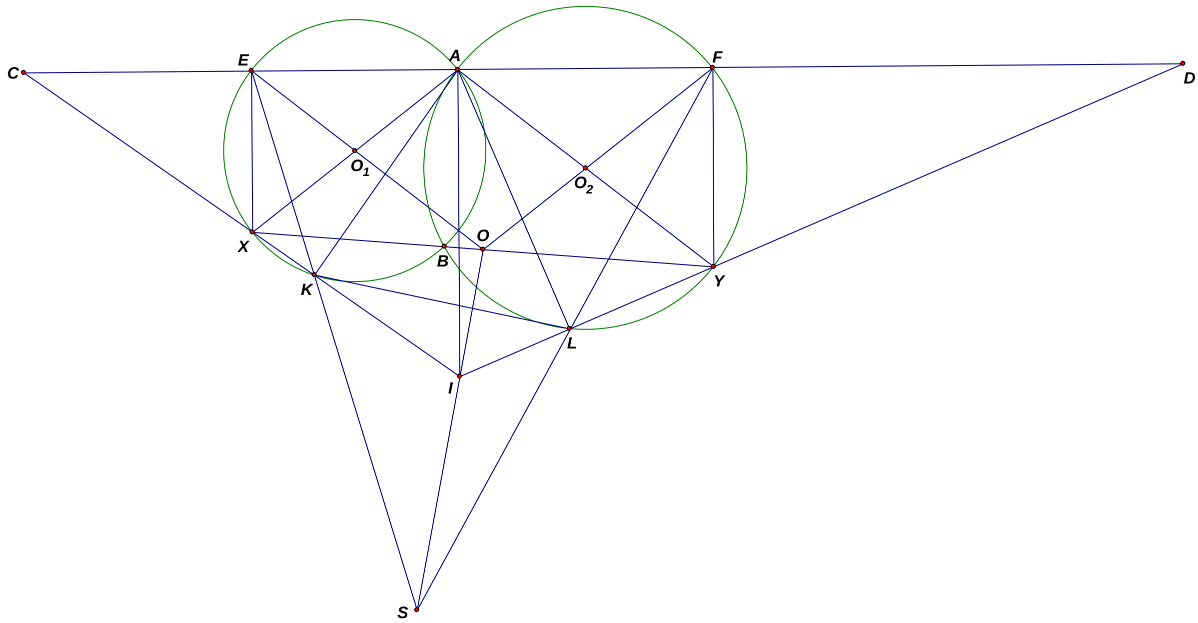
Vậy N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. AX, AY lần lượt là các đường kính của (O_1) và (O_2). Gọi O là trung điểm của XY; I là điểm thuộc đường phân giác của góc $\widehat{XAY}$ sao cho OI không vuông góc với XY và I không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua A vuông góc với AI lần lượt cắt các đường tròn (O_1), (O_2) tại các điểm E, F khác A. IX cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai K, IY cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai L.

1. Gọi C là giao điểm của EF với IX. Chứng minh rằng OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK).

2. Chứng minh rằng 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy.

Hướng dẫn giải



1. Không mất tính tổng quát giả sử I là điểm thuộc đường phân giác trong của góc $\widehat{XAY}$.

Ta có tứ giác AO_1OO_2 là hình bình hành nên suy ra $OO_1 \parallel HY$

Lại có $(EA,\ EO_1) = (AO_1, AE) = (AF,\ AO_2)\ (\text{mod } \pi) \Rightarrow EO_1 \parallel HY$

Do đó $O,\ O_1,\ E$ thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có $O,\ O_2,\ F$ thẳng hàng

Mặt khác

$$(CE,\ CK) = (AC,\ AK) + (AK,\ CK) = (AC,\ AK) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O_1E},\ \overrightarrow{O_1K}\right) = (EO_1,\ EK)\ (\text{mod } \pi)$$

Do đó OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK)

Nội dung

2. Ta có $\widehat{AKI} = \widehat{ALI} = 90^0$ nên 4 điểm A, I, K, L cùng thuộc đường tròn đường kính AI.

Mà $EF \perp AI$ nên suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Do đó $(AE,\ AK) = (LA,\ LK)\ (\text{mod } \pi)$ (1)

Mặt khác $(KE,\ KA) = (XE,\ XA) = (XE,\ EA) + (AE, AX) = \dfrac{\pi}{2} + (AE, AX)\ (\text{mod } \pi)$

$$= \frac{\pi}{2} + (AY, AF) = (AF,\ FY) + (AY, AF) = (AY, FY) = (LA, LF)(\text{mod } \pi)\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$(EF,\ EK) = (EA,\ AK) + (AK,\ EK) = (LA,\ LK) + (LF,\ LA) = (LF,\ LK)\ (\text{mod } \pi)$

Vậy 4 điểm $E,\ F,\ L,\ K$ cùng thuộc một đường tròn.

Gọi S là giao điểm của EK và FL

Vì 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn nên ta có

$\overline{SE}.\overline{SK} = \overline{SF}.\overline{SL} \Rightarrow P_{S/(CEK)} = P_{S/(DFL)}$ (3)

Ta có $\overline{IC}.\overline{IK} = \overline{ID}.\overline{IL} = IA^2 \Rightarrow P_{I/(CEK)} = P_{I/(DFL)}$ (4)

Gọi D là giao điểm của EF với IY

Chứng minh tương tự câu 1) ta có OF là tiếp tuyến của đường tròn (DFL)

Mặt khác tứ giác $EFYX$ là hình thang vuông tại E, F và O là trung điểm của XY nên suy ra $OE = OF$. Do đó $P_{O/(CEK)} = OE^2 = OF^2 = P_{O/(DFL)}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra S, O, I cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(CEK), (DFL)$ nên S, O, I thẳng hàng. Vậy 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy tại S.

***) Chú ý: Nếu HS không sử dụng góc định hướng thì phải xét các trường hợp vị trí của điểm I (I nằm ngoài các đoạn XK, YL và I nằm trong các đoạn XK, YL)**

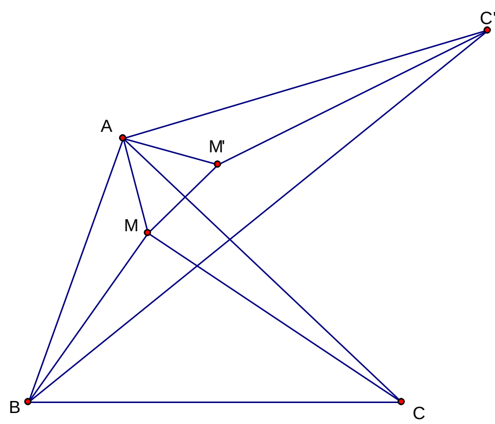
Bài 1: (Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2008 – 2009) Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$.

a. Nếu biết $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120^0$. Hãy tính diện tích tứ giác ABCD theo a.

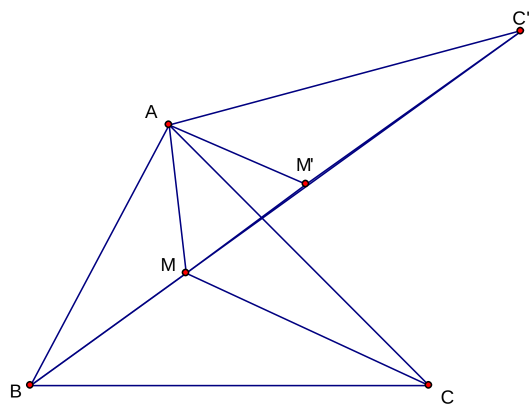
b. Giả sử tứ giác $ABCD$ thay đổi, mà $AB = BC = CD = a$ không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Bài 2: (Đề thi chọn HSG vòng tỉnh Vĩnh Long – NH: 2016 – 2017) Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Xác định điểm M bên trong tam giác sao cho $MA + MB + MC$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



Dùng phép quay quanh A với góc quay 60^0 biến M thành M'; C thành C'.

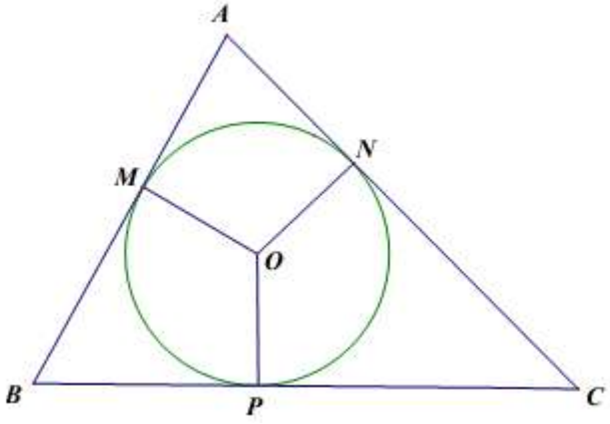


Ta có $MA + MB + MC = BM + MM' + M'C'$.

$MA + MB + MC$ bé nhất khi bốn điểm *B, M, M', C'* thẳng hàng.

Khi đó $\widehat{BMA} = 120^0$. Ta được vị trí của *M* trong tam giác *AB**C.***

Bài 3: (Đề thi chọn HSG tỉnh Vĩnh Long – NH : 2015 – 2016) Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng $\frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ca} + \frac{OC^2}{ab} = 1$ với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.



Hướng dẫn giải

Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của (O) với AB, AC, BC.

Ta có $AM = AN$, $OM = ON$ nên

$$S_{AMON} = \frac{1}{2}AM^2.\sin A + \frac{1}{2}OM^2.\sin \widehat{MON}$$
$$= \frac{1}{2}\left(AM^2 + OM^2\right).\sin A = \frac{1}{2}.OA^2.\sin A$$

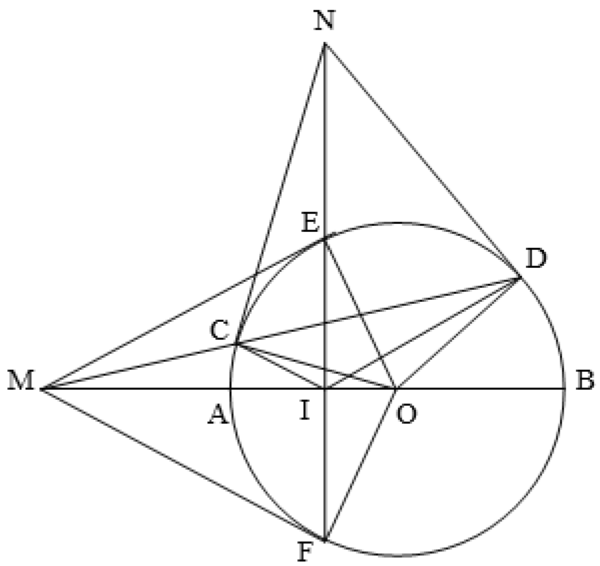
Tương tự: $S_{BPOM} = \frac{1}{2}.OB^2.\sin B$, $S_{CPON} = \frac{1}{2}.OC^2.\sin C$

Khi đó: $\frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ca} + \frac{OC^2}{ab} = \frac{OA^2.\sin A}{bc.\sin A} + \frac{OB^2.\sin B}{ca.\sin B} + \frac{OC^2.\sin C}{ab.\sin C}$

$$= \frac{2\left(S_{AMON} + S_{BPOM} + S_{CPON}\right)}{2S_{ABC}} = \frac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}} = 1$$

Bài 4: (Đề đề xuất thi chọn HSG khu vực duyên hải – đồng bằng Bắc bộ năm học 2015 – 2016, trường THPT chuyên Lương Văn Tụy) Cho đường tròn (ω) tâm O đường kính AB, điểm M trên tia đối của tia AB. Đường thẳng d qua M cắt đường tròn (ω) tại C, D. Hai tiếp tuyến của (ω) tại C, D cắt nhau tại N, kẻ NI vuông góc với AB tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = \widehat{BID}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi *E, F* thứ tự là giao của *NI* với (ω) suy ra *CEDF* là tứ giác điều hòa

⇒*ME, MF* tiếp xúc với (ω).

Giả sử *C* nằm giữa *M*, **D.** Ta có $MC.MD = ME^2 = MI.MO \Rightarrow$ tứ giác *CDOI* nội tiếp

Suy ra $\widehat{AIC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{BID} \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BIC}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

V. Bài toán nội tiếp đường tròn

Câu 33. (THPT Chuyên tỉnh Sơn La – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho đường tròn tâm O và một dây cung AB không đi qua O. C là điểm chính giữa cung nhỏ AB, D nằm ngoài đường tròn (O) sao cho D và C nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Qua D kẻ tiếp tuyến DT với đường tròn (O), T là tiếp điểm. CT cắt AB tại E. Đường thẳng qua E và vuông góc với AB cắt OT tại I. Một đường thẳng thay đổi qua D cắt dường tròn (O) tại M và N (M nằm giữa D và N), CM cắt AB tại P.

Chứng minh rằng

1. Đường tròn tâm I, bán kính IE tiếp xúc trong với đường tròn (O).

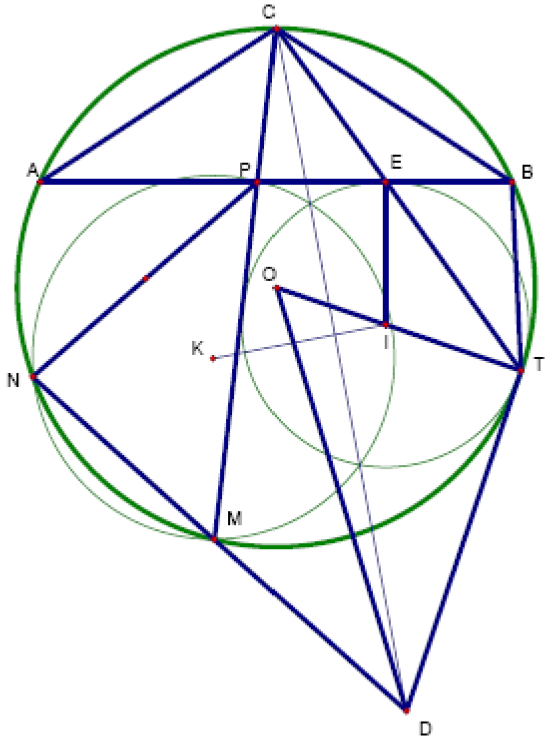
2. Tứ giác $ETMP$ nội tiếp một đường tròn.

Lời giải

1) Tam giác OCT đồng dạng với tam giác IET vì: $\widehat{OCT} = \widehat{IET}; \widehat{OTC} = \widehat{ITE}$

Mà tam giác OCT cân tại O nên tam giác IET cân tại I, suy ra $IE = IT$

Vậy: đường tròn tâm I bán kính IE tiếp xúc trong với đường tròn tâm (O) tại T.



2) Tam giác ACP đồng dạng với tam giác MCA vì $\widehat{CAP} = \widehat{CMA}, \widehat{ACP} = \widehat{MCA}$

Do đó: $AC^2 = CP.CM$

Tương tự, tam giác BCE đồng dạng với tam giác TCB vì $\widehat{CBE} = \widehat{CTB}, \widehat{BCE} = \widehat{TCB}$

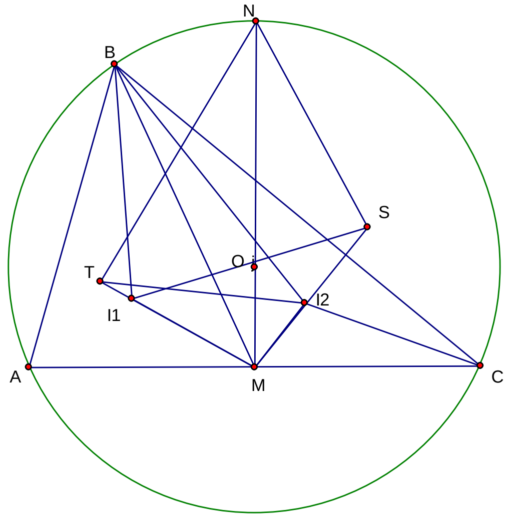
Do đó: $BC^2 = CE.CT$

Suy ra $CP.CM = CE.CT$**. Vậy tứ giác PETM nội tiếp**

Câu 34. (THPT Chuyên Bắc Ninh – Tỉnh Bắc Ninh- Thi Olympic lần VII – 2013-2014)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O). Gọi N là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{ABC}$ của đường tròn (O); M là trung điểm của AC; I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM và CBM. Chứng minh rằng $I_1\,I_2$, B, N cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



$I_1M \perp I_2M$ **và** $MN \perp AC$**. Xét phép quay tâm *M* góc quay** 90^o **biến *C* thành *N*.**

Gọi ảnh của điểm I_2 **trong quép quay này là *T*, khi đó *T* nằm trên** I_1M **.**

Ta định nghĩa tương tự điểm *S* trên I_2M **.**

Ta có $\angle I_1TI_2 = \angle MNC = \dfrac{B}{2}$**,** $\angle I_1SI_2 = \angle ANM = \dfrac{B}{2}$**.**

Do đó $\angle I_1TI_2 = \angle I_1SI_2 = \dfrac{B}{2} = \angle I_1BI_2$**, suy ra** I_1, T, B, S, I_2 **đồng viên.**

Ta có $\angle TNM = \angle I_2CM = \dfrac{C}{2}$**, tương tự** $\angle SNM = \dfrac{A}{2}$**.**

Vì vậy $\angle TNS = 90^o - \dfrac{B}{2}$**. Mặt khác góc** $\angle TI_2S$ **là góc ngoài tam giác** TI_2M **, nên**

$\angle TI_2S = 90^o + \dfrac{B}{2}$**.**

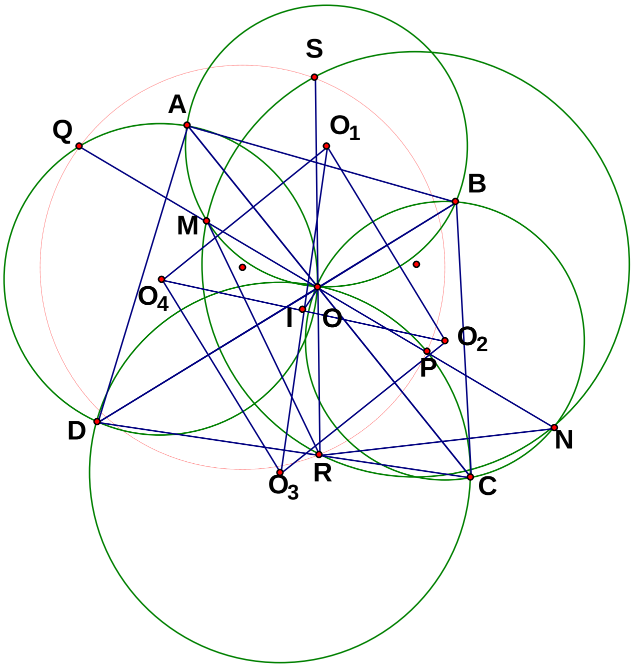
Do đó N **nằm trên đường tròn đi qua các điểm** I_1, T, B, S, I_2**.**

Do đó ta suy ra ĐPCM

Câu 35. (Trường THPT Chuên Vĩnh Phúc – Trại hè Hùng Vương lần X- 2014)

Cho tứ giác $ABCD$ **coa hai đường chéo cắt nhau tại** O**. Một đường thẳng** d **qua** O **cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác** OAB**,** OBC**,** OCD**,** ODA **lần lượt tại** M **,** N **,** P **,** Q **(các điểm này khác** O**) sao cho** O **là trung điểm của** MP**. Gọi** R **là một điểm nằm trên đoạn** CD **(**R **khác** C**,** D**). Gọi** S **là giao điểm thứ hai của đường thẳng** OR **với đường tròn ngoại tiếp tam giác** MNR**. Chứng minh rằng bốn điểm** P**,** Q**,** R**,** S **cùng nằm trên một đường tròn.**

Lời giải



Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau ta có:

$O_1O_4 \perp AC,\ O_2O_3 \perp AC \Rightarrow O_1O_4$ PO_1O_4

$O_1O_2 \perp BD,\ O_3O_4 \perp BD \Rightarrow O_1O_2$ PO_3O_4

Do đó tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành suy ra O_1O_3, O_2O_4 cắt nhau tại điểm I và I là trung điểm của mỗi đoạn O_1O_3, O_2O_4.

Bổ đề. **Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi I là trung điểm của O_1O_2. Một đường thẳng Δ qua A và cắt $(O_1),(O_2)$ lần lượt tại E, F. Khi đó $AE = AF$ khi và chỉ khi $\Delta \perp AI$.**

Thật vậy, gọi K, L lần lượt là trung điểm của AE, AF suy ra $O_1K \perp \Delta,\ O_2L \perp \Delta$. Do đó tứ giác KO_1O_2L là hình thang vuông. Khi đó $\Delta \perp AI$ khi và chỉ khi AI là đường trung bình của hình thang KO_1O_2L hay $AK = AL \Leftrightarrow AE = AF$. Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Do O là trung điểm của MP nên theo bổ đề cho hai đường tròn $(O_1),(O_3)$ và đường thẳng (d) ta được $OI \perp d$, cũng theo bổ đề trên cho $(O_2),(O_4)$ và đường thẳng (d) ta được O là trung điểm của NQ. Từ đó suy ra $OM.ON = OP.OQ$ (1).

Do bốn điểm M, R, N, S cùng nằm trên một đường tròn nên $OR.OS = OM.ON$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $OR.OS = OP.OQ \Rightarrow$ bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 36. (THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương – Toán 11- 2015)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có AC vuông góc với BD tại H. Gọi I, J, K, L lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a. Chứng minh rằng các điểm I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của đoạn thẳng OH.

b. Chứng minh giao điểm của IK và JL nằm trên đường thẳng OH.

Lời giải

rớc hết ta chứng minh H, I, P thẳng hàng. Thật vậy, $\widehat{AHI} = 90^0 - \widehat{IAH} = 90^0 - \widehat{HDC} = \widehat{HCD} = \widehat{PHC}$ (vì HP là trung tuyến của tam giác vuông HCD)

ra I, H, P thẳng hàng. Tương tự cũng có J, H, Q thẳng hàng, K, H, M

ng hàng, L, H, N thẳng hàng.

ràng I và K nằm trên đường tròn đường kính MP, J và L nằm trên đường

n đường kính NQ. (1)

ặt khác, MNPQ là hình bình hành và MN song song AC, NP song song

), AC vuông góc BD nên MN vuông góc NP, vì vậy MNPQ là hình chữ

ật. Do đó đường tròn đường kính MP cũng là đường tròn đường kính NQ

(1) và (2) suy ra I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có

n là trung điểm của MP và NQ, gọi tâm đó là T. Hơn nữa, OM song song

(vì cùng vuông góc với AB), OP song song HM(vì cùng vuông góc với

) nên OMHP là hình bình hành, do đó trung điểm T của MP cũng là

ng điểm của OH.

y I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung

m của OH.

2 điểm) Ta sẽ dùng phép nghịch đảo để chứng minh phần này.

hiệu (T) là đường tròn được nêu trong phần (a).Ta có

$_{/(T)} = \overline{HI}.\overline{HP} = \overline{HJ}.\overline{HQ} = \overline{HK}.\overline{HM} = \overline{HL}.\overline{HN} = k$ nên phép nghịch đảo cực H

rơng tích k biến I thành P, J thành Q, K thành M, L thành N.

xét hai trường hợp:

Nếu IK và JL đều không đi qua H: thế thì phép nghịch đảo nêu trên biến

thành đường tròn (HPM), biến JL thành đường tròn (HQN). Gọi G là

o điểm của IK và JL, phép nghịch đảo trên biến G thành G' thì G' thuộc

hai đường tròn (HPM) và (HQN). Vậy đường thẳng HG' là trục đẳng

rơng của hai đường tròn này.

có MNPQ là hình chữ nhật tâm T nên $\overline{TM}.\overline{TP} = \overline{TN}.\overline{TQ} \Rightarrow P_{T/(HPM)} = P_{T/(HQN)}$

đó T thuộc trục đẳng phương HG'. Mà T là trung điểm của OH và H, G,

thẳng hàng nên G nằm trên đường đẳng OH.(đpcm)

Nếu IK hoặc JL đi qua H: giả sử IK đi qua H, thế thì AB song song CD

n ABCD là hình thang nội tiếp đường tròn (O), do đó ABCD là hình thang

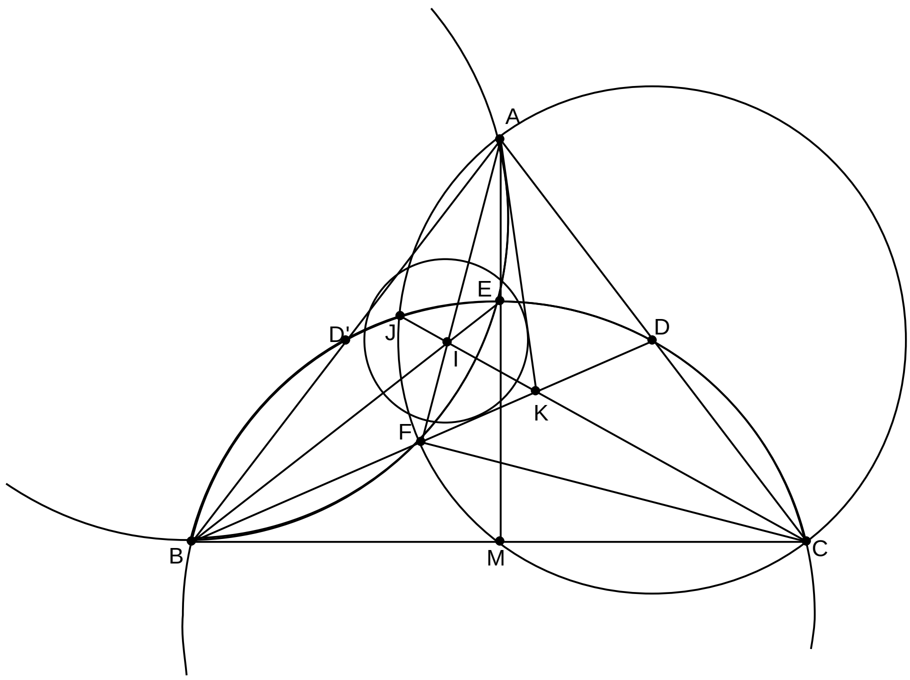
n. Khi đó I, H, O, K thẳng hàng nên giao điểm của IK và JL nằm trên

ờng thẳng OH.(đpcm)

LOẠI 2: Chứng minh các tính chất:tam giác, tứ giác đường tròn.

Câu 37. Cho tam giác ABC cân tại A.Gọi D là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc $\widehat{BAC}$ tại E nằm trong tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE giao với BD tại F (khác B), AF giao với BE tại I. CI giao với BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK .**(Chuyên Hoàng Văn Thụ)**

Hướng dẫn giải:



Gọi D' là trung điểm của AB và M là trung điểm cạnh BC.

