Mở rộng bài hình học trong IMO shortlist 2011

Trần Quang Hùng

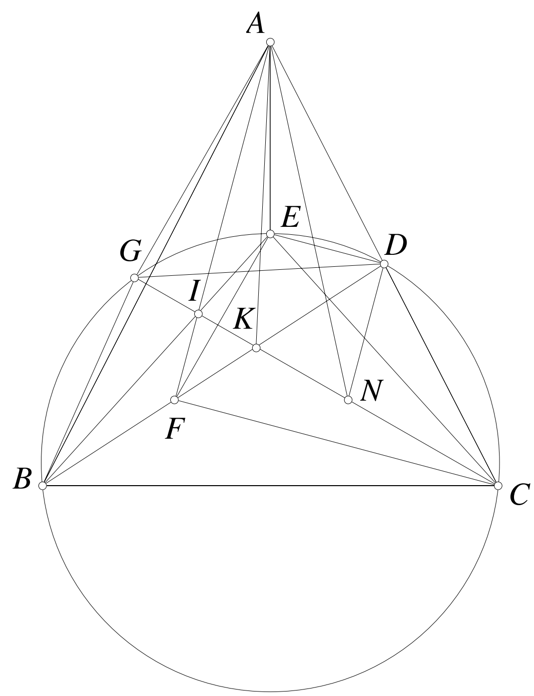
Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng và chứng minh bài hình học G6 trong IMO shortlist 2001

Trong IMO shortlist 2001 có bài hình học G6 rất hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC cân tại A với D là trung điểm AC. Phân giác góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại E nằm trong tam giác ABC. BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.

Lời giải sau tác giả kết hợp ý tưởng của junioragd và JuanOrtiz trong [1]

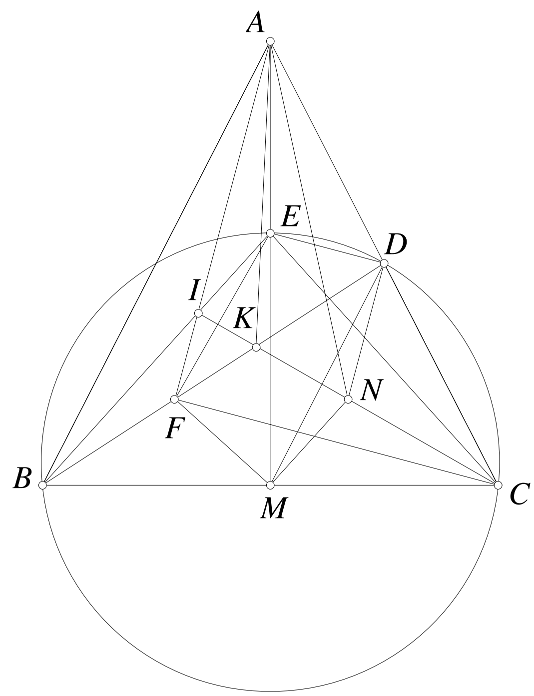


Hình 1.

Lời giải 1. Dễ thấy BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF. Từ đó tam giác AEF cân lại dễ thấy DE là phân giác $\angle ADF$. Từ đó theo một tính chất quen thuộc của tam giác cân thì tam giác DAF cân. Vậy $DA = DC = DF$ nên tam giác AFC vuông tại F. Gọi CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại G khác C. Ta có $IG.IC = IA.IB = IF.IA$ nên tứ giác $AGFC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC. Từ đó $KB.KD = KG.KC = DA^2 - DK^2$ suy ra $DA^2 = KB.KD + KD^2 = DK.DB$. Từ đó $\angle DAK = \angle DAB$. Lại có $\angle GKA = \angle KGD + \angle KDG = \angle DCG + \angle GCB = \angle ACB$. Vậy $\angle GKA = 180^\circ - \angle DKA - \angle GKB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \angle ACB = \angle ABC = \angle GKA$. Từ đó I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Lời giải trên chứng minh tâm nội tiếp bằng cách chỉ ra điểm đó là giao hai phân giác. Việc chứng minh góc bằng nhau được xử lý qua các hệ thức lượng mang lại rất nhiều ý nghĩa.

Lời giải sau xử dụng ý tưởng của XmL trong [1]



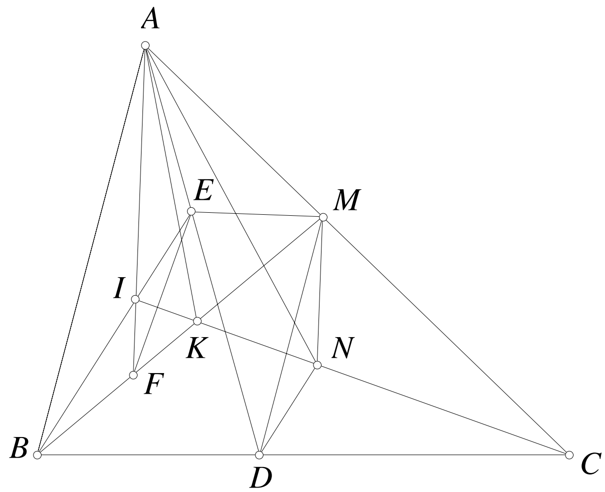
Hình 2.

Lời giải 2. Dễ thấy BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là tâm nội tiếp tam giác ABD và cũng có E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF nên hai tam giác EAI và EBA đồng dạng. Gọi N là trung điểm IC. Dễ thấy tam giác MND và BIA có cạnh tương ứng song song nên và chú ý hai tam giác EAI và EBA đồng dạng, ta có $\angle MND = \angle AIB = 180^\circ - \angle AIE = 180^\circ - \angle EAB = 180^\circ - \angle MAD$. Vậy tứ giác $ADNM$ nội tiếp. Vậy $\angle DAN = \angle DMN = \angle IBA = \angle IBF = \angle IAE$. Lại có $\angle DNA = \angle DMA = \angle BAE = \angle AIE$. Vậy hai tam giác ADN và AEI đồng dạng. Từ đó hai tam giác AIN và AED đồng dạng. Vậy $\angle AIN = \angle AED = 90^\circ + \dfrac{\angle ABD}{2}$ nên I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải xử dụng ý tưởng quan trọng để chứng minh tâm nội tiếp chính là nếu có điểm I nằm trên phân giác trong góc $\angle BAC$ và nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$ thì I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Một cách tự nhiên chúng ta thấy bài toán phát biểu trên tam giác cân vậy ta suy nghĩ xem liệu với tam giác bất kỳ thì sao. Tối đã tổng quát bài toán trên tam giác bất kỳ như sau xem [2]

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với phân giác AD. M thuộc CA sao cho $DM \parallel AB$. Phân giác $\angle ABM$ cắt AD tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt BM tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BM tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.

Ý tưởng chứng minh tương tự bài toán gốc, lời giải sau xử dụng ý tưởng của XmL trong [2]

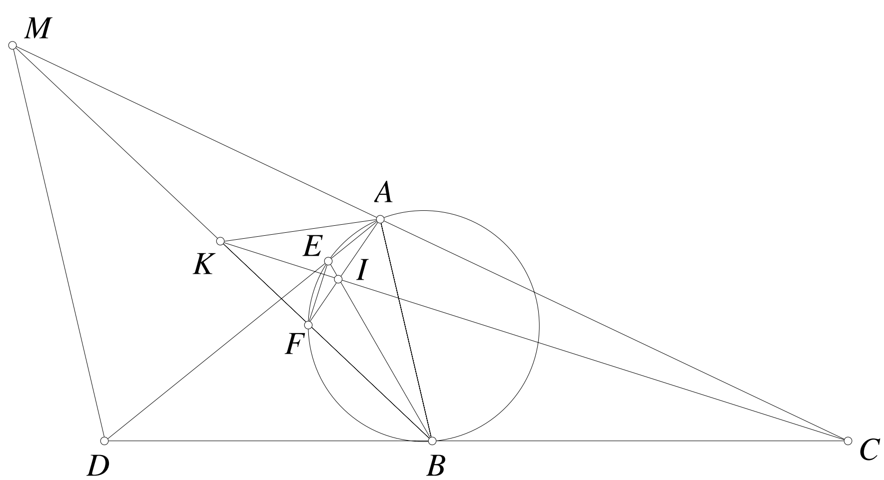


Hình 3.

Lời giải. Do BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là tâm nội tiếp tam giác ABD và cũng có E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF nên hai tam giác EAI và EBA đồng dạng. Gọi N là điểm thuộc IC sao cho $MN \parallel IA$ từ $DM \parallel AB$ suy ra $DN \parallel IB$. Từ đó $\angle MND = \angle AIB = 180^\circ - \angle EIA = 180^\circ - \angle EIA = 180^\circ - \angle EAB = 180^\circ - \angle EAC$ suy ra tứ giác $AMND$ nội tiếp. Từ đó $\angle MAN = \angle MDN = \angle ABI = \angle IBF = \angle IAE$. Lại có $\angle MNA = \angle MDA = \angle DAB = \angle EIA$. Vậy hai tam giác AEI và AMN đồng dạng. Suy ra hai tam giác AIN và AEM đồng dạng. Từ đó $\angle AIN = \angle AEM = 90^\circ + \dfrac{\angle ABM}{2}$ nên I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. □

Việc phát biểu bài toán trên phân giác trong sẽ gợi cho chúng ta một cách phát biểu trên phân giác ngoài như sau

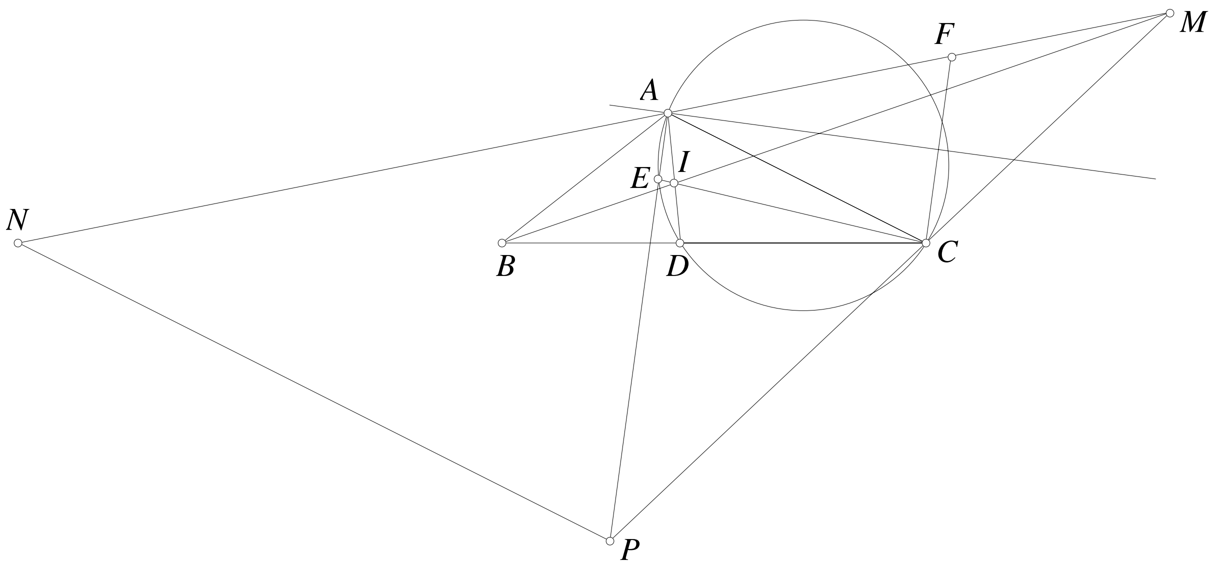
Bài toán 3. Cho tam giác ABC với phân giác ngoài AD. M thuộc đường thẳng CA sao cho $DM \parallel AB$. Phân giác $\angle ABM$ cắt AD tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt BM tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BM tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.



Hình 4.

Lời giải cho trường hợp phân giác ngoài hoàn toàn tương tự. Chúng ta đi tới một số ứng dụng sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với phân giác AD và tâm nội tiếp I. CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tại E khác C. F là đối xứng của C qua đường thẳng qua A vuông góc AE. AF cắt BI, BC tại M, N. MC cắt AE tại P. Chứng minh rằng $NP \parallel AC$.



Hình 5.

Tài liệu

[1] IMO Shortlist 2011, G6

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h488831p2739334

[2] Prove that I is incenter

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h520297p2930447

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Hai bài hình học thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết sẽ giải và phân tích hai bài hình học thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015.

Thông thường bài thi phần hình học hay là bài toán phân loại được học sinh và đề bài có ý nghĩa. Các câu trong đề liên quan chặt chẽ tới nhau, câu trước gợi ý cho câu sau và nếu chỉ dùng một câu cuối cùng thì bài toán trở thành đẹp có ý tưởng. Chúng ta hãy cùng đi sâu vào hai bài thi năm nay

1 Bài hình học ngày thứ nhất

Để thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015 vòng 1 có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của D qua IC, IB.

a) Chứng minh rằng EF song song với BC.

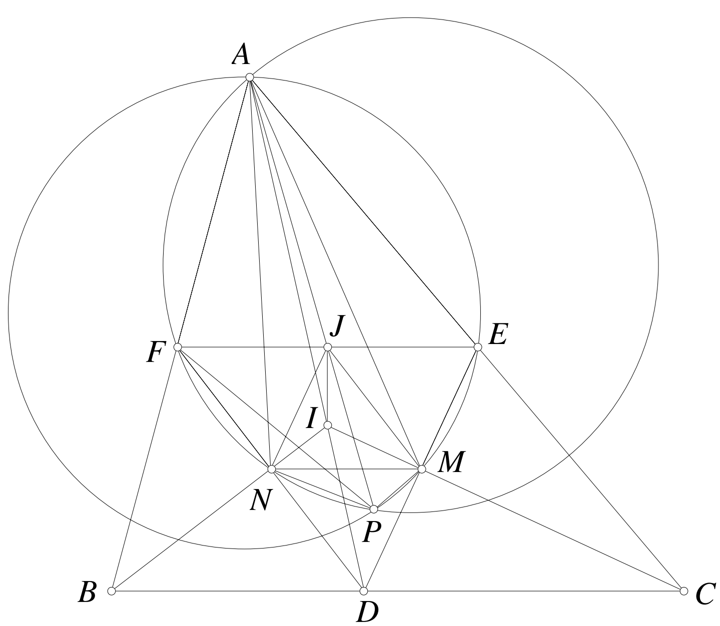
b) Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN cắt nhau tại P khác A. Chứng minh rằng bốn điểm P, M, J, N cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh rằng ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Bài toán này là kết quả có ý nghĩa, nếu bỏ đi các phần gợi ý, bài toán có thể phát biểu như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của D qua IC, IB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN cắt nhau tại P khác A. Chứng minh rằng AP chia đôi BC.

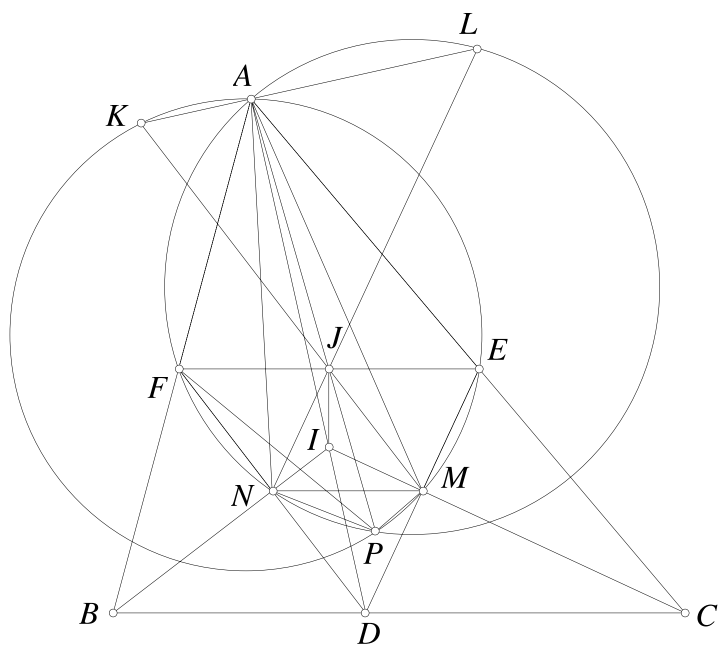
Lời giải đi theo hướng của bài toán hẳn nhiên là một lời giải thuần túy hình học chỉ dùng kiến thức lớp 9



Hình 1.

Lời giải 1. Theo tính chất đối xứng của phân giác dễ thấy E, F lần lượt thuộc CA, AB. Từ đó theo tính chất phân giác $\frac{BF}{BA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CA}$ vậy $EF \parallel BC$. Gọi J là trung điểm EF ta có $\angle MPN = \angle MPA + \angle NPA = \angle MEC + \angle NFB = \angle MDC + \angle NDB = 180° - \angle MDN = 180° - \angle MJN$, suy ra tứ giác $MJNP$ nội tiếp. Từ đó $\angle MPJ = \angle MNJ = \angle MEJ = \angle EDC = \angle DEC = \angle MPA$ suy ra AP chia đôi EF mà $EF \parallel BC$ nên AP chia đôi BC. □

Nhận xét. Đây có thể hiểu là một bài toán trục đẳng phương chia đôi đoạn thẳng. Tuy nhiên lời giải trên hoàn toàn không để cập tới khái niệm trục đẳng phương mà chỉ cần biến đổi góc. Nếu sử dụng ý tưởng về trục đẳng phương ta sẽ đề xuất lời giải thứ 2 như sau



Hình 2.

Lời giải 2. Gọi J là trung điểm EF. Gọi MJ, NJ cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và AFN tại K, L khác M, N. Ta thấy $\angle KAL = \angle NAL + \angle MAK - \angle BAC = 180° - \angle FNL + 180° - \angle EMK - \angle BAC = 360° - 2\angle EDF - \angle BAC = 360° - 2(180° - \angle BIC) - \angle BAC = 2(90° + \frac{\angle ABC}{2}) - \angle BAC = 180°$. Từ đó K, A, L thẳng hàng. Vậy $\angle KLN = \angle ALN = \angle BFD = \angle BDF = \angle EFD = \angle JMN$. Từ đó tứ giác $MNKL$ nội tiếp vậy J thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN hay AP đi qua J vậy AP chia đôi BC. □

Nhận xét. Bài toán này là một bài toán chia đôi đoạn thẳng thú vị. Nếu sử dụng biến hình vị tự các bạn có thể làm tiếp bài ứng dụng sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. IA cắt BC tại D. E, F là hình chiếu của D lên IC, IB. AE cắt phân giác ngoài ở đỉnh C tại M. AF cắt phân giác ngoài ở đỉnh B tại N. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN chia đôi BC.

2 Bài hình học ngày thứ hai

Để thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015 vòng 2 có bài hình học như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. H là hình chiếu của B lên AM. Trên tia đối tia AM lấy điểm N sao cho $AN = 2MH$.

a) Chứng minh rằng $BN = AC$.

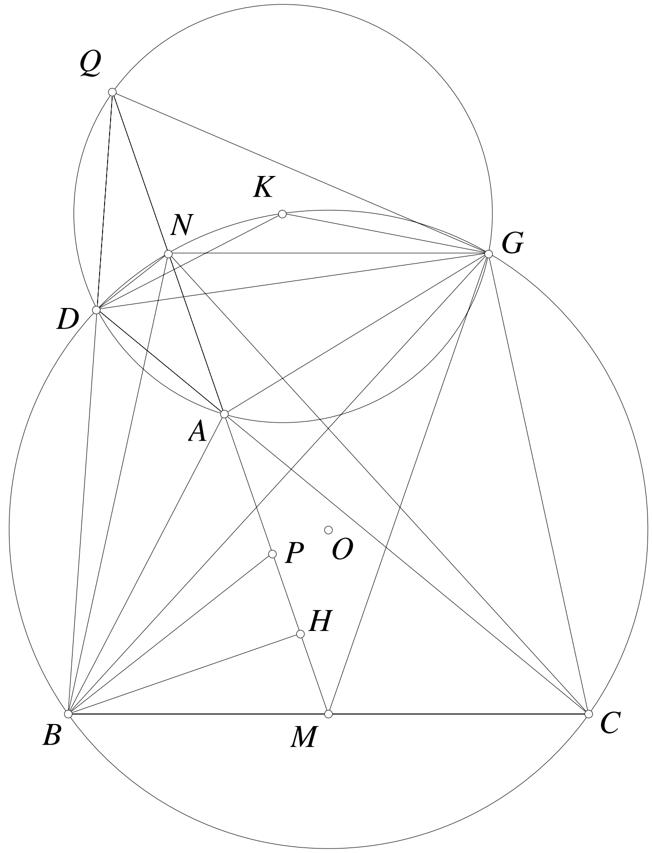
b) Gọi Q đối xứng với A qua N. Gọi AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn. Gọi đường tròn này là (O).

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt (O) tại G khác D. Chứng minh rằng NG song song với BC.

Bài toán là kết quả có ý nghĩa, nếu bỏ đi các phần gợi ý bài toán trở thành như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. H là hình chiếu của B lên AM. Lấy điểm Q trên tia đối tia AM sao cho $AQ = 4MH$. AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Lời giải. Gọi N là trung điểm AQ. Gọi P đối xứng M qua H thì $BP = MB = MC$. Lại có $AN = 2MH = MP$ suy ra $NP = AM$. Lại có tam giác BPM cân tại B nên $\angle BPM = \angle BMP$ suy ra $\angle BPN = \angle AMC$. Từ đó suy ra hai tam giác BPN và CMA bằng nhau trường hợp c.g.c, từ đó $BN = AC$. Cũng từ hai tam giác BPN và CMA bằng nhau suy ra $\angle BNP = \angle MAC$ suy ra $\angle BNQ = \angle NAC$. Lại có $BN = AC$ và $QN = NA$. Từ đó hai tam giác NBQ và ACN bằng nhau c.g.c suy ra $\angle NBQ = \angle NCA$ suy ra tứ giác $BDNC$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác ADQ cắt (O) tại G khác D. Ta có $\angle CAG = \angle BQG$ mà $\angle GBQ = \angle GCA$ suy ra $\triangle GBQ \sim \triangle GCA$, suy ra $\dfrac{GA}{AC} = \dfrac{GQ}{QB} =$ suy ra $\dfrac{GA}{NB} = \dfrac{GQ}{NC}$ mà $\angle BNC = \angle BDC = \angle AGQ$ suy ra $\triangle NBC \sim \triangle GAQ$ suy ra $\angle GQA = \angle NCB$ suy ra $\angle NCB = \angle GDC$ suy ra $GC = NB$ suy ra $NG \parallel BC$. Từ đó $\angle DKG = 2\angle DQG = 2\angle GAC = 2\angle GNM = \angle GNM + \angle BMN = \angle GNM + \angle BPM = \angle GNM + \angle DNM = \angle DNG$. Từ đó tứ giác $DNKG$ nội tiếp. $\square$



Hình 3.

Nhận xét. Kết quả đạt được trong bài toán đòi hỏi phải dựng được điểm N. Tuy nhiên ta cũng có thể chứng minh trực tiếp mà không cần dựng điểm G bằng cách biến đổi góc như sau

Ta có $\angle NKD = \angle NKA - \angle DKA = \frac{1}{2}\angle QKA - 2\angle DQA = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\angle QDA) - 2\angle DQA = 180^\circ - \angle QDA - 2\angle DQA = \angle BDC - 2\angle ANC = \angle BNA - \angle ANC = \angle MAC - \angle ANC = \angle ACN$. Từ đó tứ giác $DNKC$ nội tiếp. Tuy vậy việc chỉ ra $NG \parallel BC$ sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị.

Ta lại để ý rằng, khác với nhiều bài toán khác trong bài toán này điều kiện $AB < AC$ là cần thiết để bài toán đúng. Điều kiện $AB < AC$ có thể diễn giải là tương đương với $\angle AMB < 90^\circ$ hay để cho H luôn nằm trên đoạn AM. Khi đó ta dễ dàng tính được đoạn $MH = \dfrac{AC^2 - AB^2}{2AM}$. Do đó ta đề xuất bài toán như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. Lấy điểm Q trên tia đối tia AM sao cho $2AQ.AM = AC^2 - AB^2$. Gọi AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Ta thử ứng dụng bài toán trên vào một vấn đề khác như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC với $AB < AC$, tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O, trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt CA tại N khác C. Lấy điểm Q trên đia đối tia AM sao cho $AQ.AM = CB.CN$. Gọi AC cắt BQ tại D. Giả sử I nằm trên đường tròn đường kính OA. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Tài liệu

[1] Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN năm 2015-2016

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về một bài toán hình học trong đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết tìm hiểu phân tích, tổng quát và ứng dụng một bài toán hình học đẹp trong đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối.

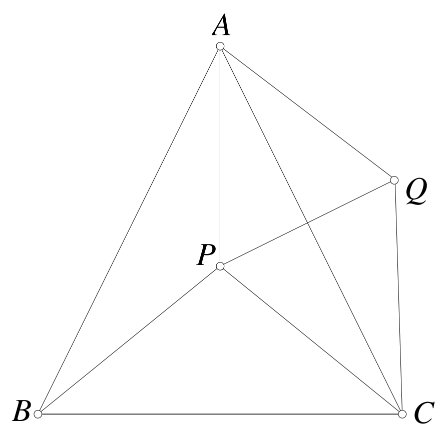
1 Bài toán và lời giải

Trong đề thi Olympic hình học Sharygin vòng cuối của Nga [1]. D.Shvetsov đề nghị bài toán hình học rất thú vị như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc $\angle A = 60°$ và phân giác AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD cắt (O) tại E khác A. Chứng minh rằng $AE \perp BC$.

Sau đây tôi xin đưa ra lời giải của mình cho bài toán này. Trước hết ta chứng minh một nhận xét rất quan trọng của tam giác cân trong chương trình hình lớp 7 như sau

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC cân tại A và điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC$. Thì $PB = PC$.

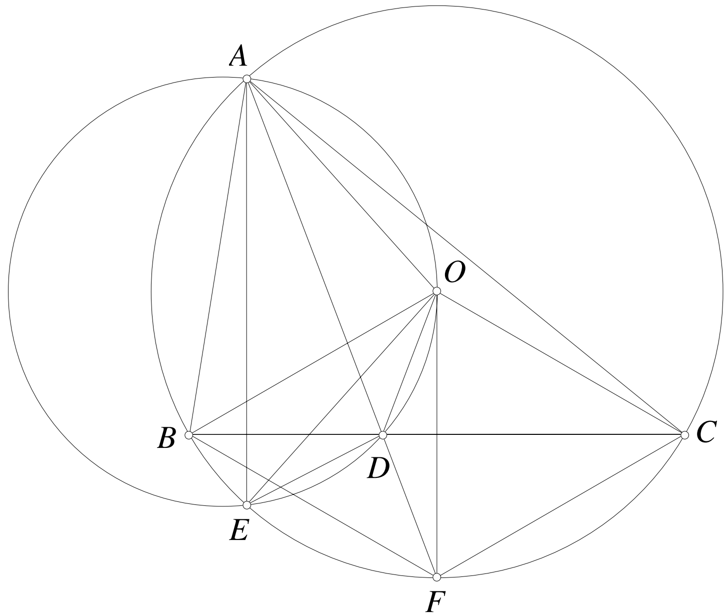


Hình 1.

Chứng minh. Dựng tam giác APQ cân tại A sao cho Q và P khác phía với AC và $\angle PAQ = \angle BAC$. Từ đó dễ chứng minh $\triangle APB = \triangle AQC$ ($c.g.c$) suy ra $PB = QC$ và $\angle AQC = \angle APB = \angle APC$. Lại có tam giác APQ cân nên suy ra $\angle APQ = \angle AQP$. Từ đó $\angle CPQ = \angle CQP$. Vậy tam giác CPQ cân tại C nên $PC = CQ = PB$. □

Nhận xét. Bài toán sẽ đúng với P nằm ngoài tam giác nhưng ở miền trong góc $\angle BAC$ hoặc miền góc đối đỉnh của $\angle BAC$. Bổ đề này dùng kiến thức đơn giản nhưng nhiều ứng dụng trong nhiều bài toán khác nhau.

Trở lại bài toán 1.

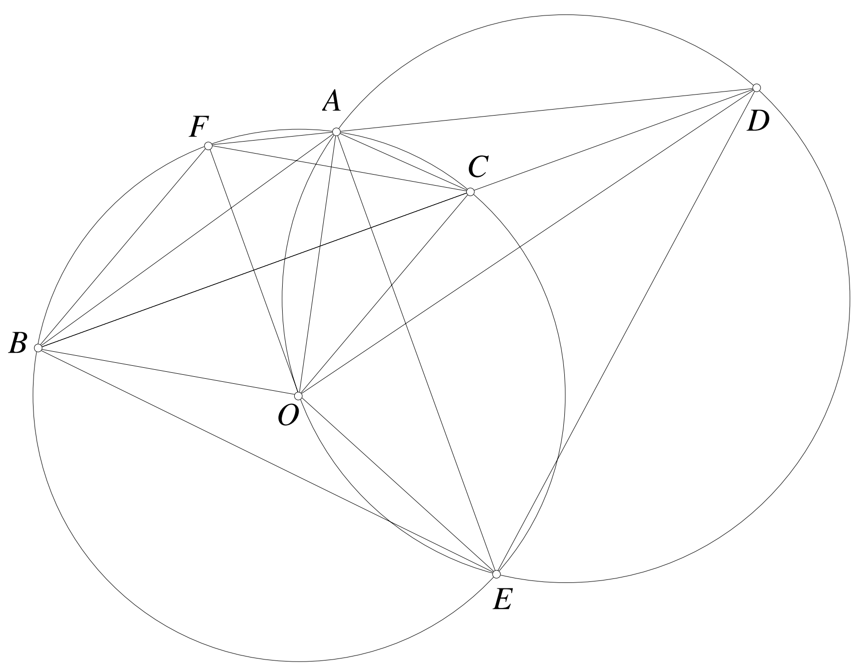


Hình 2.

Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại F khác A. Ta có $\angle ODF = 180^\circ - \angle ODA = 180^\circ - \angle OEA = 180^\circ - \angle OAE = \angle ODE$. Lại có tam giác OEF cân tại O nên theo bổ đề $DE = DF$ suy ra $\angle EOD = \angle FOD$. Ta dễ thấy hai tam giác OBF và OCF đều từ đó $FO^2 = FC^2 = FD.FA$ vậy $\angle EAD = \angle EOD = \angle FOD = \angle OAF$. Vậy AO, AE đẳng giác nên $AE \perp BC$ $\square$

Ta có ngay một mở rộng đơn giản sau khi thay bằng phân giác ngoài

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc $\angle A = 120^\circ$ và phân giác ngoài AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD cắt (O) tại E khác A. Chứng minh rằng $AE \perp BC$.



Hình 3.

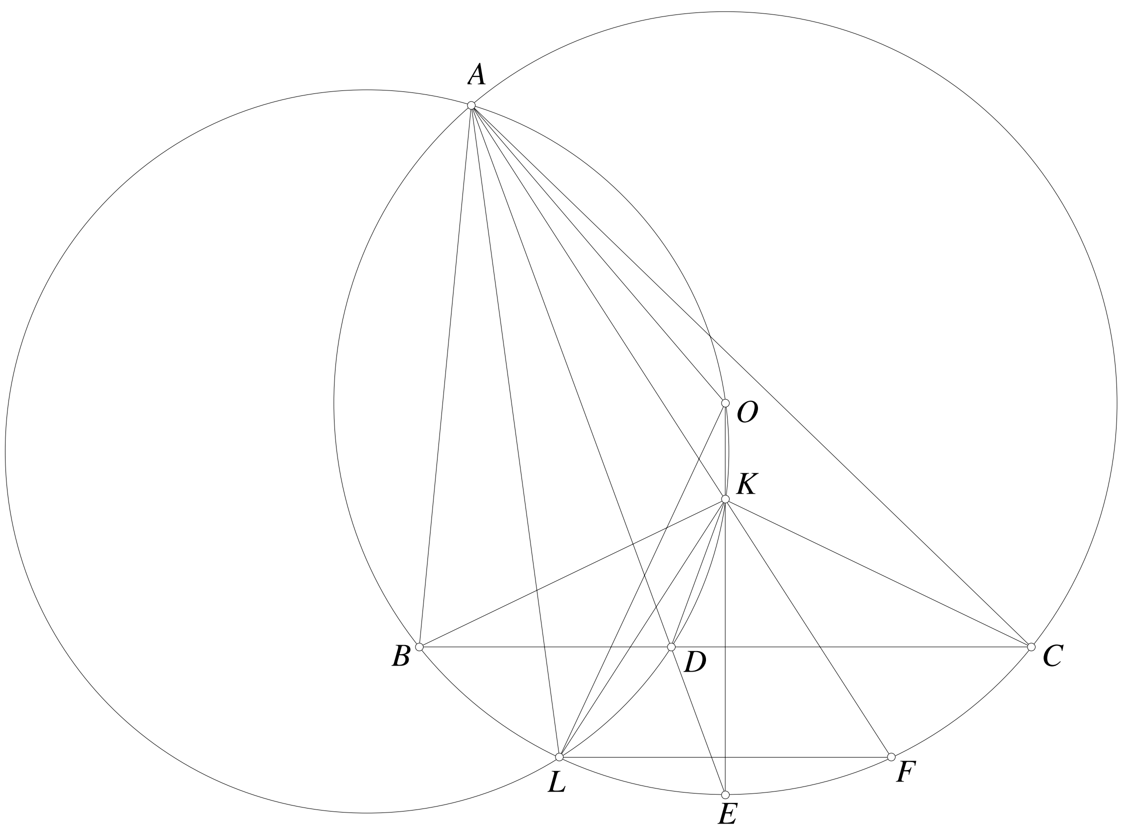
Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại F khác A. Ta có $\angle ODF = \angle OEA = \angle OAE = \angle ODE$. Lại có tam giác OEF cân tại O nên theo bổ đề $DE = DF$ suy ra $\angle EOD = \angle FOD$. Ta dễ thấy hai tam giác OBF và OCF đều từ đó $FO^2 = FC^2 = FD.FA$ vậy $\angle FAO = \angle FOD = \angle EOD = \angle EAD$ do AD là phân giác ngoài nên $\angle BAO = \angle CAE$. Vậy AO, AE đẳng giác nên $AE \perp BC$ □

Nhận xét. Cách chứng minh bài toán mở rộng với phân giác ngoài là hoàn toàn tương tự.

2 Mở rộng

Ta có nhận xét là điều kiện bài toán góc $\angle BAC = 60°$ có thể thay thế được. Chúng ta đề xuất bài toán như sau mở rộng bài toán 1

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Điểm K nằm trong tam giác sao cho $KB = KC$ và $\angle BKC + \angle BAC = 180°$. AD là phân giác của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK cắt (O) tại L khác A. Chứng minh rằng $\angle LAB = \angle KAC$.



Hình 4.

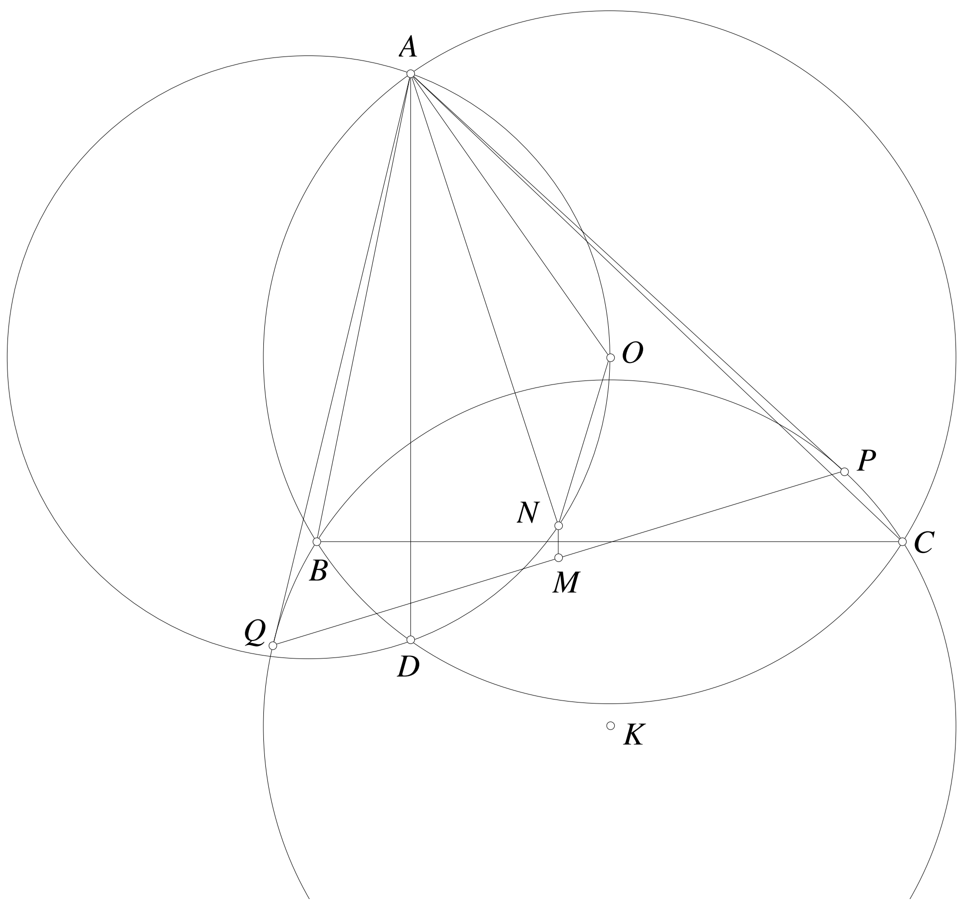
Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại E khác A và AK cắt (O) tại F khác A. Ta dễ thấy K và D đối xứng nhau qua BC nên $\angle DKE = \angle DEK = \angle OAD$ do đó tứ giác $AOKD$ nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc $\angle EKF = \angle OKA = \angle OLA = \angle OAL = \angle LKE$. Từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $LF \parallel BC$, vậy $\angle LAB = \angle KAC$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta thấy rằng tuy mở rộng như bài toán mở rộng còn đơn giản hơn bài toán gốc. Chúng ta hoàn toàn có thể áp dụng cách giải bài toán mở rộng này cho bài toán ban đầu bằng cách vẽ thêm đường kính của đường tròn (O) mà không cần dùng bổ đề. Tuy vậy nếu càng hạn chế được vẽ thêm hình mà vẫn có lời giải đẹp được thì càng tốt. Lời giải như ta thấy ở bài toán 1 cũng là một hướng đi đẹp. Chúng ta hoàn toàn có thể phát biểu bài toán tương tự cho phân giác ngoài. Các bạn hãy làm như một bài tập

Bài toán 4. Cho tam giác ABC tù nội tiếp đường tròn (O). Điểm K nằm ngoài tam giác và trong $\angle BAC$ sao cho $KB = KC$ và $\angle BKC = \angle BAC$. AD là phân giác ngoài của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK cắt (O) tại L khác A. Chứng minh rằng $\angle LAB = \angle KAC$.

Ta đi đến một mở rộng khác thú vị như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đối xứng với (O) qua BC. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ tới (K) với P, Q thuộc (K). M là trung điểm PQ và N đối xứng với M qua BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AON cắt (O) tại D khác A. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.



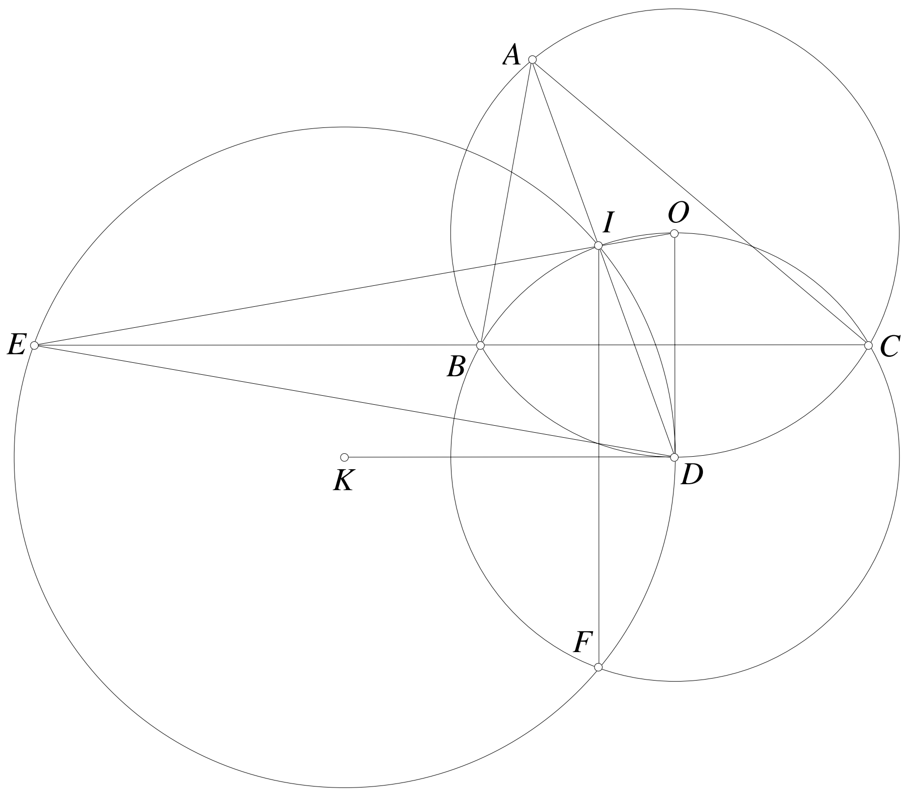
Hình 5.

Nhận xét. Khi $\angle BAC = 60^\circ$ dễ thấy M và N trùng nhau và trùng chân đường phân giác góc $\angle BAC$ trên BC ta thu được bài toán 1. Đây là bài toán thú vị, các bạn hãy thử sức nó như một bài tập.

3 Một số ứng dụng

Cả bài toán gốc và bài toán mở rộng đều có nhiều ứng dụng thú vị, các bạn hãy cùng đến với các bài tập sau

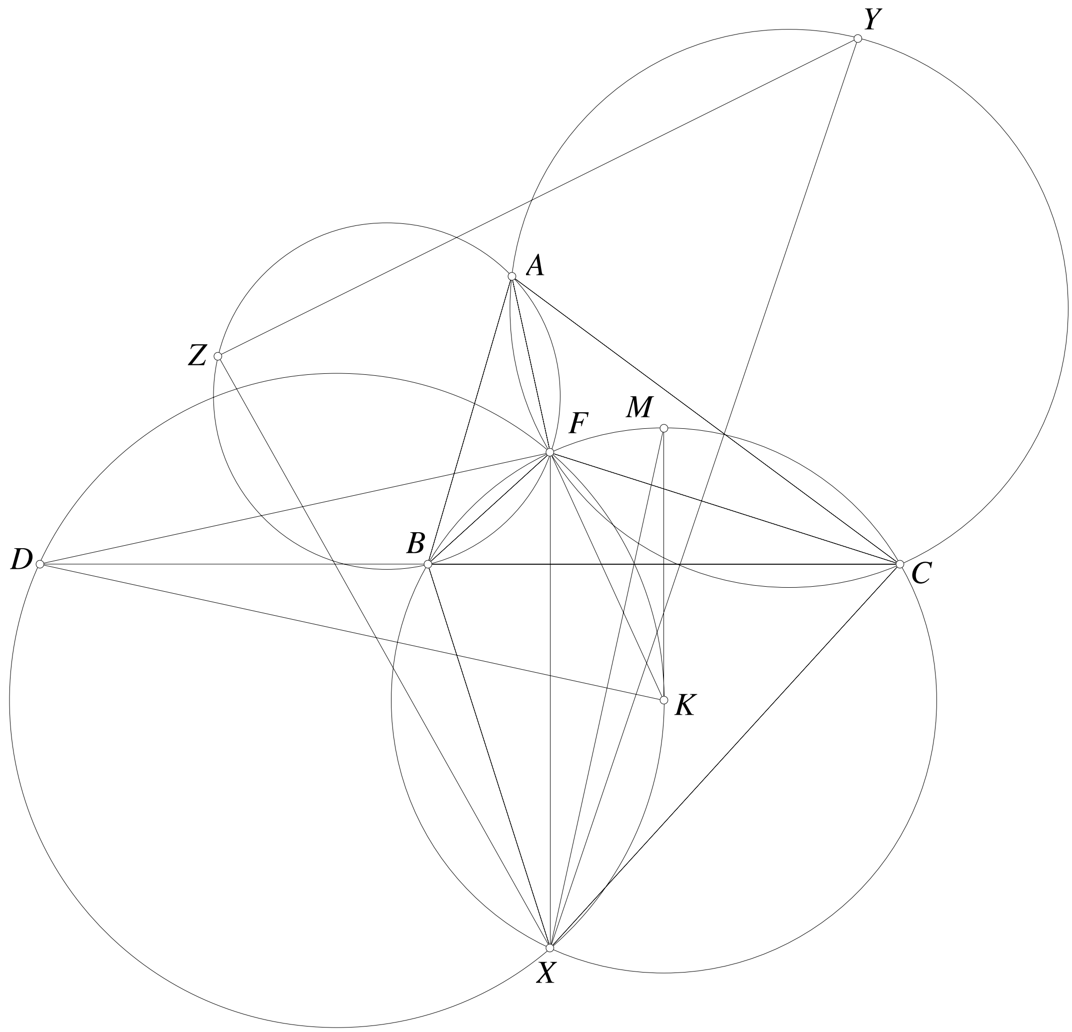
Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\angle BAC = 60°$ với tâm nội tiếp I. Đường thẳng OI cắt BC tại E. AI cắt (O) tại D khác A. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác IDE. Chứng minh rằng KD tiếp xúc (O).



Hình 6.

Lời giải. Dễ thấy D là tâm ngoại tiếp tam giác IBC và E, O đối xứng nhau qua BC nên O là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC nên OI là phân giác ngoài $\angle BIC = 120°$. Từ đó đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác IDE cắt (D) ngoại tiếp tam giác IBC tại F thì $IF \perp BC$. Lại có $DK \perp IF \parallel OD$ nên $DK \perp OD$ vậy DK tiếp xúc (O). □

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có điểm Fermat là F. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác FBC, FCA, FAB. Lấy D thuộc BC sao cho $FD \perp FA$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác FKD cắt (K) tại X khác F. Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng đối xứng của phân giác các góc $\angle BXC, \angle CYA, \angle AZB$ lần lượt qua BC, CA, AB đồng quy.



Hình 7.

Lời giải. Ta dễ thấy FD là phân giác ngoài tam giác FBC có góc $\angle BFC = 120°$ nên $FX \perp BC$ do đó đối xứng của X qua BC là trực tâm tam giác ABC. Phân giác $\angle BXC$ đi qua trung điểm M cung BC của (K) nhưng do $\angle BKC = 120°$ nên đối xứng của K qua BC là K tâm ngoại tiếp tam giác FBC. Từ đó đỗi xứng của phân giác XM qua BC chính là đường thẳng Euler của tam giác FBC. Chúng ta đã biết kết quả quen thuộc đường thẳng Euler của tam giác FBC, FCA, FAB đồng quy tại trọng tâm tam giác ABC, đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta cũng có thể dễ chứng minh được XM và BC cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác FXK hơn nữa KD chính là đường thẳng Euler của tam giác XBC. Các bài toán mở rộng trên còn nhiều ứng dụng khác nữa, các bạn hãy làm thử các bài tập sau

Bài toán 8. Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). K là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $KB = KC$ và $\widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180°$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOK cắt (O) tại L khác A. Gọi AL cắt BC tại G. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. M là trung điểm của đoạn thẳng GI. EM cắt (O) tại N khác E. Chứng minh rằng NI và AK cắt nhau trên (O).

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đối xứng với (O) qua BC. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ tới (K) với P, Q thuộc (K). PQ cắt BC tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt (O) tại E khác A. Giả sử $AE \perp BC$. Chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\angle BAC = 60°$.

Bài toán 10. Cho tam giác ABC có điểm Kosnita là K. Giả sử AK là phân giác $\angle BAC$. Chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\angle BAC = 60°$.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O, tâm nội tiếp I và có $\angle BAC = 60°$. D đối xứng I qua BC. Đường thẳng OI cắt BC tại E. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác ODE. Chứng minh rằng $OK \parallel BC$.

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có điểm Fermat là F. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác FBC, FCA, FAB. Lấy D thuộc BC sao cho $FD \perp FA$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác FKD cắt (K) tại X khác F. Tương tự có Y, Z. Đường thẳng đối xứng với đường thẳng Euler của tam giác ABC qua ba cạnh BC, CA, AB lần lượt cắt phân giác các góc $\angle BXC, \angle CYA, \angle AZB$ tại U, V, W. Chứng minh rằng $AU \perp VW$ khi và chỉ khi $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. HA, HB, HC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Từ A kẻ các tiếp tuyến AA_1, AA_2 tới đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt đường thẳng đối xứng của A_1A_2 qua BC tại X nằm trong góc $\angle BAC$. Tương tự có điểm Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Tài liệu

[1] Đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối
http://jcgeometry.org/Articles/Volume3/JCG2014V3pp60-62.pdf

High school for gifted student - HSGS

First year project

Some geometrical problems proposed for IMO team

Author:
Tran Quang Hung

Team:
Saudi Arabia

July 23, 2015

Contents

Preface

During the time of training for Saudi Arabia Mathematics Olympiad Team in 2015, I accumulated a number of interesting geometric problem for the pupils in training for IMO exam. These problems are published in IMO Shortlist, or some of which were suggested myself (not written reference or written expanding). These problems were classified according to three degrees in a IMO exam: easy, medium and difficult with star signed. Most of these problems based on the very basic knowledge of the plane geometry. These are the congruent triangles, the similar triangles and cyclic quadrileteral. And in the same time, we apply the knowledge about the power of point with respect to the circle, radical axis and harmonic range. You all (from beginners or who are proficiently with Olympic exam) could find very useful things in these problems. Good luck and successful to my dear students.

Jeddah, summer 2015

Tran Quang Hung.

Chapter 1

Some fundamental concepts

1.1 Cyclic quadrilateral

Cyclic quadrilateral is simple configuration of geometry. When we have four points lie on circle (concyclic points) and they creat a convex quarilateral then we have a cyclic quadrilateral. Almost the geometric problems in olympiad using cyclic quadrilateral. So we will give overview about cyclic quadrilateral

1.2 Necessary and sufficient conditions of a cyclic quadrilateral

Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with AB intersects CD at E. AD intersects BC at F. AC intersects BD at G. We have the following conditions are equivalent

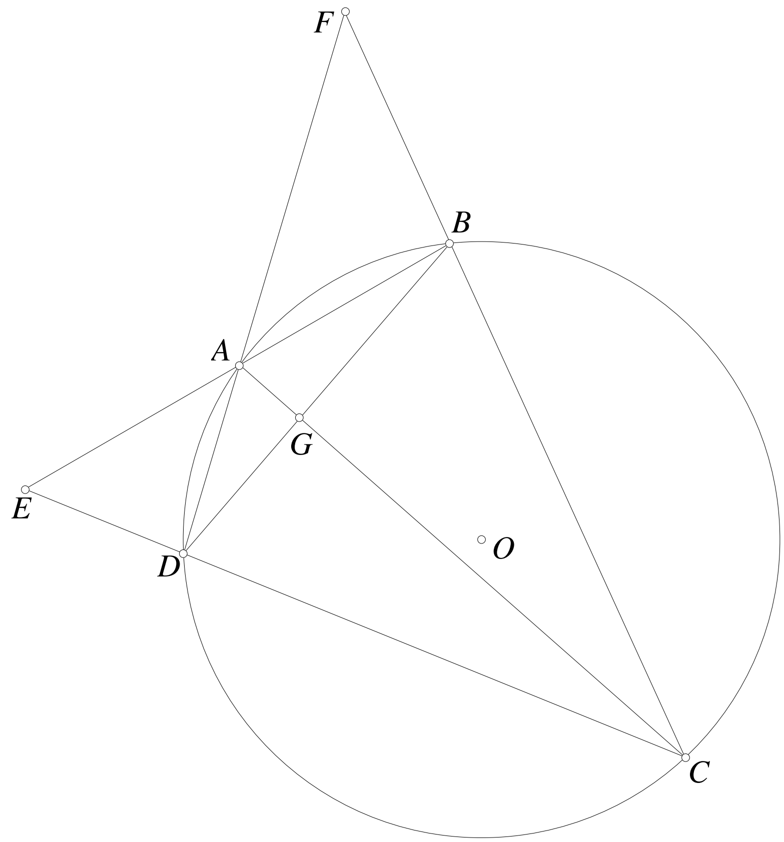


Figure 1.

1) Quadrilateral $ABCD$ is cyclic.
2) $\angle ABC = \angle ADC$ (Property of adjacent angle)
3) $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ (Property opposite angle)
4) $\angle FBA = \angle ADC$ (Property exterior angle)
5) $EA.EB = ED.EC$ (Metric relation)
6) $FB.FC = FA.FD$ (Metric relation)
7) $GA.GC = GB.GD$ (Metric relation)

1.3 The extension of metric relation, power of the point with respect to a circle

Let $ABCD$ be cyclic quadrilateral inscribed in circle (O, R). AB intersects CD at E. AD intersects BC at F. AC intersects BD at G. We have the following equality

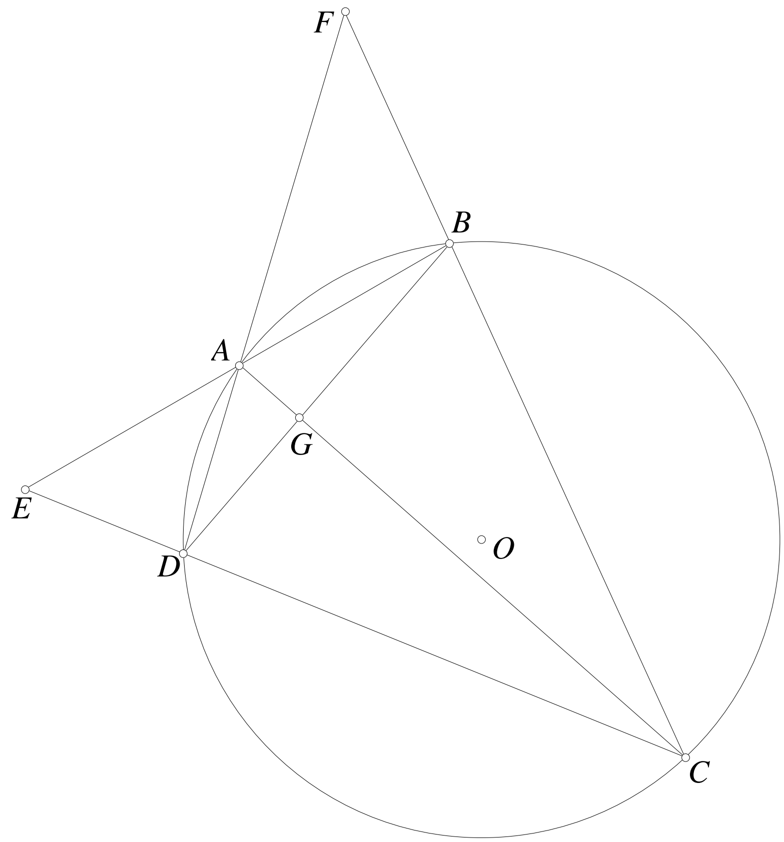


Figure 2.

1) $EA.EB = ED.EC = OE^2 - R^2$
2) $FB.FC = FA.FD = OF^2 - R^2$
3) $GA.GC = GB.GD = R^2 - OG^2$

1.4 Degenerate to the tangents

Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). T is a point lie on line BC externally the segment BC. We have the following conditions are equivalent

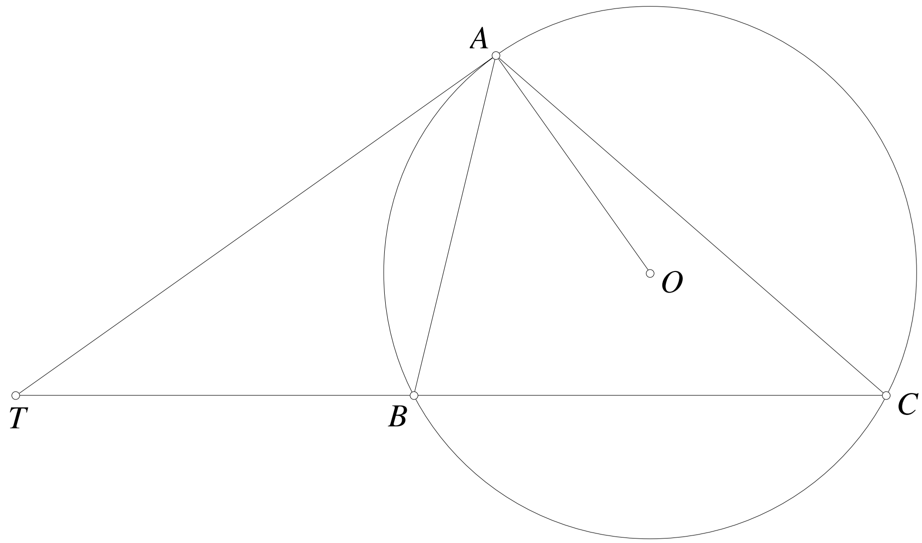


Figure 3.

1) TA is tangent of (O)
2) $\angle TAB = \angle ACB$ (Property angle of tangents)
3) $TA^2 = TB.TC$ (Metric relation of tangents)
4) $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ (Metric relation of tangents)

Remark. Three sections give us the overview about necessary and sufficient conditions of a cyclic quadrialteral, the metric relation in cyclic quadrialteral (power of the points) and properties of tangents. We usually called the properties about angles by the terminology "angle chasing". Angle chasing is really the most important properties of cyclic quadrilateral. But according to our, the problems of cyclic quadrilateral is subjective if they have the both properties and metric relation in them. Now we give some propblems

Chapter 2

Problems training

2.1 First day

Problem 1 (Own)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Its incircle (I) touches BC at
★ D. AI cuts (O) again at E. ED cuts (O) again at G. Prove that $\angle AGI = 90°$.

Problem 2 (Own)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Its incircle (I) touches BC at D. AI cuts (O) again at E. The line passes through I which is perpendicular to OI, intersect ED, AO
★★ at M, N, reps. Prove that I is midpoint of MN.

Problem 3 (Own)**.** Let ABC be an acute triangle, its altitudes are concurrent at orthocenter H. The line passes through H which is perpendicular to Euler line of ABC, intersec AB, AC, DE, DF
★★ at M, N, P, Q, resp. Prove that $MN = 2PQ$.

Problem 4 (Own)**.** Let ABC be an acute triangle with altitude AD, orthocenter H and circumcenter
★ O. F lies on AB such that DF is perpendicular to OD. Prove that $\angle FHD = \angle B$.

2.2 Second day

Problem 5 (David Monk)**.** Let ABC be a triangle right at A. M is midpoint of BC. Points E, F lie on line CA, AB such that E, M, F are collinear. Point P lies on segment EF such that two segment MP and EF have the same midpoint N. T is projection of P on BC. Prove that AN is bisector of $\angle MAT$.
⋆

Problem 6 (David Monk)**.** Let ABC be a triangle and its incircle touches BC, CA, AB at D, E, F, reps. AD cuts (I) again at G. H lies on line EF such that $GH \perp AD$. Prove that $AH \parallel BC$.
⋆⋆

Problem 7 (David Monk)**.** Let ABC be a triangle and its incircle touches BC, CA, AB at D, E, F, reps. Let point H lie on line DE such that $AH \parallel EF$. Prove that BH bisects segment EF.
⋆

Problem 8 (David Monk)**.** Let $ABCD$ be cyclic quadrilateral. AD cuts BC at E. d is the line passing through E and that is parallel to CD. Let p, q be distance from A, B to d and r be distance from E to AB. Prove that $p.q = r^2$.
⋆

Problem 9 (David Monk)**.** Let $ABCD$ be cyclic quadrilateral. AC cuts BD at E. M, N are midpoints of CD, AB such that $\angle AMD = \angle CNB$. Prove that $\angle EMC = \angle ABC$.
⋆⋆

Problem 10 (Russia 2015)**.** Let ABC be acute triangle with altitude AH. M is midpoint of BC. Points E, F lie on CA, AB such that ME, MF are perpendicular to AB, AC, resp. BC cuts circumcircle of triangle MEF again at N. Prove that $BH = NC$.
⋆⋆

Problem 11 (Russia 2015)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Tangent of (O) at A intersects BC at D. I is incenter of ABC. Bisector of $\angle D$ cuts IB, IC at P, Q, resp. M is midpoint of arc BC that contain A of circle (O). Prove that line IM bisects segment PQ.
⋆⋆

Problem 12 (Russia 2015)**.** Let ABC be a triangle inscribed circle (O) with altitude AH, centroid G. Ray GH intersects (O) at D. Prove that AB is tangent to circumcircle of triangle BDH.
⋆

Problem 13 (Balkan shortlist 2009)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) with orthocenter H. K is projection of H on tangent at A of (O). L is projection of H on symmedian from A. Prove that KL bisects segment BC.
⋆⋆⋆

Problem 14 (Own)**.** Let ABC be acute triangle with orthocenter H and M is midpoint of BC. P is a point on HM. E, F are projection of P on side CA, AB. Prove that the tangents at E, F of circle diameter AP intersect on perpendicular bisector of BC.
⋆⋆⋆

Problem 15 (Own, extension of IMO 2010 P2)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) with incenter I. AI cuts (O) again at D. E is a point on segment BC. M is midpoint of IE. P lies on line DM such that PI is perpendicular to OI. Q is symmetric of P through I. Assume that Q is inside triangle ABC. Prove that AI is bisector of $\angle QAE$.
⋆⋆⋆

Problem 16 (AoPS)**.** Let ABC be a triangle and two point P, Q such that $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{CP}{CQ}$. Prove that PQ passes through circumcenter of triangle ABC.
⋆⋆

2.3 Third day

Problem 17 (IMO Shortlist 2014 G3)**.** Let ABC be a triangle inscribed circle (O). M is midpoint of arc BC which does not contain A. Perpendicular bisector of AB, AC cut circle dimaeter AM at P, Q, reps outside $\angle BAC$. PQ cuts perpendicular bisector of AM at R. Prove that $AR \parallel BC$.

⋆⋆⋆

Problem 18 (Own, extension of Iran 2012)**.** Let the triangle ABC ($AB < AC$) inscribed in the circle (O). The bisector of the angle $\angle BAC$ cuts (O) again at D. E is symmetry of D through O. F is the point on the chord BD not contain A, C of (O). FE cuts BC at G. H belongs to AF such that $GH \parallel AD$. Prove that HG is the bisector of the angle $\angle BHC$.

⋆⋆⋆

Problem 19 (Own, extesnion of IMO 2014 P4)**.** Let the triangle ABC and the points P, Q are lying on BC such that $AP = AQ$. The circumcircle of the triangle APB cuts CA again at E. The circumcircle of the triangle AQC cuts AB again at F. Get the points M, N are lying on opposite rays of PE, QF such that $PM.QN = PE.QF$.

a) Prove that BN and CM are intersected at R on the circle (O) circumcircle of the triangle ABC.

b) Call by K the circumcircle center of the triangle RMN. Prove that AK perpendicular with BC.

⋆⋆⋆

Problem 20 (AoPS)**.** Given an acute triangle ABC inscribed in the circle (O). The altitudes BE, CF of triangle ABC intersects each other at H. The line AH meets the circle (O) at D which differs from A. The line DE meets (O) at G which differs from D. Show that BG bisects the segment EF.

⋆⋆

Problem 21 (Extension of IMO Shortlist 2014 G3)**.** Let ABC be a triangle inscribed circle (O). D is midpoint of arc BC which does not contain A. P is a point on perpendicular bisector of AD. M, N lies on circle diameter AD and outside triangle such that $PM \perp AC, PN \perp AB$. MN intersects perpendicular bisector of AD at R. Prove that $AR \perp PD$.

⋆⋆

Problem 22 (AoPS)**.** Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O). AD, BE, CF are the altitudes of the triangle ABC and converge at H. D, E, F are on BC, CA, AB respectively. Call by AG the diameter of the circle (O). AG intersect EF, BC at X, Y respectively. The intersection of AD and the tangent of the circle (O) at G is Z. Prove that $HX \parallel YZ$.

⋆

Problem 23 (Own, extension of problem 20)**.** Given an acute triangle ABC inscribed in the circle (O). Point P belongs to the minor arc $\overset{\frown}{BC}$ so that if Q is symmetric to P with respect to BC then Q will be inside the triangle ABC. The lines QB, QC intersect the lines CA, AB at E, F respectively. The line PE meets the circle (O) at R which differs from P. Demonstrate that BR bisects segment EF.

⋆⋆⋆

2.4 Fourth day

Problem 24 (IMO Shortlist 2006 G4)**.** Let ABC be a triangle with symmedian BE, CF. Let M, N be midpoints of BE, CF. Prove that BN, CM and perpendicular bisector of BC are concurrent. ⋆⋆

Problem 25 (Inspire from Serbia 2013 and Iran 2015)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). X is a point on minor arc BC such that it E, F are projection of X on IB, IC then midpoint of EF lies on perpendicular bisector of BC. Let J be $A-$ excenter of triangle ABC. Prove that XJ passes through midpoint of major arc BC. ⋆⋆⋆

Problem 26 (AoPS)**.** Let ABC be a triangle with incircle (I) touches BC, CA, AB at D, E, F. H is orthocenter of triangle ABC and K is projection of D on EF. Prove that $\angle IKD = \angle DKH$. ⋆⋆⋆

Problem 27 (Own)**.** Let ABC be a triangle its incenter is I. E, F are reflection of I through CA, AB. EF intersets IB, IC at P, Q. Perpendicular bisector of PQ cuts BC at R. Prove that $CR.CA = BR.BA$. ⋆⋆

2.5 Fifth day

2.5.1 IMO+

Problem 28 (IMO Shortlist 2014 G4). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). P is a point on arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. M is a point divide segment AP in a constant ratio. Circumcircle of triangle MPB and MAC intersect again at point Q. Prove that Q always lies on a fixed circle when P moves. ★★

Problem 29 (AopS). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Its incircle (I) touches BC, CA, AB at D, E, F, reps. K is projection of D on EF. AK cuts (O) again at G. Prove that GD is bisector of $\angle BGC$. ★★

Problem 30 (Ta Hong Son). Let $M,\ N$ be two points interior to the circle (O) such that O is the midpoint of MN. Let S be an arbitrary point lies on (O), and $E,\ F$ the second intersections of the lines $SM,\ SN$ with (O), respectively. The tangents at $E,\ F$ with respect to the circle (O) intersect each other at I. Prove that the perpendicular bisector of the segment MN passes through the midpoint of SI. ★★

Problem 31 (Own, extension of problem 30). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) and M is midpoint of BC. P, Q lie on BC and P, Q are symmetric through M. AP, AQ cut (O) again at E, F. Tangents at E, F of (O) intersect at I. K is projection of A on OM and L is projection of O on AM. Prove that KL bisects AI. ★★

Problem 32 (Own, extension of problem 29). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Let P, Q be two isogonal conjugate points on bisector of $\angle BAC$. E, F are projection of P on CA, AB. D is projection of Q on BC. K is projection of D on EF. EF cuts BC at G. AK cuts (O) again at L. Prove that line GL always passes through fixed point when P, Q move. ★★★

2.5.2 IMO

Problem 33 (IMO 2009 P2). Let ABC be a triangle with points E, F lie on CA, AB, resp. O is circumcenter of triangle ABC. Let M, N, P be the midpoints of segments BE, CF, EF, resp. Prove that circumcircle of triangle MPN is tangent to EF iff $OE = OF$. ★★

Problem 34 (IMO 2010 P4). Let ABC be a triangle inscriebd in circle (O). Tangent at A of (O) cuts BC at T. P is a point inside (O). PA, PB, PC cut (O) again at D, E, F, resp. Prove that $DE = DF$ iff $TA = TP$. ★

Problem 35 (VMO 2013). Let ABC be a triangle with incircle (I) touches BC, CA, AB at D, E, F, reps. Let G, H be symmetric point of E, F through I. Line GH cuts IB, IC at P, Q. Assume that B, C are fixed point and A changes such that ratio $\dfrac{AB}{AC}$ is constant. Prove that perpendicular bisector of PQ always passes through a fixed point. ★★

2.6 Sixth day

2.6.1 IMO+

Problem 36 (IMO Shortlist 2009 G7)**.** Let $ABCD$ be quadrilateral with AB cuts CD at S. Let H, K be orthocenters of triangles SAD, SBC and M, N are ninepoint center of triangles SAD, SBC. Prove that the line passes throug M are perpendicular to BC and the line passes through N are perpendicular to AD intersect on HK.
⋆⋆⋆

Problem 37 (Own, extension of problem 26)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Let P, Q be two isogonal conjugate points on bisector of $\angle BAC$. E, F are projection of P on CA, AB. D is projection of Q on BC. K is projection of D on EF. J is reflection of P through DK. Prove that line JK always passes through fixed point when P, Q move.
⋆⋆⋆

Problem 38 (Kostas Vittas)**.** Let ABC be isocesles triangle with $AB = AC$. (K) is the circle passing through A, B. (L) is the circles passing through A, C. The line passes through A is parallel to BC, that intersect $(K), (L)$ again at M, N, reps. Prove that the line passes throug K are perpendicular to BN and the line passes through L are perpendicular to CM intersect on perpendicular bisector of BC.
⋆⋆

Problem 39 (Kostas Vittas)**.** Let AD be altitude of triangle ABC. Circle (K) diameter AD cut CA, AB again at E, F. Tangents from E, F of (K) cut BC at M, N. Let EB, EN cut FC, FM at P, Q, reps. Prove that line PQ bisects segment BC.
⋆⋆

Problem 40 (Own, extension of Kostas Vittas's problem)**.** Let D be a point on altitude of triangle ABC. Circle (K) diameter AD cut CA, AB again at E, F. Tangents from E, F of (K) cut BC at M, N. Let EB, EN cut FC, FM at P, Q, reps. Prove that PQ always passes through a fixed point when D moves.
⋆⋆⋆

2.6.2 IMO

Problem 41 (David Monk)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O), orthocenter H. Tangent at A of (O) intersect BC at T. D is symmetric of O through A. E is midpoint of AH. Prove that four points A, D, T, E are concylic.
⋆

Problem 42 (IMO 2012 P1)**.** Given triangle ABC the point J is the centre of the excircle opposite the vertex A. This excircle is tangent to the side BC at M, and to the lines AB and AC at K and L, respectively. The lines LM and BJ meet at F, and the lines KM and CJ meet at G. Let S be the point of intersection of the lines AF and BC, and let T be the point of intersection of the lines AG and BC. Prove that M is the midpoint of ST.
⋆

Problem 43 (IMO 2012 P5)**.** Let ABC be a triangle with $\angle BCA = 90°$, and let D be the foot of the altitude from C. Let X be a point in the interior of the segment CD. Let K be the point on the segment AX such that $BK = BC$. Similarly, let L be the point on the segment BX such that $AL = AC$. Let M be the point of intersection of AL and BK.Show that $MK = ML$.
⋆⋆

Problem 44 (IMO Shortlist 2012 G2)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G be the point such that $ECGD$ is a parallelogram, and let H be the image of E under reflection in AD.
$\star$ Prove that D, H, F, G are concyclic.