Ta có D' nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Do tính đối xứng nên suy ra $\overset{\frown}{D'E} = \overset{\frown}{ED}$ suy ra

$\widehat{ABI} = \widehat{D'BE} = \widehat{EBD} = \widehat{IBK}$

Suy ra I nằm trên phân giác góc $\widehat{ABK}$ hay BI là tia phân giác góc $\widehat{ABK}$ $\quad(1)$

Ta có: $\widehat{DFA} = 180^o - \widehat{BFA} = 180^o - \widehat{BEA} = \widehat{MEB} = \dfrac{1}{2}\widehat{CEB} = \dfrac{1}{2}\widehat{CDB}$

$\Rightarrow \widehat{DFA} = \widehat{DAF}$ suy ra ΔADF cân tại D và tam giác AFD vuông tại F .

Do $IA.IF = IE.IB$ nên I thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.Từ đó CI đi qua giao điểm thứ hai J của hai đường tròn này.

Ta có $\widehat{DCJ} = \widehat{DJC} = \widehat{DBC}$ nên $DA^2 = DC^2 = DK.DB$

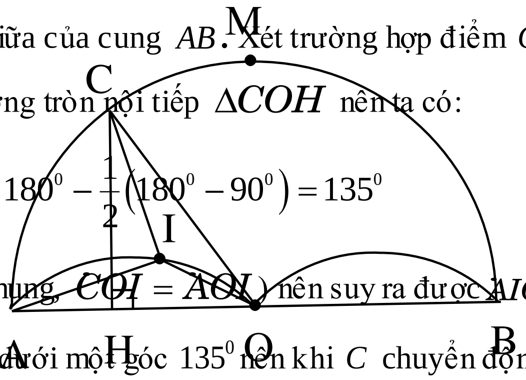
Suy ra $\widehat{DAK} = \widehat{DBA}$ hay $\widehat{FAD} - \widehat{FAK} = \widehat{DFA} - \widehat{FAB}$. Từ đó $\widehat{FAK} = \widehat{BFA}$.Ta có (đpcm)

Câu 38. Gọi D là trung điểm cạnh BC của ΔABC và E, Z lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. Giả sử T là giao điểm của các tiếp tuyến tại E, Z với đường tròn đường kính AD. Chứng minh rằng $TB = TC$.**(Tỉnh Nam Định 2010-2011-vòng 1)**

Câu 39. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AB, AC trong tứ giác lồi $ABCD$. Phân giác của góc ACD cắt cạnh AB tại K. Nếu $MA.MC + MA.CD = MB.MD$, chứng minh rằng góc BKC bằng góc CDB.**(Tỉnh Nam Định 2010-2011-vòng 2)**

LOẠI 3: Tìm quỹ tích:

Câu 40. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và C là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn này. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác COH. Tìm tập hợp các điểm I.**(Trường THPT chuyên Hùng Vương Phú Thọ)**



Phần thuận: Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Xét trường hợp điểm C chuyển động trên cung nhỏ AM. Do I là tâm đường tròn nội tiếp ΔCOH nên ta có:

$$\widehat{CIO} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{HCO} + \widehat{HOC}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - 90^0\right) = 135^0$$

Do $\Delta AIO = \Delta CIO$ (OA = OC, OI chung, $\widehat{COI} = \widehat{AOI}$) nên suy ra được $\widehat{AIO} = \widehat{CIO} = 135^0$

Do A, B cố định và I luôn nhìn AB dưới một góc 135^0 nên khi C chuyển động trên cung $\overset{\frown}{AM}$ thì I chuyển động trên cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn AO.

Phần đảo: Lấy điểm H bất kì thuộc đoạn OA và vẽ đường thẳng vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn tâm O tại C. Dựng phân giác trong của $\widehat{COH}$ cắt cung chứa góc 135^0 dựng trên OA tại điểm I. Ta chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔCOH.

Do I thuộc cung chứa góc 135^0 dựng trên OA nên $\widehat{AIO} = 135^0$ ngoài ra ta có $\Delta AOI = \Delta COI$ (cgc) nên $\widehat{AIO} = \widehat{CIO} = 135^0$, $\widehat{ICO} = \widehat{IAO}$

Suy ra $\widehat{AIC} = 360^0 - \left(\widehat{CIO} + \widehat{AIO}\right) = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $ACIH$ nội tiếp được trong đường tròn

đường kính AC Suy ra $\widehat{ICH} = \widehat{IAH}$. Mặt khác $\widehat{ICO} = \widehat{IAO} \Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{ICO}$ hay I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔCOH

Khi C chuyển động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$, chứng minh tương tự, cho I chuyển động trên cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn OB.

Vậy khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB đã cho thì I tâm đường tròn nội tiếp của ΔCOH chuyển động trên 2 cung chứa góc 135^0 dựng trên các đoạn OA, OB thuộc nửa mặt phẳng bờ AB cùng phía với nửa đường tròn đã cho.

Loại 3: Tìm quỹ tích.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 1)- năm học 2002-2003]

a/ Trong mặt phẳng Oxy, cho một đường tròn (C) cắt parabol (P): $y = x^2$ tại bốn điểm, một điểm có tọa độ là (1;1) và ba điểm còn lại là ba đỉnh của một tam giác đều. Tính bán kính của đường tròn (C).

b/ Tìm tập hợp các tâm của những tam giác đều có ba đỉnh thuộc parabol (P): $y = x^2$.

Lời giải

a/ (C): $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$. (C) qua điểm (1;1) nên: $R^2= (1 – a)^2 + (1 – b)^2$.

Hoành độ x_1, x_2, x_3 của ba đỉnh tam giác đều và x = 1 là nghiệm của phương trình:

$$(x – a)^2 + (y – b)^2 = (1 – a)^2 + (1 – b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^3 + x^2 + (2 - 2b)x + 2 - 2a - 2b = 0 \end{array}\right.$$

Do đó: $x^3 + x^2 + (2 – 2b)x +2 – 2a – 2b \equiv (x – x_1)(x – x_2)(x – x_3)$ nên:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 - 2b \end{cases}$$

Từ giả thiết tam giác đều nên:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3b \end{cases}$$

Do đó: $a = -\frac{1}{3}$, b = 3 và bán kính đường tròn (C) là: $R = \frac{2\sqrt{13}}{3}$.

b/ (1.5 đ)

<u>Thuận:</u>

Giả sử I(a;b) là tâm của tam giác dều ABC có đỉnh trên (P). Đường tròn (ABC) cắt (P) thêm điểm $M(x_0;y_0)$ (có thể trùng A, B, C).

x_A, x_B, x_C và x_0 là nghiệm của: $(x – a)^2 + (y – b)^2 = (x_0 – a)^2 + (x_0^2 – b)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x^3 + x_0x^2 + (x_0^2 + 1 - 2b)x + x_0^3 + x_0 - 2a - 2bx_0 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Suy ra:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3a \\ x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3a \\ (x_A + x_B + x_C)^2 - 2(x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A) = (-x_0)^2 - 2(x_0^2 + 1 - 2b) \end{cases}$$

Hay: $\begin{cases} a = -\frac{x_0}{3} \\ b = x_0^2 + 2 \end{cases}$, vì vậy: $b = 9a^2 + 2$. Nên tâm I ở trên đồ thị (G): $y = 9x^2 + 2$.

<u>Đảo</u>: Xét $I(a; 9a^2 + 2)$ tùy ý trên (G): $y = 9x^2 + 2$. Ta phải chứng minh đường tròn (C) tâm I bán kính IM với $M(-3a; 9a^2)$ cắt (P) thêm 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác đều.

Xét phương trình: $(x – a)^2 + (x^2 – 9a^2 – 2)^2 = (-3a – a)^2 + (9a^2 – 9a^2 – b)^2$ (2).

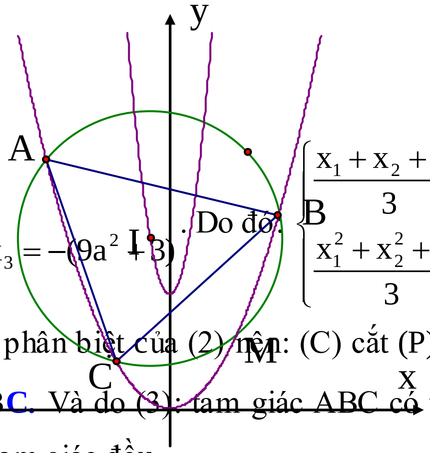
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3a \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$ với $f(x) = x^3 -3a^2x^2 - (9a^2 + 3)x + 27a^3 + 7a$ (f(x) = 0 chính là phương trình (1) với $x_0 = - 3a$).

Nếu a = 0: f(x) = x^3 -3x = 0 có 3 nghiệm phân biệt.

Nếu a ≠ 0: Do f(x) liên tục, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ và $\begin{cases} f(-3a) = 16a > 0; f(3a) = -2a < 0 & \text{khi } a > 0 \\ f(3a) = -2a > 0; f(-3a) = 16a < 0 & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

nên f(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình f(x) = 0 luôn có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với mọi a.



Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -(9a^2 + 3) \end{cases}$. Do đó: $\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = a \\ \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} = 9a^2 + 3 \end{cases}$ (3)

Do x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phân biệt của (2) nên: (C) cắt (P) tại 3 đỉnh $A\left(x_1; x_1^2\right)$, $B\left(x_2; x_2^2\right)$, C $\left(x_3; x_3^2\right)$ của tam giác ABC. Và do (3): tam giác ABC có trọng tâm trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I, nên ABC là tam giác đều.

<u>Kết luận</u>: Tập hợp các tâm của những tam giác đều có 3 đỉnh thuộc (P): y = x^2 là parabol: (G): y = $9x^2$ + 2.

Câu 2. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 1)- năm học 2004-2005]

Trong mặt phẳng (P), cho tam giác vuông ABC cố định có $AB = AC$,Tìm tập hợp các điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $4MA \le MB + MC - |MB - MC|$

Lời giải

Ta có:

+ $MB + MC - |MB - MC| = 2\mathrm{Min}(MB, MC)$

$4MA \le MB + MC - |MB - MC| \Leftrightarrow 2MA \le MB; 2MA \le MC$

+ Chọn hệ trục Axy và đơn vị trên trục sao cho B(3;0),C(0;3). Gọi M(x;y)

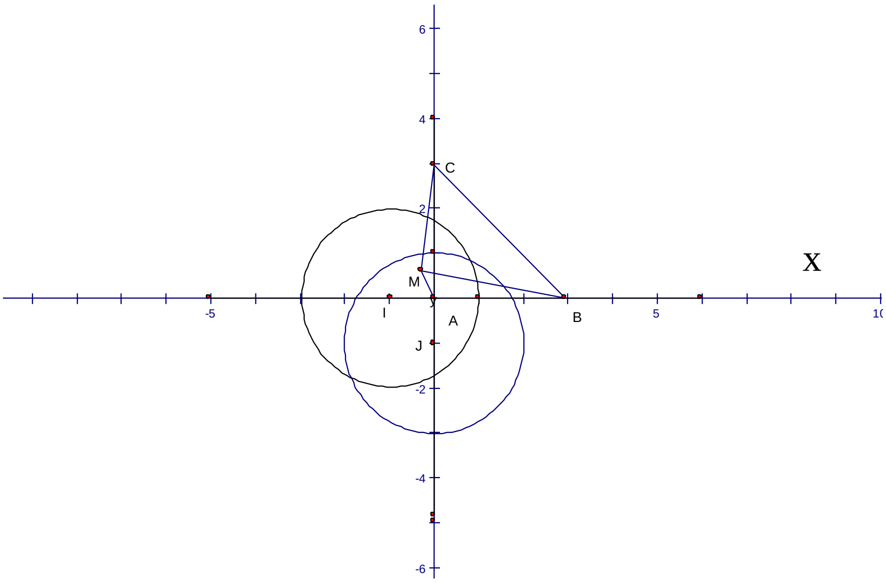
$2MA \le MB \Leftrightarrow 4MA^2 - BM^2 \le 0 \Leftrightarrow 4\left(x^2 + y^2\right) - (x-3)^2 - y^2 \le 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 \le 4$

Vậy ở trong hình tròn (T) tâm I(-1;0), bán kính 2, (kể cả biên).

Tương tự $2MA \le MC \Leftrightarrow$ M ở trong hình tròn (S) tâm J(0;-1), bán kính 2, (kể cả biên).

Vậy tập hợp những điểm M thỏa bài toán là phần giao của hai hình tròn (T) và (S), (kể cả biên).

y



Câu 3. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 1)- năm học 2005-2006]

Cho hình vuông EFGH. Gọi (T) là đường tròn qua các trung điểm các cạnh của tam giác EFG. Nhận xét: Điểm H thỏa mãn đồng thời hai tính chất sau:

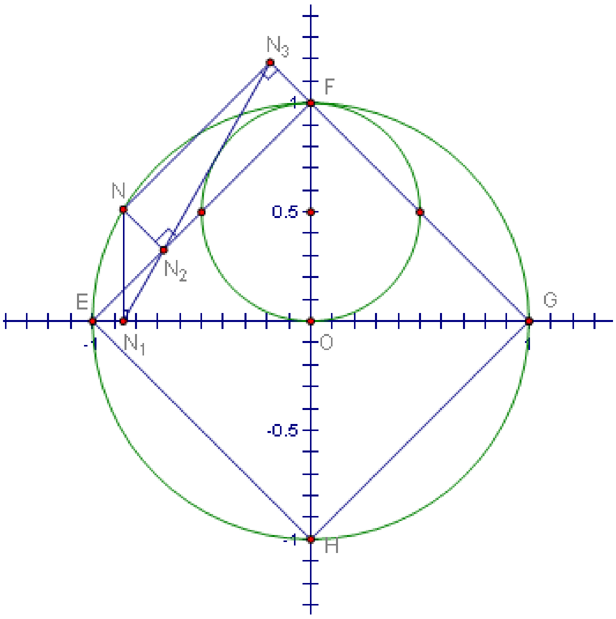
a/ Các hình chiếu vuông góc của nó lần lượt trên các đường thẳng: EF, FG, GE nằm trên một đường thẳng d.

b/ Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (T).

Hãy tìm tập hợp tất cả các điểm N của mặt phẳng chứa hình vuông EFGH sao cho N thỏa mãn đồng thời hai tính chất a/ và b/ ở trên.

Lời giải

+ Điểm N thỏa mãn tính chất a/ khi và chỉ khi N ở trên đường tròn qua E, F, G.



+ Chứng minh: Chọn hệ trục Oxy với O là tâm của hình vuông EFGH và vec tơ đơn vị trên trục $\vec{i}=\overrightarrow{OG}; \vec{j}=\overrightarrow{OF}$. Ta có E(-1;0), F(0;1), G(1;0).

Phương trình của EF: $x-y+1=0$; FG: $x+y-1=0$, đường tròn (EFG): $x^2+y^2=1$

Gọi N(X;Y). Tọa độ các hình chiếu của N lên EG, EF, FG lần lượt là:

N_1 (X;0),N_2 ($\frac{1}{2}$(X+Y-1); $\frac{1}{2}$(X+Y+1)),N_3 ($\frac{1}{2}$(X-Y+1); $\frac{1}{2}$(-X+Y+1))

$\overrightarrow{N_1N_2} = (\frac{1}{2}(-X+Y-1);\frac{1}{2}(X+Y+1))$; $\overrightarrow{N_2N_3} = (1-Y;-X)$

N_1, N_2, N_3 thẳng hàng khi và chỉ khi (-X+Y-1)(-X)-(1-Y)(X+Y+1)=0 $\Leftrightarrow$ $X^2+Y^2=1(1)$

+ Tìm thêm điều kiện để N thỏa mãn tính chất b/. Chỉ cần xét N(X;Y) khác F(0;1).

Với điều kiện (1) đường thẳng d có phương trình X(x-X) +(1-Y)(y-0)=0

Tâm của (T) là I(0; $\frac{1}{2}$). Bán kính của (T) là $\frac{1}{2}$

+ d tiếp xúc (T) khi và chỉ khi $\frac{\left|X(0-X)+(1-Y)(\frac{1}{2})\right|}{\sqrt{X^2+(1-Y)^2}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (2X^2+Y-1)^2 = X^2+Y^2-2Y+1(2)$

+ Giải hệ (1) và (2): Rút X^2 từ (1) thay vào (2):

$(2Y^2-Y-1)^2=2(1-Y) \Leftrightarrow (Y-1)^2(2Y+1)^2 = 2(1-Y)$.Đang xét Y $\neq$ 1 nên:$(Y-1)(2Y+1)^2 = -2$

$4Y^3-3Y+1= 0 \Leftrightarrow (Y+1)(4Y^2-4Y+1) = 0 \Leftrightarrow Y= -1; Y=\frac{1}{2}$.

+ VớiY=-1 ta cóđiểm N(0;-1),đó là H

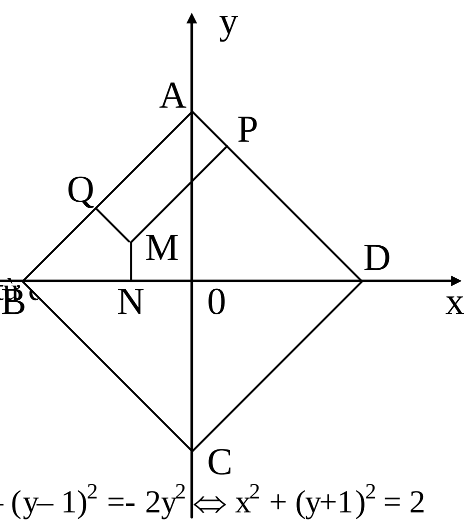
Với Y= $\frac{1}{2}$, ta có thêm hai điểm N là ($\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}$) và (-$\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}$)

Tập hợp phải tìm là ba đỉnh của tam giác đều nội tiếp trong đường tròn (EFGH) mà một đỉnh là H.

Câu 4. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng A- Vòng 1)- năm học 2000-2001]

Cho hình vuông cố định. Tìm tập hợp những điểm M trong hình vuông đó và thỏa mãn điều kiện: Tích hai khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh của hình vuông cùng xuất phát từ một đỉnh bằng bình phương khoảng cách từ điểm M đến đường chéo của hình vuông không đi qua đỉnh đó.

Câu 5. (2.0 điểm)



Không giảm tính tổng quát, xét hình vuông có cạnh $\sqrt{2}$.
Đặt hình vuông ABCD lên mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy sao cho A(0;1), B(-1;0), C(0;-1), D(1;0).
Gọi M(x;y) là điểm ở trong hình vuông ABCD, hạ MN, MP, MQ lần lượt vuông góc với BD, DA, AB tại N, P, Q.
Do đó: $MP.MQ = MN^2$ (1) (xét 2 cạnh hình vuông phát xuất từ A
AB: x – y + 1 = 0,AD: x + y – 1 = 0.

(1) $\Leftrightarrow \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}.\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = |y|^2 \Leftrightarrow |x^2-(y-1)^2| = 2y^2$

M(x;y) ở trong hình vuông nên x – y + 1 > 0, và x + y – 1 < 0.
Do đó: $x^2 - (y-1)^2 = (x-y+1)(x+y-1) < 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = -2y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$

Vậy tập hợp các điểm M là cung BD, cung ¼ đường tròn C, bán kính R = $\sqrt{2}$.
Từ kết quả trên ta kết luận: Tập hợp các điểm M là 4 cung ¼ đường tròn tâm là các đỉnh của hình vuông và có bán kính bằng cạnh của hình vuông.

Câu 6. [Trường THPT DTNT Quế Phong- năm học 2008-2009]
Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua P cắt (O) tại hai điểm A và **B.** Tìm quỹ tích điểm M sao cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$.

LOẠI 3. Tìm quỹ tích:

Câu 7. **[HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI TỈNH LÀO CAI]**

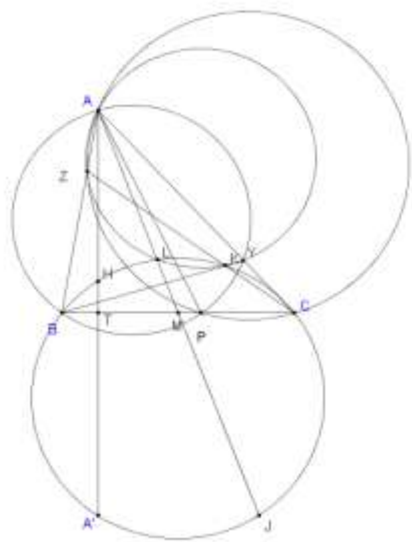
Cho ΔABC nhọn không cân, P là một điểm chuyển động trên đoạn thẳng BC (nhưng không trùng vào các đầu mút). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABP giao AC tại Y khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔACP giao AB tại Z khác A. Gọi T là hình chiếu của A trên BC, H là trực tâm tam giác ΔABC. Gọi K là giao của BY và CZ. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua BC.

a) Chứng minh rằng $A', P,$ K thẳng hàng

b) Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAYZ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu (UVW) là đường tròn đi qua 3 điểm U, V, W



a) Ta có
$\angle BYA = \angle BPA = 180^0 - \angle APC = 180^0 - \angle AZC$.

Suy ra $K \in (AYZ)$.

Suy ra $\angle YKC = \angle BAC = \angle YPC$ hay $K \in (CYP)$.

Từ đó $\angle KPC = \angle KYA = \angle APB = \angle A'PB$ hay $A', P,$ K thẳng hàng

b) Gọi M là trung điểm BC, AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔBHC tại J sao cho A và J khác phía với BC. AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAYZ tại L khác **A.**
Do K thuộc tròn ngoại tiếp tam giác ΔAYZ nên $\angle BKC = 180^0 - \angle BAC = \angle BHC$

Suy ra $K \in (BHC)$.

Lại có (ABC) và (BHC) đối xứng nhau qua BC nên $A' \in (BHC)$, $AM = MJ$.

Từ đó $TM \| A'J$. Ta thu được $\angle KLJ = \angle AYB = \angle APB = \angle BPA' = \angle KA'J$

($\angle BPA' = \angle KA'J$ vì $\angle BPA'$ bằng nửa tổng số đo cung A’B và KC của (BHC) nhưng vì $TM \| A'J$ nên số đo cung A’B bằng số đo cung JC của (BHC). Do đó $\angle BPA'$ bằng nửa tổng số đo cung KCJ của (BHC), do đó bằng $\angle KA'J$)

Vì vậy $L \in (BHC)$. Do $\angle HA'J = 90^0 \Rightarrow \angle HLJ = 90^0$

Vậy (AYZ) luôn đi qua giao điểm L của trung tuyến ứng với đỉnh A của (BHC) hay hình chiếu của trực tâm H trên AM.

Do đó tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAYZ luôn thuộc đường thẳng trung trực của đoạn AL cố định khi P thay đổi.

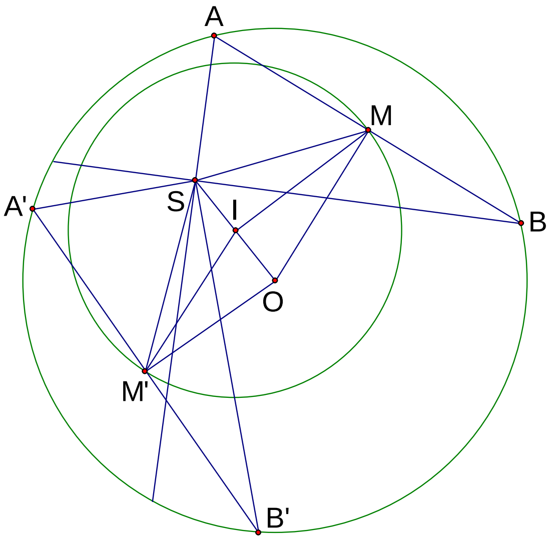
Câu 8. **[Đề ôn thi đội tuyển Festival. Đề số 2]**
Cho Đường thẳng d và hai điểm O, O' cố định nằm trên d, M là điểm di động trên d. Các đường tròn có tâm là O, O' và cùng đi qua M cắt nhau tại N (khác M). Tìm tập hợp điểm N

Câu 9. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm S ở trong đường tròn. Xét tất cả các góc vuông đỉnh S: gọi giao điểm của hai cạnh góc vuông với đường tròn là A, B. Tìm tập hợp trung điểm M của AB.

Hướng dẫn giải

Ta có $MI^2 = \dfrac{MS^2 + MO^2}{2} - \dfrac{SO^2}{4} = \dfrac{MS^2 + MO^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

Mặt khác $P_{M/(O)} = MA.MB = R^2 - MO^2$ mà $MA = MB = SM$



Gọi I là trung điểm SO, đặt $SO = a$ (không đổi)

nên $MS^2 = R^2 - MO^2 \Leftrightarrow MS^2 + MO^2 = R^2 \Rightarrow MI^2 = \dfrac{R^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ không đổi.

Vì I cố định nên M thuộc đường tròn tâm I bán kính $MI = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$

Đảo lại, trên đường tròn (I) lấy M' tuỳ ý $\Rightarrow M'I = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$. Lấy M' làm tâm quay một cung tròn bán kính $M'S$ cắt (O) tại A'.

Ta có $M'A' = M'S$. Kéo dài $M'A'$ cắt (O) tại B'.

$$M'S^2 + M'O^2 = \frac{1}{2}\left(4M'I^2 + SO^2\right) = \frac{1}{2}\left(2R^2 - a^2 + a^2\right) = R^2$$

Xét tam giác $M'SO$ có: $\Leftrightarrow M'A'^2 + M'O^2 = OA'^2$

Hay tam giác $OM'A'$ vuông tại M' suy ra M' là trung điểm $A'B'$

nghĩa là $M'A' = M'B' = M'S$ hay tam giác $SA'B'$ vuông tại S.

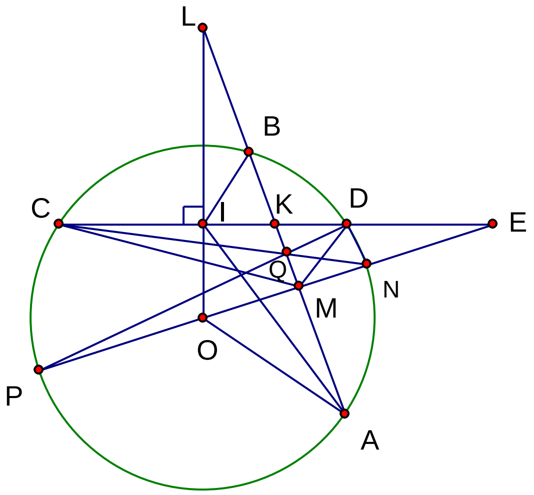
Câu 10. **[THI HSG KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2013 SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM -TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM]**

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I cố định ở trong đường tròn ($I \neq O$), đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt đường tròn tại C và D; A là một điểm nằm trên đường tròn, tia đối xứng với tia IA qua đường thẳng CD cắt đường tròn tại B. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Chứng minh đường thẳng AB đi qua một điểm cố định L khi A thay đổi trên đường tròn $(O;R)$.

b) Gọi N, P là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn $(O;R)$. Đường thẳng CN và DP cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng các điểm Q, N là những tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Hướng dẫn giải



Gọi L là giao điểm của AB và OI; K là giao điểm của AB và CD.

Ta có $IE \perp OL$ và IE IE là phân giác của góc $\widehat{AIB}$, suy ra: $(ABKL) = -1$

Suy ra: $MA^2 = MB^2 = \overline{MK}.\overline{ML}$ (M là trung điểm của AB, New-tơn)

= $(\overline{ML}+\overline{LK}).\overline{ML}$

= $ML^2-\overline{LK}.\overline{LM}$

Mà ta lại có: $P_L/(IOMK)=\overline{LI}.\overline{LO}=\overline{LK}.\overline{LM}$

Do đó: $MA^2=ML^2-\overline{LK}\,\overline{LM}=ML^2-\overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $ML^2-MA^2=\overline{LI}.\overline{LO}\Leftrightarrow LO^2-OM^2-MA^2=\overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $OL^2-OA^2=\overline{LI}.\overline{LO}$

$=(\overline{LO}+\overline{OI})\overline{LO}$

$=LO^2-\overline{OI}.\overline{OL}$

Suy ra $OA^2=\overline{OI}.\overline{OL}$. Suy ra $\overline{OL}=\dfrac{R^2}{\overline{OI}}$. Vậy L cố định.

b)Trước hết ta chứng minh MK là phân giác của góc CMD.

Gọi E là giao điểm của OM OM với CD

Ta có: $\Delta OEI\ :\ \Delta OML$

Suy ra: $\overline{OM}.\overline{OE}=\overline{OI}.\overline{OL}=OA^2=R^2$

Suy ra: $OE^2-\overline{OM}.\overline{OE}=OE^2-R^2$

Suy ra: $\overline{OE}.\overline{ME}=IE^2+OI^2-R^2=IE^2-(R^2-OI^2)=IE^2-IC^2$

Ta có: $P_E/(OIRM)=\overline{KE}.\overline{IE}=\overline{OE}.\overline{ME}$

Do đó ta suy ra: $\overline{KE}.\overline{IE}=IE^2-IC^2$

Suy ra: $IC^2=IE^2-\overline{IE}.\overline{KE}=\overline{IE}(\overline{IE}-\overline{KE})=\overline{IE}.\overline{IK}$

Theo hệ thức Newton, ta suy ra: $(CDKE)=-1$ (1)

Mà $MK\perp ME$ nên MK là phân giác trong của góc $\widehat{CMD}$ (2)

Theo chứng minh trên ta có: $\overline{OM}.\overline{OE}=R^2=ON^2$

Suy ra: $(PNME)=-1$

Suy ra: $(NPME)=-1$ (3)

Từ (1) và (3) ta suy ra: CN,PD,KM đồng quy tại Q.

Mà góc $\widehat{QDN}=90^0$ nên $QMND$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{QDM}=\widehat{QNM}=\widehat{CDP}$

Suy ra DP là phân giác trong của góc $\widehat{CDM}$. (4)

Từ (2) và (4), ta có Q là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CMD

Ta lại có $DN \perp DP$ suy ra DN là phân giác ngoài của góc $\widehat{CDM}$. Suy ra N là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác CMD.

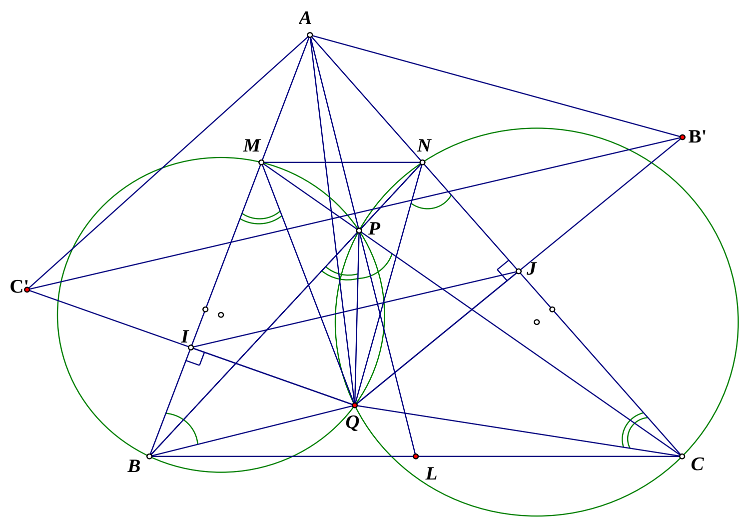
Vậy Q, N lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Câu 11. Xét các điểm M, N (M, N không trùng với A) tương ứng thay đổi trên các đường thẳng chứa các cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho MN song song với BC và các đường thẳng BN, CM cắt nhau tại P. Gọi Q là giao điểm thứ hai (khác điểm P) của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP.

1. Chứng minh rằng Q luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

2. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng với Q qua các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ nằm trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải



1) (2,0 *điểm*).

Do B, Q, P, M cùng nằm trên một đường tròn và C, Q, P, N cùng nằm trên một đường tròn, nên $(BQ; BM) \equiv (PQ; PM) \equiv (PQ; PC) \equiv (NQ; NC) \pmod{\pi}$

và $(MQ; MB) \equiv (PQ; PB) \equiv (PQ; PN) \equiv (CQ; CN) \pmod{\pi}$

Từ đó suy ra $\Delta BQM \sim \Delta NQC$ (2)

Gọi I và J theo thứ tự là hình chiếu của Q trên các đường thẳng BM và CN. Khi đó, do (2) nên $\frac{QI}{QJ} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$ (do $MN \parallel BC$).

Từ đó, theo tính chất của đường đối trung, Q nằm trên đường đối trung kẻ từ A của tam giác ABC.**2) (2,0 *điểm*).**

Gọi L là giao điểm của AP với BC. Áp dụng định lý Céva cho tam giác ABC ta có

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=-1 \qquad (1)$$

Do $MN \parallel BC$ nên $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$ từ đó và (1) suy ra $\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}=-1$ hay L là trung điểm BC.0,5

Do AQ là đường đối trung nên $\angle BAQ=\angle CAP$ và kết hợp với tứ giác $AIQJ$ nội tiếp nên $\angle AQI=\angle AJI$ suy ra $\angle CAP+\angle AJI=\angle AQI+\angle BAQ=90^0 \Rightarrow AP\perp IJ$ (3). 0,5

Do cách xác định các điểm B', C' nên $AB'=AC'=AQ$ hay tam giác $AB'C'$ cân tại A, kết hợp với IJ là đường trung bình của tam giác $QB'C'$

$\Rightarrow IJ \parallel B'C', AB'=AC'$ (4) 0,5

Từ (3), (4) suy ra AP là đường trung trực của đoạn $B'C'$ suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ nằm trên đường thẳng AP hay nằm trên trung tuyến AL của tam giác ABC. 0,5

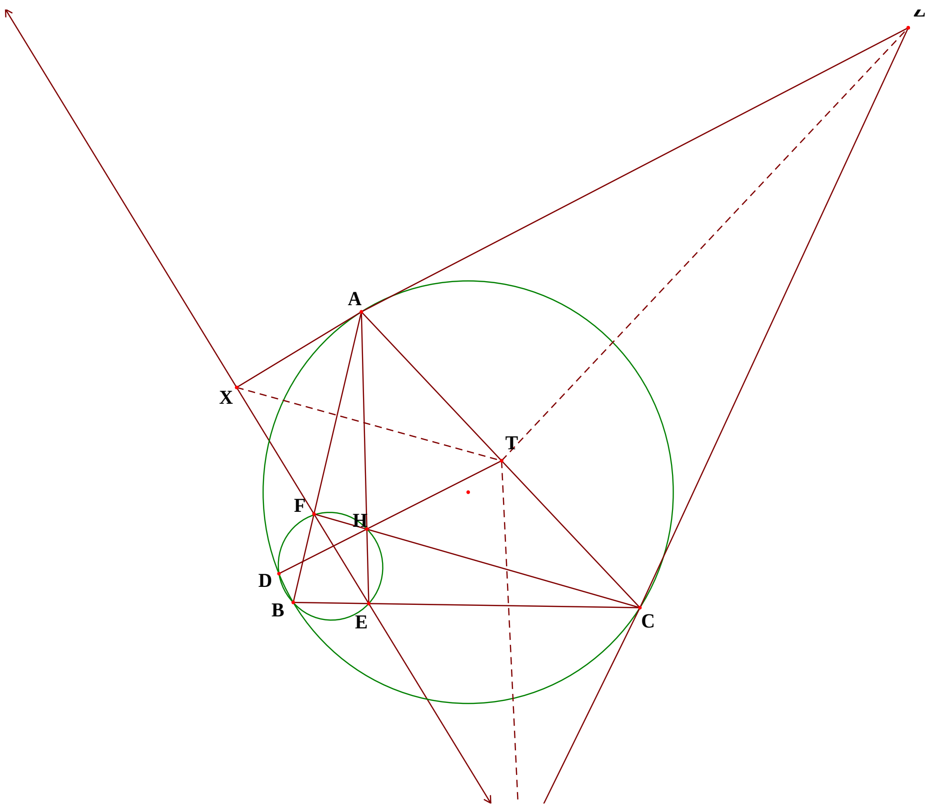
Câu 12. Cho tam giác nhọn ABC không cân tại B,T là trung điểm cạnh AC,E và F tương ứng là chân đường cao hạ từ A,C của tam giác. Z là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A,C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC,X là giao điểm của ZA và EF,Y là giao điểm của ZC và EF.

a) Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EBF cắt nhau tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên DT.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

Hướng dẫn giải



a) ZT là phân giác góc AZC.

Do góc XAB= goc ACB = góc BFE =góc AFX và TA= TF, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF, do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

b) Giả sử AB < BC, khi đó D nằm trên cung nhỏ A**B.** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH. Ta có được BD và LO vuông góc.
Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. OLHT là hình bình hành nên OL song song với HT, do đó D, H, T thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc ADT = góc AXT và TY là đường trung trực của D**C.**
Chứng minh được góc CDT = góc CYT nên CTDY là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc XDY + góc XZY= góc XDT+ góc TDY+ góc XZY

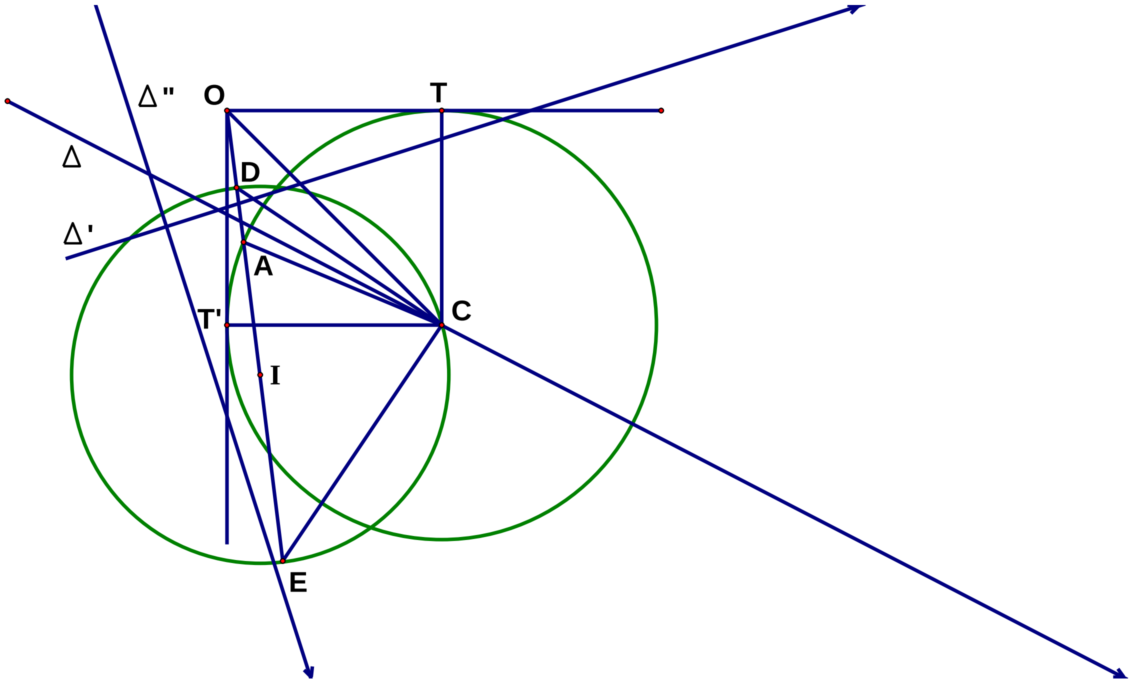
=góc ZAT + góc ZCT + góc XZY = 180^0, do đó DXZY là tứ giác nội tiếp.

Câu 13. (Đề thi đề xuất trường PT vùng cao Việt Bắc – 2015) Từ một điểm O cố định ta vẽ hai tiếp tuyến đến những đường tròn thay đổi tâm C sao cho hai tiếp tuyến đó luôn vuông góc với nhau.

a. Tìm tập hợp tâm của những đường tròn (C) đi qua một điểm A cố định khác với O.

b. Cho đường tròn có tâm C chạy trên một đường thẳng Δ cố định không đi qua O. Tìm tập hợp các tiếp điểm T và T' của nhữn đường tròn đó với các tiếp tuyến vẽ từ O.

Hướng dẫn giải:



a. Tứ giác *OTCT'* có 3 góc vuông và $OT = OT'$ nên nó là một hình vuông. Gọi *R* là bán kính của đường tròn (*C*), ta có $CO = R\sqrt{2}$.

Do đó: $\dfrac{CA}{CO} = \dfrac{R}{R\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OT}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Vậy tâm *C* ở trên đường tròn tâm *I* là tập hợp những điểm có tỉ số khoảng cách tới *A* và *O* bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Đường kính *DE* của đường tròn tâm *I* đi qua các điểm *A* và *O* tạo nên một hàng điểm điều hòa; ta có $(OADE) = -1$

Ngược lại lấy điểm *C'* bất kỳ trên đường tròn tâm *I*, ta có $\frac{C'A}{C'O}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ *O* kẻ hai tiếp tuyến OT_1 và $OT_1^{'}$ ta có $C'T_1=C'A=OT_1^{'}$. Vậy $OT_1C'T_1^{'}$ là hình vuông.

Vậy tập hợp các điểm *C* là đường tròn tâm *I* với *I* là trung điểm của đoạn *DE* trong đó *D, E, O, A* là một hàng điểm điều hòa.

b. $OT=\frac{\sqrt{2}}{2}OC$ và $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OT})=\frac{\pi}{4}$.Vậy *T* là ảnh của *C* trong phép đồng dạng tâm *O* tỉ số $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, góc quay $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Điểm *C* chạy trên đường thẳng Δ nên điểm *T* chạy trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ trong phép đồng dạng trên.

Với điểm *T'* ta dùng phép đồng dạng tâm *O* tỉ số $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, góc quay $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ ta tìm được tập hợp các điểm *T'* là đường thẳng Δ''ảnh của Δ trong phép đồng dạng $\left(O,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$.

LOẠI 3: Tìm quỹ tích:

Câu 5. TRƯỜNG THPT: LÊ QUÝ ĐÔN

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a, hai tia $Bx,\ Cy$ vuông góc với (P) và ở cùng một phía đối với (P). Hai điểm $M,\ N$ lần lượt chuyển động trên Bx và Cy.

1/ Gọi I là trung điểm của $AC,\ J$ là hình chiếu của B trên mặt phẳng (MAC).

Góc giữa MI và (P) bằng α. Tính độ dài đoạn BJ theo a và α

2/ Gọi (Q) là mặt phẳng qua B và vuông góc với MI. Chứng minh rằng (Q) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

3/ Gọi *O* là trung điểm BC, $BM+CN\ =\ 2k$ không đổi, kẻ OH vuông góc với MN tại H. Chứng minh rằng H chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 6.SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG 2

Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm chuyển động trên cạnh AB. Gọi N là điểm chuyển động trên cạnh AC.

a)Giả sử $BM=CN$.Chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ không đổi.Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn giải

a) Nếu tam giác ABC cân thì trung trực MN đi qua điểm A cố địnhXét tam giác ABC không cân tại A

Gọi E là điểm chính giữa cung BACcủa đường tròn ngoại tiếp tam giác

ABC.E là điểm cố định vì $EB = EC; BM = CN$; góc EBM = góc ECN nên $\Delta EBM = \Delta ECN$ Suy ra: $EM = EN$ hay đường trung trực của MN luôn đi qua điểm E cố định

b) Kẻ đường phân giác trong của BAC cắt MN tại F Gọi β là số đo góc BAC Ta có: diện tích ΔAMN=diện tích ΔAMF+diện tích ΔANF Suy ra:

$$\frac{1}{2}AM.AN.\sin\beta = \frac{1}{2}AM.AF.\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}AF.AN.\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{\sin\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\frac{AM.AN}{AM+AN}\right)$$

$\Rightarrow$ AF không đổi hay F là điểm cố định

Vậy MN luôn đi qua một điểm cố đinh.

Câu 7. SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN (VÒNG 1)

a.Cho tam giác ABC vuông cân tại B, cạnh $AB = 2$.Trong mặt phẳng chứa tam giác lấy M thỏa $MA^2 + MB^2 = MC^2$.Tìm quĩ tích điểm M

b.Cho tam giác ABC có hai trung tuyến BM và CN hợp với nhau một góc 60^0, $BM = 6$, $CN = 9$. Tính độ dài trung tuyến còn lại của tam giác.

Hướng dẫn giải

• Chọn hệ trục tọa độ Bxy vuông góc sao cho tia Bx qua A và tia By qua C. Ta có: $B(0;0)$, $A(2;0)$, $C(0;2)$. Giả sử $M(x;y)$.

a.• Chọn hệ trục tọa độ Bxy vuông góc sao cho tia Bx qua A và tia By qua C. Ta có: $B(0;0)$, $A(2;0)$, $C(0;2)$. Giả sử $M(x;y)$.

• $MA^2 + MB^2 = MC^2$

$$\Leftrightarrow (2-x)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = x^2 + (2-y)^2$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$. • Phương trình trên là phương trình của một đường tròn tâm $I(2;-2)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$. • Vậy quỹ tích điểm M là một đường tròn tâm $I(2;-2)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

b. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

• Xét trường hợp: $\widehat{BGC} = 120^0$

Ta có: $BC^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB.GC.\cos 120^0 = 76$

$$MC^2 = GM^2 + GC^2 - 2GM.GC.\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{AC^2}{4} = 28$$

Vậy $AC^2 = 112$ $\quad NB^2 = GB^2 + GN^2 - 2GB.GN.\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{4} = 13$ Vậy $AB^2 = 52$ Vậy độ dài trung tuyến còn lại:

$m_a^2 = \dfrac{AC^2 + AB^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 63 \Rightarrow m_a = 3\sqrt{7}$ Xét trường hợp: $\widehat{BGC} = 60^0$

Ta có: $BC^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB.GC.\cos 60^0 = 28$

$$MC^2 = GM^2 + GC^2 - 2GM.GC.\cos 120^0 \Leftrightarrow \dfrac{AC^2}{4} = 52$$

Vậy $AC^2 = 208$ $\quad NB^2 = GB^2 + GN^2 - 2GB.GN.\cos 120^0 \Leftrightarrow \dfrac{AB^2}{4} = 37$ Vậy $AB^2 = 148$

Vậy độ dài trung tuyến còn lại:

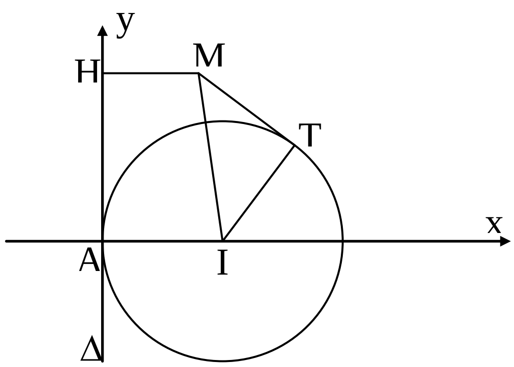
$m_a^2 = \dfrac{AC^2 + AB^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 171 \Rightarrow m_a = \sqrt{171}$

Câu 8.KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12

LONG AN VÒNG 2-NĂM 2013

Trong mặt phẳng cho đường tròn (C) tâm I bán kính R và điểm A cố định thuộc đường tròn (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm A. Tìm quỹ tích điểm M biết rằng khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ bằng độ dài tiếp tuyến MT của đường tròn (C) với T là tiếp điểm.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ.

$O \equiv A(0;0),\ I \in Ox \Rightarrow I(R;0)$

Khi đó ta có $\Delta \equiv Oy$ Gọi M(x; y)

$\Rightarrow MT = d(M,\Delta) = d(M,Oy) = |x|$

$\overrightarrow{IM} = (x-R; y) \Rightarrow IM = \sqrt{(x-R)^2 + y^2}$ Tam giác MTI vuông tại T

$\Rightarrow IM^2 = MT^2 + IT^2$

$\Leftrightarrow (x-R)^2 + y^2 = x^2 + R^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 2Rx$

Thử lại: Gọi $M\left(\dfrac{y^2}{2R}; y\right) \in (P): y^2 = 2Rx$

$IM^2 = \left(\dfrac{y^2}{2R} - R\right)^2 + y^2 = \dfrac{y^4}{4R^2} + R^2 \Rightarrow d^2(M,\Delta) = \dfrac{y^4}{4R^2} = MI^2 - R^2 = MT^2$ Vậy quỹ tích điểm M là một parabol $(P): y^2 = 2Rx$

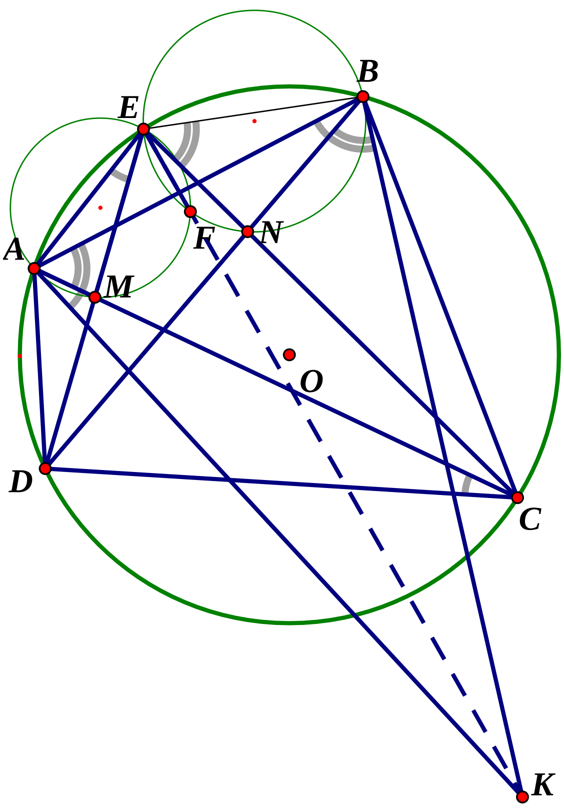
Câu 9.KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12

LONG ANVÒNG 2 NĂM 2015

Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo không vuông góc với nhau, nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm di chuyển trên cung AB không chứa C, D. Gọi M là giao điểm của

ED với AC, N là giao điểm của EC với BD. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và BEN cắt nhau tại giao điểm thứ hai F. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải



Gọi Ax, By lần lượt là tiếp tuyến của $(AEM),(BEN)$ tại A, B. Khi đó:

$\widehat{xAC} = \widehat{AED} = \widehat{ACD} = const$. Do đó Ax cố định Tương tự By cố định.

Gọi $K = Ax \cap By$, suy ra K cố định. Ta có: $\widehat{CAK} = \widehat{AED} = \widehat{ABD}$

$\widehat{BAC} = \widehat{BEC} = \widehat{DBK}$ $\widehat{BAK} = \widehat{BAC} + \widehat{CAK}; \widehat{ABK} = \widehat{ABD} + \widehat{DBK}$ Khi đó tam giác ABK cân tại K nên $P_{K|(AEM)} = KA^2 = KB^2 = P_{K|(BEN)}$ hay K thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (AEM) và (BEN).

Vậy EF đi qua điểm K cố định.

Câu 10. LONG ANVÒNG 2 - NĂM 2012

Cho đường tròn $(O;R)$ có tâm là O và đường kính là AB, E là điểm cố định nằm giữa A và O. Gọi D là đường thẳng qua E và cắt (O) tại C và D.

a) Tìm điểm M trên (O) sao cho $MC^2 + MD^2 = AB^2$.

b) Gọi F đối xứng E qua O và giả sử D thay đổi nhưng luôn qua E. Chứng minh: $CD^2 + DF^2 + FC^2$ luôn nhận giá trị không đổi.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $MC^2 + MD^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = 4R^2$

$\Leftrightarrow 4R^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 4R^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OI} = 0$ (I là trung điểm CD)

Th1: O ≡ I. Khi đó mọi M nằm trên $(O;R)$ là điểm M cần tìm. Th2: O ≠ I.Khi đó $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OI} = 0 \Leftrightarrow MO \perp OI$ Vậy điểm M cần tìm là giao điểm của đường thẳng d với (O,R)

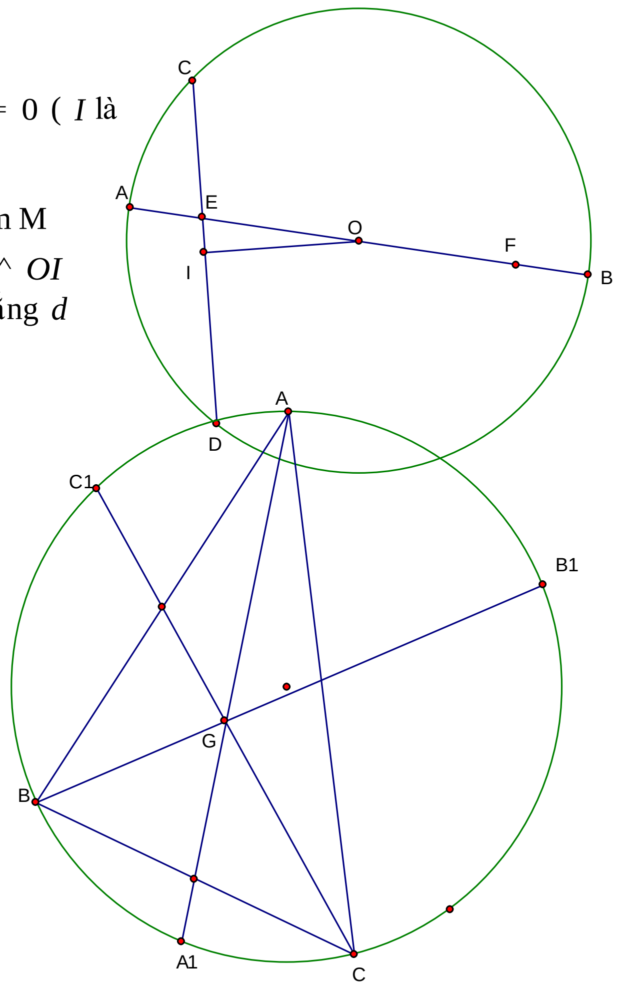
với d là đường thẳng qua O và vuông góc OI. b) $CD^2 + DF^2 + FC^2$ $= CE^2 + DE^2 + 2EC.ED + DF^2 + FC^2$ Xét ΔCEF ta có:

$CE^2 + CF^2 = 2R^2 + \dfrac{EF^2}{2}$ Tương tự xét

$\Delta DEF: DE^2 + DF^2 = 2R^2 + \dfrac{EF^2}{2}$ Mặt

khác: $EC.ED = R^2 - EO^2$ Thay thế các đẳng thức vào ta được : $CD^2 + DF^2 + FC^2$

$= 6R^2 + \dfrac{EF^2}{2}$ không đổi



Loại 4: Bài toán dựng hình.