2.7 Seventh day

2.7.1 IMO+

2.7.2 IMO

2.8 Eighth day

2.8.1 IMO+

Problem 45 (ELMO 2015, Problem 3 (Shortlist G3))**.** Let ω be a circle and C a point outside it; distinct points A and B are selected on ω so that CA and CB are tangent to ω. Let X be the reflection of A across the point B, and denote by γ the circumcircle of triangle BXC. Suppose γ and ω meet at $D \neq B$ and line CD intersects ω at $E \neq D$. Prove that line EX is tangent to the circle γ. ⋆⋆

Problem 46 (Own, extension of IMO Shortlist 2007 G7)**.** Let ABC be acute triangle inscribed in circle (O) with incenter I, altitude AD and circumradius R. Point K lies on line AD such that $AK = 2R$, and D separates A and K. Let M be projection of B on IK. AD cuts (O) again at N. Assume that $IK \parallel AB$. Prove that $MN \parallel ID$. ⋆⋆⋆

Problem 47 (Own, extension of IMO Shortlist 2006 G1)**.** Given are a triangle ABC. The incircle of triangle ABC has center I and touches the sides BC and CA at the points D and E, respectively. Let K and L be the reflections of the points D and E with respect to I. Prove that the points A, B, K, L lie on one circle iff $CA + CB = 3AB$ or $CA = CB$. ⋆⋆⋆

Problem 48 (Own, inspire from IMO Shortlist 2005 G7)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) and incenter I. Circle excircle (L) of vertex C touches AB at M. MI cuts BC at N. P is projeciton of C on JB. Prove that AI and PN intersect on (O). ⋆⋆⋆

2.8.2 IMO

Problem 49 (IMO Shortlist 2010 G1)**.** Let ABC be an acute triangle with D, E, F the feet of the altitudes lying on BC, CA, AB respectively. One of the intersection points of the line EF and the circumcircle is P. The lines BP and DF meet at point Q. Prove that $AP = AQ$. ⋆

Problem 50 (IMO 2005 P2)**.** Six points are chosen on the sides of an equilateral triangle ABC: A_1, A_2 on BC, B_1, B_2 on CA and C_1, C_2 on AB, such that they are the vertices of a convex hexagon $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ with equal side lengths. Prove that the lines A_1B_2, B_1C_2 and C_1A_2 are concurrent. ⋆

Problem 51 (IMO 2007 P1)**.** In triangle ABC the bisector of angle BCA intersects the circumcircle again at R, the perpendicular bisector of BC at P, and the perpendicular bisector of AC at Q. The midpoint of BC is K and the midpoint of AC is L. Prove that the triangles RPK and RQL have the same area. ⋆

Problem 52 (IMO Shortlist 2008 G1)**.** Let H be the orthocenter of an acute-angled triangle ABC. The circle Γ_A centered at the midpoint of BC and passing through H intersects the sideline BC at points A_1 and A_2. Similarly, define the points B_1, B_2, C_1 and C_2.Prove that the six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 and C_2 are concyclic. ⋆

2.9 Ninth day

2.9.1 IMO+

Problem 53 (IMO Shortlist 2006 G2). Let $ABCD$ be a trapezoid with parallel sides $AB > CD$. Points K and L lie on the line segments AB and CD, respectively, so that $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Suppose that there are points P and Q on the line segment KL satisfying $\angle APB = \angle BCD$ and $\angle CQD = \angle ABC$.
★★ Prove that the points P, Q, B and C are concyclic.

Problem 54 (IMO Shortlist 2006 G3). Consider a convex pentagon $ABCDE$ such that $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ and $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Let P be the point of intersection of the lines
★★ BD and CE. Prove that the line AP passes through the midpoint of the side CD.

Problem 55 (IMO Shortlist 2006 G7). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) with incenter I. BI, IC cut (O) again at E, F. M, N are midpoints of CA, AB. Let ℓ be the common tangents of
★★★ circle diameter ME, NF such that M, N and I lie on opposite side of ℓ. Prove that $\ell \parallel BC$.

Problem 56 (China TST 2015 day 1 P1). The circle Γ through A of triangle ABC meets sides AB, AC at E,F respectively, and circumcircle of ABC at P. Prove that reflection of P across EF
★★ is on BC if and only if Γ passes through O the circumcentre of ABC.

Problem 57 (Centro American Math Olympiad 2015 P3). Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with $AB < CD$, and let P be the point of intersection of the lines AD and BC.The circumcircle of the triangle PCD intersects the line AB at the points Q and R. Let S and T be the points where the tangents from P to the circumcircle of $ABCD$ touch that circle. Prove that $QRST$ is a cyclic
★ quadrilateral.

Problem 58 (Own, extension of JBMO 2015 P3). Let ABC be a triangle with median AM. P is a point on BC. Let E, F be the points such that $CE \perp BC, PE \perp AC$ and $BF \perp BC, PF \perp AB$. Let Q be symmetric of P through M. AQ cuts EF at D.

a) Prove that $\angle BDC = \angle EQF$.

★★★ b) Prove that D always lies on a fixed circle when P moves.

Problem 59 (Own, inspire from ELMO 2015 Problem 3). Let (O) be a circle and C a point outside it; distinct points A and B are selected on (O) so that CA and CB are tangent to (O). The line passes through C that intersects (O) at M, N. Denote by (K) the circumcircle of triangle CAN.
★★★ AB cuts (K) again at P. PM cuts (K) and (O) again at Q, R, reps. Prove that RA bisects BQ.

Problem 60 (Russia 2014). Given a triangle ABC with $AB > BC$, let Ω be the circumcircle. Let M, N lie on the sides AB, BC respectively, such that $AM = CN$. Let K be the intersection of MN and AC. Let P be the incentre of the triangle AMK and Q be the K-excentre of the triangle CNK.
★★ If R is midpoint of the arc ABC of Ω then prove that $RP = RQ$.

Problem 61 (Russia 2013). Squares $CAKL$ and $CBMN$ are constructed on the sides of acute-angled triangle ABC, outside of the triangle. Line CN intersects line segment AK at X, while line CL intersects line segment BM at Y. Point P, lying inside triangle ABC, is an intersection of the circumcircles of triangles KXN and LYM. Point S is the midpoint of AB. Prove that angle
★★ $\angle ACS = \angle BCP$.

Problem 62 (IMO Shortlist 2013 G2)**.** Let ω be the circumcircle of a triangle ABC. Denote by M and N the midpoints of the sides AB and AC, respectively, and denote by T the midpoint of the arc BC of ω not containing A. The circumcircles of the triangles AMT and ANT intersect the perpendicular bisectors of AC and AB at points X and Y, respectively; assume that X and Y lie inside the triangle ABC. The lines MN and XY intersect at K. Prove that $KA = KT$. ⋆⋆

Problem 63 (AoPS)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Tangents at B, C of (O) intersect at T. Bisector BE, CF intersect at I. Prove that IT bisects segment EF. ⋆⋆

2.9.2 IMO

Problem 64 (IMO 2013 P4)**.** Let ABC be an acute triangle with orthocenter H, and let W be a point on the side BC, lying strictly between B and C. The points M and N are the feet of the altitudes from B and C, respectively. Denote by ω_1 is the circumcircle of BWN, and let X be the point on ω_1 such that WX is a diameter of ω_1. Analogoously, denote by ω_2 the circumcircle of triangle CWM, and let Y be the point such that WY is a diameter of ω_2. Prove that X, Y and H are collinear. ⋆

Problem 65 (IMO Shortlist 2004 G1)**.** Let ABC be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. The circle with diameter BC intersects the sides AB and AC at M and N respectively. Denote by O the midpoint of the side BC. The bisectors of the angles $\angle BAC$ and $\angle MON$ intersect at R. Prove that the circumcircles of the triangles BMR and CNR have a common point lying on the side BC. ⋆

Problem 66 (IMO Shortlist 2003 G1)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Let P, Q, R be the feet of the perpendiculars from D to the lines BC, CA, AB, respectively. Show that $PQ = QR$ if and only if the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ADC$ are concurrent with AC. ⋆

Problem 67 (IMO Shortlist 2001 G1)**.** Let A_1 be the center of the square inscribed in acute triangle ABC with two vertices of the square on side BC. Thus one of the two remaining vertices of the square is on side AB and the other is on AC. Points B_1, C_1 are defined in a similar way for inscribed squares with two vertices on sides AC and AB, respectively. Prove that lines AA_1, BB_1, CC_1 are concurrent. ⋆

Problem 68 (Russia 2014)**.** Let M be the midpoint of the side AC of $\triangle ABC$. Let $P \in AM$ and $Q \in CM$ be such that $PQ = \frac{AC}{2}$. Let (ABQ) intersect with BC at $X \neq B$ and (BCP) intersect with BA at $Y \neq B$. Prove that the quadrilateral $BXMY$ is cyclic. ⋆⋆

2.10 Tenth day

2.10.1 IMO+

Problem 69 (IMO Shortlist 2013 G4)**.** Let ABC be a triangle with $\angle B > \angle C$. Let P and Q be two different points on line AC such that $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ and A is located between P and C. Suppose that there exists an interior point D of segment BQ for which $PD = PB$. Let the ray AD intersect the circle ABC at $R \neq A$. Prove that $QB = QR$.

⋆⋆

Problem 70 (Extension of IMO Shortlist 2013 G4)**.** Let ABC be a triangle bisector AD. (K) is the circle passing through A, D and is tangent to AB. E is reflection of A through CK. DE cuts AC at F. Prove that $BA = BF$.

⋆⋆

Problem 71 (Own, inspire from problem in AoPS)**.** Let ABC be a triangle bisector AD. (K) is the circle passing through A, B and is tangent to AD. M is midpoint of AD. MB cuts (K) again at N. Prove that $NA \perp NC$.

⋆⋆

Problem 72 (Own, extension IMO 2014 P4)**.** Let ABC be a triangle and the points P, Q are lying on BC such that $AP = AQ$. The circumcircle of the triangle APB cuts CA again at E. The circumcircle of the triangle AQC cuts AB again at F. Get the points M, N on the opposite ray of PA, QA such that $PM.QN = PE.QF$. Prove that BN and CM are always intersected each other on a fixed circle when M, N are moving.

Problem 73 (Own, extension IMO 2014 P4)**.** Let ABC be a triangle and the points P, Q lying on the edge BC such that $AP = AQ$. The circumcircle of the triangle APB cut CA again at E. The circumcircle center of the triangle AQC cut AB again at F. Get the points M, N are lying on opposite ray of PA, QA such that $PM.QN = PE.QF$.

a) Prove that BN and CM are always intersected at R on the circle (K) fixed when M, N is moving.

b) Call by L the circumcircle center of the triangle RMN. Prove that AL perpendicular with BC.

⋆⋆⋆

Problem 74 (Own, extension of IMO Shortlist 2012 G4)**.** Let ABC be a triangle with circumcenter O and bisector AD. Let E lie on OA such that $DE \perp BC$. AD cuts circumcircle of triangle BEC such that F is outside triangle ABC. Assume that B, C are fixed and A change such that ratio $\dfrac{AB}{AC}$ is constant. Prove that F always lies on a fixed line when A moves.

⋆⋆⋆

Problem 75 (Own, extension of IMO 1998 P1)**.** Let (I) be the incircle of triangle ABC. Let K, L and M be the points of tangency of the incircle of ABC with AB, BC and CA, respectively. The lines MK and ML intersect the line passing through B and is parallel to KL at the points Q and R, resp. Circle diameter QR cut (I) at S, T. Prove that ST bisects the segment KL.

⋆⋆⋆

2.10.2 IMO

Problem 76 (IMO 2014 P4)**.** Let P and Q be on segment BC of an acute triangle ABC such that $\angle PAB = \angle BCA$ and $\angle CAQ = \angle ABC$. Let M and N be the points on AP and AQ, respectively, such that P is the midpoint of AM and Q is the midpoint of AN. Prove that the intersection of BM and CN is on the circumference of triangle ABC. ⋆

Problem 77 (IMO 2012 P1)**.** Given triangle ABC the point J is the centre of the excircle opposite the vertex A. This excircle is tangent to the side BC at M, and to the lines AB and AC at K and L, respectively. The lines LM and BJ meet at F, and the lines KM and CJ meet at G. Let S be the point of intersection of the lines AF and BC, and let T be the point of intersection of the lines AG and BC. Prove that M is the midpoint of ST. ⋆

Problem 78 (IMO 2010 P2)**.** Given a triangle ABC, with I as its incenter and Γ as its circumcircle, AI intersects Γ again at D. Let E be a point on the arc BDC, and F a point on the segment BC, such that $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. If G is the midpoint of IF, prove that the meeting point of the lines EI and DG lies on Γ. ⋆⋆

Problem 79 (Russia 2012)**.** The inscribed circle ω of the non-isosceles acute-angled triangle ABC touches the side BC at the point D. Suppose that I and O are the centres of inscribed circle and circumcircle of triangle ABC respectively. The circumcircle of triangle ADI intersects AO at the points A and E. Prove that AE is equal to the radius r of ω. ⋆

Problem 80 (Russia 2012)**.** Consider the parallelogram $ABCD$ with obtuse angle A. Let H be the feet of perpendicular from A to the side BC. The median from C in triangle ABC meets the circumcircle of triangle ABC at the point K. Prove that points K, H, C, D lie on the same circle. ⋆⋆

2.11 Eleventh day

2.11.1 IMO+

Problem 81 (Own Oman). Let ABC be isocesles triangle with $AB = AC$. P is a point inside triangle such that $\angle PBC = \angle PCA$. H is projection of P on BC and AP cuts circumcricle of triangle PBC again at Q. Prove that QH always passes through a fixed point when P moves. ⋆⋆

Problem 82 (Russia 2012). The point E is the midpoint of the segment connecting the orthocentre of the scalene triangle ABC and the point A. The incircle of triangle ABC incircle is tangent to AB and AC at points C' and B' respectively. Prove that point F, the point symmetric to point E with respect to line $B'C'$, lies on the line that passes through both the circumcentre and the incentre of triangle ABC. ⋆⋆⋆

Problem 83 (Russia 2011). Let ABC be a triangle with $AB < AC$. Let q be quarter perimeter of triangle ABC. X, Y are the points on ray AB, AC such that $AX = AY = q$. Assume that segments XY and BC intersect at M. Prove that perimeter of triangle ABM is equal to q ⋆⋆⋆

Problem 84 (Own, extension of IMO shortlist 2012 G6). Let ABC be a triangle. The point D, E, F lies on side BC, CA, AB of triangle ABC such that $BF + CE + BC = CD + AF + CA = AE + BD + AB$. Circumcircle of triangle AEF, BFD, CED have a common point P. Prove that P always lies on a fixed circle when D, E, F moves. ⋆⋆⋆

Problem 85 (Own, extension of IMO shortlist 2012 G6). Let ABC be a triangle. The point D, E, F lies on side BC, CA, AB of triangle ABC such that $BF + CE + BC = CD + AF + CA = AE + BD + AB$. Circumcircle of triangle AEF, BFD, CED have a common point P. Prove that P always lies on a fixed circle when D, E, F moves. ⋆⋆⋆

Problem 86 (Own, xtension of IMO shortlist 1997 P18). Let ABC be an acute triangle and E, F lie on side CA, AB such that $BCEF$ is cyclic quadrilateral. BE cuts CF at H. AH cuts BC at D. The line passes through D and is parallel to EF which intersects CA, AB at M, N, resp. EF cuts BC at G. Prove that circumcircle of triangle GMN always passes throgh a fixed point when E, F move. ⋆⋆

Problem 87 (Inspire from IMO shortlist 2014 G6). Let ABC be a triangle. E, F lie on side CA, AB. Perpendicular bisector of EF cuts BC at D and M is midpoint of E, F. Perpendicular bisector of DM cuts CA, AB at P, Q. Prove that four points A, P, D, Q are concyclic iff BE, CF intersect on circumcircle of triangle AEF. ⋆⋆⋆

2.11.2 IMO

Problem 88 (IMO 1998 P1). A convex quadrilateral $ABCD$ has perpendicular diagonals. The perpendicular bisectors of the sides AB and CD meet at a unique point P inside $ABCD$. Prove that the quadrilateral $ABCD$ is cyclic if and only if triangles ABP and CDP have equal areas. ⋆

Problem 89 (IMO 2000 P1). Two circles G_1 and G_2 intersect at two points M and N. Let AB be the line tangent to these circles at A and B, respectively, so that M lies closer to AB than N. Let CD be the line parallel to AB and passing through the point M, with C on G_1 and D on G_2. Lines AC and BD meet at E; lines AN and CD meet at P; lines BN and CD meet at Q. Show that $EP = EQ$. ⋆

Problem 90 (IMO 1995 P1). Let A, B, C, D be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameters AC and BD intersect at X and Y. The line XY meets BC at Z. Let P be a point on the line XY other than Z. The line CP intersects the circle with diameter AC at C and M, and the line BP intersects the circle with diameter BD at B and N. Prove that the lines AM, DN, XY are concurrent. ⋆

Problem 91 (IMO 1996 P2). Let P be a point inside a triangle ABC such that

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Let D, E be the incenters of triangles APB, APC, respectively. Show that the lines AP, BD, CE meet at a point. ⋆⋆

Problem 92 (IMO 1994 P2). Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$. M is the midpoint of BC and O is the point on the line AM such that OB is perpendicular to AB. Q is an arbitrary point on BC different from B and C. E lies on the line AB and F lies on the line AC such that E, Q, F are distinct and collinear. Prove that OQ is perpendicular to EF if and only if $QE = QF$. ⋆

Problem 93 (IMO 1987 P2). In an acute-angled triangle ABC the interior bisector of angle A meets BC at L and meets the circumcircle of ABC again at N. From L perpendiculars are drawn to AB and AC, with feet K and M respectively. Prove that the quadrilateral $AKNM$ and the triangle ABC have equal areas. ⋆

Problem 94 (IMO 1985 P1). A circle has center on the side AB of the cyclic quadrilateral $ABCD$. The other three sides are tangent to the circle. Prove that $AD + BC = AB$. ⋆

Problem 95 (IMO 1985 P5). A circle with center O passes through the vertices A and C of the triangle ABC and intersects the segments AB and BC again at distinct points K and N respectively. Let M be the point of intersection of the circumcircles of triangles ABC and KBN (apart from B). Prove that $\angle OMB = 90°$. ⋆⋆

2.12 Twelfth day

2.12.1 IMO+

Problem 96 (Own, extension IMO 1996 P2)**.** Let P be a point inside a triangle ABC such that

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC = \angle BPC - \angle BAC.$$

Let D, E, F be the incenters of triangles BPC, CPA, APB, respectively. Show that the lines AD, BE, CF are concurent.

★★★

Problem 97 (Onw, extension of IMO 2009 P2)**.** Let ABC be a triangle with circumcircle O. E, F lie on side CA, AB. M, N, P are midpoint of BE, CF, EF. Let Q be projection of O on EF.

a) Prove that four points M, N, P, Q are concyclic.

b) Prove that reflection of Q through MN lies on ninepoint circle of triangle ABC.

★★★

Problem 98 (AoPS)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). P is a point on bisector of $\angle BAC$. PB, PC cut CA, AB at E, F and cut (O) again at M, N. NE cuts MF at Q. Prove that PQ bisects BC.

★★★

Problem 99 (Own, inspire from IMO shortlist 2011 G5)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). I is its incenter. IB, IC cut (O) again at E, F. EF cuts CA, AB at M, N. P is a point such that $PM \parallel IC, PN \parallel IB$. Assume that (O) and B, C are fixed and A moves. Prove that PI always passes through a fixed point.

★★★

Problem 100 (AoPS)**.** Let ABC be a triangle E, F are midpoint of CA, AB. P is an any point. PE, PF cut BC at M, N, resp. NE cuts MF at Q. Let R is the point such that $RB \parallel PE$ and $RQ \parallel PF$. Prove that PQ bisects segment AR.

★

Problem 101 (AoPS)**.** Let CD be a median of triangle ABC. Perpendicular bisectors of AC and BC intersect CD at A_c, B_c. AA_c and BB_c intersect at Z. X and Y are defnied similarly. Let O be the circumcentre of triangle ABC. Prove X, Y, Z, O are concyclic.

★★★

Problem 102 (Russia 2009)**.** Let be given a triangle ABC and its internal angle bisector BD ($D \in AC$). The line BD intersects the circumcircle Ω of triangle ABC at B and E. Circle ω with diameter DE cuts Ω again at F. Prove that BF is the symmedian line of triangle ABC.

★★

2.12.2 IMO

Problem 103 (Russia 2013)**.** Acute-angled triangle ABC is inscribed into circle Ω. Lines tangent to Ω at B and C intersect at P. Points D and E are on AB and AC such that PD and PE are perpendicular to AB and AC respectively. Prove that the orthocentre of triangle ADE is the midpoint of BC.

⋆

Problem 104 (Russia 2011)**.** Given is an acute angled triangle ABC. A circle going through B and the triangle's circumcenter, O, intersects BC and BA at points P and Q respectively. Prove that the intersection of the heights of the triangle POQ lies on line AC.

⋆

Problem 105 (Russia 2011)**.** Given is an acute triangle ABC. Its heights BB_1 and CC_1 are extended past points B_1 and C_1. On these extensions, points P and Q are chosen, such that angle PAQ is right. Let AF be a height of triangle APQ. Prove that angle BFC is a right angle.

⋆

Problem 106 (Russia 2011)**.** On side BC of parallelogram $ABCD$ (A is acute) lies point T so that triangle ATD is an acute triangle. Let O_1, O_2, and O_3 be the circumcenters of triangles ABT, DAT, and CDT respectively. Prove that the orthocenter of triangle $O_1O_2O_3$ lies on line AD.

⋆

Problem 107 (Russia 2010)**.** Let O be the circumcentre of the acute non-isosceles triangle ABC. Let P and Q be points on the altitude AD such that OP and OQ are perpendicular to AB and AC respectively. Let M be the midpoint of BC and S be the circumcentre of triangle OPQ. Prove that $\angle BAS = \angle CAM$.

⋆⋆

Problem 108 (Russia 2010)**.** Into triangle ABC gives point K lies on bisector of $\angle BAC$. Line CK intersect circumcircle ω of triangle ABC at $M \neq C$. Circle Ω passes through A, touch CM at K and intersect segment AB at $P \neq A$ and ω at $Q \neq A$. Prove, that P, Q, M lies at one line.

⋆

Problem 109 (Russia 2008)**.** In a scalene triangle ABC the altitudes AA_1 and CC_1 intersect at H, O is the circumcenter, and B_0 the midpoint of side AC. The line BO intersects side AC at P, while the lines BH and A_1C_1 meet at Q. Prove that the lines HB_0 and PQ are parallel.

⋆

2.13 Thirteenth day

Problem 110 (Own, extension of IMO shortlist 2009 G4). Let ABC be a triangle. (K) is the circle passing through B, C. (K) cuts CA, AB again at E, F. BE cuts CF at H. M, N, P are midpoints of AH, BE, EF. AN cuts CF at Q. R is symmetric of F through Q. Prove that the line connecting midpoint of MQ and PR always passes through a fixed point when (K) moves. ⋆⋆⋆

Problem 111 (Onw, extension of IMO shortlist 2012 G2). Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral inscribed in circle (O) and whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G, L be the point such that $ECGD, EBLA$ is a parallelogram, and let H, K be the images of E, B under reflection in AD, AC, resp. DG cuts (O) again at N. CK cuts AN at P. DH cuts BN at Q. Prove that PQ and GL intersect on circumcircle of triangle DGH. ⋆⋆⋆

Problem 112 (Own, extension of IMO shortlist 2012 G2). Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G be the point such that $ECGD$ is a parallelogram, and let H be the image of E under reflection in AD. Prove that D, H, F, G are concyclic and Simson line of H with respect to triangle FGD are perpendicular to BC. ⋆⋆⋆

Problem 113 (Own, extension of IMO shortlist 2007 G3). Let $ABCD$ be trapezoid with $AB \parallel CD$. Assume that there are the points E, F on side CD, CB such that $\angle DEF = \angle AEB$. AC cuts BD at G. Prove that GE is tangent to circumcirle of triangle CEF. ⋆⋆⋆

Problem 114 (Own, inspire from IMO shortlist 2011 G3). Let ABC be a triangle and P is a point inside it. Let Perpendicular bisector of PC, PB cut CA, AB at M, N. Q is relfection of P through MN. Prove that radical axis of two pedal circles of points P, Q bisects segment PQ. ⋆⋆⋆

Bibliography

[1] Elementary geometry blog http://analgeomatica.blogspot.com/

[2] IMO problems and shortlist http://www.imo-official.org/problems.aspx

[3] Contests collections http://www.artofproblemsolving.com/community/c13_contests

[4] Geometry box http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6_geometry

[5] New problems in Euclidean Geometry, David Monk, United Kingdoms, 2009

Về hai bài hình học trong kỳ thi IMO năm 2015

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

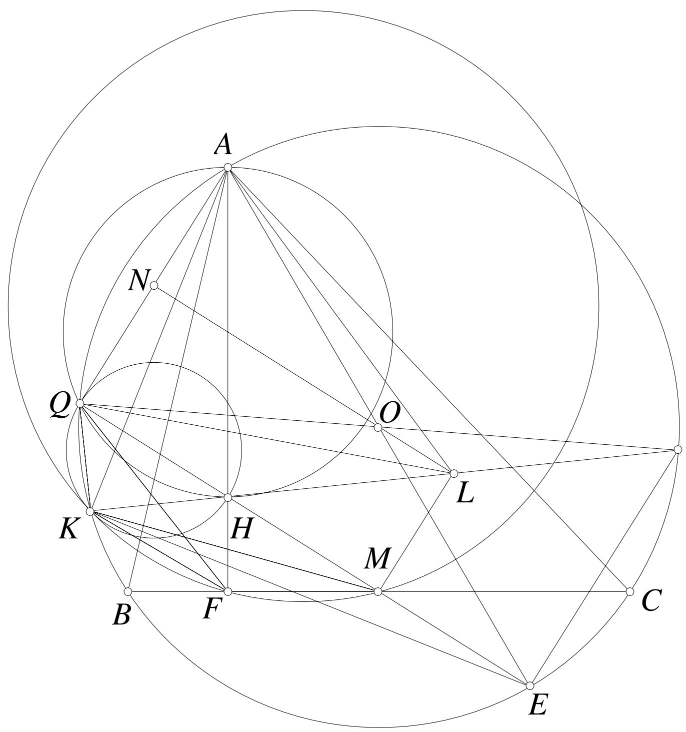
Bài báo giải quyết và đưa ra các ý tưởng mở rộng cùng nhiều ứng dụng cho các đề hình học thi IMO năm 2015.

1 Bài hình ngày thứ nhất

1.1 Mở đầu

Đề thi IMO ngày thứ 1 năm 2015 [1] có bài hình học rất thú vị như sau

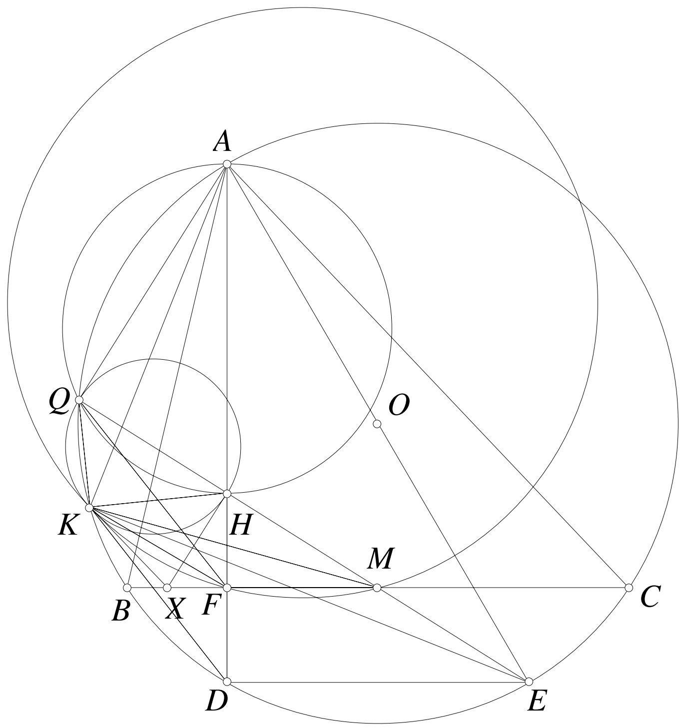
Bài toán 1.1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KHQ và KFM tiếp xúc nhau.



Hình 1.

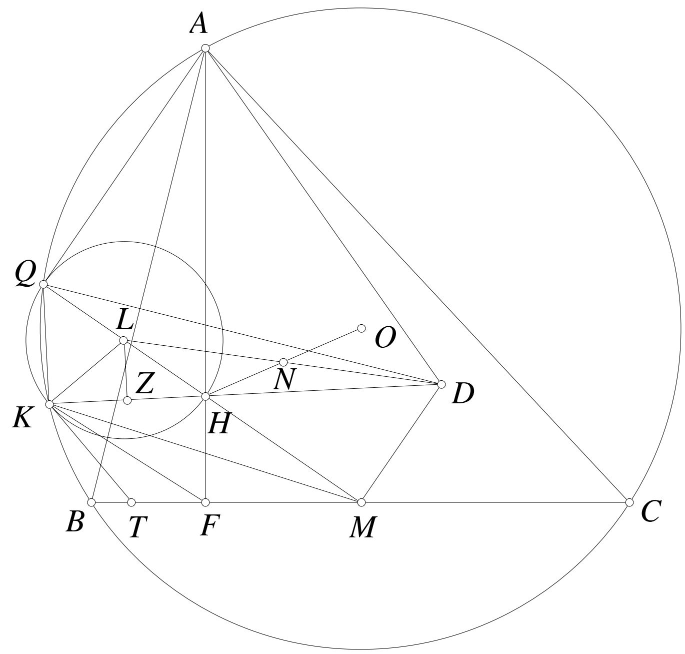
Lời giải thứ nhất. Vẽ đường kính AE và QR của (O). L, N lần lượt là trung điểm HR, QA. Ta có kết quả quen thuộc Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó suy ra $ML \parallel ER \parallel QA$ và $ML = \frac{1}{2}ER = \frac{1}{2}QA = NQ$ nên $NQML$ là hình bình hành. Do đó, $LN \perp QA$. Từ đó ta được $LA = LQ$. Mặt khác, $ML \parallel QA$ nên ML tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle LAQ$ tại L (1). Mà dễ thấy $HA.HF = HK.HL = HQ.HM$

nên phép nghịch đảo tâm H phương tích $\overline{HA}.\overline{HF}$ biến $M \to Q, L \mapsto K, A \mapsto F, Q \mapsto M$. Do đó từ (1) kết hợp với phép nghịch đảo tâm H suy ra đường tròn ngoại tiếp $\triangle KHQ, \triangle KFM$ tiếp xúc nhau. □



Hình 2.

Lời giải thứ hai. Gọi AE là đường kính của (O) và D đối xứng H qua BC thì D nằm trên (O). Dễ thấy Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi tiếp tuyến tại K, H của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHQ cắt nhau tại X. Ta có $\angle KXH = 180^\circ - 2\angle KHX = 180^\circ - 2\angle KQH = 2(90^\circ - \angle KQH) = 2(90^\circ - \angle KAE) = 2\angle AEK = 2\angle KDH$. Lại có $XK = XH$, từ đó X là tâm ngoại tiếp tam giác KDH. Do BC là trung trực HD nên X nằm trên BC. Từ đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $XK^2 = XH^2 = XF.XM$ hay XK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH và KFM hay hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại K. □



Hình 3.

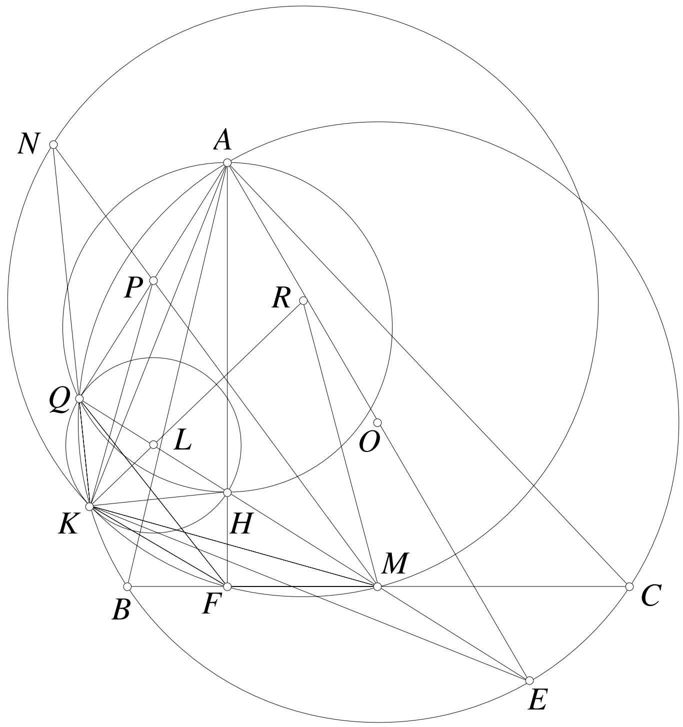
Lời giải thứ ba. Gọi đường thẳng qua M vuông góc với QM cắt KH tại D. Gọi L, Z là trung điểm của HQ, HK thì L, Z nằm trên đường tròn Euler (N) mà M cũng thuộc (N) nên N là trung điểm LD. N cũng là trung điểm OH nên $OD \parallel LH \perp QA$. Từ đó có $DQ = DA$ và $HA.HF = HQ.HM = HK.HD$. Kẻ tiếp tuyến KT của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH ta có $\angle TKF = \angle TKH - \angle HKF = \angle KQH - \angle HAD = \angle HDM - (\angle QAD - \angle QAH) = \angle HDM - \angle QDM + \angle HMF = \angle HMF - \angle QDH = \angle HMF - \angle HMK = \angle KMF$. Từ đó KT cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM. □

Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 3 của ngày thứ nhất, được đánh giá là một bài khó. Tuy vậy một bài toán chứng minh hai đường tròn tiếp xúc mà đã có sẵn tiếp điểm thì mức độ khó chưa cao vì vậy xếp là bài số 3 là hợp lý. Lời giải thứ nhất là một ý tưởng khá tự nhiên khi có hai đường tròn tiếp xúc ta nghĩ tới việc nghịch đảo đề đi chứng minh đường thẳng tiếp xúc đường tròn để giảm số lượng đường tròn đi. Lời giải này cùng được đề xuất bởi **Telv Cohl** và **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN, bạn **Vũ** đã giúp tác giả trình bày lại lời giải của mình như trên. Cũng có rất nhiều lời giải khác nhau đã được đề xuất trong [1]. Lời giải thứ hai trên có ý tưởng thuần túy hình học rất thông minh là của **Jeck Lim**, nick name **oneplusone** trong [1], tác giả đã chỉnh sửa một chút cách dựng điểm X và biến đổi góc gọn hơn. Lời giải thứ ba thực chất cũng xuất phát từ ý tưởng nghịch đảo trong khi tác giả trao đổi của **Hồ Quốc Đăng Hưng** và đã được tác giả chỉnh sửa lại gọn hơn, bỏ đi cách trình bày nghịch đảo và làm lại thuần túy hình học. Trong lời giải này thì điểm T không cần thiết nhưng ta dựng như vậy cho đẹp. Bài toán có nhiều ứng dụng và mở rộng, phần sau chúng tôi xin giới thiệu một số ứng dụng và mở rộng.

1.2 Khai thác bài toán IMO

Bài toán IMO là một cấu hình đẹp, trong cấu hình đó ta sẽ còn thấy rất nhiều bài toán thú vị khác. Bài toán đầu tiên này được tác giả tìm ra một cách tình cờ khi đang cố giải bài toán IMO sử dụng phương pháp đồng dạng trung tuyến

Bài toán 1.2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. KQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM tại N khác K. Chứng minh rằng MN chia đôi AQ.

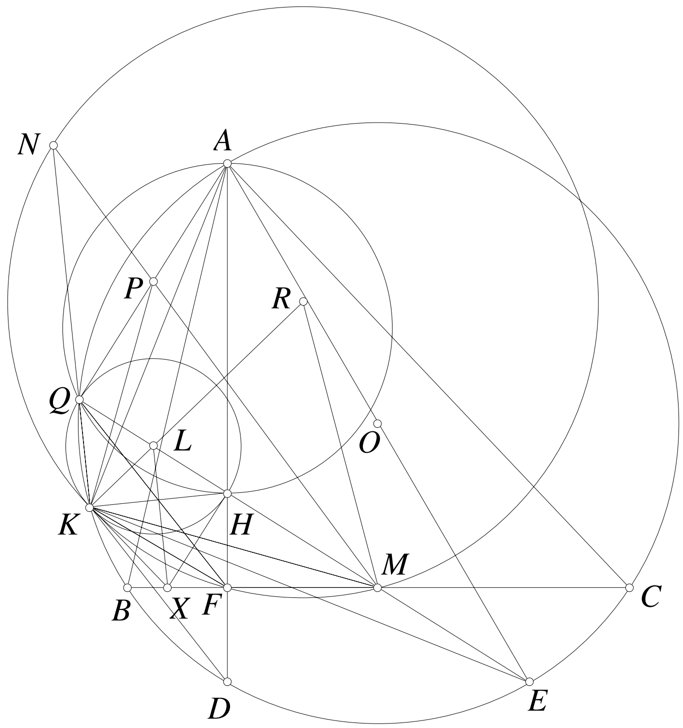


Hình 4.

Lời giải. Gọi L, R là tâm ngoại tiếp tam giác KQH và KFM thì L là trung điểm QH và theo bài toán 1 thì K, L, R thẳng hàng. Gọi P là trung điểm QA, ta sẽ chứng minh M, N, P thẳng hàng, thật vậy. Gọi AE là đường kính của (O) thì Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó $\angle KQH = \angle KAE$ nên hai tam giác vuông KQH và KAE đồng dạng suy ra hai tam giác KQA và KHE đồng dạng, chúng có trung tuyến là KP, KM nên $\angle QPK = \angle QMK$ và $\angle QKP = \angle HKM$. Cũng từ đó tứ giác $QPMK$ nội tiếp. Ta có $\angle CMN = \angle QKF = \angle QKL + \angle LKM + \angle MKF = \angle KPM + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK + 90^circ - \angle RMF = 180^\circ - \angle BMP = \angle CMP$. Từ đó M, N, P thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Chính nhờ ý tưởng của bài toán này cho ta một cách nhìn rất thú vị khi giấu đi tiếp điểm ở bài toán gốc như sau

Bài toán 1.3. Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt HM tại Q khác A. X thuộc BC sao cho $XH \perp QM$. L, P là trung điểm QH, QA. Đường thẳng qua Q song song LX cắt MP tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM tiếp xúc đường tròn đường kính QH.



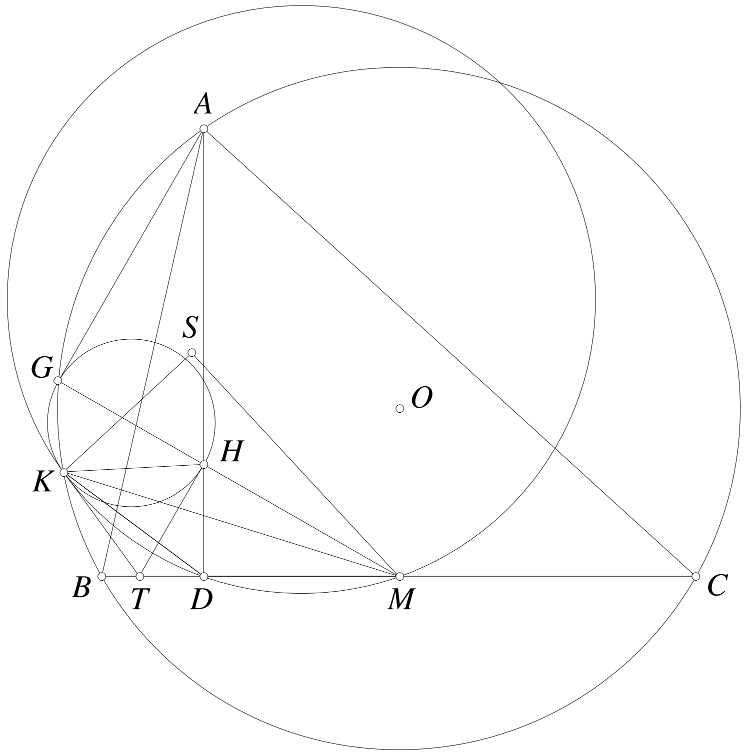
Hình 5.

Lời giải thứ nhất. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi AE là đường kính của (O) thì Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi D đối xứng H qua BC. Đường tròn (X, XH) cắt đường tròn (O) tại K khác D. Ta có $\angle XKH = \angle XHK = 90^\circ - \angle KDH = 90^\circ - \angle KEA = \angle KAE = \angle KQE$, từ đó KH, KX tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác QKH. Lại có $\angle KQH = \angle KHX = 90^\circ - \angle KHQ$ nên $\angle QKH = 90^\circ$. K thuộc đường tròn đường kính QH nên $LX \perp KH \perp QK$ suy ra $QK \parallel LX \parallel QN$ nên K, Q, N thẳng hàng. Từ tam giác KQH và tam giác KAE đồng dạng suy ra KQA và KHE đồng dạng, lại có trung tuyến tương ứng là KP, KM nên tam giác KQP và KHM đồng dạng hay KQH và KPM đồng dạng. Lại có $XK^2 = XH^2 = XM.XF$ suy ra XK tiếp xúc đường tròn (R) ngoại tiếp tam giác KFM. Từ đó K, L, R thẳng hàng. Vậy $\angle LKQ = \angle LQK = \angle KPM = 90^\circ - \angle KHQ = 90^\circ - \angle PMK$ từ đây dễ suy ra $\angle KRM = 2\angle N$. Từ đó N thuộc (R) hay (R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM. Hiển nhiên (R) tiếp xúc đường tròn đường kính QH. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải thứ hai. Gọi đường tròn đường kính QH cắt (O) tại K khác A và D đối xứng H qua BC. Chứng minh tương tự bài toán gốc thì QE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD mà $HX \perp QE$ nên tâm ngoại tiếp tam giác KHD nằm trên HX, lại có X thuộc trung trực HD nên tâm ngoại tiếp tam giác KHD chính là X vậy $XH = XK$. Mà dễ thấy XH tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác QHK nên XK cũng vậy. Từ đó $KH \perp LX \perp QK$ nên $QK \parallel LX \parallel QN$. Từ đó Q, K, N thẳng hàng. Ta có $\angle QKF + \angle FMN = \angle QKL + \angle RKM + \angle MKF + \angle FMP = 90^\circ - \angle KHQ + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF + \angle FMP = 180^\circ$ hay tứ giác $NKFM$ nội tiếp. Từ đó đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM tiếp xúc đường tròn đường kính QH. □

Ta lại có một ý tưởng khác phát triển bài toán IMO như sau

Bài toán 1.4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt (O) tại K khác G. S đối xứng với D qua HK. Chứng minh rằng đường thẳng qua S vuông góc SK chia đôi BC.

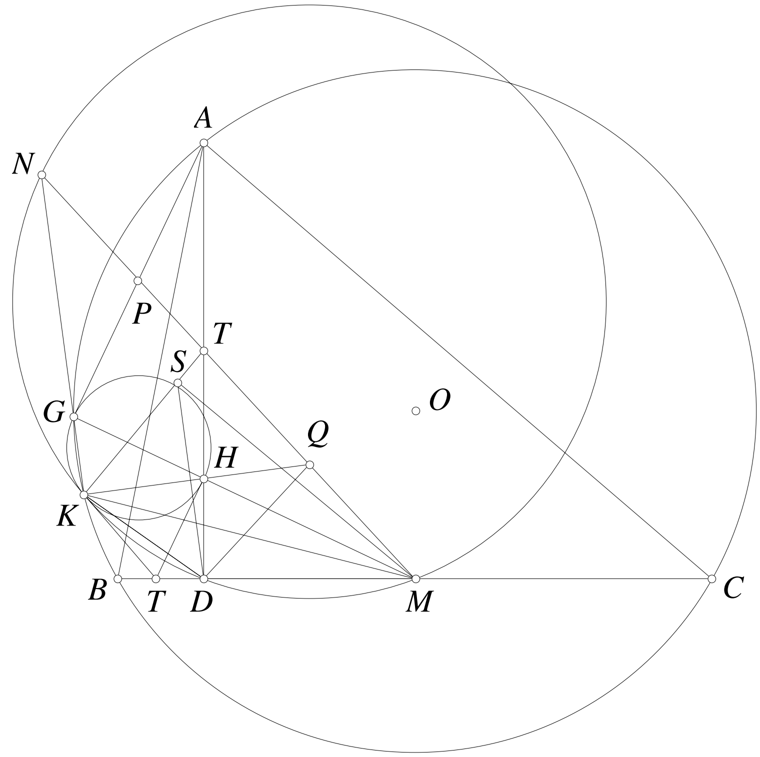


Hình 6.

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC, ta sẽ chứng minh rằng tam giác KSM vuông tại S. Thật vậy. Theo bài toán IMO đường tròn ngoại tiếp tam giác KGH và KDM tiếp xúc nhau tại K. Gọi T thuộc BC sao cho KT là tiếp tuyến cung của hai đường tròn đó. Ta có $\angle SKM = \angle SKH + \angle HKM = \angle HKD + \angle GHK - \angle GMK = \angle HKT - \angle DKT + \angle GHK - \angle GMK = \angle HGK + \angle GHK - \angle KMD - \angle GMK = 90^\circ - \angle HMD = \angle DHM$. Cũng theo chứng minh bài toán gốc ta lại có TK và TH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KGH và hai tam giác TKD và TMK đồng dạng. Từ đó $\dfrac{KS}{KM} = \dfrac{KD}{KM} = \dfrac{TK}{TM} = \dfrac{TH}{TM} = \dfrac{HD}{HM}$. Từ đó dễ thấy hai tam giác KSM và HDM đồng dạng nên $\angle KSM = 90^\circ$. □

Từ hai bài toán trên ta đi đến phát triển sau

Bài toán 1.5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD, trung tuyến AM. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt BC tại K khác G. KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K. KH cắt MN tại Q. Chứng minh rằng $QD = QM$.

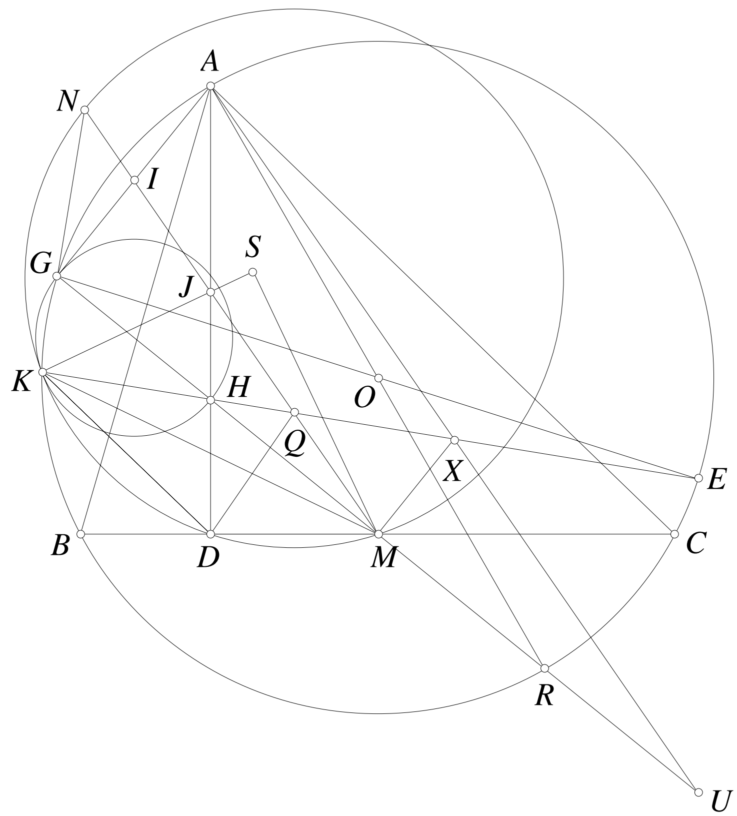


Hình 7.

Lời giải thứ nhất được tác giả đưa ra dựa trên kết quả bài trước

Lời giải thứ nhất. Gọi S đối xứng D qua KH và KS cắt MM tại T. Theo chứng minh bài trước thì MN đi qua trung điểm P của GA nên $\angle QHM = \angle GHK = \angle KMQ$. Từ đó $\angle QMH = \angle QKM$. Vậy $\angle HKD = 90^\circ - \angle HMD - \angle HKM = 90^\circ - \angle QMD$. Từ đó $\angle KSD = 90^\circ - \angle SKH = 90^\circ - \angle HKD = \angle QMD$ suy ra tứ giác $STMD$ nội tiếp. Cũng theo bài trước thì $\angle TSK = 90^\circ$. Từ đây suy ra $\angle TDM = 90^\circ$ hay T thuộc AH. Cũng từ $\angle HKD = 90^\circ - \angle QMD = \angle MTD$ nên tứ giác $KTQD$ nội tiếp, ta thu được $\angle DQM = \angle TKD$ hay hai tam giác QDM và KDS đồng dạng hay $QD = QM$. □

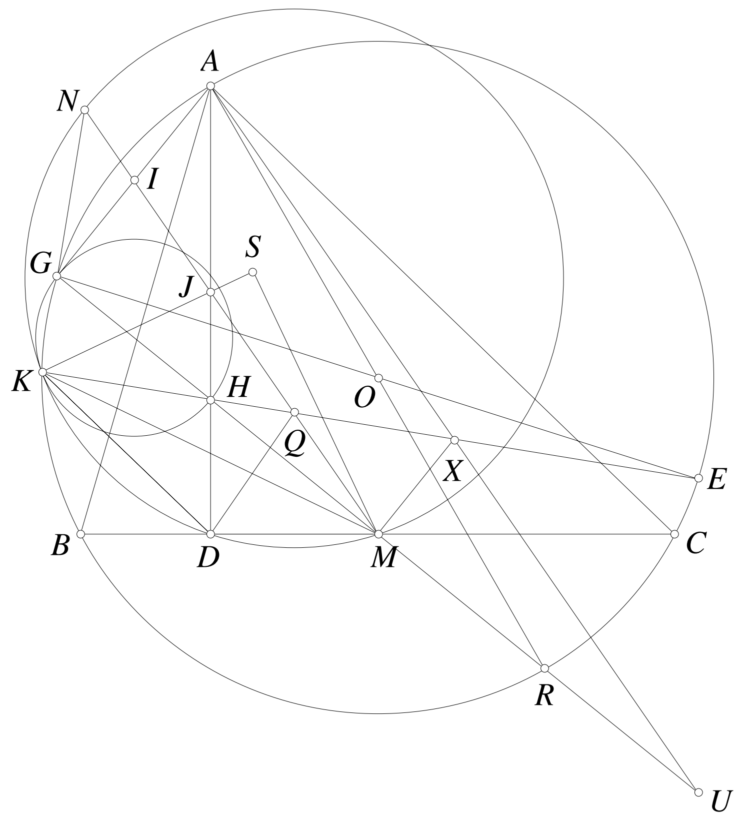
Lời giải thứ hai là chứng minh trực tiếp của bạn **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN.



Hình 8.

Lời giải. Vẽ đường kính AR, GE của (O).Gọi I là trung điểm GA. Từ kết quả bài trước ta đã có I nằm trên đường thẳng MN. Gọi X là trung điểm HE. Ta có kết quả quen thuộc G, H, M, R thẳng hàng. Từ đó suy ra $MX \parallel GA$ và $MX = \dfrac{1}{2}RE = \dfrac{1}{2}.GA = IA = IG$ vậy $AIMX, IGMX$ là các hình bình hành. Do đó $AX \parallel MI$ và $XI \perp GA$. Từ đó ta thu được $XA = XG$. Gọi MI cắt AD tại J. Lấy U đối xứng A qua X. Từ $XA = XG$ suy ra $\angle AGU = 90°$. Do đó U nằm trên đường thẳng HM. Vậy KH chia đôi MJ do $MJ \parallel AU$ và KH chia đôi AU tại X. Suy ra Q là trung điểm MJ, kết hợp $\angle JDM = 90°$, ta được $QD = QM$. □

Từ đó nếu ta sử dụng kết quả bài này thì bạn **Vũ** lại đưa ra một lời giải khác cho bài toán trước như sau



Hình 9.

Lời giải bài trước. Ta vẫn sử dụng các kí hiệu như lời giải thứ hai ở trên. Từ bài toán này ta suy ra Q là tâm ngoại tiếp tam giác DMS. Suy ra $\angle DSM = \dfrac{1}{2}\angle DQM$. Ta có $HK.HX = HK.\dfrac{1}{2}HE = HG.\dfrac{1}{2}HR = HG.HM = HA.HD$. Suy ra tứ giác $AXDK$ nội tiếp. Do đó ta có $\angle KSD = \angle KDS = 90^\circ - \angle DKH = 90^\circ - \angle DAX = 90^\circ - \angle DJM = 90^\circ - \dfrac{1}{2}.\angle DQM = 90^\circ - \angle DSM$. Vậy $\angle KSM = \angle KSD + \angle DSM = 90^\circ$. □

Nếu sử dụng thêm định lý con bướm ta có hai khai thác như sau

Bài toán 1.6. Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O với trực tâm H, đường cao AD và trung tuyến AM. G là hình chiếu của A lên HM. L là trung điểm HG. K đối xứng với G qua OL. KL cắt trung trực DM tại S. KG cắt BC tại T. Lấy X thuộc MK sao cho $TX \perp ST$. Y đối xứng X qua T. P là trung điểm AG. Chứng minh rằng KG, YD, MP đồng quy.

Ta cũng có thể phát biểu bài toán trên cách khác, bài toán này cũng có nhiều giá trị

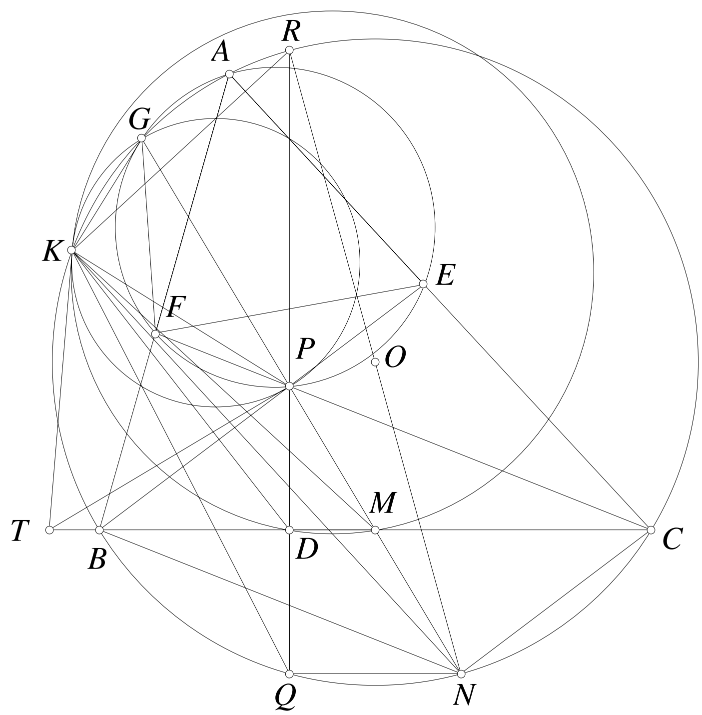
Bài toán 1.7. Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O với trực tâm H, đường cao AD và trung tuyến AM. G là hình chiếu của A lên HM. L là trung điểm HG. K đối xứng H qua OL. KL cắt trung trực DM tại S. P là trung điểm GA. N là đối xứng của M qua hình chiếu của S lên MP. NG cắt BC tại T. Lấy X thuộc ND sao cho $XT \perp ST$. Y đối xứng X qua T. Chứng minh rằng MY, NG, KL đồng quy.

Như vậy từ mô hình bài toán gốc ta đã thu được một số bài toán khác nhau đều là các kết quả đẹp và có giá trị.

1.3 Mở rộng bài toán IMO

Bài toán IMO này là một bài toán hay theo nghĩa có nhiều phát triển mở rộng. Trong [1] cũng đưa ra nhiều mở rộng nhưng trong bài viết này tôi chỉ viết về các mở rộng của mình, ta đi tới mở rộng đầu tiên như

Bài toán 1.8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trong tam giác sao cho $\angle BPC = 180^\circ - \angle A$. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính PG cắt (O) tại K khác G. D là hình chiếu của P lên BC và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGP và KDM tiếp xúc với nhau.



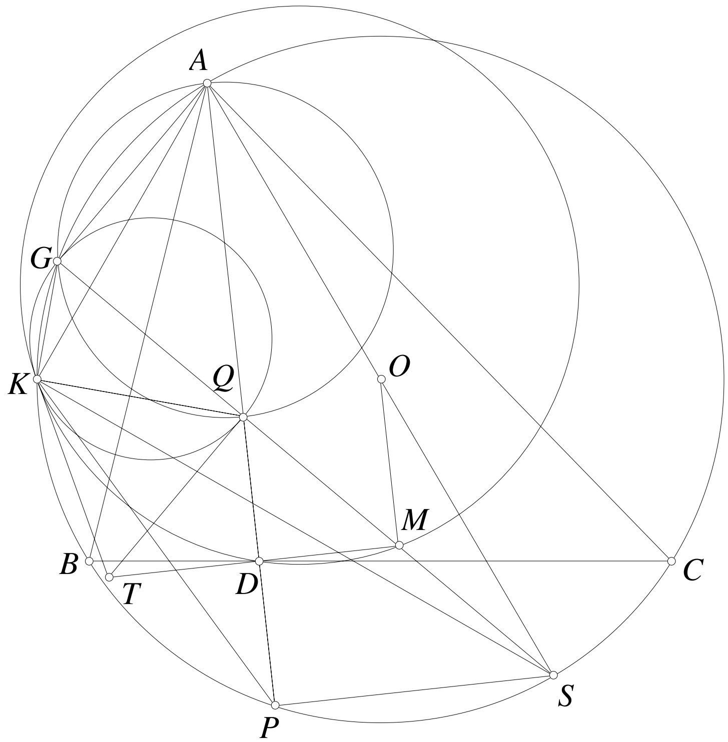
Hình 10.

Lời giải. Gọi Q là đối xứng của P qua D, thì Q nằm trên (O). Gọi GP cắt (O) tại N khác G. Ta thấy $\angle NPC = \angle FPG = \angle FAG = \angle BNP$ suy ra $BN \parallel PC$. Tương tự, $CN \parallel BP$. Từ đó M là trung điểm của PN. Gọi AS, NR là đường kính của (O). Ta dễ thấy $\angle PQN = 90^\circ$ vậy nên P, Q, R thẳng hàng. Từ đó, GN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ. Gọi tiếp tuyến tại K, P của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPG cắt nhau tại T. Ta có $\angle KTP = 180^\circ - 2\angle KGP = 2(90^\circ - \angle KRN) = 2\angle RNK = 2\angle KQP$ và $TK = TP$. Từ đó T là tâm ngoại tiếp tam giác KPQ nhưng vì BC là trung trực PQ nên T thuộc BC. Từ đây ta có $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ suy ra TK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KDM và KHM hay hai đường tròn đó tiếp xúc nhau tại K. $\square$

Nhận xét. Mở rộng trên lần đầu được tác giải đăng trong [1] và sau đó tác giả cũng chỉnh sửa lại cho ngắn gọn hơn như trên. Khi cho P là trực tâm hoặc khi cho góc A đặc biệt ta sẽ thu được nhiều trường hợp riêng giá trị. Một cách nhìn khác dễ dàng hơn khi dễ thấy P là trực tâm tam giác RBC

nên ta áp dụng trực tiếp bài toán gốc trên tam giác RBC thì thu bài toán trên. Sau đây là một mở rộng khác của tôi cho bài toán này

Bài toán 1.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt (O) tại K khác G. GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGQ và KDM tiếp xúc nhau.



Hình 11.

Lời giải. Gọi GQ cắt (O) tại S khác G, do $\angle AGQ = 90^\circ$ nên AS là đường kính của (O). Do $OM \parallel AP$ và O là trung điểm AS nên M là trung điểm QS. Từ đó $DM \parallel PS \perp PA$ nên DM là trung trực PA. Lại có $\angle KQG = 90^\circ - \angle KGQ = 90^\circ - \angle KAS = \angle ASK = \angle QPK$. Từ đó GS tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KQP. Gọi tiếp tuyến tại K, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác GKQ cắt nhau tại T. Ta có $\angle KTQ = 180^\circ - 2\angle KGQ = 2\angle KQG = 2\angle KPQ$. Từ đó T là tâm ngoại tiếp tam giác KPQ. Ta đã chứng minh DM là trung trực PQ nên T thuộc DM. Từ đây ta có $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ suy ra TK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGQ và KDM hay hai đường tròn đó tiếp xúc nhau tại K. Ta có điều phải chứng minh. □

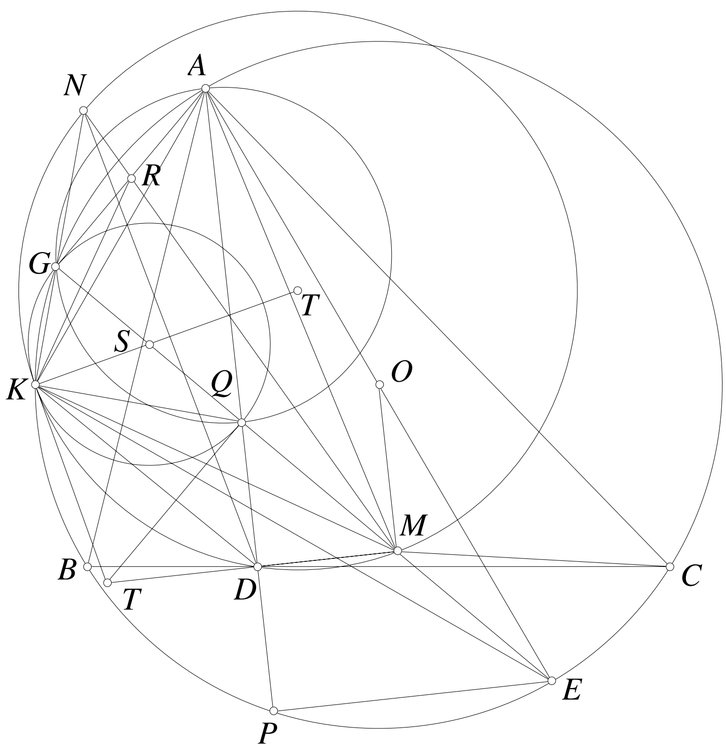
Nhận xét. Mở rộng này khá quan trọng vì nó dựa trên một mô hình rất giống bài toán gốc. Do đó những ứng dụng của bài toán gốc đều có thể phát triển trên mô hình này. Tuy nhiên ta cũng có thể có cái nhìn đơn giản hơn khi kéo dài trung trực PQ cắt (O) tại hai điểm Y, Z thì Q là trực tâm tam giác AYZ nên áp dụng bài toán gốc IMO vào tam giác AYZ. Ta thu được bài toán này. Một cách tương tự các bạn có thể làm với mở rộng sau

Bài toán 1.10. Cho tam giác ABC có P là hai điểm trong tam giác. X, Y, Z là đối xứng của P qua BC, CA, AB. PX cắt đường tròn (Q) ngoại tiếp tam giác XYZ tại T khác X. Đường tròn đường kính PT cắt (Q) tại G khác T. Đường tròn đường kính PG cắt (Q) tại K khác G. D, M là hình chiếu của P, Q lên BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM và KPG tiếp xúc nhau.

Như vậy qua hai bài toán trên có thể thấy bài toán IMO gốc vẫn đóng một vài trò rất quan trọng, khi áp dụng bài toán đó vào các mô hình khác nhau cho ta nhiều bài toán phát triển rất thú vị.

Ta tiếp tục đi tới một số khai thác của bài toán tổng quát giống như các khai thác của bài toán IMO

Bài toán 1.11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt (O) tại K khác G. GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K. Chứng minh rằng MN chia đôi GA.

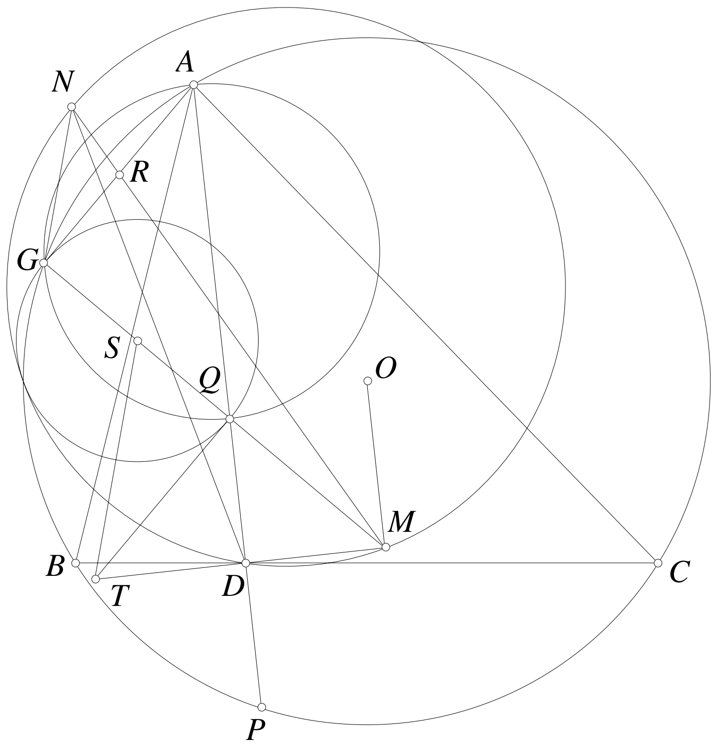


Hình 12.

Lời giải. Gọi AE là đường kính của (O). Chứng minh tương tự bài toán 1.9 ta có G, Q, M, E thẳng hàng và M là trung điểm QE. Từ đó dễ có các tam giác vuông KGQ và KAE đồng dạng, suy ta giác KGQ và KQE đồng dạng. Gọi R là trung điểm GA thì hai tam giác KGR và KQM đồng dạng. Từ đó dễ thấy tứ giác $KGRM$ nội tiếp. Ta có $\angle DMN = 180° - \angle DKN = 180° - (\angle GKS + \angle TKM + \angle MKD) = 180° - (90° - \angle KMR + \angle TMK + 90° - \angle TMD) = \angle DMR$. Từ đó ta có M, N, R thẳng hàng. □

Bài toán 1.12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A.

GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Đường thằng qua Q vuông góc GM cắt DM tại T. S, R là trung điểm GQ, GA. Đường thẳng qua G song song ST cắt MR tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MND tiếp xúc đường tròn đường kính GQ.



Hình 13.

Ta xây dựng thêm các mô hình khác nữa cho bài toán IMO như sau

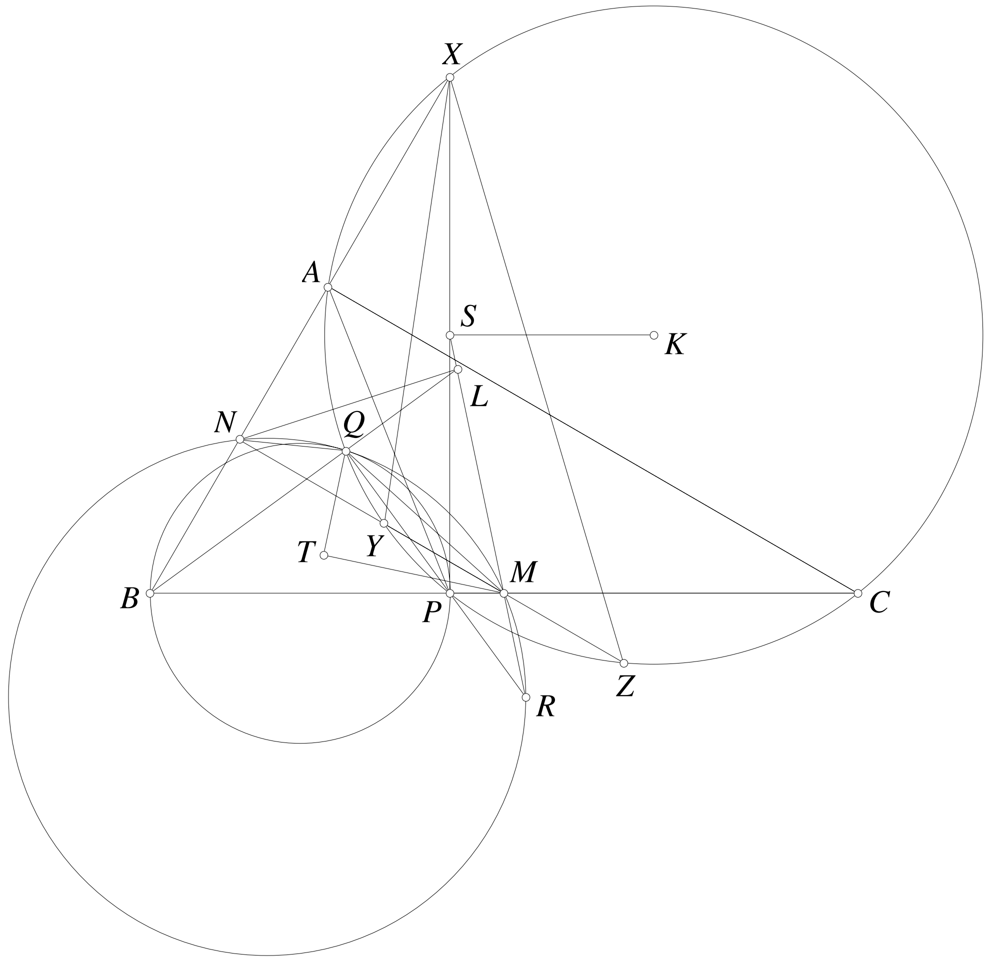
Bài toán 1.13. Cho tam giác ABC vuông tại A. P là một điểm trên BC. Đường tròn đường kính BP cắt đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác APC tại Q khác P. Gọi M, N là trung điểm của BC, AB.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN và QPB tiếp xúc nhau.

b) Gọi PQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN tại R khác Q. MR cắt đường thẳng qua P vuông góc BC tại S. Chứng minh rằng $KS \parallel BC$.

c) Gọi T đối xứng N qua BQ. Chứng minh rằng $\angle QTM = 90°$.

d) Gọi BQ cắt ST tại L. Chứng minh rằng tam giác LMN cân.

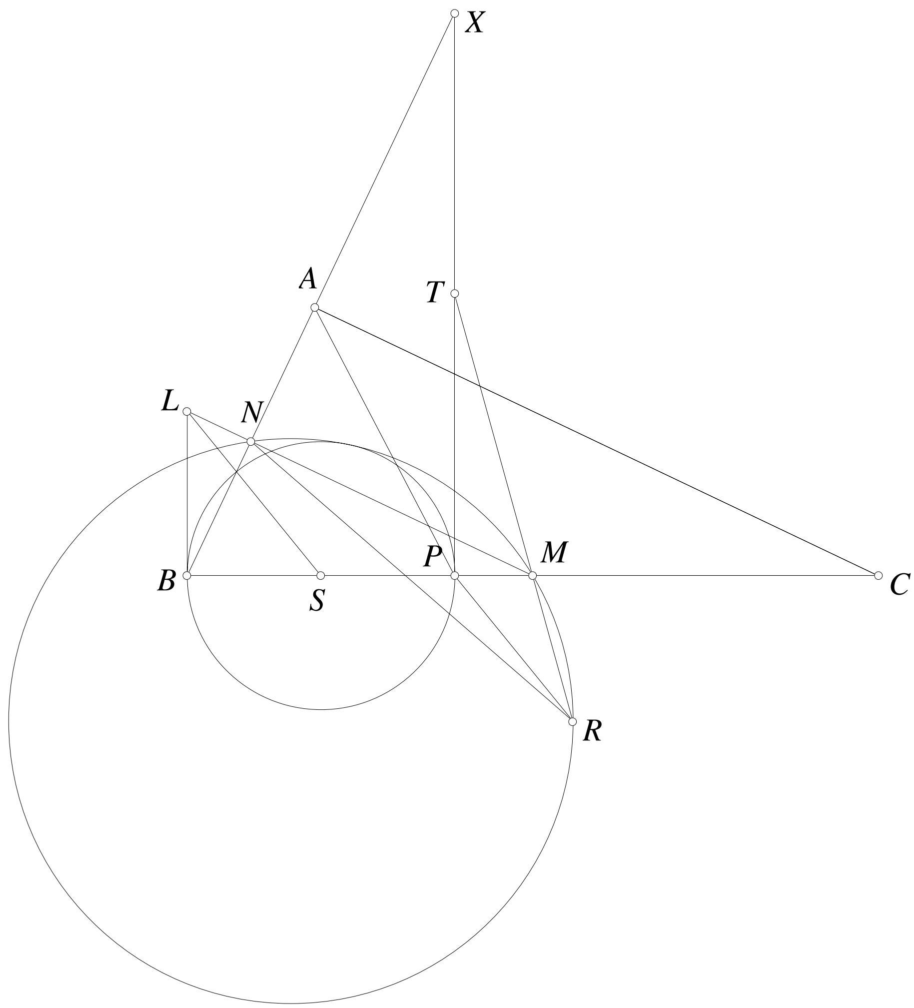


Hình 14.

Lời giải. Gọi AB cắt (K) tại X khác A và MN cắt (K) tại Y, Z. Dễ thấy B là trực tâm tam giác XYZ. Áp dụng các bài toán đã xây dựng cho tam giác XYZ trực tâm B ta thu được điều phải chứng minh. □

Ta lại sử dụng cách đã làm để giấu đi tiếp điểm ta thu được bài toán thú vị sau

Bài toán 1.14. Cho tam giác ABC vuông tại A. M, N là trung điểm BC, AB. Một đường thẳng vuông góc BC tại P cắt AB tại X. S, T là trung điểm PB, PX. Lấy điểm L thuộc MN sao cho $BL \perp BC$. Lấy R thuộc MT sao cho $PR \parallel LS$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN tiếp xúc đường tròn đường kính PB.



Hình 15.

Ngoài ta tôi còn thu được một bài toán tổng quát khá lạ rất thú vị như sau

Bài toán 1.15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. BE cắt CF tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt (O) tại L khác G. D là hình chiếu của K lên AH. GK cắt BC tại M. ML cắt KD tại N. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác LHG và LDN tiếp xúc nhau.

Mặt khác bài toán gốc vẫn còn nhiều phát triển và mở rộng khác các bạn hãy luyện tập các bài sau

Bài toán 1.16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường kính AD. M là một điểm trên BC. MD cắt (O) tại G khác D. Q là đối xứng của D qua M. Đường tròn đường kính QG cắt (O) tại K khác G. N là hình chiếu của M lên AQ.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN và KQG tiếp xúc nhau.

b) Gọi KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tại P khác K. Chứng minh rằng MP chia đôi AG.

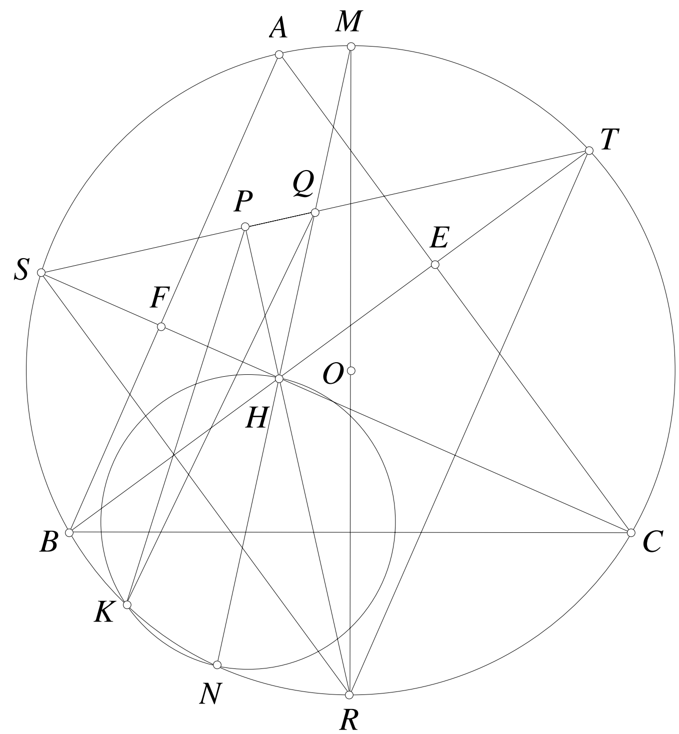
c) Gọi R đối xứng N qua QK. Chứng minh rằng $\angle KRM = 90°$.

Bài toán 1.17. Cho tam giác ABC có $\angle A = 60^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. M là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. MH cắt (O) tại N khác M. Đường tròn đường kính HN cắt (O) tại K khác N. P là đối xứng của H qua EF và Q là trung điểm HM.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KPQ và KHN tiếp xúc nhau.

b) Gọi KN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tại L khác K và R là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Chứng minh rằng QL chia đôi KR.

c) Gọi Z đối xứng P qua KH. Chứng minh rằng $\angle KZQ = 90^\circ$.



Hình 16.

Lời giải. Gọi S, T đối xứng H qua F, E và MR là đường kính của (O). Từ $\angle BAC = 60^\circ$ ta thấy H là trực tâm tam giác RST. Từ đó áp dụng các bài toán đã biết trên tam giác RST. Ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 1.18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm nội tiếp I. Đường tròn A-mixtilinear tiếp xúc (O) tại P. Đường tròn đường kính PI cắt (O) tại K khác P. N là trung điểm AI và trung trực AI cắt PI tại M.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KMN và KPI tiếp xúc nhau.

b) Gọi KP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tại L khác K. AI cắt (O) tại D khác A. Chứng minh rằng ML chia đôi PD.

c) Gọi Q đối xứng N qua KI. Chứng minh rằng $\angle KQM = 90^\circ$.

Bài toán 1.19. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao BE, CF. K, L đối xứng O qua CA, AB. KE cắt LF tại H. T thuộc trung trực BC sao cho $HT \parallel OA$. M là trung điểm AT. MO cắt tiếp tuyến qua A của (O) tại N. Đường thẳng qua N song song OA cắt đường thẳng Euler của tam giác ABC tại P. G là hình chiếu của T lên NH. Q là trung điểm HG. S đối xứng G qua PQ. TH cắt AN tại D.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác SDN và SGH tiếp xúc nhau.

b) Gọi GS cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác SDN tại R khác S. Chứng minh rằng NR chia đôi TG.

c) Gọi W đối xứng với D qua SH. Chứng minh rằng $\angle SWN = 90°$.

Cuối cùng là một mô hình mở rộng đã có trong [1] được tìm ra bởi bạn **Trịnh Huy Vũ**.

Bài toán 1.20. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (D) bất kì đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. Dựng đường kính AP của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. K là hình chiếu của D trên AP. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) lần thứ hai tại G. Đường tròn đường kính GP cắt (O) lần thứ hai tại J.

a) Chứng minh rằng đường tron ngoại tiếp tam giác JGP và JKD tiếp xúc nhau.

b) Đặt JG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác JKD lần thứ hai tại M. Chứng minh rằng DM chia đôi GA.

c) Gọi L đối xứng K qua JP. Chứng minh rằng $\angle JLD = 90°$.

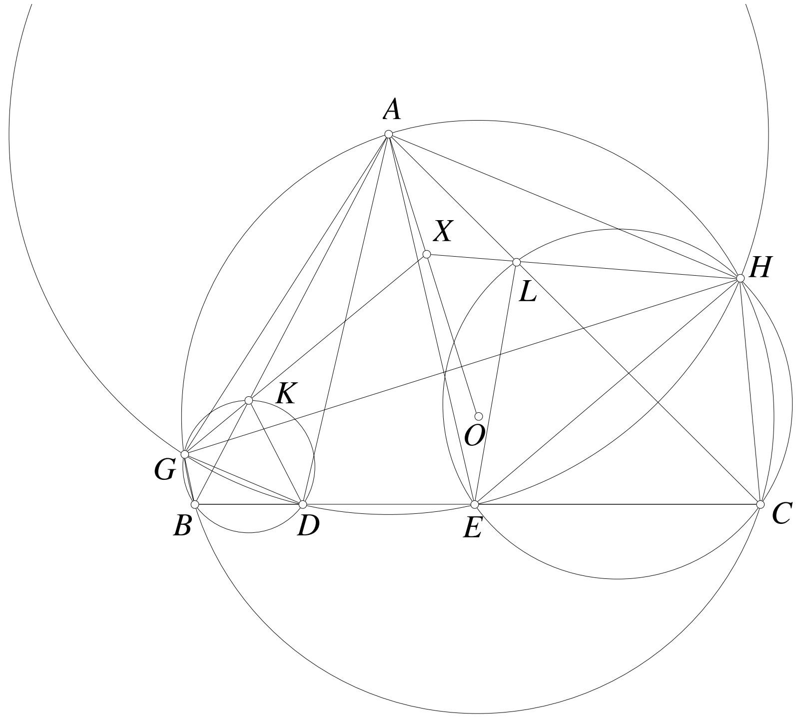
2 Bài hình ngày thứ 2

2.1 Mở đầu

Đề thi IMO ngày thứ 2 năm 2015 [2] có bài hình học rất thú vị như sau

Bài toán 2.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại D, E và cắt (O) tại G, H sao cho D nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDG và CEH lần lượt cắt AB, AC tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Tôi xin trình bày lời giải của mình cho bài toán này



Hình 17.

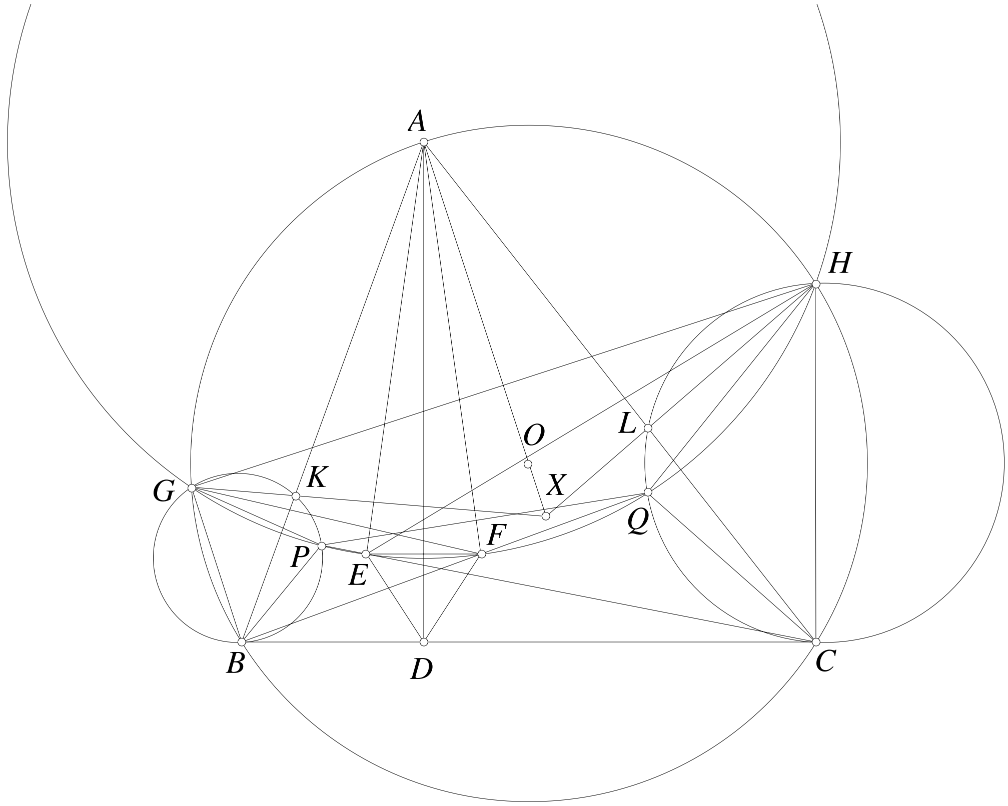
Lời giải. Gọi GK cắt LH tại X ta dễ thấy AO là trung trực GH. Ta chỉ cần chứng minh X thuộc trung trực GH là bài toán hoàn tất, thật vậy. Ta thấy $\angle EHC = \angle GHC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBD - \angle GDB = \angle BGD$. Từ đó $\angle XGH = \angle XGD - \angle HGD = \angle KBD - \angle HEC = 180^\circ - (\angle GBA + \angle BGD + \angle BDG) - \angle HEC = 180^\circ - (\angle HCA + \angle EHC + \angle EHG) - \angle HEC = \angle ACB - \angle GHE = \angle XHE - \angle GHE = \angle XHG$. Từ đó tam giác XGH cân ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 4 của ngày 2 được đánh giá là bài ở mức độ dễ. Lời giải dùng các kỹ thuật cộng góc rất cơ bản. Đây là bài toán đẹp, cấu hình không phức tạp mà đơn giản, có rất nhiều ý nghĩa trong kiểm tra đánh giá cũng như phát triển tư duy. Bài toán cũng có một số mở rộng và ứng dụng, chúng ta hãy theo dõi ở phần sau.

2.2 Mở rộng và khai thác

Đầu tiên ta thấy có thể thay thế đường tròn tâm A thành một đường tròn tâm bất kỳ trên đường thẳng AO bài toán có lời giải hoàn toàn tương tự. Chúng ta đi vào một mở rộng khác có ý nghĩa hơn

Bài toán 2.2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Đường tròn (A) cắt (O) tại G, H sao cho tia AB nằm giữa tia AG, AC. CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.



Hình 18.

Lời giải. Trước hết ta có $EF \parallel BC$ nên $\angle QPE = \angle EFB = \angle FBC$. Từ đó tứ giác $PQCB$ nội tiếp. Lại có $\angle EHC = 180^\circ - \angle GBC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBP - \angle PBC - \angle GFE = \angle BGP + \angle GPB - (180^\circ - \angle BPC - \angle PCB) + 180^\circ - \angle GPE = \angle BGP + \angle FEC = \angle BGP + \angle PGF = \angle BGF$.

Từ đó $\angle HGX = \angle HGP - \angle PGK = \angle HEC - \angle PBK = \angle HEC - (\angle GBF - \angle GBA - \angle PBF)(1)$.

Tương tự $\angle GHX = \angle GFB - (\angle HCE - \angle HCA - \angle QCE) \quad (2)$.

Lại dễ có $\angle GBA = \angle HCA, \angle PBF = \angle QCE$ và $\angle BGF = \angle CHE$ nên $\angle GBF + \angle GFB = \angle HEC + \angle EHC$ hay $\angle HEC - \angle GBF = \angle GFB - \angle EHC \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) ta dễ suy ra $\angle HGX = \angle GHX$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán tổng quát vẫn đúng khi thay thế đường tròn (A) thành đường tròn bất kỳ tâm thuộc OA với cách giải biến đổi góc tương tự. Ta để ý kỹ là trong lời giải này cũng như lời giải bài toán gốc thì việc biến đổi góc để chỉ ra $\angle EHC = \angle FGB$ là một bước quan trọng.

Ta có thể thấy rằng thực chất việc G, H nằm trên (O) cũng không mấy quan trọng, ta đi tới bài toán tổng quát hơn như sau

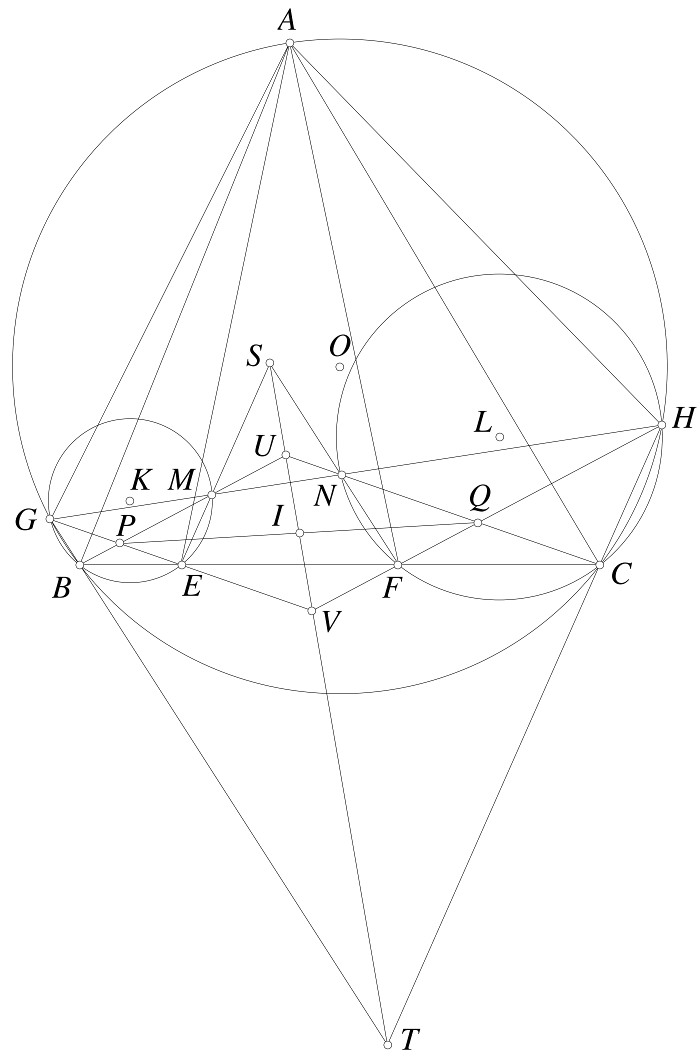
Bài toán 2.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Trên đường tròn (A) lấy hai điểm G, H sao cho $GH \perp OA$ đồng thời tia AB nằm giữa tia AG, AC. Gọi CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Mặt khác hơn nữa ta có thể thấy rằng trong bài toán trên ta có thể thay đường tròn (A) thành một đường tròn bất kỳ có tâm trên OA. Từ đó ta nghĩ rằng ta có thể thay đường thẳng OA thành trung trực của một dây cung của (O), ta lại có bài toán sau

Bài toán 2.4. Cho tứ giác $XYBC$ nội tiếp đường tròn (O). (A) là đường tròn bất kỳ tâm với tâm A thuộc trung trực XY. D là hình chiếu của A lên BC. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Trên đường tròn (A) lấy hai điểm G, H sao cho $GH \perp OA$ đồng thời tia AB nằm giữa tia AG, AC. Gọi CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BY, CX tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Nhờ đó ta có thể có nhiều cách khai thác bài toán, ssu đây chúng tôi trình bày một số khai thác trên mô hình bài toán này

Bài toán 2.5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại E, F và cắt (O) tại G, H sao cho E nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. GH cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác BEG và CFH lần lượt M, N khác G, H. Gọi GE, HF lần lượt cắt BM, CN tại P, Q. Gọi ME, GB lần lượt cắt NF, HC tại S, T. Chứng minh rằng ST chia đôi PQ.



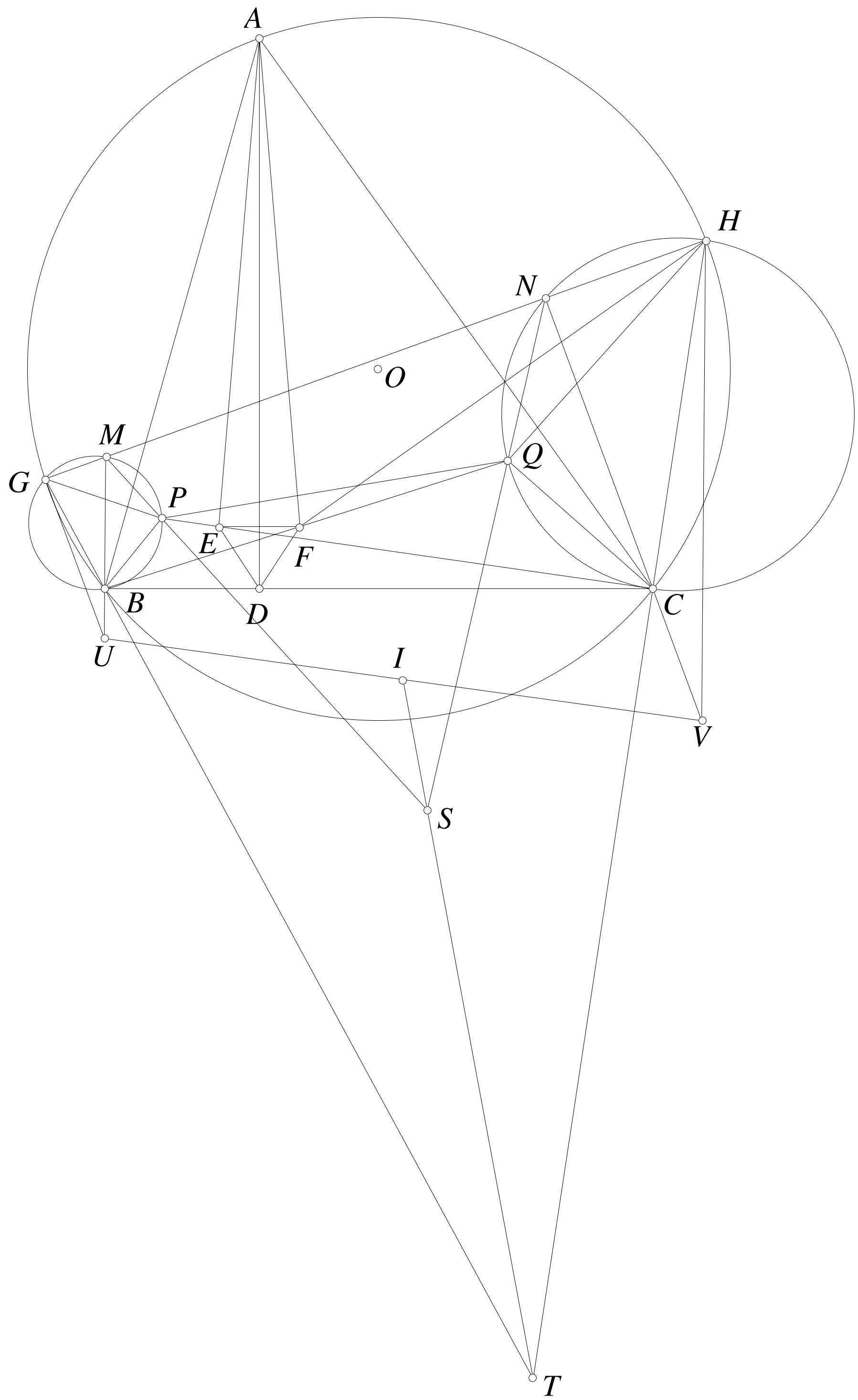
Hình 19.

Lời giải. Theo chứng minh bài toán gốc ta đã chỉ ra $\angle BGE = \angle CHF$. Từ đó có $\angle FNH = \angle FNC + \angle CFH = \angle FHC + \angle CFH = \angle EGB + \angle EGM = \angle BGM = \angle MEF$. Từ đó tứ giác

$MNFE$ nội tiếp. Lại dễ có $\angle HNC = \angle HFC = \angle EGH = \angle MBE$ suy ra tứ giác $BMNC$ nội tiếp. Gọi $(K), (L)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác BEG và CFH thì từ các tứ giác $EMNF$ va $BGHC$ nội tiếp ta suy ra ST là trục đẳng phương của (K) và (L). Ta lại có $\angle GEB = \angle GMB = \angle NCB$ nên $GE \parallel NC$, tương tự $HF \parallel MB$. Gọi BM, GE lần lượt cắt CN, HF tại U, V thì $PUQV$ là hình bình hành nên UV chia đôi PQ. Cũng từ các tứ giác $BMNC$ và $GEFH$ nội tiếp ta suy ra U, V cũng thuộc trục đẳng phương của $(K), (L)$ là ST. Vậy từ đó ST chia đôi PQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Một cách hoàn toàn tương tự, ta thu được một bài toán chia đôi đoạn thẳng thú vị trên mô hình bài toán tổng quát

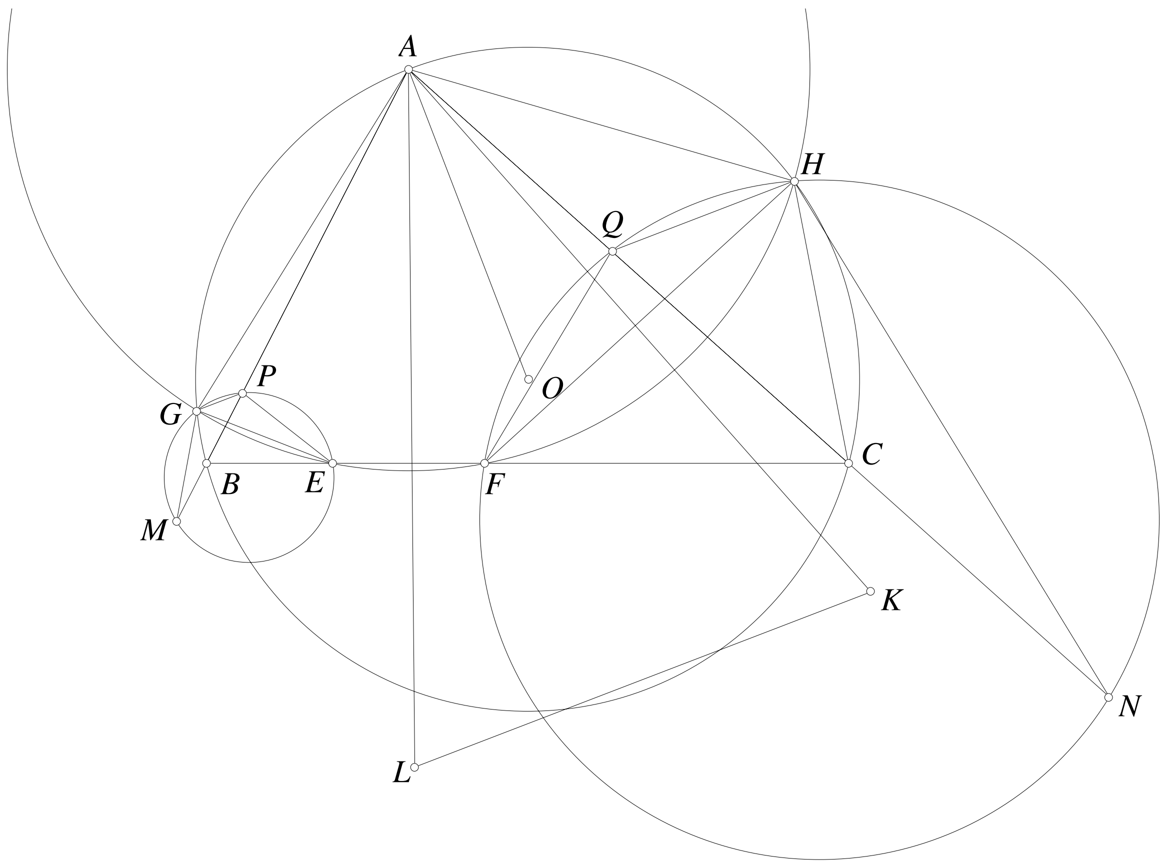
Bài toán 2.6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Đường tròn (A) cắt (O) tại G, H sao cho tia AB nằm giữa tia AG, AC. CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. GH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt tại M, N. MP, GB lần lượt cắt NQ, HC tại S, T. Lấy các điểm U, V trên đường thẳng MB, NC sao cho $UG \parallel NC$ and $VH \parallel MB$. Chứng minh rằng ST chia đôi UV.



Hình 20.

Nếu biết sử dụng phép nghịch đảo các bạn có thể làm thêm bài toán sau để luyện tập

Bài toán 2.7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại E, F và cắt (O) tại G, H sao cho E nằm giữa B, F và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn qua H, C tiếp xúc HA cắt CA tại Q khác C. Đường tròn qua G, B tiếp xúc GA cắt AB tại P khác B. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GPE và HQF cắt AB, AC tại M, N khác P, Q. Chứng minh rằng bán kính ngoại tiếp hai tam giác AGM và AHN bằng nhau.



Hình 21.

3 Kết luận

Kỳ thi IMO năm nay lại tiếp túc có 2 bài hình lần lượt ở vị trí số 3 và số 4. Hai bài toán hình học thi IMO năm nay đều là các bài toán hay có giá trị cao. Ngoài việc đưa ra những mở rộng khác nhau bài viết còn có ứng dụng các bài toán thi này vào những bài toán chia đôi đoạn thẳng đẹp mắt. Cũng từ bài toán chia đôi đoạn thẳng của ngày 1 ta thu được một cách phát biểu thú vị về hai đường tròn tiếp xúc nhau từ các cách phát biểu mới thu được lại có thể ứng dụng phát biểu cho bài toán tổng quát thứ hai, điều này làm tăng sự hấp dẫn cho bài toán thi. Bài toán chia đôi đoạn thẳng trong phát triển ngày thứ 2 cũng không kém phần thú vị, đó là sự kết hợp ứng dụng của trục đẳng phương và hình bình hành. Hai bài toán hình của kỳ thi năm nay đẹp và có tính gợi mở và phát triển cao, rất xứng đáng là đề bài thi IMO.

Cuối cùng tác giả muốn được nói lời cảm ơn tới bạn **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN học trò của tác giả, người đã có nhiều đóng góp cho bài viết và giúp tác giả chỉnh sửa một số lỗi trong bài viết.

Tài liệu

[1] Topic Problem3
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1112748_problem3

[2] Topic Problem 4
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113163_problem_4

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

About two geometry problems in IMO year 2015

Tran Quang Hung

Abstract

The article resolve and gives the ideas for expanding and applications of the geometry problems in IMO year 2015.

Contents

1 Geometry problem on the first day

1.1 Introduction

The IMO exam on first day in the year 2015 [1] has interesting geometric problem as following

Problem 1.1. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) with the orthocenter H, the altitude AF and M is the midpoint of BC. The circle with the diameter HA cuts (O) at Q differently from A. The circle with the diameter HQ cuts (O) at K differently from Q. Prove that the circumcircles of the triangles KHQ and KFM touch each other.

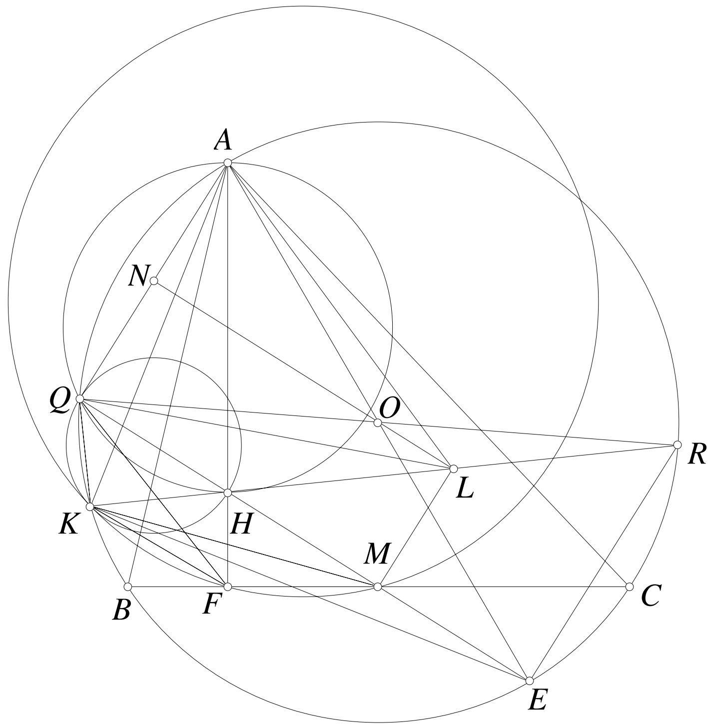


Figure 1.

First proof. Draw the diameters AE and QR of (O). L, N are the midpoints of HR, QA respectively. We have the familiar result Q, H, M, E collinear. Then deduce $ML \parallel ER \parallel QA$ v $ML = \dfrac{1}{2}ER = \dfrac{1}{2}QA = NQ$ so $NQML$ is retangular. Thence, $LN \perp QA$. Then we have $LA = LQ$. On the other hand, $ML \parallel QA$ so ML touches the circumcircles $\triangle LAQ$ at L (1). Easily seen $HA.HF = HK.HL = HQ.HM$ so the inverse with center H pow of point $\overline{HA}.\overline{HF}$ change $M \to Q, L \mapsto K, A \mapsto F, Q \mapsto M$. From (1) combine the inversation with center H deduce the circumcircles $\triangle KHQ, \triangle KFM$ touch each other. $\square$

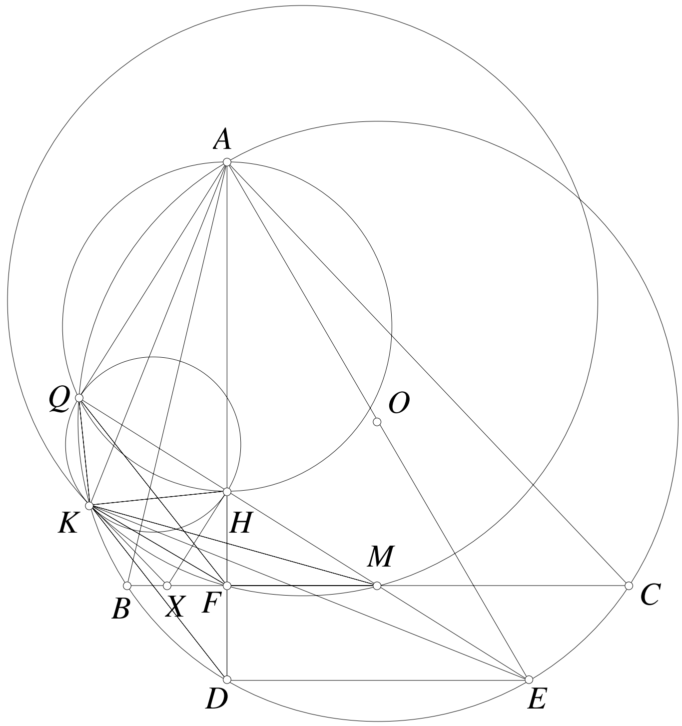


Figure 2.

Second proof. Call by AE the diameter of (O) and D is reflection of H through BC then D is on (O). Easily seen Q, H, M, E collinear. The tangents at K, H that the circumcircles of the triangles KHQ cut each other at X. We have $\angle KXH = 180^\circ - 2\angle KHX = 180^\circ - 2\angle KQH = 2(90^\circ - \angle KQH) = 2(90^\circ - \angle KAE) = 2\angle AEK = 2\angle KDH$. And have $XK = XH$, then X is the center of the circumcircles of the triangles KDH. As BC is perpendicular bisector of HD so X is on BC. Then according to trigonometry we have $XK^2 = XH^2 = XF.XM$ or XK is the common tangent of the circumcircles of the triangles KQH and KFM or two circles touch each other at K. $\square$

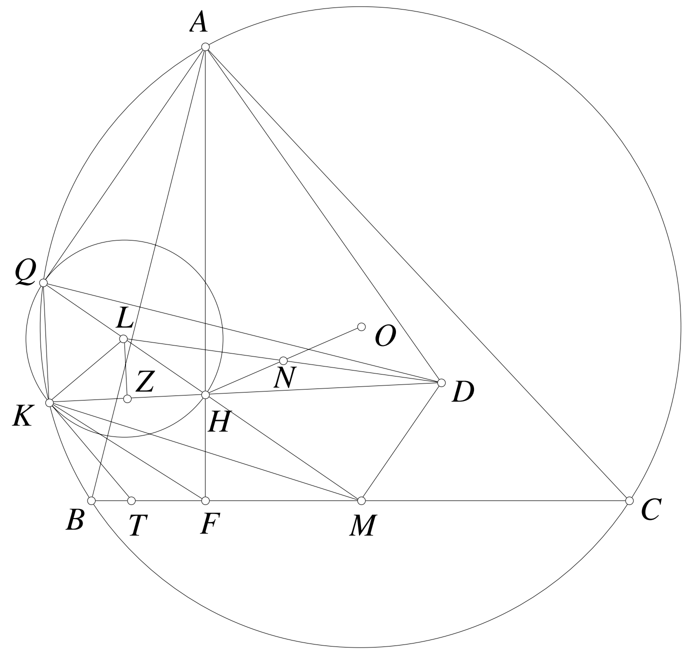


Figure 3.

Third proof. The straight line passing through M is perpendicular to QM and cuts KH at D. Call by L, Z the midpoints of HQ, HK then L, Z are on the Euler circle (N) but M is also on (N) then N is the midpoints of LD. N is also the midpoints of OH then $OD \parallel LH \perp QA$. Thence $DQ = DA$ and $HA.HF = HQ.HM = HK.HD$. Draw the tangent KT of the circumcircles of the triangles KQH we have $\angle TKF = \angle TKH - \angle HKF = \angle KQH - \angle HAD = \angle HDM - (\angle QAD - \angle QAH) = \angle HDM - \angle QDM + \angle HMF = \angle HMF - \angle QDH = \angle HMF - \angle HMK = \angle KMF$. Thence KT is also the common tangent of the circumcircles of the triangles KFM. □

Remark. This problem is third problem on first day, is supposed difficult problem. However the proof of problem with two circles touche at the available tangent point then degree of difficulty is not high so it is reasonable the third problem. The first proof is rather nature idea, because when two circles touch each other we think about inversation for proving the straight line touches the circle for reduce the quantity of the circles. This proof was suggested by **Telv Cohl** and **Trinh Huy Vu** 12A1 math special school of Natural science, **Vu** helps me represent the proof as above. There are many different proofs suggested in [1]. The second proof have clever and pure geometric idea was suggested by **Jeck Lim**, nick name **oneplusone** in [1], I edit a little in building the point X and transform the angle shortly. The third proof, in fact, start at an idea of inversation by **Ho Quoc Dang Hung** and I also edit more shortly, remove the present of an inversation and make its more pure geometry. In this proof, the point T is not necessary but we still build it for nice proof. The problem has many applications and expanding. In the following we would like to present some application and expanding.

1.2 Extensions of IMO problem

The problem IMO has nice configuration, in which we can see many other interesting problems. The first problem was found out by chance when try to resolve the IMO problem by using similarly with median method.

Problem 1.2. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) with the orthocenter H, the altitude AF and M is the midpoint of BC. The circle with the diameter HA cuts (O) at Q differently from A. The circle with the diameter HQ cuts (O) at K differently Q. KQ cuts the circumcircle of the triangle KFM at N differently from K. Prove that MN bisects AQ.

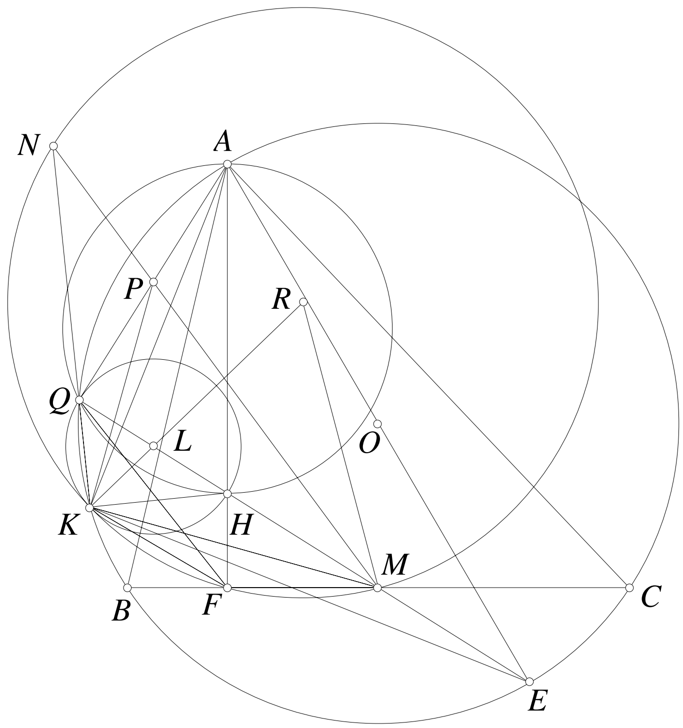


Figure 4.

Solution. Call by L, R the centers of the circumcircle of the triangles KQH and KFM then L is the midpoint of QH and according to the first problem then K, L, R are collinear. Call by P the midpoint of QA, we will prove M, N, P collinear. Indeed, call by AE the diameter of (O) then Q, H, M, E are collinear. Thence $\angle KQH = \angle KAE$ so two right triangles KQH and KAE are similar, deduce two triangles KQA and KHE are similar, their medians are KP, KM so $\angle QPK = \angle QMK$ and $\angle QKP = \angle HKM$. Then the quadrilateral $QPMK$ is cyclic. We have $\angle CMN = \angle QKF = \angle QKL + \angle LKM + \angle MKF = \angle KPM + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK + 90^circ - \angle RMF = 180^\circ - \angle BMP = \angle CMP$. Then M, N, P are collinear. We are done. □

Thanks for the idea of this problem we can see the interesting when the tangent point was hidden in the origin problem

Problem 1.3. Let the acute triangle ABC with the orthocenter H, the altitude AF and M is the midpoint of BC. The circle with the diameter HA cuts HM at Q differently from A. X is on BC such that $XH \perp QM$. L, P are the midpoints of QH, QA. The straight line through Q and parallel to LX cuts MP at N. Prove that the circumcircle of the triangle NFM touches the circle with the diameter QH.

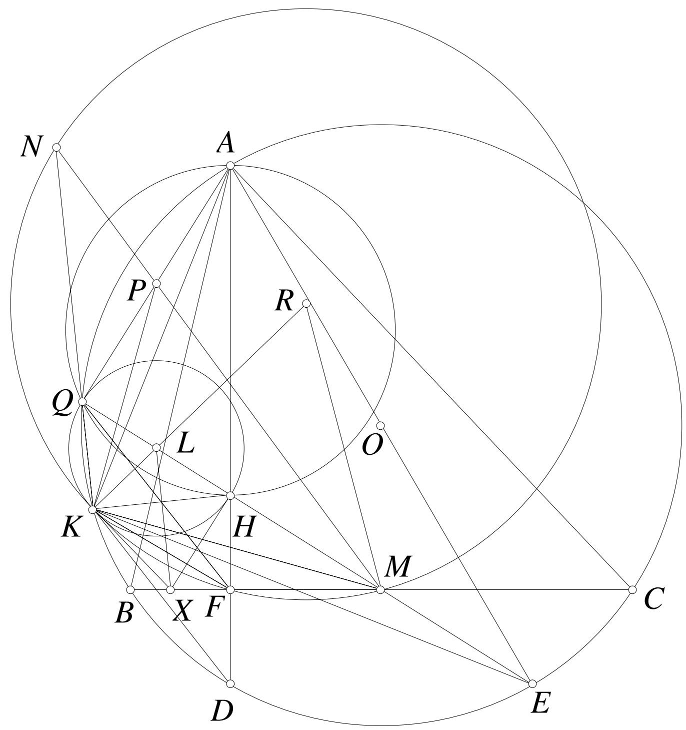


Figure 5.

The first proof. Call by (O) the circumcircle of the triangle ABC. Call by AE the diameter of (O) then Q, H, M, E are collinear. Call by D the reflection of H through BC. The circle (X, XH) touches the circle (O) at K differently D. We have $\angle XKH = \angle XHK = 90° - \angle KDH = 90° - \angle KEA = \angle KAE = \angle KQE$, then KH, KX touches the circumcircle of the triangle QKH. Moreover, we have $\angle KQH = \angle KHX = 90° - \angle KHQ$ so $\angle QKH = 90°$. K is on the circle with the diameter QH so $LX \perp KH \perp QK$ deduce $QK \parallel LX \parallel QN$ so K, Q, N are collinear. From the similar triangle KQH and the triangle KAE deduce KQA and KHE are similar, else KP, KM are their medians respectively so the triangles KQP and KHM are similar or KQH and KPM are similar. Else have $XK^2 = XH^2 = XM.XF$ deduce XK touches the circumcircle (R) of the triangle KFM. Thence K, L, R are collinear. So $\angle LKQ = \angle LQK = \angle KPM = 90° - \angle KHQ = 90° - \angle PMK$ from this easily deduce $\angle KRM = 2\angle N$. Thence N is on (R) or (R) is the circumcircle of the triangle NFM. Eevidently (R) touches the circle with the diameter QH. We are done. □

The second proof . The circle with the diameter QH cuts (O) at K differently from A and D is the reflection of H through BC. Prove analogously the origin problem then QE touches the circumcircle of the triangle KHD but $HX \perp QE$ so the center of the circumcircle of the triangle KHD is laying on HX, else have X is on the perpendicular bisector HD so the center of the circumcircle of the triangle KHD is just X so $XH = XK$. Easily seen XH touches the circumcircle of the triangle QHK so XK is the same. Then $KH \perp LX \perp QK$ so $QK \parallel LX \parallel QN$. Thence Q, K, N are collinear. We have $\angle QKF + \angle FMN = \angle QKL + \angle RKM + \angle MKF + \angle FMP = 90° - \angle KHQ + \angle RMK + 90° - \angle RMF + \angle FMP = 180°$ or the quadrilateral $NKFM$ is cyclic. Thence the circumcircle of the triangle NFM touches the circle with the diameter QH. □

We have another idea for expanding IMO problem as following

Problem 1.4. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) with the orthocenter H and the altitude AD. The circle with the diameter HA cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter HG cuts (O) at K differently from G. S is the reflection of D through HK. Prove that the straight line S is perpendicular to SK bisects BC.

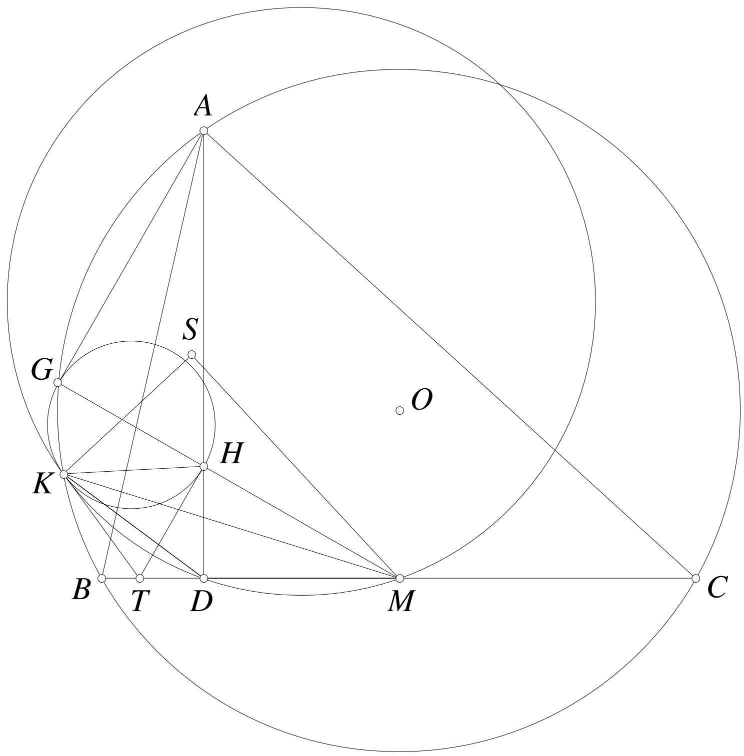


Figure 6.

Solution. Call by M the midpoint of BC, we prove that the triangle KSM is right at S. Indeed in the problem IMO, the circumcircles of the triangles KGH and KDM touch each other at K. We get T on BC such that KT is common tangent of two that circles. We have $\angle SKM = \angle SKH + \angle HKM = \angle HKD + \angle GHK - \angle GMK = \angle HKT - \angle DKT + \angle GHK - \angle GMK = \angle HGK + \angle GHK - \angle KMD - \angle GMK = 90^\circ - \angle HMD = \angle DHM$. Also according to the origin problem we also have TK and TH are the tangents of the circumcircles of the triangle KGH and two triangles TKD and TMK are similar. Then $\dfrac{KS}{KM} = \dfrac{KD}{KM} = \dfrac{TK}{TM} = \dfrac{TH}{TM} = \dfrac{HD}{HM}$. From that easily seen two triangles KSM and HDM are similar, so $\angle KSM = 90^\circ$. □

From two above problems, go to the following expanding

Problem 1.5. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) with the orthocenter H and the altitude AD, the median AM. The circle with the diameter HA cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter HG cuts BC at K differently from G. KG cuts the circumcircle of the triangle KDM at N differently from K. KH cuts MN at Q. Prove that $QD = QM$.

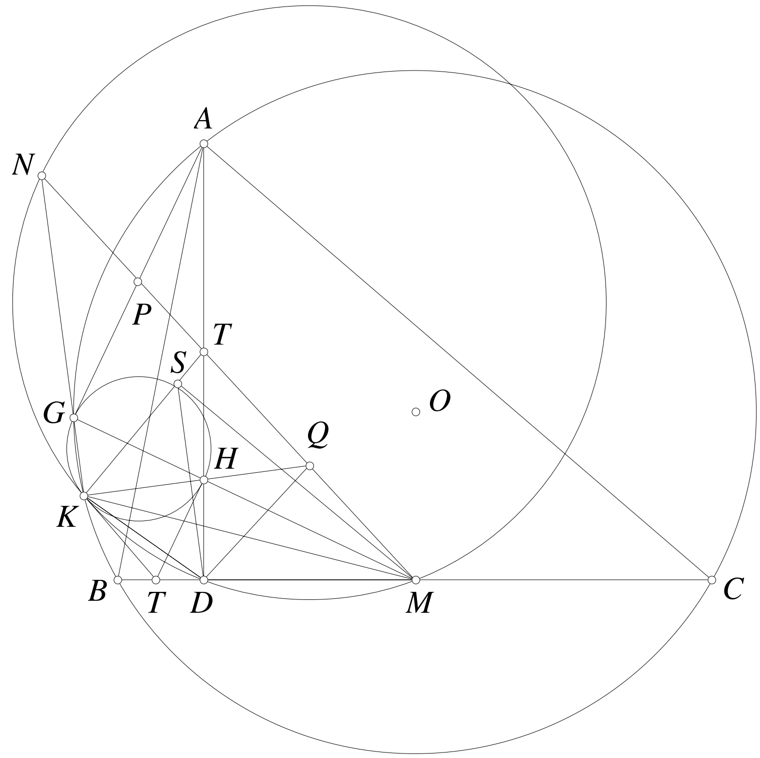


Figure 7.

The first proof based on the previous result

The first proof. Call by S the reflection of D through KH and KS cuts MM at T. According to the previous problem, MN goes through the midpoint P of GA so $\angle QHM = \angle GHK = \angle KMQ$. From this $\angle QMH = \angle QKM$. Then $\angle HKD = 90^\circ - \angle HMD - \angle HKM = 90^\circ - \angle QMD$. Thence $\angle KSD = 90^\circ - \angle SKH = 90^\circ - \angle HKD = \angle QMD$ deduce the quadrilateral $STMD$ is cyclic. Also according to the previous problem $\angle TSK = 90^\circ$. From this deduce $\angle TDM = 90^\circ$ or T belong to AH. And from $\angle HKD = 90^\circ - \angle QMD = \angle MTD$ so the quadrilateral $KTQD$ is cyclic, we receive $\angle DQM = \angle TKD$ or two triangles QDM and KDS are similarly or $QD = QM$. $\square$

The second proof was proved by **Trinh Huy Vu** the pupil from 12A1 Math, Special school of natural science.

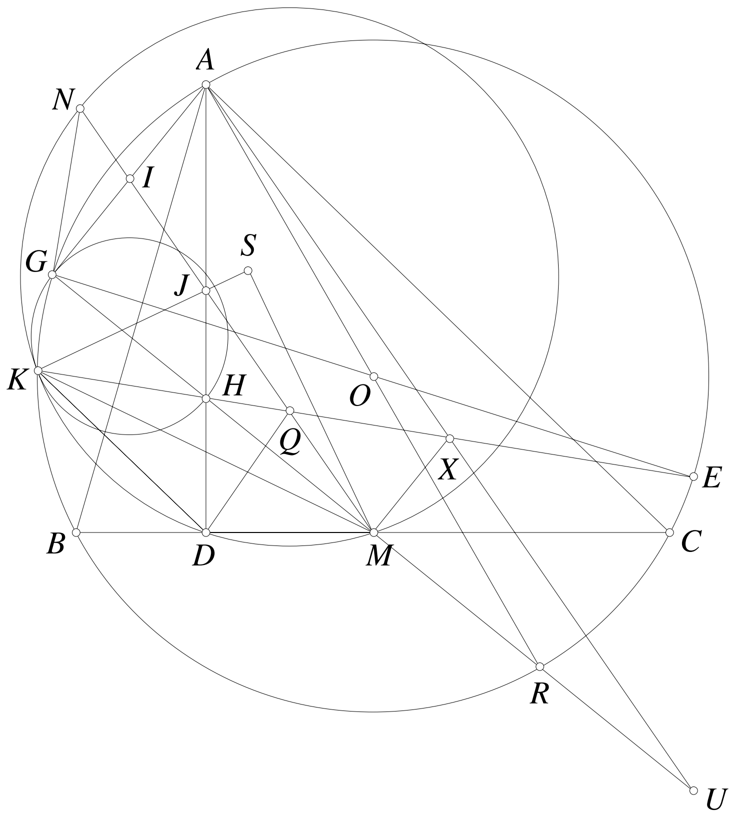


Figure 8.

proof. Draw the diameters AR, GE of (O).Call by I the midpoint of GA. From the previous problem we had I laying on MN. Call by X the midpoint of HE. We have familiar result G, H, M, R are collinear. From this deduce $MX \parallel GA$ v $MX = \frac{1}{2}RE = \frac{1}{2}.GA = IA = IG$ so $AIMX, IGMX$ is parallelogram. Thence $AX \parallel MI$ and $XI \perp GA$. From that, we receive $XA = XG$. Call by J the intersection of MI and AD. Get U symmetry of A through X. From $XA = XG$ deduce $\angle AGU = 90°$. Then U is lying on the straight line HM. So KH bisects MJ but $MJ \parallel AU$ and KH bisects AU at X. Deduce Q the midpoint of MJ, combine with $\angle JDM = 90°$, we receive $QD = QM$. □

From the result of this problem **Vu** gives the other proof for previous problem as following

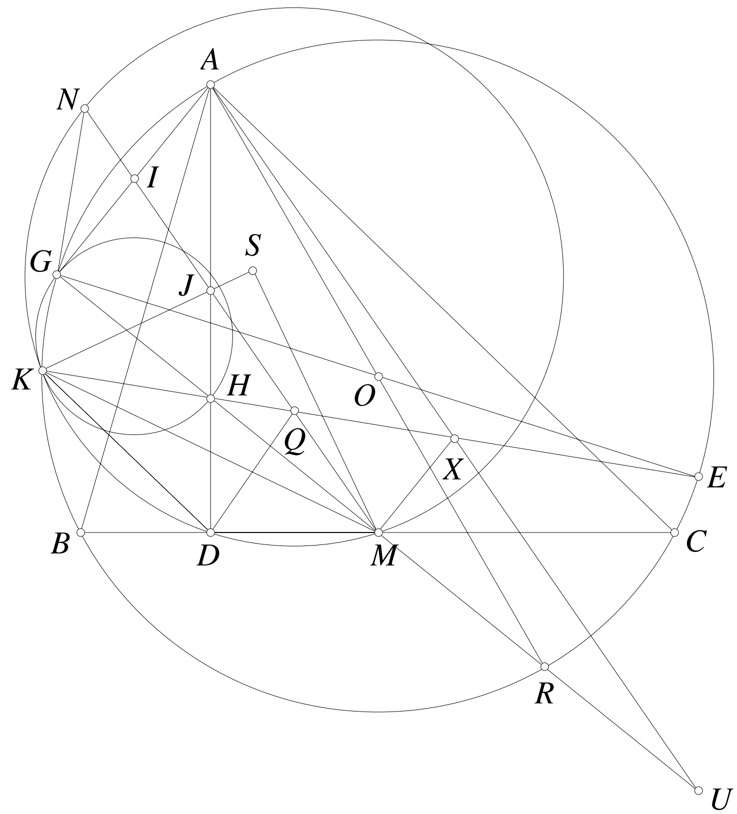


Figure 9.

Solution of the previous problem. We still use a symbol as in the second proof above. From this problem deduce Q is center of the circumcircles of the triangle DMS. Deduce $\angle DSM = \frac{1}{2}\angle DQM$. We have $HK.HX = HK.\frac{1}{2}HE = HG.\frac{1}{2}HR = HG.HM = HA.HD$. Deduce the quadrilateral $AXDK$ cyclic. So we have $\angle KSD = \angle KDS = 90° - \angle DKH = 90° - \angle DAX = 90° - \angle DJM = 90° - \frac{1}{2}.\angle DQM = 90° - \angle DSM$. So $\angle KSM = \angle KSD + \angle DSM = 90°$. □

If use the butter fly theorem we have two applications as following

Problem 1.6. Let the acute triangle ABC with the center of the circumcircles O with the orthorcenter H, the altitude AD and the median AM. G is the projector of A on HM. L is the midpoint of HG. K is reflection of G through OL. KL cuts perpendicular bisector DM at S. KG cuts BC at T. Get X belong to MK such that $TX \perp ST$. Y is symmetric of X through T. P is the midpoint of AG. Prove that KG, YD, MP concurrent.

We can present the above problem in other way, this problem also has a lot of meaning

Problem 1.7. Let the acute triangle ABC with the center of the circumcircles O with the orthocenter H, the altitude AD and the median AM. G is projector of A on HM. L is the midpoint of HG. K is the reflection of H through OL. KL cuts the perpendicular bisector DM at S. P is the midpoint of GA. N is symmetry of M through the projector of S on MP. NG cuts BC at T. Get X belong to ND such that $XT \perp ST$. Y is symmetry of X through T. Prove that MY, NG, KL concurrent.

So from the origin problem we receive some other problems, they have nice result and meaning .

1.3 Some applications

This IMO problem is nice in sense having a lot of expanding development. In [1] was given many expanding, in this article I would like to present my expanding, let go to the first expanding as following

Problem 1.8. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O). P is one point in the triangle such that $\angle BPC = 180^\circ - \angle A$. PB, PC cut CA, AB at E, F. The circumcircles of the triangle AEF cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter PG cuts (O) at K differently from G. D is the projector of P on BC and M is the midpoint of BC. Prove that The circumcircles of the triangles KGP and KDM touche each other.

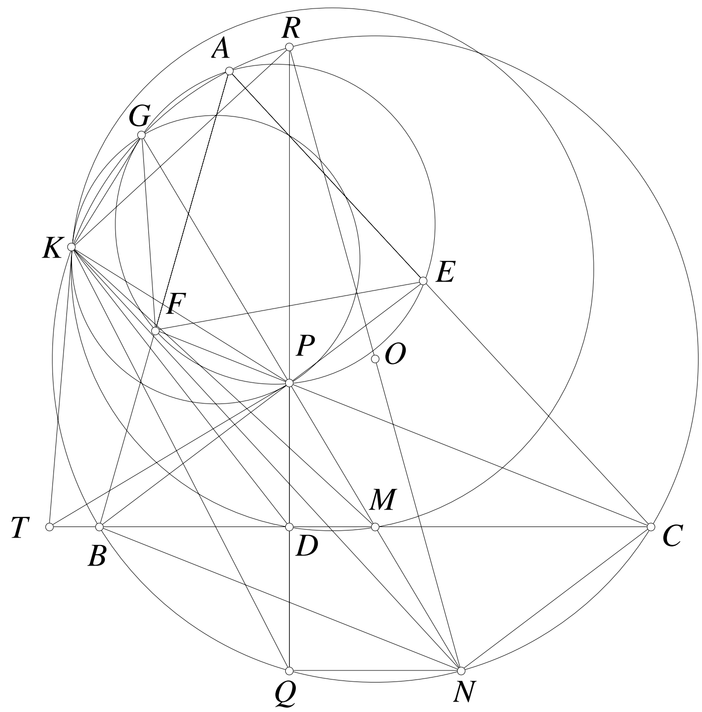


Figure 10.

Solution. Call by Q the symmetry of P through D, then Q is laying on (O). GP cuts (O) at N differently from G. We see $\angle NPC = \angle FPG = \angle FAG = \angle BNP$ deduce $BN \parallel PC$. Similarly, $CN \parallel BP$. From this M is the midpoint of PN. Call by AS, NR the diameter of (O). We easily see $\angle PQN = 90^\circ$ so P, Q, R are collinear. Thence, GN is the tangent of the circumcircle of the triangle KPQ. Call the tangent at K, P of the circumcircle of the triangle KPG cut each other at T. We have $\angle KTP = 180^\circ - 2\angle KGP = 2(90^\circ - \angle KRN) = 2\angle RNK = 2\angle KQP$ v $TK = TP$. From this T is the center of the circumcircle of the triangle KPQ but, as BC is the perpendicular bisector of PQ so T is on BC. From this, we have $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ deduce TK is common tangent of the circumcircles of the triangles KDM and KHM or two circles touch each other at K. $\square$

Remark. Above expand was published first time in [1] and after that it was revised shortly. When given P the orthocenter or given the angle A specially, we will receive many separate case with meaning. In other point of view, it is easier when P is the orthocenter of the triangle RBC so, we apply directly the origin problem on the triangle RBC then receive the above problem. The other expand for this problem as following

Problem 1.9. Let the triangle ABC inscribed on the circle (O). P is one point on the chord $\overset{\frown}{BC}$ not contain A. AP cuts BC at D. Q is symmetry of P through D. The circle with the diameter AQ cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter GQ cuts (O) at K differently from G. GQ cuts the straight line through O and parallel to AP at M. Prove that the circumcircles of the triangles KGQ and KDM touch each other.

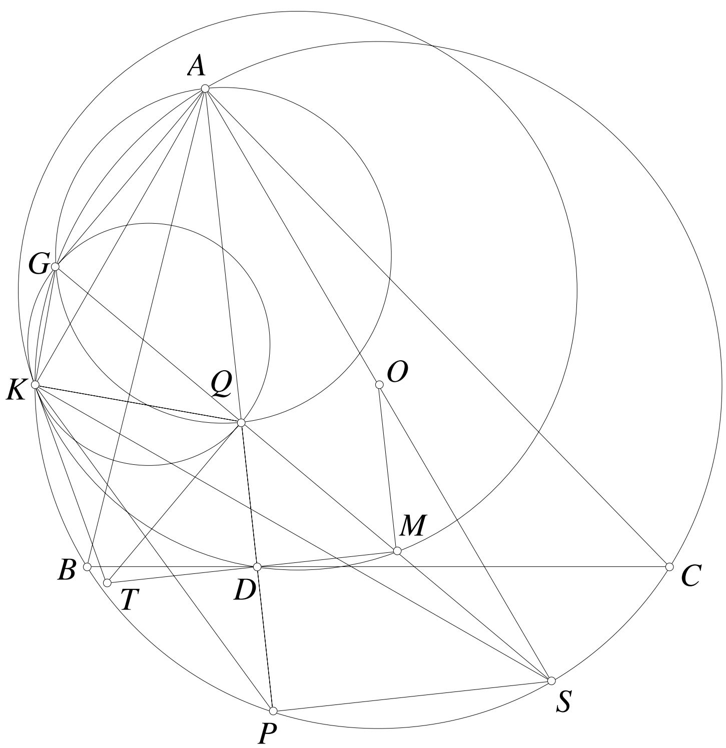


Figure 11.

Solution. Call by S the intersection again of GQ cut (O), as $\angle AGQ = 90°$ so AS is the diameter of (O). As $OM \parallel AP$ and O is the midpoint of AS so M is the midpoint of QS. Thence $DM \parallel PS \perp PA$ so DM is the perpendicular bisector of PA. Else have $\angle KQG = 90° - \angle KGQ = 90° - \angle KAS = \angle ASK = \angle QPK$. Thence GS touches the circumcircle of the triangle KQP. Call the tangent at K, Q of the circumcircle of the triangle GKQ cut each other at T. We have $\angle KTQ = 180° - 2\angle KGQ = 2\angle KQG = 2\angle KPQ$. Then T is the center of the circumcircle of the triangle KPQ. We prove that DM is the perpendicular bisector of PQ so T belongs to DM. From this, we have $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ deduce TK is the common tangent of the circumcircles of the triangles KGQ and KDM or two that circles touch each other at K. We are done. □

Remark. This expanding is rather important because it bases on the same models as the origin problem. So the applications of the origin problem could developed on this model. However, we can see it more simple when we prolong the perpendicular bisector PQ cuts (O) at two points Y, Z then Q is the orthocenter of the triangle AYZ so apply the origin problem IMO into the triangle AYZ. We receive this problem. By the same way, you can do the following expanding problem

Problem 1.10. Let the triangle ABC and P is the point in the triangle. X, Y, Z are the reflections of P through BC, CA, AB. PX cuts the circumcircle (Q) of the triangle XYZ at T differently from X. The circle with the diameter PT cuts (Q) at G differently from T. The circle with the diameter PG cuts (Q) at K differently from G. D, M are the projectors of P, Q on BC. Prove that the circumcircles of the triangles KDM and KPG touch each other.

So, through two above problems we can see the IMO origin problem plays an important role , when apply that problem into different models then give many very interesting expanding problems .

We continue some aspect of general problem as expanding of IMO problems

Problem 1.11. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). P is one point on the chord $\overset{\frown}{BC}$ not contain A. AP cuts BC at D. Q is symmetry of P through D. The circle with the diameter AQ cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter GQ cuts (O) at K differently from G. GQ cuts the straight line through O and parallel to AP at M. KG cuts the circumcircle of the triangle KDM at N differently from K. Prove that MN bisects GA.

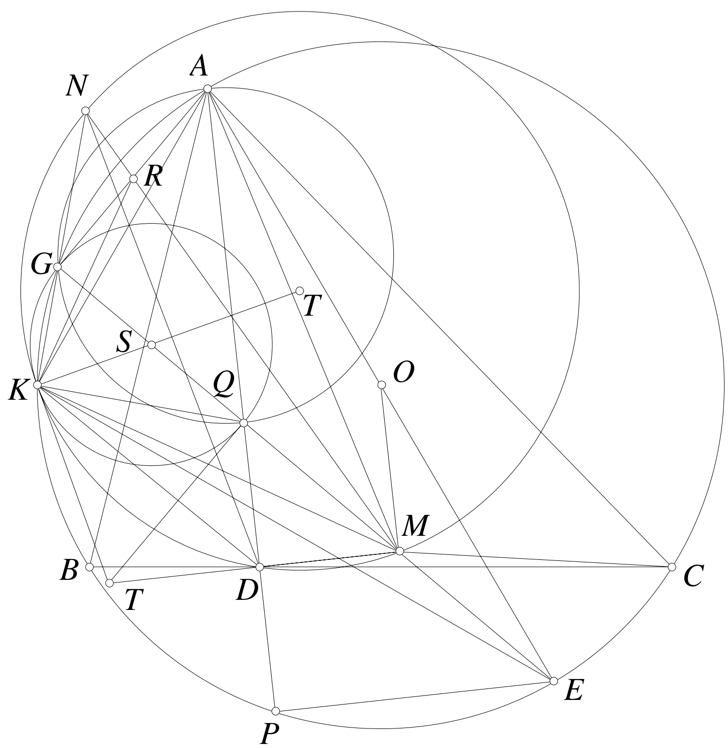


Figure 12.

Solution. Call by AE the diameter of (O). Similar proof of the problem 1.9 we have G, Q, M, E are collinear and M is the midpoint of QE. So, easily seen the right triangles KGQ and KAE are similar, deduce the triangles KGQ and KQE are similar. Call by R the midpoint of GA, so two triangles KGR and KQM are similar. So easily seen the quadrilateral $KGRM$ is cyclic. We have $\angle DMN = 180° - \angle DKN = 180° - (\angle GKS + \angle TKM + \angle MKD) = 180° - (90° - \angle KMR + \angle TMK + 90° - \angle TMD) = \angle DMR$. Thence, we have M, N, R collinear. $\square$

Problem 1.12. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). P is the point on the chord $\overset{\frown}{BC}$ not contain A. AP cuts BC at D. Q is the symmetry of P through D. The circle with the diameter AQ cuts (O) at G differently from A. GQ cuts the straight line through O and parallel to AP at M. The straight line through Q and perpendicular to GM cuts DM at T. S, R are the midpoints of GQ, GA. The straight line through G and parallel to ST cuts MR at N. Prove that the circumcircle of the triangle MND touches the circle with the diameter GQ.

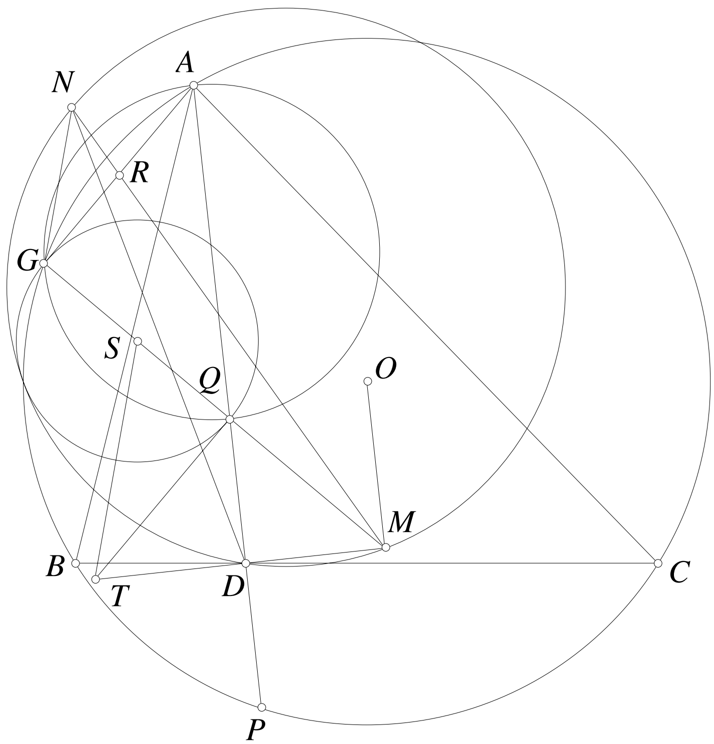


Figure 13.

We create more some other models for IMO problems as following

Problem 1.13. Let the triangle ABC right at A. P is one point on BC. The circle with the diameter BP cuts the circumcircle (K) of the triangle APC at Q differently from P. Call by M, N are the midpoints of BC, AB.

a) Prove that the circumcircle of the triangles QMN and QPB touch each other.

b) PQ cuts the circumcircle of the triangle QMN at R differently from Q. MR cuts the straight line through P and perpendicular to BC at S. Prove that $KS \parallel BC$.

c) T is the reflection of N through BQ. Prove that $\angle QTM = 90°$.

d) BQ cuts ST at L. Prove that the triangle LMN is isosceles.

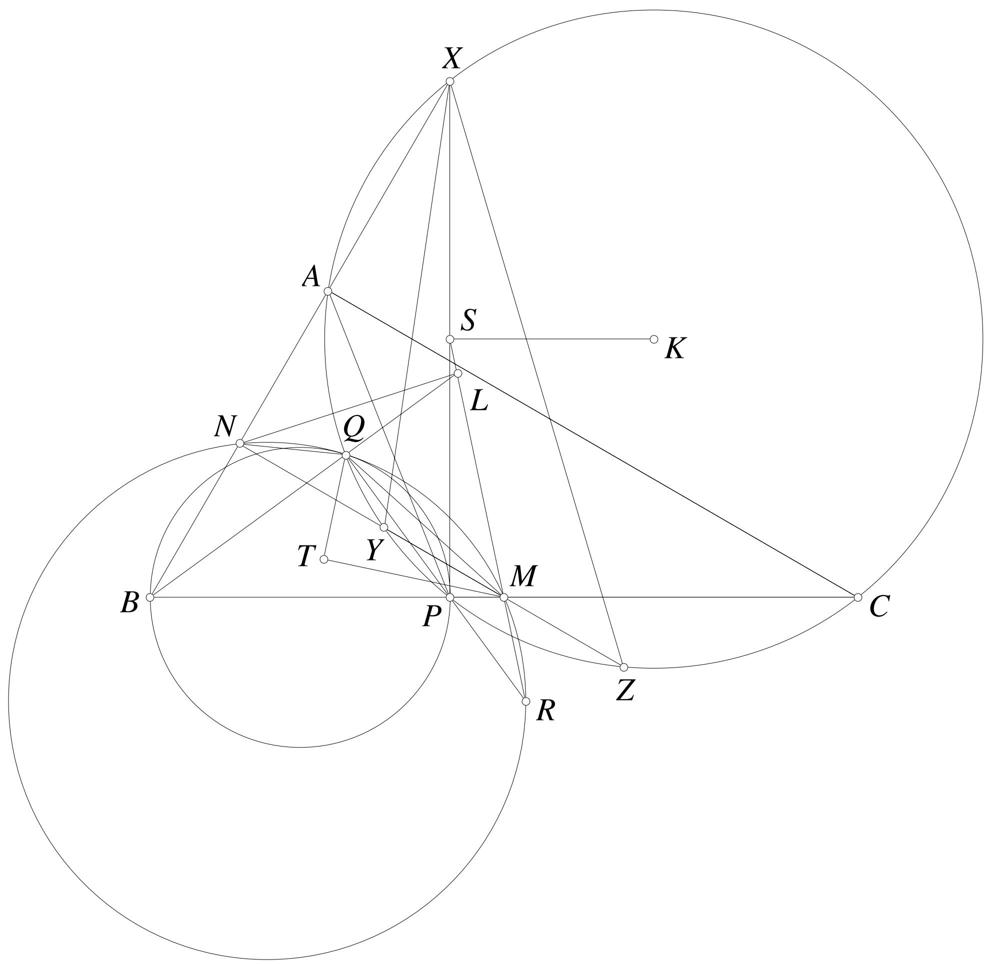


Figure 14.

Solution. Call by X the intersection again of AB cut (K) differently from A and MN cuts (K) at Y, Z. Easily seen B the orthocenter of the triangle XYZ. Apply the problems for the triangle XYZ the orthocenter B we have the thing done. □

We use once more to hide the tangent point and receive interesting problem as following

Problem 1.14. Let the triangle ABC right at A. M, N are the midpoints of BC, AB. The straight line perpendicular to BC at P cuts AB at X. S, T are the midpoints of PB, PX. Get the point L on MN such that $BL \perp BC$. Get the point R on MT such that $PR \parallel LS$. Prove that the circumcircle of the triangle RMN touch the circle with the diameter PB.