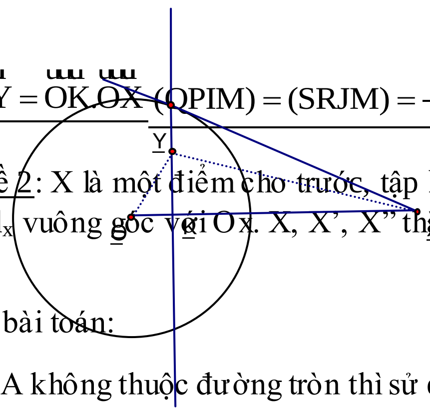
Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng A-Vòng 2)- năm học 1998-1999]

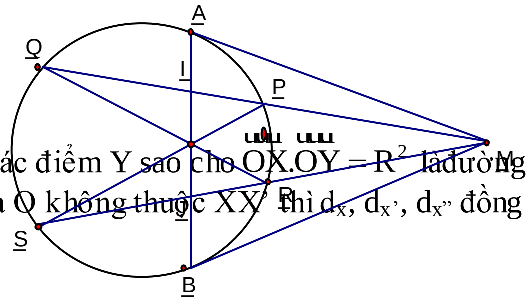
Trong mặt phẳng cho một đường tròn (C), giả sử tâm của nó chưa được đánh dấu. A là một điểm trong mặt phẳng. Chỉ dùng thước thẳng hãy dựng qua A tiếp tuyến của đường tròn (C). (Thước thẳng là dụng cụ để vẽ đường thẳng).

+ Bổ đề 1:

Từ một điểm M ngoài đường tròn (C) tâm O bán kính R vẽ hai tiếp tuyến MA, M**B.** Hai cát tuyến đi qua M cắt đường tròn PQ, RS thì giao điểm hai đường thẳng SP và QR thuộc đường thẳng AB

$\overrightarrow{OX}.\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OX}$ $(QPIM) = (SRJM) = -1$





+ Bổ đề 2: X là một điểm cho trước, tập hợp tất cả các điểm Y sao cho $\overrightarrow{OX}.\overrightarrow{OY} = R^2$ là đường thẳng d_x vuông góc với Ox. X, X', X'' thẳng hàng và O không thuộc XX' thì d_x, $d_{x'}$, $d_{x''}$ đồng quy.

Trở lại bài toán:

a/ Nếu A không thuộc đường tròn thì sử dụng bổ đề 1.

b/ Nếu A thuộc đường tròn. Chọn B, C sao cho A,B,C thẳng hàng và B,C ở ngoài đường tròn. Dùng bổ đề 1 và 2, dựng tiếp tuyến BE, BF và CG, CH, EF và GH cắt nhau tại T thì AT là tiếp tuyến cần dựng.

Loại 5: Hình học Oxy về điểm.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 1)- năm học 2003-2004]

Tìm hai điểm A, B lần lượt ở trên elip (E) và đường tròn (C):

$(E): \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$, $(C): (x-11)^2 + (y-13)^2 = 34$.

sao cho độ dài AB là nhỏ nhất.

Lời giải

(C) là đường tròn tâm I(11;13) bán kính $R = \sqrt{34}$.

Nhận xét rằng $A \in (E)$, $B \in (C)$ nên đoạn AB ngắn nhất thì ba điểm I, A, B thẳng hàng.

$A(x_0;y_0) \in (E): \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$ nên $\begin{cases} x_0 = 5\sqrt{2}\cos t \\ y_0 = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$

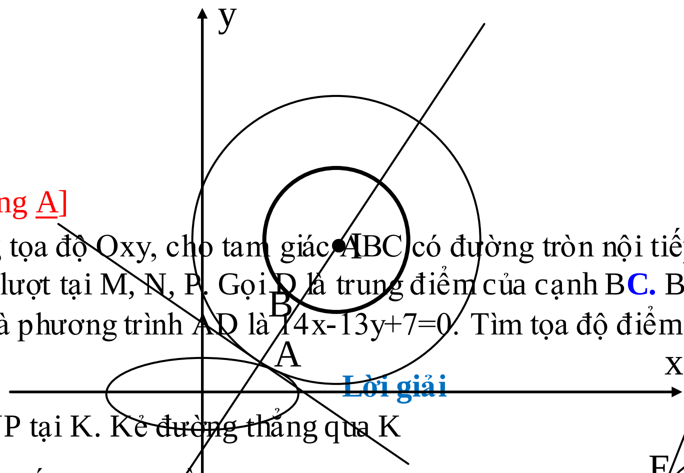
$IA^2 = (x_0 - 11)^2 + (y_0 - 13)^2 = (5\sqrt{2}\cos t - 11)^2 + (3\sqrt{2}\sin t - 13)^2$.

$IA^2 = 290 + 50\cos^2 t + 18\sin^2 t - 110\sqrt{2}\cos t - 78\sqrt{2}\sin t$.

$$IA^2 = 136 + 110\left(\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 78\left(\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \ge 136.$$

Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi: $t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A(5;3)$.

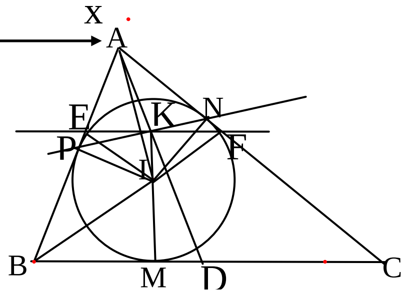
Vậy độ dài AB nhỏ nhất là: $d = 2\sqrt{34} - \sqrt{34} = \sqrt{34}$ khi A(5;3) và từ đó suy ra được B(8;8).



Câu 2. [Đề HSG 11-Bảng A]

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi D là trung điểm của cạnh B**C.** Biết M(-1;1), phương trình NP là x+y-4=0 và phương trình AD là 14x-13y+7=0. Tìm tọa độ điểm **A.**

Lời giải



Kéo dài IM cắt NP tại K. Kẻ đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F.

Ta có: các tứ giác KEPI và KNFI nội tiếp nên

$\widehat{KEI} = \widehat{KPI}; \widehat{KNI} = \widehat{KFI}$

Mà $\widehat{KPI} = \widehat{KNI}$ suy ra $\widehat{KEI} = \widehat{KFI}$

Do đó, K là trung điểm EF

Suy ra A, K, D thẳng hàng

hay K là giao điểm của NP và AD

Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 14x-13y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow K(\frac{5}{3};\frac{7}{3}).$$

Phương trình IM đi qua M và K là $x-2y+3=0.$

$$I(2a-3;a) \Rightarrow IA: x-y-a+3=0 \Rightarrow A(32-13a;35-14a).$$

$$IA=|35-15a|\sqrt{2}; d(I,NP)=\frac{|3a-7|}{\sqrt{2}}; IM=\sqrt{5}|a-1|$$

Ta có: $d(I,NP).IA=IP^2=IM^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \Rightarrow I(1;2) \\ a=3 \Rightarrow I(3;3). \end{array}\right.$

Vì I và M cùng phía với NP nên ta có I(1;2). Khi đó A(6;7)

Câu 3. [Trường THPT Đô Lương 3- Nghệ An- năm học 2012-2013]

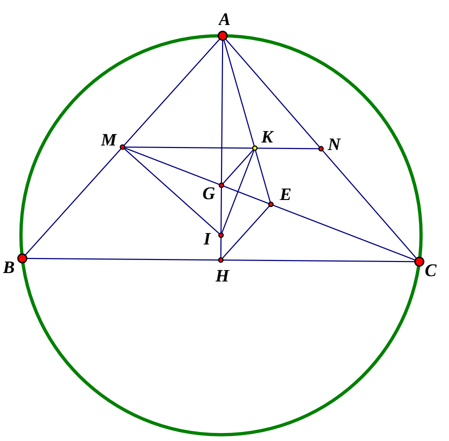
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC và đường thẳng (d): x-y+1=0. Gọi D(4;2), E(1;1), N(3;0) lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, chân đường cao kẻ từ B và trung điểm cạnh A**B.** Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng (d) và điểm M có hoành độ lớn hơn 3.

LOẠI 5:Hình học Oxy về điểm

Câu 4. **[CHỌN HSG NĂM HỌC 2015-2016-VĨNH PHÚC]**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của AB. Đường thẳng $CM: y-3=0$ và $K\left(-3;\dfrac{7}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ACM. Đường thẳng AB đi qua điểm $D(1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết điểm M có hoành độ dương và tâmđường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thuộc đường thẳng $2x-y+4=0$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trước hết ta chứng minh $MC \perp IK$. Thật vậy, gọi H, N lần lượt là trung điểm BC, AC; $G = AH \cap CM$. Suy ra G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt khác K là trọng tâm tam giác ACM nên $KG \parallel HE$. Suy ra $KG \parallel AB$. Mà $IM \perp AB$ nên $KG \perp IM$.

Rõ ràng $AH \perp MK$ nên G là trực tâm tam giác MIK. Suy ra $MC \perp IK$.

$$DM \perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4\ (l) \\ m = 2\ (tm) \end{array}\right.$$

Đường thẳng KI qua K và vuông góc với CM nên có phương trình: $x + 3 = 0$.

Tọa độ I thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(-3; -2)$.

Gọi $M(m;3) \in MC, m > 0$. Ta có $\overrightarrow{DM} = (m-1; -1)$; $\overrightarrow{IM} = (m+3; 5)$.

Suy ra $M(2;3)$, $\overrightarrow{DM} = (1; -1)$. Từ đó suy ra $AB: x + y - 5 = 0$. Gọi $C(c;3) \in CM$.

Do $K\left(-3; \dfrac{7}{3}\right)$ là trọng tâm ACM nên $A(-11 - c; 1)$. Mà $A \in AB$ suy ra

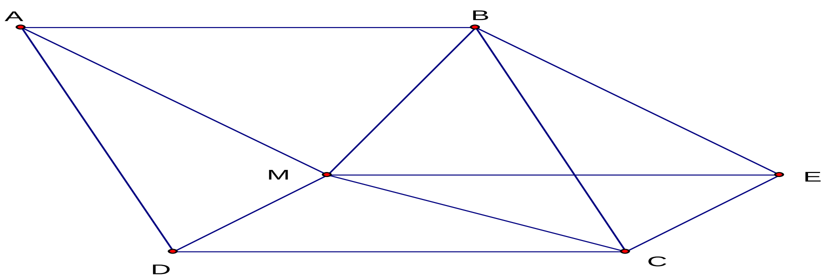
$-11 - c + 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow c = -15$.

Từ đó $A(4;1), B(0;5), C(-15;3)$. Thử lại ta thấy $AB \neq AC$. Suy ra không tồn tại A, B, C.

LOẠI 5: Hình học Oxy về điểm.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-5;2)$. $M(-1;-2)$ là điểm nằm bên trong hình bình hành sao cho $\widehat{MDC} = \widehat{MBC}$ và $MB \perp MC$. Tìm tọa độ điểm D biết $\tan \widehat{DAM} = \dfrac{1}{2}$. **(Cụm Quỳnh Lưu 2016-2017)**

Hướng dẫn giải:



Gọi E là điểm thứ tư của hình bình hành $MABE$, dễ thấy $MECD$ cũng là hình bình hành nên

$\widehat{MEC} = \widehat{MDC}$.

Mà $\widehat{MDC} = \widehat{MBC}$ suy ra $\widehat{MEC} = \widehat{MBC}$ hay tứ giác $BECM$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BMC} + \widehat{BEC} = 180^o \Rightarrow \widehat{BEC} = 180^o - 90^o = 90^o$

Ta có $\Delta AMD = \Delta BEC\ (c.c.c) \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BEC} = 90^o$ hay ΔAMD vuông tại M

Vì $\tan \widehat{DAM} = \dfrac{DM}{MA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DM = \dfrac{1}{2}MA$.

Ta có $MA = 4\sqrt{2} \Rightarrow MD = 2\sqrt{2} \Rightarrow AD^2 = MA^2 + MD^2 = 40$.

Giả sử $D(x;y)$ ta có $\begin{cases} AD^2 = 40 \\ MD^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+5)^2 + (y-2)^2 = 40 \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = 8 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên được hai nghiệm: $(-3;-4), (1;0)$.

Vậy có hai điểm D thỏa mãn đề bài là: $D(-3;-4), D(1;0)$.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $B(4;-3)$ và tâm đường tròn nội tiếp là J. Gọi P, N, M lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (J) với các cạnh AB, AC, BC. Điểm $H(-2;3)$ là giao điểm của NP với BJ. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ΔABC biết phương trình $AC: 2x - y + 9 = 0$. **(Cụm Quỳnh Lưu – Hoàng Mai 2016-2017)**

Hướng dẫn giải:

Ta có: DBPH = DBMH

Þ $\widehat{APN} = \widehat{HMC}$ ü

$\widehat{APN} = \widehat{ANP} = \widehat{HNC}$ ý Þ $\widehat{HMC} = \widehat{HNC}$

$\Rightarrow$ tứ giác $MNHC$ nội tiếp, mà tứ giác $MJNC$ nội tiếp đường tròn đường kính JC nên H thuộc đường tròn đường kính $JC \Rightarrow BH \perp HC$

+) Viết được phương trình $CH \Rightarrow C = AC \cap CH \Rightarrow C(-4;1)$

+) Lấy C' đối xứng C qua $BH \Rightarrow C' \in AB \Rightarrow C'(0;5)$

+) Viết được phương trình $AB \Rightarrow A = AC \cap AB \Rightarrow A(-1;7)$

Câu 7. **[THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH NGH Ệ AN- 2015-2016]**

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho tam giác ΔABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi D D là trung điểm của cạnh BC. Biết $M(-1;1)$, phương trình NP là $x + y - 4 = 0$ và phương trình AD là $14x - 13y + 7 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 8. (THPT Diễn Châu 2 – Nghệ An- thi học sinh giỏi trường 2016-2017 toán 10).

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y + 2 = 0$; $d_2: 3x + 2y - 10 = 0$ và điểm $M(1;2)$.

a. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua M cắt d_1 tại A và cắt d_2 tại B sao cho: $MA = MB$.

b. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và tạo với d_1, d_2 một tam giác cân đỉnh $I = d_1 \cap d_2$.

Câu 9. (THPT Diễn Châu 2 – Nghệ An- thi học sinh giỏi trường 2016-2017 toán 10).

Gọi B(b; 2b – 3), $b\in Z$, $\overrightarrow{MB}=\left(b+3;2b-5\right)$, $\overrightarrow{NB}=\left(b-4;2b-6\right)$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{NB}=0\Leftrightarrow (b+3)(b-4)+(2b-5)(2b-6)=0$

$$\Leftrightarrow 5b^2-23b+18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\ b=\dfrac{18}{5}\end{array}\right.$$

Do b nguyên nên b = 1

Vậy B(1; - 1)PT AB:3x + 4y + 1 = 0, PT BC:4x – 3y – 7 = 0

Cho đường tròn $\left(C\right): x^2+y^2=25$ và đường thẳng $d: 2x-y=0$. Đường thẳng d cắt đường tròn $\left(C\right)$ tại hai điểm B, C.

a. Tìm tọa độ B, C và tính độ dài BC.

b. Tìm điểm A thuộc đường tròn $\left(C\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Câu 10. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2005-2006 lớp 12)

Trong mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$ cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $I\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$. Phương trình đường thẳng AB là $x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

Câu 11. (Đề thi chọn học sinh giỏi 11)

Cho tam giác ABC có $A\left(0;\ 0\right)$, $B\left(2;\ 4\right)$, $C\left(6;\ 0\right)$ và các điểm M trên cạnh AB, N trên cạnh BC, P và Q trên cạnh AC sao cho $MNPQ$ là hình vuông. Tìm tọa độ các điểm M, N, P, Q.

Câu 12. (Đề thi chọn học sinh giỏi 11)

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 22. Phương trình BD: $2x-y-3=0$, điểm $M\left(-3;2\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(4;3\right)$ thuộc đường thẳng BC. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật biết điểm B có hoành độ là một số nguyên.

Lời giải

$S_{ABCD} = AD.DC = \frac{|11d-11|}{5}.\frac{|2-2d|}{5} = \frac{22(d-1)^2}{25}$

$S_{ABCD} = 22 \Leftrightarrow \frac{22(d-1)^2}{25} = 22$

$\Leftrightarrow (d-1)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=6 \\ d=-4 \end{array}\right.$

Loại 6: Hình học Oxy về đường thẳng.

Câu 1. [Đề chọn HSG lớp 11]

Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=R^2$ và điểm M (a,b) nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 đến đường tròn (T_1, T_2 là các tiếp điểm). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

Câu 2. **[Đề ôn thi đội tuyển festival. Đề số 3]**

Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết $B(2;-1)$, đường cao và phân giác trong qua đỉnh A, C lần lượt có phương trình là $(d_1): 3x-4y+27=0$ và $(d_2) x+2y-5=0$.

LOẠI 6:Hình học Oxy về đường thẳng.

Câu 3. **[SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 11 NĂM HỌC 2015 – 2016]**

Cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến BM có phương trình $2x+y+1=0$ và phân giác trong CD có phương trình $x+y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C(t;1-t)$

Trung điểm M của AC là $M\left(\frac{t+1}{2};\frac{3-t}{2}\right)$

Ta có $M \in BM \Leftrightarrow 2\left(\frac{t+1}{2}\right)+\frac{3-t}{2}+1=0 \Leftrightarrow t=-7$. Vậy $C(-7;8)$.

Từ $A(1;2)$ kẻ AK vuông góc CD tại I $(K \in BC)$.

Phương trình đường thẳng AK: $x-y+1=0$.

Tọa độ điểm I: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow I(0;1)$

Ta có tam giác ACK cân tại C nên I là trung điểm AK $\Rightarrow K(-1;0)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C

LOẠI 7: Hình học Oxy về đường tròn.

Câu 4. **[SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 11 NĂM HỌC 2014 – 2015]**

Trong mặt phẳng, với hệ toạ độ Oxy cho đường tròn (C_1): $x^2+y^2=13$, đường tròn (C_2): $(x-6)^2+y^2=25$. Gọi giao điểm có tung độ dương của (C_1) và (C_2) là A, viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Hướng dẫn giải

(C_1) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1=\sqrt{13}$

(C_2) có tâm $I(6;0)$, bán kính $R_2=5$

Giao điểm của (C_1) và (C_2) là $A(2;3)$ và $B(2;-3)$ (Vì A có tung độ dương nên A(2;3).

Đường thẳng d qua A có phương trình: $a(x-2)+b(y-3)=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$ hay $ax+by-2a-3b=0$.

Gọi $d_1=d(O,d); d_2=d(I,d)$

Yêu cầu bài toán trở thành: $R_2^2-d_2^2=R_1^2-d_1^2\Rightarrow d_2^2-d_1^2=12$

$$\frac{(4a-3b)^2}{a^2+b^2}-\frac{(2a+3b)^2}{a^2+b^2}=12\Rightarrow b^2+3ab=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=-3a\end{array}\right.$$

Với $b=0$, chọn $a=1$, suy ra phương trình d là: $x-2=0$

Với $b=-3a$, chọn $a=1\Rightarrow b=-3$, suy ra phương trình d là: $x-3y+7=0$.

Bài 1: (ĐỀ THI HSG – THPT Dương Xá – NH: 2008 – 2009)

Cho họ đường thẳng $(d_m): y=\dfrac{m+1}{m^2+m+1}x+\dfrac{m^2}{m^2+m+1}$. Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ sao cho không có bất kỳ đường thẳng nào thuộc họ (d_m) đi qua.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Gọi (x_0,y_0) là điểm cần tìm, khi đó phương trình sau: $y_0=\dfrac{m+1}{m^2+m+1}x_0+\dfrac{m^2}{m^2+m+1}$

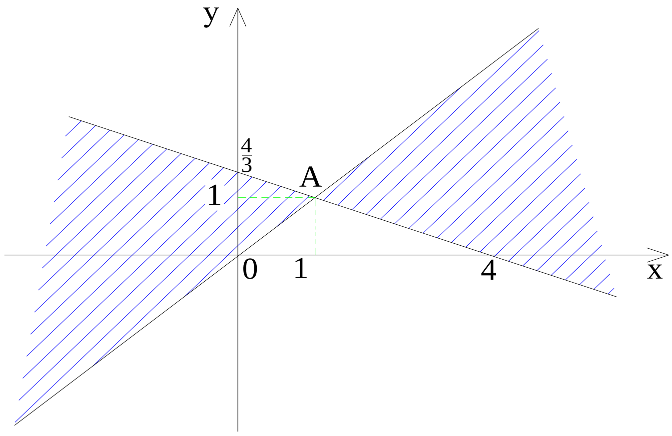
$\Leftrightarrow m^2(y_0-1)+m(y_0-x_0)+y_0-x_0=0\ (1)$ vô nghiệm

TH1: $y_0=1$. $(1)\Leftrightarrow m(1-x_0)+1-x_0=0$ luôn có nghiệm m

TH2: $y_0\neq 1$, khi đó (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=(y_0-x_0)(-x_0-3y_0+4)<0$

$$\Leftrightarrow \text{(I)}\begin{cases}y_0-x_0<0\\ -x_0-3y_0+4>0\end{cases}\text{hoặc (II)}\begin{cases}y_0-x_0>0\\ -x_0-3y_0+4<0\end{cases}$$

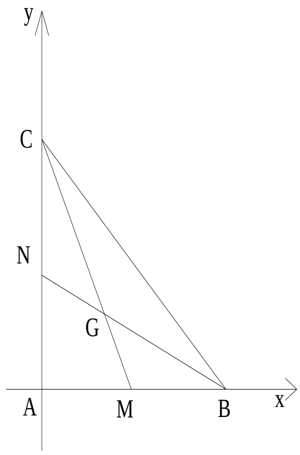
Từ đó suy ra các điểm thỏa mãn là phần không bị gạch trong hình nhưng không bao gồm cạnh và không bao gồm đỉnh $A(1;1)$



Bài 2: (ĐỀ THI HSG – THPT Dương Xá – NH: 2008 – 2009) Cho ΔABC vuông tại A có hai đường trung tuyến BM, CN. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BM, CN. Chứng minh rằng khi đó $\cos\alpha \geq \frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



$A(0;0), B(b;0), C(0;c), M\left(\frac{b}{2};0\right), N\left(0;\frac{c}{2}\right), G\left(\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$

$\overrightarrow{GM}\left(\frac{b}{6};-\frac{c}{3}\right)$; $\overrightarrow{GB}\left(\frac{2b}{3};-\frac{c}{3}\right)$; $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GB} = \frac{2b^2}{18} + \frac{c^2}{9} = \frac{b^2+c^2}{9}$

$\left|\overrightarrow{GM}\right| = \frac{\sqrt{b^2+4c^2}}{6}$; $\left|\overrightarrow{GB}\right| = \frac{\sqrt{4b^2+c^2}}{3}$

$\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GB} = \left|\overrightarrow{GM}\right|\left|\overrightarrow{GB}\right|\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2(b^2+c^2)}{\sqrt{b^2+4c^2}\sqrt{4b^2+c^2}}$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có $\sqrt{(b^2+4c^2)(4b^2+c^2)} \leq \frac{5(b^2+c^2)}{2}$

Suy ra $\cos\alpha \geq \frac{4}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b^4+4c^2 = 4b^2+c^2 \Leftrightarrow b=c$

Bài 3: (Kỳ thi HSG cấp tỉnh Trà Vinh năm học 2014 – 2015) Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $E(2;2)$. Viết phương trình đường thẳng d qua E và cắt hai trục Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho:

a. ΔOAB có chu vi nhỏ nhất.

b. Khoảng cách từ O đến d lớn nhất.

Bài 4: (Đề thi chọn HSG tỉnh Vĩnh Long – NH : 2015 – 2016) Cho ΔABC có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến BM có phương trình $2x+y+1=0$ và phân giác trong CD có phương trình $x+y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $C(t;1-t)$. Trung điểm M của AC là $M\left(\frac{t+1}{2};\frac{3-t}{2}\right)$

Ta có $M\in BM \Leftrightarrow 2\left(\frac{t+1}{2}\right)+\frac{3-t}{2}+1=0 \Leftrightarrow t=-7$. Vậy $C(-7;8)$.

Từ $A(1;2)$ kẻ AK vuông góc CD tại I $(K\in BC)$.

Phương trình đường thẳng AK: $x-y+1=0$.

Tọa độ điểm I: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow I(0;1)$

Ta có tam giác ACK cân tại C nên I là trung điểm $AK \Rightarrow K(-1;0)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C và K là: $4x+3y+4=0$

Bài 5: (Đề thi đề nghị trường THPT chuyên Lê Quý Đôn TP. Đà Nẵng – hội thi HSG duyên hải Bắc bộ lần thứ VII) Cho n-giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n\ge 3)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d tùy ý. Qua các điểm A_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ vẽ các đường thẳng song song với d cắt đường tròn (O) tại các điểm B_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Chứng minh tổng $S_n=A_1B_1^2+A_2B_2^2+...+A_nB_n^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục Oxy, sao cho gốc tọa độ là tâm đa giác, trục Ox vuông góc với d. Không mất tính tổng quát, giả sử có thể giả sử đa giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị ($R=1$).

Đặt $\left(\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{OA_1}\right)=\alpha$ thì $A_k\left(\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right);\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right)$

và $B_k\left(\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right);-\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right), \forall k=1,2,...,n$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}A_kB_k^2=4\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)=2n+\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(2\alpha + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(2\alpha + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(2\alpha + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) - \cos\left(2\alpha + \frac{(2k-3)\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left(\cos\left(2\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right) - \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{n}\right)\right) = 0$$

Vậy $S_n = 2n + T_n = 2n.$

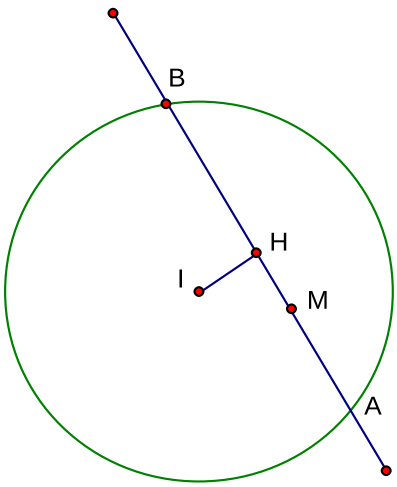
Câu 5. **[ĐỀ THI HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM 2013-2014]** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;3)$. Biết $M(4;6)$ thuộc cạnh BC và $N\left(\frac{17}{2};\frac{9}{2}\right)$ thuộc đường thẳng DC. Tính diện tích hình vuông $ABCD$.

LOẠI 6: Hình học Oxy về đường thẳng.