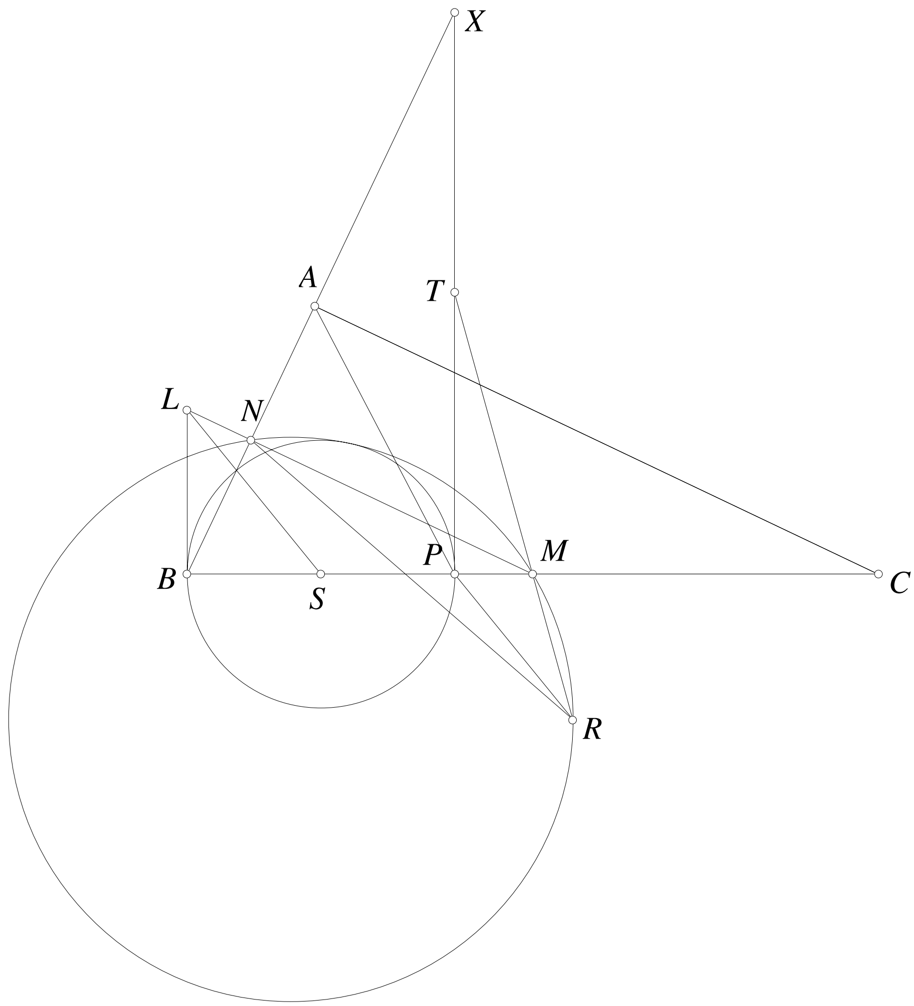


Figure 15.

In other hand, the origin problem still has many developments and expanding, do the following exercises

Problem 1.15. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O) with the diameter AD. M is one point on BC. MD cuts (O) at G differently from D. Q is symmetry of D through M. The circle with the diameter QG cuts (O) at K differently from G. N is the projector of M on AQ.

a) Prove that the circumcircles of the triangles KMN and KQG touch each other.

b) KG cuts the circumcircle of the triangle KMN at P differently from K. Prove that MP bisects AG.

c) R is the reflection of N through QK. Prove that $\angle KRM = 90°$.

Problem 1.16. Let the triangle ABC has $\angle A = 60°$ inscribed in the circle (O). The altitudes BE, CF cut each other at H. M is the midpoint of the chord $\overset{\frown}{BC}$ contain A. MH cuts (O) at N differently from M. The circle with the diameter HN cuts (O) at K differently from N. P is the reflection of H through EF and Q is the midpoint of HM.

a) Prove that the circumcircles of the triangles KPQ and KHN touch each other.

b) KN cuts the circumcircle of the triangle KPQ at L differently from K and R is the midpoint of of the chord $\overset{\frown}{BC}$ not contain A. Prove that QL bisects KR.

c) Z is the reflection of P through KH. Prove that $\angle KZQ = 90°$.

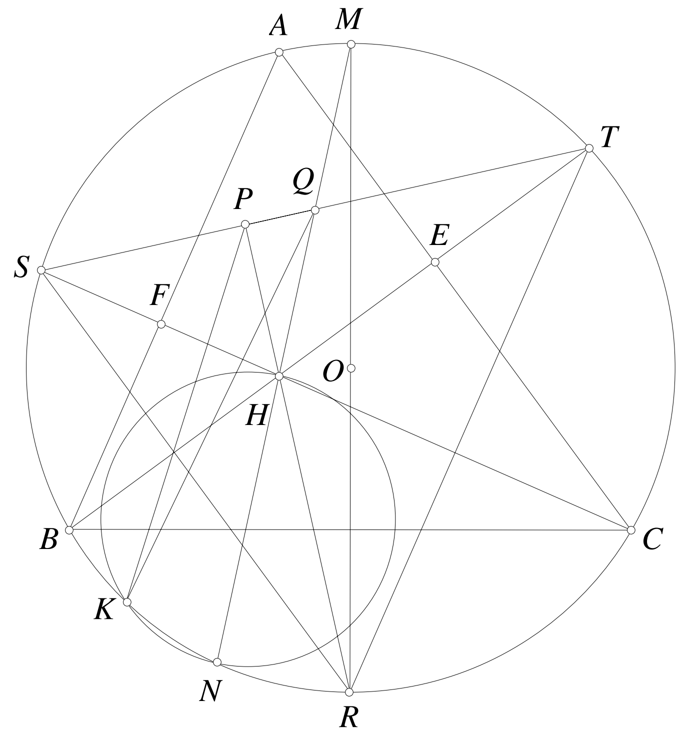


Figure 16.

Solution. Call by S, T the reflection of H through F, E and MR is the diameter of (O). From $\angle BAC = 60°$ we see H the orthocenter of the triangle RST. From that, apply the problem above for the triangle RST. We receive the thing done. □

Problem 1.17. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O) the incenter is I. The circle A-mixtilinear touches (O) at P. The circle with the diameter PI cuts (O) at K differently from P. N is the midpoint of AI and the perpendicular bisector AI cuts PI at M.

a) Prove that the circumcircles of the triangles KMN and KPI touch each other.

b) KP cuts the circumcircle of the triangle KMN at L differently from K. AI cuts (O) at D differently from A. Prove that ML bisects PD.

c) Q is the reflection of N through KI. Prove that $\angle KQM = 90°$.

Problem 1.18. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) has the altitudes BE, CF. K, L are the reflection of O through CA, AB. KE cuts LF at H. T belongs to the perpendicular bisector BC such that $HT \parallel OA$. M is the midpoint of AT. MO cuts the tangent through A of (O) at N. The straight line N parallel to OA cuts Euler line of the triangle ABC at P. G is the projector of T on NH. Q is the midpoint of HG. S is the reflection of G through PQ. TH cuts AN at D.

a) Prove that the circumcircles of the triangles SDN and SGH touch each other.

b) GS cuts the circumcircle of the triangle SDN at R differently from S. Prove that NR bisects TG.

c) W is the reflection of D through SH. Prove that $\angle SWN = 90°$.

In the end, one expand model in [1] was found by **Trinh Huy Vu**.

Problem 1.19. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). One any circle (D) passing through B, C cuts CA, AB at E, F. Draw the diameter AP of the circumcircle of the triangle AEF. K is the projector of D on AP. The circumcircle of the triangle AEF cuts (O) again at G. The circle with the diameter GP cuts (O) again at J.

a) Prove that the circumcircles of the triangles JGP and JKD touch each other.

b) JG cuts the circumcircle of the triangle JKD again at M. Prove that DM bisects GA.

c) L is the reflection of K through JP. Prove that $\angle JLD = 90°$.

2 Geometry problem on the second day

2.1 Introduction

Exam IMO second day, 2015 [2] has geometric problem interesting as following

Problem 2.1. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). The circle (A) with the center A cuts BC at D, E and cuts (O) at G, H such that D is between B, E and the ray AB is laying between AC, AG. The circumcircle of the triangle BDG and CEH cuts AB, AC respectively at K, L differently from B, C. Prove that GK and HL cut each other on AO.

I would like to present my proof for this problem

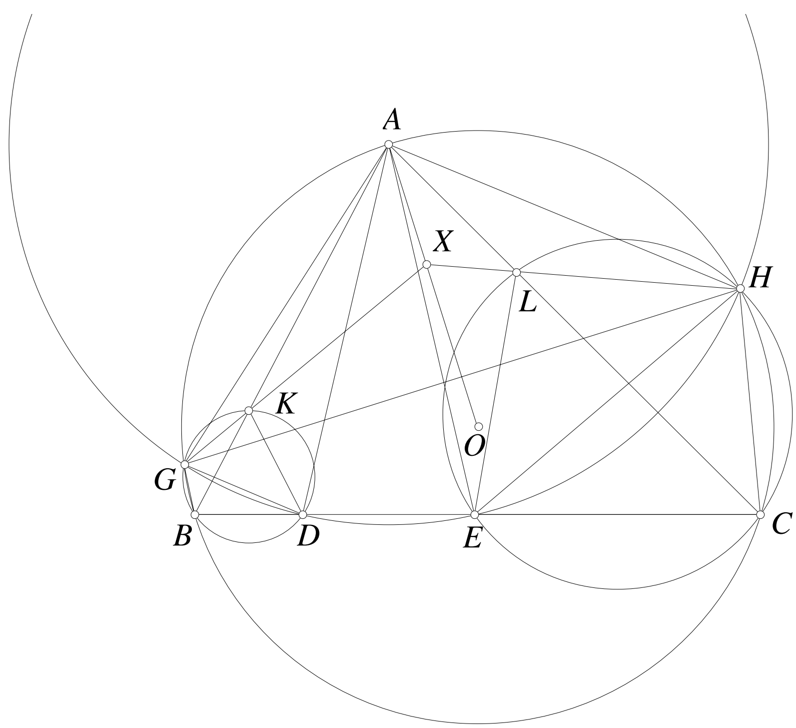


Figure 17.

Solution. Call by X the intersection of GK cuts LH we easily seen AO is the perpendicular bisector of GH. We need prove only X belong the perpendicular bisector of GH thence we are done. Indeed, we see $\angle EHC = \angle GHC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBD - \angle GDB = \angle BGD$. Thence $\angle XGH = \angle XGD - \angle HGD = \angle KBD - \angle HEC = 180^\circ - (\angle GBA + \angle BGD + \angle BDG) - \angle HEC = 180^\circ - (\angle HCA + \angle EHC + \angle EHG) - \angle HEC = \angle ACB - \angle GHE = \angle XHE - \angle GHE = \angle XHG$. From that, the triangle XGH is isosceles, we are done. □

Remark. This problem is the forth in second day, it is supposed easily. Its proof used the way of angle added. It is nice problem, simple configuration, and has meaning for exam and development of thinking. This problem has some expanding and application, we recognize it in the next part.

2.2 Extensions and applications

At first, we can change the circle with the center A by the other with any center on the straight line AO and its proof is just the same. We see another expanding with more meaning

Problem 2.2. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O), the altitude AD. (A) is the circle with any center A. Call by E, F two points on (A) such that E, F are the reflections through AD and the ray AE is between AB, AF. The circle (A) cuts (O) at G, H such that the ray AB is laying between two rays AG, AC. CE, BF cut the circle (A) at P, Q respectively, differently from E, F. The circumcircles of the triangles BPG and CQH cut BA, CA at K, L respectively, differently from B, C. Prove that GK and HL cut each other on AO.

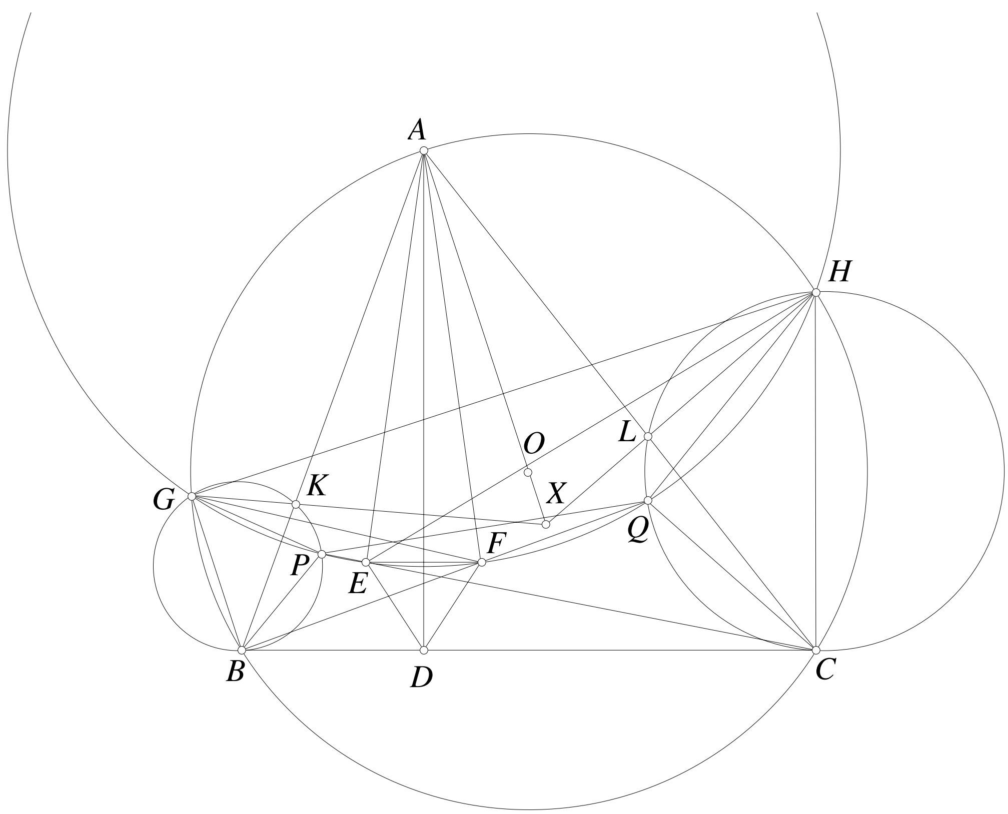


Figure 18.

Solution. At first, we have $EF \parallel BC$ so $\angle QPE = \angle EFB = \angle FBC$. Thence, the quadrilateral $PQCB$ is cyclic. Else have $\angle EHC = 180^\circ - \angle GBC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBP - \angle PBC - \angle GFE = \angle BGP + \angle GPB - (180^\circ - \angle BPC - \angle PCB) + 180^\circ - \angle GPE = \angle BGP + \angle FEC = \angle BGP + \angle PGF = \angle BGF$.

Thence $\angle HGX = \angle HGP - \angle PGK = \angle HEC - \angle PBK = \angle HEC - (\angle GBF - \angle GBA - \angle PBF)(1)$.

Similarly, $\angle GHX = \angle GFB - (\angle HCE - \angle HCA - \angle QCE) \quad (2)$.

Easily have $\angle GBA = \angle HCA, \angle PBF = \angle QCE$ v $\angle BGF = \angle CHE$ so $\angle GBF + \angle GFB = \angle HEC + \angle EHC$ or $\angle HEC - \angle GBF = \angle GFB - \angle EHC \quad (3)$.

From (1),(2),(3) easily deduce $\angle HGX = \angle GHX$. We are done. □

Remark. The general problem is still right when we change the circle (A) by any circle with the center belong OA and the proof with the change similar angle. To pay attention carefully in this proof as the same with the proof of the origin problem, so the change of the angle for showing $\angle EHC = \angle FGB$ that is important step.

We can see, in nature G, H are lying on (O) that is not so important, we go to the more general problem as following

Problem 2.3. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O), the altitude AD. (A) is any circle with the center A. Call by E, F two points on (A) such that E, F are the reflection through AD and the ray AE is laying between two rays AB, AF. On the circle (A) get two points G, H such that $GH \perp OA$ in the same time, the ray AB is laying between two rays AG, AC. Call by P, Q the intersection again of CE, BF the circle (A) respectively, differently from E, F. The circumcircles of the triangles BPG and CQH cut BA, CA at K, L respectively, differently from B, C. Prove that GK and HL cut each other on AO.

On the other hand, we can see that, in the above problem we can change the circle (A) by any circle with the center belong OA. Thence, we think that, we can change the straight line OA by the perpendicular bisector of the chord of (O), we have the following problem

Problem 2.4. Let the quadrilateral $XYBC$ cyclic in the circle (O). (A) is any circle with the center A belong to the perpendicular bisector XY. D is the projector of A on BC. Call by E, F two points on (A) such that E, F are the reflection through AD and the ray AE is laying between two rays AB, AF. On the circle (A) get two points G, H such that $GH \perp OA$ in the same time, the ray AB is laying between two rays AG, AC. Call by P, Q the intersection again of CE, BF cut the circle (A) at P, Q respectively, differently from E, F. The circumcircles of the triangles BPG and CQH cut BY, CX at K, L respectively, differently from B, C. Prove that GK and HL cut each other on AO.

Hence we can exploit the problem by many ways, we present some exploiting based on the model of the problem as following

Problem 2.5. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). The circle (A) with the center A cuts BC at E, F and cut (O) at G, H such that E is laying between B, E and the ray AB is laying between two rays AC, AG. GH cuts the circumcircles of the triangles BEG and CFH at M, N respectively, differently from G, H. Call by P, Q the intersection of GE, HF cut BM, CN. Call by S, T the intersection of ME, GB cut NF, HC respectively. Prove that ST bisects PQ.

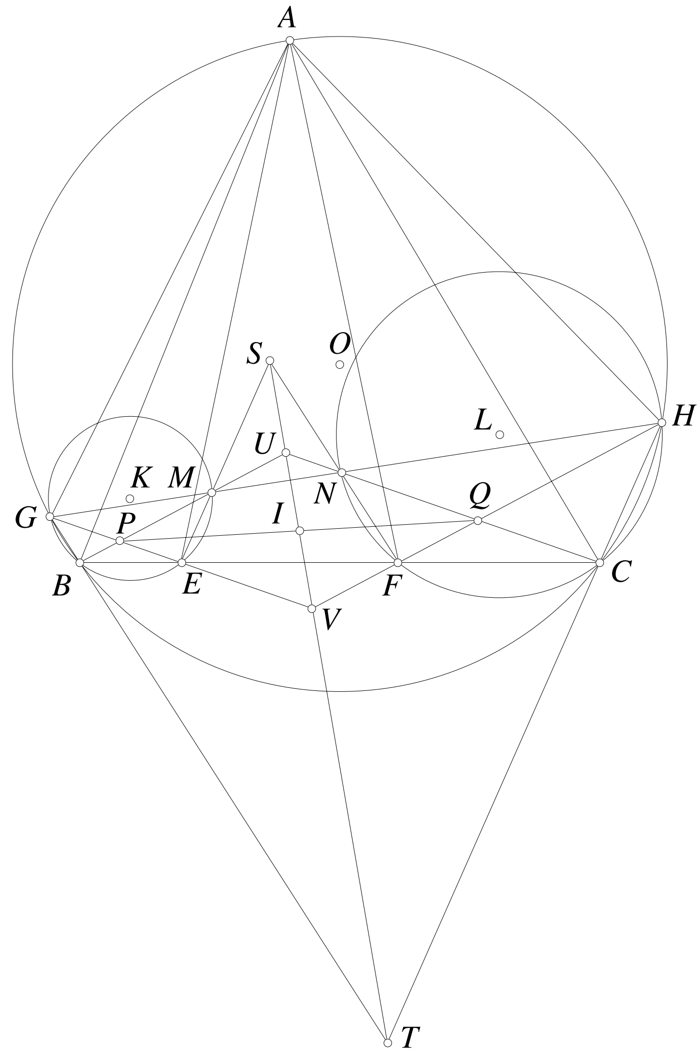


Figure 19.

Solution. According to the proof of the origin problem to show that $\angle BGE = \angle CHF$. Thence have $\angle FNH = \angle FNC + \angle CFH = \angle FHC + \angle CFH = \angle EGB + \angle EGM = \angle BGM = \angle MEF$. Then the quadrilateral $MNFE$ is cyclic. Easily have $\angle HNC = \angle HFC = \angle EGH = \angle MBE$ deduce the quadrilateral $BMNC$ is cyclic. Call by $(K), (L)$ the circumcircles of the triangles BEG and CFH then from the quadrilateral $EMNF$ and $BGHC$ cyclic, deduce ST is radical axis of (K) and (L). We easily have $\angle GEB = \angle GMB = \angle NCB$ so $GE \parallel NC$, similarly $HF \parallel MB$. Call by U, V the intersection of BM, GE cut CN, HF then $PUQV$ is the parallelogram, so UV bisects PQ. From the quadrilaterals $BMNC$ and $GEFH$ cyclic, deduce U, V also belongs to the radical axis of $(K), (L)$ is just ST. So ST bisects PQ. We are done. $\square$

By the same way, we receive the problem about the bisection of the segment on the interesting model of general problem

Problem 2.6. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O), the altitude AD. (A) is any circle with the center A. Call by E, F two points on (A) such that E, F are the reflection through AD and the ray AE is laying between AB, AF. The circle (A) cuts (O) at G, H such that the ray AB

is laying between two rays AG, AC. CE, BF cut the circle (A) at P, Q respectively, differently from E, F. GH cuts the circumcircles of the triangles BPG and CQH at M, N respectively. MP, GB cut NQ, HC respectively at S, T. To get the points U, V on the straight lines MB, NC such that $UG \parallel NC$ and $VH \parallel MB$. Prove that ST bisects UV.

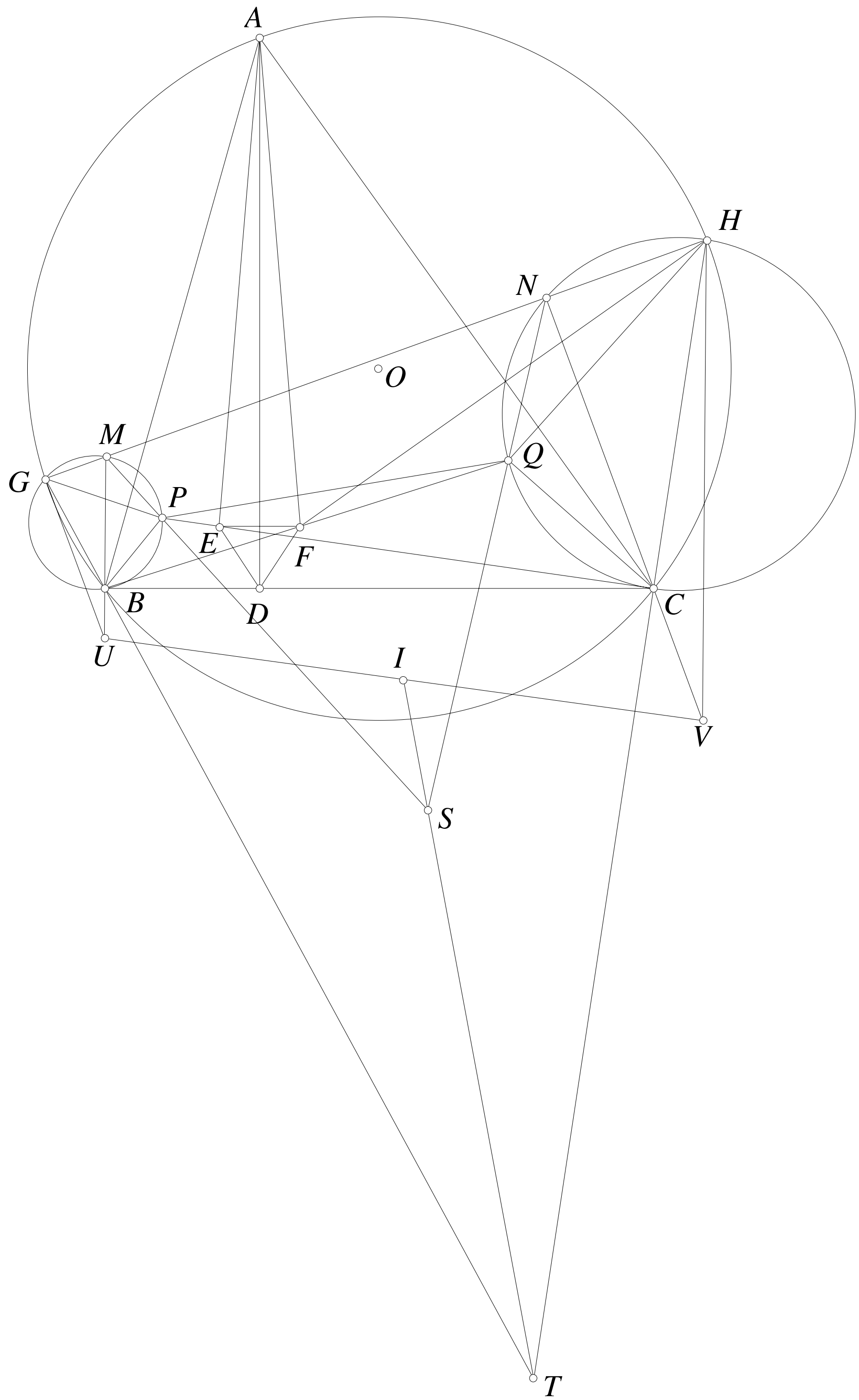


Figure 20.

If you know use the inversion you could to do the problem for exercise

Problem 2.7. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). The circle (A) with the center A cuts BC at E, F and cuts (O) at G, H such that E is laying between B, F and the ray AB is laying between two rays AC, AG. The circle through H, C and touches HA cuts CA at Q differently from C. The circle through G, B and touches GA cuts AB at P differently from B. The circumcircles of the triangles GPE and HQF cut AB, AC at M, N differently from P, Q. Prove that the diameter the circumcircles of the triangles AGM and AHN equally.

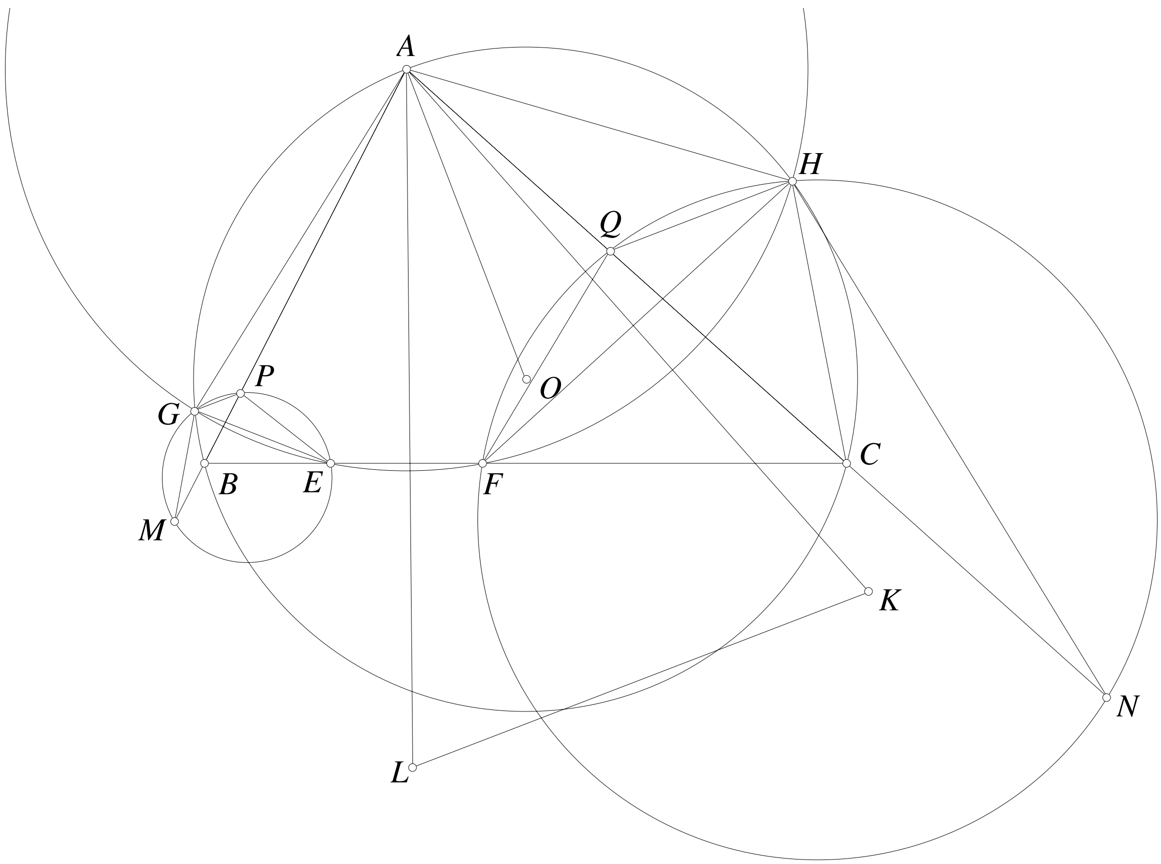


Figure 21.

3 Conclusion

The IMO exam in this year still have two geometric problem in the third and forth positions. They are interesting and have high meaning. Beside given different expanding, this article also written so nice about the problem with the bisection of the segment. And from the problem with the bisection of the segment in the first day, we receive one interesting presentation about two touching circles and thence we have the presentation of the second general problem, it gives more attraction for the problem of IMO exam. The problem with the bisection of the segment in the second day is no less interesting in comparison with the first day. That is the application of the radical axis and the parallelogram. Two geometric problem in the IMO exam this year are nice and have high suggestive and development, it is worthy to IMO exam.

In the end, I would like to thank to **Trinh Huy Vu** the pupil of 12A1 Math in my School, he is my pupil and has some contributions for this article and help me to edit it.

References

[1] Topic Problem3
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1112748_problem3

[2] Topic Problem 4
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113163_problem_4

Tran Quang Hung - High School for Gifted Student - Hanoi national university
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Mỗi tuần một bài toán

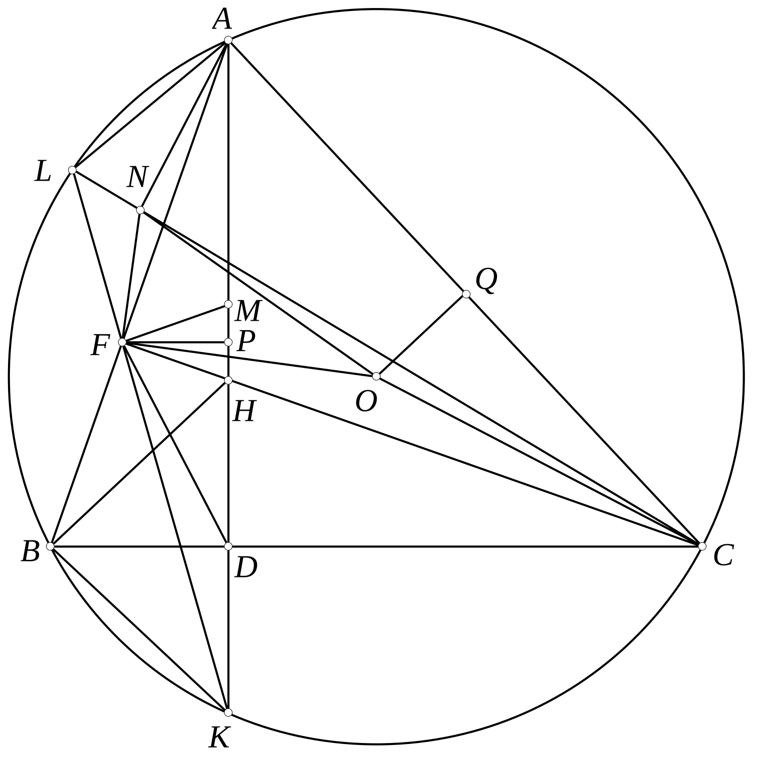
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao AD, CF. Gọi AD cắt (O) tại K khác D. Gọi KF cắt (O) tại L khác K. Đường thẳng qua A vuông góc OC cắt CL tại N. Chứng minh rằng FN vuông góc với FO.

Lời giải



Ta sẽ chứng minh $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ để suy ra $\triangle FNO \sim \triangle FAC$ thì $\angle NFO = 90°$, thật vậy. Dễ chứng minh $\angle NAC = \angle ABC = \angle ALC$. Từ đó dễ thấy $\angle NAF = \angle NAC - \angle BAC = \angle ABC - \angle BAC = \angle FCO$. Gọi AD cắt CF tại H và P là hình chiếu của F lên AD, M đối xứng H qua P. Dễ có $\angle FMH = \angle FHM = \angle ABC = \angle NAC$ và $\angle FKM = \angle ACN$ do đó $\triangle KFM \sim \triangle CNA$. Ta cũng có tam giác $\triangle FAL \sim \triangle FKB$ và $\triangle FDP \sim \triangle ACF$. Từ đó ta có biến đổi tỷ số

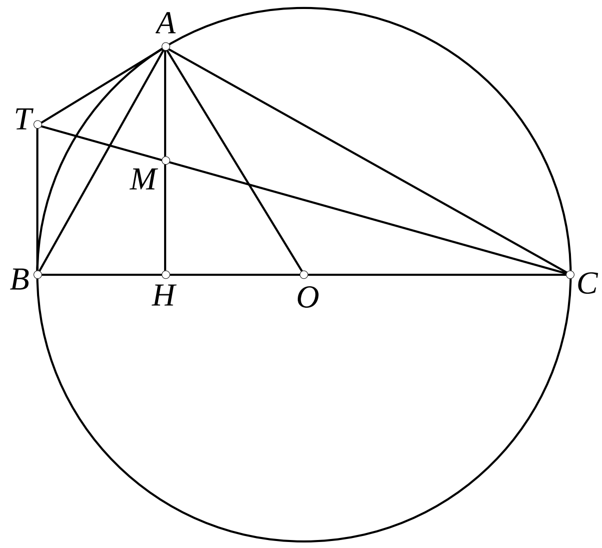
$$\frac{NA}{FA} = \frac{NA}{LA}\cdot\frac{LA}{FA} = \frac{NC}{AC}\cdot\frac{KB}{FK} = \frac{HB}{AC}\cdot\frac{NC}{FK} = \frac{2OQ}{AC}\cdot\frac{AC}{MK} = \frac{2OQ}{2DP} = \frac{OQ}{OC}\cdot\frac{OC}{CF}\cdot\frac{CF}{DP} = \frac{BF}{BC}\cdot\frac{OC}{CF}\cdot\frac{AC}{FD} = \frac{OC}{CF}.$$

Từ đó suy ra $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ theo suy luận phần trên có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Tác giả thu được bài toán này từ việc tổng quát bài toán sau đây

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH. Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng CT chia đôi AH.



Đây là một bài toán khá kinh điển xuất hiện nhiều trong các tài liệu, bài toán này minh họa rất tốt cho những tính chất đầu tiên đơn giản nhất khi bắt đầu học về tiếp tuyến của đường tròn. Nhưng cũng khá khó để nhận ra rằng vì sao bài toán ban đầu là tổng quát của bài toán này. Trong bài toán ban đầu, ta hãy vẽ thêm đường cao BE của tam giác ABC. Từ đó theo một kết quả đã biết thì CL chia đôi EF. Nhờ kết quả này khi tam giác ABC vuông tại B ta mới thu được bài toán quen thuộc nêu trên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trong tam giác. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của P, Q lên BC. Gọi K là trung điểm P, Q. E, F là hình chiếu của K lên CA, AB. G, H đối xứng A qua E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GNM và HMN lần lượt cắt CA, AB tại S, T khác G, H. Chứng minh rằng OK vuông góc với ST.

Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

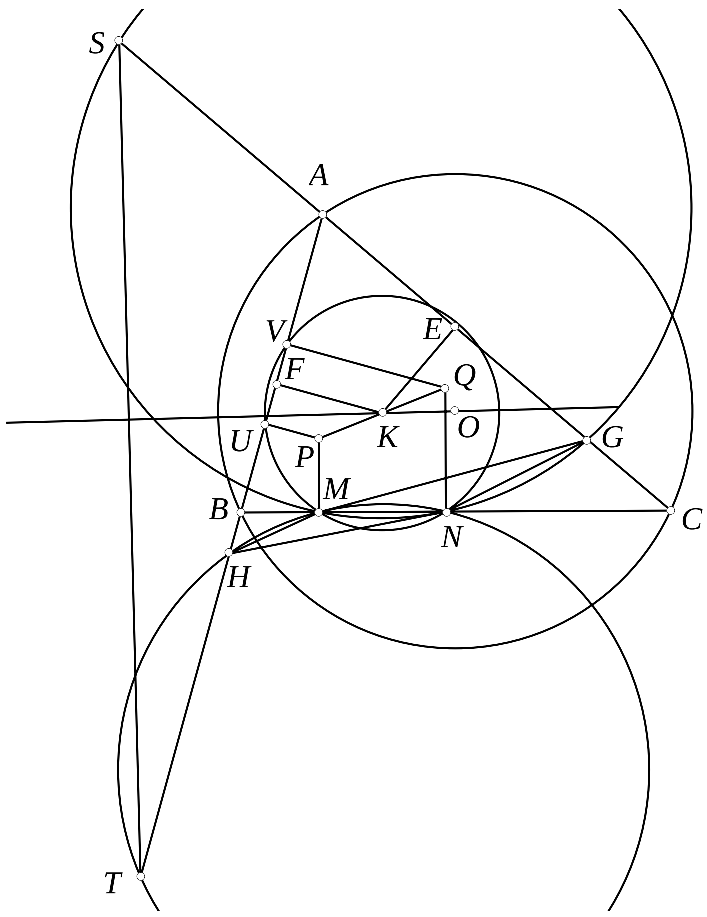
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và P,Q là hai điểm đẳng giác nằm trong tam giác. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu của P,Q lên BC. Gọi K là trung điểm P,Q. E,F là hình chiếu của K lên CA,AB. G,H đối xứng A qua E,F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GNM và HMN lần lượt cắt CA,AB tại S,T khác G,H. Chứng minh rằng OK vuông góc với ST.

Lời giải



Gọi U,V là hình chiếu của P,Q lên CA. Ta có $BU.BV = BM.BN = BT.BH$ từ đó có $\dfrac{BU}{BT} = \dfrac{BH}{BV}$ hay $(UT,B) = (HV,B)$ hay $(BT,U) = (BV,H)$. Tương tự ta cũng có $\dfrac{BV}{BT} = \dfrac{BH}{BU}$ suy ra $(VT,B) = (HU,B)$ hay $(BT,V) = (BU,H)$. Từ đó $(BT,UV) = \dfrac{(BT,U)}{(BT,V)} = \dfrac{(BV,H)}{(BU,H)} = (UV,H) = \dfrac{HU}{HV} = \dfrac{VA}{UA} = (VU,A)$ hay $(TB,VU) = (VU,A)$. Từ đó theo hệ thức Maclaurin mở rộng suy ra $TV.TU = TB.TA$ chú ý A,G,H thuộc đường tròn (K). Từ đó T thuộc trục đẳng phương của (O) và (K). Tương tự với S suy ra ST là trục đẳng phương của (O) và (K) vậy $ST \perp OK$.

Nhật xét

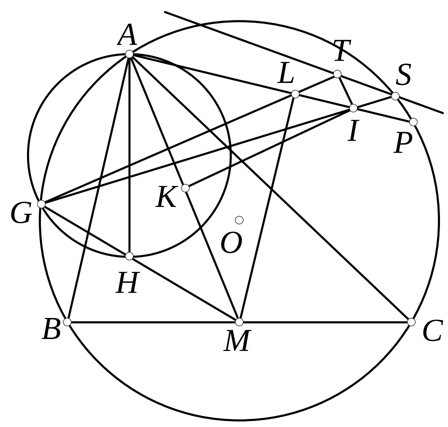
Tác giả thu được bài toán này từ việc tổng quát bài toán thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2015, bài toán đó như sau

Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và tâm ngoại tiếp O sao cho $AC > BC > AB$ và đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC,CA,AB tại D,E,F. Gọi đối xứng của A qua F,E là F_1,E_1. Đường tròn tiếp xúc BC tại D và đi qua F_1 cắt AB tại điểm thứ hai F_2. Đường tròn tiếp xúc BC tại D và đi qua E_1 cắt AC tại điểm thứ hai E_2. Trung điểm các đoạn OE,IF lần lượt là P,Q. Chứng minh rằng $AB+AC = 2BC$ khi và chỉ khi $PQ \perp E_2F_2$.

Trong bài toán ban đầu khi cho hai điểm đẳng giác P,Q trùng nhau kết hợp một số biến đổi nhỏ ta sẽ thu được bài toán trên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, trung tuyến AM. K là trung điểm AM. P là một điểm di chuyển trên (O). L là hình chiếu của M lên AP. I là trung điểm PL. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. GI cắt (O) tại S khác G. T là điểm thuộc GL sao cho IT vuông góc KI. Chứng minh rằng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

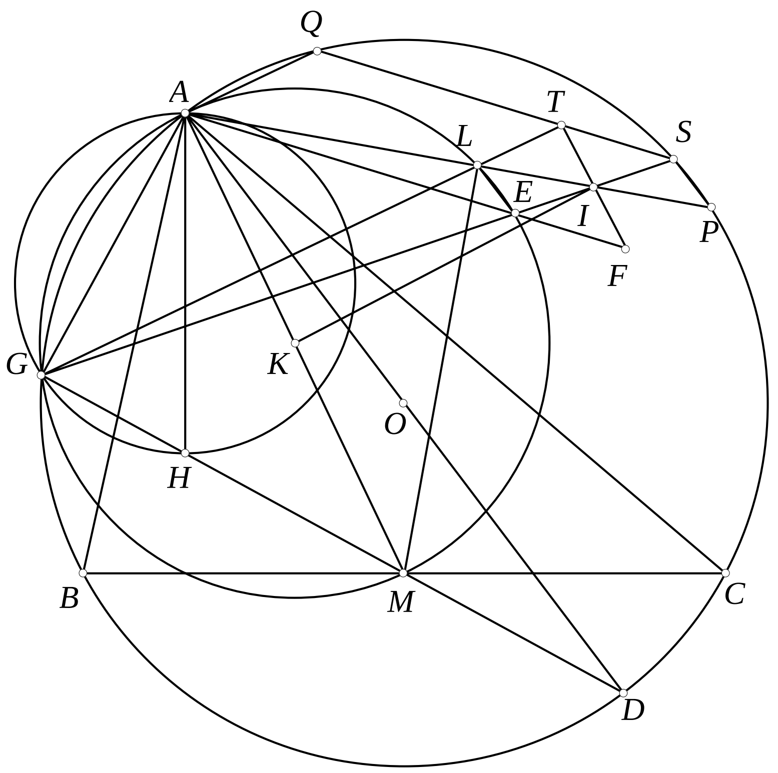
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, trung tuyến AM. K là trung điểm AM. P là một điểm di chuyển trên O. L là hình chiếu của M lên AP. I là trung điểm PL. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. GI cắt (O) tại S khác G. T là điểm thuộc GL sao cho IT vuông góc KI. Chứng minh rằng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Lời giải



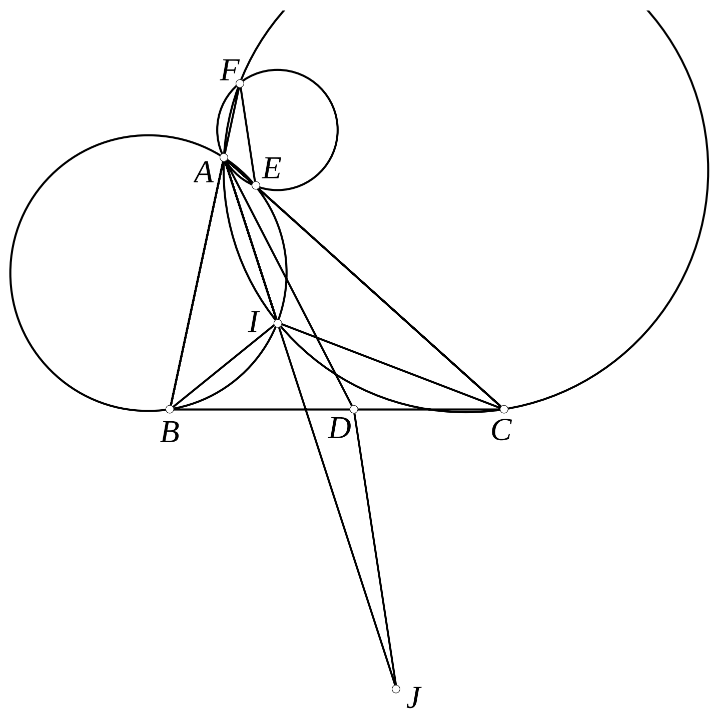
Gọi AD là đường kính của (O) dễ thấy G, H, M, D thẳng hàng do đó G, L đều thuộc đường tròn (K) đường kính AM. Gọi GI cắt (K) tại E khác G. AE cắt TI tại F. Ta dễ thấy $\angle ELP = \angle AGE = \angle APS$ do đó $PS \parallel LE$ nên I là trung điểm ES. Áp dụng bài toán con bướm cho tứ giác $ALEG$ nội tiếp (K) có $TF \perp KI$ nên I là trung điểm TF. Từ đó dễ thấy $ST \parallel EF$. Gọi ST cắt (O) tại Q khác S. Ta thấy $\angle AQF = 180° - \angle AQS = \angle AGS$. Từ đó dễ thấy AQ tiếp xúc (K) nên Q cố định. Vậy ST đi qua Q cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Bài toán này được tác giả dùng trong đề kiểm tra đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2015. Cấu hình đầu tiên khá đơn giản có thể thấy ngay trong bài toán này là sự thẳng hàng của G, H, M, D. Đây là một trong những bổ đề rất quan trọng cần được nhận ra ngay khi gặp cấu hình như vậy. Bài toán này cũng là một trong những ứng dụng rất đẹp và thú vị của bài toán con bướm. Việc ứng dụng bài toán con bướm vào những mô hình khác nhau thường đem lại những yếu tố hay và bất ngờ trong lời giải, đồng thời cũng tạo nên những tình huống thú vị cho bài toán. Như trong bài toán này, việc đoán nhận điểm cố định Q là một việc không đơn giản.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I, tâm bàng tiếp ứng với đỉnh A là J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB, AIC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt BC tại D. Chứng minh rằng $DA = DJ$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

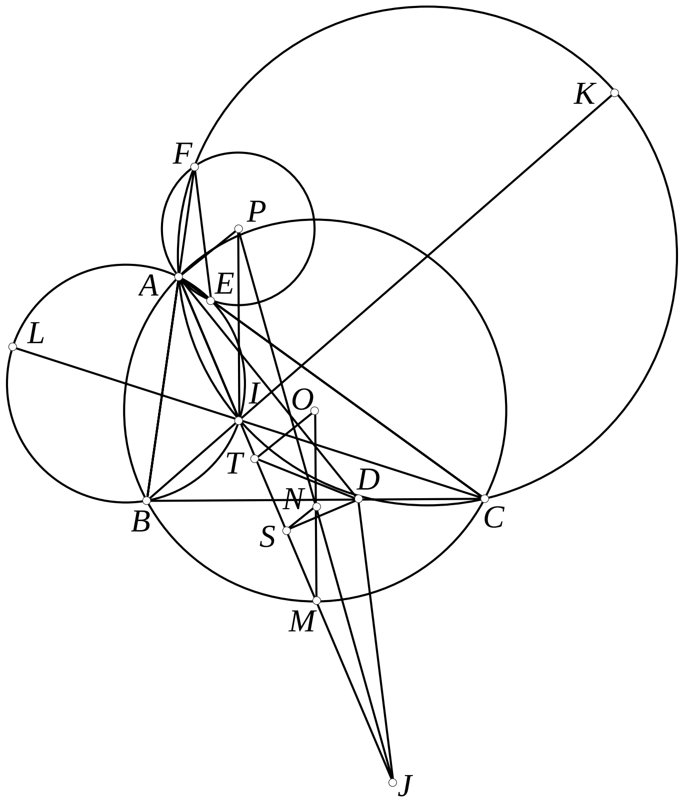
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I, tâm bàng tiếp ứng với đỉnh A là J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB, AIC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt BC tại D. Chứng minh rằng $DA = DJ$.

Lời giải



Gọi K, L là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B, C của tam giác ABC. Ta dễ thấy rằng K là giao của IB và đường tròn ngoại tiếp tam giác IAC và L là giao của IC và đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB. Gọi P là tâm ngoại tiếp tam giác AEF, ta có

$PB^2 - PC^2 = \mathscr{P}_{B/(P)} - \mathscr{P}_{C/(P)} = \overline{BA}.\overline{BF} - \overline{CA}.\overline{CE} = \overline{BI}.\overline{BK} - \overline{CI}.\overline{CL} = \overline{BI}(\overline{BI} + \overline{IK}) - \overline{CI}(\overline{CI} + \overline{IL}) = BI^2 - CI^2 + \overline{BI}.\overline{IK} - \overline{CI}.\overline{IL} = IB^2 - IC^2$. Đẳng thức cuối do tứ giác $BCKL$ nội tiếp. Từ đó $IP \perp BC$. Gọi AI cắt (O) tại M khác A suy ra $OM \perp BC \perp IP$ vậy $OM \parallel IP$ mà M là trung điểm IJ suy ra OM đi qua trung điểm N của PJ.

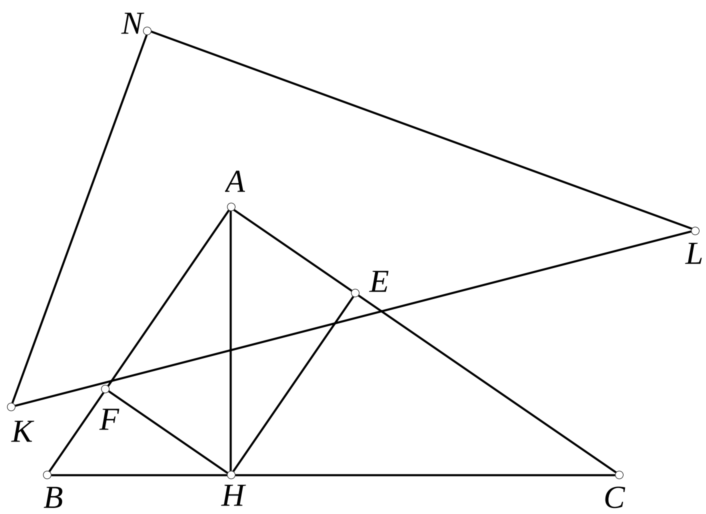
Gọi S là trung điểm AJ và T là đối xứng của M qua S, dễ thấy $TA = MJ = MB$. Ta có $AD \perp AP \parallel SN \parallel OT$ từ đó $OT \perp AD$. Lại chú ý $OM \perp BD$ suy ra $TD^2 - TA^2 = OD^2 - OA^2 = OD^2 - OB^2 = MD^2 - MB^2 = MD^2 - TA^2$ suy ra $TD = MD$ suy ra SD là trung trực MT cũng là trung trực của AJ vậy $DA = DJ$. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Đây là một bài toán hay đặc trưng cho rất nhiều tính chất của tâm ngoại tiếp và tâm bàng tiếp. Việc dựng thêm ra hai tâm bàng tiếp còn lại cũng là một cách dựng hình rất đặc trưng, khá kinh điển cho dạng bài tập loại này. Ý tưởng ban đầu của tác giả khi tạo ra bài toán này là dùng phép nghịch đảo. Tuy nhiên trong quá trình tập huấn các đội tuyển thì tác giả thu được lời giải thuần túy hình học như trên. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vị bởi bạn **Phạm Quang Toàn** từ http://diendantoanhoc.net. Các bạn có thể xem lời giải của bạn **Toàn** ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. E, F lần lượt là hình chiếu của H lên CA, AB. Gọi K, L, N lần lượt là tâm bàng tiếp đỉnh H của các tam giác HBF, HCE, HEF. Chứng minh rằng A là tâm nội tiếp tam giác KLN.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

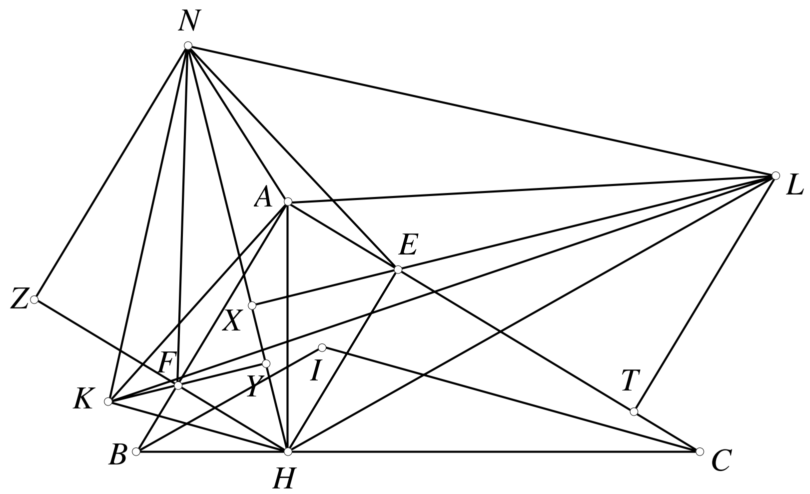
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. E, F lần lượt là hình chiếu của H lên CA, AB. Gọi K, L, N lần lượt là tâm bàng tiếp đỉnh H của các tam giác HBF, HCE, HEF. Chứng minh rằng A là tâm nội tiếp tam giác KLN.

Lời giải



Gọi LE, KF cắt HN tại X, Y. Gọi Z, T là hình chiếu của N lên FH và của L lên CE. Chú ý các tam giác vuông cân ta có $\frac{FY}{FY+NY} = \frac{YH}{YH+NY} = \frac{YH}{HN} = \frac{HF}{2HZ} = \frac{HF}{HE+HF+EF} = \frac{AB}{AB+AC+BC}$ (1).

Lại có $\frac{XH}{XH+LX} = \frac{XE}{2XE+LE} = \frac{HE}{2HE+ET} = \frac{HE}{2HE+(CE+CH-HE)} = \frac{AB}{AB+AC+BC}$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $\frac{YF}{YN} = \frac{XH}{XL}$. Tương tự $\frac{XE}{XN} = \frac{YH}{YK}$. Nhân các tỷ số bằng nhau chú ý $YF = YH, XE = XH$ dễ suy ra $\frac{1}{YN.XN} = \frac{1}{XL.YK}$. Từ đó suy ra các tam giác vuông YNK và XLN đồng dạng suy ra $\angle KNL = 90^\circ$.

Ta thấy $\frac{NK}{NL} = \frac{KY}{XN} = \frac{YH}{XE} = \frac{HF}{HE} = \frac{AB}{AC}$. Từ đó tam giác NKL và ABC đồng dạng.

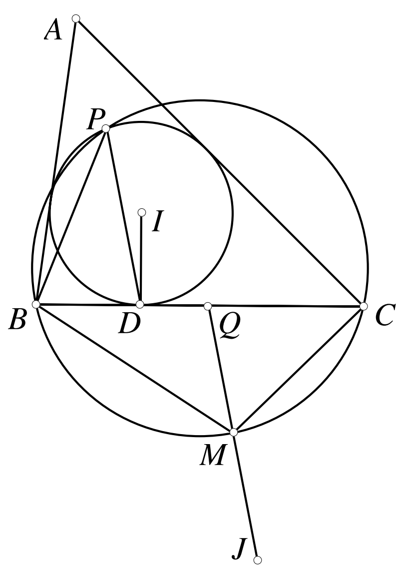
Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta cũng thấy các tam giác HFK và LEH đồng dạng do đó $AE.AF = HE.HF = FK.EL$ mà $\angle AEL = \angle KFA = 135^\circ$. Từ đó tam giác AEL và KAF đồng dạng. Vậy $\frac{AK}{AL} = \frac{KF}{AE} = \frac{KF}{FH} = \frac{IB}{IC}$. Ta chú ý đẳng thức cuối có do tam giác FKH và IBC đồng dạng. Mặt khác ta cũng có $\angle KAL = 90^\circ + \angle KAF + \angle LAE = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ = \angle BIC$. Từ đó tam giác AKL và IBC đồng dạng. Suy ra A là tâm nội tiếp tam giác NKL.

Nhật xét

Bài toán này được tác giả phát hiện một cách tình cờ trong khi đang làm việc với hệ thức lượng trong tam giác vuông. Nếu thay thuật ngữ "tâm nội tiếp" thành thuật ngữ "giao của ba phân giác trong" thì có thể coi đây là một bài toán của chương trình tam giác đồng dạng. Bài toán này có nhiều phát triển thú vị khi ta thay thế tam giác vuông thành tam giác bất kỳ. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vị bởi bạn **Phạm Quang Toàn** từ http://diendantoanhoc.net. Ngoài ra bạn **Toàn** còn đưa ra một số phát triển từ cấu hình của bài toán, các bạn có thể xem lời giải và trao đổi ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. Tâm đường tròn bàng tiếp góc A là J. P là một điểm bất kỳ trên (I) không trùng D. Q thuộc BC sao cho $JQ \parallel PD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC chia đôi QJ.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

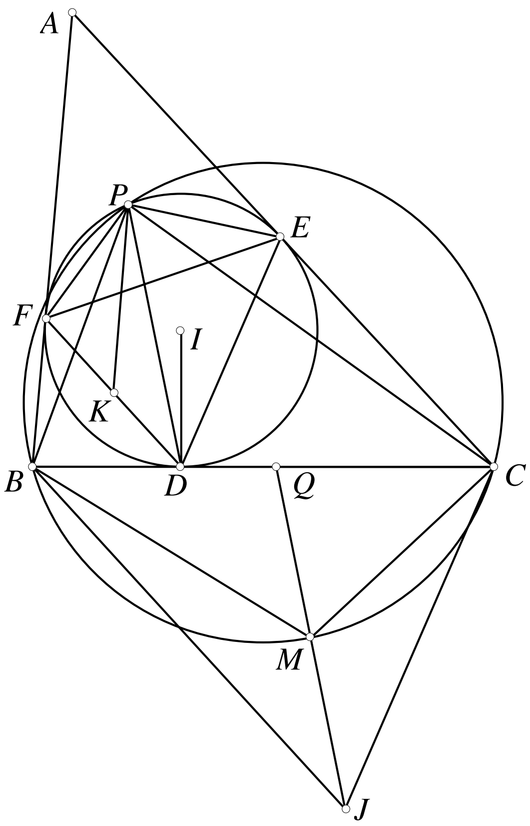
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. Tâm đường tròn bàng tiếp góc A là J. P là một điểm bất kỳ trên (I) không trùng D. Q thuộc BC sao cho $JQ \parallel PD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC chia đôi QJ.

Lời giải



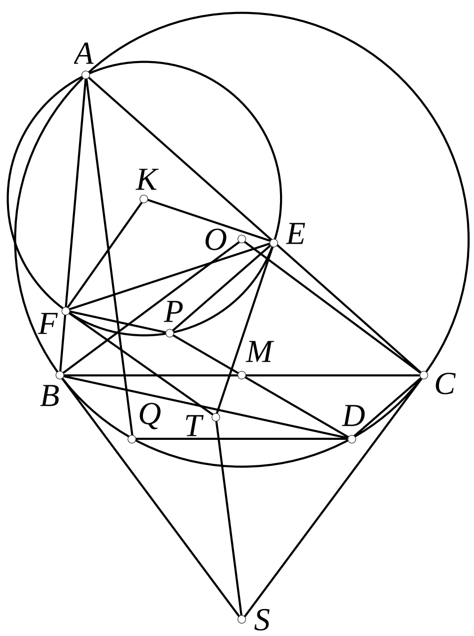
Gọi K, M lần lượt là trung điểm FD, QJ. Ta thấy $BJ \parallel FD$ và $PD \parallel QJ$ nên $\angle PDF = \angle BJQ$ và $\angle PFD = \angle PDC = \angle BQJ$. Từ đó hai tam giác PFD và BQJ đồng dạng mà K, M lần lượt là trung điểm DF, JQ nên hai tam giác FPK và QBM đồng dạng. Từ đó ta chú ý PB là đường đối trung của tam giác PFD nên $\angle BPD = \angle FPK = \angle QBM$. Tương tự $\angle CPD = \angle QCM$. Vậy $\angle BPC = \angle BPD + \angle CPD = \angle QBM + \angle QCM = 180° - \angle BMC$, suy ra tứ giác $BPCM$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Nếu gọi R là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC và (I) ta cũng dễ chứng minh đường R, D, M thẳng hàng bằng cộng góc. Bài toán này là một trong những ứng dụng đẹp của bổ đề "đồng dạng trung tuyến" và tính chất đường đối trung. Khi bài toán được giải như trên trông có vẻ khá đơn giản nhưng thực tế nó là tổng quát của hai bài toán thú vị là các bài toán **Đài Loan TST 2015** và **IMO SL 2002, G7**. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vị bằng hàng điểm điều hòa bởi bạn **Nguyễn Cảnh Hoàng** lớp 11A1 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An. Các bạn có thể xem lời giải đó và trao đổi ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và D là một điểm thuộc cung BC không chứa A. M là trung điểm BC. P là một điểm nằm trên đường thẳng DM. E, F thuộc CA, AB sao cho $PE \parallel DC$ và $PF \parallel DB$. Gọi tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại S. Q thuộc (O) sao cho $DQ \parallel BC$. Chứng minh rằng $AQ \parallel ST$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

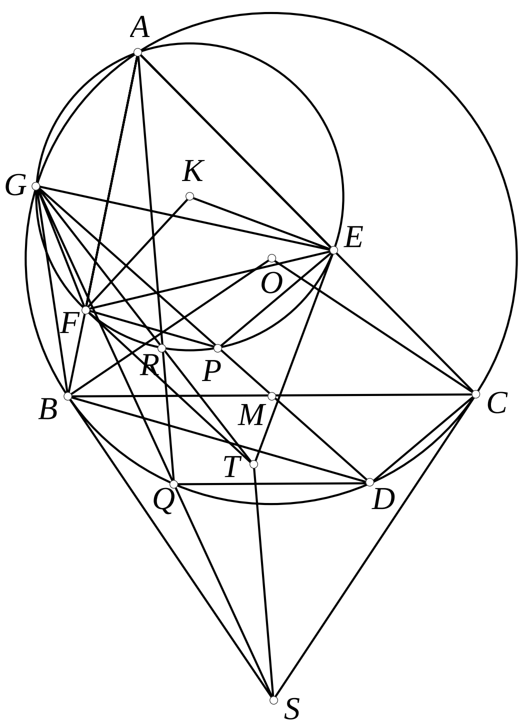
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và D là một điểm thuộc cung BC không chứa A. M là trung điểm BC. P là một điểm nằm trên đường thẳng DM. E, F thuộc CA, AB sao cho $PE \parallel DC$ và $PF \parallel DB$. Gọi tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại S. Q thuộc (O) sao cho $DQ \parallel BC$. Chứng minh rằng $AQ \parallel ST$.

Lời giải



Ta dễ thấy tứ giác $AEPF$ nội tiếp đường tròn (K). Gọi DP cắt (O) tại G khác D. Do $PF \parallel DB$ nên $\angle FPG = \angle BDG = \angle BAG$ từ đó G thuộc (K). Từ đó dễ có tam giác GFE và GBC đồng dạng. Chú ý chùm $D(BC, MQ) = -1$ nên hàng $(BC, GQ) = -1$. Gọi AQ cắt (K) tại R khác A thì theo tính đồng dạng $(EF, GR) = -1$ hay tứ giác $GERF$ điều hòa, suy ra GR đi qua T. Cũng từ tam giác GFE và GBC đồng dạng, lại có T là giao hai tiếp tuyến tại E, F của (K) và S là giao hai tiếp tuyến tại B, C của (O), nên hai tam giác GFT và GBS đồng dạng. Từ đây suy ra tam giác GFB và GTS đồng dạng. Từ đó $\angle GTS = \angle GFB = 180° - \angle GFA = 180° - \angle GRA = \angle GRQ$. Từ đó suy ra $AQ \parallel ST$. Ta có điều phải chứng minh.

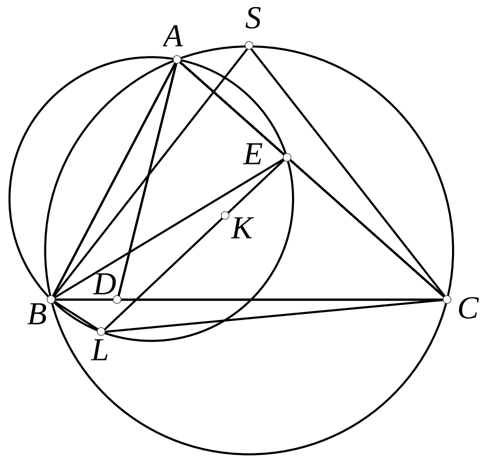
Nhật xét

Bài toán trên là một mở rộng cho bài toán của chính tác giả đề nghị trên báo TH&TT. Bài toán trên báo là trường hợp riêng khi AD là đường kính của (O) thì DM đi qua trực tâm H của tam giác hơn nữa $AQ \perp BC$, do đó tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF sẽ cắt nhau trên trung trực BC. Bài toán có giá trị ứng dụng lớn. Chẳng hạn khi cho D là trung điểm cung nhỏ BC thì P có thể coi là điểm bất kỳ trên trung trực BC. Với cách dựng tương tự thì ST sẽ song song với phân giác $\angle BAC$, từ đó ta có thể tạo ra được một bài toán đi qua điểm cố định thú vị.

Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác ngay trên blog hình học sơ cấp. Một lời giải khác rất đẹp và thuần túy hình học được đưa ra bởi bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên Khóa 50 Đại học Ngoại thương. Bạn **Nguyễn Cảnh Hoàng** lớp 11A1 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cũng cho lời giải khác dùng hàng điểm điều hòa ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có phân giác trong BE. D là điểm thuộc BC sao cho $\angle DAC = \angle B$. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L khác E. Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

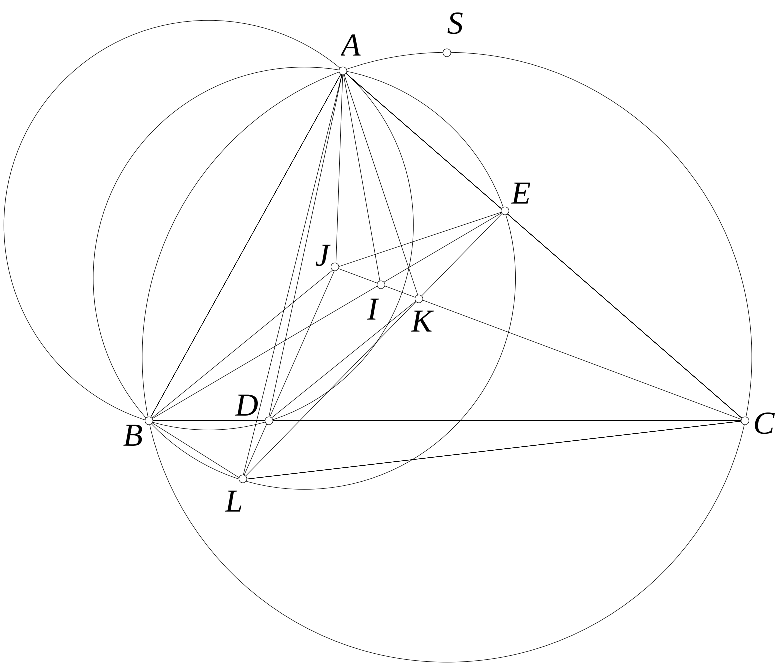
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có phân giác trong BE. D là điểm thuộc BC sao cho $\angle DAC = \angle B$. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L khác E. Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



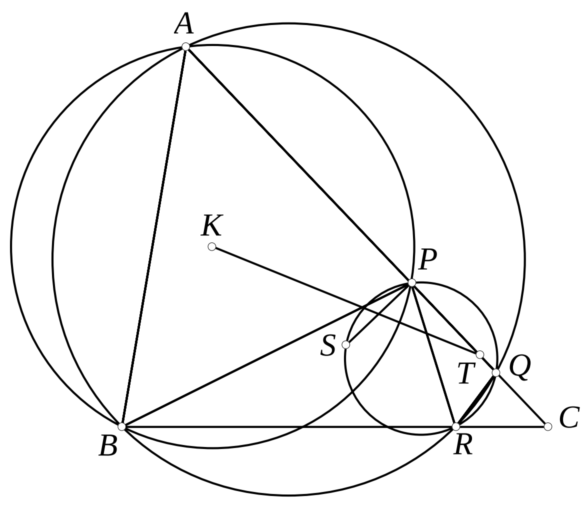
Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIE cắt AI tại J khác I. Ta thấy $CI.CJ = CE.CA$. Lại dễ có $\triangle CKA \sim \triangle CIB$ nên $\frac{CK}{CI} = \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{AC}$. Từ đó $CK.CJ = \frac{CK}{CI}.(CI.CJ) = CE.CD$ nên $\triangle CEK \sim \triangle CJD$ suy ra $\angle CEK = \angle AJD$. Ta định nghĩa lại điểm L là giao của DJ và KE vậy tứ giác $CEJL$ nội tiếp. Suy ra $\angle DLK = \angle KCE = \angle KCD$ suy ra tứ giác $DKCL$ nội tiếp. Cũng từ $\triangle CKA \sim \triangle CIB$ nên $\angle AKJ = \angle CIE = \angle CAJ$. Từ đó $JA^2 = JK.JC = JD.JL$ suy ra $\triangle JAD \sim \triangle JLA$ suy ra $\angle ALD = \angle JAD = \angle DAC - \angle JAC = \angle ABC - \angle AKJ = \angle ABC - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ACB) = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$. Suy ra $\angle ALE = \angle ALD + \angle DLE = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ABE$. Từ đó tứ giác $ABLE$ nội tiếp. Từ đó dễ chứng minh $\angle BLC = 180° - \frac{1}{2}\angle BAC$ nên tâm ngoại tiếp S của tam giác BLC là trung điểm $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Tác giả tạo ra bài toán này xuất phát từ bài toán số 4 của đề thi IMO 2009. Bài toán đó là một bài toán tính góc không khó nhưng nếu phân tích một cách sâu sắc thì bài toán này là một mở rộng của bài toán thi IMO đó. Bài toán được tham gia giải bởi **Nguyễn Ngọc Chi Lan** học sinh lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN tại đây. Trong đó bạn **Nguyễn Thành Phát** lớp 11CT trường THPT chuyên Nguyễn Du cũng đưa ra lời giải thuần túy hình học và được hoàn thiện bởi bạn **Chi Lan**. Ngoài ra bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả hai lời giải rất thú vị. Bài toán trên còn có một hướng giải khác khá ngắn gọn dùng định lý Pascal, chúng tôi sẽ giới thiệu tới bạn đọc trong một bài viết sau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. Dựng đường kính QS của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Gọi T là trung điểm PC. Chứng minh rằng đường thẳng KT chia đôi đoạn PS.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

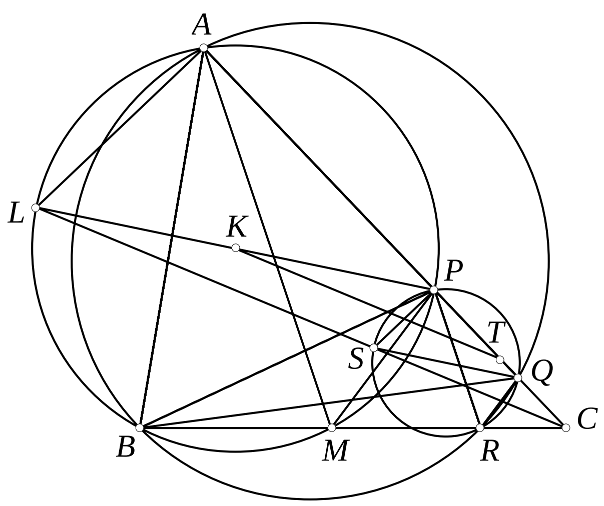
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. Dựng đường kính QS của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Gọi T là trung điểm PC. Chứng minh rằng đường thẳng KT chia đôi đoạn PS.

Lời giải



Từ $\frac{PC}{PA} = \frac{QC}{QP}$ suy ra $\frac{PC}{PC+PA} = \frac{QC}{QC+QP}$ hay $\frac{PC}{AC} = \frac{QC}{PC}$ suy ra $PC^2 = CA.CQ = CR.CB$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR tiếp xúc AC tại P. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB cắt BC tại M khác B thì $\angle MAP = \angle MBP = \angle RPC$ nên $AM \parallel PR$. Vậy $\frac{CR}{MR} = \frac{CP}{PA} = \frac{QP}{QC}$ suy ra $QR \parallel MP$. Gọi PL, QS là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB và PQR. Thì $\angle ALP = \angle AMP = \angle PRQ = \angle PSQ$. Từ đó hai tam giác vuông PAL và QPS đồng dạng. Từ đây $\frac{LA}{SP} = \frac{AP}{PQ} = \frac{CP}{CQ} = \frac{AP+CP}{PQ+CQ} = \frac{CA}{CP}$ mà $LA \parallel SP$, ta suy ra L, S, C thẳng hàng. Theo tính chất đường trung bình thì KT chia đôi SP. Ta có điều phải chứng minh.

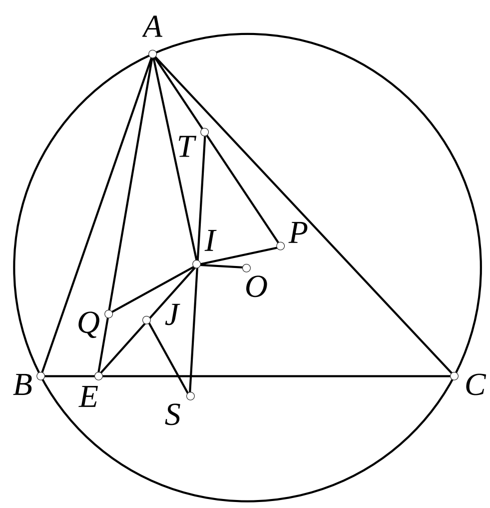
Nhật xét

Tác giả tạo ra bài toán này xuất phát từ đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014. Đây là một bài toán hay mang đậm tính chất của phép biến hình vị tự, cho nên để có một lời giải tự nhiên mà không dùng đến phép vị tự cũng không phải đơn giản. Bài toán được tham gia giải bằng phép vị tự bởi bạn **Nguyễn Ngọc Chi Lan** lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN, bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 trường chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng và bạn **Ninh Đức Cường** lớp 11 Toán THPT Chu Văn An, Hà Nội tại đây. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả lời giải dùng phép vị tự với ý tưởng giống đáp án. Liên quan tới cấu hình này vẫn còn nhiều điều thú vị. Tôi xin giới thiệu một bài toán hay khác từ cấu hình này để các bạn tham khảo.

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. BQ cắt đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác APB tại R khác Q. Đường đối trung qua P của tam giác APR cắt (K) tại L khác P. Chứng minh rằng giao điểm của BL và đường thẳng qua C song song BP luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với tâm nội tiếp I. P là điểm ở trong tam giác sao cho PI vuông góc với IA. Gọi Q đẳng giác P trong tam giác ABC. AQ cắt BC tại E. Gọi J là trung điểm IE. Đường thẳng qua I vuông góc OI cắt đường thẳng qua J vuông góc IQ tại S và cắt AP tại T. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn ST.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

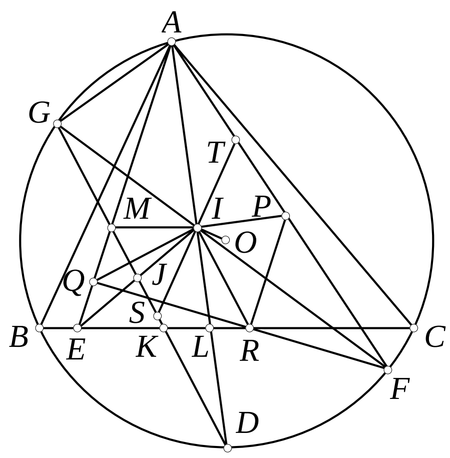
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với tâm nội tiếp I. P là điểm ở trong tam giác sao cho PI vuông góc với IA. Gọi Q đẳng giác P trong tam giác ABC. AQ cắt BC tại E. Gọi J là trung điểm IE. Đường thẳng qua I vuông góc OI cắt đường thẳng qua J vuông góc IQ tại S và cắt AP tại T. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng ST.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE \parallel AQ$.

Chứng minh của Phan Anh Quân. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P, Q đẳng giác nên $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ và $\triangle CPM \sim \triangle QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ vì thế nên $\frac{MP}{MA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ hay $PE \parallel AQ$.

Quay lại bài toán. Gọi AI cắt (O) tại D khác A. Gọi IF cắt (O) tại G khác F, theo kết quả bài toán IMO 2010 quen thuộc thì GD chia đôi IE, ta sẽ chứng minh rằng $GD \perp IQ$, từ đó suy ra S thuộc GD, theo bài toán con bướm thì I là trung điểm ST, thật vậy. Gọi đường thẳng qua I song song GD cắt BC tại R. Gọi DG cắt BC, AE tại K, M. AD cắt BC tại L. Ta có $\angle IAE = \angle IAF = \angle IGD$. Từ đó tứ giác $AIMG$ nội tiếp, suy ra $IM \parallel BC$ nên tứ giác $IMKR$ là hình bình hành. Từ đó ta có $IR.DG = \frac{IR}{DM}.DM.DG = \frac{MK}{MD}.DI.DA = \frac{IL}{ID}.DI.DA = IL.AD = IA.ID$. Đẳng thức cuối có do $\frac{IL}{IA} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{DI}{DA}$. Từ đó $IR.DG = IA.ID = IG.IF$, lại có $\angle FIR = \angle IGD$ nên ta có $\triangle FIR \sim \triangle DGI \sim \triangle FAI$. Từ đó FI là phân giác $\angle AFR$ và $\angle PIR = \angle AIF + \angle FIR - 90^\circ = \angle IRF + \angle FIR - 90^\circ = 90^\circ - \angle IFR = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PFR$, suy ra I là tâm bàng tiếp góc F của tam giác PFR. Từ đó $\angle FPR = 180^\circ - 2\angle API = 2(90^\circ - \angle API) = 2\angle PAI = \angle PAE$ nên $PR \parallel AQ$. Vậy theo bổ đề thì QF đi qua R. Ta dễ thấy I là tâm nội tiếp tam giác AFQ. Từ đó $\angle RIQ = \angle QIF - \angle RIF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle QAF - \angle IAF = 90^\circ$. Suy ra $IQ \perp IR \parallel GD$ hay $IQ \perp GD$.

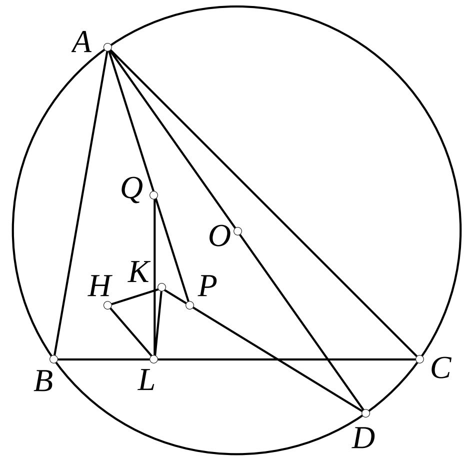


Nhật xét

Phần quan trọng nhất trong lời giải này là chỉ ra được I là tâm nội tiếp tam giác AQF. Bạn **Nguyễn Ngọc Chi Lan** lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN cho một lời giải rất thú vị ở đây. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả một lời giải hay dùng định lý Pascal. Bài toán này nằm trong một cấu hình rất thú vị của các đường tròn Thébault, xin giới thiệu với các bạn sau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD, trực tâm H. P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc A và ở trong tam giác ABC. K thuộc PD sao cho $HK \perp AP$. Chứng minh rằng trung trực HK đi qua hình chiếu của Q trên BC.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Tham dự mục đề ra kỳ này THTT

Trần Quang Hùng-Võ Quốc Bá Cẩn

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H. Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\max\{\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB},\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC},\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\} \geq \frac{2R}{r}-2$$

Ta cần bổ đề và các công thức quen thuộc sau

Bổ đề 1. *Với mọi $x, y, z \geq 0$ thì*

$$x\cos A + y\cos B + z\cos C \leq \frac{1}{2}(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z})$$

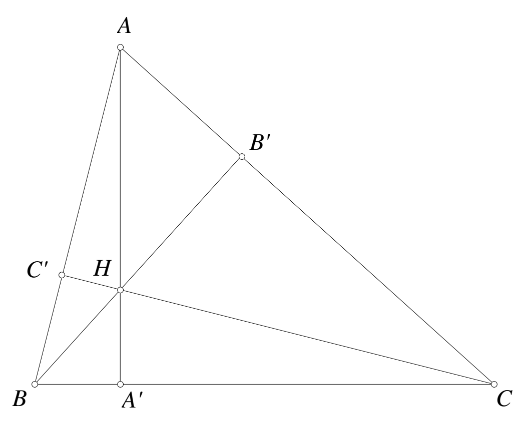
Bổ đề 2. *Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H. Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Ta có một số công thức lượng sau*

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R}$$

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2S}{R}$$

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{HA} = \frac{A'B + A'C}{HA} = \frac{HB\sin C + HC\sin B}{HA}$$



Trở lại bài toán

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau

$$\frac{a}{2}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})+\frac{b}{2}(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC})+\frac{c}{2}(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA})\geq p(\frac{2R}{r}-2)$$

Vì ta dễ thấy

$$p\max\{\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB},\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC},\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\}\geq\frac{a}{2}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})+\frac{b}{2}(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC})+\frac{c}{2}(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA})$$

Sử dụng các đồng nhất thức ở bổ đề 2 ta có

$$\cot\frac{A}{2}\cos A+\cot\frac{B}{2}\cos B+\cot\frac{C}{2}\cos C\leq\frac{1}{2}(\tan A+\tan B+\tan C)$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{p-a}{r}\cos A\leq\frac{1}{2}\sum\frac{HB\sin C+HC\sin B}{HA}$$

$$\Leftrightarrow p(\sum\cos A)-\sum a\cos A\leq r\sum\frac{a}{4R}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})$$

$$\Leftrightarrow p\frac{R+r}{R}-\frac{2S}{R}\leq r\sum\frac{a}{4R}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})$$

$$\Leftrightarrow\frac{pR+S-2S}{R}\leq r\sum\frac{a}{4R}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{pR-pr}{r}\leq\sum\frac{a}{2}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{2}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})+\frac{b}{2}(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC})+\frac{c}{2}(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA})\geq p(\frac{2R}{r}-2)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\cot\frac{A}{2}\cos A+\cot\frac{B}{2}\cos B+\cot\frac{C}{2}\cos C\leq\frac{1}{2}(\tan A+\tan B+\tan C)$$

Áp dụng bổ đề 1 ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau

$$\sum\cot\frac{A}{2}\cos A\leq\frac{1}{2}\sum\frac{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}\leq\frac{1}{2}\prod\tan A$$

Sử dụng công thức tan góc chia đôi $\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$, bất đẳng thức trên sẽ tương đương với

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\leq\frac{8\prod\tan^2\frac{A}{2}}{\prod(1-\tan^2\frac{A}{2})}$$

Đặt $\tan\frac{A}{2}=a, \tan\frac{B}{2}=b, \tan\frac{C}{2}=c$ ta sẽ có $ab+bc+ca=1$ và vì tam giác nhọn nên $0<a,b,c<1$. Ta phải chứng minh

$$\frac{8a^2b^2c^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2+b^2+c^2.$$

Trước hết ta sẽ chứng minh hằng đẳng thức sau

$$4a^2bc=(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b-c)^2.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b-c)^2 &= 1-2bc+b^2c^2-a^2(b-c)^2 \\ &= (1-bc)^2-a^2(b-c)^2 \\ &= (1-bc-ab+ac)(1-bc-ac+ab) \\ &= 4a^2bc.\end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đã cho. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\{a,\ b,\ c\}$. Sử dụng hằng đẳng thức trên ta được

$$8a^2b^2c^2=2bc[(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b-c)^2].$$

Do vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2bc}{1-a^2}+\frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2+b^2+c^2,$$

hay

$$\frac{2bc}{1-a^2}-1+\frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$$

Ta có $2bc-(1-a^2)=2bc+a^2-(ab+bc+ca)=(a-b)(a-c)$ và

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a-b)(a-c)+(b-c)^2.$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\frac{(a-b)(a-c)}{1-a^2}+\frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq (a-b)(a-c)+(b-c)^2,$$

tương đương

$$\frac{a^2(a-b)(a-c)}{1-a^2}+\frac{(b-c)^2[2bc-(1-b^2)(1-c^2)]}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq 0.$$

Để ý rằng $a^2(a-b)(a-c) \geq 0$ và

$$\begin{aligned}2bc-(1-b^2)(1-c^2) &= bc(1-bc)+b^2+c^2+bc-1 \\ &= bc(1-bc)+b^2+c^2-ab-ac \geq 0,\end{aligned}$$

suy ra bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Phép chứng minh của ta được hoàn tất tại đây. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hay ABC là tam giác đều. Ta có điều phải chứng minh.

$\square$

On Casey inequality

Tran Quang Hung

Casey's theorem is one of famous theorem of geometry, we can see it in [3,4]. Ptolemy's theorem (see in [2]) can be considered as special case of Casey's theorem but Ptolemy inequality (see in [3]) can be considered as an extension of Ptolemy's theorem. Now we will show an extension of Ptolemy inequality. We begin with Casey's theorem.

Theorem 1 (Casey's theorem)**.** *Four circles c_1, c_2, c_3, and c_4 are tangent to a fifth circle or a straight line iff*

$$T_{(12)}T_{(34)} \pm T_{(13)}T_{(42)} \pm T_{(14)}T_{(23)} = 0.$$

where $T_{(ij)}$ is the length of a common tangent to circles i and j.

We can see a nice corollary which we call by "a part of Casey's theorem"

Theorem 2 (Casey's theorem)**.** *Let ABC be a triangle inscribed circle (O). The circle (I) touch to (O) at a point in arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. From A, B, C draw the tangents AA', BB', CC' to (I) $(A', B', C' \in (I))$, respectively. Prove that $aAA' = bBB' + bCC'$. With a, b, c are the sides of triangle ABC, respectively.*

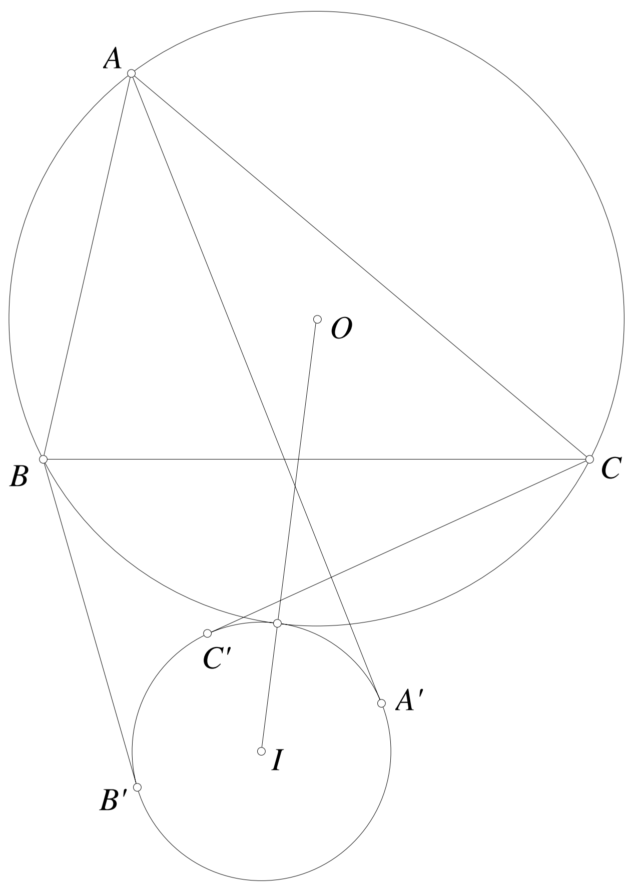


Figure 1.

The folowing theorem is main theorem of this article, it consider as an extension of Ptolemy's inequality. We will call it by Casey's inequality

Theorem 3 (Casey inequality)**.** *Let ABC be a triangle inscribed circle (O). (I) is an arbitrary circle. From A, B, C draw the tangents AA', BB', CC' to (I) $(A', B', C' \in (I))$, respectively. Prove that*

1/ If $(I) \cap (O) = \varnothing$ then $a \cdot AA', b \cdot BB', c \cdot CC'$ are three side of a triangle.

2/ If $(I) \cap (O) \neq \varnothing$ as following

(I) intersects the arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A then $aAA' \geq bBB' + cCC'$

(I) intersects the arc $\overset{\frown}{CA}$ which does not contain B then $bBB' \geq cCC' + aAA'$

(I) intersects the arc $\overset{\frown}{AB}$ which does not contain C then $cCC' \geq aAA' + bBB'$

Equality holds iff circle (I) tangents to (O).

Proof. 1/ If $(I) \cap (O) = \varnothing$. Assume that radius of (I) is r, draw circle (I, r') (circle center I and radius r') touch (O)at a point in arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. Easily seen $r' \geq r$. Draw the tangents AA'', BB'', CC'' of (I, r') $(A'', B'', C'' \in (I, r'))$, respectively. Apply Pythagoras' theorem we have $AA'^2 + r^2 = IA^2, AA''^2 + r'^2 = IA^2$. Therefore $AA'^2 = AA''^2 + r'^2 - r^2$ and analogously then $BB'^2 = BB''^2 + r'^2 - r^2, CC'^2 = CC''^2 + r'^2 - r^2 \quad (1)$

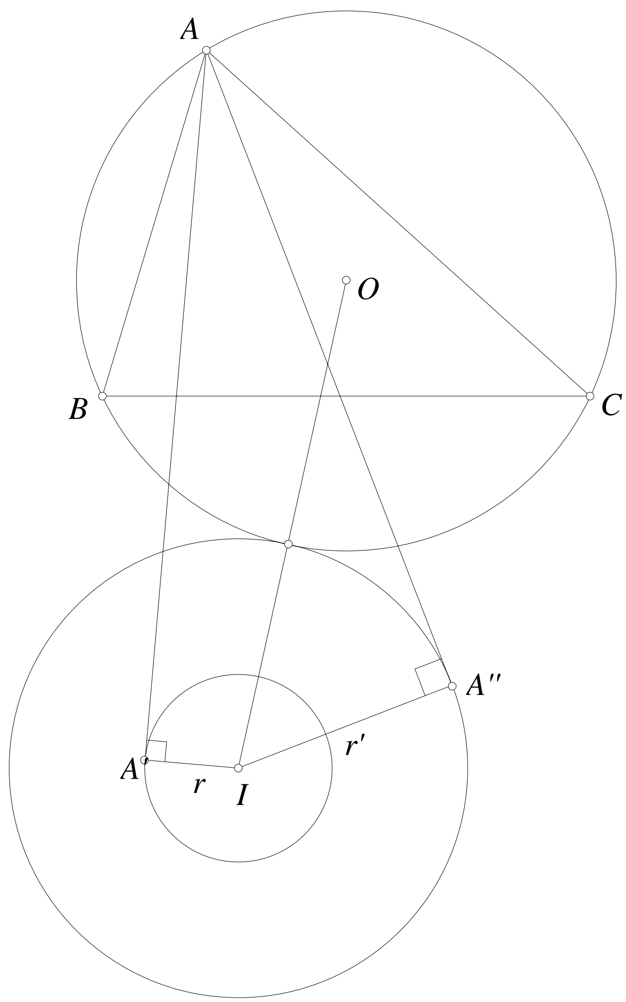


Figure 2.

From theorem 2, square both two sides we get $a^2AA''^2 = b^2BB''^2 + c^2CC''^2 + 2bcBB''CC''$ (2)

Now if we prove that $bBB' + cCC' \geq aAA' \geq |bBB' - cCC'|$ then $a \cdot AA', b \cdot BB', c \cdot CC'$ will be three sides of a triangle. Indeed, the inequality $bBB' + cCC' \geq aAA'$ are equivalent to

$$b^2BB'^2 + c^2CC'^2 + 2bcBB'CC' \geq a^2AA'^2$$
$$b^2(BB''^2 + r'^2 - r^2) + c^2(CC''^2 + r'^2 - r^2) + 2bcBB'CC' \geq a^2AA'^2 \text{ (Get from (1))}$$
$$(b^2 + c^2 - a^2)(r'^2 - r^2) - 2bcBB''CC'' + 2bcBB'CC' \geq 0 \text{ (Get from (2))}$$
$$2bc\cos A(r'^2 - r^2) - 2bcBB''CC'' + 2bc\sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \geq 0 \text{ (Get from (1))}$$
$$\cos A(r'^2 - r^2) - BB''CC'' + \sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \geq 0$$

The last inequality is true $\sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \geq BB''CC'' + r'^2 - r^2$ because of Cauchy-Schwarz inequality, note that the last inequality is true because $\cos A(r'^2 - r^2) + r'^2 - r^2 \geq 0$ from $r' \geq r$ and $(1 + \cos A) \geq 0$. We are done.

Now the inequality $aAA' \geq |bBB' - cCC'|$ is equivalent to $b^2BB'^2 + c^2CC'^2 - 2bbBB'CC' \leq a^2AA'^2$. Use analogous transforms as above we must prove that

$$\cos A(r'^2 - r^2) - BB''CC'' - \sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \geq 0$$

Because $-\sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \leq -BB''CC'' - (r'^2 - r^2)$ therefore $LHS \leq \cos A(r'^2 - r^2) - r'^2 - r^2 - 2BB''CC'' < 0$ which is true inequality.

The cases (I, r') touch are CA which does not contain B and the arc $\overset{\frown}{AB}$ which does not contain C we prove analogously. We are done part 1/.

2/ If $(I) \cap (O) \neq \varnothing$. Assume (I, r) intersect arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. Draw (I, r'') touch arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. Easily seen $r'' \leq r$. Draw the tangents AA'', BB'', CC'' of (I, r'') $(A'', B'', C'' \in (I, r''))$, respectively. Analogous, apply Pythagoras' theorem as in (1), we get the equalities

$$AA'^2 = AA''^2 + r''^2 - r^2, BB'^2 = BB''^2 + r''^2 - r^2, CC'^2 = CC''^2 + r''^2 - r^2$$

Or

$$AA''^2 = AA'^2 + r^2 - r''^2, BB''^2 = BB'^2 + r^2 - r''^2, CC''^2 = CC'^2 + r^2 - r''^2 \quad (3)$$

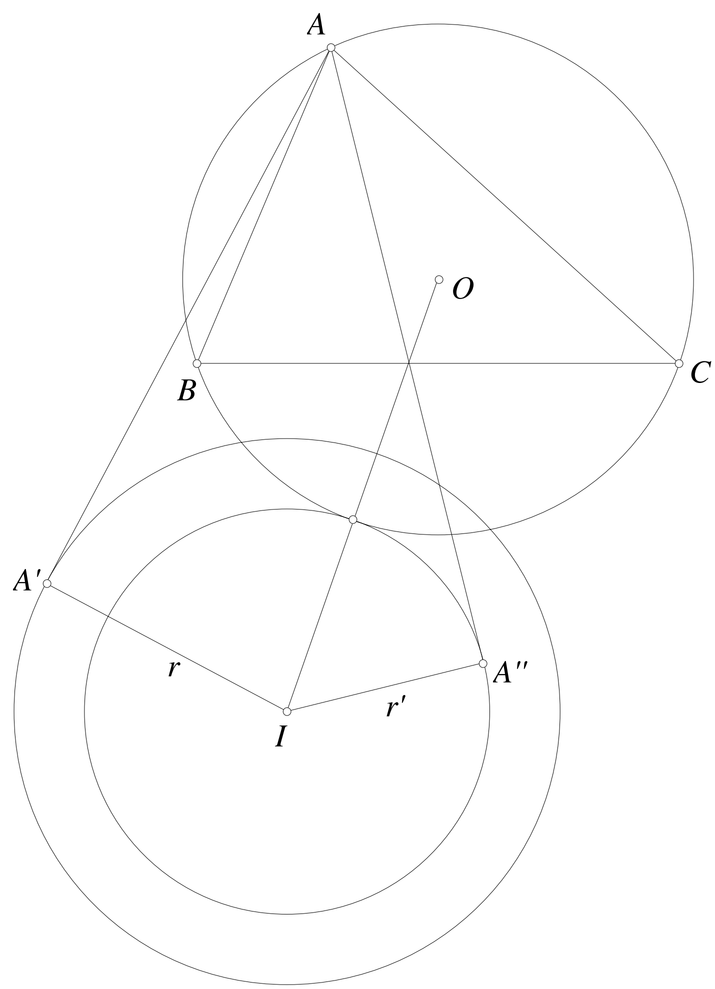


Figure 3.

Use theorem 2 and (3) with analogous transforms the inequality is equivalent to

$$\cos A(r''^2 - r^2) - BB''CC'' + BB'CC' \leq 0 \quad (4)$$

Note that $BB''CC'' = \sqrt{(BB'^2 + r^2 - r''^2)(CC'^2 + r^2 - r''^2)} \geq BB'CC' + r^2 - r''^2$

So that $LHS \leq \cos A(r''^2 - r^2) - (r^2 - r''^2) = (r''^2 - r^2)(1 + \cos A) \leq 0$. which is true because $r'' \leq r, 1 + \cos A \geq 0$.

The cases (I, r'') touch arc $\overset{\frown}{CA}$ which does not contain B and the arc $\overset{\frown}{AB}$ which does not contain C we prove analogously. We are done part 2/. □

References

[1] http://mathworld.wolfram.com/PtolemyInequality.html

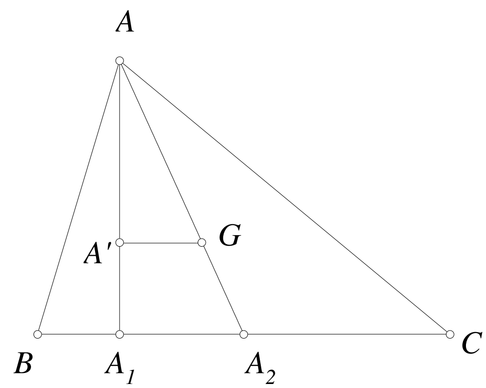
[2] http://mathworld.wolfram.com/PtolemysTheorem.html

[3] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry* Dover Publications (August 31, 2007)

[4] http://mathworld.wolfram.com/CaseysTheorem.html

Tham dự đề ra kỳ này
Trần Quang Hùng-Võ Quốc Bá Cẩn

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC trọng tâm G, gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của G lên các đường cao tương ứng với đỉnh A, B, C của tam giác. Chứng minh rằng $2(GB'^2 + GC'^2) \geq GA'^2$.*



Chứng minh. Gọi AA_1, AA_2 lần lượt là đường cao, trung tuyến ứng với A của tam giác ABC, vậy A' là hình chiếu của G lên AA_1. Theo định lý Thales ta có $GA' = \dfrac{2}{3}A_1A_2$.

Vậy $GA'^2 = \dfrac{4}{9}A_1A_2^2 = \dfrac{4}{9}(AA_2^2 - AA_1^2) = \dfrac{4}{9}(m_a^2 - h_a^2)$

Tương tự $GB'^2 = \dfrac{4}{9}(m_b^2 - h_b^2), GC'^2 = \dfrac{4}{9}(m_c^2 - h_c^2)$. Trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao, m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài trung tuyến của tam giác ABC.

Như vậy ta quy về chứng minh bất đẳng thức

$$2(m_b^2 - h_b^2 + m_c^2 - h_c^2) \geq m_a^2 - h_a^2$$

$$\Leftrightarrow 2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2 \geq 2(h_b^2 + h_c^2) - h_a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}a^2 \geq 2(\frac{4S^2}{b^2} + \frac{4S^2}{c^2}) - \frac{4S^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} \geq \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} - \frac{1}{a^2}$$

Đặt $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ ta quy về chứng minh bất đẳng thức đại số sau với mọi $x, y, z > 0$.

$$\frac{9(y+z)^2}{16xyz(x+y+z)} + \frac{1}{(y+z)^2} \geq \frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+z)^2}.$$

Vì bất đẳng thức thuần nhất ta có thể giả sử $y + z = 1$. Ký hiệu $m = yz \leq \dfrac{1}{4}$ và $t = x(x+y+z)$. Từ đó ta có

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} = \frac{2x(x+y+z) + y^2 + z^2}{(x+y)^2(x+z)^2} = \frac{2t+1-2m}{(t+m)^2},$$

Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{9}{16tm} + 1 \geq \frac{2(2t+1-2m)}{(t+m)^2},$$

Hay là

$$\frac{9(t+m)^2}{16tm} + (t+m)^2 \geq 2(2t+1-2m).$$

Mà ta có

$$(t+m)^2 = t^2 + 2tm + m^2 \geq (6tm - 9m^2) + 2tm + m^2 = 8tm - 8m^2,$$

Chúng ta sẽ cần chứng minh rằng

$$9(t+m)^2 + 16tm(8tm - 8m^2) \geq 32tm(2t+1-2m),$$

hay

$$(128m^2 - 64m + 9)t^2 - 2m(64m^2 - 32m + 7)t + 9m^2 \geq 0,$$

Điều này đúng vì $128m^2 - 64m + 9 > 0$ và

$$\Delta = [m(64m^2 - 32m + 7)]^2 - 9m^2(128m^2 - 64m + 9) = 32m^2(4m-1)^2(8m^2 - 4m - 1) \leq 0.$$

(Chú ý $m \leq \frac{1}{4}$) Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay tam giác ABC đều.

$\square$

Chứng minh các điểm thuộc một đường tròn

Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

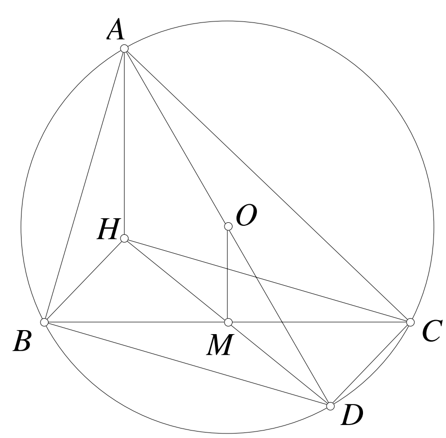
Trong hình học có một phương pháp vô cùng đơn giản nhưng rất hữu ích để chứng minh các điểm thuộc cùng một đường tròn đó là dùng định nghĩa. Ta sẽ chứng minh các điểm cách đều một điểm cho trước hoặc cùng nhìn một đoạn thẳng dưới một góc vuông. Cách này thường hay bị lãng quên khi chúng ta biết các công cụ mạnh về góc nội tiếp hay tứ giác nội tiếp, nhưng thực sự đó luôn là một phương pháp hay và hữu ích. Chúng ta hãy tìm hiểu kỹ hơn qua các ví dụ sau.

Chúng ta hãy bắt đầu với một ví dụ kinh điển, đó là đường tròn 9 điểm Euler.

Bài 1 (Đường tròn Euler)**.** *Cho tam giác ABC. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Các trung tuyến AA_2, BB_2, CC_2. A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm HA, HB, HC. Chứng minh rằng 9 điểm $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ cùng thuộc một đường tròn.*

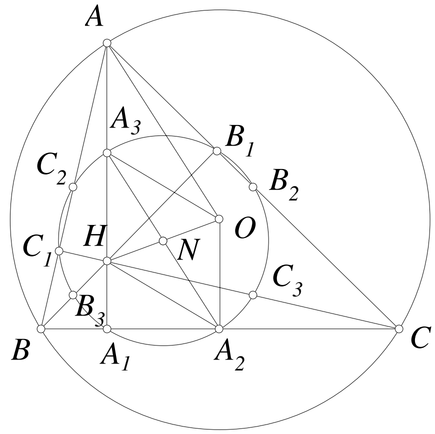
Đây là một bài toán kinh điển với rất nhiều lời giải, lời giải dưới đây tôi xin trình bày thông qua một bổ đề rất quan trọng của hình học

Bổ đề 1.1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $HA \parallel OM$ và $HA = 2OM$.*



Giải bổ đề. Gọi AD là đường kính của (O). Ta dễ thấy $CD \perp AC \perp HB$ suy ra $HB \parallel DC$. Tương tự $HC \parallel DB$. Từ đó suy ra tứ giác $HBDC$ là hình bình hành.

Vậy M là trung điểm chung của HD và BC, vậy OM là đường trung bình của tam giác DHA nên $HA \parallel OM$ và $HA = 2OM$. $\square$



Giải bài toán. Gọi (O, R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, N là trung điểm OH. Theo bổ đề $HA \parallel OA_2$ và $HA = 2OA_2$. Vì A_3 là trung điểm HA nên suy ra $HA_3 \parallel OA_2$ và $HA_3 = 2OA_2$ hay tứ giác HA_3OA_2 là hình bình hành, vậy N là trung điểm A_2A_3.

Tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_1 nên A_1, A_2, A_3 thuộc đường tròn $(N, \dfrac{A_2A_3}{2})$ (1).

Cũng theo bổ đề và A_3 là trung điểm HA nên suy ra $AA_3 \parallel OA_2$ và $AA_3 = 2OA_2$ hay tứ giác AOA_2A_3 là hình bình hành. Vậy $A_2A_3 = OA = R$ (2).

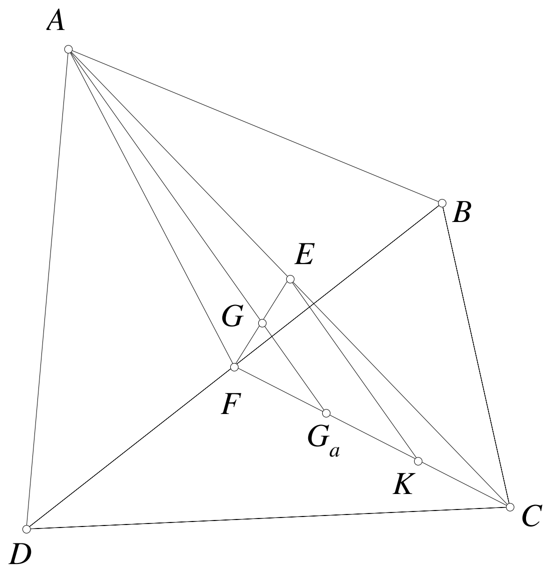
Từ (1), (2) suy ra A_1, A_2, A_3 thuộc đường tròn $(N, \dfrac{R}{2})$. Tương tự ta có 9 điểm $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, C_1, C_2, C_3 thuộc đường tròn $(N, \dfrac{R}{2})$. □

Nhận xét. Với cách làm này không những ta chỉ ra 9 điểm thuộc một đường tròn mà ta còn chỉ rõ tâm N là trung điểm OH (nên cũng thuộc đường thẳng Euler) và bán kính bằng một nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp. Đó là các kết quả rất kinh điển mà các cách làm khác có thể không suy ra cùng một lúc được.

Bài 2. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d lần lượt là trọng tâm tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng G_a, G_b, G_c, G_d thuộc một đường tròn.*

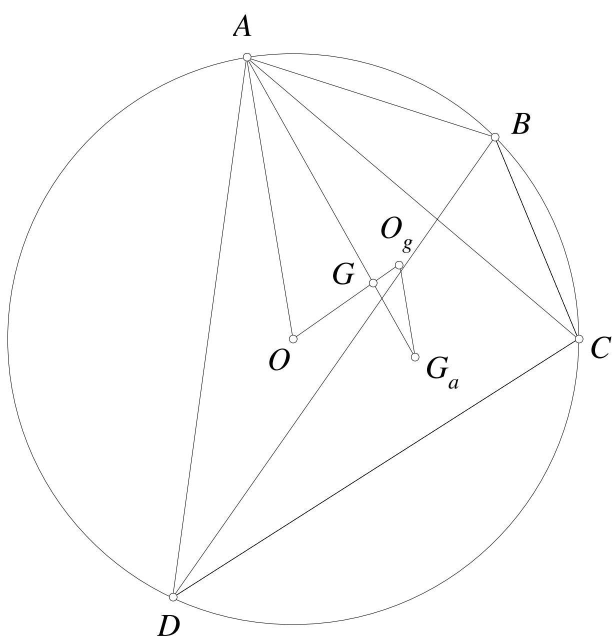
Bổ đề 2.1. *Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d lần lượt là trọng tâm tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Thì AG_a, BG_c, CG_c, DG_d đồng quy tại G và $\dfrac{GG_a}{GA} = \dfrac{GG_b}{GB} = \dfrac{GG_c}{GC} = \dfrac{GG_d}{GD} = \dfrac{1}{3}$. G thường được gọi là trọng tâm tứ giác $ABCD$.*

Giải bổ đề. Gọi E, F là trung điểm AC, BD. vì G_a là trọng tâm tam giác BCD nên theo tính chất trọng tâm G_a thuộc CF và $G_aC = \dfrac{2}{3}CF$. Vậy gọi K là trung điểm G_aC suy ra $FG_a = G_aK = KC$. Vì E là trung điểm AC nên $EK \parallel AG_a$ mặt khác G_a là trung điểm FK nên AG_a đi qua trung điểm G của EF. Cũng từ tính chất đường trung bình dễ thấy $GG_a = \dfrac{1}{2}EK = \dfrac{1}{4}AG_a$ hay $\dfrac{GG_a}{GA} = \dfrac{1}{3}$.



Chứng minh tương tự ta có AG_a, BG_c, CG_c, DG_d đi qua trung điểm G của EF và $\dfrac{GG_a}{GA} = \dfrac{GG_b}{GB} = \dfrac{GG_c}{GC} = \dfrac{GG_d}{GD} = \dfrac{1}{3}$. Đó là điều phải chứng minh. □

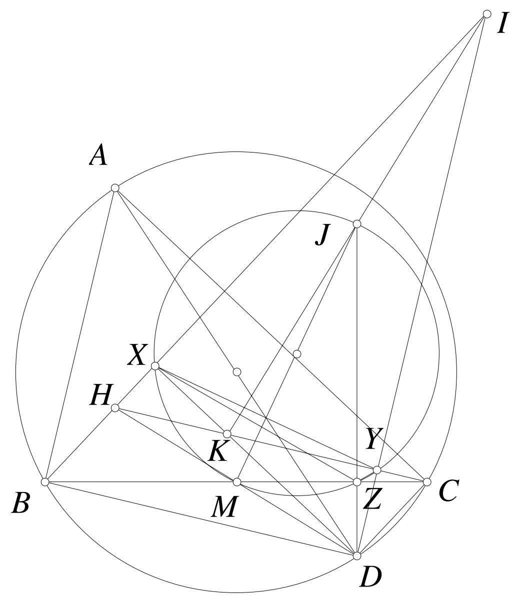
Giải bài toán. Gọi AG_a, BG_c, CG_c, DG_d đồng quy tại G, gọi (O, R) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Gọi O_g là điểm thuộc tia đối tia GO sao cho $\dfrac{GO_g}{GO} = \dfrac{1}{3}$. Theo bổ đề $\dfrac{GG_a}{GA} = \dfrac{1}{3}$ nên theo định lý Thales đảo $O_gG_a \parallel OA$ và $O_gG_a = \dfrac{1}{3}OA = \dfrac{R}{3}$ hay $G_a \in (O_g, \dfrac{R}{3})$.



Ta thấy G, O, O_g xác định tổng quát với A, B, C, D nên tương tự $G_b, G_c, G_d \in (O_g, \dfrac{R}{3})$ vậy G_a, G_b, G_c, G_d thuộc một đường tròn. Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Với cách làm này không những ta chỉ ra được G_a, G_b, G_c, G_d thuộc một đường tròn mà còn chỉ ra tâm của đường tròn này thuộc OG và bán kính bằng một phần ba bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Bài 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). AD là đường kính của (O). M là trung điểm BC. H là trực tâm tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của D lên HB, HC, BC. Chứng minh rằng X, Y, Z, M thuộc một đường tròn.*



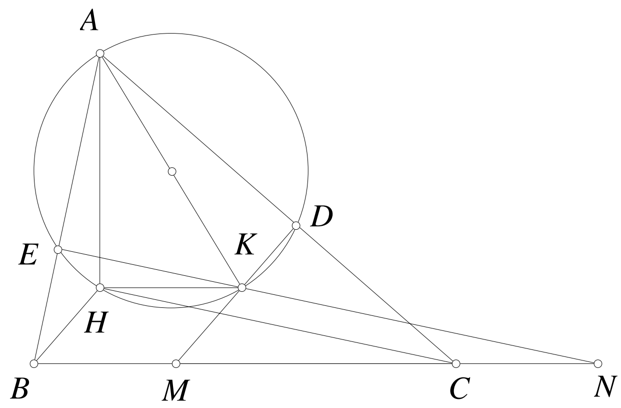
Chứng minh. Gọi HB giao DY tại I, HC giao DX tại K, J là trung điểm IK. Theo chứng minh bổ đề 1.1 thì M cũng là trung điểm HD.

Ta dễ thấy K là trực tâm tam giác IHD nên $\angle KDI = \angle KHI = \angle HCD$ (chú ý $HI \parallel DC$) và $\angle CHD = \angle KID$. Từ đây dễ suy ra $\triangle KID \sim \triangle DHC$.

Mặt khác CM, DJ là hai trung tuyến tương ứng, vậy $\triangle DIJ \sim \triangle CHM$, từ đó $\angle JDI = \angle HCM$. Từ đây dễ suy ra $DJ \perp BC$ tại Z hay $Z \in (MJ)$.

Theo chứng minh bài 1. Đường tròn đường kính (MJ) là đường tròn Euler của tam giác IHD, theo tính chất đường tròn Euler thì $X, Y \in (MJ)$. Từ đó ta có X, Y, Z, M đều cùng nằm trên đường tròn đường kính (MJ). Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 4. *Cho tam giác ABC. Lấy M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C. D, E lần lượt là hình chiếu của M lên AC, AB. Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H thuộc một đường tròn.*

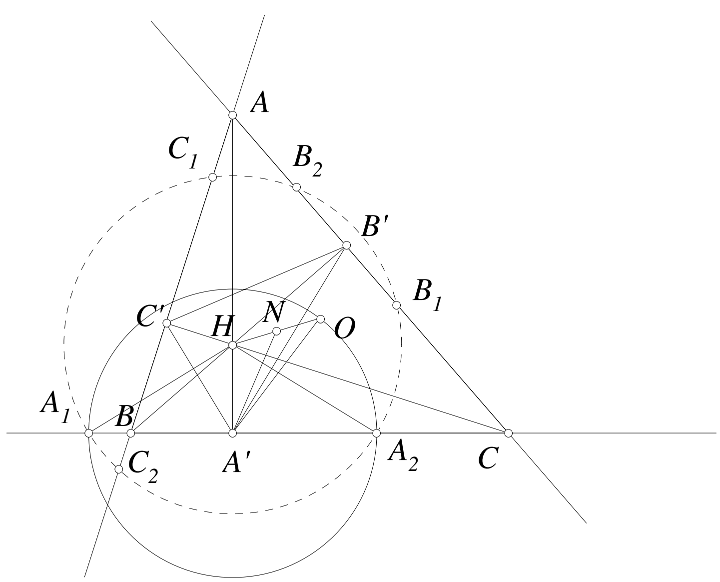


Chứng minh. Gọi MD giao ME tại K. Ta thấy $HB \parallel MK$ do cùng vuông góc AC suy ra góc đồng vị $\angle HBC = \angle KMN$. Tương tự $\angle HCB = \angle KNM$. Kết hợp giả thiết $BC = MN$ suy ra tam giác $\triangle BHC = \triangle KMN$ suy ra $S_{BHC} = S_{KMN}$ hay $HK \parallel BC$. $BC \perp HA$ vậy $HK \perp HA$ hay H thuộc đường tròn đường kính (AK). Dễ thấy $E, D \in (AK)$ vậy $H, D, E \in (AK)$ hay A, D, E, H thuộc một đường tròn. □

Bài 5. *Cho tam giác ABC. Các đường cao AA', BB', CC' đồng quy tại H. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường tròn $(A', A'O)$ cắt BC tại A_1, A_2. Định nghĩa tương tự các điểm B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ thuộc một đường tròn.*

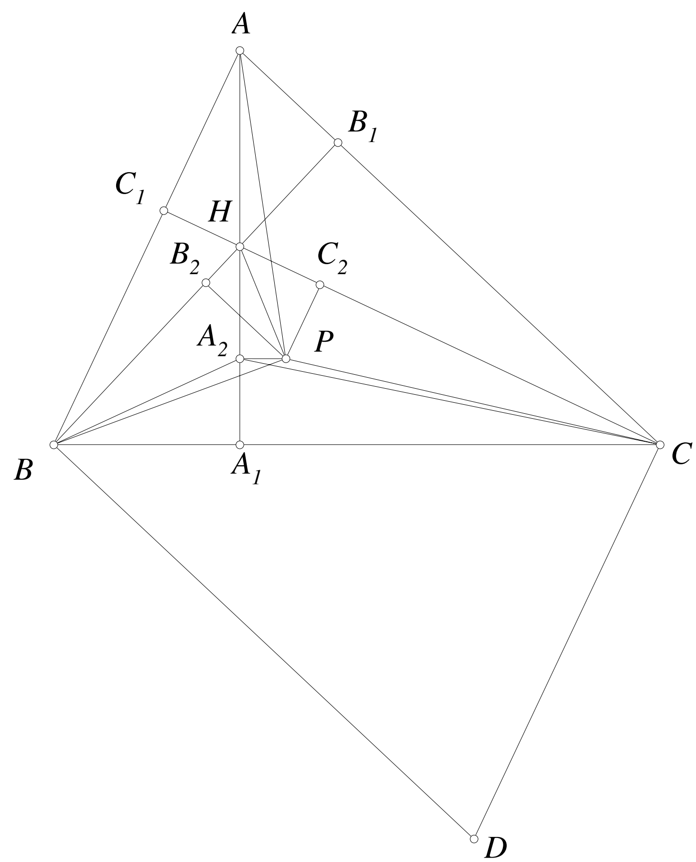
Chứng minh. Gọi N là trung điểm OH cũng là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Ta đã biết kết quả quen thuộc là bán kính đường tròn Euler bằng $\dfrac{R}{2}$. Khi đó áp dụng định lý Pythagore và công thức trung tuyến ta có

$$HA_1^2 = HA'^2 + A'A_1^2 = HA'^2 + A'O^2 = 2NA'^2 + \frac{OH^2}{2} = \frac{R^2 + OH^2}{2}$$



Như vậy A_1 thuộc $\mathscr{C}(H, \dfrac{R^2+OH^2}{2})$. Chứng minh tương tự, ta có A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cũng thuộc $\mathscr{C}$. Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Bài 6. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 sao cho $S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{ABC}$. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2, H thuộc một đường tròn.*



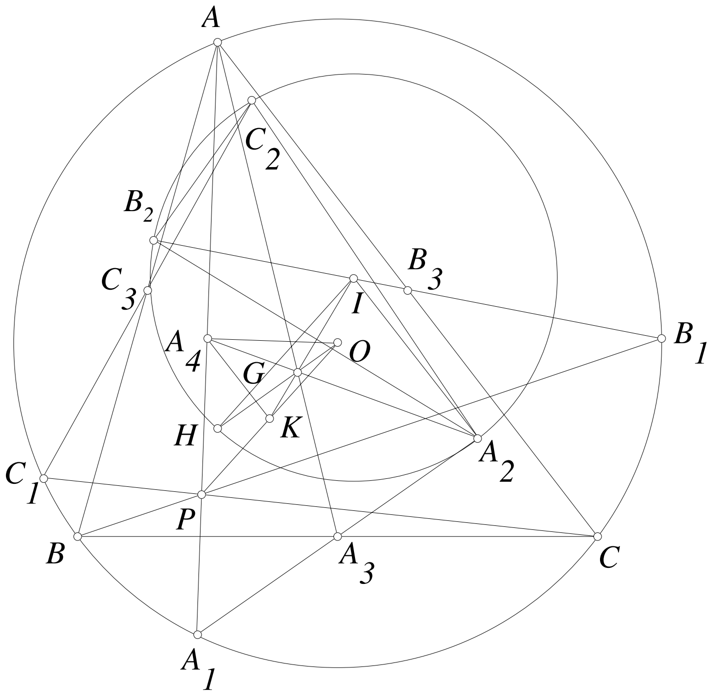
Chứng minh. Qua B_2, C_2 lần lượt dựng các đường thẳng vuông góc với BB_1, CC_1 chúng cắt nhau tại P. Dựng hình bình hành $ABDC$, vì B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn BB_1, CC_1 nên P nằm ở miền trong hình bình hành $ABDC$.

Ta dễ thấy $PB_2 \parallel CA, PC_2 \parallel AB$ nên $S_{PCA} = S_{B_2CA}, S_{PAB} = S_{C_2AB}$ $(*)$. Nếu P nằm ở miền trong tam giác BCD thì $S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{PCA} + S_{PAB} > S_{ABC}$ vô lý vì trái với giả thiết, vậy P nằm ở miền trong tam giác ABC.

Khi đó kết hợp giả thiết $S_{PCA} + S_{PAB} + S_{PBC} = S_{ABC} = S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB}$. Theo $(*)$ suy ra $S_{PBC} = S_{A_2BC}$ suy ra $PA_2 \parallel BC$ hay $PA_2 \perp AA_1$.

Từ đây dễ thấy A_2, B_2, C_2 thuộc đường tròn đường kính (PH) hay A_2, B_2, C_2, H thuộc một đường tròn, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 7. *Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại A_1, B_1, C_1. A_2, B_2, C_2 đối xứng A_1, B_1, C_1 qua trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2 và trực tâm H của tam giác ABC cùng thuộc một đường tròn.*



Chứng minh. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC theo bài toán quen thuộc về đường thẳng Euler thì G thuộc đoạn OH và $OG = \frac{1}{3}OH \quad (1)$.

Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB, theo giả thiết A_3 là trung điểm A_1A_2 vậy G là trọng tâm chung của tam giác ABC và AA_1A_2.

Gọi A_4, B_4, C_4 lần lượt là trung điểm AA_1, BB_1, CC_1. Vì G là trọng tâm của tam giác AA_1A_2 nên $\frac{GA_4}{GA_2} = \frac{1}{3} \quad (2)$.

Gọi K là trung điểm OP, vì AA_1 là dây cung của (O) nên $OA_4 \perp AA_1$, từ đây suy ra A_4 thuộc đường tròn đường kính (OP) tâm K hay $KA_4 = \frac{OP}{2}$.

Gọi I là điểm thuộc tia đối tia GK sao cho $\frac{GK}{GI} = \frac{1}{3} \quad (3)$.

Từ (1) và (3) ta dễ thấy IH song song KO và $IH = 2KO = OP$.

Từ (2) và (3) ta dễ thấy IA_2 song song KA_4 và $IA_2 = 2KA_4 = OP$.

Kết hợp hai điều trên suy ra $IA_2 = IH$ hay $A_2 \in (I, IH)$. Tương tự ta có $B_2, C_2 \in (I, IH)$ hay A_2, B_2, C_2, H thuộc đường tròn tâm I bán kính $IH = 2OP$. Ta có điều phải chứng minh. □

Để rèn luyện thêm phương pháp này các bạn hãy làm một số bài tập sau đây.

Luyện tập

Bài 8. *Cho tam giác ABC trực tâm H. A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB. Đường tròn $(A', A'H)$ cắt BC tại A_1, A_2. Tương tự có B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ thuộc một đường tròn.*

Bài 9. *Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB. Đường tròn (A, R) cắt $B'C'$ tại A_1, A_2. Tương tự có B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ thuộc một đường tròn.*

Bài 10. *Cho bốn điểm A, B, C, D thuộc một đường tròn.*

a) Gọi H_a, H_b, H_c, H_d lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng H_a, H_b, H_c, H_d cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi N_a, N_b, N_c, N_d lần lượt là tâm đường tròn Euler các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng N_a, N_b, N_c, N_d cùng thuộc một đường tròn.

Bài 11. *Cho tam giác ABC, phân giác AD. đường cao AH, trung tuyến AM. P, Q là hình chiếu của B, C lên AD.*

a) Chứng minh rằng H, M, P, Q thuộc một đường tròn tâm K.

b) Chứng minh rằng K nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC.

Bài 12. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp và AC, BD vuông góc với nhau tại K. X, Y, Z, T theo thứ tự là trung điểm của $AB, BC, CD, DA.XK, YK, ZK, TK$ theo thứ tự cắt CD, DA, AB, BC tại X', Y', Z', T'. Chứng minh rằng $X, Y, Z, T, X', Y', Z', T'$ cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 13 (TTT2 số 38)**.** *Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác sao cho MA, MB, MC đôi một khác nhau. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{BMC}$, $\overset{\frown}{CMA}$, $\overset{\frown}{AMB}$. Chứng minh rằng M, X, Y, Z cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 14. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến với (O_1) tại A cắt (O_2) tại C. Tiếp tuyến với (O_2) tại A cắt (O_1) tại D. E là điểm đối xứng của A qua B. Chứng minh rằng A, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 15. *Cho tam giác nhọn ABC. Từ A kẻ tới đường tròn đường kính BC các tiếp tuyến AA_1, AA_2. Tương tự có B_1, B_2; C_1, C_2. Chứng minh rằng các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 16 (TTT2 số 46)**.** *Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ cùng đi qua điểm M. Các điểm M_1, M_2, M_3 theo thứ tự thuộc $(O_1), (O_2), (O_3)$ sao cho MM_1, MM_2, MM_3 theo thứ tự song song với O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2. chứng minh rằng M, M_1, M_2, M_3 cùng thuộc một đường tròn.*

Cuối cùng, tác giả xin được bày tỏ lời cảm ơn chân thành tới thầy Nguyễn Minh Hà, người đã cho tác giả nhiều lời nhận xét quan trọng và đã cung cấp thêm cho tác giả nhiều bài toán tham khảo rất hay cho bài viết này.

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng hình học 10* NXB GD 2000

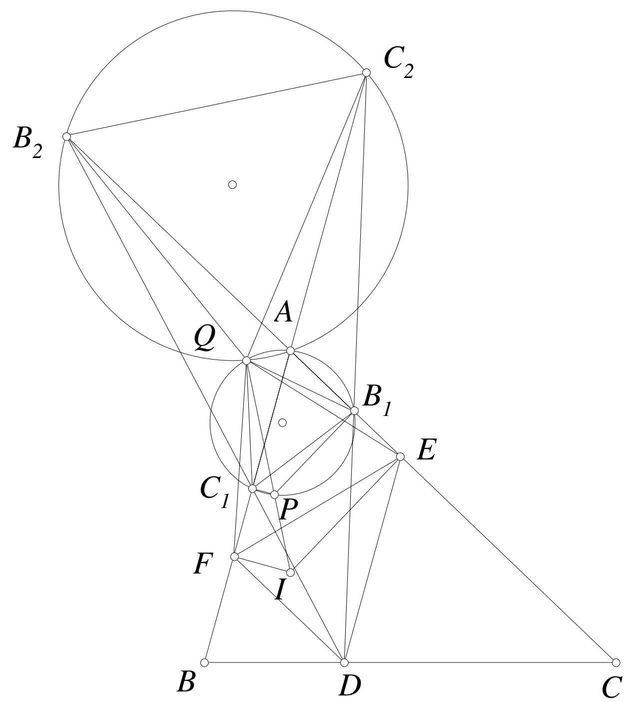
[2] Coxeter, *Geometry Revisited* The Mathematical Association of America; 1ST edition (1967)

[3] Diễn đàn toán học http://www.mathlinks.ro

Đề toán đề nghị

Trần Quang Hùng

Bài 1. *Cho tam giác $ABC, \widehat{A} \neq 90^\circ$. D là điểm cố định trên cạnh BC. P là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của P lên AC, AB. DB_1, DC_1 lần lượt cắt AB, AC tại C_2, B_2. Giao điểm khác A của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1 và AB_2C_2 là Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.*



Chứng minh. Qua D dựng các đường thẳng song song với AB, AC cắt AC, AB tại E, F. Qua E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với AC, AB, chúng cắt nhau tại I cố định, ta sẽ chứng minh rằng PQ đi qua I cố định, thật vậy.

Bằng tính chất tỷ số kép, ta thấy

$$\frac{\overline{FC_1}}{\overline{FC_2}} = (C_1C_2F) = (C_1C_2FE) = (C_2C_1EF) = (B_1B_2E) = \frac{\overline{EB_1}}{\overline{EB_2}} \quad (1)$$

Mặt khác từ tính chất góc nội tiếp ta dễ thấy các tam giác $\triangle QB_1B_2 \sim \triangle QC_1C_2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta dễ suy ra $\triangle QB_1E \sim \triangle QC_1F$ suy ra tam giác $\triangle QB_1C_1 \sim \triangle QEF$.

Từ đây với chú ý rằng $Q \in (AB_1C_1)$ suy ra $\angle EQF = \angle B_1QC_1 = \angle B_1AC_1 = \angle EAF$ suy ra $Q \in (AEF) \equiv (AI)$ vậy $AQ \perp QI \quad (3)$.

Cũng từ $Q \in (AB_1C_1) \equiv (AP)$ suy ra $AQ \perp PQ \quad (4)$.

Từ $(3), (4)$ ta dễ suy ra P, Q, I thẳng hàng hay PQ đi qua I cố định, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán hình học thi quốc tế năm 2012 và một số mở rộng

Trần Quang Hùng và Ong Thế Phương

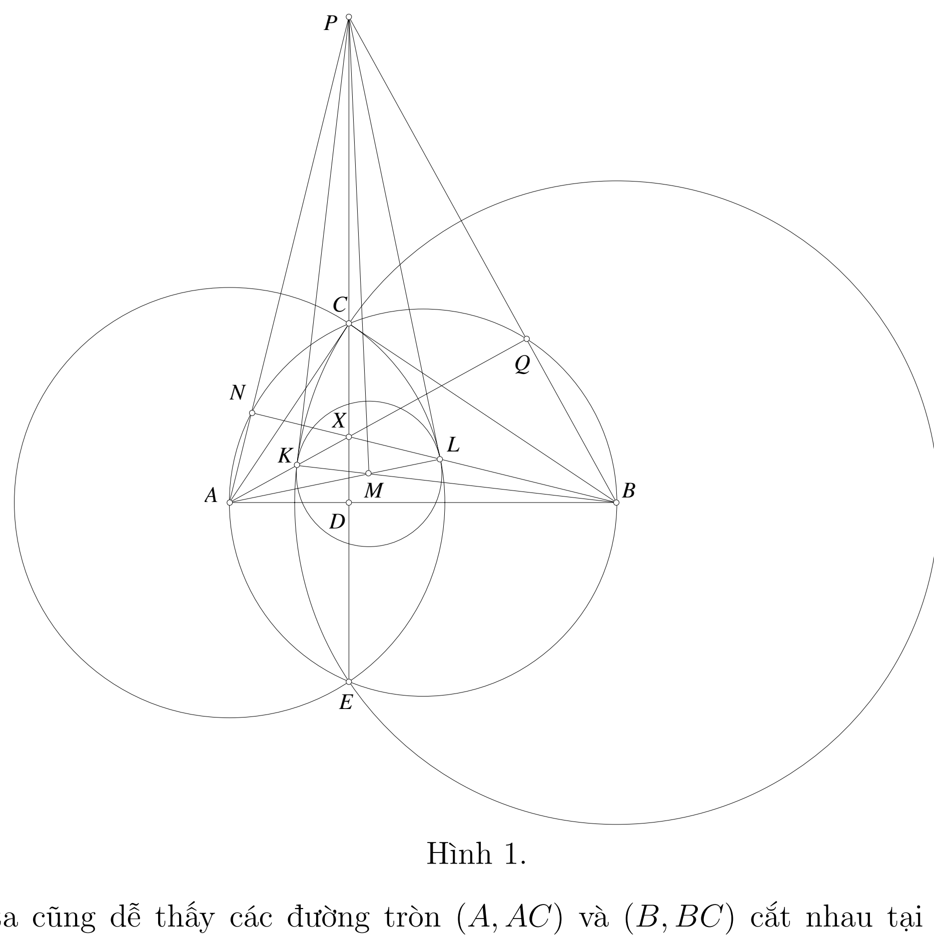
Trong đề thi toán quốc tế ngày thứ 2 năm 2012 có bài toán hay như sau

Bài 1. *Cho tam giác ABC có $\angle BCA = 90^\circ$. D là chân đường cao hạ từ C. X là điểm nằm trong đoạn thẳng CD. K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$. Tương tự L là điểm trên đoạn BX sao cho $AL = AC$. Gọi M là giao của AL và BK. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Chúng ta sẽ lần lượt đưa ra nhiều lời giải và bình luận cho bài toán này

Lời giải 1. Gọi AX, BX lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Q, N khác A, B. Do đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn đường kính AB nên $\angle ANB = \angle AQB = 90^\circ$. Gọi AN giao BQ tại P dễ thấy X là trực tâm tam giác PAB nên P thuộc CD.

Ta chú ý tứ giác $PNDB$ nội tiếp và theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AN.AP = AD.AB = AC^2 = AL^2$. Từ đó suy ra tam giác ALP vuông tại L hay PL tiếp xúc (A, AC). Tương tự PK tiếp xúc (B, BC).



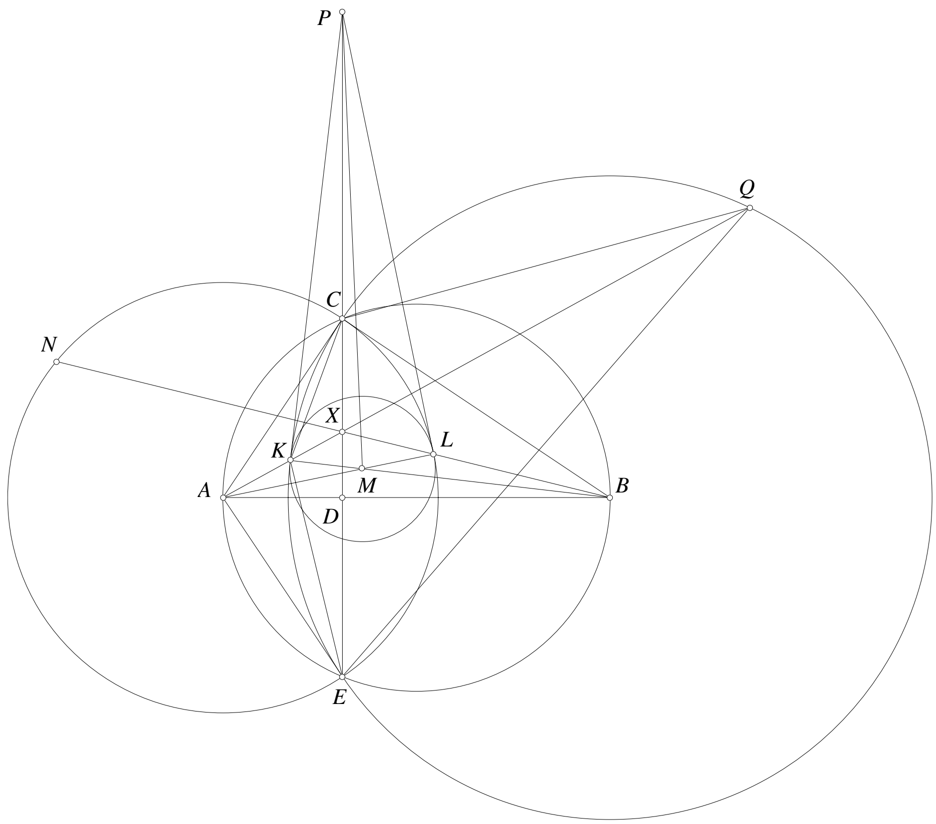
Hình 1.

Mặt khác ta cũng dễ thấy các đường tròn (A, AC) và (B, BC) cắt nhau tại điểm E khác C thì E đối xứng C qua AB. Từ đó P cũng thuộc CE, vậy theo hệ thức lượng trong đường tròn

$PL^2 = PC.PE = PK^2$ hay $PL = PK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle PML = \triangle PMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thuần túy hình học rất đẹp này sử dụng những công cụ hết sức cơ bản như hệ thức lượng trong tam giác vuông và hệ thức lượng trong đường tròn. Để vận dụng các kiến thức này chỉ cần kiến thức trong chương trình lớp 9. Đó là một trong những cách tiếp cận đẹp nhất cho bài toán này. Lời giải sử dụng ý tưởng trong lời giải của nick name vladimir92 trên diễn đàn AoPS.

Lời giải 2. Dễ thấy các đường tròn (A, AC) và (B, BC) cắt nhau tại điểm E khác C thì E đối xứng C qua AB. Khi đó dễ thấy AC, AE cùng tiếp xúc đường tròn (B, BC).



Hình 2.

Gọi AK giao (B, BC) tại Q khác K. Do AC, AE cùng tiếp xúc đường tròn (B, BC) nên tứ giác $CQEK$ là tứ giác điều hòa. Do đó tiếp tuyến tại K và Q của (B, BC) cắt nhau tại điểm P thuộc CE hơn nữa theo hàng điều hòa cơ bản thì $(PXCE) = -1$. Vậy tương tự thì nếu gọi BL giao (A, AC) tại N thì tiếp tuyến tại L và N cắt nhau tại P' thuộc CE và $(P'XCE) = -1$. Do đó $P \equiv P'$. Từ đó chú ý CE là trục đẳng phương của (A, AC) và (B, BC) nên $PL = PK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle PML = \triangle PMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải khá ngắn gọn nhưng đòi hỏi phải có những hiểu biết về hàng điều hòa và tứ giác điều hòa, tuy vậy tư tưởng chủ đạo vẫn là chứng minh tiếp tuyến tại K, L đồng quy trên trục đẳng phương. Đây là một trong những ý tưởng khá đặc sắc để tiếp cận bài toán này. Lời giải sử dụng ý tưởng trong lời giải của nick name Jeroen trên diễn đang AoPS.

Lời giải 3. Gọi U là giao điểm của CD với đường tròn đi qua ba điểm A, D, L.

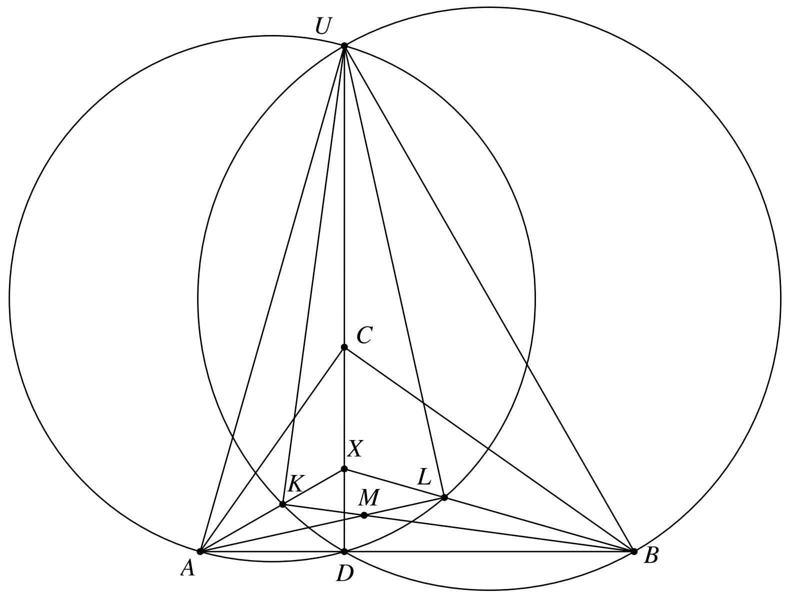
Do $AC = AL$ nên $\overline{AD}.\overline{AB} = AC^2 = AL^2$. Do đó hai tam giác ALD và ABL đồng dạng.

Suy ra $\angle AUD = \angle ALD = \angle DBL$

Do đó hai tam giác UAD và BXD đồng dạng nên $\dfrac{UD}{AD} = \dfrac{BD}{DX}$.

Mà hai tam giác UDB và ADX đều vuông tại đỉnh D nên chúng đồng dạng. Ta thu được $\angle DUB = \angle DAX = \angle DKB$ (vì $\Delta DKB \sim \Delta KAB$)

Từ đó suy ra D, K, U, B thuộc một đường tròn.



Hình 3.

Mặt khác lại có $\angle ULA = \angle UDA = 90°$ và $\angle UKB = \angle UDB = 90°$ nên $UL \perp AL$ và $UK \perp BK$.

Áp dụng định lý Carnot cho tam giác MAB có UL, UK, UD đồng quy tại U thì suy ra

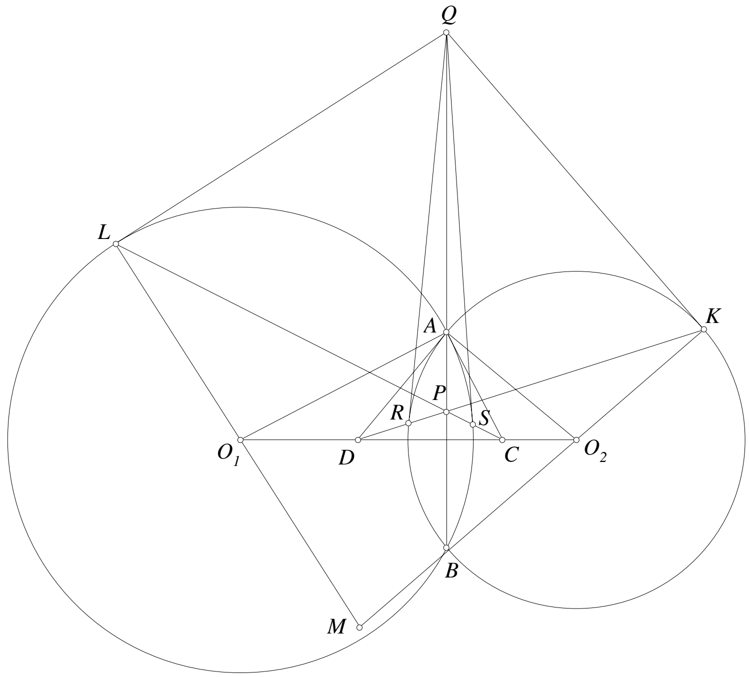
$$\left(KM^2 - KB^2\right) + \left(DB^2 - DA^2\right) + \left(LA^2 - LM^2\right) = 0$$

Hơn nữa $BK^2 = BC^2$; $AL^2 = AC^2$; $BD^2 = CB^2 - CD^2$; $AD^2 = AC^2 - CD^2$. Từ đó thu được $LM^2 = KM^2$ hay $LM = LK$. □

Nhận xét. Sử dụng định lý Carnot cũng là một cách khá lý thú để tiếp cận bài toán này. Chúng ta sẽ còn thấy lợi ích của hướng đi này trong các bài toán dưới đây.

Bài 2 (Mở rộng bài thi IMO)**.** *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. C, D thuộc đường thẳng O_1O_2 sao cho AC vuông góc O_1A và AD vuông góc O_2A. P là điểm thuộc đoạn AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Lời giải 1. Gọi DK giao (O_2) tại R khác K. Ta dễ thấy DA, DB tiếp xúc (O_2) do đó tứ giác $ARBK$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại K và R của (O_2) cắt nhau tại Q thuộc AB và $(ABPQ) = -1$.



Hình 4.

Tương tự gọi CL giao (O_1) tại S khác L thì tiếp tuyến tại S và L của (O_1) cắt nhau tại Q' thuộc AB và $(ABPQ') = -1$ do đó $Q \equiv Q'$. Từ đó QL, QK lần lượt tiếp xúc $(O_1), (O_2)$ mà AB là trục đẳng phương của $(O_1), (O_2)$ do đó $QL = QK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle QML = \triangle QMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là sự mở rộng của bài thi IMO. Khi hai đường tròn (O_1) và (O_2) trực giao ta có lại bài thi IMO. Phương pháp sử dụng hàng điều hòa là một trong những cách ngắn gọn nhất để tiếp cận bài toán này.

Bằng ý tưởng dùng định lý Carnot ở bài toán gốc ta đưa ra lời giải sau

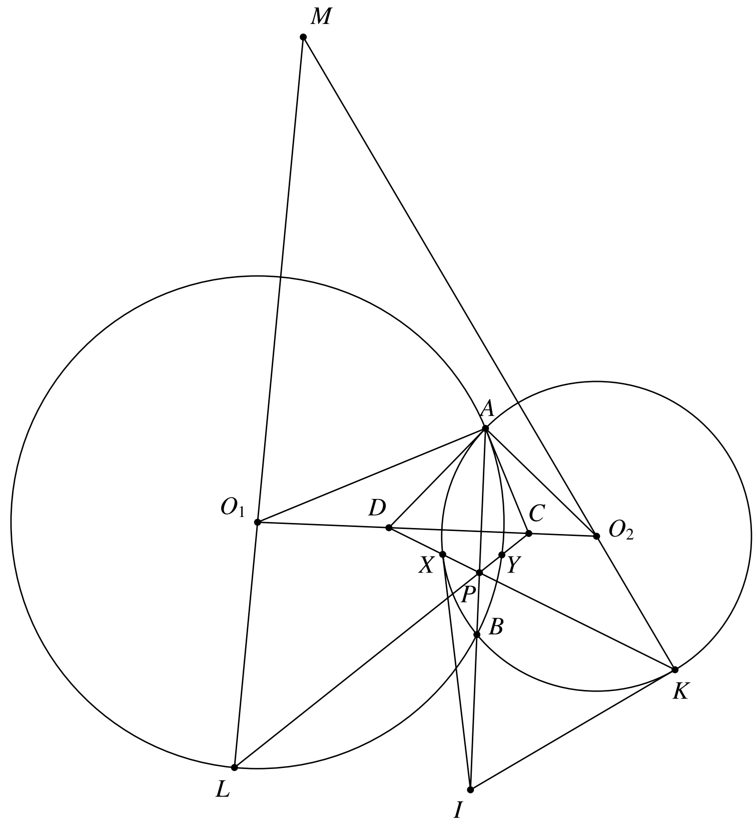
Lời giải 2. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của (O_1) và (O_2). Chú ý rằng $P_{P/(O_1)} = P_{P/(O_2)}$ nên $PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$.