Câu 6. Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ và điểm $M(0;\frac{1}{\sqrt{3}})$. Chứng minh rằng M nằm trong đường tròn, hãy viết phương trình đường thẳng qua M cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 3MA$.

(Quảng Xương II)

Hướng dẫn giải:



Tâm $I(1;0)$ bán kính $R = 2$

Ta có $IM^2 = \frac{4}{3} < R^2 = 4$ suy ra M nằm trong đường tròn

Gọi H là trung điểm AB suy ra $2HM = MA$, ta tính được $IH = 1$

Suy ra đường thẳng cần tìm qua M và khoảng cách từ I tới đt cần tìm bằng 1.Ph. trình đt d có dạng: $a(x-0) + b(y - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$

Ta có $d(\mathrm{I},\mathrm{d})=1 \Leftrightarrow \dfrac{\left|a(1-0)+\mathrm{b}(0-\dfrac{1}{\sqrt{3}})\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\sqrt{3}a \end{array}\right.$

Tìm được 2 đt d là: $x=0$ và $x-\sqrt{3}y-1=0$

Câu 7. a) Viết PT đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(\mathrm{d}_1): 2\mathrm{x}-\mathrm{y}+1=0$ và $(\mathrm{d}_2): \mathrm{x}-2\mathrm{y}-3=0$ đồng thời chắn trên hai trục tọa độ những đoạn bằng nhau.

b) Cho $\Delta\mathrm{ABC}$, biết $\mathrm{A}(8;9)$, $\mathrm{B}(1;2)$, $\mathrm{C}(2;0)$. Viết phương trình đường phân giác trong của đỉnh A **(Trường THPT Kim Bôi)**

Loại 7: Hình học Oxy về đường tròn.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng B- Vòng 2)- năm học 1999-2000]

Cho parabol (P): $y^2=2x$ và đường tròn (C):$x^2+y^2-8x+12=0$.

Chứng minh rằng có vô số tam giác với ba đỉnh trên (P) mà các cạnh tiếp xúc với (C).

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm I(4,0), bán kính R = 2.

Lấy A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) tùy ý ($y_1\neq y_2$) thuộc (P), phương trình đường thẳng AB là:

AB: $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$

Do A, B $\in$ (P) nên $y_1^2=2x_1$, $y_2^2=2x_2$ do đó: AB: $2x-(y_1+y_2)y+y_1.y_2=0$.

Tìm điều kiện tiếp xúc:

AB tiếp xúc (C)$\Leftrightarrow \dfrac{|8+y_1y_2|}{\sqrt{4+(y_1+y_2)^2}}=2 \Leftrightarrow (8+y_1y_2)^2=4\left[4+(y_1+y_2)^2\right]$ (1).

Tượng tự, nếu C(x_3; y_3) thuộc (P) và $y_1\neq y_3$, ta có:

AC tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow (8+y_1y_3)^2=4\left[4+(y_1+y_3)^2\right]$ (2).

Do đó nếu AB và AC tiếp xúc (C) ta được (1) và (2). Điều này chứng tỏ y_1 và y_3 là hai nghiệm của phương trình ẩn y:

$(8+y_1y)^2=4\left[4+(y_1+y)^2\right]$ hay $(y_1^2-4)y^2+8y_1y+48-4y_1^2=0$ (3)

Với $y_1\neq\pm 2$, (3) là phương trình bậc hai có Δ' > 0 nên (3) luôn có hai nghiệm y_2 và y_3:

$y_2+y_3=\dfrac{8y_1}{4-y_1^2}$ và $y_2.y_3=\dfrac{48-4y_1^2}{y_1^2-4}$

Do đó, thế vào ta được: $(8+y_2y_3)^2=4\left[4+(y_2+y_3)^2\right]$ .Vậy theo điều kiện tiếp xúc ta được BC tiếp xúc (C). Và từ các kết quả trên chứng tỏ rằng có vô số tam giác thỏa đề bài.

Câu 2. [Trường THPT Quế Võ 1- năm học 2008-2009- Bắc Ninh]

Lập phương trình đường tròn (C) qua điểm A(-1; -2) và tiếp xúc với đường thẳng d: $7x-y-5=0$ tại điểm M(1; 2).

Lời giải

Viết được pt đường thẳng Δ đi qua tâm I của đường tròn (C) và vuông góc với đường thẳng d là $\begin{cases} x=1+7t \\ y=2-t \end{cases}$ từ đó suy ra I(1+7t;2-t)

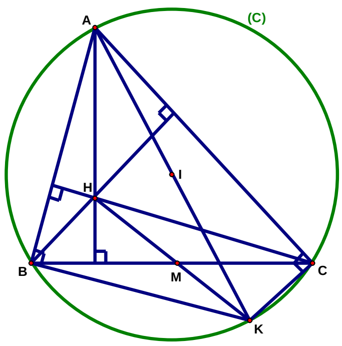
+) (C) tiếp xúc với d khi và chỉ khi IM=R $\Leftrightarrow IM^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=50t^2$

+) (C) có dạng $(x-1-7t)^2+(y-2+t)^2=50t^2$

+) A $\in$ (C) $\Rightarrow$ t=-1. Vậy (C): $(x+6)^2+(y-3)^2=50$.

Câu 3. (Đề thi chọn HSG vòng tỉnh Vĩnh Long – NH: 2016 – 2017) Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có đỉnh $A(2;-2)$, trọng tâm $G(0;1)$ và trực tâm $H\left(\frac{1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ của B,C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm cạnh BC, ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}.\overrightarrow{AG} \Rightarrow M\left(-1;\frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(\frac{-3}{2};3\right)$ hay $\vec{n}=(1;-2)$ là pháp vectơ của đường thẳng BC.

Phương trình $BC: x-2y+6=0 \Leftrightarrow x=2y-6$

Vì B và C đối xứng với nhau qua M nên gọi $B(2m-6;\ m)$ thì có $C(4-2m;\ 5-m)$.

$\overrightarrow{AB}=(2m-8;\ m+2)$; $\overrightarrow{HC}=\left(\frac{7}{2}-2m;\ 4-m\right)$. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=0$

$\Rightarrow (m-4)(5-5m)=0 \Leftrightarrow m=4;\ m=1$. Vậy có $B(2;4),\ C(-4;1)$ hoặc $B(-4;1),\ C(2;4)$

Kẻ đường kính AK của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC

Tứ giác $BHCK$ có $BH//KC$ và $BK//HC$ nên $BHCK$ là hình bình hành. Suy ra: HK và BC cắt nhau tại M là trung điểm của BC và M cũng là trung điểm của HK.

Ta có $H\left(\frac{1}{2};1\right), M\left(-1;\frac{5}{2}\right) \Rightarrow K\left(-\frac{5}{2};4\right)$. Bán kính $R=\frac{1}{2}AK=\frac{15}{4}$

LOẠI 7: Hình học Oxy về đường tròn.

Câu 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của của đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ qua phép đối xứng trục $Đ_\Delta$, với $\Delta: x+y-2=0$ (**Trường THPT Quế Võ**)

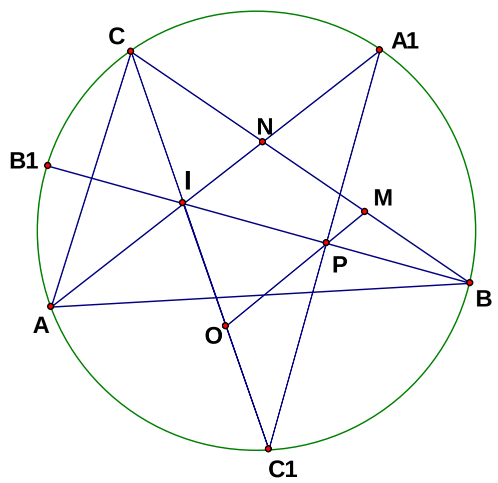
LOẠI 8: Các bài toán khác

Câu 5. Cho ΔABC. Phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1. Đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng CC_1 tại điểm I; đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng BC tại điểm N; đường thẳng BB_1 cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm P. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IPC_1. Đường thẳng OP cắt đường thẳng BC tại điểm M. Biết rằng $BM = MN$ và $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$. Tính các góc của tam giác ABC. **(chuyên Vĩnh Phúc)**

HDG:* Dễ thấy $\widehat{IPC_1} = 90^0$, do đó O là trung điểm của IC_1.

* $\widehat{IOP} = 2\widehat{IC_1P} = \widehat{CAB} = \widehat{CC_1B} \Rightarrow BC_1 // OP$

* Do BM=MN; $OI = OC_1 \Rightarrow IN // C_1B$ Do đó $\widehat{CIA_1} = \widehat{BAC}$, mà $\widehat{CIA_1} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)$



Vậy $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACB}$

Cùng với $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$ ta được $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 72^0; \widehat{ABC} = 36^0$

Loại 8: Các bài toán khác.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng A-Vòng 1)- năm học 1999-2000]

Tập hợp M gồm hữu hạn điểm trên mặt phẳng sao cho với mọi điểm X thuộc M tồn tại đúng 4 điểm thuộc M có khoảng cách đến X bằng 1. Hỏi tập hợp Mcó thể chứa ít nhất là bao nhiêu phần tử?.

Lời giải

Rõ ràng có ít nhất hai điểm P,Q thuộc M sao cho PQ $\neq$ 1.

Ký hiệu M_P={X∈M/PX=1}. Từ giả thiết $|M_P|$=4 ta có: $|M_p \cap M_q| \leq 2$.

Nếu tồn tại P, Q sao cho $|M_p \cap M_q| \leq 1$ thì M chứa ít nhất 9 điểm.

Trường hợp với mọi P,Q sao cho PQ $\neq$ 1 và $|M_p \cap M_q| = 2$.

Khi đó $M_p \cap M_q$={R,S}, lúc đó M_P={R,S,T,U} và M_q={R,S,V,W} và giả sử

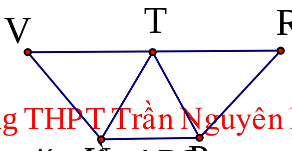
M = {P,Q,R,S,T,U,V,W} ta có TQ $\neq$ 1, UQ $\neq$ 1, VP $\neq$ 1, WP $\neq$ 1.

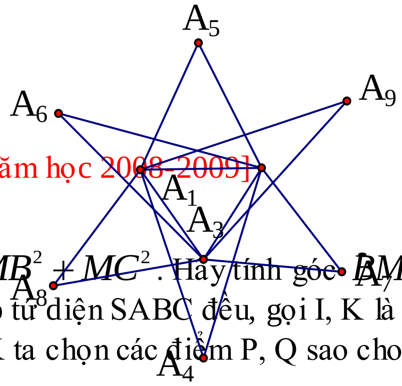
Nếu TR,TS,UR,US khác 1: suy ra $M_t \cap Mq = M_u \cap M_q$={V,W} suy ra T hay U trùng với Q, vô lý.

Nếu TR,TS,UR,US có một số bằng 1: Không giảm đi tính tổng quát, giả sử TV = 1 lúc đó TS ≠ 1 và TV=1 hay TW=1. Giả sử TV=1 lúc đó TW≠1 suy ra TU = 1, và M_t = {P,R,U,V} và M_u={P,T,V,W} lúc đó UTV, RPT,UTV là các tam giác đều cạnh 1, ta có hình 1. Điều này mâu thuẫn vì VR>2.

Vậy M chứa ít nhất là 9 điểm. Dấu bằng xảy ra với hình2.

Vậy M có thể chứa ít nhất là 9 điểm.





Câu 2. [Trường THPT Trần Nguyên Hãn- Hải Phòng- năm học 2008-2009]

Cho tam giác đều ABC.

M là điểm nằm trong tam giác sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$. Hãy tính góc BMC.

Một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho tứ diện SABC đều, gọi I, K là trung điểm của các cạnh AC và S**B.** Trên đường thẳng AS và CK ta chọn các điểm P, Q sao cho PQ // BI. Tính độ dài PQ biết cạnh của tứ diện có độ dài bằng 1.

Câu 3. [Trường THPT Trần Nguyên Hãn- Hải Phòng- năm học 2008-2009]

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Xác định điểm M bên trong tam giác sao cho MA+MB+MC nhỏ nhất.

Lời giải

Dùng phép quay quanh A với góc quay 60^0 biến M thành M'; C thành C'

Ta có MA+MB+MC = BM+MM'+M'C'

MA+MB+MC bé nhất khi bốn điểm B,M,M',C' thẳng hàng.

Khi đó góc BMA=120^0, góc AMC=120^0

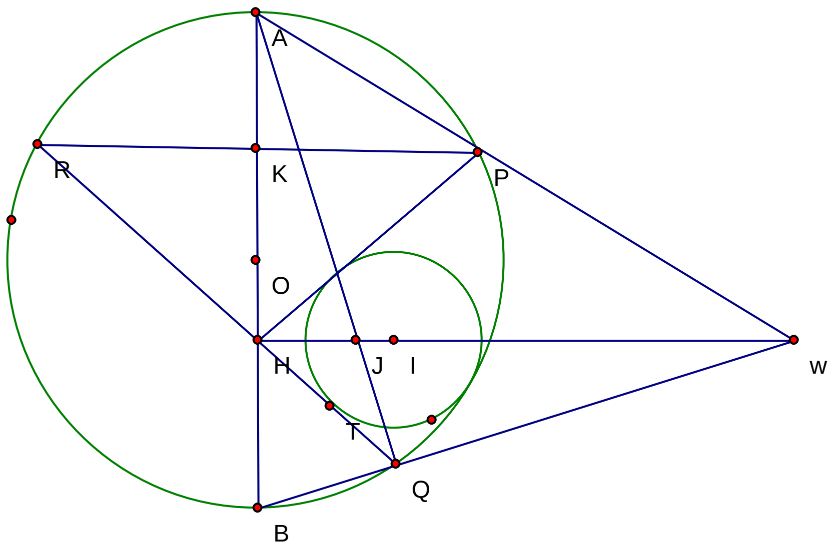
Ta được vị trí của M trong tam giác ABC

Câu 4. [Trường THPT Chuyên Biên Hòa- Tỉnh Hà Nam]

Cho đường tròn(O) có đường kính AB, P là điểm bất kì trên đường tròn, K là hình chiếu của P trên AB, R đối xứng với P qua A**B.** H bất kì trên A**B.** RH cắt lại (O) tại Q. Gọi đường tròn tâm I bán kính r tiếp xúc với HP,HQ và đường tròn (O)

Chứng minh: $\frac{1}{r} = \frac{1}{HK} + \frac{1}{HP}$

Lời giải



Gọi T là tiếp điểm của (I) và HQ

J là điểm $\in$ IH sao cho HJ = HT

PQ cắt AB tại X, AP cắt BQ tại W

AQ cắt PB tại J'

$\Rightarrow$ J' là trực tâm Δ WAB

$\Rightarrow$ H,J,I,W thẳng hàng

$$A\hat{J'}B = J'\hat{A}B + A\hat{P}B = J'\hat{A}P + 90^0 = J'\hat{H}P + 90^0$$

$$= 90^0 - H\hat{I}T + 90^0 = 180^0 - H\hat{I}T$$

$$\Rightarrow A\hat{J'}B + H\hat{I}T = 180^0$$

$$\tan A\hat{J}B = \tan(A\hat{J}H + B\hat{J}H) = \frac{\tan A\hat{J}H + \tan B\hat{J}H}{1 - \tan A\hat{J}H.\tan B\hat{J}H} = \frac{\frac{AH}{HJ} + \frac{BH}{HJ}}{1 - \frac{AH}{HJ}\frac{BH}{HJ}}$$

$$= \frac{(AH + BH)HJ}{HJ^2 - HA.HB} = \frac{2R.HJ}{HT^2 - HA.HB} = \frac{2R.HJ}{HI^2 - r^2 - R^2 + OH^2}$$

$$= \frac{2R.HJ}{OI^2 - R^2 - r^2} = \frac{2R.HJ}{(R-r)^2 - R^2 - r^2} = \frac{2R.HJ}{-2Rr} = -\frac{HJ}{r} = -\frac{HT}{r} = -\tan H\hat{I}T$$

$$\Rightarrow A\hat{J}B + H\hat{I}T = 180^0 \Rightarrow A\hat{J}B = A\hat{J'}B \Rightarrow J \equiv J'$$

Hai tam giác HKR và HTI đồng dạng với nhau nên ta có

$$\frac{BH}{BK} = \frac{HJ}{PK} = \frac{HT}{RK} = \frac{IH}{HK} = \frac{r}{HK}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{BK}{BH.BK} = \frac{BH + BK}{BH.HK} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HK}$$

LOẠI 8: Các bài toán khác

Câu 5. **[ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN TỈNH NAM ĐỊNH** -2005]

Biết rằng số đo ba góc trong của tam giác ABC lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Gọi $(O;R)$ là đường tròn ngoại tiếp và G là trọng tâm của tam giác ABC.

1) Tính độ dài đoạn OG theo R.

2) Biết $R = 57$, hãy tính gần đúng số đo diện tích tam giác ABC (lấy đến 5 chữ số sau dấu phẩy).

Câu 6. **[ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN TỈNH NAM ĐỊNH -2004]**

Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi $ABCD$ có: $AB = BC = CD = a$

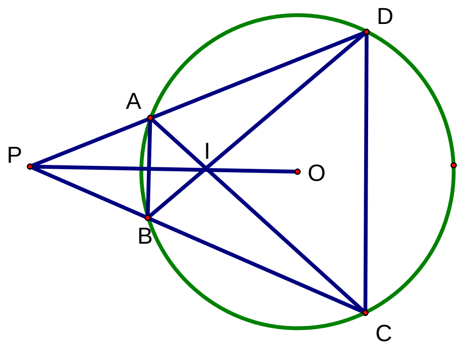
1) Nếu biết $\angle ABC = \angle BCD = 120^o$ Hãy tính diện tích tứ giác $ABCD$ theo a.

2) Giả sử tứ giác $ABCD$ thay đổi, mà $AB = BC = CD = a$ không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Câu 7. **[THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2013-2014]**

Cho (O) và một điểm P nằm ngoài (O). Chứng minh rằng các đường chéo của bất kì hình thang nào nội tiếp (O) mà hai cạnh bên kéo dài gặp nhau tại P đều cắt nhau tại một điểm cố định

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow I \in OP$

Ta có $\widehat{IOD} = \widehat{PBI}$

Do $\widehat{IPB} = \widehat{IDO} = 90^0 - \widehat{BCD}$

$\Rightarrow \Delta PDO \backsim \Delta PIB \Rightarrow \dfrac{PD}{PI} = \dfrac{PO}{PB} \Rightarrow PD.PB = PI.PO$

$\Rightarrow P_{P/(O)} = PI.PO$ hay I cố định.

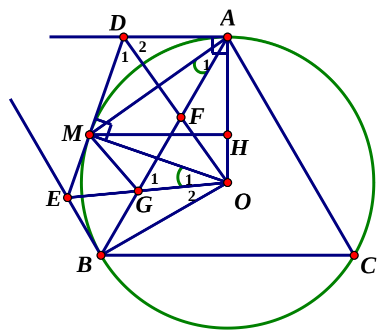
Câu 8. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN]**

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Các tiếp tuyến của $(O;R)$ tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của $(O;R)$ lần lượt tại D, E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G. Chứng minh $OD.GF = OG.DE$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R

Lời giải



Có tứ giác $AOMD$ nội tiếp (1)

$\widehat{A}_1 = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BM}$; $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BM}$

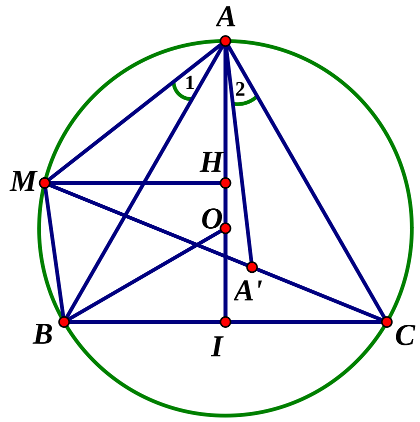
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{O}_1 \Rightarrow$ tứ giác $AMGO$ nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) ta có năm điểm A, D, G, M, O cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{G_1}=\widehat{D_2}=\widehat{F_1}$

$\Rightarrow \Delta OGF$ và ΔODE đồng dạng

$\Rightarrow \frac{OG}{OD}=\frac{GF}{DE}$ hay $OD.GF = OG.DE$



Trên đoạn MC lấy điểm A' sao cho

$MA' = MA \Rightarrow \Delta AMA'$ đều

$\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{A_2}\left(=60^\circ-\widehat{BAA'}\right)$

$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta A'AC$

$\Rightarrow MB = A'C$

Chu vi tam giác MAB là $\mathrm{MA+MB+AB=MC+AB\le 2R+AB}$

Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O) => M là điểm chính giữa cung AM => H là trung điểm đoạn AO

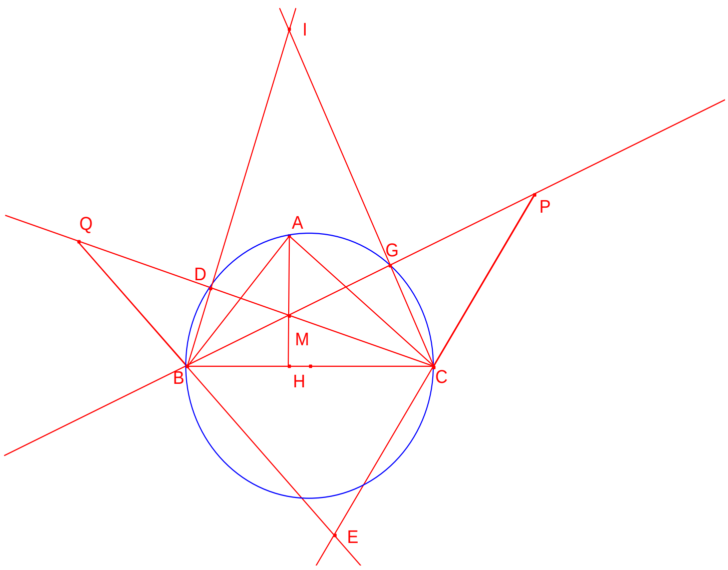
Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R+AB$

Gọi I là giao điểm của AO và BC $\Rightarrow AI=\frac{3}{2}R=\frac{AB\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=R\sqrt{3}$

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R+AB=(2+\sqrt{3})R$.

Câu 9. [TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH SƠN LA]
Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. M là điểm tùy ý thuộc đoạn AH (M khác A và H); gọi P P là điểm thuộc BM kéo dài sao cho $CP=CA$ và Q là điểm thuộc tia CM kéo dài sao cho $BQ=BA$; CP cắt BQ tại E. Chứng minh rằng $EP=EQ$

Hướng dẫn giải.



Gọi G và D lần lượt là giao điểm của BM, CM với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; I I là giao điểm của BD và CG.

BC là đường kính của (ABC) nên CD, BG là hai đường cao của tam giác IBC, do đó M là trực tâm của tam giác $IBC \Rightarrow IM \perp BC \Rightarrow I, A, M, H$ thẳng hàng.

$\mathrm{BQ}^2 = \mathrm{BA}^2 = \mathrm{BH.BC} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BH}} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BQ}}$

Suy ra hai tam giác BQH, BCQ đồng dạng

Suy ra góc $\angle BQH = \angle BCQ = \angle BCD = \angle BIH$ suy ra tứ giác $BQIH$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra góc $\angle BQI = 90^{\circ}$ và $QI^2 = ID.IB$ (1)

Tương tự ta có: góc $\angle CPI = 90^{\circ}$ và $PI^2 = IG.IC$. (2)

Từ (1) và (2) và $IB.ID = IG.IC$ (do tứ giác $BDGC$ nội tiếp) nên $QI = IP$.

Câu 10. **[THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2013 - 2014]**

Gọi AD, BE, CF là ba đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A. Đoạn thẳng AD cắt EF tại K. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt ở M, N. Chứng minh rằng: $MN \geq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(AB + AC)$.

Câu 11. **[THI HỌC SINH GIỎI TỈNH THÁI NGUYÊN GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO LỚP 11NĂM HỌC 2011-2012]**

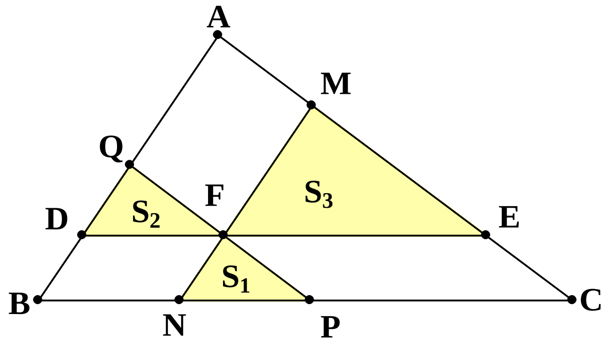
Qua một điểm nằm trong tam giác kẻ 3 đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thành 6 phần, trong đó có 3 tam giác với các diện tích là $S_1 = 15,7845 cm^2$, $S_2 = 16,7214 cm^2$; $S_3 = 21,5642 cm^2$ Tính diện tích của tam giác đã cho theo S_1, S_2, S_3.

Hướng dẫn giải.

$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \left(\frac{NP}{BC}\right)^2 \text{ hay } \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{NP}{BC}$$

Tương tự, $\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \dfrac{FE}{BC} = \dfrac{PC}{BC}; \dfrac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \dfrac{DF}{BC} = \dfrac{BN}{BC}$

Từ đó $\dfrac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \dfrac{BN + NP + PC}{BC} = 1$



Suy ra $\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$

Hay $S_{ABC} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$

Thay số ta có: $S_{ABC} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2 = 161,4394 cm^2$

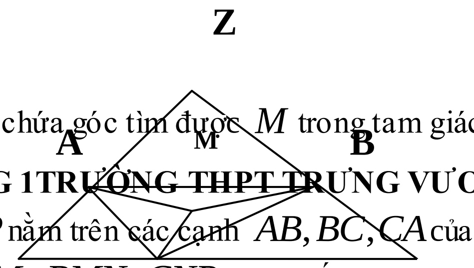
Câu 12. **[THI HSG TRƯỜNG THPT TRƯNG VƯƠNG- BÌNH ĐỊNH 2006-2007]**

Tìm điểm M trong tam giác nhọn ABC cho trước để $3MA + 4MB + 5MC$ bé nhất

Lời giải.

Dựng tam giác XYZ ngoại tiếp tam giác ABC có các cạnh tỷ lệ $3:4:5$

M nhìn các đoạn BC, CA các góc bù góc X, Y

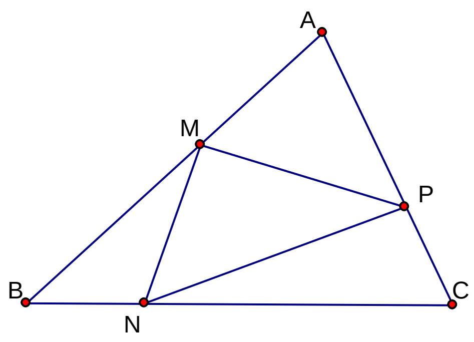


Sử dụng giao các cung chứa góc tìm được M trong tam giác ABC

Câu 13. **[ĐỀ THI HSG VÒNG 1 TRƯỜNG THPT TRƯNG VƯƠNG- BÌNH ĐỊNH]**

Cho các điểm M, N, P nằm trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC. Chứng minh rằng trong ba tam giác APM, BMN, CNP có ít nhất một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng một phần tư diện tích tam giác ABC.