Xét tam giác PDC ta có

$$(O_1C^2 - O_1P^2) + (O_2P^2 - O_2D^2) + (AD^2 - AC^2)$$
$$= (AC^2 + R_1^2 - O_1P^2) + (O_2P^2 - R_2^2 - AD^2) + (AD^2 - AC^2) = 0$$

Từ đó theo định lý Carnot ta có đường thẳng qua O_1 vuông góc với PC, AB và đường thẳng qua O_2 vuông góc với DP đồng quy. (1)

Gọi X, Y lần lượt là giao điểm thứ 2 của DK với (O_2); CL với (O_1). Từ (1) ta thu được AB, trung trực của YL, XK đồng quy.



Hình 5.

Do DA và DB là tiếp tuyến của (O_2) nên $AKBX$ là tứ giác điều hòa, suy ra tiếp tuyến của (O_2) tại X và K và AB đồng quy tại I. Do đó trung trực của XK đi qua I. Vì AB, trung trực YL, XK đồng quy nên I thuộc trung trực YL

Mặt khác, $AYBL$ là tứ giác điều hòa nên IL và IY là tiếp tuyến của (O_1) và do I thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên $IL = IK$ đồng thời $\angle IKO_2 = \angle ILO_1 = 90°$

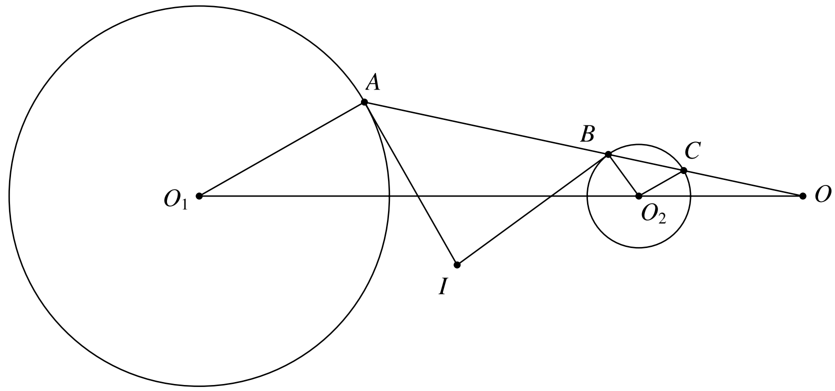
Từ đó suy ra hai tam giác ILM và IKM bằng nhau. Ta thu được $KM = ML$. □

Chúng ta xét tiếp một mở rộng khác như sau

Bài 3. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn với d là trục đẳng phương của chúng. I là một điểm trên d. IA, IB tiếp xúc với $(O_1), (O_2)$ ($A \in (O_1), B \in (O_2)$) và A, B cùng phía với O_1O_2. IA, IB cắt O_1O_2 tại C, D. P là một điểm trên d. PC cắt (O_1) tại M, N thỏa mãn N nằm giữa M và C. PD cắt (O_2) tại K, L thỏa mãn L nằm giữa K và D. MO_1 cắt KO_2 tại U. Chứng minh rằng $UM = UK$.*

Chúng ta sử dụng hai bổ đề

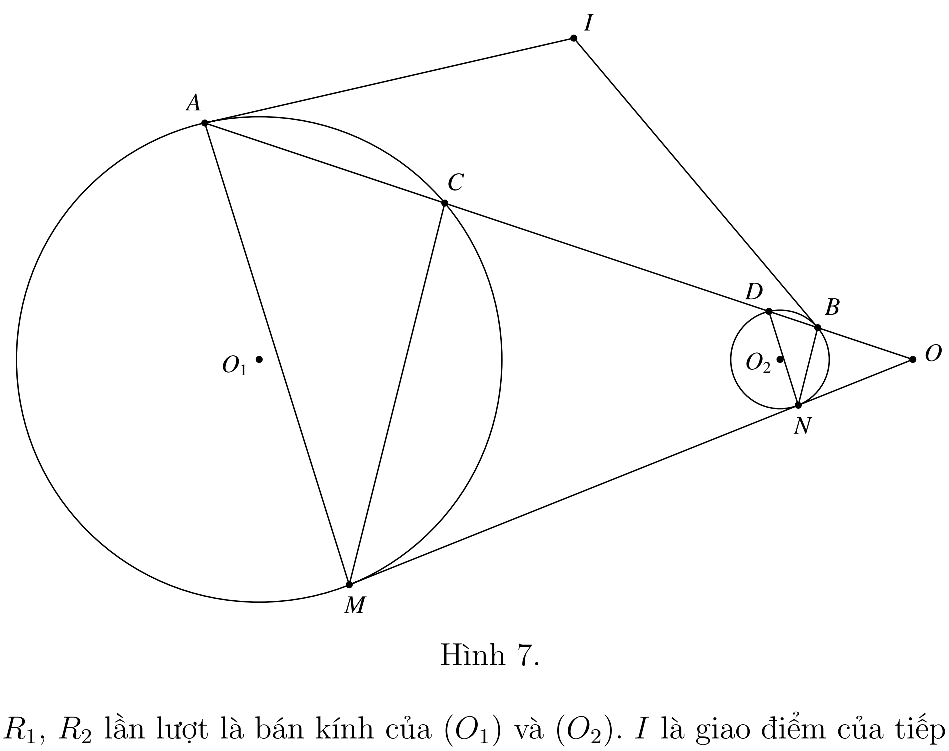
Bổ đề 3.1. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn với d là trục đẳng phương của chúng. I là một điểm trên d. IA, IB lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) sao cho A, B cùng phía với O_1O_2. Chứng minh rằng A, B, O thẳng hàng. Với O là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2).*



Hình 6.

Chứng minh. Gọi C là giao điểm thứ 2 của (O_2) với AB. Khi đó ta có $\angle IAB = \angle IBA$. Và $\angle IBA + \angle O_2BC = 90°$. Do đó $\angle IAB + \angle O_2BC = 90°$ hay $\angle IAB + \angle O_2CA = 90°$. Từ đó thu được $\angle O_1AC + \angle O_2CA = 180°$. Do đó $O_2C \| O_1A$. Như vậy C, A, O thẳng hàng. Suy ra A, B, O thẳng hàng. □

Bổ đề 3.2. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn và d là trục đẳng phương của hai đường tròn đó. O là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn. MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2). Ta đã biết MN đi qua O và phép nghịch đảo tâm (O) phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ biến đường tròn (O_1) thành đường tròn (O_2). Chứng minh rằng nếu A thuộc (O_1) và B là ảnh của A qua phép nghịch đảo tâm O phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ thì tiếp tuyến tại A của (O_1), tiếp tuyến tại B của (O_2), d đồng quy.*



Hình 7.

Chứng minh. R_1, R_2 lần lượt là bán kính của (O_1) và (O_2). I là giao điểm của tiếp tuyến tại A của (O_1) và tiếp tuyến tại B của (O_2)

Gọi C là giao điểm thứ hai của (O_1) với OA. D là giao điểm thứ 2 của (O_2) với OA. Do B là ảnh của A qua phép nghịch đảo tâm O phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ nên B, N, M, A đồng viên. Suy ra $(AM, AB) \equiv (NB, NO) \equiv (DN, DO)(\text{mod}\pi)$

Do đó $ND \| MA$. Đặt $k = \dfrac{R_1}{R_2}$ Thì $H(O,k)\ A \to D$. Tương tự $H(O,k)\ C \to B$. Mà $H(O,k)\ M \to N$ nên $(MA, MC) \equiv (ND, NB)(\text{mod}\pi)$. Do đó $(AI, AC) \equiv (BD, BI)(\text{mod}\pi)$. Hay tam giác IAB cân tại I. Do đó $IA = IB$. Suy ra I thuộc d. □

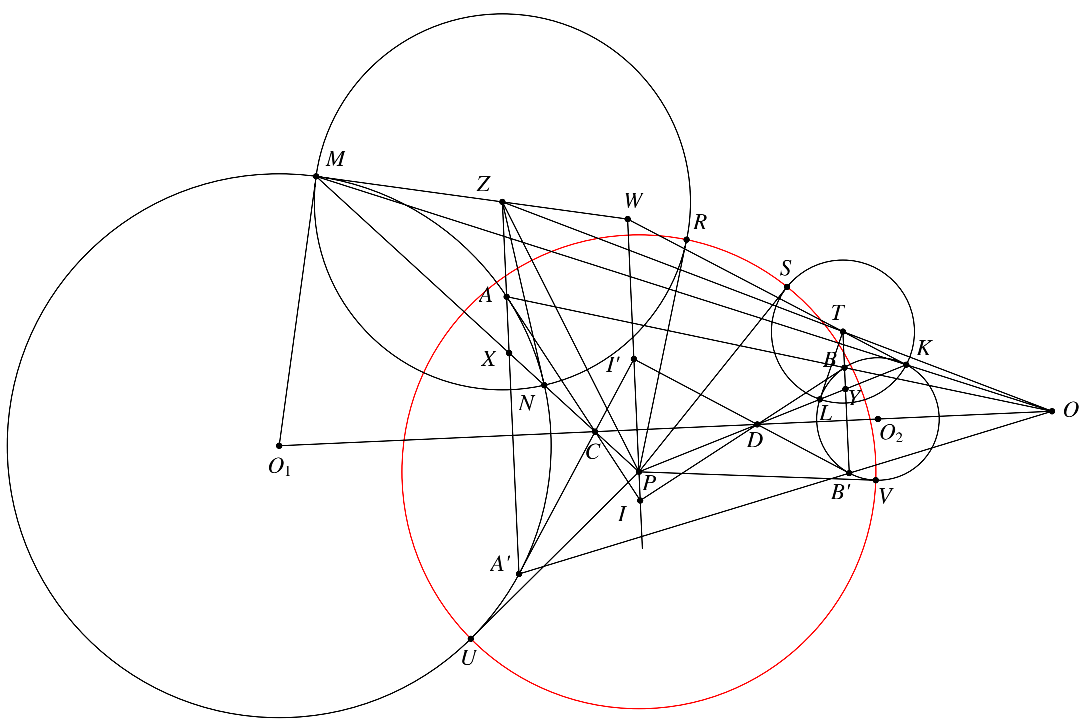
Giải bài toán. Gọi I' là điểm đối xứng của I qua O_1O_2. A', B' là tiếp điểm của hai tiếp tuyến qua I' với (O_1) và (O_2). X, Y lần lượt là giao điểm của PC với AA', PD với BB'.

Do tính đối xứng nên có I', C, A' thẳng hàng, I', D, B' thẳng hàng. Đồng thời $AA' \| BB' \| d$. Do đó $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{A'X}} = \dfrac{\overline{IP}}{\overline{I'P}} = \dfrac{\overline{BY}}{\overline{B'Y}}$. Như vậy AB, XY, $A'B'$ đồng quy.

Ta có $ANA'M$ là tứ giác điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại M, N của (O_1) và AA' đồng quy tại Z. Đồng thời $(ZXAA') = -1$.

Tương tự tiếp tuyến tại K, L của (O_2) và BB' đồng quy tại T và $(TYBB') = -1$.

Từ đó do AB, XY, $A'B'$ đồng quy nên XY, ZT, AB, $A'B'$ đồng quy tại (O). Mặt khác theo bổ đề 1 thì A, B, O thẳng hàng và A', B', O thẳng hàng. Do đó XY và ZT đi qua O.



Hình 8.

Ta có $\dfrac{ZM^2}{TK^2} = \dfrac{\overline{ZA}.\overline{ZA'}}{\overline{TB}.\overline{TB'}} = \dfrac{OZ^2}{OT^2} \Rightarrow \dfrac{ZM}{TK} = \dfrac{OZ}{OT}$

Do đó O là tâm vị tự ngoài của (Z, ZM) và (T, TK) nên O cũng là tâm nghịch đảo của chúng.

Gọi R, S, U, V là tiếp điểm các tiếp tuyến qua P của (Z, ZM); (T, TK); (O_1); (O_2) sao cho R, S, O thẳng hàng. U, V, O thẳng hàng. Vì P thuộc trục đẳng phương của (Z, ZM) và (T, TK) nên theo bổ đề 2 thì có thể dựng được các điểm R, S, U, V thỏa mãn điều đó. Từ đó vì P là tâm đẳng phương của (O_1), (O_2), (Z, ZM), (T, TK) nên $PR = PS = PU = PV$ do đó R, S, U, V đồng viên hay $\overline{OR}.\overline{OS} = \overline{OU}.\overline{OV} = r$. Như vậy theo bổ đề 1 và bổ đề 2 và vì O là tâm nghịch đảo của (O_1) và (O_2); (Z, ZM) và (T, TK) nên phép nghịch đảo tâm O phương tích r biến (O_1) thành (O_2) và biến (Z, ZM) thành (T, TK). Do đó biến M thành K.

Từ đó theo bổ đề 2 thì tiếp tuyến tại M của (O_1) và K của (O_2) đồng quy tại W thuộc d.

Khi đó dễ có hai tam giác UMW và tam giác UKW bằng nhau. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải trên cho ta một vài kết quả khá đẹp như phép nghịch đảo tâm O biến (O_1) thành (O_2) thì cũng biến (Z, ZM) thành (T, TK) đồng thời ta thu được một loạt các kết quả đồng quy tại O rất đẹp và lời giải trên chính là ý tưởng để giải quyết bài toán tổng quát hơn.

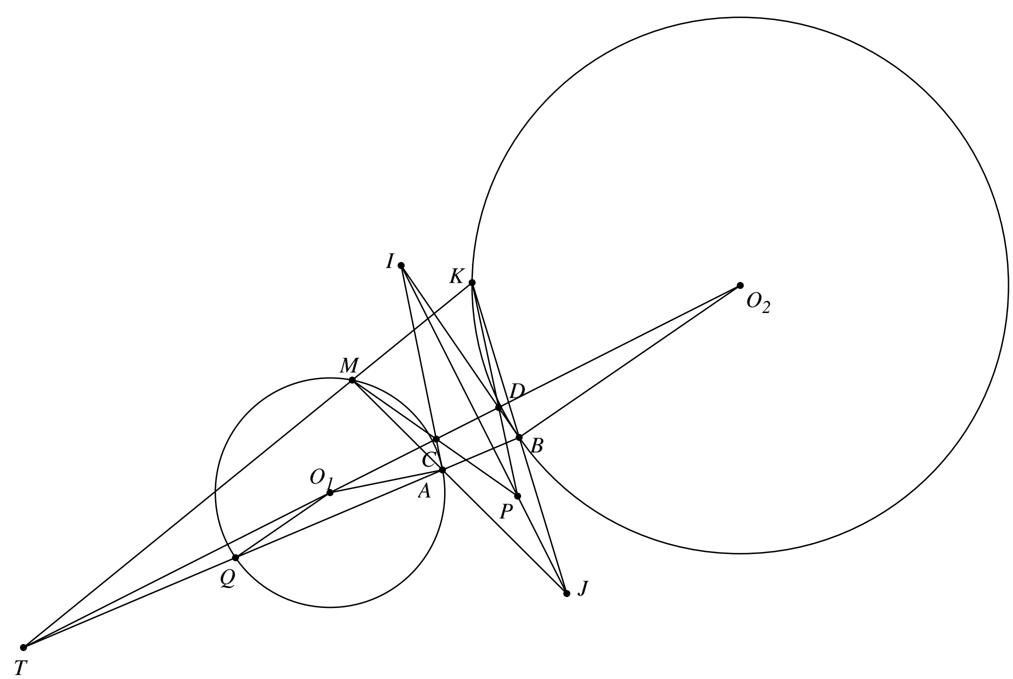
Chúng tôi xin giới thiệu lời giải khác của tác giả Nguyễn Văn Linh

Bổ đề 3.3. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2). L là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn. Gọi A, B là hai điểm trên $(O_1), C, D$ là hai điểm trên (O_2) sao cho các bộ ba L, A, C và L, B, D thẳng hàng (các cặp O_1A, O_2C và O_1B, O_2D không song song). Khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.*

Chứng minh. Gọi E, F là giao điểm thứ hai của LC với $(O_2), LD$ với (O_2). Dễ dàng chứng minh $O_2E \parallel O_1A, O_2F \parallel O_1B$. Suy ra $EF \parallel AB$. Áp dụng định lý Reim suy ra điều phải chứng minh. □

Giải bài toán. Gọi T là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Ta thấy rằng điều kiện để $UM = UK$ là M, K, T thẳng hang.

Gọi K' là giao điểm của TM với (O_2) sao cho O_1M và O_2K' không song song. AB giao (O_1) tại điểm thứ hai Q.



Hình 9.

Ta có $\angle O_1QA = \angle O_1AQ = \angle IAQ - 90^\circ = 180^\circ - \angle ABO_2$ (do tam giác IAB cân).

Suy ra $O_1Q \parallel O_2B$.

Từ đó T, A, B thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề 3.1 suy ra tứ giác $MK'BA$ nội tiếp. Gọi J là giao của MA và $K'B$ thì $JA.JM = JB.JK'$ nên $J \in d$.

Do MK', CD, AB đồng quy tại T nên áp dụng định lý Desargues ta thu được giao điểm của MC và DK' nằm trên IJ tức là nằm trên d.

Suy ra $K' \equiv K$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải trên cho ta ý tưởng để giải quyết bài toán tổng quát hơn như sau

Bài 4 (Tổng quát bài 3)**.** *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và d là trục đẳng phương của chúng. P, Q, R là ba điểm trên d. PA, PB là tiếp tuyến của (O_1) và (O_2) (A, B nằm cùng phía với O_1O_2). QC, QD lần lượt là tiếp tuyến của (O_1), (O_2) (C, D nằm cùng phía với O_1O_2). $E = QC \cap PA$; $F = PB \cap QD$. RE cắt (O_1) tại G, H. RF cắt (O_2) tại I, K sao cho G nằm giữa R và H, I nằm giữa R và K. U là giao điểm của HO_1 và KO_2. Chứng minh rằng $UK = UH$.*

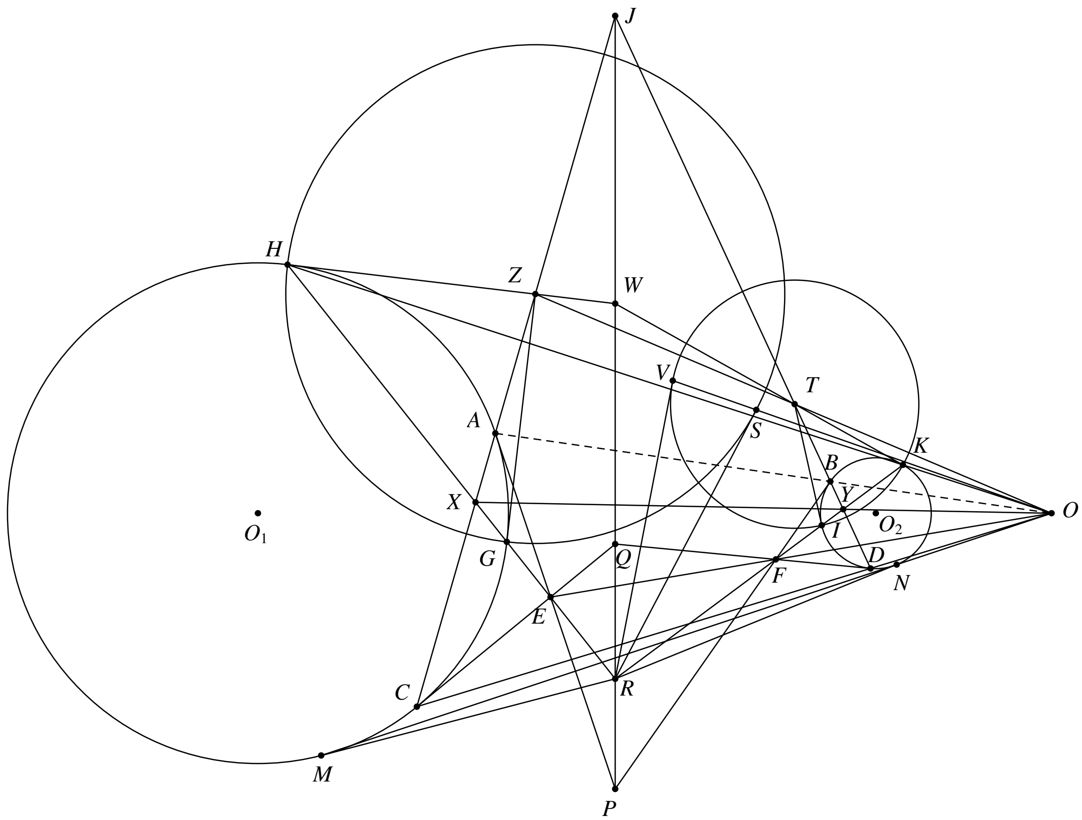
Ta vẫn sử dụng hai bổ đề của bài 3

Chứng minh. Gọi O là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Ta có O cũng chính là tâm nghịch đảo của hai đường tròn này.

Xét phép nghịch đảo tâm O biến (O_1) thành (O_2). Từ bổ đề 1 và 2 ta có được A, B, O thẳng hàng và C, D, O thẳng hàng. Từ đó theo bổ đề 2 ta có được B là ảnh của A và D là ảnh của C. Do đó A, B, C, D đồng viên. Như vậy AC và BD cắt nhau tại trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

Ta có $(JAXC) = (JPRQ) = (JBYD)$. Do đó AB, CD, XY đồng quy. Mà AB, CD đồng quy tại O nên XY đi qua O.

Thấy rằng các tứ giác $GAHC$ và $IBKD$ đều là tứ giác điều hòa. Do đó tiếp tuyến tại H, G của (O_1) và AC đồng quy tại một điểm Z. Tiếp tuyến tại I, K của (O_2) và BD đồng quy tại một điểm T. Đồng thời $(ZXAC) = (TYBD) = -1$. Mặt khác AB, XY, CD đi qua (O) nên ZT đi qua O.



Hình 10.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác JZT có A, O, B thẳng hàng ta có $\dfrac{AZ}{AJ}.\dfrac{BJ}{BT}.\dfrac{OT}{OZ}=1$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác JZT có O, C, D thẳng hàng ta có $\dfrac{CZ}{CJ}.\dfrac{DJ}{DT}.\dfrac{OT}{OZ}=1$.

Từ đó nhân 2 đẳng thức lại và chú ý $JA.JC=JB.JD$; $ZA.ZC=ZH^2$; $TB.TD=TK^2$ suy ra $\dfrac{ZH}{TK}=\dfrac{OZ}{OT}$

Như vậy O là tâm vị tự ngoài của (Z,ZH) và (T,TK) do đó O cũng là tâm nghịch đảo của hai đường tròn này.

Thấy rằng R chính là tâm đẳng phương của (O_1), (O_2), (Z,ZH), (T,TK). Gọi RM, RN, RS, RV lần lượt là tiếp tuyến của (O_1), (O_2), (Z,ZH), (T,TK) sao cho O, M, N thẳng hàng và O, S, V thẳng hàng và ta có $RS=RV=RM=RN$ nên S, V, M, N đồng viên. Do đó $\overline{OS}.\overline{OV}=\overline{OM}.\overline{ON}=r$.

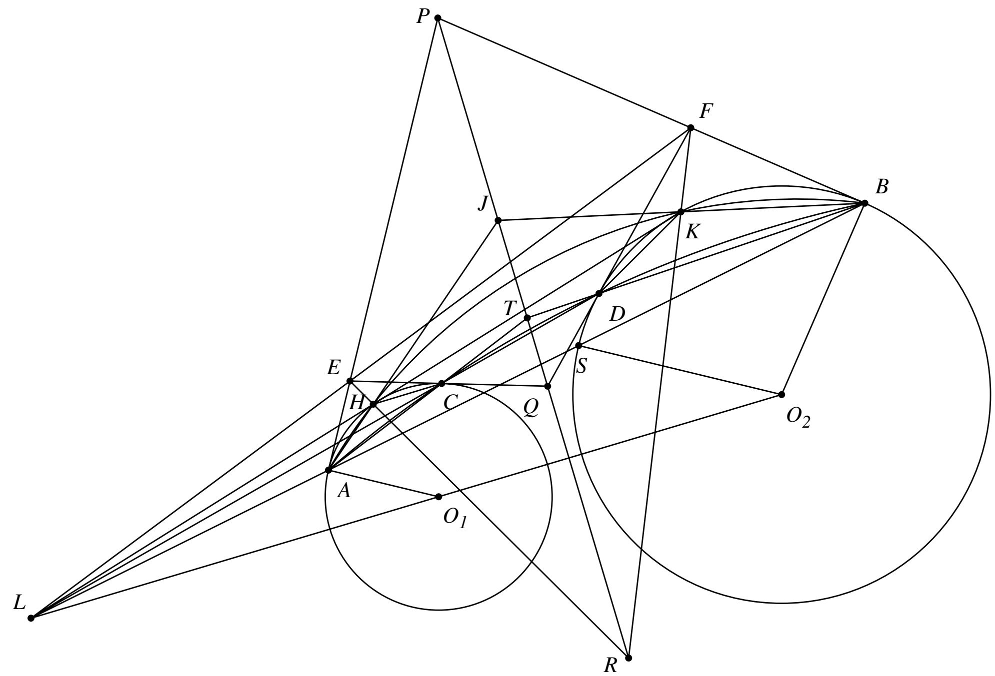
Hơn nữa O là tâm nghịch đảo của (O_1) và (O_2); (Z,ZH) và (T,TK) nên phép nghịch đảo cực O phương tích r biến (O_1) thành (O_2), (Z,HZ) thành (T,TK) do đó biến H thành K.

Từ đó theo bổ đề 2 suy ra tiếp tuyến tại H của (O_1) và K của (O_2) và d đồng quy tại W. Từ đó nhờ tính bằng nhau của UHW và UKW ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trên bao gồm các kết quả rất đẹp mắt và với ý tưởng dùng phép nghịch đảo như trong cách giải trên ta còn thu được các kết quả sau đây

- HA, KB đồng quy tại một điểm trên d.
- Tiếp tuyến tại G của (O_1) và I của (O_2) đồng quy tại một điểm trên d.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải khác của tác giả Nguyễn Văn Linh



Hình 11.

Chứng minh. Gọi L là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Chú ý rằng điều kiện để $UH = UK$ (tức là đường tròn (U, UH) tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại H, K) là L, H, K thẳng hàng.

Gọi K' là giao điểm của LH với (O_2) sao cho O_1H và O_2K' không song song. Ta chứng minh $K' \equiv K$.

Gọi S là giao điểm thứ hai của AB và (O_2). Do PA, PB là hai tiếp tuyến kẻ từ điểm P nằm trên trục đẳng phương d tới hai đường tròn (O_1) và (O_2) nên $PA = PB$.

Suy ra $\angle O_1AB = 90^\circ - \angle PAB = 90^\circ - \angle PBA = \angle O_2BA = \angle O_2SB$.

Từ đó $O_1A \parallel O_2S$ hay L, A, B thẳng hàng. Tương tự, L, C, D thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề 1 ta có tứ giác $ACDB$ nội tiếp.Gọi T là giao của AC và BD thì $T \in d$.

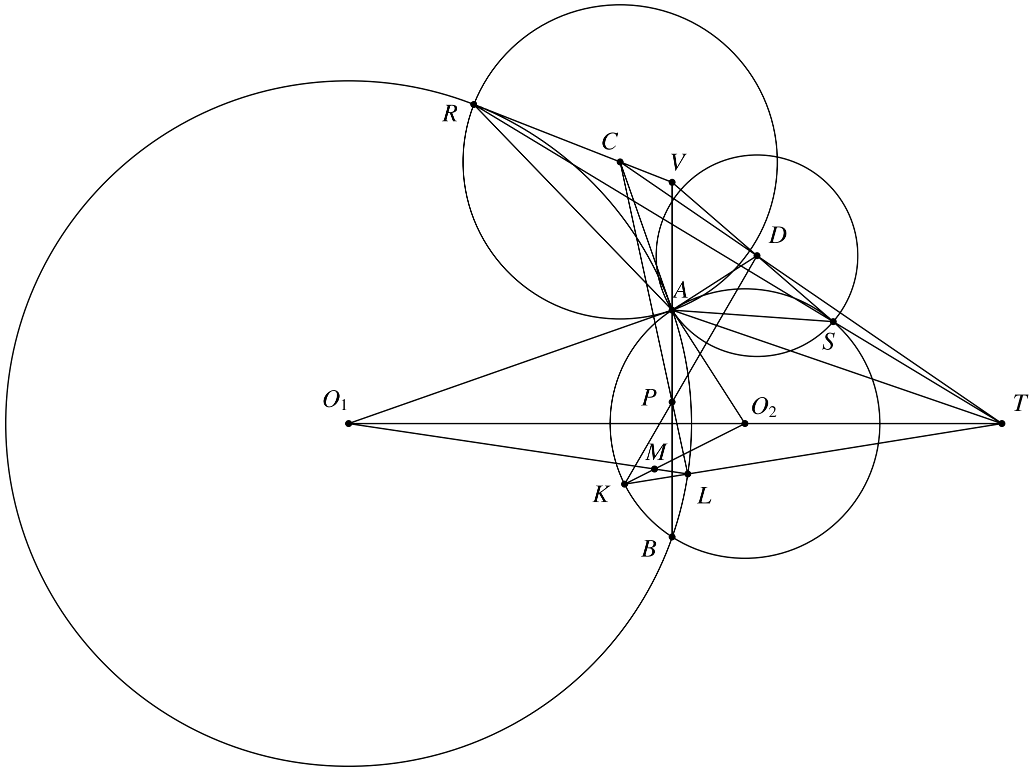
Ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(AE, BF), (AC, BD), (EC, FD)$ lần lượt là P, T, Q thẳng hàng nên theo định lý Desargues ta có EF, CD, AB đồng quy tại L.

Mặt khác, lại áp dụng bổ đề trên ta có $AHK'B$ nội tiếp. Gọi J là giao của AH và $K'B$ thì $J \in d$.

Gọi R' là giao của EH và FK'. Áp dụng định lý Desargues cho các đường thẳng AB, HK', EF ta có P, J, R' thẳng hàng hay $R' \in d$. Tức là $R' \equiv R$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài 4 là một kết quả khá mạnh, và nhờ đó ta có thể giải một số bài toán khác như bài toán dưới đây

Bài 5. *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến chung ngoài của (O_1), (O_2) cắt nhau tại T. d là đường thẳng bất kỳ qua T. Tiếp tuyến tại A của (O_1), (O_2) lần lượt cắt d tại C, D. P là điểm thuộc AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*



Hình 12.

Chứng minh. Do T là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nên AT là phân giác ngoài $\angle O_1AO_2$.

Hơn nữa $AC \perp AO_1$; $AD \perp AO_2$ do đó bằng biến đổi góc dễ dàng có được AT là phân giác ngoài của góc $\angle CAD$. Như vậy $\dfrac{TC}{TD} = \dfrac{AC}{AD}$.

Do đó T là tâm vị tự ngoài của (C, CA) và (D, DA). Như vậy T cũng là tâm nghịch đảo của (C, CA) và (D, DA).

Gọi R, S lần lượt là điểm đối xứng của A qua O_1C và O_2D. Như vậy $R \in (C, CA)$ và $S \in (D, DA)$.

Thấy rằng phép nghịch đảo tâm T phương tích TA^2 biến (O_1) thành (O_2) và (C, CA) thành (D, DA). Do đó biến R thành S.

Như vậy tiếp tuyến tại R của (O_1) và tiếp tuyến tại S của (O_2) cắt nhau tại V thuộc AB.

Áp dụng kết quả bài 4 với V, A, P thuộc trục đẳng phương AB của (O_1) và (O_2) ta có điều phải chứng minh. □

Ngoài ra chúng tôi xin đề xuất một số mở rộng tiếp nữa cho các bài toán mở rộng đề IMO mà ý tưởng chính cũng đã nằm trong các bài toán 3,4,5. Các bạn hãy xem như các bài luyện tập thêm

Bài 6. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại T. d là đường thẳng bất kỳ qua T. Tiếp tuyến tại A của $(O_1), (O_2)$ lần lượt cắt d tại C, D. P là điểm thuộc AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Bài 7. *Cho (O_1) và (O_2) ở ngoài nhau. d là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). I là điểm trên d. Kẻ IA, IB tiếp xúc với $(O_1), (O_2)$ sao cho A, B cùng phía O_1O_2. T giao của hai tiếp tiếp tuyến chung* *ngoài của* $(O_1), (O_2)$. *Đường thẳng* l *qua* T *cắt* IA, IB *tại* C, D. P *là điểm thuộc* d. PC *cắt* (O_1) *tại* E, F *sao cho* F *nằm giữa* P *và* E. PD *cắt* (O_2) *tại* G, H *sao cho* G *nằm giữa* P *và* H. O_1E *giao* O_2H *tại* K. *Chứng minh rằng* $KE = KH$.

Chúng tôi xin chân thành cám ơn bạn **Nguyễn Văn Linh** sinh viên đại học ngoại thương đã có những nhận xét và góp ý quý báu cho chúng tôi trong bài viết này.

Trần Quang Hùng GV trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN-ĐHQGHN.

Email: analgeomatica@gmail.com

Ong Thế Phương học sinh lớp 12T trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa Đồng Nai.

Email: mathkidonline@gmail.com

Tài liệu

[1] Topic Problem 5 IMO 2012 appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=834&t=488511

[2] Topic Equivalent to IMO 2012 Q5 appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=3680

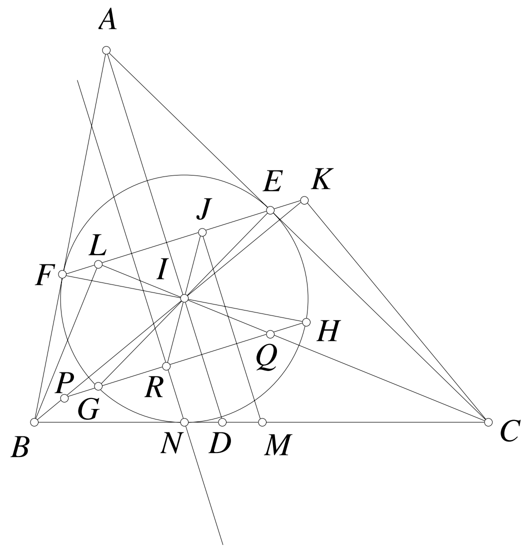
[3] Topic Equal segment appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=488712

Mở rộng bài toán hình học VMO 2013

Trần Quang Hùng

Đề thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam năm 2013 có một bài toán hay, đề bài có thể viết gọn lại như sau

Bài 1. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Gọi IB, IC lần lượt cắt EF tại K, L. Chú ý tam giác AEF cân tại A nên $\angle KEC = \angle AEF = \dfrac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - (90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}) = 180^\circ - \angle BIC = \angle KIC$. Từ đó tứ giác $KEIC$ nội tiếp suy ra $\angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$. Tương tự $\angle ILB - 90^\circ$. Từ đó nếu gọi M là trung điểm BC, J là trung điểm KL dễ có tam tam giác KLM cân nên $MJ \perp EF \quad (1)$.

Do G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng đường thẳng EF qua I. GH, EF lần lượt cắt IB tại P, K suy ra I là trung điểm PK, tương tự I là trung điểm QL. Vậy hai đoạn KL và PQ đối xứng nhau qua I. Từ đó nếu gọi R là trung điểm PQ thì trung điểm J của KL và R đối xứng nhau qua I hay I là trung điểm RJ.

Gọi trung trực PQ cắt BC tại N, ta thấy RN vuông góc PQ, PQ song song $EF \quad (2)$.

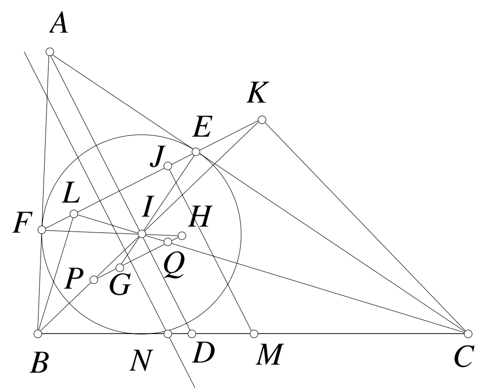
Từ (1) và (2) suy ra RN song song JM. Gọi IA cắt BC tại D, dễ có $ID \equiv IA$ vuông góc EF nên ID cũng song song với RN, JM. Từ đó trong hình thang $RJMN$ có I là trung điểm RJ nên ID là đường trung bình, vậy D là trung điểm MN.

Theo tính chất đường phân giác $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi nên D cố định. M là trung điểm BC cố định nên N đối xứng M qua D cố định. Vậy trung trực PQ đi qua N cố định. $\square$

Nhận xét. Phần đầu ta chứng minh $\angle IKC = \angle ILB = 90°$ là các bài toán rất cơ bản liên quan tới đường tròn nội tiếp và các tiếp điểm. Trong đề toán còn cho giả thiết $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi thực chất giả thiết này chỉ nhằm duy nhất mục đích suy ra chân đường phân giác góc A là cố định.

Với ý tưởng trong chứng minh ta thấy đường tròn đường kính BC và phép đối xứng tâm I có vai trò qua trọng. Dựa vào ý tưởng đó ta có thể dần dần mở rộng bài toán này như sau

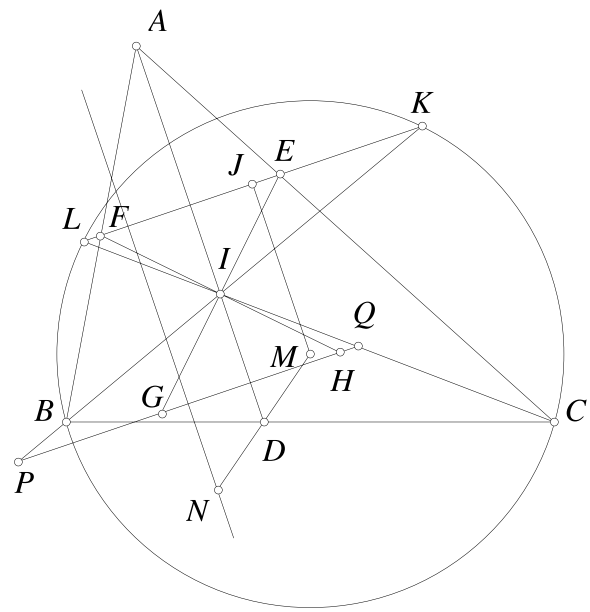
Bài 2. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là điểm chia IE, IF theo một tỷ số m cố định. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải hoàn toàn giống lời giải bài toán 1 trong trường hợp G, H đối xứng E, F qua I. Ta chỉ chú ý rằng nếu G, H chia IE, IF tỷ số m có nghĩa là đường thẳng GH là ảnh của đường thẳng EF qua phép vị tự tâm I tỷ số m. Qua đó một cách hoàn toàn tương tự ta chứng minh được trung trực PQ đi qua N cố định là ảnh vị tự của M qua tâm D tỷ số m. □

Nhận xét. Trong bài toán trên ta vẫn thấy vai trò qua trọng của đường tròn đường kính BC. Ta có thể tìm cách thay thế yếu tố đó, ta thay thế đường tròn đường kính BC bằng một đường tròn bất kỳ đi qua B, C. Ta thu được bài toán sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn (M) bất kỳ qua B, C. IB, IC lần lượt cắt (M) tại K, L khác B, C. KL cắt CA, AB lần lượt tại E, F. G, H là đối xứng của E, F qua I. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử đường tròn (M) và B, C cố định. A thay đổi sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải giống lời giải bài toán 1, xong ở đây chỉ khác EF là giao của KL. Ta cố gắng chứng minh EF vuông góc với AI thì bài toán được giải quyết theo ý tưởng bài toán 1, thật vậy ta thấy

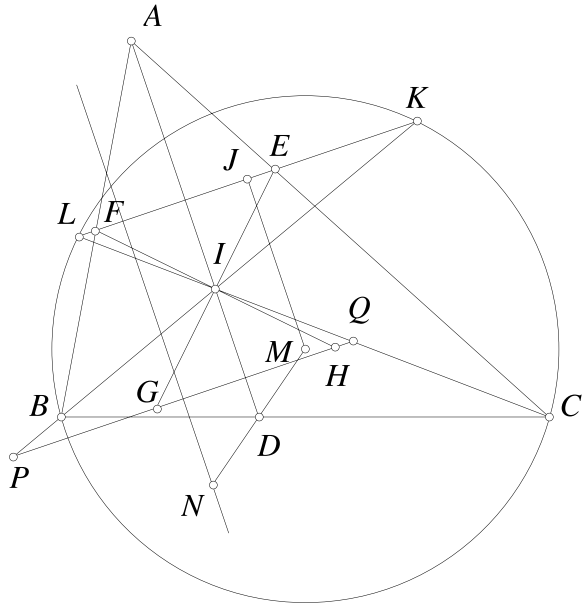
$$\angle EKI = \angle LKB = \angle LCB = \angle ICE.$$

Từ đó tứ giác $EKCI$ nội tiếp, ta suy ra $\angle AEF = \angle KEC = \angle KIC$. Tương tự $\angle AFE = \angle LIB$ mà $\angle KIC = \angle LIB$ do đó tam giác AEF cân có AI là phân giác $\angle BAC$ nên AI vuông góc EF.

Vậy đến đây lời giải hoàn toàn tương tự bài lời giải bài toán 1 bằng phép đối xứng tâm I. Ta chú ý trung trực PQ sẽ đi qua điểm N cố định đối xứng M qua D. □

Nhận xét. Bài toán tuy tổng quát cho bài toán gốc xong lời giải đạt được dễ dàng hơn do đã xuất hiện tâm M trong đề bài. Thực chất ta có thể phát biểu lại bài toán trở thành khó hơn như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $\angle IEC = \angle IFB = \alpha$ không đổi. G, H là đối xứng của E, F qua I. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử A thay đổi và B, C cố định sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



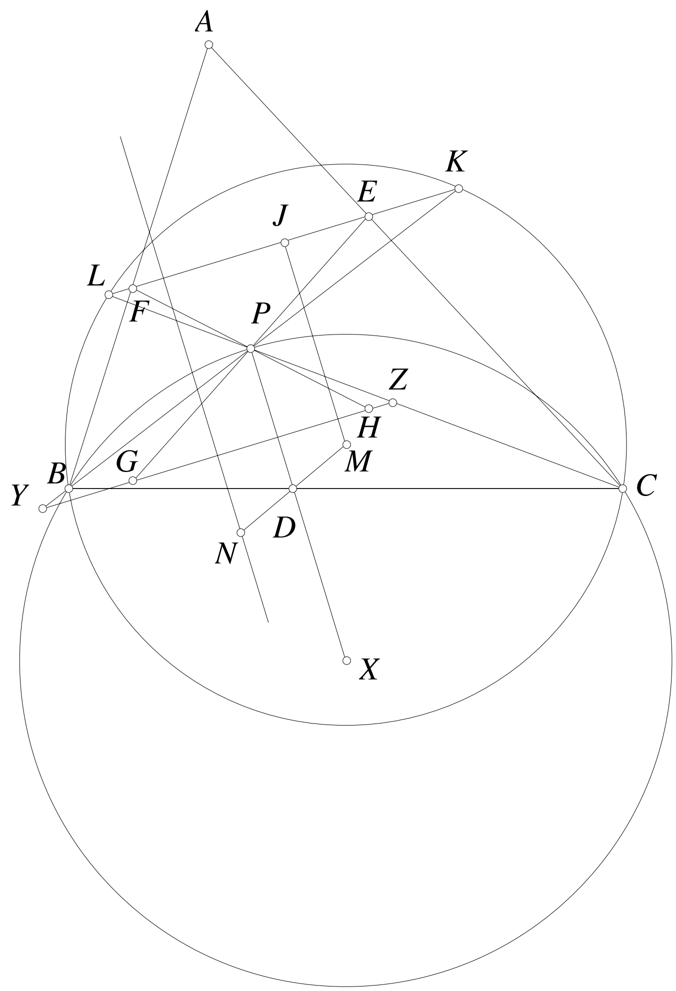
Chứng minh. Do $\angle IEC = \angle IFE = \alpha$ không đổi ta dễ chứng minh tam giác AEF cân và từ đó, nếu gọi IB, IC cắt EF tại K, L ta dễ chỉ ra B, C, K, L nằm trên đường tròn (M) cố định. Chân phân giác góc A là D cố định khi đó trung trực PQ sẽ đi qua điểm đối xứng của M qua D cố định. □

Với ý tưởng mở rộng qua phép vị tự hoàn toàn tương tự bài toán 2. Ta đề xuất bài toán sau lời giải kết hợp bài toán 2 và bài toán 3,4

Bài 5. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $\angle IEC = \angle IFE = \alpha$ không đổi. G, H là các điểm lần lượt chia IE, IF tỷ số m cố định. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử A thay đổi và B, C cố định sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*

Nhận xét. Chúng ta bắt đầu có thể nhận thấy vai trò của tâm I đường tròn nội tiếp có thể thay thế được. Tuy vậy khi đó yếu tố chân đường phân giác cố định sẽ không còn được giữ nguyên

Bài 6. *Cho tam giác ABC, P là một điểm bất kỳ. Đường tròn (M) bất kỳ đi qua B, C. BP, CP lần lượt cắt (M) tại K, L. KL cắt CA, AB tại E, F. G, H lần lượt đối xứng E, F qua P. GH cắt PB, PC tại Y, Z. Giả sử B, C và (M) cố định A, P thay đổi sao cho đường nối P và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC luôn đi qua một điểm cố định trên BC. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải hoàn toàn tương tự các bài toán trên. Ta chỉ chú ý nếu gọi X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC ta dễ chứng minh được XP vuông góc với EF. Chú ý rằng với giả thiết thì XP đi qua D cố định thuộc BC. Từ đó một cách hoàn toàn tương tự ta chứng minh được trung trực YZ đi qua điểm N đối xứng của M qua D cố định. □

Nhận xét. Tuy rằng bài toán có vài trò tổng quát hơn các bài trước xong ta dễ dàng thu được lời giải hơn nhờ các yếu tố cố định đã cho sẵn. Chúng ta hoàn toàn có thể tổng quát hơn một chút bằng cách thay các điểm chia PE, PF theo tỷ số m không đổi. Thực ra với bài toán tổng quát và P bất kỳ ta có thể khai thác được rất nhiều tính chất mới từ bài toán này, xin dành cho bạn đọc tiếp tục tìm tòi. Cuối cùng tôi xin nêu ra một ví dụ ứng dụng bài toán tổng quát khi P là trực tâm, lời giải nó xin dành cho bạn đọc.

Bài 7. *Cho đoạn BC và D thuộc BC cố định. Đường tròn (O) thay đổi đi qua B, C. M đối xứng với O qua BC. Đường thẳng qua O song song với MD cắt (O) tại A sao cho A và M khác phía với BC. (K) là một đường tròn cố định đi qua B, C. MD cắt đường thẳng qua A vuông góc BC tại H. HB, HC cắt (K) tại E, F khác B, C. Y, Z là đối xứng của E, F qua H. Chứng minh rằng trung trực của YZ luôn đi qua một điểm cố định khi (O) di chuyển.*

Tài liệu

[1] VMO problem 3 at the AoPS

[2] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer. Geometry revisited, volume 19. The Mathematical Association of America, 1967.

[3] V. V. Prasolov. Problems in Plane Geometry. M.:MCCME, 2006.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN-ĐHKHTN-ĐHQGHN
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Đề hình chọn đội tuyển Việt Nam và các mở rộng

Trần Quang Hùng

Bài 1 (VNTST-Ngày 1)**.** *Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh không song song nội tiếp (O,R). Gọi E là giao điểm hai đường chéo và đường phân giác góc AEB cắt các đường thẳng AB,BC,CD,DA lần lượt tại M,N,P,Q.*

a) Chứng minh rằng các đường tròn $(AQM),(BMN),(CNP),(DPQ)$ cùng đi qua một điểm. Gọi điểm đó là K.

b) Đặt $\min\{AC,BD\}=m$. Chứng minh rằng $OK\le \dfrac{2R^2}{\sqrt{4R^2-m^2}}$.

Bài 2 (Mở rộng bài 1)**.** *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. Một đường thẳng d bất kỳ đi qua E cắt AB,BC,CD,DA lần lượt tại M,N,P,Q. Gọi các giao điểm của các đường tròn $(AQM)\cap(BMN)=\{M,X\}$, $(BMN)\cap(CNP)=\{N,Y\}$, $(CNP)\cap(DPQ)=\{P,Z\}$, $(DPQ)\cap(AQM)=\{Q,T\}$.*

a) Chứng minh rằng X,Y,Z,T cùng thuộc một đường tròn (K).

b) Chứng minh rằng (K) luôn đi qua một điểm cố định khi d di quay quanh E.

Bài 3 (VNTST-Ngày 2)**.** *Cho tam giác ABC nhọn không cân có góc $\angle BAC=45^\circ$. Các đường cao AD,BE,CF đồng quy tại trực tâm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P. I là trung điểm của BC, IF cắt PH tại Q.*

a) Chứng minh rằng góc $\angle IQH=\angle AIE$.

b) Gọi K là trực tâm của tam giác AEF, (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD. CK cắt đường tròn (J) tại G, IG cắt (J) tại M, JC cắt đường tròn đường kính BC tại N. Chứng minh rằng G,N,M,C cùng thuộc một đường tròn.

Thực sự góc 45° là không cần thiết trong bài toán.

Bài 4 (Mở rộng bài 3)**.** *Cho tam giác ABC đường cao AD,BE,CF đồng quy tại H, EF giao BC tại G. Gọi (K) là đường tròn đường kính BC. Trung trực BC cắt (K) tại điểm L sao cho A,L cùng phía BC. Gọi (N) là đường tròn ngoại tiếp tam giác GDL. CL cắt (N) tại M khác L. MK cắt (N) tại P khác M. CN cắt (K) tại Q khác C. Chứng minh rằng M,Q,P,C cùng thuộc một đường tròn.*

Từ bài mở rộng trên nếu $\angle A=45^\circ$ thì ta có bài toán TST. Nếu thay thế đường tròn đường kính BC trong bài toán trên ta có thể mở rộng hơn như sau

Bài 5. *Cho tứ giác lồi $BFEC$ nội tiếp đường tròn (K). BE giao CF tại H. D là hình chiếu của H lên BC. Trung trực BC cắt (K) tại L sao cho H,L cùng phía BC. (N) là đường tròn qua D,L và tiếp xúc KL tại L. CL cắt (N) tại M khác L. CN cắt (K) tại Q khác C. Gọi CX là đường kính của (K). XQ cắt BC tại Y. Gọi Z là trung điểm của CY. MZ cắt (N) tại P khác M. Chứng minh rằng M,Q,P,C cùng thuộc một đường tròn.*

Nếu K là trung điểm BC thì Y trùng B, Z trùng K ta thu được bài toán trên.

Thực ra ta có thể thấy vai trò của hàng điểm điều hòa (BC,DG) và đường tròn (K) không nhất thiết phải gắn liền với nhau hơn nữa yếu tố đường trung trực cắt nửa đường tròn tại điểm L cũng không cần thiết ta có thể mở rộng bài toán hơn nữa như sau

Bài 6. *Cho tam giác* ABC *với* D, G *thuộc* BC *sao cho* $(BC, DG) = -1$. (K) *là một đường tròn bất kỳ đi qua* B, C. L *là một điểm bất kỳ thuộc* (K). CL *cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác* LGD *tại điểm* M *khác* L. *Gọi* I, J *lần lượt là trung điểm của* BC, GD. MI *cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác* LGD *tại* P *khác* M. MJ *cắt đường thẳng qua* L *song song* BC *tại* N. CN *cắt* (K) *tại* Q *khác* C. *Chứng minh rằng* M, Q, P, C *cùng thuộc một đường tròn.*

Xung quanh hai bài toán hình thi IMO năm 2013

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ mở rộng và khai thác hai bài toán hình trong kỳ thi IMO 2013

1 Mở đầu

Trong kỳ thi toán quốc tế năm 2013 có hai bài toán hình hay như sau

Bài 1. *Cho tam giác giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi tâm ngoại tiếp tam giác DEF nằm trên (O).*

Bài toán trên là bài toán 3 của ngày 1, theo sự sắp xếp đó là bài toán khó nhất trong ngày hôm đó.

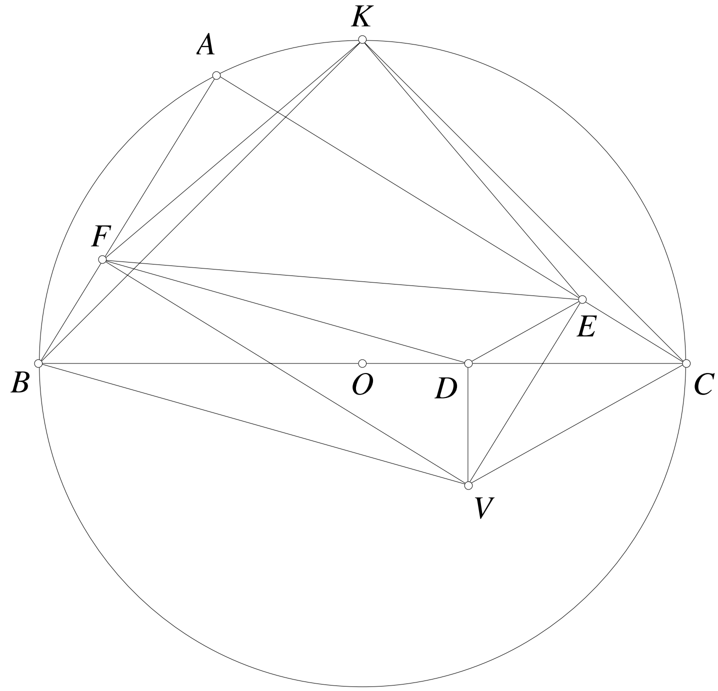
Bài 2. *Cho tam giác ABC, đường cao BE, CF cắt nhau tại H. P là một điểm trên BC. Gọi PK, PL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE. Chứng minh rằng KL đi qua H.*

Bài toán trên là bài toán 4 của ngày 2, theo sự sắp xếp đó là bài toán dễ nhất trong ngày hôm đó.

Trong bài viết này chúng ta sẽ đi sâu tìm hiểu kỹ hơn hai bài toán trên cũng như tìm hiểu các mở rộng và ứng dụng của nó.

2 Lời giải hai bài toán và bình luận

Lời giải bài 1. Gọi phân giác ngoài góc A cắt (O) tại K. Ta dễ chứng minh $BF = CE$ nên trung trực EF đi qua K. Nếu tâm ngoại tiếp tam giác DEF thuộc (O) sẽ nằm ngoài tam giác DEF nên khi đó tam giác DEF tù. Không mất tổng quát giả sử $\angle EDF$ tù. Do tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng thuộc trung trực EF vậy tâm ngoại tiếp tam giác DEF phải là giao của trung trung trực EF và (O). Giao điểm này phải nằm trong góc $\angle EDF$ nên giao điểm này chính là K. Vậy K cũng là tâm ngoại tiếp tam giác DEF.



Dễ thấy các đường thẳng qua tâm bàng tiếp I_a, I_b, I_c lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại điểm V. Từ đó các tứ giác $DFBV, DECV$ nội tiếp. Ta suy ra $\angle BVC = \angle BVD + \angle CVD = \angle AFD + \angle AED = 360° - \angle BAC - \angle EDF = 360° - \angle EKF - (180° - \dfrac{\angle EKF}{2}) = \angle EKF = \dfrac{360° - \angle EKF}{2}$.

Mặt khác $KB = KC$. Từ đó dễ suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác BVC. Từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $VF = BD = AE, VE = CD = AF$. Vậy tứ giác $AEVF$ là hình bình hành mà $\angle AEV = \angle AFV = 90°$ vậy đó là hình chữ nhật suy ra $\angle BAC = 90°$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đây là một trong những cách ngắn gọn nhất cho bài toán này mà không phải vẽ thêm một hình phụ nào. Việc làm xuất hiện các tứ giác nội tiếp $DFBV, DECV$ rồi sau đó trở thành hình thang cân là điều rất thú vị. Qua đó ta có thể khai thác được nhiều tính chất khác nữa.

3 Tìm hiểu và khai thác

Nếu chỉ xét phần thuận của bài toán 1, ta có thể phát biểu như sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF nằm trên (O).*

Nếu coi tam giác vuông là tam giác có trực tâm trùng với đỉnh, ta có thể mở rộng bài toán này cho tam giác bất kỳ như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC. N đối xứng I qua M. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của N lên BC, CH, HB. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.*

Nếu mở rộng hơn một chút cho bài toán này ta có bài toán thú vị sau

Bài 5. *Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC, N đối xứng I qua M. P là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của N lên BC, CP, PB. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.*

Ta có thể tiếp tục khai thác bài toán như sau, bàng cách làm khó hơn một chút

Bài 6. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC tại D. Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại K, L, N. Chứng minh rằng D, K, L, N cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\angle A = 90°$.*

Ta lại có một phát triển khác cho bài toán này

Bài 7. *Cho tam giác ABC. Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Giả sử $\angle EDF = 135°$. Chứng minh rằng $\angle BAC = 90°$.*

Nếu coi tâm nội tiếp I là trực tâm tam giác tạo bởi ba tâm bàng tiếp và A, B, C là chân các đường cao, phát biểu lại bài toán gốc như sau ta sẽ lại có những cái nhìn thú vị khác

Bài 8. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF và tâm ngoại tiếp O. Gọi OA, OB, OC lần lượt cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z Giả sử tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC có một góc là $45°$.*

Nghịch đảo bài toán gốc trên ta có bài toán sau

Bài 9. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Đường tròn qua D, H và trực giao với đường tròn (HBC) cắt (HBC) tại X khác H. Tương tự có Y, Z. Gọi (K) đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Đường thẳng qua H vuông góc với HK cắt (XYZ) tại M, N. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại M, N cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi tam giác ABC có một góc là $45°$.*

Khai thác tiếp mô hình tam giác vuông ta có bài toán

Bài 10. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Tâm bàng tiếp góc A là I_a. V đối xứng với I_a qua trung điểm BC. Gọi D, E, F là hình chiếu của V lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giac DEF nằm trên (O).*

Bài 11. *Cho tam giác ABC vuông tại A, tâm nội tiếp I. P là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luông thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển.*

Khi phát biểu bài toán như vậy ta sẽ có một khai thác bài toán trên như sau

Bài 12. *Cho tam giác ABC với đường cao AD, BE, CF và tâm ngoại tiếp O. OA, OB, OC lần lượt cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ. M, N là trung điểm CA, AB. P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN sao cho $KP \parallel BC$.*

a) Chứng minh rằng D, P, O thẳng hàng.

b) Gọi L là trung điểm BC. Chứng minh rằng $KL = DP$.

Chúng ta lại có thể mở rộng hơn nữa bài toán trên như sau

Bài 13. *Cho tam giác ABC và P là điểm sao cho $AP \perp BC$. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. X, Y, Z là hình chiếu của Q lên EF, FD, DE. K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF. M, N, L là hình chiếu của Q lên BC, CA, AB. R là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN sao cho $PR \parallel BC$.*

a) Chứng minh rằng D, R, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $KL = DR$.

Chúng ta hoàn toàn có thể khai thác bài toán này trong nhiều trường hợp khác nữa. Trở lại bài toán của ngày 2. Nếu ta cũng coi tâm nội tiếp I là trực tâm tam giác tạo bởi ba tâm bàng tiếp và A, B, C là chân các đường cao, phát biểu lại bài toán gốc một cách thú vị hơn như sau

Bài 14. *Cho tam giác ABC, đường tròn bàng tiếp góc B, C là I_b, I_c. P là một điểm di chuyển trên I_bI_c. Gọi PK, PL là đường kính của các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBI_c và PCI_b. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Theo bài toán thi ta thấy ngay điểm cố định chính là tâm nội tiếp I. Tuy nhiên cùng với cách phát biểu này ta có thể nhận thấy các điểm I_b, I_c với vài trò là tâm bàng tiếp thực sự không quan trọng. Ta có thể tổng quát hóa lên như sau

Hoặc khi chúng ta xét tới vị trí tương đối của trực tâm ta lại có một bài toán khá đặc sắc như sau

Bài 15. *Cho tam giác ABC tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C là I_b, I_c. Gọi P là một điểm di chuyển trên I_bI_c. Gọi PK, PL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBI_b và PCI_c. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Bài 16. *Cho tam giác ABC. Với E, F là hai điểm cố định sao cho A nằm giữa E, F. P di chuyển trên đường thẳng EF. Gọi PK, PL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE. Chứng minh rằng KL luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.*

Bài toán trên là bài toán thú vị và có khá nhiều cách khai thác khác nhau trong các trường hợp riêng, các bạn hãy cùng suy nghĩ. Ngoài ra từ bài toán gốc chúng ta lại có thêm hai cách mở rộng như sau, ta thay đường tròn đường kính BC thành đường tròn (K) bất kỳ qua B, C.

Bài 17. *Cho tam giác ABC, đường tròn (K) qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác B, C. BE giao CF tại H. d là đường thẳng qua K vuông góc với AH. P là một điểm bất kỳ trên d. PM, PN là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE. Chứng minh rằng MN đi qua H.*

Bài 18. *Cho tam giác ABC, đường tròn (K) qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác B, C. BE giao CF tại H. Gọi KL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC. P là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC. Gọi LB, LC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE tại M, N. Chứng minh rằng MN đi qua H.*

Nếu ta nhìn lại bài toán 9 theo cách khác như sau

Bài 19. *Cho tam giác ABC. E, F cố định thuộc CA, AB. P di chuyển trên BC. Gọi PK, PL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBF, PCE. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Trong hai bài toán này nếu cho (K) trùng vào một số đường tròn đặc biệt ta lại có một số bài toán có ý nghĩa khác. Xin cùng với các bạn khác thác điều này.

Ta sẽ lại có một cách phát triển khác cho bài toán này như sau

Bài 20. *Cho tam giác ABC. E, F cố định thuộc CA, AB. P di chuyển trên một đường tròn (K) cố định đi qua B, C. Gọi Q là một điểm cố định thuộc (K). QB, QC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE tại M, N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Rõ ràng bài toán trên là một tổng quát hóa nhưng lời giải của nó lại chỉ dùng bài toán góc không đổi rất đơn giản.

Ngoài ra trên mô hình của bài toán IMO ta còn có thể khai thác được rất nhiều kết quả khác từ đó. Các bạn hãy làm một số bài toán sau để luyện tập

Bài 21. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi phân giác $\angle HDB, \angle HCD$ lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác DBF, DCE tại K, L khác D.*

a) Chứng minh rằng KL đi qua H.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DKL đi qua trung điểm của BC.

Mở rộng tiếp bài toán trên ta lại có

Bài 22. *Cho tam giác ABC. Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. BE giao CF tại H. D là hình chiếu của K lên AH. Gọi phân giác các góc $\angle BDF, CDE$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF, BCE tại M, N.*

a) Chứng minh rằng MN đi qua H.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua K.

Bài 23. *Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên cạnh BC. Phân giác $\angle APB, \angle APC$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC tại các điểm K, L khác P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.*

Bài 24. *Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên một đường tròn (K) cố định qua B, C. Phân giác $\angle APB, \angle APC$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC tại các điểm K, L khác P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.*

Khi nghịch đảo các bài toán gốc ta cũng thu được nhiều điều thú vị.

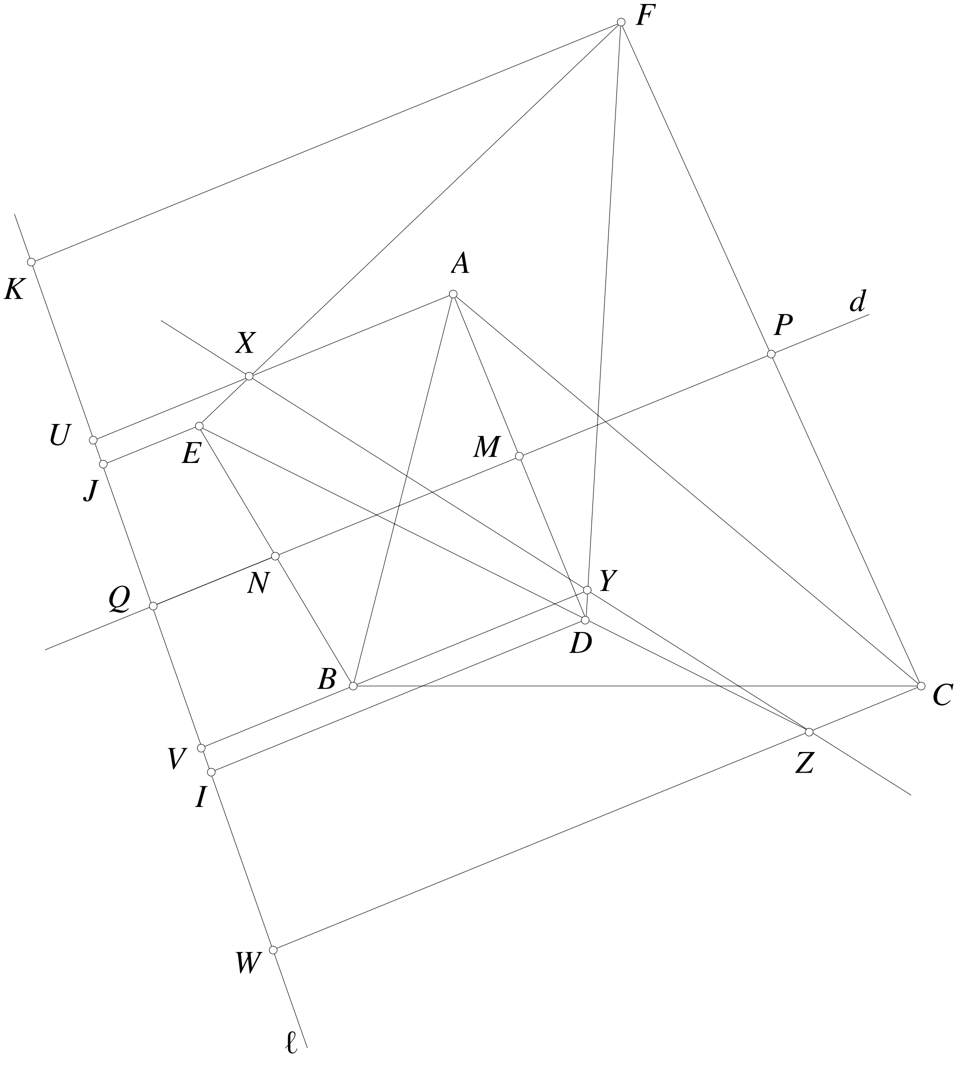
Tài liệu

[1] IMO 2013 problem 3 from AoPS

Trần Quang Hùng Trường THPT chuyên KHTN-ĐHKHTN-ĐQGHN
Email:analgeoamtica@gmail.com

Hình học mathley 1

Bài 1 (Trần Quang Hùng)**.** *Cho các đoạn AD, BE, CF có trung điểm thẳng hàng trên đường thẳng d. Các điểm X, Y, Z lần lượt thuộc EF, FD, DE sao cho $AX \parallel BY \parallel CZ \parallel d$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.*



Lời giải. Gọi ℓ là một đường thẳng không song song với d. Gọi AX, BY, CZ, d lần lượt cắt ℓ tại U, V, W, Q. Gọi I, J, K là hình chiếu song song phương d của D, E, F lên ℓ. Ta chú ý Q là trung điểm của UI, VJ, WK. Từ đó ta dễ thấy

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{XF}} = \frac{\overline{UJ}}{\overline{UK}} = \frac{\overline{QJ} - \overline{QU}}{\overline{QK} - \overline{QU}} = \frac{-\overline{QV} - \overline{QU}}{-\overline{QW} - \overline{QU}} = \frac{\overline{QU} + \overline{QV}}{\overline{QU} + \overline{QW}}$$

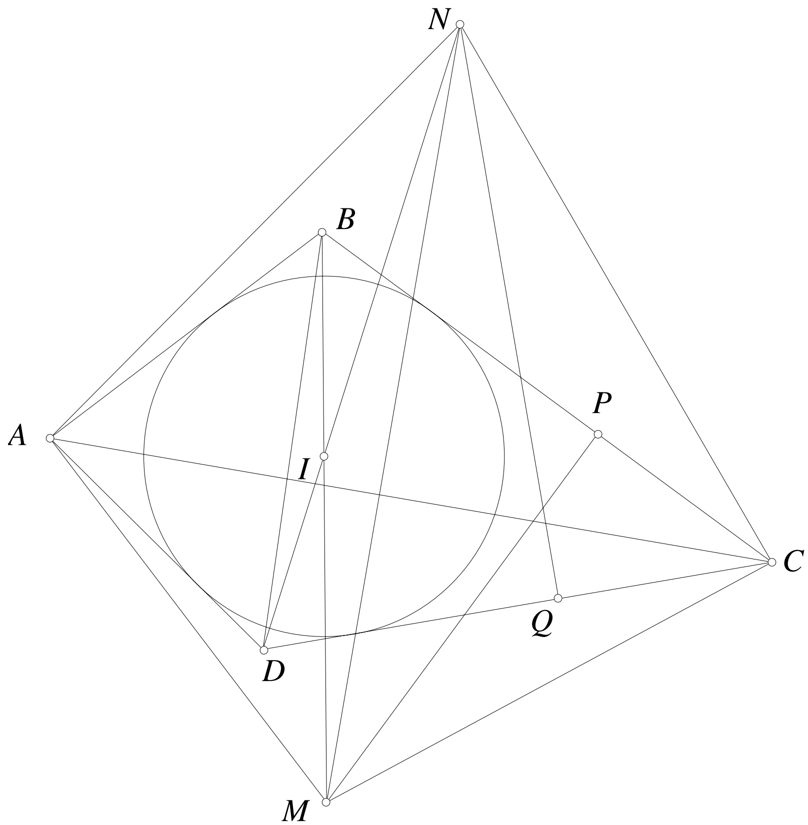
Tương tự $\dfrac{\overline{YF}}{\overline{YD}} = \dfrac{\overline{QV} + \overline{QW}}{\overline{QV} + \overline{QU}}, \dfrac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}} = \dfrac{\overline{QW} + \overline{QU}}{\overline{QW} + \overline{QV}}$.

Từ đó ta có $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XF}} . \dfrac{\overline{YF}}{\overline{YD}} . \dfrac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}} = 1$, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DEF ta suy ra X, Y, Z thẳng hàng. □

Bài 2 (Trần Quang Hùng)**.** *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. P di chuyển trên EF. PB cắt CA tại M. MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng qua N vuông góc PC luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.1. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Các điểm M, N lần lượt thuộc IB, ID sao cho $AM \perp AB, AN \perp AC$ thì $MN \perp BD$.*



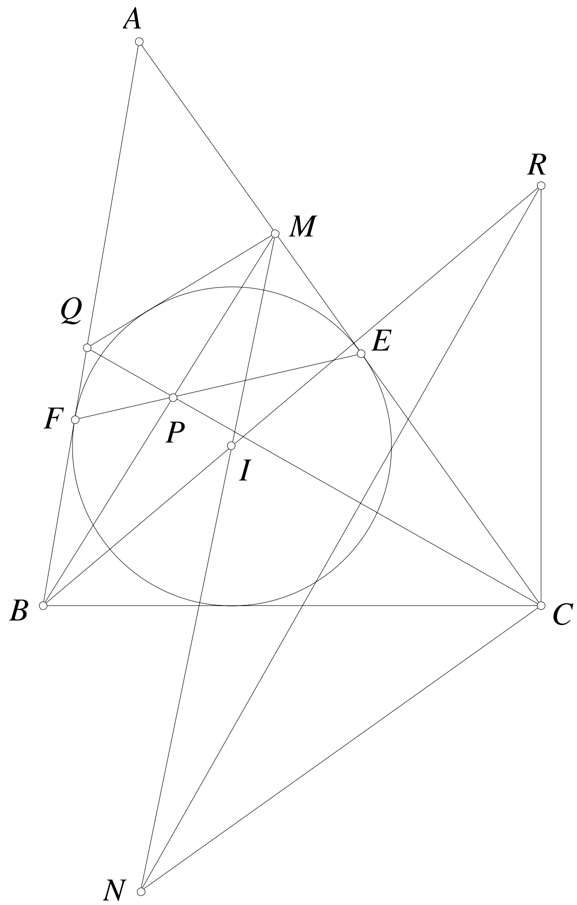
Chứng minh. Gọi P, Q là hình chiếu của M, N lên BC, CD. Từ tính chất phân giác ta dễ thấy $MA = MP, NQ = NQ$ và $BA = BP, DA = DQ$. Từ đó ta có

$MC^2 - MA^2 = MC^2 - MP^2 = PC^2 = (BC - AB)^2 \quad (1)$.

Tương tự $NC^2 - NA^2 = NC^2 - NQ^2 = QC^2 = (DC - DA)^2 \quad (2)$.

Do tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$ hay $BC - AB = CD - AD \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) suy ra $MC^2 - MA^2 = NC^2 - ND^2$ hay $MN \perp BD$. □



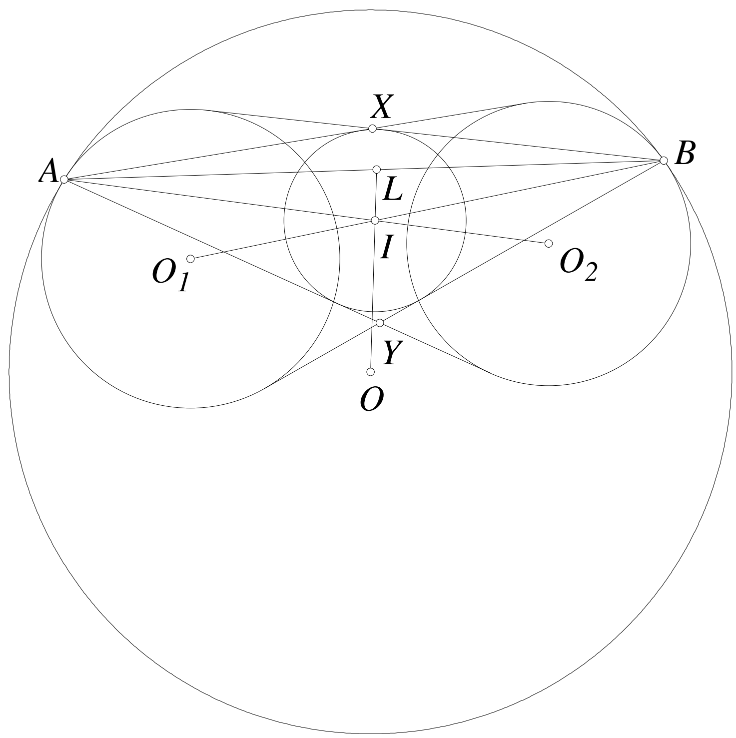
Lời giải. Gọi Q thuộc AB sao cho MQ tiếp xúc (I). Tứ giác $BQMC$ ngoại tiếp theo tính chất quen thuộc thì CQ, BM, EF đồng quy tại P. Gọi BI cắt đường thẳng qua C vuông góc BC tại R. Áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $BQMC$ ngoại tiếp suy ra NR vuông góc $CQ \equiv CP$. Vậy đường thẳng qua N vuông góc CP đi qua R. Dễ thấy theo cách dựng R cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 3. *Hai đường tròn γ và δ cùng tiếp xúc trong với đường tròn ω tại A và B. Từ A kẻ tiếp tuyến ℓ_1, ℓ_2 tới δ, từ B kẻ hai tiếp tuyến t_1, t_2 tới γ. Biết rằng ℓ_1 cắt t_1tại X, ℓ_2 cắt t_2 tại Y, hãy chứng minh rằng tứ giác $AXBY$ là tứ giác ngoại tiếp.*

Lời giải của bạn **Lê Thị Hải Linh** học sinh lớp 11 chuyên toán Bắc Ninh. Ta có bổ đề quen thuộc sau

Bổ đề 3.1 (Định lý Monge-D'Alembert). *Cho ba đường tròn $C_1(O_1, R_1), C_2(O_2, R_2), C_3(O_3, R_3)$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1) cùng thuộc một đường thẳng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của cặp đường tròn còn lại cùng thuộc một đường thẳng.*

Trở lại bài toán.



Lời giải. Gọi O_1, O_2, O lần lượt là tâm của γ, δ, ω. AO_2 giao BO_1 tại I. Gọi α_1 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với AX, AY; α_2 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với BX, BY. OI giao AB tại L.

Áp dụng bổ đề trên cho 3 đường tròn δ, ω, α_1 ta có A là tâm vị tự ngoài của α_1 và δ, B là tâm vị tự ngoài của δ và ω, suy ra tâm vị tự ngoài của α_1 và ω nằm trên AB hay L là tâm vị tự ngoài của α_1 và ω.

Chứng minh tương tự L cũng là tâm vị tự ngoài của α_2 và ω. Từ đó $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ hay tứ giác $AXBY$ ngoại tiếp. $\square$

1 Năm 2011-2012

Bài 1.1 (KHTN vòng 1 năm 2011-2012 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ trong tam giác. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C'.

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ có chung một điểm. Gọi điểm đó là Q.

b) Giả sử Q không thuộc các đường thẳng AA', BB', CC'. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AQA', BQB', CQC' có chung một điểm khác Q.

Bài 1.2 (KHTN vòng 1 năm 2011-2012 ngày thứ hai)**.** Cho tam giác ABC nhọn và điểm P bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm PA, PB, PC. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Giả sử OA_1, OB_1, OC_1 lần lượt cắt B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy.

Bài 1.3 (KHTN vòng 2 năm 2011-2012 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác không cân ABC. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. AD giao EF tại J. M, N di chuyển trên đường tròn (I) sao cho M, J, N thẳng hàng và M nằm về phía nửa mặt phẳng chứa C bờ AD, N nằm về phía nửa mặt phẳng chứa B bờ AD. Giả sử DM, DN lần lượt cắt AC, AB tại P, Q.

a) Giả sử MN giao PQ tại T. Chứng minh rằng T luôn thuộc một đường thẳng d cố định.

b) Giả sử tiếp tuyến tại M, N của (I) cắt nhau tại S. Chứng minh rằng S thuộc d.

c) Giả sử SJ giao BC tại K. Chứng minh rằng IK vuông góc TD.

Bài 1.4 (KHTN vòng 2 năm 2011-2012 ngày thứ hai)**.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ không có hai đường chéo vuông góc nội tiếp đường tròn (O). P là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C, D. PD cắt AC tại M, PC cắt BD tại N. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APM, BPN cắt nhau tại điểm Q khác P.

a) Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm T cố định.

b) Gọi AC giao BD tại E, I là trung điểm CD. Chứng minh rằng E, I, T thẳng hàng.

Bài 1.5 (KHTN vòng 3 năm 2011-2012 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác ABC. M là điểm di chuyển trên đoạn thẳng BC. B' thuộc đoạn thẳng AC, C' thuộc đoạn thẳng AB sao cho $MB' \parallel AB, MC' \parallel AC$. Gọi N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác MBC' và MCB'. T là trung điểm N_bN_c. Chứng minh rằng MT luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.6 (KHTN vòng 3 năm 2011-2012 ngày thứ hai)**.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ không là hình thang nội tiếp đường tròn (O). AD giao BC tại E. I là trung điểm CD. EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB tại M khác E. AC giao BD tại F. EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB tại N khác E. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, N, M cùng thuộc một đường tròn.

2 Năm 2012-2013

Bài 2.1 (KHTN vòng 1 năm 2012-2013 ngày thứ nhất)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AB không là đường kính của (O). P là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa A, B của (O). PA cắt DB, DC lần lượt tại E, F. PB cắt CA, CD lần lượt tại G, H. GF giao EH tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 2.2 (KHTN vòng 1 năm 2012-2013 ngày thứ hai)**.** Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC. AP cắt (O) tại D khác A. DE, AF là đường kính của (O). EP, FP lần lượt cắt (O) tại G, H khác E, F. AH giao DG tại K. L là hình chiếu của K lên đường thẳng OP.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, L, K, D cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (S).

b) Chứng minh rằng OP cắt EF tại điểm T thuộc (S).

Bài 2.3 (KHTN vòng 2 năm 2012-2013 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác nhọn ABC. D là một điểm thuộc đoạn AC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E khác B. Tiếp tuyến tại B, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại T. AT cắt đường tròn ngoại tiếp tại tam giác ABD tại F khác A. CF giao DE tại G. AG giao BC tại H. M là trung điểm của AF. AE giao MD tại N. Chứng minh rằng $HN \parallel AT$.

Bài 2.4 (KHTN vòng 2 năm 2012-2013 ngày thứ hai)**.** Cho tam giác ABC cân tại A và ABC là tam giác nhọn. D là một điểm thuộc đoạn thẳng BC sao cho $\angle ADB < 90°$. Từ điểm C kẻ các tiếp tuyến CM, CN tới đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (M, N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CM, CN. Giả sử PQ cắt đoạn thẳng BC tại E. Lấy điểm F trên đoạn thẳng AE sao cho $\angle EFC = \angle DAC$. Chứng minh rằng $\angle BFE = \angle BAC$.

3 Năm 2013-2014

Bài 3.1 (KHTN vòng 1 năm 2013-2014 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M thuộc đoạn AB, N thuộc đoạn AC, P, Q thuộc đoạn BC với P nằm giữa Q, C và $\angle MNQ = \dfrac{\angle BAC}{2}$. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L. CL cắt NP tại E. BK cắt MQ tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$.

Bài 3.2 (KHTN vòng 1 năm 2013-2014 ngày thứ hai)**.** Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D. E là điểm nằm giữa B, D sao cho $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB, EAC. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KAB, LAC. Chứng minh rằng PQ song song KL.

Bài 3.3 (KHTN vòng 2 năm 2013-2014 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác ABC cố định, nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). D là điểm thuộc đoạn BC sao cho AD là phân giác $\angle BAC$. P là một điểm di chuyển trên đoạn thẳng AD. Q là điểm thuộc đoạn thẳng AD sao cho $\angle PBC = \angle QBA$. R là hình chiếu của Q lên đoạn BC. Gọi d là đường thẳng đi qua R và vuông góc với OP. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 3.4 (KHTN vòng 2 năm 2013-2014 ngày thứ hai)**.** Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi K, L, N lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác DEC, BCA, FAE. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của K, L, N theo thứ tự lên AD, BE, CF. Chứng minh rằng trung trực của AX, EY, CZ đồng quy.

Từ một bài toán quen thuộc tới các bài toán thi Olympiad

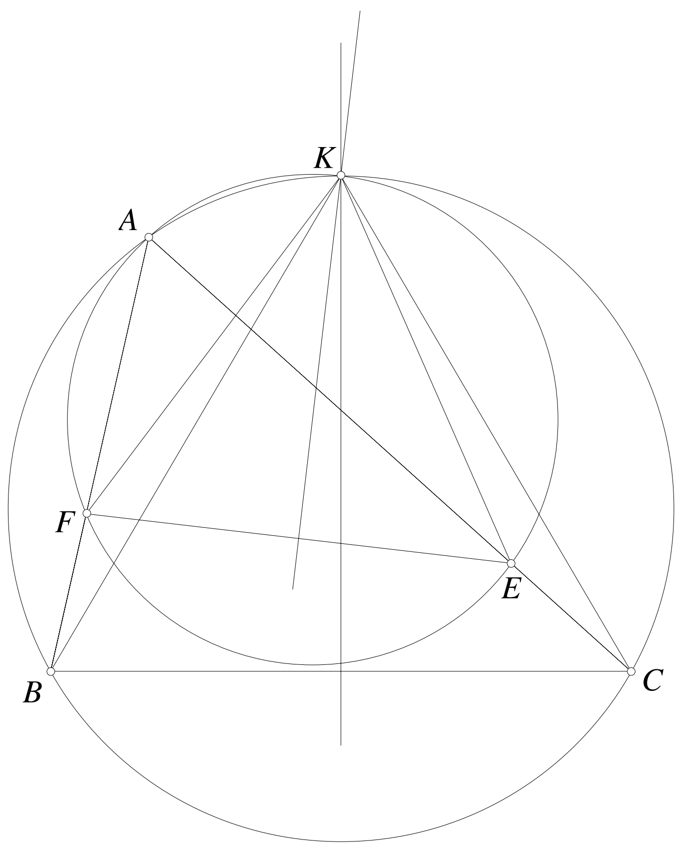
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài biết này chủ yếu xoay quanh ứng dụng của một bài toán quen thuộc mà các em học sinh có lẽ đã được làm quen từ lớp 7 dưới một số cách phát biểu khác nhau.

Chúng ta hầu như đều biết bài toán quen thuộc sau đây.

Bài 1. *Cho tam giác ABC trên cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau trên trung trực của BC và trung trực của EF.*



Hình 1.

Lời giải. Gọi trung trực BC và EF cắt nhau tại K. Dễ chứng minh các tam giác bằng nhau $\triangle KEC = \triangle KFB$ (*c.c.c*). Từ đây suy ra $\angle KCE = \angle KBF$ vậy tứ giác $AKCB$ nội tiếp. Cũng từ hai tam giác bằng nhau suy ra $\angle KEC = \angle KFB$ suy ra $\angle KEA = \angle KFA$ vậy tứ giác $AKEF$ cùng nội tiếp. Vậy K cũng là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và ABC. Ta hoàn tất chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán mà các bạn lớp 7 quen thuộc chính là chứng minh trung trực EF luôn đi qua điểm cố định. Khi đó trong bài toán và lời giải không cần đến các yếu tố đường tròn. Bạn nào đã quen thuộc phép biến hình thì có thể thấy K chính là tâm quay biến CE thành BF và nội dung của bài toán cũng chính là cách dựng K, ta lấy giao điểm khác A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và ABC. Bài toán này mang đậm chất biến hình xong lời giải của bài toán cũng như trong toàn bộ bài viết này được trình bày một cách đơn giản nhất chỉ mang nội dung kiến thức của cấp THCS chứ không thông qua các phép biến hình.

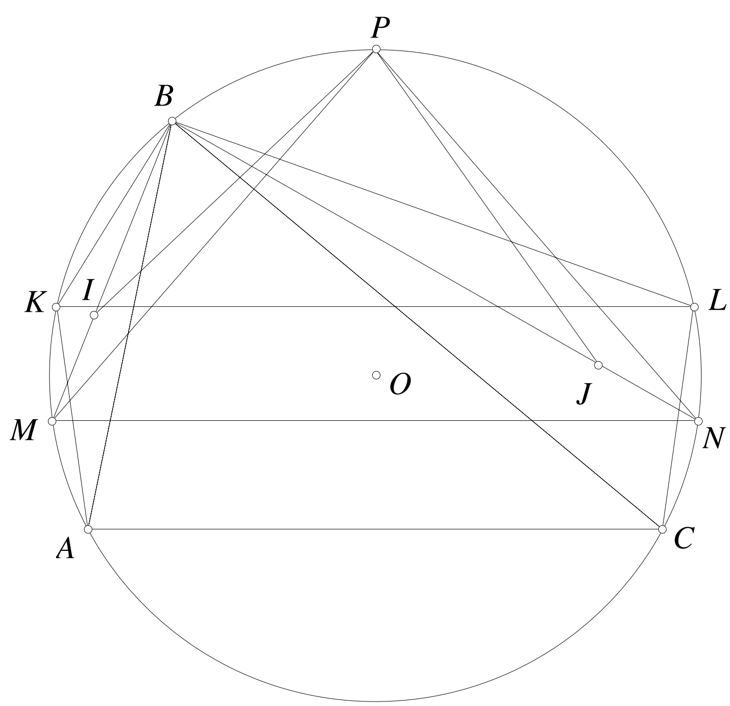
Bài toán có nhiều ứng dụng hay mà nhiều đề thi các nước thậm chí là bài hình học thi toán quốc tế năm 2013 cũng đã khai thác nó. Sau đây là một số ví dụ

Bài 2 (Olympic Toán toàn Nga 2006, lớp 10)**.** *Lấy K, L là hai điểm trên các cung $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $KL \parallel AC$. Chứng minh rằng tâm nội tiếp các tam giác BAK và BCL cách đều trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của tam giác ABC.*

Chúng ta có bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm đường tròn nội tiếp I. Tia AI cắt đường tròn (O) tại D khác A thì D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.*

Bổ đề trên là một kết quả rất quen thuộc của tâm đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác. Xin không trình bày lại chứng minh ở đây.



Hình 2.

Giải bài toán. Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAK và BCL. Gọi BI, BJ cắt đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại M, N khác B, ta dễ thấy M, N là trung điểm các cung $\overset{\frown}{KA}$, $\overset{\frown}{LC}$. Do $KL \parallel AC$ nên $KA = LC$ và $MN \parallel AC$ do đó kết hợp bổ đề trên dễ chỉ ra $MI = MK = NL = NJ$.

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác BMN nội tiếp (O) với $MI = NJ$ ta suy ra $PI = PJ$ với P là trung điểm $\overset{\frown}{MBN}$. Ta chú ý $MN \parallel AC$ nên P cũng là trung điểm $\overset{\frown}{MBN}$ vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán có thể làm khó hơn bằng cách yêu cầu chứng minh rằng trung trực IJ luôn đi qua điểm cố định hoặc chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ luôn đi qua một điểm cố định khác A khi K, L di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Bài toán này là bài toán đẹp có ý nghĩa. Ta có một ứng dụng của nó như sau

Bài 3. *Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $AB \parallel CD$. P là một điểm trên (O). Gọi K, L, M, N là tâm nội tiếp các tam giác PAD, PBC, PAC, PBD. Chứng minh rằng các đường tròn PKL, PMN và (O) đồng trục.*

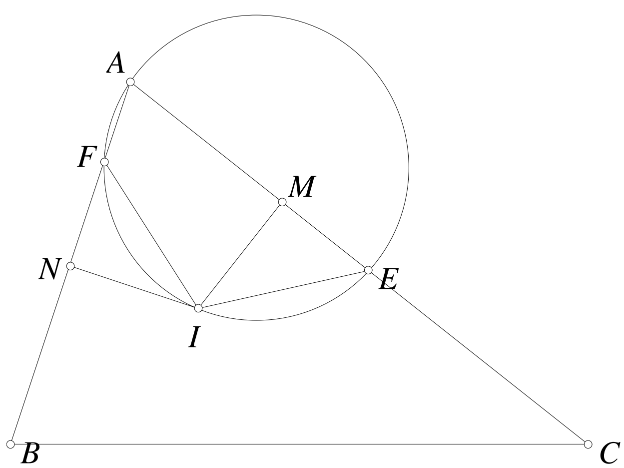
Bài tập này chỉ là ứng dụng đơn giản của bài thi vô địch Nga, các bạn hãy làm nó như một bài tự luyện. Cũng trong kỳ thi vô địch Nga có một bài toán khác thú vị như sau

Bài 4 (Olympic Toán toàn Nga 2011, lớp 11)**.** *Cho N là trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. M là trung điểm BC. Gọi I_1, I_2 là tâm nội tiếp tam giác ABM, CBM. Chứng minh rằng I_1, I_2, B, N cùng thuộc một đường tròn.*

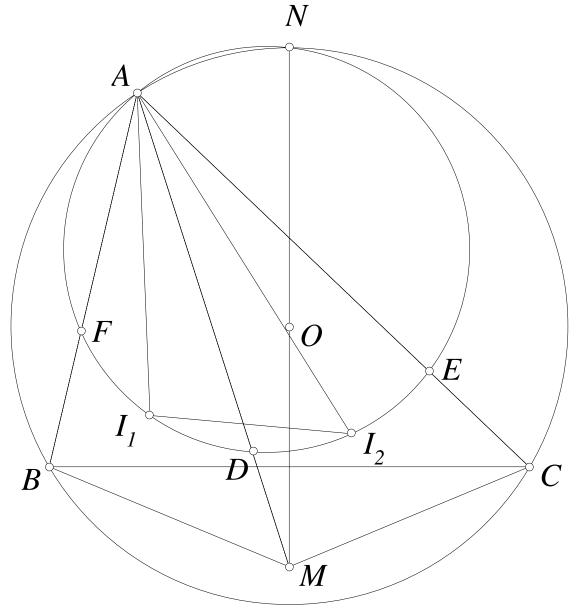
Bài tập trên là một bài toán có phát biểu rất đẹp và nhiều ý nghĩa. Trong quá trình tìm hiểu, tác giả bài viết đã tìm ra một tổng quát của nó và đã đề nghị bài tổng quát này trong cuộc thi Mathley. Bài toán như sau

Bài 5 (Mathley 9)**.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.*

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bất kỳ qua A, I cắt CA, AB tại E, F khác A thì $AE + AF = CA + AB - BC$.*



Chứng minh. Gọi M, N là hình chiếu của I lên CA, AB. Dễ thấy $\triangle INF = \triangle IME$ $(c.g.c)$ từ đó suy ra $AE = AF = AM + AN = CA + AB - BC$. □

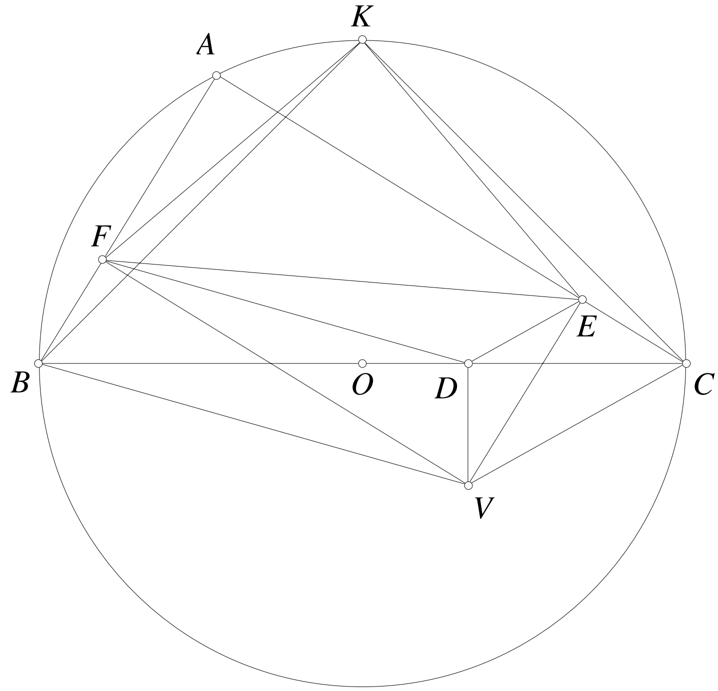


Giải bài toán. Gọi đường tròn ngoại tiếp (AI_1I_2) cắt AM, CA, AB lần lượt tại D, E, F khác A. Theo bổ đề trên dễ thấy $AD + AF = AB + AM - MB, AD + AE = AC + AM - MC$. Trừ hai đẳng thức chú ý $MB = MC$ ta được $AF - AE = AB - AC$ hay $AB - AF = AC - AE$. Do đó trong các trường hợp E, F cùng phía hoặc khác phía BC ta cũng đều có $BF = CE$. Vậy theo bài toán 1 gọi N là trung điểm cung BC chứa A thì $(AI_1I_2) \equiv (AEF)$ đi qua N. Vậy tâm ngoại tiếp AI_1I_2 thuộc trung trực AN cố định. Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu gọi I_3, I_4 lần lượt là tâm bàng tiếp góc A của tam giác $\triangle MAB, \triangle MAC$ thì chứng minh tương tự đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_3I_4 cũng đi qua N. Hơn nữa nếu gọi I_5, I_6 lần lượt chia I_1I_3, I_2I_4 cùng tỷ số thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_5I_6 cũng đi qua N. Các nhận xét đó đều chứng minh tương tự bài toán trên dựa vào bài toán ban đầu của chúng ta. Ta bước đầu có sự cảm nhận thú vị về hai bài toán thi vô địch Nga.

Sau đây là một bài toán cũng rất nổi tiếng xuất hiện trong kì thi Olympic Toán quốc tế 2013 vừa qua.

Bài 6 (IMO 2013 bài 3)**.** *Cho tam giác giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi tâm ngoại tiếp tam giác DEF nằm trên (O).*



Lời giải. K là trung điểm cung $\overset{\frown}{BAC}$. Từ tính chất của các tiếp điểm bàng tiếp ta dễ chứng minh $BF = CE$ nên theo bài toán 1 trung trực EF đi qua K. Nếu tâm ngoại tiếp tam giác DEF thuộc (O) sẽ nằm ngoài tam giác DEF nên khi đó tam giác DEF tù. Không mất tổng quát giả sử $\angle EDF$ tù. Do tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng thuộc trung trực EF vậy tâm ngoại tiếp tam giác DEF phải là giao của trung trung trực EF và (O). Giao điểm này phải nằm trong góc $\angle EDF$ nên giao điểm này chính là K. Vậy K cũng là tâm ngoại tiếp tam giác DEF.

Dễ thấy các đường thẳng qua tâm bàng tiếp I_a, I_b, I_c lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại điểm V. Từ đó các tứ giác $DFBV, DECV$ nội tiếp. Chú ý K là tâm ngoại tiếp tam giác EDF nên ta suy ra $\angle BVC = \angle BVD + \angle CVD = \angle AFD + \angle AED = 360° - \angle BAC - \angle EDF = 360° - \angle EKF - \dfrac{360° - \angle EKF}{2} = \dfrac{360° - \angle EKF}{2}$.

Mặt khác $KB = KC$. Từ đó dễ suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác BVC hay $KB = KV = KC$. Vậy ta chú ý rằng tứ giác $DFBV$ nội tiếp và các cạnh FD, BV có chung đường trung trực, từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $VF = BD = AE$ và tương tự $VE = CD = AF$. Vậy tứ giác $AEVF$ là hình bình hành mà $\angle AEV = \angle AFV = 90°$ vậy đó là hình chữ nhật suy ra $\angle BAC = 90°$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán thi quốc tế là một bài toán đẹp và ý nghĩa. Một điều thú vị là bài toán này cũng là bài toán đề nghị từ nước Nga. Bài toán có nhiều phát triển và mở rộng, dưới đây xin giới thiệu một số phát triển và mở rộng này

Bài 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC. N đối xứng I qua M. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của N lên BC, CH, HB. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.*

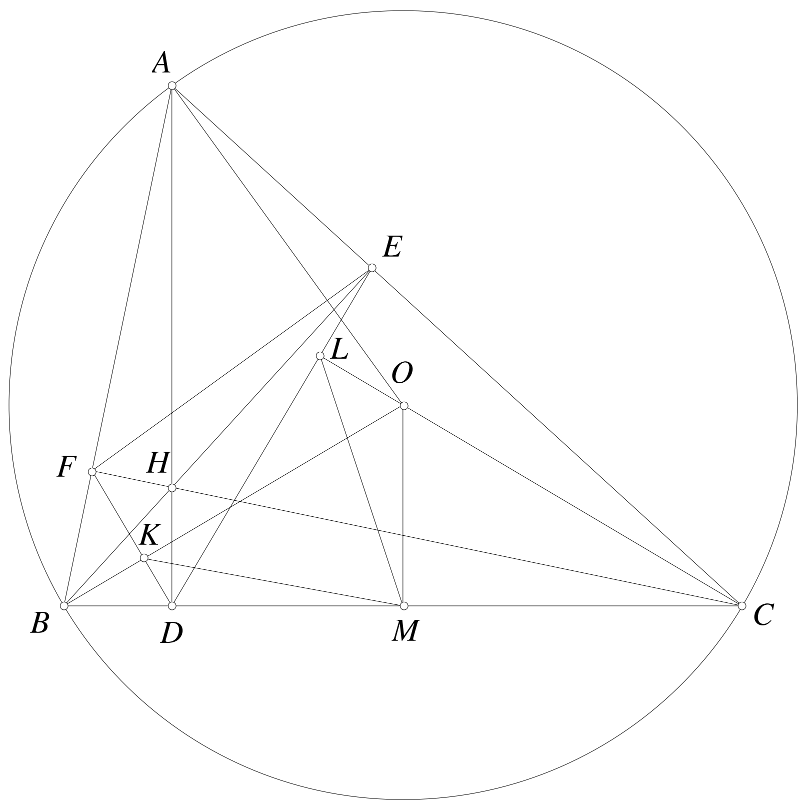
Bài 8. *Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC, N đối xứng I qua M. P là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu* *của N lên BC, CP, PB. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.*

Bài 9. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Tâm bàng tiếp góc A là I_a. V đối xứng với I_a qua trung điểm BC. Gọi D, E, F là hình chiếu của V lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giac DEF nằm trên (O).*

Bài 10. *Cho tam giác ABC vuông tại A, tâm nội tiếp I. P là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển.*

Các bài toán mở rộng trên đều được phát triển từ bài thi IMO và lời giải cũng tương tự lời giải bài IMO, các bạn hãy làm như các bài tự luyện. Sau đây là một bài toán ứng dụng của bài toán 1

Bài 11. *Cho tam giác ABC nhọn có, trực tâm H, tâm ngoại tiếp O, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Trên các tia BO, CO lấy các điểm K, L sao cho $\dfrac{BA.BH}{BK} = \dfrac{CA.CH}{CL} = \dfrac{4R^2}{BC}$. Chứng minh rằng trung trực KL đi qua trung điểm BC.*



Hình 3.

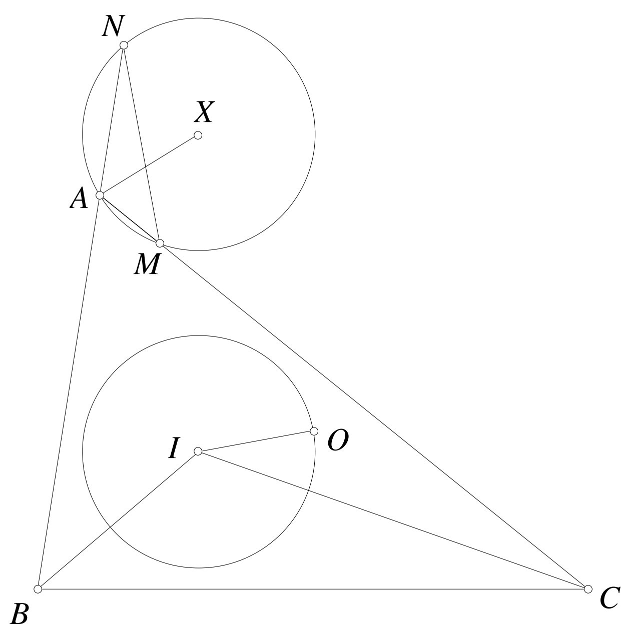
Lời giải. Gọi AD, BE, CF là đường cao của tam giác ABC. Gọi OB giao FD tại K'. Dễ thấy BK' là đường cao của tam giác BFD. Ta lại có tam giác BFD và tam giác BCA đồng dạng nên $\dfrac{BK'}{BE} = \dfrac{FD}{AC} = \dfrac{HB.\sin B}{AC} = \dfrac{HB}{2R}$. Suy ra $BK' = \dfrac{BE.BH}{2R} = \dfrac{BE.\frac{4R^2.BK}{BA.BC}}{2R} = BK\dfrac{BE.2R}{BA.BC} = BK$. Do đó $K' \equiv K$. Tương tự L là hình chiếu của C lên DE. Vậy ta chú ý rằng B, C là tâm bàng tiếp của tam giác DEF do đó K, L là các tiếp điểm bàng tiếp với các cạnh DF, DE nên ta dễ chứng minh $FK = EL$. Ta chú ý nếu M là trung điểm BC thì M, D, E, F cùng thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC hơn nữa dễ có $ME = MF$ nên M chính là trung điểm $\overset{\frown}{EDF}$ của đường tròn Euler. Áp dụng bài tập 1 dễ chỉ ra trung trực KL đi qua M. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Một kết quả đẹp khác từ bài toán 1 như sau

Bài 12. *Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là đối xứng của B, C, C, A, A, B qua IC, IB, IA, IC, IB, IA. Gọi X, Y, Z là tâm ngoại tiếp các tam giác AMN, BPQ, CRS.*
a) Chứng minh rằng I là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ.
b) Chứng minh rằng trực tâm tam giác XYZ là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC.

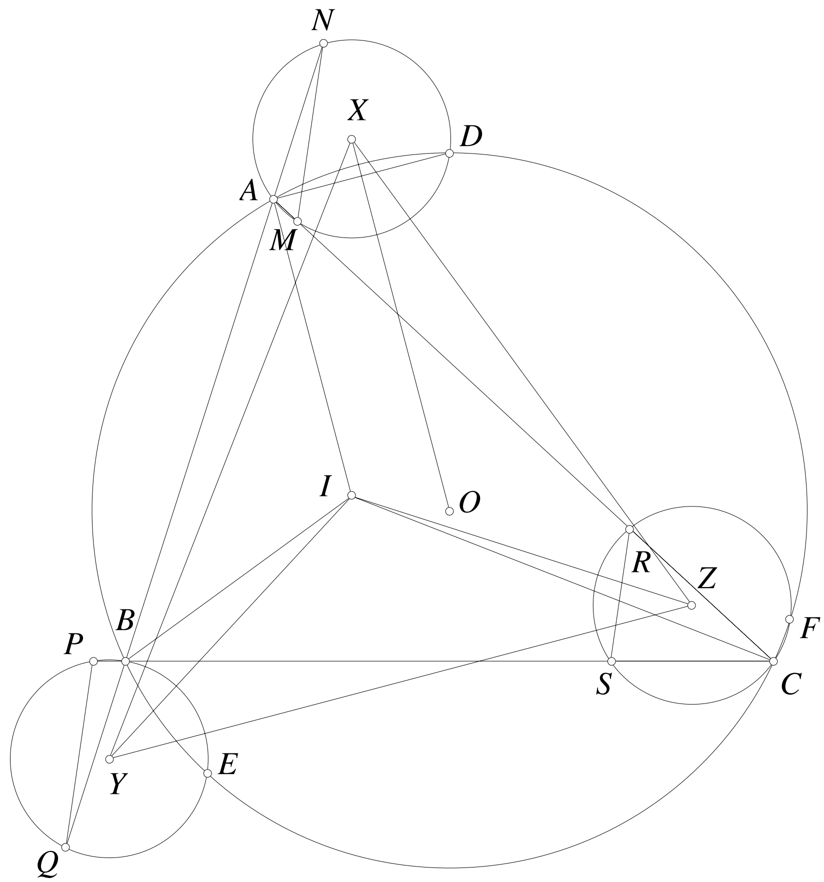
Ta có bổ đề sau

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O. Gọi M, N là đối xứng của B, C lần lượt qua IC, IB thì MN vuông góc OI và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng OI.*



Hình 4.

Đây là một bổ đề rất quen thuộc và xuất hiện nhiều trong các tài liệu khác nhau, các bạn có thể tham khảo nhiều lời giải trong [1,2,3] xin không trình bày lại chứng minh. Quay lại bài toán



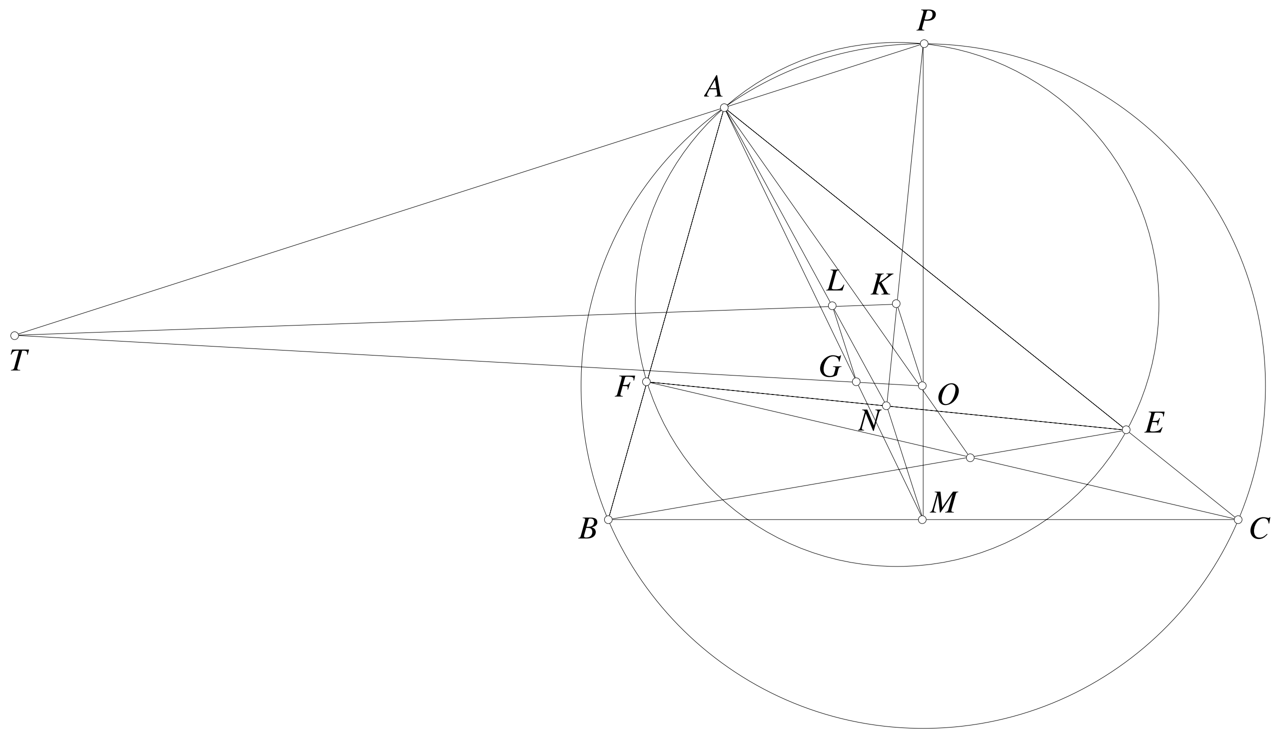
Hình 5.

Lời giải. a) Theo bổ đề trên bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ và CRS bằng nhau mà C, Q và B, R đối xứng nhau qua IA, từ đó dễ thấy hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ và CRS đối xứng nhau qua IA. Nên Y và Z là hai tâm tương ứng đối xứng nhau qua IA vậy $IY = IZ$. Tương tự suy ra I là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta chú ý rằng do tính đối xứng nên $MN = CM$ cùng bằng BC do đó theo bài toán 1 thì đường tròn (X) ngoại tiếp tam giác AMN đi qua D là trung điểm $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó dễ suy ra OX vuông góc AD. Ta chú ý AD chính là phân giác ngoài tại A của tam giác ABC nên AD vuông góc AI do đó ta dễ suy ra $OX \parallel AI$. Theo chứng minh trên YZ đối xứng nhau qua AI nên YZ vuông góc AI do đó YZ vuông góc OX. Tương tự dễ chỉ ra O là trực tâm tam giác XYZ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là kết quả đẹp có ý nghĩa. Nó xuất phát từ một kết quả nghiên cứu trong [5], thông qua bài toán 1 nó được chứng minh đơn giản hơn như trên. Bài toán này có có một hệ quả đẹp là đường thẳng Euler của tam giác XYZ cũng là đường thẳng OI của tam giác ABC. Ngoài ra ta còn chú ý rằng từ chứng minh phần b) dễ suy ra $IX = OA$ do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ và ABC có bán kính bằng nhau. Ta lại tiếp tục một bài toán khác liên quan tới bài toán 1

Bài 13. *Cho tam giác ABC. E, F di chuyển trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khi E, F di chuyển.*

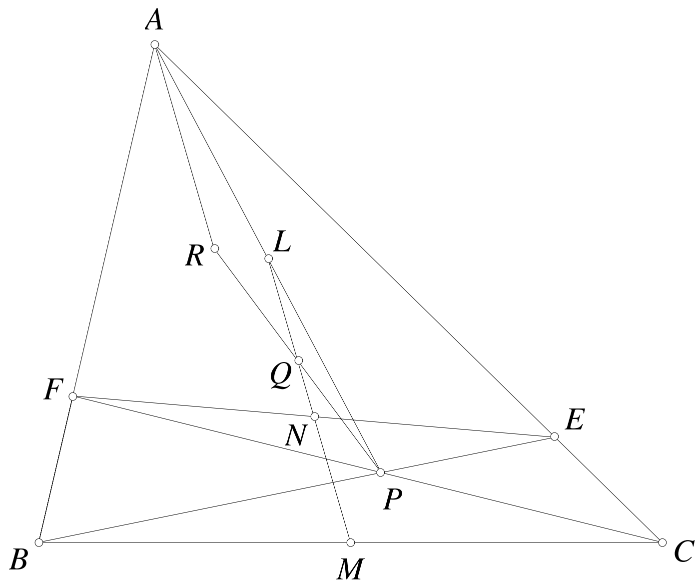


Hình 6.

Lời giải. Gọi G, L lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và AEF. Gọi (O) và (K) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. LK, GO là đường thẳng Euler của tam giác AEF và ABC. Gọi LK giao GO tại T ta sẽ chứng minh T cố định, thật vậy, theo bài toán 1 thì (O) và (K) cắt nhau tại P trên trung trực EF và BC. Gọi M, N là trung điểm BC, EF. Ta dễ thấy các tam giác cân PEF và PCB đồng dạng có tâm ngoại tiếp lần lượt là K và O, trung điểm đáy lần lượt là N, M. Do đó theo tính chất đồng dạng dễ chỉ ra $\dfrac{PK}{PN} = \dfrac{KO}{MN} = \dfrac{PO}{PM}$ là tỷ số cố định, mặt khác từ đây cũng suy ra $MN \parallel KO$. Ta lại chú ý $\dfrac{GL}{MN} = \dfrac{2}{3}$ và $GL \parallel MN$. Do đó $GL \parallel KO$ và $\dfrac{GL}{KO} = \dfrac{GL}{MN}.\dfrac{MN}{KO} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{PM}{PO}$ là tỷ số cố định. Từ đó ta có $\dfrac{TG}{TO} = \dfrac{GL}{KO}$ không đổi do đó T cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán lại cho ta một kết luận quan trọng là đường thẳng Euler của tam giác AEF đi qua điểm cố định nếu ứng dụng nó vào chuỗi các bài toán ta vừa xây dựng ở trên thì nó giúp ta tìm ra nhiều kết quả sâu sắc khác. Ngoài ra trong chứng minh trên ta có thể chỉ ra điểm cố định T nằm trên AP là phân giác ngoài góc A. Ta có một chú ý quan trọng nữa là trong chứng minh trên ta dễ chỉ ra MN song song OK và cùng vuông góc AP hay cùng song song phân giác góc A. Đây là một kết quả đã khá quen thuộc mà các bạn lớp 7,8 thường hay dùng các tính chất trung điểm và tam giác cân trong tứ giác $EFBC$ có hai cạnh bằng nhau để chứng minh. Kết quả này cũng cho ta một hệ quả đẹp sau

Bài 14. *Cho tam giác ABC. E, F nằm trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. BE giao CF tại P. Gọi M, N là trung điểm của BC, EF. Q là một điểm trên đường thẳng MN. Gọi R là đối xứng của P qua Q. Chứng minh rằng AR là phân giác của tam giác ABC.*



Hình 7.

Lời giải. Gọi L là trung điểm AP ta đã quen thuộc với kết quả của đường thẳng Gauss-Newton thì M, N, L thẳng hàng do đó theo tính chất đường trung bình thì AR song song $QR \equiv MN$. Theo nhận xét bài trên thì AR là phân giác tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Để kết thúc bài viết các bạn hãy cùng làm các bài tập sau để thực hành sâu hơn về bài toán 1 cũng như các bài toán trong bài viết.

Bài 15. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF và tâm ngoại tiếp O. Gọi OA, OB, OC lần lượt cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z Giả sử tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC có một góc là $45°$.*

Bài 16. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Đường tròn qua D, H và trực giao với đường tròn (HBC) cắt (HBC) tại X khác H. Tương tự có Y, Z. Gọi (K) đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Đường thẳng qua H vuông góc với HK cắt (XYZ) tại M, N. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại M, N của (XYZ) cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi tam giác ABC có một góc $45°$.*

Bài 17. *Cho tam giác giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Giả sử rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.*

Bài 18. *Cho tam giác ABC, trên tia đối tia BA, CA lấy các điểm M, N sao cho $BM = BN = BC$. Gọi I_a và O lần lượt là tâm bàng tiếp góc A và tâm ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $MN \perp OI_a$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN là OI_a.*

Bài 19. *Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là đối xứng của E, F, F, D, D, E qua các đường thẳng AB, AC, BC, BA, CA, CB. Gọi X, Y, Z là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN, EPQ, FRS. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác XYZ và tam giác ABC trùng nhau.*

Bài 20. *Cho tam giác ABC. E, F di chuyển trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của tam giác AEF luôn thuộc một đường thẳng cố định khi E, F di chuyển.*

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, Toán nâng hình học 10, NXBGD 2000

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10, NXBGD 2010

[3] Bosnia and Herzegovina TST 2012 Problem 5 on AoPS

[4] Russia All-Russian Olympiad on AoPS

[5] Quang Tuan Bui, Two triads of congruent circles from reflections, Forum Geometricorum, 8 (2008)

Xung quanh bài hình học thi VMO năm 2014

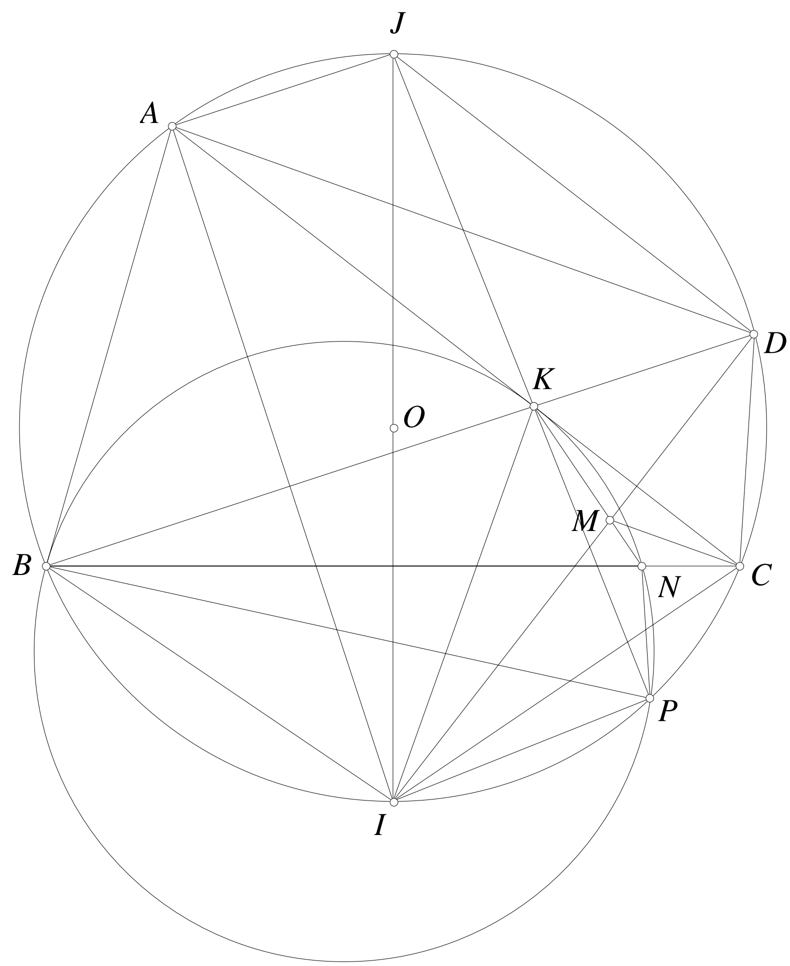
Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và khai thác bài hình học thi quốc gia Việt Nam năm 2014 ngày thứ nhất.

Trong kỳ thi học sinh giỏi Việt Nam năm 2014 có một bài toán hay, đề bài được thu gọn cho phù hợp với bài viết như sau

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại D khác B. Trên DI lấy điểm M sao cho CM song song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại P khác B. Chứng minh rằng PK chia đôi đoạn AD.*



Hình 1.

Chứng minh. Do I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A nên $IB = IC = IK$. Từ đó ta có biến đổi góc $\angle IKD = 180^\circ - \angle IKB = 180^\circ - \angle IBK = \angle ICD \quad (1)$. Ta lại chú ý do I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ nên DI là phân giác $\angle BDC \quad (2)$.

Từ (1),(2) ta dễ suy ra $\angle KID = \angle CID$. Vậy từ đó $\triangle KID = \triangle CID$ $(c.g.c)$ suy ra $DK = DC$ do đó DI là trung trực KC. Tương tự AI là trung trực BK.

Gọi IJ là đường kính của (O) ta dễ có $AJ \perp AI \perp BD$ suy ra $AJ \parallel KD$ và $JD \perp ID \perp KC$ do đó $JD \parallel AK$. Từ đó suy ra tứ giác $AJDK$ là hình bình hành vậy KJ đi qua trung điểm AD. Ta chỉ cần chứng minh J, K, P thẳng hàng thì bài toán được giải quyết. Thật vậy, ta có biến đổi góc

$\angle IPK = \angle IPB + \angle BPK$

$= \angle BAI + \angle BNK$ (Do tứ giác $BKNP$ nội tiếp)

$= \angle BAI + (\angle NKC + \angle NCK)$ (Tính chất góc ngoài)

$= \angle BAI + \angle MCK + \angle BCK$ (Do tính đối xứng, chú ý ID là trung trực KC)

$= \angle BAI + \angle CAD + \angle BCK$ (Do $CM \parallel AD$)

$= \angle BAI + \angle CBD + \angle BCK$ (Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp)

$= \angle IAK + \angle AKB$ (Tính chất góc ngoài)

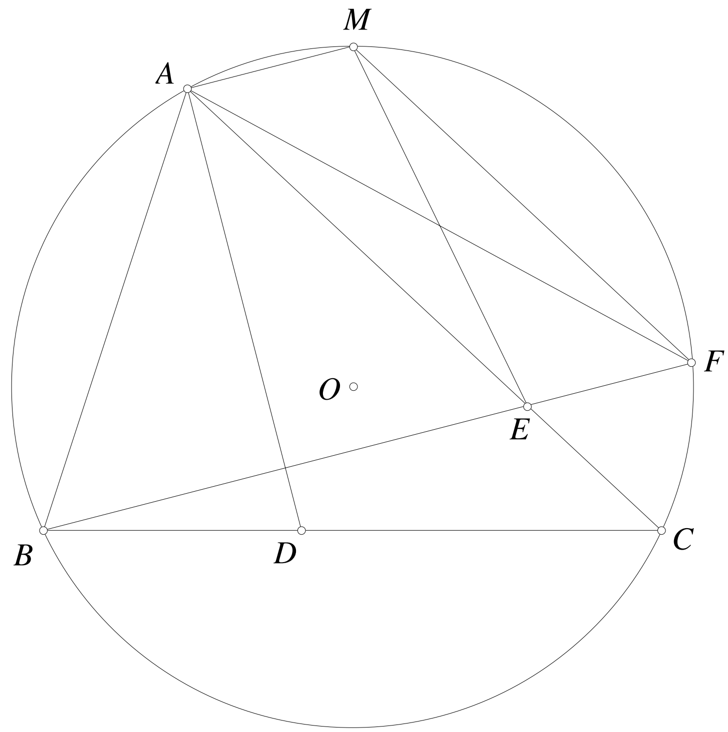
$= 90^\circ$ (Do $BK \perp AI$)

$= \angle IPJ$ (Do IJ là đường kính của (O)).

Từ đó suy ra P, K, J thẳng hàng. Kết hợp các nhận xét ban đầu ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán là một kết quả đẹp và chặt chẽ. Trong lời giải trên của bài toán ta có thể tóm lược lại ý chính là nằm trong bài toán sau

Bài 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), phân giác AD. Gọi E đối xứng B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. Gọi M là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). Chứng minh rằng ME đi qua trung điểm AF.*



Hình 2.

Cách giải bài toàn này nằm trong phần đầu của chứng minh trên. Đây là một kết quả khá có ý nghĩa. Bài toán 2 cũng có thể được nhìn dưới một cách khác như sau

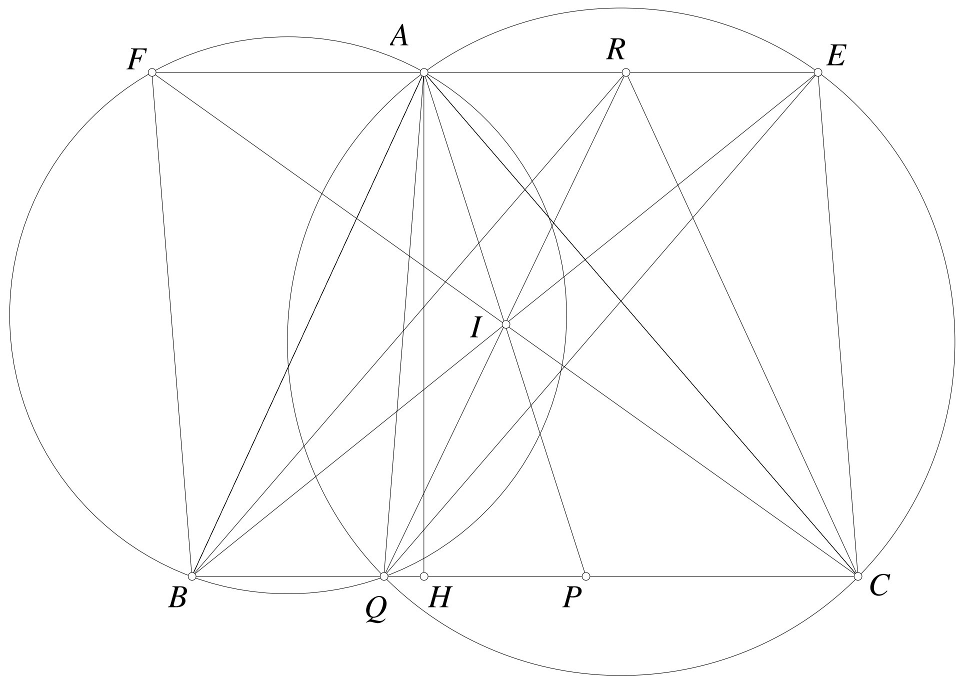
Bài 3. *Cho tam giác ABC cân tại A. P là một điểm thuộc đường thẳng BC. Chứng minh rằng đối xứng của C qua trung điểm AP nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APB.*

Đây là một kết quả hết sức đơn giản về tứ giác nội tiếp. Tuy vậy nếu để ý kỹ các bạn dễ thấy là bài toán 3 thực chất cũng là bài toán 2 áp dụng cho tam giác cân ABE. Bài toán có một mở rộng trong tam giác bất kỳ như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên đường thẳng BC. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua trung điểm AP.*

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE, ABF cắt nhau tại một điểm Q nằm trên BC.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overline{QP} = \overline{HB} + \overline{HC}$.



Hình 3.

Chứng minh. a) Để đơn giản ta xét trường hợp như hình vẽ. Ta dễ thấy tứ giác $BCEF$ là hình bình hành nên $\angle AQB = 180° - \angle AFB = \angle AEC = 180° - \angle AQC$ suy ra $\angle AQB + \angle AQC = 180°$ nên Q thuộc BC.

b) Gọi R đối xứng Q qua trung điểm I của AP dễ thấy R thuộc EF và tứ giác $ARPQ$ là hình bình hành nên $\overline{PQ} = \overline{AR}$. Ta lại dễ thấy tứ giác $BREQ$ là hình bình hành nên $BR = QE \quad (1)$. Mặt khác $AECQ$ là hình thang nội tiếp nên $AECQ$ là hình thang cân do đó $QC = QE \quad (2)$.

Từ (1),(2) suy ra $BR = AC$ từ đó ta có tứ giác $ARCB$ là hình thang cân nên R cố định. Từ đó $\overline{PQ} = \overline{AR}$ không đổi. Mặt khác gọi AH là đường cao của tam giác ABC cũng là đường cao của hình thang cân $ARCB$ ta dễ chứng minh $\overline{AR} = \overline{HB} + \overline{HC}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nếu tam giác ABC cân ta thu được bài toán 3. Nếu sử dụng cách phát biểu đối xứng ta có thể đề xuất bài toán như sau từ bài toán 2

Bài 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN. Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau trên đường tròn (O).*

Qua bài toán 2 ta dễ thấy EK, FL đều đi qua trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Một cách tự nhiên bài toán 5 có thể mở rộng thành bài toán sau

Bài 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (D) đi qua B, C cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Các điểm K, L lần lượt thuộc AM, AN sao cho $KL \parallel EF$. Gọi BE giao CF tại S. Gọi EK giao FL tại T. Chứng minh rằng A, S, T thẳng hàng.*

Bài toán 5 còn có một khai thác đáng chú ý như sau

Bài 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN.*

a) Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau tại điểm T trên đường tròn (O).

b) Gọi EK và FL cắt (O) tại P, Q khác T. PQ cắt BC tại S. Chứng minh rằng AS tiếp xúc đường tròn (O).

Bài toán 7 lại có một khai thác khá tự nhiên khác như sau

Bài 8. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN.*

a) Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau tại điểm T trên đường tròn (O).

b) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại S. Một đường thẳng thay đổi qua S cắt (O) tại P, Q sao cho P nằm giữa S, Q. TP, TQ lần lượt cắt AN, AM tại K, L. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q di chuyển.

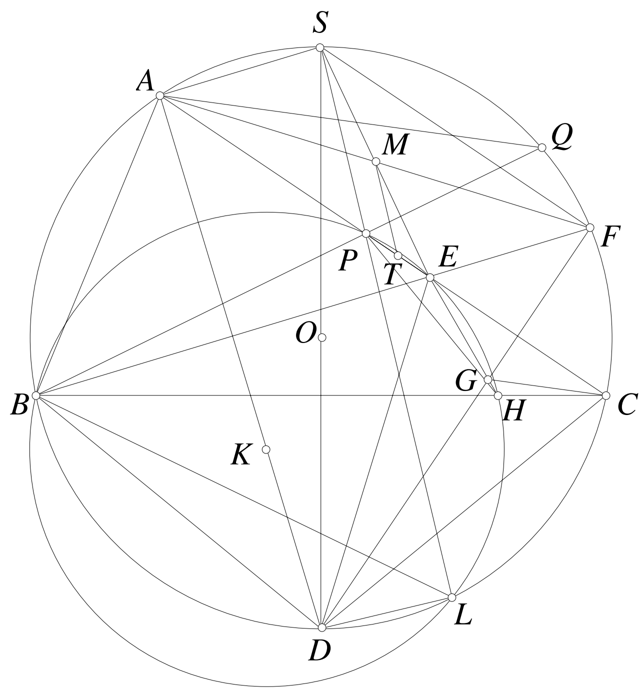
Quay trở lại bài toán 1 ban đầu, ta lại có thể mở rộng tiếp tục như sau

Bài 9. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại D khác A. E là điểm đối xứng B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. P là một điểm di chuyển trên cạnh AC. BP cắt (O) tại Q khác B. Đường thẳng qua C song song AQ cắt FD tại điểm G.*

a) Gọi EG cắt BC tại H. Chứng minh rằng B, P, E, H cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (K).

b) Gọi đường tròn (K) cắt (O) tại L khác B. Chứng minh rằng LP luôn đi qua một điểm S cố định khi P di chuyển.

c) Gọi T là trung điểm PE. Chứng minh rằng đường thẳng qua T song song LS thì chia đôi AF.



Hình 4.

Chứng minh. a) Tương tự trong chứng minh bài 1 ta chứng minh được DF là trung trực EC. Do đó ta có biến đổi góc

$\angle GEC = \angle GCE$ (Do tính đối xứng)

$= \angle CAF$ (Do $CG \parallel AF$)

$= \angle CBF$ (Do A, F, C, B thuộc một đường tròn)

Từ đó dễ suy ra B, P, E, H thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta sẽ chứng minh rằng LP đi qua điểm S cố định là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Thật vậy, ta có biến đổi góc

$\angle DLP = \angle DLB + \angle BLP$

$\angle BAD + \angle BEP$ (Do B, L, E, P và A, B, D, L cùng thuộc một đường tròn)

$\angle BAD + \angle EBA$ (Do tính đối xứng)

$= 90^\circ$ (Do $AD \perp BE$)

$= \angle DLS$ (Do DS là đường kính của (O)).

Từ đó dễ có LP đi qua S. Ta có điều phải chứng minh.

c) Sử dụng kết quả bài 1 ta có tứ giác $ASFE$ là hình bình hành nên SE và AF cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Theo tính chất đường trung bình ta dễ có $TM \parallel PS \equiv LS$. Hay đường thẳng qua T song song LS đi qua trung điểm M của AF. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là mở rộng trực tiếp của bài thi VMO. Ta sẽ thu được bài VMO nếu cho $P \equiv E$. Nếu cắt gọn chỉ còn câu c) thì bài toán khá khó, tuy vậy việc trình bày bài toán thông qua ba ý làm bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn. Bài toán mở rộng trên cũng mang lại cho ta một số khai thác có ý nghĩa như sau

Bài 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Một đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại P, Q khác C, B.*

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPE và CQF lần lượt cắt (O) tại S, T khác B, C. Chứng minh rằng PS và QT cắt nhau tại điểm U trên (O).

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của PE, QF. Chứng minh rằng đường thẳng qua M song song PS và đường thẳng qua N song song với QT cắt nhau tại điểm V thuộc AU.

Bài toán trên có hướng giải giống như bài số 9. Các bạn hãy làm như một bài luyện tập.

Tài liệu

[1] Đề bài VMO 2014 tại http://diendantoanhoc.net/home

Xung quanh bài hình học thi VMO năm 2014

Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

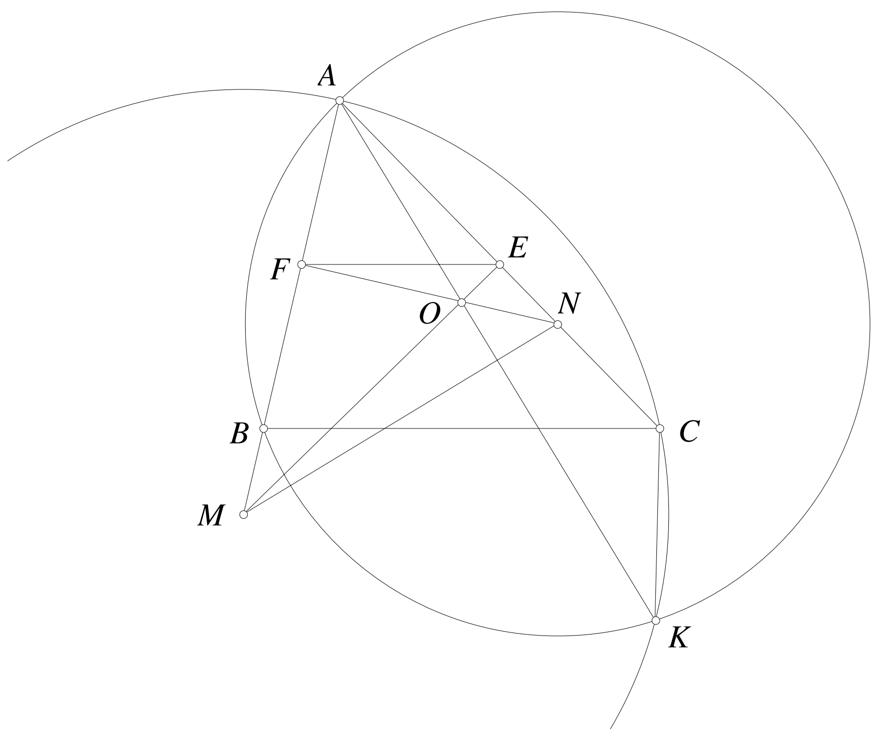
Bài viết này sẽ xoay quanh và khai thác bài hình học thi quốc gia Việt Nam năm 2014 ngày thứ hai.

Trong kỳ thi học sinh giỏi Việt Nam năm 2014 ngày thứ hai có một bài toàn hình học, đề bài được thu gọn cho phù hợp với bài viết như sau

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trong đó BC cố định và A thay đổi trên (O). Trên các tia AB, AC lấy lần lượt các điểm M và N sao cho $MA = MC$ và $NA = NB$. Gọi D là trung điểm BC. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AK cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp ADE cắt (O) tại F khác A. Chứng minh AF đi qua một điểm cố định.*

Bài toán trên thực chất là sự ghép nối của hai bài toán sau

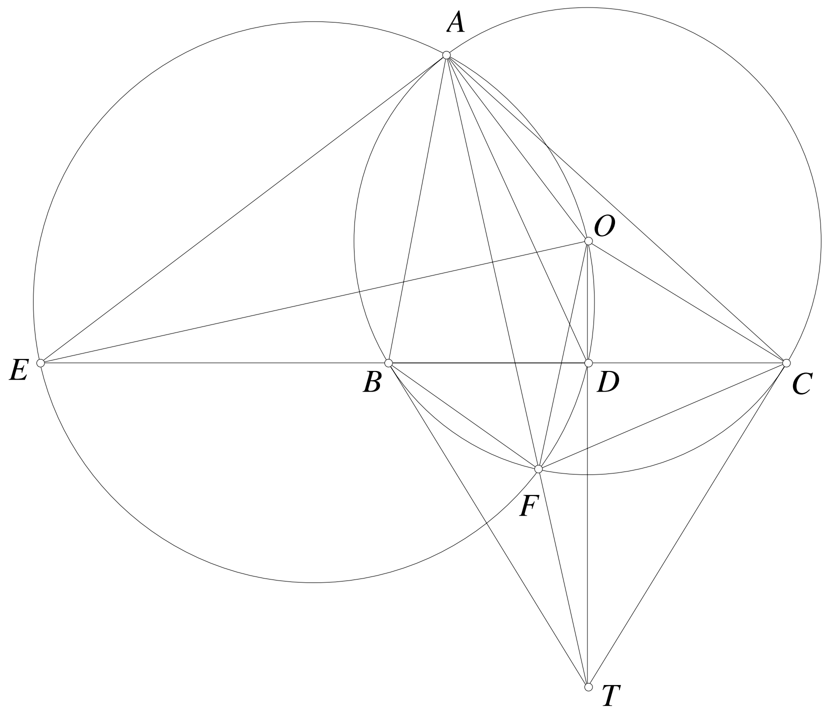
Bài 2. *Cho tam giác ABC trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Chứng minh rằng AK đi qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC.*



Hình 1.

Chứng minh. Gọi E, F là trung điểm CA, AB thì ME, NF là trung trực CA, AB cắt nhau tại tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Ta dễ thấy O là trực tâm tam giác ANM nên $AO \perp MN$. Mặt khác đường tròn các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A nên $AK \perp MN$. Từ đó dễ suy ra AK đi qua O. □

Bài 3. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định và A di chuyển trên (O). D là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại F khác A. Chứng minh rằng AF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.*

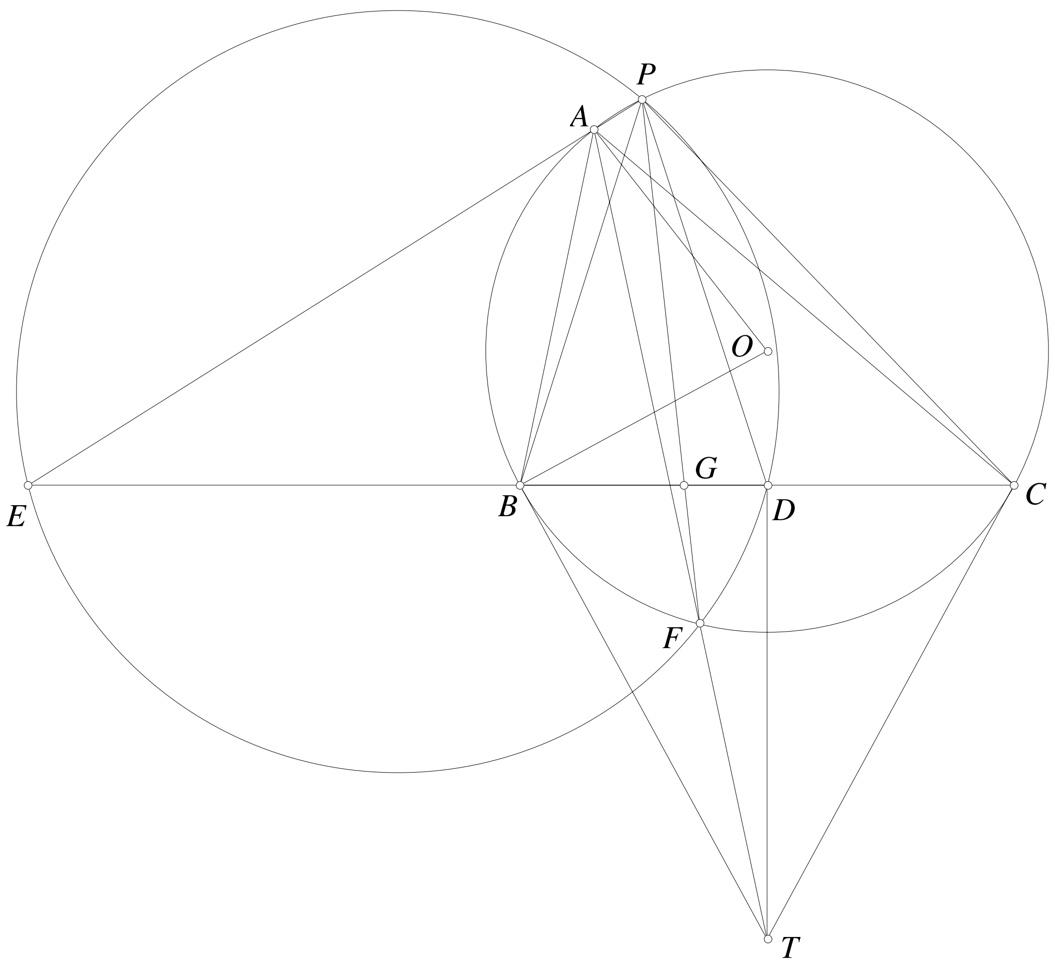


Hình 2.

Chứng minh. Do $\angle EAO = \angle EDO = 90°$ nên dễ thấy O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Gọi AF cắt OD tại T. Ta có $\overline{TD}.\overline{TO} = \overline{TF}.\overline{TA} = \mathscr{P}_{T/(O)} = OT^2 - OC^2$ suy ra $OC^2 = TO^2 - \overline{TD}.\overline{TO} = \overline{TO}.\overline{DO}$. Từ đó dễ suy ra $OC \perp TC$ vậy T cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Về cơ bản hai bài toán trên là hai bài toán dễ và rất phổ biến. Lời giải được trình bày trong bài toán 3 có lẽ là lời giải đơn giản nhất cho bài toán này mà không phải thông qua các công cụ như hàng điều hòa hay tứ giác điều hòa. Nếu để ý kỹ ta cũng có một vài nhận xét và mở rộng thú vị. Ta bắt đầu từ việc phát triển bài toán 3

Bài 4. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định và A di chuyển trên (O). D là trung điểm BC. Một đường thẳng bất kỳ đi qua A cắt BC tại E và cắt (O) tại P khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EPD cắt (O) tại F khác P. Chứng minh rằng AF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.*



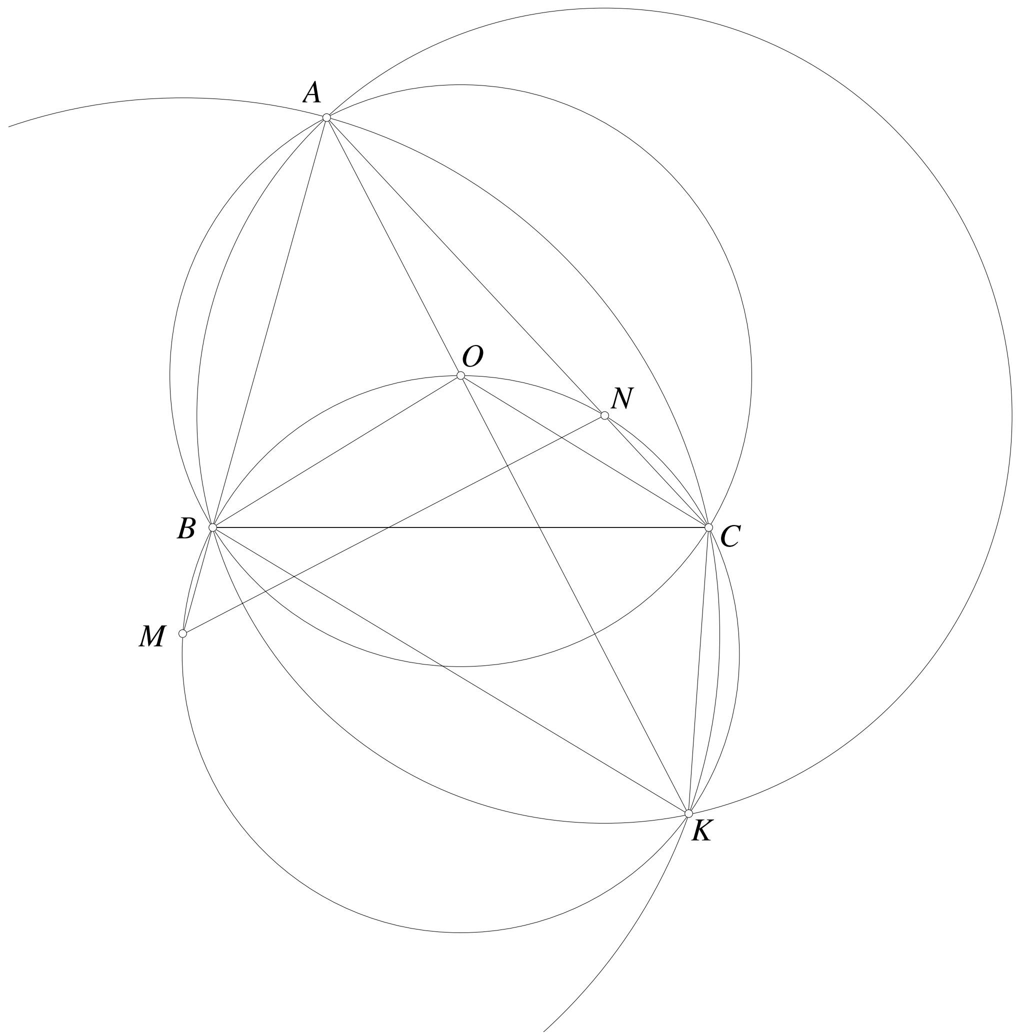
Hình 3.