Lời giải



$S_{\Delta APM} = \dfrac{AM.AP}{AB.AC} S_{\Delta ABC}$. Tương tự có

$$S_{\Delta APM}S_{\Delta BMN}S_{\Delta CNP} = \frac{AM.BM}{AB^2}\frac{BN.CN}{BC^2}\frac{CP.AP}{CA^2}S^3{}_{\Delta ABC} \le \frac{1}{4}S^3{}_{\Delta ABC}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

Câu 14. **[HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ.TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT – QUẢNG NGÃI NĂM 2016]**

Cho tam giác ABC thay đổi nhưng luôn là tam giác nhọn có tổng các bình phương các độ dài các cạnh là không đổi. Gọi AD là đường phân giác trong, E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB,AC, K là giao điểm của BF,CE, H là giao điểm của AK và đường cao kẻ từ B của tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $AH+BH+CH$ khi tam giác ABC thay đổi.

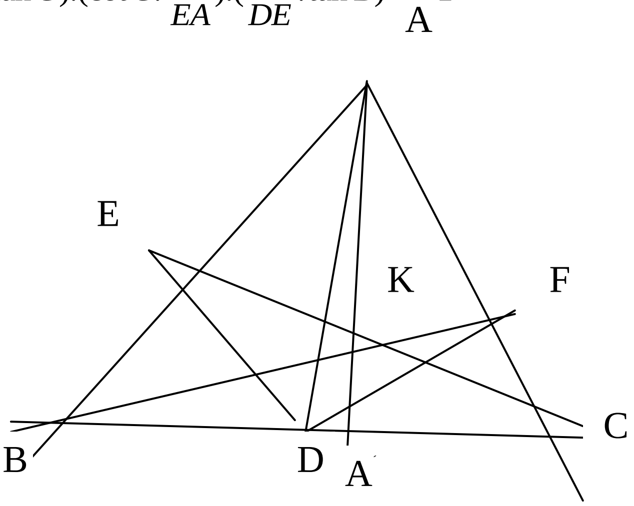
Lời giải

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta chứng minh A,K,A' thẳng hàng bằng cách chứng minh AA',BF,CE đồng quy.

Vì A',F,E lần lượt thuộc các đoạn BC,CA,AB nên

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{EA}}{EB} = -\frac{A'B}{A'C}.\frac{FC}{FA}.\frac{EA}{EB} = -(\frac{A'B}{A'A}.\frac{A'A}{A'C}).(\frac{FC}{DF}.\frac{DF}{FA}).(\frac{EA}{DE}.\frac{DE}{EB})$$

$$= -(\cot B.\tan C).(\cot C.\frac{DE}{EA}).(\frac{EA}{DE}.\tan B) - 1$$



Do đó theo định lý Ceva, AA',BF,CE đồng quy hoặc song song. Mà ba đường thẳng này không thể song song nên chúng đồng quy hay K nằm trên đường cao AA' của tam giác ABC, do đó, H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi BB',CC' là hai đường cao còn lại của tam giác ABC và a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh BC,CA,AB thì theo tính chất tứ giác nội tiếp ta có

$$AH.AA' = AC'.AB = (b\cos C).c = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Tương tự, có $AH.AA' = BH.BB' = CH.CC' = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Lại có $\dfrac{A'H}{AA'}+\dfrac{B'H}{BB'}+\dfrac{C'H}{CC'}=1$ *hay* $\dfrac{AH}{AA'}+\dfrac{BH}{BB'}+\dfrac{CH}{CC'}=2$

nên

$$(AH+BH+CH)^2 \le (AH, AA' + BH.BB' + CH.CC')(\frac{AH}{AA'}+\frac{BH}{BB'}+\frac{CH}{CC'})$$

$= a^2 + b^2 + c^2$.

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $AA' = BB' = CC'$, tức là tam giác ABC đều

Vậy giá trị lớn nhất của tổng $AH + BH + CH$ là $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

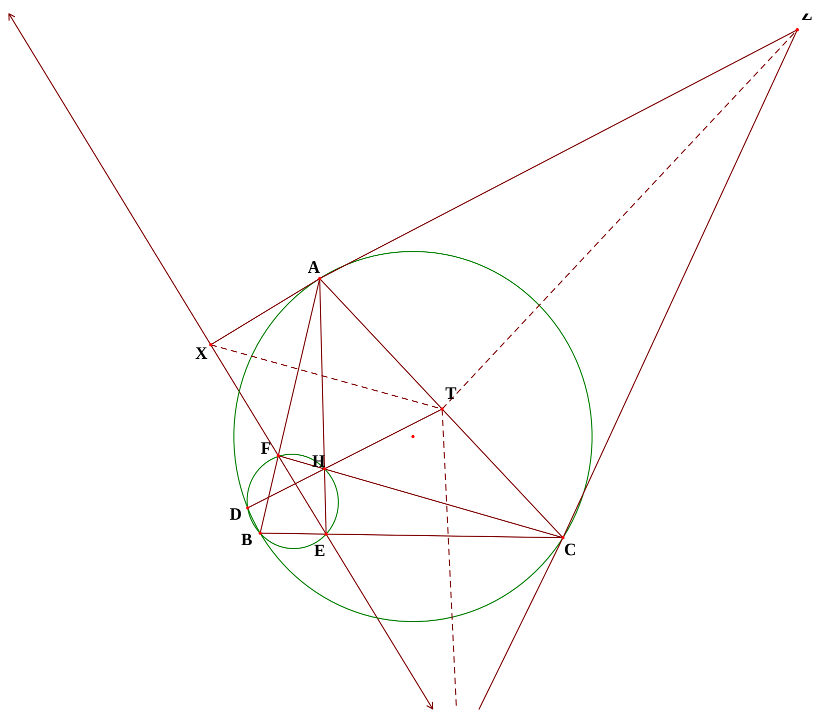
Câu 15. **[Ngân hàng đề Hùng Vương-Trường CHUYÊN BẮC GIANG – năm-Tỉnh BẮC GIANG]** Cho tam giác nhọn ABC không cân tại B, T là trung điểm cạnh AC, E và F tương ứng là chân đường cao hạ từ A, C của tam giác. Z là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, X là giao điểm của ZA và EF, Y là giao điểm của ZC và EF

a) Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EBF cắt nhau tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên DT.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

Hướng dẫn giải



a) ZT là phân giác góc $\widehat{AZC}$.

Do $\widehat{XAB} = \widehat{ACB} = \widehat{BFE} = \widehat{AFX}$ và $TA = TF$, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF, do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

b)Giả sử $AB < BC$, khi đó D nằm trên cung nhỏ AB. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH. Ta có được BD và LO vuông góc.

Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. $OLHT$ là hình bình hành nên LO song song với HT, do đó D, H, T thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc $\widehat{ADT} = \widehat{AXT}$ và TY là đường trung trực của DC.

Chứng minh được góc $\widehat{CDT} = \widehat{CYT}$ nên $CTDY$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc $\widehat{XDY} + \widehat{XZY} = \widehat{XDT} + \widehat{TDY} + \widehat{XZY} = \widehat{ZAT} + \widehat{ZCT} + \widehat{XZY} = 180^{o}$, do đó $DXZY$ là tứ giác nội tiếp.

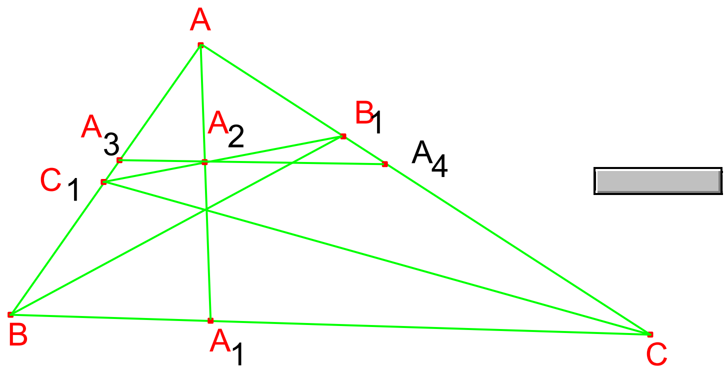
Câu 16. **[KỲ THI OLIMPIC HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X- NĂM 2014- TRƯỜNG CHUYÊN HÀ GIANG]**

Các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC có chu vi p cắt các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng tại A_2, B_2, C_2 **A.** Các đường thẳng qua A_2 song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại A_3, A_4. Đường thẳng qua B_2 song song với AC cắt BC, BA theo thứ tự tại B_3, B_4. Đường thẳng qua C_2 song song với AB cắt CA, CB theo thứ tự tại C_3, C_4. Chứng minh rằng:

$AB_4+BC_4+CA_4+BA_3+CB_3+AC_3 \le p$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải



Đặt BC = a, AC = b, BA = c, p = a+b +c.

Vì $A_3A_4 \parallel BC$ nên theo định lí Talet ta có: $\frac{BA_3}{AB} = \frac{CA_4}{AC} = \frac{A_1A_2}{AA_1} \Leftrightarrow \frac{BA_3 + CA_4}{b+c} = 1 - \frac{AA_2}{AA_1}$ (1)

Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc C: $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{C_1A}{AB} = \frac{AC}{AC+BC} \Rightarrow C_1A = \frac{AB.AC}{AC+BC} = \frac{c.b}{a+b}$

Tương tự: $AB_1 = \frac{c.b}{a+c}$

Sử dụng công thức đường phân giác cho tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$

$$AA_1 = \frac{2c.b\cos\frac{A}{2}}{b+c}; AA_2 = \frac{2AB_1.AC_1\cos\frac{A}{2}}{AB_1 + AC_1}$$

Do đó: $\frac{AA_2}{AA_1} = \frac{b+c}{2a+b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{BA_3 + CA_4}{b+c} = 1 - \frac{b+c}{2a+b+c} = \frac{2a}{2a+b+c}$$

Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta nhận được:

$$BA_3 + CA_4 = \frac{2a(b+c)}{2a+b+c} \le \frac{\left(\frac{2a+(b+c)^2}{2}\right)}{2a+b+c} = \frac{2a+b+c}{4} \ (3)$$

Hoàn toàn tương tự: $AB_4 + CB_3 \le \frac{2b+c+a}{4}$ (4); $BC_4 + AC_3 \le \frac{2c+b+a}{4}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra: $AB_4+BC_4+CA_4+BA_3+CB_3+AC_3 \le a+b+c= p$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi a = b =c.

LOẠI 8: Các bài toán khác

Câu 17. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, có trọng tâm G nằm trong hình tròn tâm I. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Hướng dẫn giải

- Tìm giá trị nhỏ nhất:

Từ BĐT: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

Từ đó $P = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c. Do đó giá trị của biểu thức P bằng 1, đạt được khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

- Tìm giá trị lớn nhất:

Gọi p và r theo thứ tự là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có:

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + 3r^2 \ (1)$$

Ta lại có:

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GC})^2$$
$$= 3IG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \ (2)$$

(Do $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$)

Từ (1) và (2) và để ý rằng: $GA^2+GB^2+GC^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$ (theo công thức đường trung tuyến trong tam giác), ta thấy

$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+3r^2=3IG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \quad (3)$$

Vì I nằm trong hình tròn (I) nên $IG \le r$ .Từ (3) suy ra

$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2 \le \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(a+b+c)^2-(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2) \le \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5(a^2+b^2+c^2) \le 6(ab+bc+ca)$$

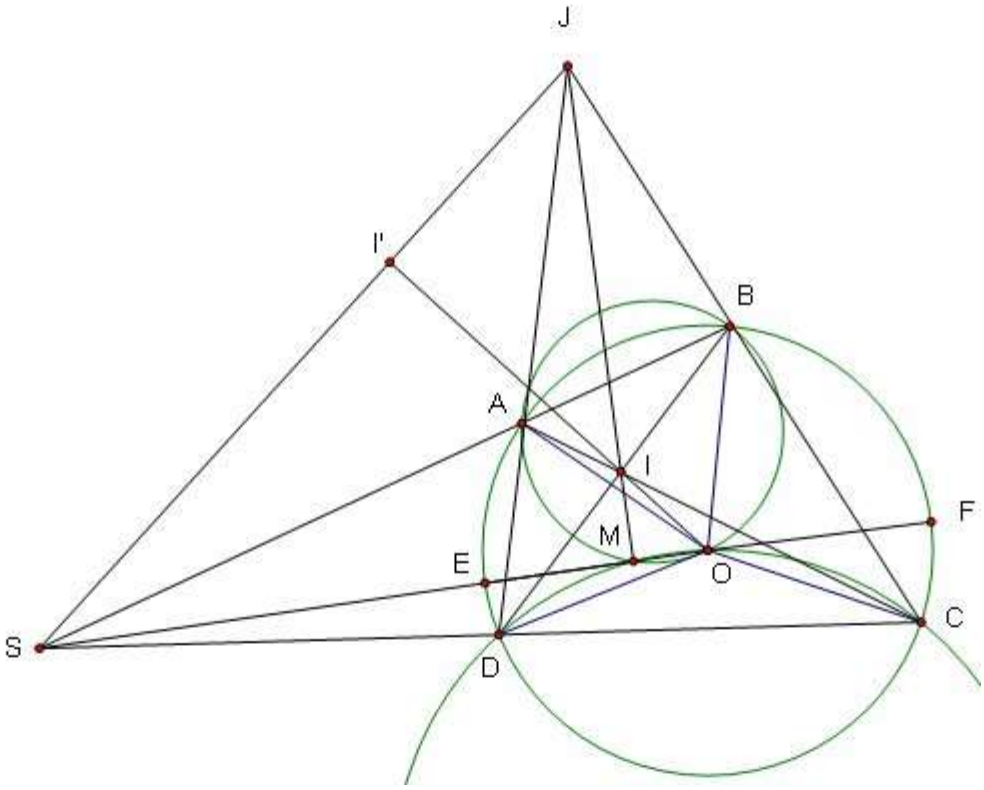
Do đó $P \le \dfrac{6}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi IG = r. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{6}{5}$ đạt được khi G nằm trên đường tròn tâm I.

Câu 18. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG ĐỀ ĐỀ XUẤT TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG]**

Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA} > \widehat{MCA}$ và $\widehat{MBC} > \widehat{MCB}$. Giả sử BM và CM lần lượt cắt AC và AB tại P, Q, chứng minh rằng BP < CQ.

Hướng dẫn giải



Ta thấy AB, CD, MN lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (AOB) và (O); (AOB) và (COD); (COD) và (O) nên AB, CD, OM đồng quy tại tâm đẳng phương S. SO cắt (O) tại E, F.

Ta có $\overline{SE}.\overline{SF}=\overline{SA}.\overline{SB}=\overline{SM}.\overline{SO}$ và O là trung điểm EF nên theo hệ thức Maclaurin, ta có (SMEF) = -1, do đó M thuộc đường đối cực của S (1)

Mà I cũng thuộc đường đối cực của S (2)

Từ (1) và (2) suy ra IM là đường đối cực của S, do đó góc IMO bằng 90^o. Tương tự góc INO bằng 90^o, ta có đpcm

Câu 19. Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao $BB'=\sqrt{5}; CC'=2$ và $\cos \widehat{CBB'}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Xét hai trường hợp:

+) B và C không tù. Khi đó

$$\cos \angle CBB'=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin C=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos C=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$BC=\frac{BB'}{\cos \angle CBB'}=\frac{5}{2}$$

Suy ra $\sin B=\frac{CC'}{BC}=\frac{4}{5}, \cos B=\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AB=\frac{BB'}{\sin A}=\frac{5}{2} \Rightarrow S=\frac{1}{2}AB.CC'=\frac{5}{2}$$

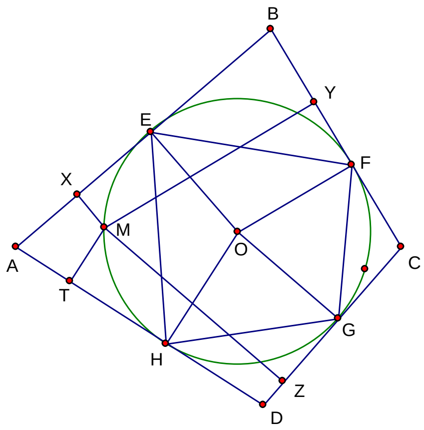
+) B hoặc C tù

Do $BB'>CC'$ nên $B<C$ và C tù $\Rightarrow \sin C=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos C=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

Còn $\sin B=\frac{4}{5}, \cos B=\frac{3}{5}$ (giống trường hợp 1) $\Rightarrow \sin A=\frac{2}{5\sqrt{5}}, AB=\frac{25}{2}$ Suy ra $S=\frac{25}{2}$

Câu 20. Cho tứ giác $ABCD$ ($AB\neq CD$) ngoại tiếp đường tròn $(O;R)$, $R>0$ và điểm M di chuyển trên đường tròn $(O;R)$. Gọi X,Y,Z,T lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng AB,BC,CD,DA. Tìm vị trí của điểm M sao cho $MX+MY+MZ+MT$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?

Hướng dẫn giải



Gọi E, F, G, H lần lượt là tiếp điểm của các đường thẳng AB, BC, CD, DA với đường tròn $(O;R)$ và gọi K là trọng tâm của tứ giác EFGH.

Ta có

$$MX+MY+MZ+MT=\frac{MX.OE+MY.OF+MZ.OG+MT.OH}{R}$$

$$=\frac{\overrightarrow{MX}.\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{MY}.\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{MZ}.\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{OH}}{R}$$

$$=\frac{\overrightarrow{MX}.\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}\right)}{R}+4R=\frac{4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OK}}{R}+4R$$

$$=\frac{4.MO.OK.\cos\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{OK}\right)}{R}+4R=4.OK.\cos\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{OK}\right)+4R$$

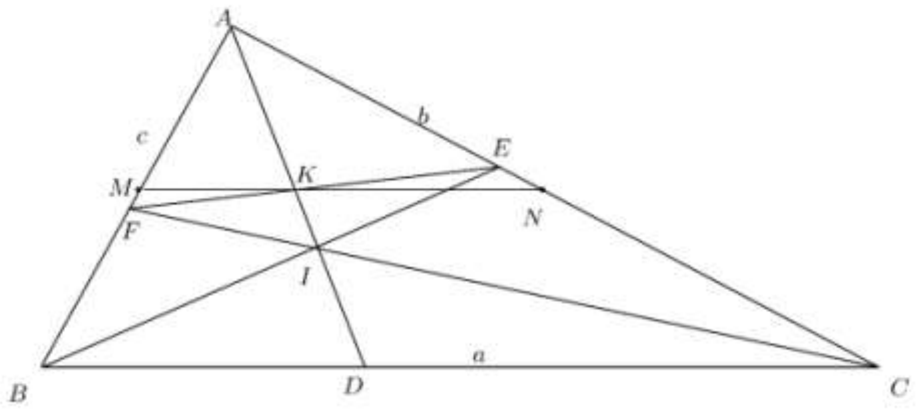
Do đó

$MX+MY+MZ+MT$

đạt giá trị lớn nhất khi M là giao điểm của tia KO với đường tròn (O; R) và đạt giá trị nhỏ nhất khi M là giao điểm của tia OK với đường tròn (O;R).

Câu 21. Gọi AD,BE,CF là ba đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A. Đoạn thẳng AD cắt EF tại K. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB,AC lần lượt ở M,N. Chứng minh rằng: $MN\geq\frac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC)$.

Hướng dẫn giải



Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ ta có $a^2 = b^2 + c^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}$ suy ra $\frac{b+c}{a} \leq \sqrt{2}$.

Dùng tính chất đường phân giác tính được $AF = \frac{bc}{a+b}, AE = \frac{bc}{a+c}$.

Dùng phương pháp diện tích, hoặc công thức đường phân giác trong tính được

$$AD = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}, AK = \frac{\sqrt{2}AE.AF}{AE+AF} = \frac{\sqrt{2}bc}{2a+b+c}.$$

Từ đó $\frac{AK}{AD} = \frac{b+c}{2a+b+c} \to \frac{MN}{a} = \frac{b+c}{2a+b+c}$.

Suy ra: $MN = (b+c)\frac{1}{2+\frac{b+c}{a}} \geq (b+c)\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC)$.

Câu 22. (Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2008 – 2009) Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức: $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 23. (Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2010 – 2011)Tam giác ABC có ba góc thỏa mãn hệ thức:

$$8\cos A\sin B\sin C + 4\sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) - 17 = 0$$

Hãy tính các góc của tam giác đó.

Câu 24. (Đề thi chọn HSG tỉnh Quảng Bình 2012 – 2013) Chứng minh rằng nếu các góc A , B , C của ΔABC thỏa mãn điều kiện: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -1$ thì $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}$.

Câu 25. (Đề thi đề nghị trường THPT chuyên Lê Quý Đôn TP. Đà Nẵng – hội thi HSG duyên hải Bắc bộ lần thứ VII) Cho n-giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d tùy ý. Qua các điểm A_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ vẽ các đường thẳng song song với d cắt đường tròn (O) tại các điểm B_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Chứng minh tổng $S_n = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + ... + A_nB_n^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục Oxy, sao cho gốc tọa độ là tâm đa giác, trục Ox vuông góc với d. Không mất tính tổng quát, giả sử có thể giả sử đa giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị ($R = 1$).

Đặt $\left(\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{OA_1}\right)=\alpha$ thì $A_k\left(\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right);\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right)$

và $B_k\left(\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right);-\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right), \forall k=1,2,...,n$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}A_kB_k^2=4\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)=2n+\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(2\alpha+\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)-\cos\left(2\alpha+\frac{(2k-3)\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{n}\right)\right)=0$$

Vậy $S_n=2n+T_n=2n.$

Câu 26. Gọi x,y,z là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ nằm trong ΔABC có 3 góc nhọn đến các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$, a,b,c là độ dài các cạnh của tam giác, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Dấu $=$ xảy ra khi nào?

Câu 27. Tính các góc của ΔABC biết rằng: $\cos 2A+2\sqrt{2}(\cos B+\cos C)=3$ và ΔABC không có góc tù.

Câu 28. Chứng minh rằng với mọi điểm thuộc mặt phẳng chứa ΔABC, ta đều có: $MA^2+MB^2+MC^2\ge\frac{4}{\sqrt{3}}S$, trong đó S là diện tích của ΔABC

Câu 29. Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 3 thì:

$$3(a^2+b^2+c^2)+4abc\ge 13$$

Câu 30. Hãy xác định dạng của tam giác ABC nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn đẳng thức sau:

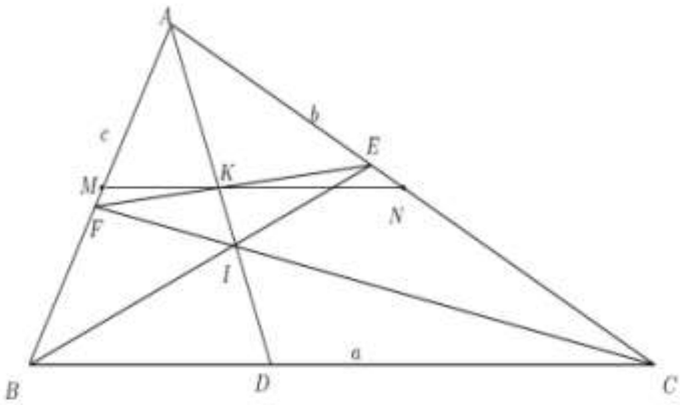
$$\frac{tg\frac{A}{2}}{1+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}+\frac{tg\frac{B}{2}}{1+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}}+\frac{tg\frac{C}{2}}{1+tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}=\frac{1}{4tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}$$

LOẠI 8: Các bài toán khác

Câu 11. [Chu Văn An-Hà Nội] Gọi AD,BE,CF là ba đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A. Đoạn thẳng AD cắt EF tại K. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB,AC lần lượt ở M,N. Chứng minh rằng:

$MN \ge \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(AB+AC\right)$.

Hướng dẫn giải



Đặt $BC=a, CA=b, AB=c$ ta có

$a^2=b^2+c^2 \ge \frac{(b+c)^2}{2}$ suy ra

$\frac{b+c}{a} \le \sqrt{2}$. Dùng tính chất đường phân

giác tính được

$AF=\frac{bc}{a+b}, AE=\frac{bc}{a+c}$. Dùng

phương pháp diện tích, hoặc công thức đường phân giác trong tính được

$AD=\frac{\sqrt{2}bc}{b+c}, AK=\frac{\sqrt{2}AE.AF}{AE+AF}=\frac{\sqrt{2}bc}{2a+b+c}$. Từ đó $\frac{AK}{AD}=\frac{b+c}{2a+b+c} \to \frac{MN}{a}=\frac{b+c}{2a+b+c}$. Suy ra: $MN=(b+c)\frac{1}{2+\frac{b+c}{a}} \ge (b+c)\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(AB+AC\right)$.

Câu 12. TRƯỜNG THPT VÂN CANH

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và đường phân giác trong AD. Đương tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB tại E và cắt AC tại F. Chứng minh $BE=CF$.

Câu 13. Trường THPT Cẩm Giàng

Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 6$ cm, đáy lớn $CD = 15$ cm nằm trong mặt phẳng (P) không chứa A,B. Từ A,B kẻ hai đường thẳng song song lần lượt cắt (P) tại A', B'. Gọi O, O' lần lượt là giao điểm của AC và DB; $A'C$ và $B'D$.

1) Chứng minh $AA' = BB'$.

2) Chứng minh $AA' // OO'$

3) Tìm OO' biết $BB' = 7cm$.

Câu 14.ĐỀ THI HOC SINH GIỎI TOÁN 11 NAM ĐỊNH

Cho tam giác ABC vuông góc tại A. Trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại B ta lấy một điểm S sao cho $SB = BA = AC = 1$. (P) là mặt phẳng song song với các cạnh SB và AC cắt các cạnh SA, SC, BC, BA lần lượt tại D, E, F, H.

1) Chứng minh $DEFH$ là hình chữ nhật.

2) Xác định vị trí của mặt phẳng (P) sao cho diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất.

Câu 15. Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$.

1) Nếu biết $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120^0$. Hãy tính diện tích tứ giác $ABCD$ theo a.

2) Giả sử tứ giác $ABCD$ thay đổi, mà $AB = BC = CD = a$ không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$.

Câu 16.SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG1

Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R.

Gọi M là điểm tùy ý nằm trên đường tròn này.

a) Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

b) Chứng minh: $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$.

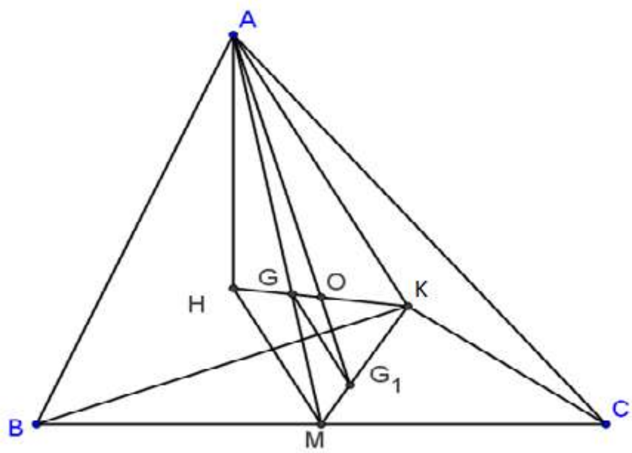
c) Thay tam giác ABC đều bằng hình vuông $ABCD.$

Hãy tính $P = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 ; Q = MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4$

Câu 17. SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG 2

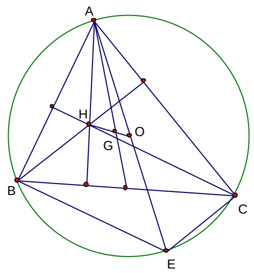
a) Cho tam giác ABC có G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi K là điểm sao cho $\overrightarrow{HK} = 3\overrightarrow{HG}$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác $\Delta KBC, \Delta KCA, \Delta KAB$. Chứng minh: G_1A, G_2B, G_3C đồng quy và $G_1A = G_2B = G_3C$.

b) Trong mặt phẳng cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và điểm M tùy ý.Tìm vị trí của M để $MA + MB + MC + MD + ME$ ngắn nhất.



Hướng dẫn giải

Câu 3a*Trước hết ta chứng minh được* G, H, O *thẳng hàng và* $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$



Gọi E là điểm đối xứng của A qua O.Ta có:BHCE là hình bình hành

Suy ra: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

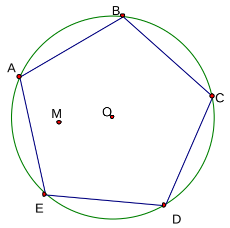
Suy ra: $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$

Vì G, H, O thẳng hàng; $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$; $\overrightarrow{HK} = 3\overrightarrow{HG}$ nên H, G, O, K thẳng hàng và O là trung điểm HK Gọi M là trung điểm BC.

Trong tam giác ΔAMK ta có: GG_1 song song AK ; $GG_1 = \frac{1}{3}AK$ và $GO = \frac{1}{3}OK$

Vậy ta chứng minh được O, A, G_1 thẳng hàng và $AG_1 = \frac{4}{3}AO$ Như vậy G_1A, G_2B, G_3C đồng quy tại O và $G_1A = G_2B = G_3C$

<u>Bài 3b</u>



Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ Ta có :

$$MA = \frac{1}{R}.|\overrightarrow{MA}|.|\overrightarrow{OA}| \geq \frac{1}{R}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA} = \frac{1}{R}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).\overrightarrow{OA} = \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + R$$

$$\Rightarrow MA + MB + MC + MD + ME \geq \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) + 5R$$

$\Rightarrow MA + MB + MC + MD + ME \geq 5R$ **Vậy** $MA + MB + MC + MD + ME$ ngắn nhất khi M trùng với O.

Câu 18. a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2)$, $B(4;3)$.

Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 45^0$.

b) Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng $6cm$, trọng tâm là G. Một đường thẳng Δ đi qua G, Δ cắt các đoạn thẳng AB và AC lần lượt tại hai điểm M và N sao cho $2AM = 3AN$. Tính diện tích tam giác AMN.

Hướng dẫn giải

a. Gọi $I(x;y)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB.

Ta có: $\begin{cases} AI = BI \\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

• Với $I(3;1)$ thì $IA = \sqrt{5}$. Đường tròn tâm I bán kính IA có phương trình $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ cắt trục hoành tại hai điểm $M_1(1;0)$ và $M_2(5;0)$.

•Với $I(2;4)$ thì $IA = \sqrt{5}$. Đường tròn tâm I, bán kính IA không cắt trục hoành.

b. Đặt $AM = x, AN = y$ với $x > 0, y > 0$.

$S_{AMG} = \frac{1}{2}AM.AG.\sin 30^0 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $S_{ANG} = \frac{1}{2}AN.AG.\sin 30^0 = \frac{y\sqrt{3}}{2}$

$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$, $S_{AMN} = S_{AMG} + S_{ANG}$ Nên ta có:

$\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{4}xy \Leftrightarrow 2(x+y) = xy$.

Vậy ta có hệ : $\begin{cases} 2(x+y) = xy \\ 2x = 3y \end{cases}$

Câu 19.a) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình: $2x + y - 2 = 0$. Đường cao kẻ từ B có phương trình: $x + y + 1 = 0$, điểm $M(1;1)$ thuộc đường cao kẻ từ đỉnh C. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

b) Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho bốn điểm đó không cùng nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh rằng: $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A, C \in Ox$, $B \in Oy$. Giả sử trong hệ trục đó ta có:

$A(a,0), C(c,0), B(0,b), D(m,n)$ $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + (c-m)^2 + n^2 = (a-m)^2 + n^2 + c^2 + b^2 \Leftrightarrow 2m(a-c) = 0$ (*)Do $A(a,0) \neq C(c,0) \Leftrightarrow a \neq c$ Vậy từ (*) suy ra m = 0, hay D nằm trên trục tung. Vậy (*) $\Leftrightarrow AC \perp BD$

Câu 20. SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN VÒNG 2 - NĂM 2012

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và có trọng tâm G. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của GA, GB, GC với đường tròn $(O;R)$.

a) Chứng minh: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3(R^2 - OG^2)$.

b) Chứng minh: $GA_1 + GB_1 + GC_1 \geq GA + GB + GC$.

Hướng dẫn giải

a) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC})^2$

$GA^2 + GB^2 + GC^2 = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC})^2$

$= 3GO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{GO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3GO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{GO}.3\overrightarrow{OG}$

$= 3GO^2 + 3R^2 - 6OG^2 = 3(R^2 - OG^2)$ b)

$GA_1 + GB_1 + GC_1 = \frac{GA_1.GA}{GA} + \frac{GB_1.GB}{GB} + \frac{GC_1.GC}{GC} = (R^2 - OG^2)(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC})$

$= \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{3}(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC})$ Mặt khác:

$GA^2+GB^2+GC^2 \geq \dfrac{(GA+GB+GC)^2}{3}$ áp dụng AM-GM:

$(GA+GB+GC)(\dfrac{1}{GA}+\dfrac{1}{GB}+\dfrac{1}{GC}) \geq 9$ Vậy

$GA_1+GB_1+GC_1 \geq \dfrac{1}{9}(GA+GB+GC)^2(\dfrac{1}{GA}+\dfrac{1}{GB}+\dfrac{1}{GC}) \geq GA+GB+GC$

Câu 21. KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12LONG AN VÒNG 2 – NĂM 2013

Cho AA', BB', CC' là các đường trung tuyến của tam giác ABC và O là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng ABC

a) Chứng minh $\dfrac{AA'}{BC}+\dfrac{BB'}{CA}+\dfrac{CC'}{AB} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) Chứng minh $\dfrac{OA}{BC}+\dfrac{OB}{CA}+\dfrac{OC}{AB} \geq \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh $\dfrac{AA'}{BC}+\dfrac{BB'}{CA}+\dfrac{CC'}{AB} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$**.** Ta có

$4AA'^2 = 2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2 \quad 2\left(AB^2+BC^2+CA^2\right) = 4AA'^2+3BC^2$ Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được

$2\left(AB^2+BC^2+CA^2\right) \geq 4\sqrt{3}AA'.BC$ Khi đó

$$AA'.BC \leq \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{2\sqrt{3}} \quad \frac{1}{AA'.BC} \geq \frac{2\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2} \quad \frac{AA'}{BC} \geq \frac{2\sqrt{3}\,AA'^2}{AB^2+BC^2+CA^2}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{BB'}{AC} \geq \frac{2\sqrt{3}\,BB'^2}{AB^2+BC^2+CA^2} \quad \frac{CC'}{AB} \geq \frac{2\sqrt{3}\,CC'^2}{AB^2+BC^2+CA^2}$$ Do

$$AA'^2+BB'^2+CC'^2 = \frac{3}{4}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$ Nên

$$\frac{AA'}{BC}+\frac{BB'}{CA}+\frac{CC'}{AB} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

b) Chứng minh $\dfrac{OA}{BC}+\dfrac{OB}{CA}+\dfrac{OC}{AB} \geq \sqrt{3}$.

$$AA'.BC \leq \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{2\sqrt{3}} \quad GA.BC \leq \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{3\sqrt{3}}$$

Với G là trọng tâm tam giác ABC.

$$\frac{OA}{BC}=\frac{OA.GA}{BC.GA}\geq\frac{3\sqrt{3}.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}}{AB^2+BC^2+CA^2}$$ Do đó

$$\frac{OA}{BC}=\frac{OA.GA}{BC.GA}\geq\frac{3\sqrt{3}.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}}{AB^2+BC^2+CA^2}\geq\frac{3\sqrt{3}\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}\right).\overrightarrow{GA}}{AB^2+BC^2+CA^2}$$

$$\frac{OA}{BC}\geq\frac{3\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2}\left(\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GA}+GA^2\right)$$ Tương tự ta được

$$\frac{OB}{CA}\geq\frac{3\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2}\left(\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GB}+GB^2\right)\ \frac{OC}{AB}\geq\frac{3\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2}\left(\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GC}+GC^2\right)$$

$$\frac{OA}{BC}+\frac{OB}{CA}+\frac{OC}{AB}\geq\frac{3\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2}\left(\overrightarrow{OG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2\right)$$ Do

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$ Nên

$$\frac{OA}{BC}+\frac{OB}{CA}+\frac{OC}{AB}\geq\sqrt{3}$$

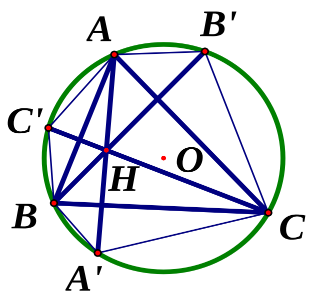
Câu 22. KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 LONG AN VÒNG 2-NĂM 2013

Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi A', B' và C' lần lượt là giao điểm thứ hai của đường cao kẻ từ A, B và C với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng diện tích lục giác $AB'CA'BC'$ bằng hai lần diện tích tam giác ABC.

b) Hãy xác định độ dài ba cạnh của tam giác ABC theo R sao cho lục giác $AB'CA'BC'$ có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh rằng diện tích lục giác $AB'CA'BC'$ bằng hai lần diện tích tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác ABC.

Ta có: $\widehat{BAA'}=\widehat{BCC'}$ và $\widehat{BAA'}=\widehat{BCA'}$

Khi đó $\widehat{BCC'}=\widehat{BCA'}$

Suy ra H đối xứng với A' qua BC.

Qua phép đối xứng trục BC biến ΔHBC thành $\Delta A'BC$. Như vậy $S_{\Delta HBC} = S_{\Delta A'BC}$ Qua phép đối xứng trục AC biến ΔHAC thành $\Delta B'AC$. Như vậy $S_{\Delta HAC} = S_{\Delta B'AC}$ Qua phép đối xứng trục AB biến ΔHAB thành $\Delta C'AB$. Như vậy $S_{\Delta HAB} = S_{\Delta C'AB}$ $S_{AB'CA'BC'} = 2S$ với S là diện tích tam giác ABC.

b) Hãy xác định độ dài ba cạnh của tam giác ABC theo R sao cho lục giác $AB'CA'BC'$ có diện tích lớn nhất Gọi a, b và c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC và AB.

Ta có: $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$(a+b-c)+(b+c-a)+(a+c-b) \geq 3\sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$

$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$ $S \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2$ Mà

$a = 2R\sin A; b = 2R\sin B$ và $c = 2R\sin C$ nên $a+b+c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ Xét hàm số $f(x) = \sin x,\ x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) = \cos x;\ f''(x) = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó $\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \leq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$

Suy ra $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ Ta được $S \leq \frac{9R^2}{4\sqrt{3}}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = R\sqrt{3}$.

Vậy lục giác $AB'CA'BC'$ có diện tích lớn nhất khi $a = b = c = R\sqrt{3}$

Câu 23.KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1

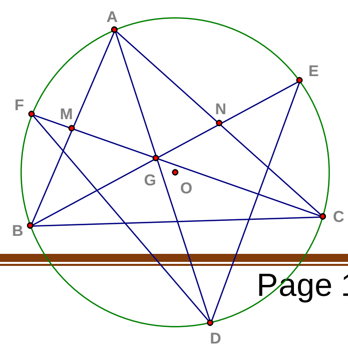
Cho tam giác không cân ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các trung tuyến kẻ từ A, B, C lần lượt cắt (O) tại D, E và F. Biết $DE = DF$, chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC; M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

ΔDEG đồng dạng ΔBAG suy ra $\frac{DE}{DG} = \frac{BA}{BG}$

ΔDFG đồng dạng ΔCAG suy ra $\frac{DF}{DG} = \frac{CA}{CG}$ Do $DE = DF$ nên suy ra:



$$\frac{BA}{BG}=\frac{CA}{CG}\Leftrightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BG}{CG}\Leftrightarrow\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BG^2}{CG^2}=\frac{\frac{4}{9}BN^2}{\frac{4}{9}CM^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{\frac{1}{4}\left[2\left(AB^2+BC^2\right)-AC^2\right]}{\frac{1}{4}\left[2\left(AC^2+BC^2\right)-AB^2\right]}=\frac{2\left(AB^2+BC^2\right)-AC^2}{2\left(AC^2+BC^2\right)-AB^2}$$

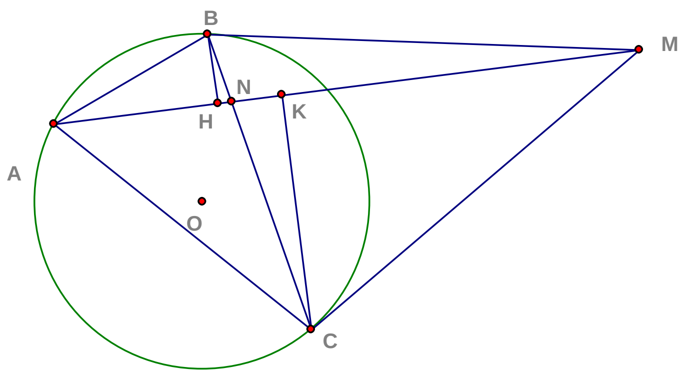
$$\Leftrightarrow AB^2\left[2\left(AC^2+BC^2\right)-AB^2\right]=AC^2\left[2\left(AB^2+BC^2\right)-AC^2\right]$$

$$\Leftrightarrow AB^4-AC^4=2BC^2\left(AB^2-AC^2\right)\Leftrightarrow AB^2+AC^2=2BC^2\ \text{(đpcm)}$$

Câu 24.SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1

Cho tam giác không vuông ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các tiếp tuyến của (O) tại $B,\ C$ cắt nhau tại M . Đường thẳng AM cắt BC tại N . CMR: $\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Hướng dẫn giải



Dựng BH, CK vuông góc AM $(H,K\in AM)$

Ta có: $\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{BH}{CK}=\dfrac{dt(\Delta ABM)}{dt(\Delta ACM)}=\dfrac{AB.\sin\left(ABM\right)}{AC.\sin\left(ACM\right)}$

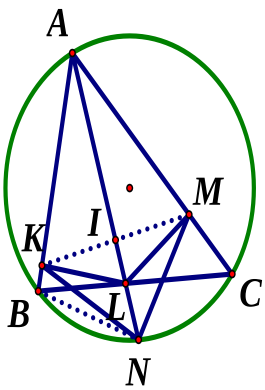
$\sin\left(ABM\right)=\sin\left(ACB\right)=\dfrac{2dt(\Delta ABC)}{BC.CA}$ Tương tự: $\sin\left(ACM\right)=\dfrac{2dt(\Delta ABC)}{BC.AB}$

$\Rightarrow\dfrac{\sin\left(ABM\right)}{\sin\left(ACM\right)}=\dfrac{AB}{AC}$ Suy ra: $\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

Câu 25. SỞ GD&ĐT LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt BC tại L và cắt đường tròn $(O;R)$ tại N . Gọi M, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của L lên AC và AB. Chứng minh tam giác ABC và tứ giác $AMNK$ có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải



Ta có: AL là đường trung trực của đoạn MK

Gọi $I = AL \cap MK \Rightarrow MK = 2MI$ Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha$, $S_{AMNK} = \dfrac{1}{2}AN.\text{MK}$ Ta có: ΔACL đồng dạng với $\Delta ANB \Rightarrow AB.AC = AL.AN$

$\Rightarrow S_{AMNK} = \dfrac{1}{2}\text{AB.AC}.\dfrac{\text{MK}}{AL}$ (1) Ta có: Tam giác AML vuông tại M $\Rightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\text{ML}}{\text{AL}} \\ \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AL}} \end{cases}$

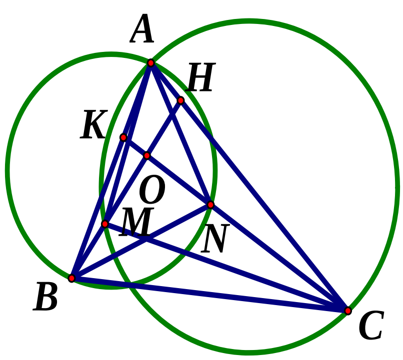
$\Rightarrow \sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\text{ML.AM}}{\text{AL}^2} = \dfrac{2\text{MI.AL}}{\text{AL}^2} = \dfrac{\text{MK}}{\text{AL}}$ (2) Từ (1) và (2)

$\Rightarrow S_{AMNK} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha = S_{\Delta ABC}$

Câu 26.SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1

Cho tam giác ABC có trực tâm O. Đường tròn đường kính AC cắt BO tại M, đường tròn đường kính AB cắt OC tại N. Chứng minh $AM = AN$.

Hướng dẫn giải



Gọi H, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC

Ta có ΔABH đồng dạng với ΔACK $\Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{AK} \Leftrightarrow AB.AK = AC.AH$ (1) Ta có tam giác AMC vuông tại M, $MH \perp AC \Rightarrow AM^2 = AH.AC$ (2) Tương tự: $AN^2 = AK.AB$ (3) Từ (1), (2),(3) $\Rightarrow AM = AN$

Câu 27. Trường THPT chuyên Long An

Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J là trung điểm AD, BC.

Chứng minh: HK vuông góc với IJ.

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}\right)\left(\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}\right)\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}\right)$$

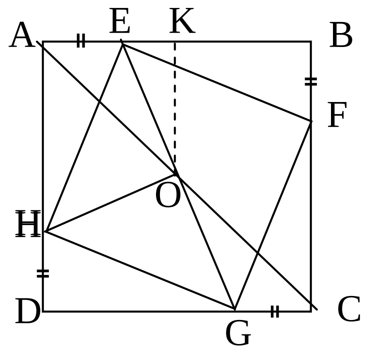
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}\right)$$

$$= 0$$

Câu 28. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



HAE = ΔEBF = ΔFCG = ΔGHD

⇒ HE = EF = FG = GH

⇒ EFGH là hình thoi.

$\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^0$

⇒ EFGH là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG. Tứ giác AECG có AE = CG, AE //CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG, do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

ΔHOE vuông cân: $HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$

Chu vi EFGH = 4HE = $4\sqrt{2}$ OE. Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất ⇔ OE nhỏ nhất

Kẻ OK ⊥ AB ⇒ OE ≥ OK (OK không đổi)

OE = OK ⇔ E ≡ K

Do đó minOE = OK

Như vậy, chu vi tứ giác $EFGH$ nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H là trung điểm của AB, $BC,\ CD,\ DA$.

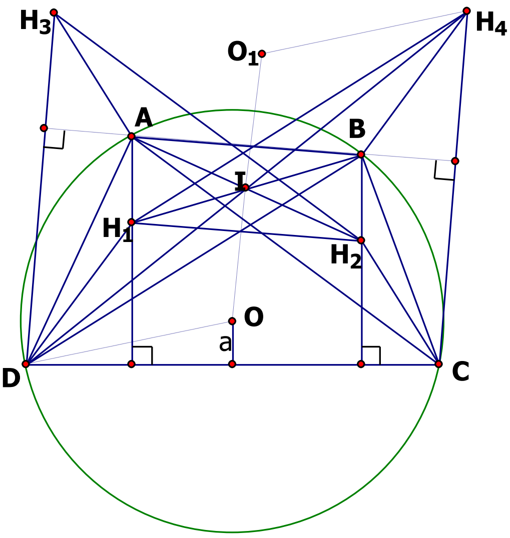
Câu 29. Trường THPT chuyên Long An

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O;R)$. Gọi $H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4$ thứ tự là trực tâm của các tam giác $ACD,\ BCD,\ ABD,\ ABC$. Chứng minh rằng:

a) $BH_1,\ AH_2,\ CH_3,\ DH_4$ đồng qui.

b) Tứ giác $H_1H_2H_3H_4$ là tứ giác nội tiếp

Hướng dẫn giải



a) Gọi a là khoảng cách từ O tới CD. Từ tính chất (*) suy ra $AH_1 = BH_2 = 2a$. Tứ giác AH_1H_2B có $AH_1 = BH_2$ và $AH_1 // BH_2$ (cùng vuông góc với CD) Þ AH_1H_2B là hình bình hành. Chứng minh tương tự thì $CH_2H_3A,\ H_1DBH_4$ cũng là các hình bình hành. Từ đó suy ra BH_1, AH_2, CH_3, DH_4 đồng qui tại trung điểm I của mỗi đường.

b) Lấy O_1 đối xứng với O qua I; suy ra DOH_4O_1 là hình bình hành Þ $O_1H_4 = OD = R$. Chứng minh tương tự ta có $O_1H_3 = OC = R$; $O_1H_2 = OA = R; O_1H_1 = OB = R$. Suy ra $H_1H_2H_3H_4$ nội tiếp đường tròn $(O_1;\ R)$.

Câu 30. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. Gọi M là điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = MA.h_a + MB.h_b + MC.h_c$$

(với $h_a,\ h_b,\ h_c$ lần lượt là độ dài các đường cao vẽ từ $A,\ B,\ C$).

III. Bài toán cực trị

Câu 31. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2004-2005)

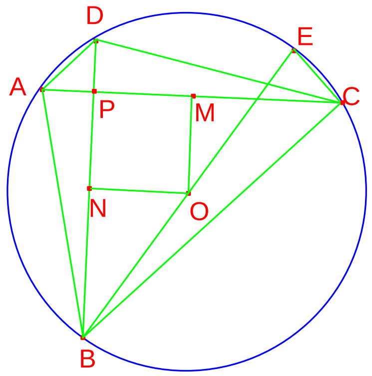
a. Tìm điểm M trong tam giác ABC để $MA+MB+MC$ nhỏ nhất.

b. Xét các tứ giác lồi $ABCD$ có độ dài đường chéo AC, BD cho trước và góc giữa hai đường chéo có độ lớn đã cho. Hãy xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

Câu 32. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Tỉnh Lai Châu- Trại hè Hùng Vương lần X)

Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P nằm trong đường tròn $(OP = d < R)$. Trong các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P, hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo R và d.

Lời giải



Gọi chu vi tứ giác ABCD là $p = AB + BC + CD + DA$ **.Ta có**

$$p^2 = (AB + BC + CD + DA)^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$
$$+2(AB.CD + AD.BC) + 2(AB.AD + CB.CD)$$
$$+2(BA.BC + DA.DC) \qquad (1)$$

Theo định lí P tô lê mê thì:

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD \qquad (2)$$

Kẻ đường kính BE,ta có

$$\Delta ABE : \Delta PAD \Rightarrow AB.AD = 2R.PA$$
$$\Delta CBE : \Delta CPD \Rightarrow CB.CD = 2R.PC$$

Từ hai đẳng thức trên ta có

$$AB.AD + CB.CD = 2R.(PA + PC) = 2R.AC \qquad (3)$$
$$\Rightarrow BA.BC + DA.DC = 2R.BD \qquad (4)$$

Chú ý rằng: $\begin{matrix} AB^2 + CD^2 = AB^2 + AE^2 = 4R^2 \\ BC^2 + DA^2 = BC^2 + CE^2 = 4R^2 \end{matrix}$

Thay hai đẳng thức trên và từ $(1),(2),(3),(4)$ **ta được:**

$$p^2 = 8R^2 + 2AC.BD + 4R(AC + BD) \qquad (5)$$

Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của AC,BD thì

$OM \perp AC, \quad ON \perp BD$

Ta có: $\begin{matrix} AC^2 + BD^2 = 4AM^2 + 4BN^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2) \\ = 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2) = 8R^2 - OP^2 = 8R^2 - 4d^2 \end{matrix}$

Do đó

$$(AC + BD)^2 = AC^2 + BD^2 + 2AC.BD = 8R^2 - 4d^2 + 2AC.BD \qquad (6)$$

Đặt $OM = u, ON = v$ **ta có:**

$$AC^2.BD^2 = 4AM^2.4BN^2 = 4\left(R^2-u^2\right)4\left(R^2-v^2\right)$$

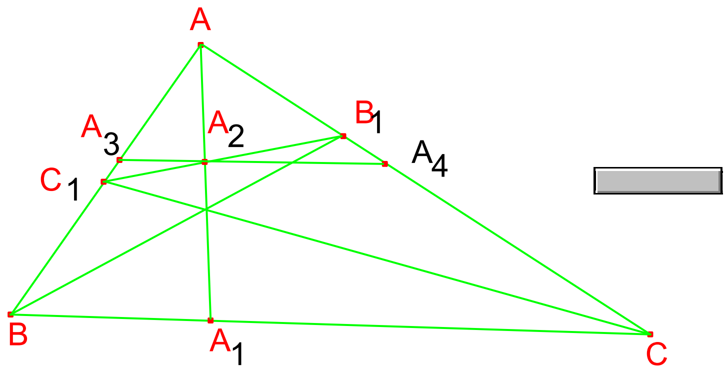
$$=16\left(R^4-R^2\left(u^2+v^2\right)+u^2v^2\right)=16\left(R^4-R^2d^2+u^2v^2\right)(8)$$

Từ $(6);(7);(8)$ suy ra: p^2 đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) $\Leftrightarrow$ $AC+BD$ đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) $\Leftrightarrow AC.BD$ đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) $\Leftrightarrow u^2v^2$ đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất).

Câu 33. (THPT Chuyên Hà Giang – Olympic Hùng Vương lần X - 2014)

Cho tam giác ABC có chu vi p. Các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 cắt các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng tại A_2, B_2, C_2. Đường thẳng qua A_2 song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự A_3, A_4. Đường thẳng qua B_2 song song với AC cắt BC, BA theo thứ tự tại B_3, B_4. Đường thẳng qua C_2 song song với AB cắt CA, CB Theo thứ tự C_3, C_4. Chứng minh rằng $AB_4+BC_4+CA_4+BA_3+CB_3+AC_3 \le p$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải



Đặt BC = a, AC = b, BA = c, p = a+b +c.

Vì $A_3A_4 \parallel BC$ nên theo định lí Talet ta có: $\dfrac{BA_3}{AB}=\dfrac{CA_4}{AC}=\dfrac{A_1A_2}{AA_1} \Leftrightarrow \dfrac{BA_3+CA_4}{b+c}=1-\dfrac{AA_2}{AA_1}$ **(1)**

Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc C: $\dfrac{C_1A}{C_1B}=\dfrac{AC}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{C_1A}{AB}=\dfrac{AC}{AC+BC} \Rightarrow C_1A=\dfrac{AB.AC}{AC+BC}=\dfrac{c.b}{a+b}$

Tương tự: $AB_1=\dfrac{c.b}{a+c}$

Sử dụng công thức đường phân giác cho tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$

$$AA_1=\frac{2c.b\cos\frac{A}{2}}{b+c};AA_2=\frac{2AB_1.AC_1\cos\frac{A}{2}}{AB_1+AC_1}$$

Do đó: $\frac{AA_2}{AA_1}=\frac{b+c}{2a+b+c}$ **(2)**

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{BA_3+CA_4}{b+c}=1-\frac{b+c}{2a+b+c}=\frac{2a}{2a+b+c}$$

Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta nhận được:

$$BA_3+CA_4=\frac{2a(b+c)}{2a+b+c}\le\frac{\left(\frac{2a+(b+c)^2}{2}\right)}{2a+b+c}=\frac{2a+b+c}{4} \text{ (3)}$$

Hoàn toàn tương tự: $AB_4+CB_3\le\frac{2b+c+a}{4}$ **(4);** $BC_4+AC_3\le\frac{2c+b+a}{4}$ **(5)**

Từ (3), (4) và (5) suy ra: $AB_4+BC_4+CA_4+BA_3+CB_3+AC_3\le a+b+c=p$ **(đpcm)**

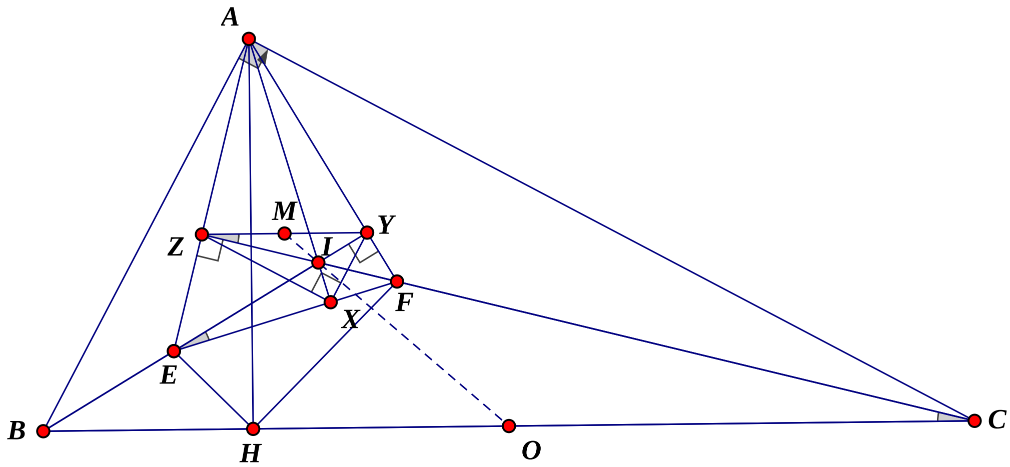
Dấu bằng xảy ra khi a = b =c.

VI. Các bài toán khác

Câu 34. (THPT Chuyên Chu Văn An – Lạng Sơn - Thi Toán 11)

Cho tam giác ABC **vuông tại** A **và** I **là tâm đường tròn nội tiếp của nó. Gọi** AH **là đường cao từ đỉnh** A **của tam giác** ABC **và** E**,** F **lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác** AHB**,** AHC **tương ứng. Gọi** O **là trung điểm của** BC**. Chứng minh** IO **là đường thẳng Euler của tam giác** AEF **.**

Lời giải



***Chứng minh*: Ta có**

$\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle HAC=\angle HAF$ **và** $AH\perp BH\Rightarrow BE\perp AF$**. Tương tự ta có** $CF\perp AE$ **.**

Gọi giao điểm của *AI, BI, CI* với *EF, FA, AE* tương ứng là *X, Y, Z*. Khi đó, *I* là trực tâm *AEF*.

Ta có $\angle IAF=\angle IAC-\angle CAF=45^0-\frac{1}{2}\angle BAD=45^0-\frac{\angle B}{2}=45^0-\frac{90^0-\angle C}{2}$

$=\frac{\angle C}{2}=\angle ICA$, suy ra $\Delta IAF:\ ICA\Rightarrow\frac{IA}{IC}=\frac{IF}{IA}\Rightarrow IA^2=IC.IF$. Hoàn toàn tương tự, ta có $IA^2=IB.IE$, nên ta có $IB.IE=IC.IF\Rightarrow$ ***BEFC*** nội tiếp, nên suy ra $\angle IEF=\angle FCB$. Vì tứ giác ***EZYF*** nội tiếp nên $\angle IZY=\angle IEF\Rightarrow YZ\ PBC=\angle FCB$. Hơn nữa, gọi ***M*** là trung điểm của ***YZ***, theo định lí Thales suy ra ***I, M, O*** thẳng hàng. Mặt khác, các tứ giác ***AYXE, AZXF*** nội tiếp nên ta có

$\angle ZXY=\angle ZXA+\angle YXA=\angle ZFA+\angle YEA=\angle ACF+\angle CAF+\angle ABE+\angle BAE=90^0$ nên ***M*** là tâm ngoại tiếp của ***XYZ***, suy ra ***M*** là tâm ***Euler*** của ***AEF***, suy ra ***IM*** là đường thẳng ***Euler*** của ***AEF*** nghĩa là ***OI*** là đường thẳng ***Euler*** của tam giác ***AEF*** W

Câu 35. (THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Yên Bái – Toán 11)

Cho tam giác ABC với trọng tâm G nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Các tia

AG, BG, CG cắt đường tròn tại D, E, F. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}\ge\frac{3}{R}.$$

Lời giải

Gọi các trung tuyến của ΔABC là AM, BN, CP và đặt

$AB=c, AC=b, BC=a, AM=m_a$

Xét phương tích của M đối với đường tròn ta có

$$MD.MA=MB.MC \quad \text{hay } MD.m_a=\frac{a^2}{4}, MD=\frac{a^2}{4m_a}$$

$$\Rightarrow GD=GM+MD=\frac{1}{3}m_a+\frac{a^2}{4m_a}$$

Từ $GA=\frac{2}{3}m_a$ **và từ (2) ta có:**

$$\frac{GA}{GD}=\frac{\frac{2}{3}m_a}{\frac{1}{3}m_a+\frac{a^2}{4m_a}}=\frac{8m_a^2}{4m_a^2+3a^2}$$

Mà $4m_a^2=2\left(b^2+c^2\right)-a^2$ **khi đó ta được**

$$\frac{GA}{GD}=\frac{2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}{2b^2+2c^2-a^2+3a^2}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự ta tính được các tỷ số $\frac{GB}{GE},\frac{GC}{GF}$

$$\frac{GA}{GD}+\frac{GB}{GE}+\frac{GC}{GF}=3$$

Ta có

$$\frac{AD}{GD}+\frac{BE}{GE}+\frac{CF}{GF}=3+\frac{GA}{GD}+\frac{GB}{GE}+\frac{GC}{GF}=6 \quad (4)$$

Do các dây AD, BE, CF **đều không lớn hơn** $2R$ **nên thay vào 4 ta có**

$$6=\frac{AD}{GD}+\frac{BE}{GE}+\frac{CF}{GF}\le\frac{2R}{GD}+\frac{2R}{GE}+\frac{2R}{GF}$$

Từ đó ta có: $\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}\ge\frac{3}{R}$

Câu 36. (Sở GDĐT Quảng Ninh – Chuyên Hạ Long – 2013- Toán 11)

Cho tam giác ABC **cân tại** A**. Gọi** D **là trung điểm của** AC**. Đường tròn ngoại tiếp tam giác** BCD **giao với phân giác góc** $\angle BAC$ **tại** E **nằm trong tam giác** ABC**. Đường tròn ngoại tiếp tam giác** ABE **giao với** BD **tại** F $(F\ne B)$, AF **giao với** BE **tại** I**.** CI **giao với** BD **tại** K**. Chứng minh rằng** I **là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác** ABK**.**

Lời giải

Gọi D' là trung điểm của AB và M là trung điểm cạnh BC.

Ta có D' nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$**. Do tính đối xứng nên suy ra** $\widehat{D'E}=\widehat{ED}$ **suy ra** $\widehat{ABI}=\widehat{D'BE}=\widehat{EBD}=\widehat{IBK}$

suy ra I nằm trên phân giác góc $\widehat{ABK}$ **hay BI là tia phân giác góc** $\widehat{ABK}$ **(1) 1.0 đ**

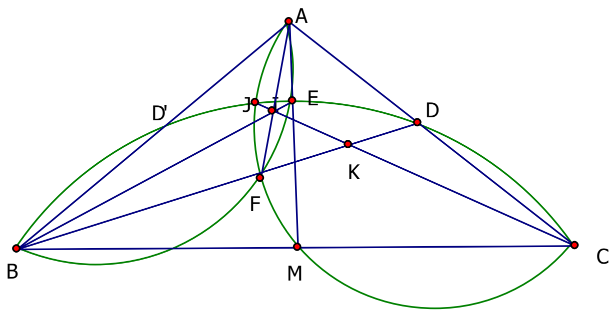
Ta có: $\widehat{DFA}=180^o-\widehat{BFA}=180^O-\widehat{BEA}=\widehat{MEB}=\frac{1}{2}\widehat{CEB}=\frac{1}{2}\widehat{CDB}$

=> $\widehat{DFA}=\widehat{DAF}$ **suy ra** $\triangle$ **AFD cân tại D. 1.0**

Do IA.IF = IE.IB nên I thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn ngoại tiếp ΔBCD**. Từ đó CI đi qua giao điểm thứ hai J của hai đường tròn này. 1,0**

Ta có $\widehat{DCJ}=\widehat{DJC}=\widehat{DBC}$ **nên** $DA^2=DC^2=DK.DB$

Suy ra $\widehat{DAK}=\widehat{DBA}$ **hay** $\widehat{FAD}-\widehat{FAK}=\widehat{DFA}-\widehat{BAF}$**. Từ đó** $\widehat{FAK}=\widehat{BAF}$ **. Ta có (đpcm) 1.0**

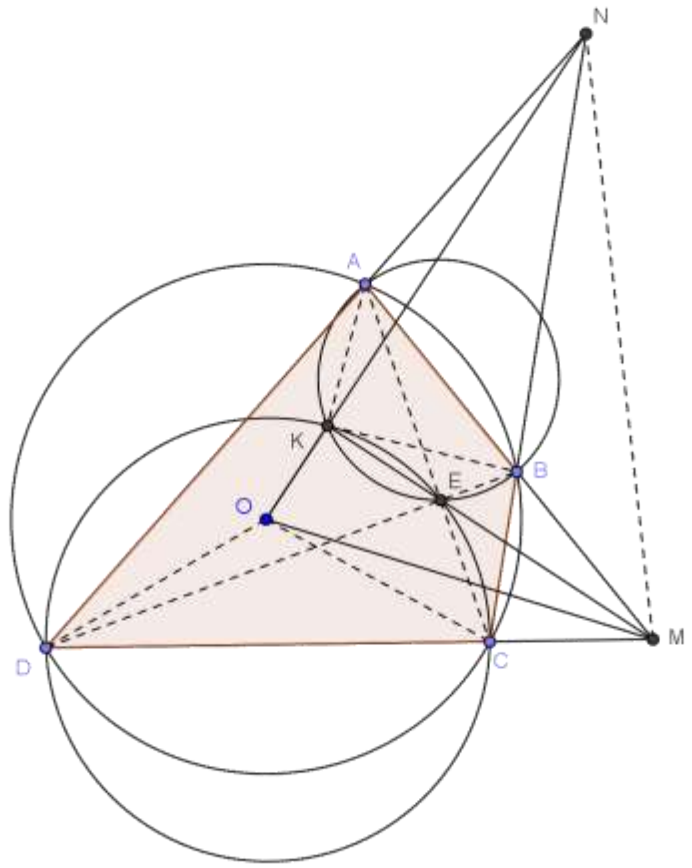


Câu 37. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định – Chọn học sinh giỏi mở rộng 2013-2014 – Toán 11)

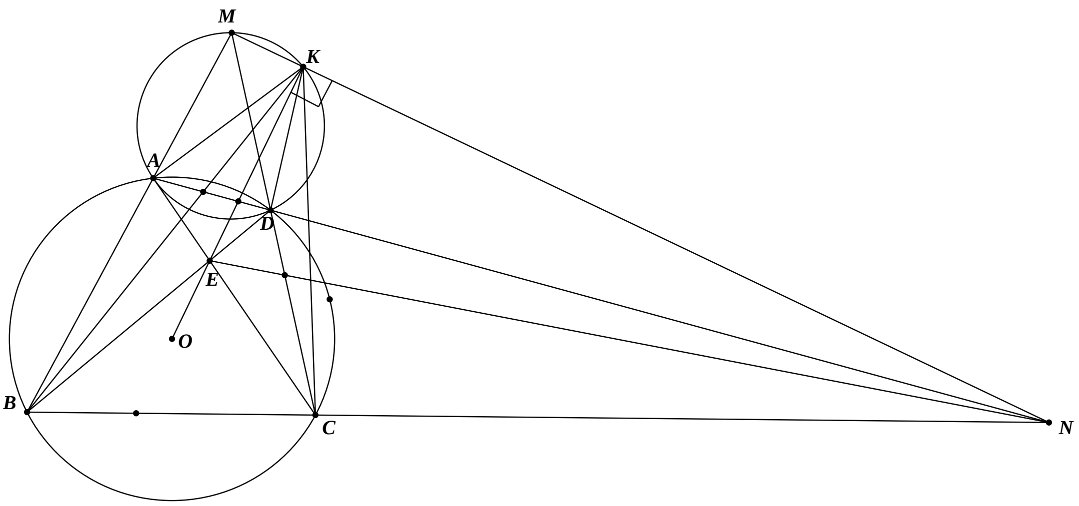
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Giả sử AD cắt BC tại N, AB cắt CD tại M, AC cắt BD tại E. Đường thẳng IE cắt MN tại K. Chứng minh KO là phân giác của góc BKD.

Lời giải

Trước hết có bổ đề (Định lý Brocard):
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có M, N lần lượt là giao điểm của các cặp cạnh đối AB, CD và AD, BC. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó, ta có $EO \perp MN$.
Thật vậy, gọi K là giao điểm khác E của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, CDE.
Trước hết, ta thấy rằng K, E, M cùng nằm trên trục đẳng phương của $(ABE), (CDE)$ nên chúng thẳng hàng.
Ta cũng có $\angle BKC = \angle BKE + \angle CKE = \angle EAB + \angle EDC = \angle BOC$ nên tứ giác $OKBC$ nội tiếp. Tương tự thì tứ giác $OKAD$ cũng nội tiếp. Suy ra K cũng chính là giao điểm thứ hai khác O của hai đường tròn $(OBC), (OAD)$ nên các điểm O, K, N cũng thẳng hàng vì cùng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn này.



Mặt khác, cũng bằng cách xét các góc nội tiếp trong các tứ giác nội tiếp, ta có
$\angle MKN = \angle MKB + \angle NKB = \angle EAB + \angle OCB = \angle EDC + \angle OBC = \angle EKC + \angle OKC = \angle MKO$.
Hơn nữa, đây là hai góc bù nhau nên mỗi góc bằng 90° hay $ME \perp ON$.
Chứng minh tương tự, ta có $NE \perp OM$ hay E là trực tâm của tam giác OMN và $OE \perp MN$.
Định lí được chứng minh.
Giải bài toán như hình vẽ dưới
Theo định lý trên ta có $OK \perp MN$.



Chứng minh các tứ giác KDCN và MKCB nội tiếp
Thật vậy: Theo hệ thức quen thuộc

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = R^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM}\right)\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KN}\right) = R^2 \Rightarrow OK^2 - \overrightarrow{KM}\left(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MN}\right) = R^2$$

Suy ra $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{MN} = OM^2 - R^2 = \text{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}$ **, hay tứ giác KDCN nội tiếp**

Tương tự ta có MKCB nội tiếp

Suy ra $\widehat{DKN} = \widehat{DCB} = \widehat{MCB} = \widehat{MKB}$

Suy ra điều phải chứng minh

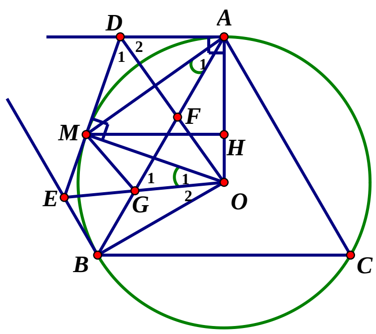
Câu 38. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên – Trại hè lần X – Toán 11)

Cho tam giác đều ABC **nội tiếp đường tròn** $(O;\, R)$**.** H **là một điểm di động trên đoạn** OA $(H \neq A)$**. Đường thẳng đi qua** H **và vuông góc với** OA **cắt cung nhỏ** AB **tại** M **. Gọi** K **là hình chiếu của** M **trên** OB**.**

a) Các tiếp tuyến của $(O;\, R)$ **tại** A **và** B **cắt tiếp tuyến tại** M **của** $(O;\, R)$ **lần lượt tại** D **và** E**.** OD**,** OE **cắt** AB **lần lượt tại** F **và** G**. Chứng minh** $OD.GF = OG.DE$

b) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB **theo** R**.**

Lời giải



Có tứ giác AOMD nội tiếp (4)

$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BM}$; $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BM}$

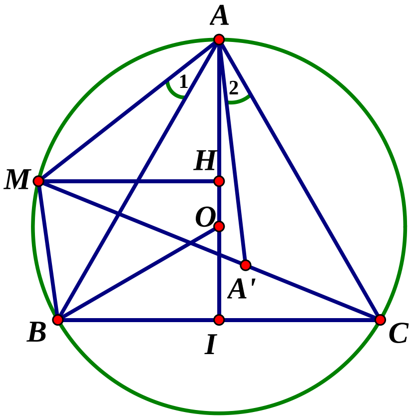
$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{O}_1 \Rightarrow$ **tứ giác AMGO nội tiếp (5)**

Từ (4), (5) ta có 5 điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \hat{G}_1 = \hat{D}_2 = \hat{D}_1$

$\Rightarrow \Delta OGF$ **và** ΔODE **đồng dạng**

$\Rightarrow \frac{OG}{OD} = \frac{GF}{DE}$ **hay OD.GF = OG.DE.**



Trên đoạn MC lấy điểm A' sao cho MA' = MA $\Rightarrow \Delta AMA'$ **đều**

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Chu vi tam giác MAB là [illegible]

Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O) => M là điểm chính giữa cung AM

=> H là trung điểm đoạn AO

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB

Gọi I là giao điểm của AO và BC [illegible]

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB = $(2+\sqrt{3})R$

Câu 39. (Sở SDĐT Hòa Bình – THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Đề chọn học sinh giỏi Toán 11)

Cho tam giác ABC **nội tiếp đường tròn tâm** O**. Đường tròn tâm** I **tiếp xúc với hai cạnh** AC, BC **lần lượt tại** E, F **và tiếp xúc trong với đường tròn tâm** O **tại điểm** P**. Một đường thẳng song song với** AB **tiếp xúc với đường tròn tâm** I **tại điểm** Q **nằm trong tam giác** ABC**.**

a. Gọi K, L **lần lượt là giao điểm thứ hai của** PE **và** PF **với** (O)**. Chứng minh rằng** $KL // EF$**.**

b. Chứng minh rằng $\widehat{ACP} = \widehat{QCB}$.

Lời giải

a) Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ.

Xét phép vị tự V tâm P biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự V biến E, Q, F lần lượt thành K, M, L.

Theo tính chất của phép vị tự ta có EF song song với KL.

Ta có OK là ảnh của IE qua V, dẫn đến $OK//IE$ **mà** $IE \perp AC \Rightarrow OK \perp AC$ **, suy ra K là điểm chính giữa của cung AC. Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung AB.**

b) Ta có

$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BL} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{KA}$

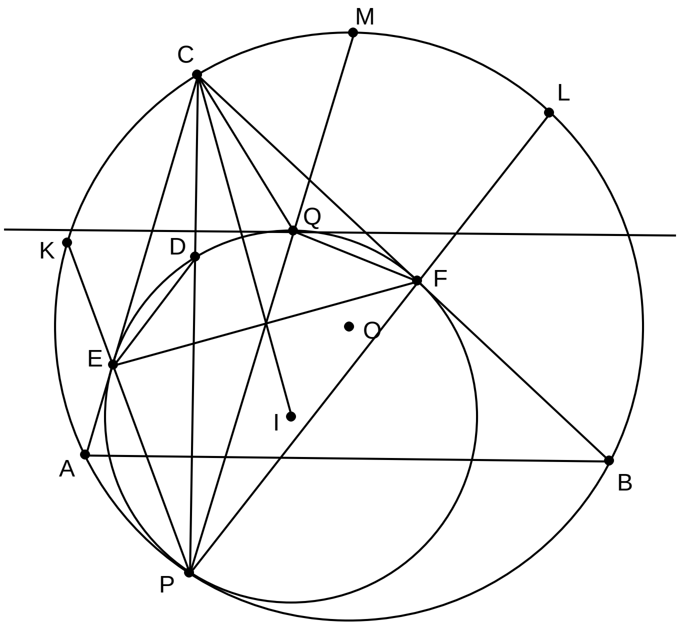
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{CK}$

$\Leftrightarrow 2\overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MC} + 2\overset{\frown}{CK}$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{CK}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{FQ}$ **(tính chất phép vị tự).**

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{QFC}$ **(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.**

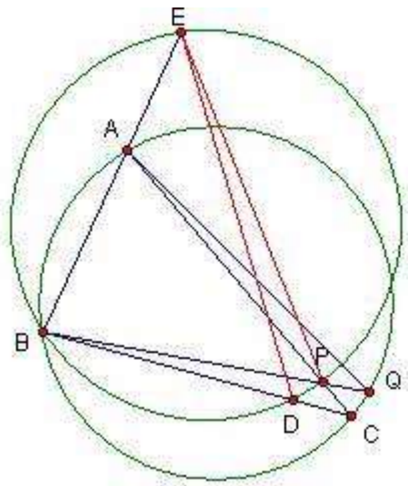


Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$ **, dẫn đến** $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$ **. Từ đó ta có điều phải chứng minh.**

Câu 40. (THPT Chuyên Hùng Vương Tỉnh Phú Thọ – Trại hè Hùng Vương lần X)

Tam giác ABC **vuông có** $BC > CA > AB$**. Gọi** D **là một điểm trên cạnh** BC**,** E **là một điểm trên cạnh** AB **kéo dài về phía** A **sao cho** $BD = BE = CA$**. Gọi** P **là một điểm trên cạnh** AC **sao cho** E**,** B**,** D**,** P **nằm trên một đường tròn.** Q **là giao điểm thứ hai của** BP **với đường tròn ngoại tiếp tam giác** ABC**. Chứng minh rằng:** $AQ + CQ = BP$.



Lời giải

Xét các tứ giác nội tiếp $ABCQ$ **và** $BEPD$ **ta có:**

$\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}$

(cùng chắn các cung tròn)

Mặt khác $\widehat{AQC} = 108^0 - \widehat{ABC} = \widehat{EPD}$

Xét ΔAQC **và** ΔEPD **có:**

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AQC} = \widehat{EPD},\end{array}\right. \begin{array}{l}\widehat{CAQ} = \widehat{DEP} \Rightarrow \Delta AQC \backsim \Delta EPD \\ \Rightarrow \dfrac{AQ}{EP} = \dfrac{CA}{ED} \Rightarrow AQ.ED = EP.CA = EP.BD \quad (1)\end{array}$$

(do $AC = BD$**)**

$$\frac{AC}{ED} = \frac{QC}{PD} \Rightarrow ED.QC = AC.PD = BE.PD \quad (2)$$

(do $AC = BE$ **)**

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $BEPD$ **ta có:**

$$EP.BD + BE.PD = ED.BP \quad (3)$$

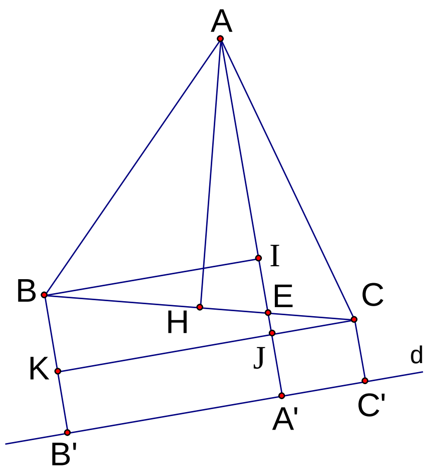
Từ(1), (2), (3) suy ra $AQ.ED + QC.ED = ED.BP \Rightarrow AQ + QC = BP$ **.■**

Câu 41. (Trường PT vùng cao Việt Bắc – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho tam giác ABC **đều cạnh** a **và một đường thẳng** d **tùy ý. Gọi** A'**,** B'**,** C' **lần lượt là hình chiếu của** A**,** B**,** C **trên** d**. Chứng minh rằng**

$$B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

Lời giải



Gọi E **là giao của** BC **và** AA'**,** I, J **lần lượt là hình chiếu của** B, C **trên** AA'**,** K **là hình chiếu của** C **trên** BB'**.**

$$\Delta BIE \backsim \Delta AHE \Rightarrow \frac{BI}{AH} = \frac{BE}{AE} \Rightarrow BI = \frac{AH.BE}{AE}$$

$$\Delta CJE \backsim \Delta AHE \Rightarrow \frac{CJ}{AH} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow CJ = \frac{AH.CE}{AE}$$

$$\triangle CKB \backsim \triangle AHE \Rightarrow \frac{CK}{AH}=\frac{CB}{AE} \Rightarrow CK=\frac{AH.CB}{AE}$$

Mặt khác, ta có

$$B'C'^2+C'A'^2+A'B'^2=CK^2+CJ^2+BI^2$$

$$=\frac{AH^2.BC^2}{AE^2}+\frac{AH^2.CE^2}{AE^2}+\frac{AH^2.BE^2}{AE^2}=\frac{AH^2}{AE^2}\left(BC^2+CE^2+BE^2\right)$$

$$=\frac{AH^2}{AE^2}\left[BC^2+\left(CH-HE\right)^2+\left(BH+HE\right)^2\right]$$

$$=\frac{AH^2}{AE^2}\left(BC^2+2BH^2+2HE^2\right)=\frac{AH^2}{AE^2}\left[BC^2+2BH^2+2\left(AE^2-AH^2\right)\right]$$

$$=\frac{AH^2}{AE^2}\left[BC^2+2BH^2+2AE^2-2BC^2+2BH^2\right]$$

$$=2AH^2=\frac{3a^2}{2}$$