Chứng minh. Gọi PF giao BC tại G. Từ hệ thức lượng trong đường tròn ta dễ thấy $\overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GP}.\overline{GF} = \overline{GD}.\overline{GE}$. Từ đó do D là trung điểm BC nên theo hệ thức Maclaurin thì hàng $(BC, GE) = -1$. Chiếu bằng tâm P lên đường tròn (O) ta có $(BC, FA) = K(BC, FA) = (BC, GE) = -1$. Do đó tứ giác $ABFC$ điều hòa. Vậy AF đi qua giao điểm của tiếp tuyến tại B, C của (O) cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu $P \equiv A$ thì ta thu được bài toán 3. Khác với cách giải đơn giản trong bài 3 ta phải dùng thông qua công cụ tứ giác điều hòa.

Quay trở về bài toán 2, bài toán 2 có lẽ là kết quả quá đơn giản xong trên mô hình của bài toán đó ta lại có thể khai thác được một số điều thú vị

Bài 5. *Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A và đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC có một điểm chung.*

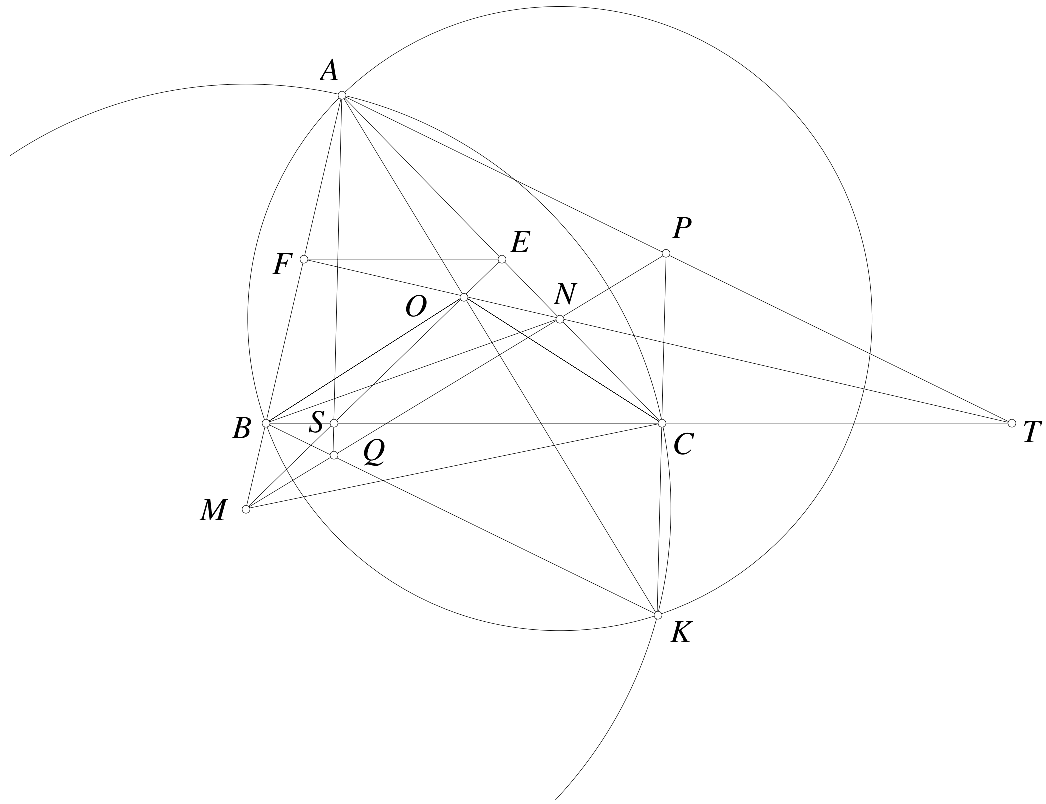


Hình 4.

Chứng minh. Gọi đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Ta để ý rằng $\angle AKC = \dfrac{1}{2}\angle AMC$ do góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm. Tương tự $\angle AKB = \dfrac{1}{2}\angle ANB$. Ta chú các tam giác MAC và NAB cân tại M, N và có chung góc đáy nên $\angle AMC = \angle ANB$. Từ đó ta có KA là phân giác $\angle BKC$. Mặt khác ta tại có O là giao của trung trực BC và KA. Vậy tứ giác $BOCK$ nội tiếp. Các đường tròn tâm M, N cùng đi qua A và đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC có một điểm chung là K. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ $\angle AKC = \dfrac{1}{2}\angle AMC = \angle COB$ ta dễ chứng minh được tứ giác $MOCK$ nội tiếp vậy tương tự ta có 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Nhận xét này giúp ta tìm ra được nhiều bài toán thú vị

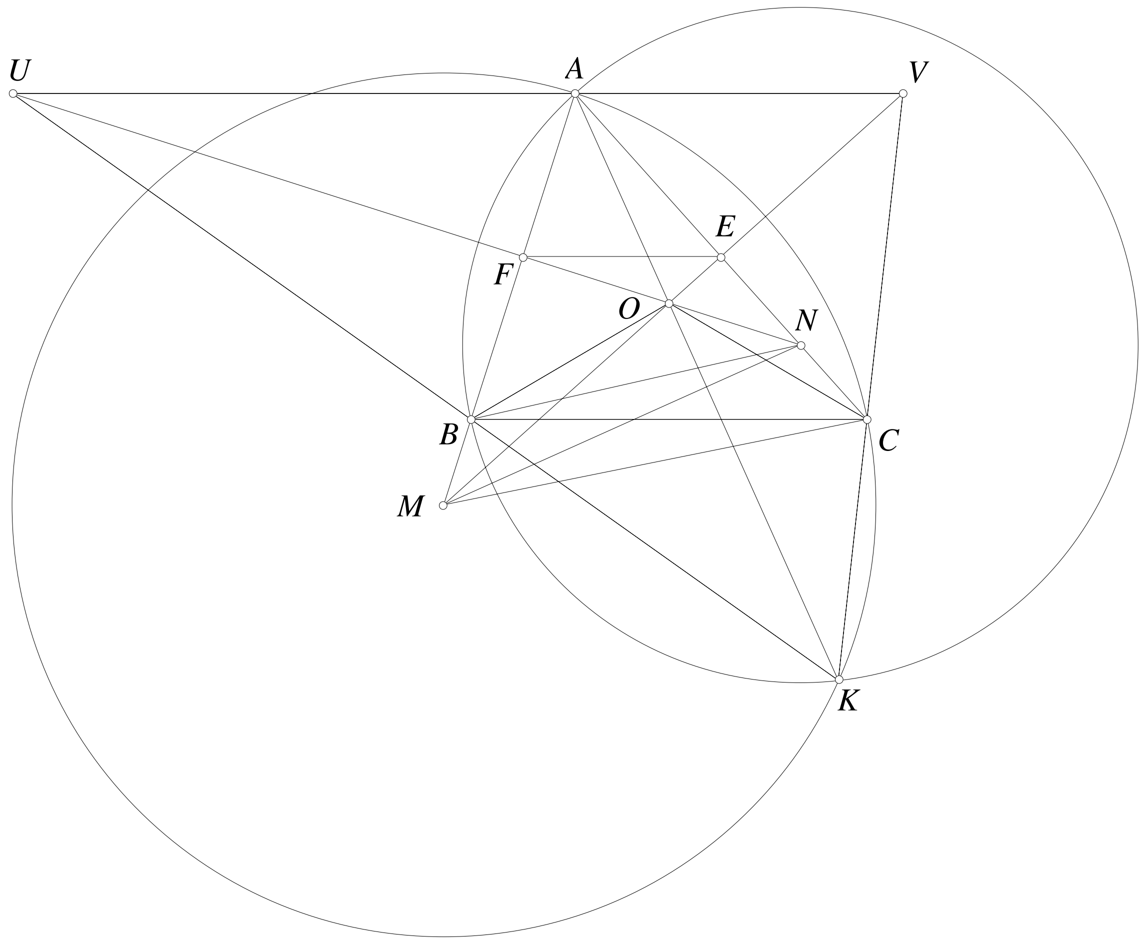
Bài 6. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. MN lần lượt cắt KC, KB tại P, Q. Chứng minh rằng* $\dfrac{NQ}{MP} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.



Hình 5.

Chứng minh. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Theo nhận xét trên 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Nếu gọi ON giao BC tại T, áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} O & M & C \\ B & K & N \end{pmatrix}$ ta suy ra A, P, T thẳng hàng. Ta chú ý ON là trung trực AB nên dễ suy ra $\angle PAB = \angle ABC$. Mặt khác cũng do tứ giác $MBNC$ nội tiếp nên $\angle AMN = \angle ACB$. Từ đó dễ suy ra $\triangle PAM \sim \triangle ABC$. Tương tự $\triangle QNA \sim \triangle ABC$. Từ đó $\triangle PAM \sim \triangle QNA \sim \triangle ABC$. Ta dễ suy ra $\triangle AQN \sim \triangle MNA$ suy ra $AN^2 = MN.NQ$. Tương tự $AM^2 = MP.MN$. Suy ra $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{AN^2}{AM^2} = \dfrac{NQ}{MP}$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 7. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Trung trực AB cắt KB tại U. Trung trực AC cắt KC tại V. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đường tròn nội tiếp tam giác KUV đồng tâm.*



Hình 6.

Chứng minh. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC ta sẽ chứng minh rằng O là tâm nội tiếp tam giác KUV. Theo nhận xét trên 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} M & N & K \\ C & B & O \end{pmatrix}$ ta suy ra A, U, V thẳng hàng. Mặt khác do V thuộc OM là trung trực AC nên VO là phân giác $\angle AVK$. Tương tự UO là phân giác $\angle AUK$. Vậy O là tâm nội tiếp tam giác KUV. □

Nhận xét. Từ kết quả hai bài toán trên ta cũng có thể dễ suy ra $UV \parallel BC$ hoặc suy ra các hệ thức cơ bản như $KB + KC + UV = KU + KV$ hoặc một số kết quả thú vị khác. Các bạn hãy làm bài tập dưới đây để luyện tập

Bài 8. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Trung trực AB cắt KB tại U. Trung trực AC cắt KC tại V. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác BOU, COV và ABC có một điểm chung.*

Như vậy chỉ từ các bài toán gần gũi và quen thuộc nếu ta nhìn dưới con mắt tổng quát hoặc tìm cách khai thác sâu thì ta cũng sẽ thu được nhiều bài toán thú vị và có ý nghĩa. Xin chúc các bạn thành công.

Tài liệu

[1] Đề thi VMO 2014 http://diendantoanhoc.net/forum

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com

Các bài hình học mathley được đề nghị bởi Trần Quang Hùng

1 Đề bài

Bài 1.1. Cho tam giác ABC nhọn tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, đường cao AD. AO cắt BC tại E. Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. I là trung điểm AE. DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ cắt NP tại T. Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng.

Bài 1.2. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) đi qua B, C lần lượt cắt các đoạn BA, CA tại điểm thứ hai F, E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường thẳng CF tại M, N sao cho M nằm giữa C và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt đường thẳng CE tại P, Q sao cho P nằm giữa B và E. Đường thẳng qua N vuông góc AN cắt BE tại R. Đường thẳng qua Q vuông góc AQ cắt CF tại S. SP giao NR tại U. RM giao QS tại V. Chứng minh rằng NQ, UV, RS đồng quy.

Bài 1.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P_1, P_2 là hai điểm bất kỳ trong mặt phẳng; P_1A, P_1B, P_1C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_1, B_1, C_1; P_2A, P_2B, P_2C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai A_2, B_2, C_2.

a) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt giao BC, CA, AB tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

b) P là một điểm bất kỳ trên đường thẳng P_1P_2; A_1P, B_1P, C_1P lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_4, B_4, C_4. Chứng minh rằng ba đường thẳng A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4 đồng quy tại một điểm trên P_1P_2.

Bài 1.4. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) bất kỳ tiếp xúc đoạn thẳng AC, AB lần lượt tại E, F. (K) cắt đoạn thẳng BC tại M, N sao cho N nằm giữa B và M. FM giao EN tại I. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác IFN và IEM cắt nhau tại J khác I. Chứng minh rằng IJ đi qua A và KJ vuông góc IJ.

Bài 1.5. Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. A_1 là hình chiếu song song của P theo phương l cố định lên BC. A_2 là trung điểm AA_1. A_2P cắt BC tại A_3. A_4 đối xứng A_1 qua A_3. Chứng minh rằng PA_4 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) bất kỳ qua B, C. Đường tròn (O_1) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong với (K). Đường tròn (O_2) tiếp xúc DB, DC và tiếp xúc trong với (K). Chứng minh rằng một trong hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) song song với AD.

Bài 1.7. Cho tam giác ABC không cân, (O), H theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. Đường thẳng qua A và song song với OH lại cắt (O) tại K. Đường thẳng qua K và song song với AH lại cắt (O) tại L. Đường thẳng qua L song song với OA cắt OH tại E. Chứng minh rằng các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 1.8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.

Bài 1.9. Cho tam giác ABC đường tròn (O) bất kỳ. (O) cắt CA tại L, E và cắt AB tại K, F. D là một điểm thuộc (O). d là đường thẳng bất kỳ đi qua A. DE, DF lần lượt cắt d tại M, N. Chứng minh rằng MK giao NL tại điểm thuộc (O).

Bài 1.10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.

Bài 1.11. Cho tam giác ABC. Gọi (O_a) là đường tròn bất kỳ đi qua B, C; hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ xác định tương tự. Hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ cắt nhau tại A_1, khác A. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự. Gọi Q là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác ABC. QB, QC lần lượt cắt (O_c), (O_b) tại A_2, A_3 khác B, C. Tương tự ta có B_2, B_3, C_2, C_3. Gọi (K_a), (K_b), (K_c) là các đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, và $C_1C_2C_3$. Chứng minh rằng

a) ba đường tròn $(K_a), (K_b), (K_c)$ có cùng một điểm chung.

b) hai tam giác $K_aK_bK_c$, ABC đồng dạng.

Bài 1.12. Giả sử E, F là hai điểm trên cạnh CA, AB của tam giác ABC. Gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng

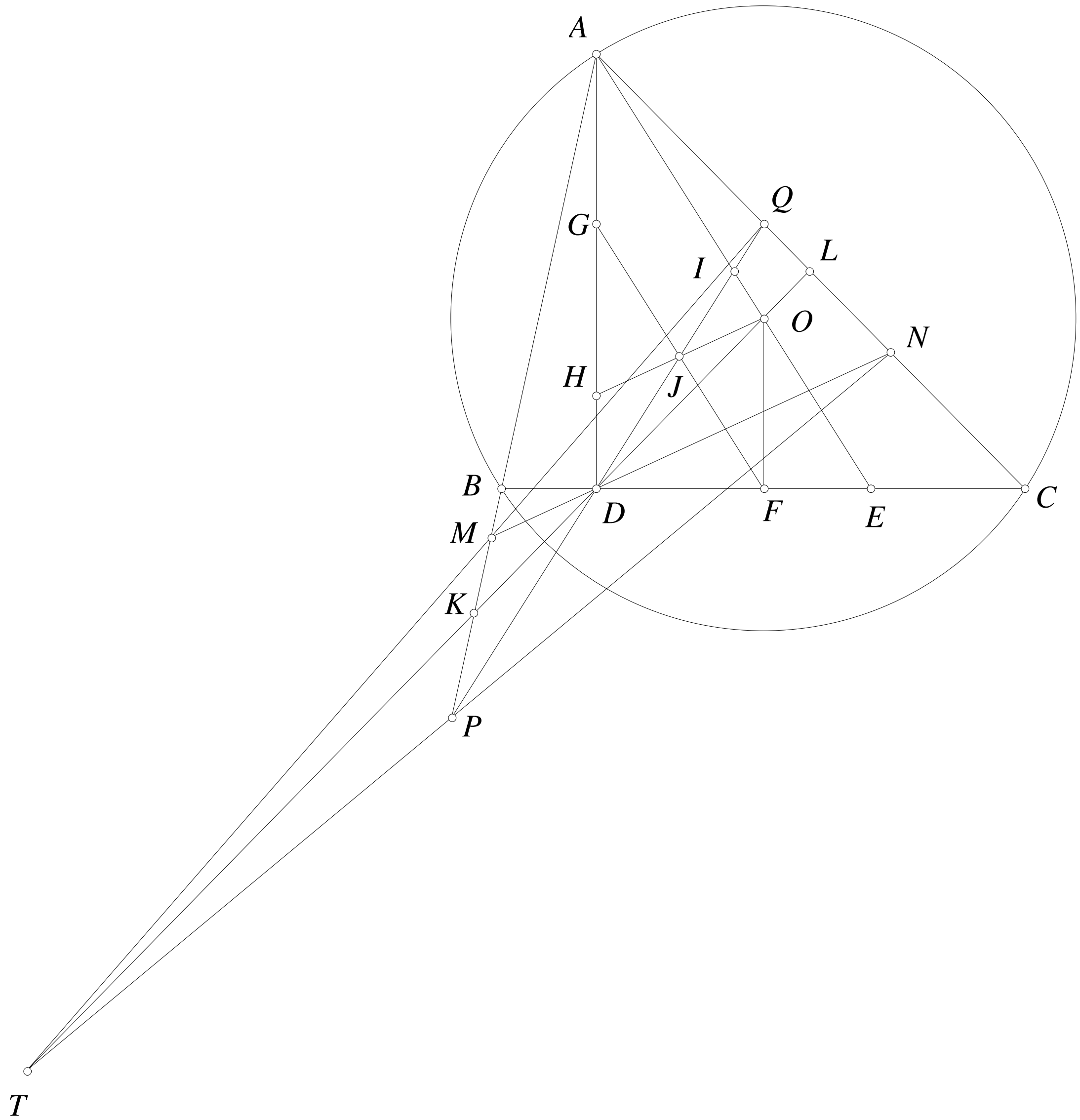
a) T nằm trên BC nếu và chỉ nếu BE cắt CF tại một điểm thuộc đường tròn (K);

b) EF, PQ, BC đồng quy biết rằng BE cắt FT tại M, CF cắt ET tại N, AM và AN cắt đường tròn (K) tại P, Q khác A.

Bài 1.13. Cho tam giác ABC và đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại M, N. Dựng tam giác APQ bằng và ngược hướng tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau.

2 Lời giải

Bài 2.1. Cho tam giác ABC nhọn tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, đường cao AD. AO cắt BC tại E. Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. I là trung điểm AE. DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ cắt NP tại T. Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng.



Hình 1.

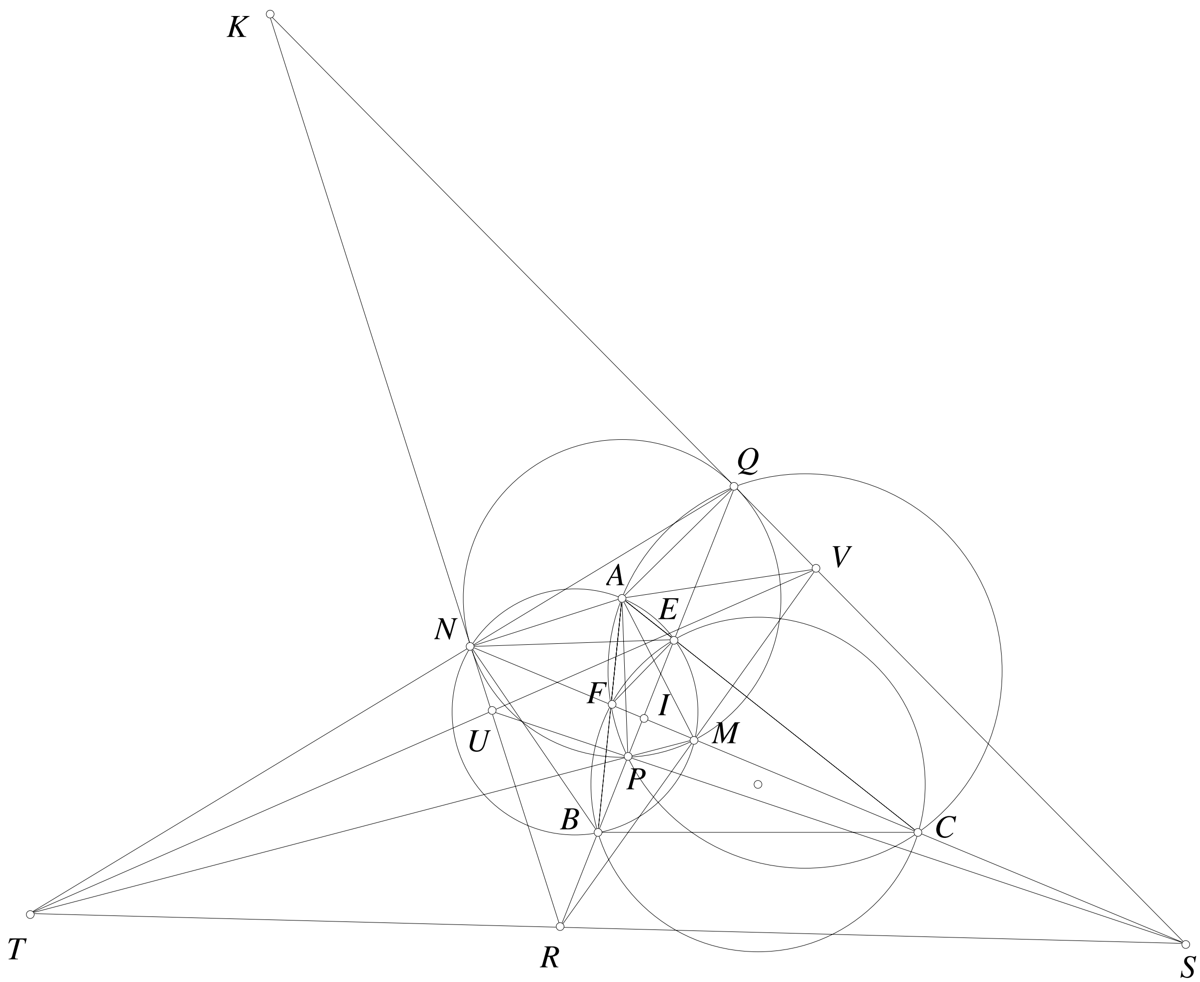
Lời giải. Gọi F là trung điểm BC, G là trung điểm AH. Từ kết quả quen thuộc $2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AH}$. Ta có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OF}$. Tứ đó các tứ giác $AGFO, GHFO$ là hình bình hành suy ra GF song song AE và GF, OH có chung trung điểm J. Trong tam giác ADE có trung tuyến AI đi qua trung điểm đoạn chắn song song GF. Do đó AI đi qua trung điểm J của OH. Chú ý $DN \parallel HO$ từ liên hệ giữa tỷ số đơn và tỷ số kép ta có $D(HOJN) = (HOJ) = -1$.

Gọi OD giao AB, AC tại K, L. Qua phép chiếu xuyên tâm D ta dễ thấy

$$(AKMP) = D(AKMP) = D(ALNQ) = (ALNQ) = D(HOJN) = -1$$

Khi $(AKMP) = -1$ ta cũng có $(AKPM) = -1$. Vậy từ hai đẳng thức trên ta có $(AKPM) = (ALNQ)$ hay KL, PN, MQ đồng quy tại T, nói cách khác D, O, T thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.2. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) đi qua B, C lần lượt cắt các đoạn BA, CA tại điểm thứ hai F, E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường thẳng CF tại M, N sao cho M nằm giữa C và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt đường thẳng CE tại P, Q sao cho P nằm giữa B và E. Đường thẳng qua N vuông góc AN cắt BE tại R. Đường thẳng qua Q vuông góc AQ cắt CF tại S. SP giao NR tại U. RM giao QS tại V. Chứng minh rằng NQ, UV, RS đồng quy.



Hình 2.

Lời giải. Do các tứ giác $ANBE$ và $BCEF$ nội tiếp $\angle ANE = \angle ABE = \angle ACN$ nên $\triangle ANE \sim \triangle ACN$ do đó $AN^2 = AE.AC$. Tương tự $AM^2 = AE.AC, AP^2 = AQ^2 = AF.AB$, do $BCEF$ nội tiếp nên $AE.AC = AF.AB$. Từ đó ta có $AM = AN = AP = AQ$ hay M, N, P, Q thuộc đường tròn (A).

Gọi CN giao BQ tại I, RN giao SQ tại K. Ta xét phép chiếu xuyên tâm trên đường tròn (A), chú ý NR, QS là tiếp tuyến của (A), ta có

$$(MNPQ) = N(MNPQ) = (IRPQ) = S(IRPQ) = (NRUK) \quad (1)$$

và

$$(MNPQ) = Q(MNPQ) = (MNIS) = R(MNIS) = (VKQS) = (QSVK) \quad (2)$$

Từ $(1), (2)$ suy ra $(NRUK) = (QSVK)$ do đó QN, RS, UV đồng quy, đó là điều phải chứng minh.

□

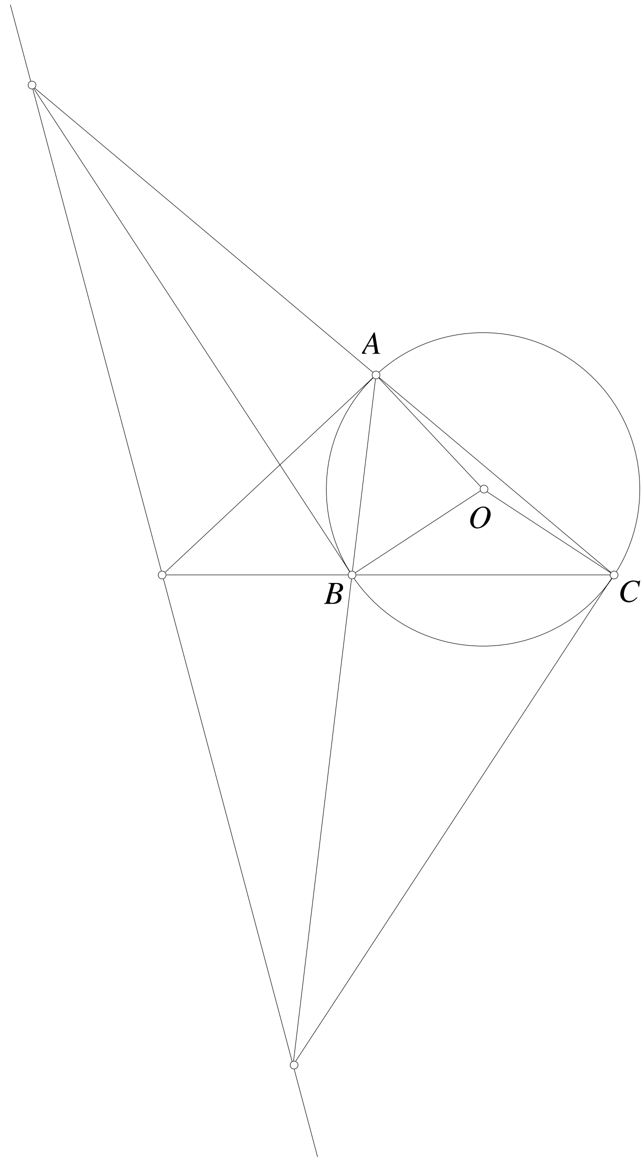
Bài 2.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P_1, P_2 là hai điểm bất kỳ trong mặt phẳng; P_1A, P_1B, P_1C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_1, B_1, C_1; P_2A, P_2B, P_2C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai A_2, B_2, C_2.

a) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt giao BC, CA, AB tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

b) P là một điểm bất kỳ trên đường thẳng P_1P_2; A_1P, B_1P, C_1P lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_4, B_4, C_4. Chứng minh rằng ba đường thẳng A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4 đồng quy tại một điểm trên P_1P_2.

Để giải bài toán ta cần một số bổ đề sau

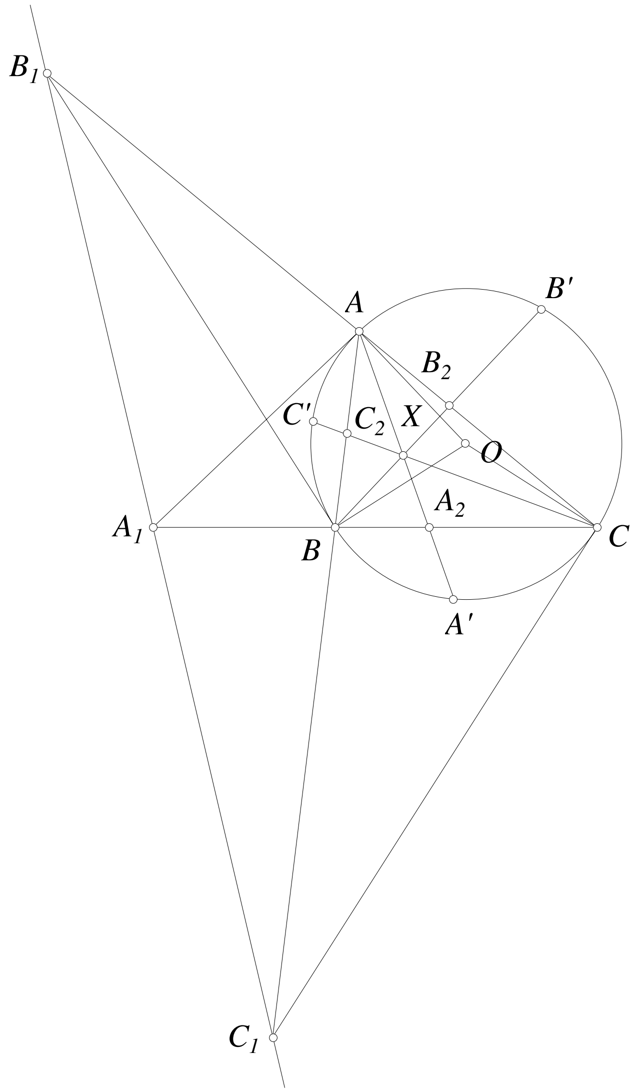
Bổ đề 2.3.1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Khi đó các tiếp tuyến tại A, B, C của (O) tương ứng cắt BC, CA, AB tại ba điểm thẳng hàng.



Hình 3.

Bổ đề này đã rất quen thuộc xin không nêu cách chứng minh.

Bổ đề 2.3.2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với X là điểm bất kỳ. Gọi A', B', C' là giao điểm thứ hai của AX, BX, CX với đường tròn (O). khi đó $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$.



Hình 4.

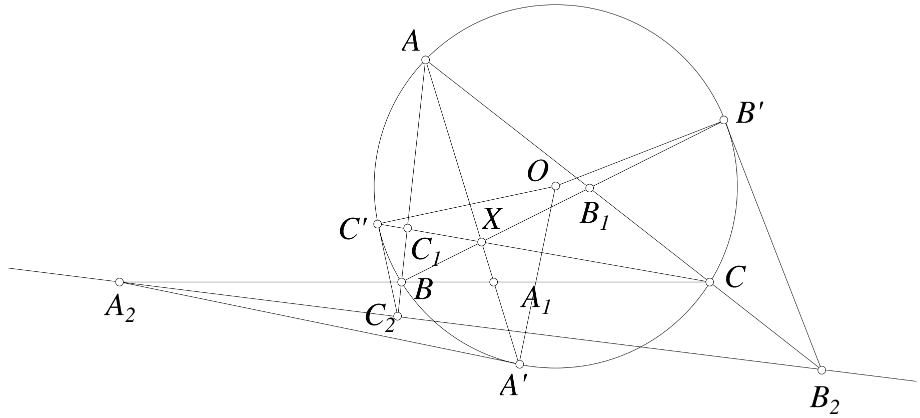
Lời giải. Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là giao điểm của tiếp tuyến tại A, B, C của (O) với các đường thẳng BC, CA, AB và A_2, B_2, C_2 tương ứng là giao điểm của AX, BX, CX với các đường thẳng BC, CA, AB.

Khi đó ta dễ thấy

$$(BCAA') = A(BCAA') = A(BCA_2A_1) = (BCA_2A_1) = \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} : \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$$

Tương tự với $(CABB'), (ABCC')$ ta chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy và A_2, B_2, C_2 thẳng hàng khi nhân các tỷ số kép với nhau áp dụng các định lý Menelaus và Ceva ta dễ suy ra $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$. Đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.3.3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với X là điểm bất kỳ. Gọi A', B', C' là giao điểm thứ hai của AX, BX, CX với đường tròn (O). Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (O) tại A', B', C' tương ứng cắt BC, CA, AB tại ba điểm thẳng hàng.



Hình 5.

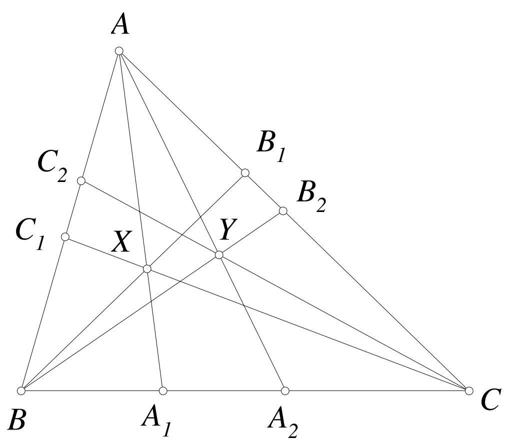
Lời giải. Gọi giao điểm của đường thẳng AA', BB', CC' và tiếp tuyến tại A', B', C' của (O) với BC, CA, AB lần lượt là $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1C_2$. Ta thấy

$$(BCAA') = A'(BCAA') = A'(BCA_1A_2) = (BCA_1A_2) = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$$

Tương tự với $(CABB'), (ABCC')$ ta chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy và theo bổ đề 3.2 thì $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$ do đó dễ suy ra $\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} . \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}} . \frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}} = 1$ nên A_2, B_2, C_2 thẳng hàng theo định lý Menelaus, đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.3.4. Cho năm điểm A, B, C, X, Y trên mặt phẳng khi đó

$$A(BCXY) \cdot B(CAXY) \cdot C(ABXY) = 1.$$



Hình 6.

Lời giải. Gọi giao điểm của AX, AY với đường thẳng BC là A_1, A_2 ta dễ thấy

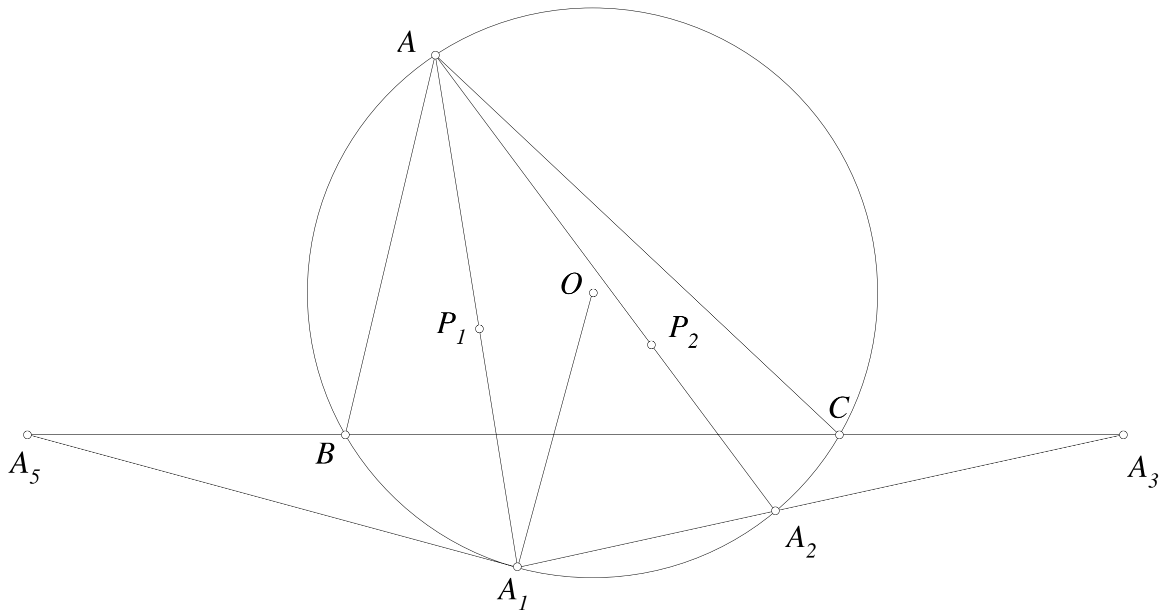
$$A(BCXY) = (BCA_1A_2) = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$$

Chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại X, AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại Y do đó áp dụng định lý Ceva ta có

$$A(BCXY)\cdot B(CAXY)\cdot C(ABXY)=\prod\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}:\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}=\prod\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}:\prod\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}=-1:-1=1$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Lời giải. a) Gọi A_5, B_5, C_5 lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến tại A_1, B_1, C_1 với BC, CA, AB, theo bổ đề 1 ta đã có A_5, B_5, C_5 thẳng hàng.



Hình 7.

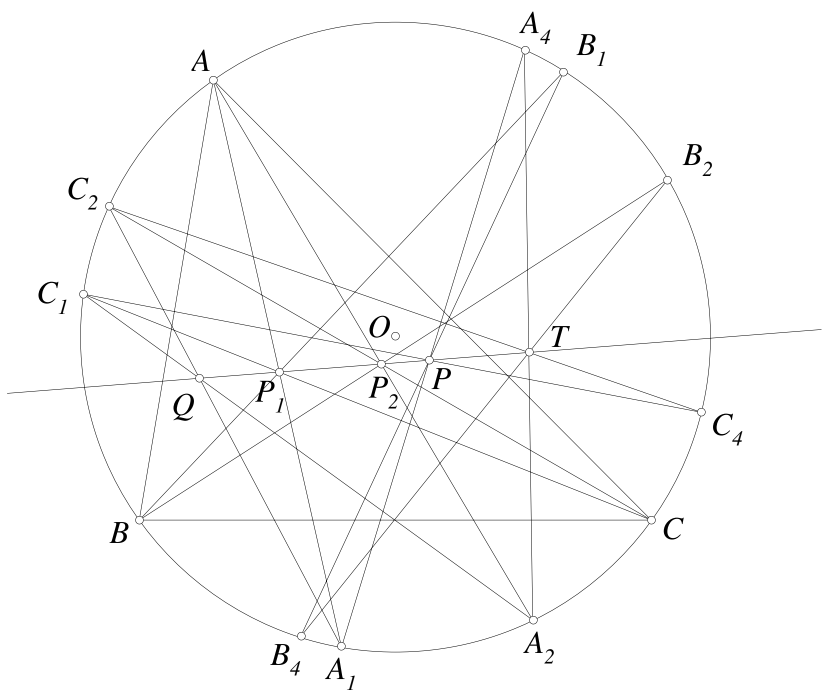
$$A(BCP_1P_2)=A(BCA_1A_2)=(BCA_1A_2)=A_1(BCA_1A_2)=A_1(BCA_5A_3)=(BCA_5A_3)=\frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}}:\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}$$

Vậy

$$A(BCP_1P_2)\cdot B(CAP_1P_2)\cdot C(ABP_1P_2)=\prod\frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}}:\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}$$

Theo bổ đề 3.4, $A(BCP_1P_2)\cdot B(CAP_1P_2)\cdot C(ABP_1P_2)=1$, mặt khác theo bổ đề 3.3 A_5, B_5, C_5 thẳng hàng, áp dụng định lý Menelaus ta có $\prod\frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}}=1$. Vậy kết hợp đẳng thức trên ta suy ra $\prod\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}=1$, vậy A_3, B_3, C_3 thẳng hàng theo định lý Menelaus. Ta có điều phải chứng minh.

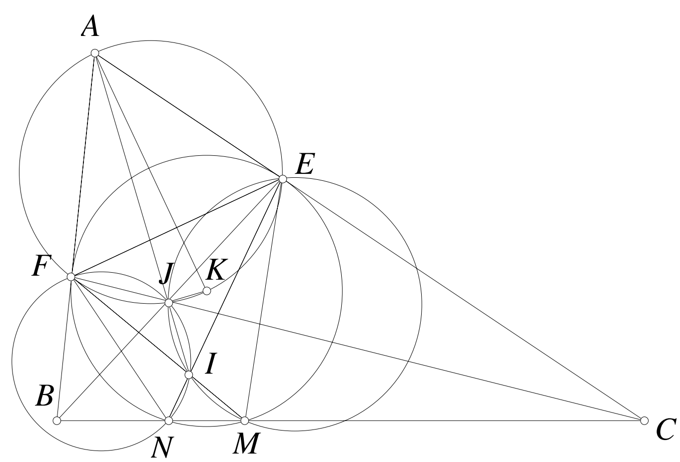
b) Gọi Q là giao điểm của A_1C_2 và A_2C_1. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $C_1C_2ACA_2A_1$ ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(C_2A_1, C_1A_2), (C_1C, A_1A), (AA_2, CC_2)$ thẳng hàng, hay Q thuộc P_1P_2.



Hình 8.

Tiếp tục áp dụng định lý Pascal cho lục giác $C_1C_2A_4C_4A_2A_1$ ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(C_2A_1, C_1A_2), (C_2C_4, A_2A_4), (A_4A_1, C_4C_1)$ thẳng hàng hay giao điểm T của A_4A_2 và C_4C_2 nằm trên P_1P_2. Tương tự ta có giao điểm T' của A_4A_2 và B_4B_2 nằm trên P_1P_2. Do đó $T' \equiv T$. Như vậy A_4A_2, B_4B_2, C_4C_2 đồng quy tại một điểm T nằm trên P_1P_2. □

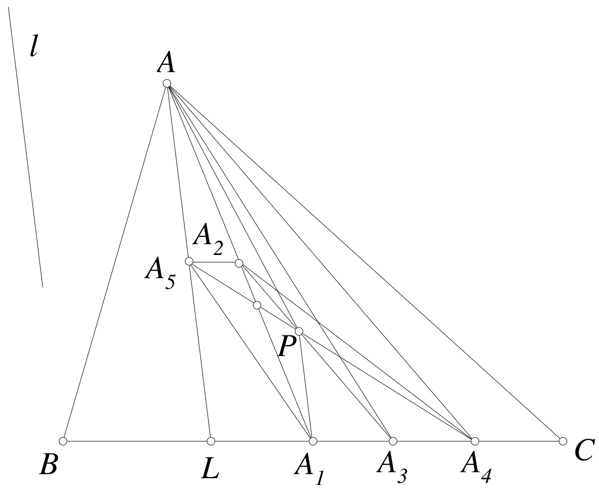
Bài 2.4. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) bất kỳ tiếp xúc đoạn thẳng AC, AB lần lượt tại E, F. (K) cắt đoạn thẳng BC tại M, N sao cho N nằm giữa B và M. FM giao EN tại I. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác IFN và IEM cắt nhau tại J khác I. Chứng minh rằng IJ đi qua A và KJ vuông góc IJ.



Hình 9.

Lời giải. Gọi J' là hình chiếu của K lên AI dễ thấy A, F, J', K, E thuộc đường tròn đường kính AK. Từ đó ta có góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nhau $\angle AJ'F = \angle AEF = \angle FNI$ suy ra tứ giác $FJ'IN$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $EJ'IM$ nội tiếp từ đó J' là điểm chung khác I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IFN và IEM, vậy $J' \equiv J$ suy ra A, I, J thẳng hàng và $KJ \perp IJ$. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 2.5. Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. A_1 là hình chiếu song song của P theo phương l cố định lên BC. A_2 là trung điểm AA_1. A_2P cắt BC tại A_3. A_4 đối xứng A_1 qua A_3. Chứng minh rằng PA_4 luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 10.

Lời giải. Gọi L là hình chiếu song song phương l của A lên BC. Gọi A_5 là trung điểm AL ta sẽ chứng minh rằng A_4, P, A_5 thẳng hàng thật vậy, từ liên hệ tỷ số đơn và tỷ số kép dễ thấy

$A_1(A_4A_2A_5P) = (LAA_5) = -1$ (Do $PA_1 \parallel AL$ và A_5 là trung điểm AL)

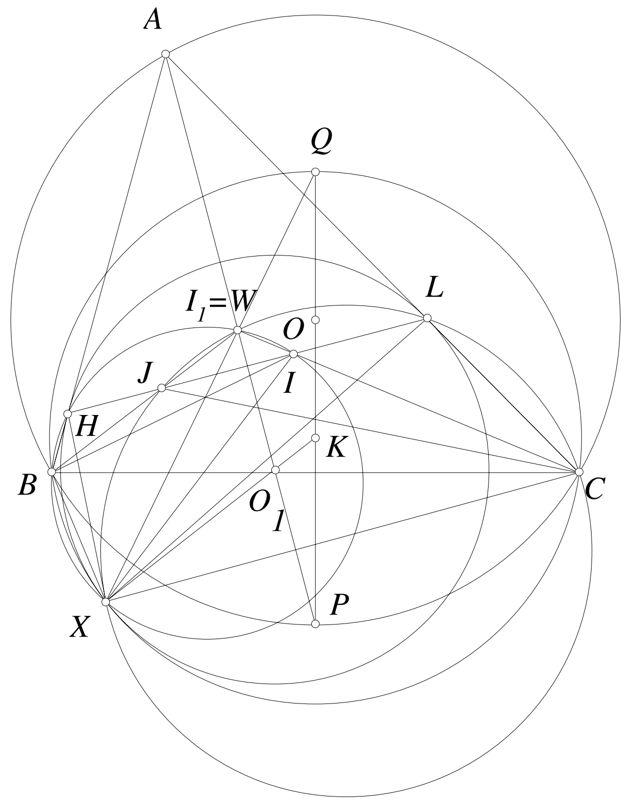
$A_2(A_4A_1A_3A_5) = (A_4A_1A_3) = -1$ (Do $A_2A_5 \parallel A_1A_4$ và A_3 là trung điểm A_1A_4)

Từ đó $A_1(A_4A_2A_5P) = A_2(A_4A_1A_3A_5)$ nên A_4, A_5, P thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) bất kỳ qua B, C. Đường tròn (O_1) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong với (K). Đường tròn (O_2) tiếp xúc DB, DC và tiếp xúc trong với (K). Chứng minh rằng một trong hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) song song với AD.

Lời giải. Ta có một số nhận xét sau

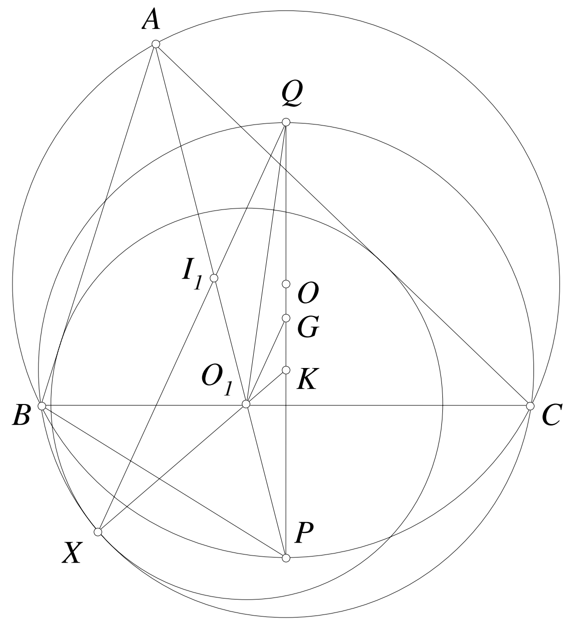
Nhận xét 1. $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc (K) tại X, Y. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và DBC. Thì XI_1, YI_2 cắt nhau tại điểm Q thuộc (K) là trung điểm cung BC không chứa X, Y của (K).



Hình 11.

Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh XI_1 là phân giác $\angle BXC$. Gọi (O_1) tiếp xúc AB, AC tại H, L. Gọi W là giao điểm khác X của đường tròn (XBH) và (XCL). CW giao (BHX) tại I khác W, BW giao (CLX) tại J khác W. Ta có $\angle XLJ = \angle XWJ = \angle XWB = \angle BHX = \angle XLH$ từ đó J thuộc HL. Tương tự I thuộc HL. Từ đó dễ chứng minh tứ giác $IJBC$ nội tiếp bằng cộng góc. Vậy $\angle CBW = \angle WIH = \angle HBW$ hay BW là phân giác $\angle ABC$. Tương tự CW là phân giác $\angle ACB$, vậy $W \equiv I_1$. Từ đó $\angle BXI_1 = \angle BII_1 = 180^\circ - \angle BIC = 180^\circ - \angle BJC = \angle CJI_1 = \angle CXI_1$. Vậy ta hoàn thành chứng minh.

Nhận xét 2. Gọi P là trung điểm cung BC không chứa A, D của (O) thì $\dfrac{I_1O_1}{R_1} = \dfrac{PB}{PQ} = \dfrac{PC}{PQ} = \dfrac{I_2O_2}{R_2}$, với R_1, R_2 là bán kính của $(O_1), (O_2)$.

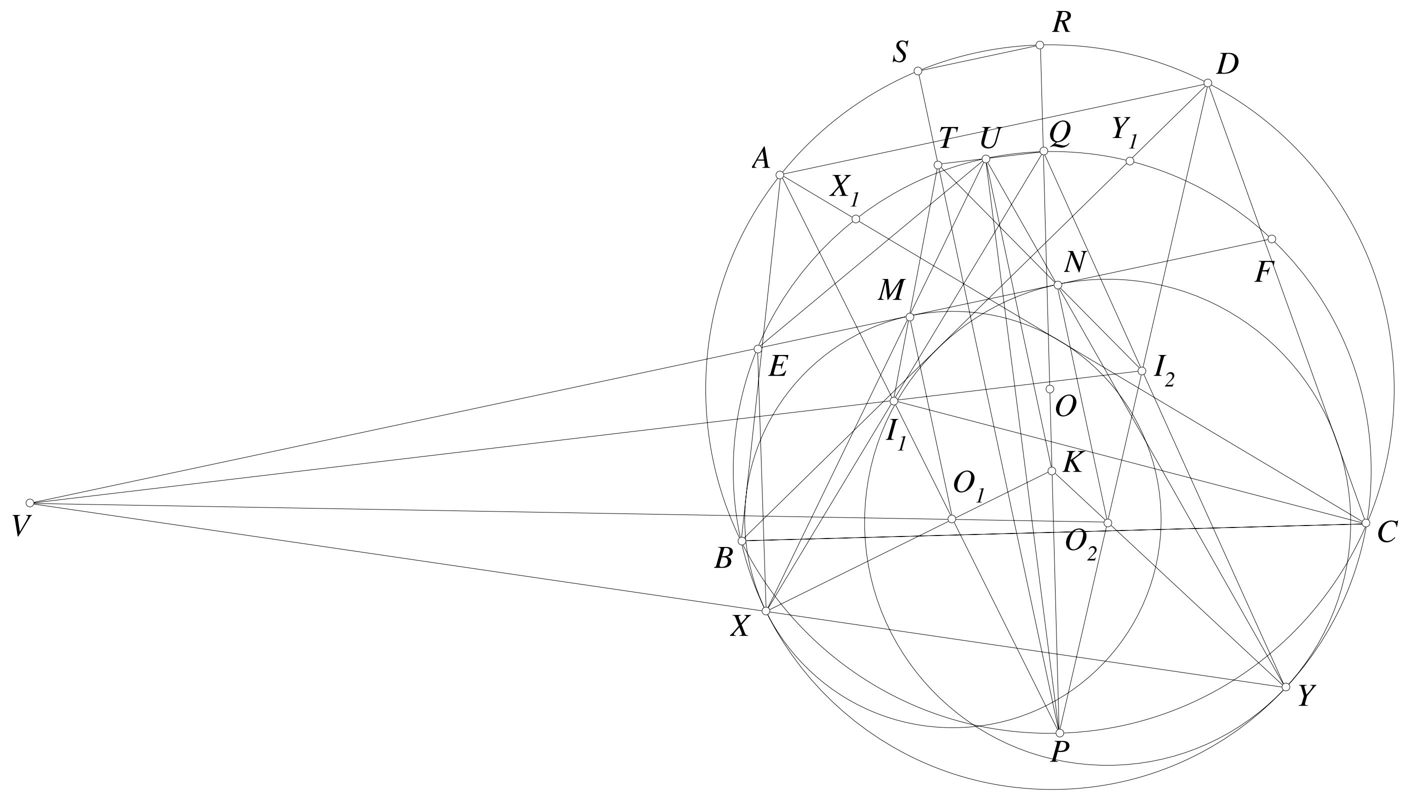


Hình 12.

Thật vậy, từ nhận xét 1 thì O, K, Q thẳng hàng. Lấy G thuộc KQ sao cho $KG = KO_1$ từ đó dễ thấy $O_1G \parallel XQ$ vậy ta có

$$\frac{PB}{PQ} = \frac{PI_1}{PQ} = \frac{PO_1}{PG} = \frac{PI_1 - PO_1}{PQ - PG} = \frac{I_1O_1}{GQ} = \frac{I_1O_1}{KQ - KG} = \frac{I_1O_1}{KX - KO_1} = \frac{I_1O_1}{R_1}.$$

Nhận xét 3. Gọi AC, BD giao (K) tại điểm thứ hai X_1, Y_1. U là trung điểm cung X_1Y_1 không chứa B, C của (K) thì $I_1I_2 \parallel UQ$.



Hình 13.

Thật vậy, ta chú ý $\angle BI_1C = 90^\circ + \dfrac{\angle BAC}{2} = 90^\circ + \dfrac{\angle BDC}{2} = \angle BI_2C$ do đó tứ giác BI_1I_2C nội tiếp. Ta có $(I_1I_2, BC) = (I_1I_2, I_2B) + (I_2B, BC) = (CI_1, CB) + (BI_2, BC) (\bmod \pi)$ (1).

Ta lại có $(UQ, BC) = (UQ, QB) + (QB, BC) = (CU, CB) + (BQ, BC) = (CU, CX_1) + (CX_1, CI_1) + (CI_1, CB) + (BQ, BY_1) + (BY_1, BI_2) + (BI_2, BC) = (BY_1, BU) + 2(CI_1, CB) + (BQ, BY_1) + 2(BI_2, BC) = (BQ, BU) + 2(CI_1, CB) + 2(BI_2, BC) (\bmod \pi)$ (2)

Mặt khác $(CX_1, CB) + (BY_1, BC) = (CX_1, CU) + (CU, CQ) + (CQ, CB) + (BY_1, BU) + (BU, BQ) + (BQ, BC) = (CU, CQ) + (BU, BQ) = 2(BU, BQ) (\bmod \pi)$.

Từ đó suy ra $(CI_1, CB) + (BI_2, BC) = \dfrac{1}{2}[(CX_1, CB) + (BY_1, BC)] = (BU, BQ) (\bmod \pi)$ (3).

Từ (2), (3) ta suy ra $(UQ, BC) = (CI_1, CB) + (BI_2, BC) (\bmod \pi)$ (4).

Từ (1), (4) ta suy ra $I_1I_2 \parallel UQ$.

Trở lại bài toán, qua P vẽ đường thẳng song song KU giao QU tại T. Ta định nghĩa lại các điểm M, N, gọi đoạn I_1T cắt (O_1) tại M, gọi đoạn I_2T cắt (O_2) tại N. Theo nhận xét 2 thì $\dfrac{O_1M}{PT} = \dfrac{R_1}{PQ} = \dfrac{I_1O_1}{PI_1}$ do đó $O_1M \parallel PT \parallel KU$ suy ra X, M, U thẳng hàng, tương tự Y, N, U thẳng hàng.

Gọi V là tâm vị tự ngoài của $(O_1), (O_2)$ thì V thuộc O_1O_2, chú ý $O_1M \parallel O_2N$ nên V thuộc MN. X, Y là tâm vị tự trong của (K) và (O_1), của (K) và (O_2) nên XY đi qua V. Chú ý tam giác I_1O_1M và I_2O_2M có I_1M giao I_2N tại T, I_1O_1 giao I_2O_2 tại P và $PT \parallel MO_1 \parallel NO_2$ do đó theo định lý Desargues I_1I_2 đi qua V là giao của MN và O_1O_2.

Ta dễ chứng minh $PT = PQ, PI_1 = PI_2$ kết hợp $QT \parallel I_1I_2$ của nhận xét 3 suy ra tứ giác

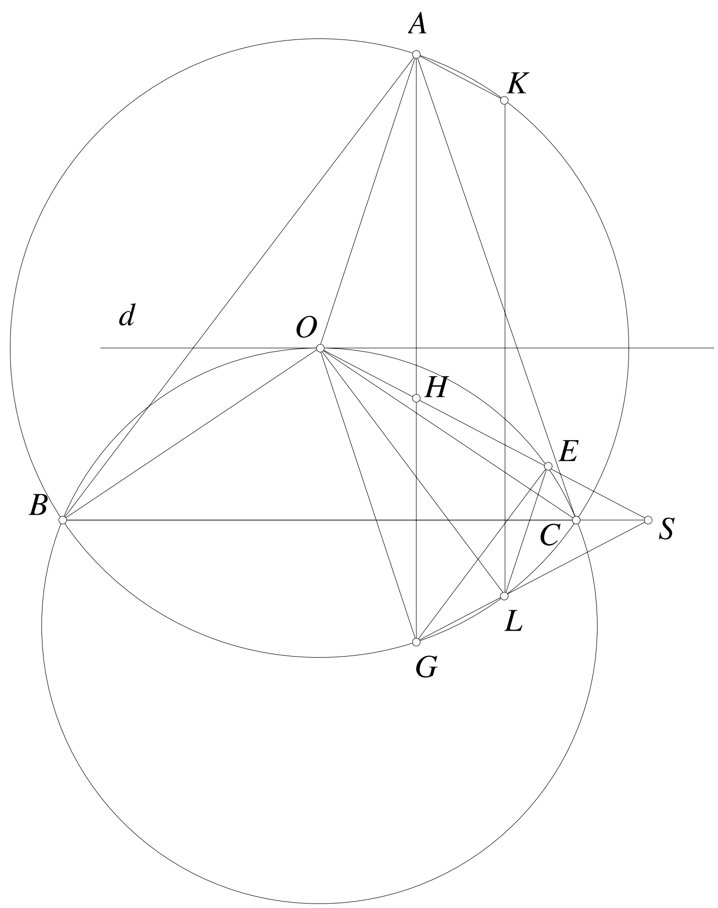
TI_1I_2Q là hình thang cân do đó $(I_1M, I_1V) = (I_1T, I_1I_2) = (QT, QI_2) = (QU, QY) = (XU, XY) = (XM, XV) (\mod \pi)$ từ đó tứ giác I_1MVX nội tiếp, tương tự tứ giác I_2NVY nội tiếp. Vậy ta có $(MN, MX) = (MV, MX) = (I_1V, I_1X) = (I_1I_2, I_1Q) = (I_2T, I_2I_1) = (I_2N, I_2V) = (YN, YV) = (YN, YX) (\mod \pi)$, từ đó tứ giác $XMNY$ nội tiếp.

Ta gọi MN giao (K) tại E, F. Ta thấy $\angle EMU = \angle XMN = 180^\circ - \angle XYN = \angle XEU$ suy ra $\triangle EMU \sim \triangle XEU$ vậy $UE^2 = UM.UX$. Tương tự $UF^2 = UN.UY$ mà XMNY nội tiếp nên $UM.UX = UN.UY$ do đó $UE = UF$, vậy tam giác UEF cân suy ra $KU \perp EF$. Từ trên đã có $O_1M \parallel O_2N \parallel KU$ suy ra O_1M, O_2N vuông góc MN hay MN là tiếp tuyến chung của $(O_1), (O_2)$.

Gọi PT, PQ cắt (O) tại S, R. Từ trên đã có $PT = PQ, PI_1 = PI_2$ và TI_1I_2Q là hình thang cân nên $\angle APS = \angle DPR$ hay $SR \parallel AD$. Chú ý PR là đường kính của (O) nên $PS \perp SR$ vậy $PS \perp AD$. Cũng từ chứng minh trên ta đã có $PS \equiv PT \parallel KU \perp MN$ vậy từ đó $MN \parallel AD$ do cùng vuông góc PS. Ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 2.7. Cho tam giác ABC không cân, (O), H theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. Đường thẳng qua A và song song với OH lại cắt (O) tại K. Đường thẳng qua K và song song với AH lại cắt (O) tại L. Đường thẳng qua L song song với OA cắt OH tại E. Chứng minh rằng các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn.



Hình 14.

Lời giải. Gọi AH giao (O) tại G khác A. Do $KL \parallel AH$ nên $AKLG$ là hình thang cân. Ta lại chú ý $AKHF$ là hình bình hành nên $FHGL$ là hình thang cân. Do tính chất trực tâm H đối xứng G qua

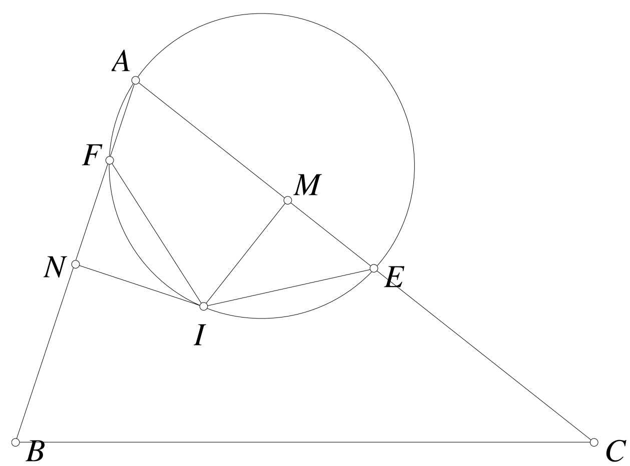
BC do đó BC là trục đối xứng của $FHGL$ vậy FH, GL, BC đồng quy tại S. Gọi d là trục đối xứng của $AKHF$ ta có các biến đổi góc sau

$$\begin{aligned}(LE, LG) &\equiv (LE, LK) + (LK, LG) \\ &\equiv (AO, AG) + (KA, KL)(\text{Do } LK \parallel AL \text{ và phép đối xứng trục } d) \\ &\equiv (GA, GO) + (OE, GA)(\text{Do phép đối xứng trục } d \text{ và } KA \parallel OE, KL \parallel GA) \\ &\equiv (OE, OG) (\operatorname{mod} \pi)\end{aligned}$$

Từ đó bốn điểm O, L, E, G cùng thuộc một đường tròn. Vậy $\overline{SE}.\overline{SO} = \overline{SG}.\overline{SL} = \overline{SB}.\overline{SC}$ hay các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 2.8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.

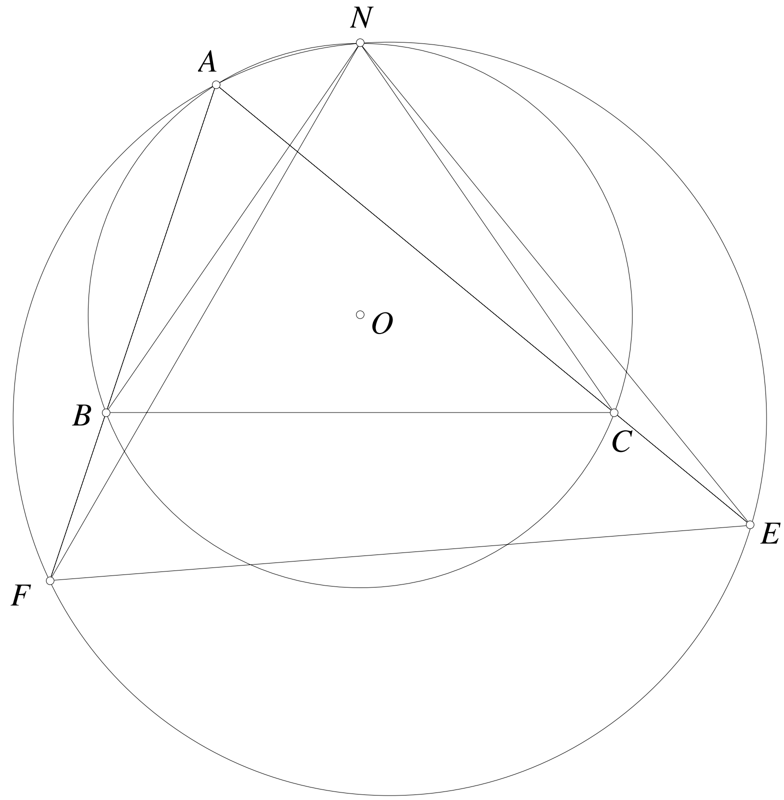
Bổ đề 2.8.1. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bất kỳ qua A, I cắt CA, AB tại E, F khác A thì $AE + AF = CA + AB - BC$.



Hình 15.

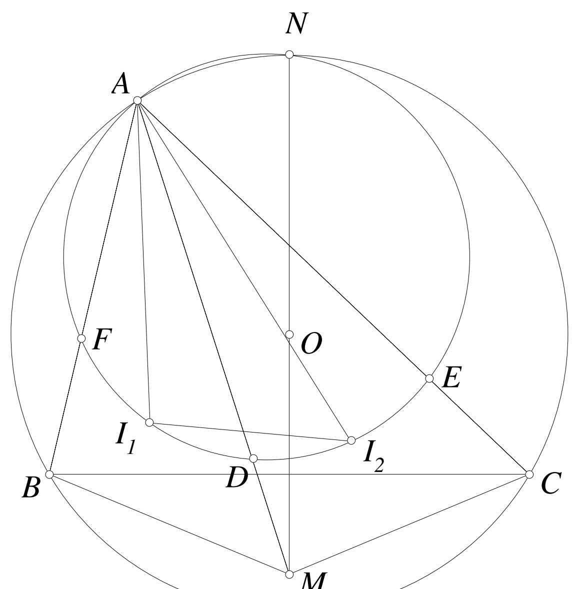
Lời giải. Gọi M, N là hình chiếu của I lên CA, AB. Dễ thấy $\triangle INF = \triangle IME(c.g.c)$ từ đó suy ra $AE = AF = AM + AN = CA + AB - BC$. □

Bổ đề 2.8.2. Cho tam giác ABC. E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $CE = BF$ và E, F cùng phía với BC thì đường tròn ngoại tiếp (AEF) đi qua trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A.



Hình 16.

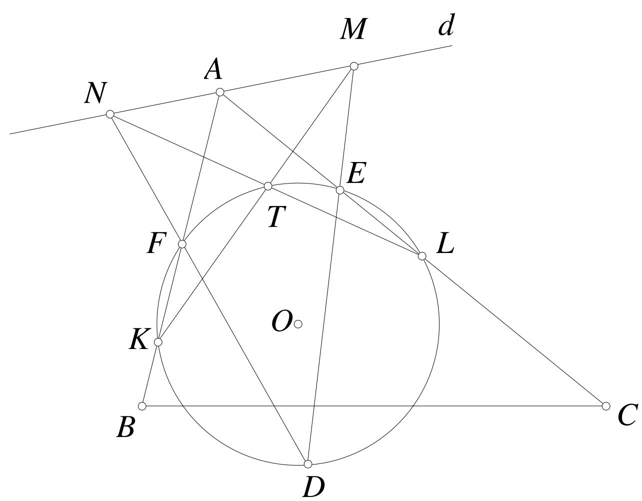
Lời giải. Gọi N là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Giả sử E, F khác phía A với BC. Trường hợp còn lại chứng minh hoàn toàn tương tự. Ta dễ thấy $\angle ABN = \angle ACN$ suy ra $\angle FBN = \angle ACN$. Kết hợp $NB = BC, FB = CE$ suy ra $\triangle FBN = \triangle ECN$. Từ đó $\angle BFN = \angle CEN$ hay A, F, E, N cùng thuộc một đường tròn. □



Hình 17.

Lời giải. Gọi đường tròn ngoại tiếp (AI_1I_2) cắt AM, CA, AB lần lượt tại D, E, F khác A. Theo bổ đề 1 dễ thấy $AD + AF = AB + AM - MB, AD + AE = AC + AM - MC$. Trừ hai đẳng thức chú ý $MB = MC$ ta được $AF - AE = AB - AC$ hay $AB - AF = AC - AE$. Do đó trong các trường hợp E, F cùng phía hoặc khác phía BC ta cũng đều có $BF = CE$. Vậy theo bổ đề 2 gọi N là trung điểm cung BC chứa A thì $(AI_1I_2) \equiv (AEF)$ đi qua N. Vậy tâm ngoại tiếp AI_1I_2 thuộc trung trực AN cố định. Đó là điều phải chứng minh. ☐

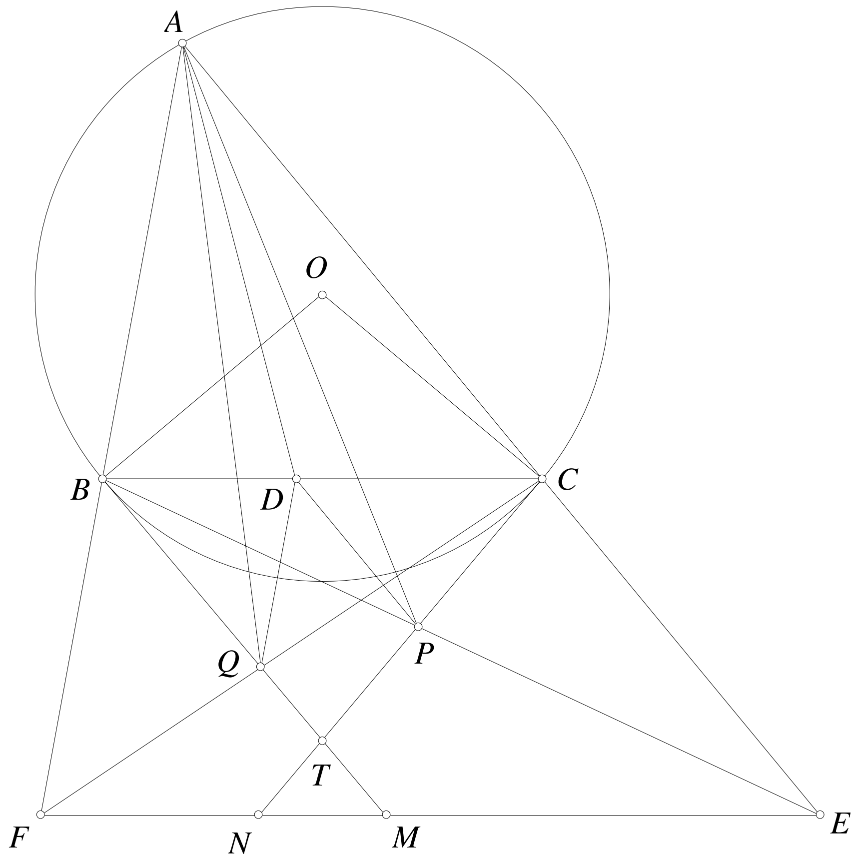
Bài 2.9. Cho tam giác ABC đường tròn (O) bất kỳ. (O) cắt CA tại L, E và cắt AB tại K, F. D là một điểm thuộc (O). d là đường thẳng bất kỳ đi qua A. DE, DF lần lượt cắt d tại M, N. Chứng minh rằng MK giao NL tại điểm thuộc (O).



Hình 18.

Lời giải. Gọi NL giao (O) tại T khác L. KT giao DE tại M'. Áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} KLD \\ EFT \end{pmatrix}$ ta suy ra các giao điểm N, A, M' thẳng hàng. Vậy M' thuộc $NA \equiv d$ suy ra $M' \equiv M$. Ta có điều phải chứng minh. ☐

Bài 2.10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.



Hình 19.

Lời giải. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Do B, C đối xứng nhau qua OT và $BM = CN$ nên M, N đối xứng qua OT, suy ra $BC \parallel MN$.

Ta có $\angle FBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = \angle ACB$, chú ý góc đồng vị $\angle ABC = \angle BFM$ do đó $\triangle ABC \sim \triangle MFB$. Từ đó ta chú ý $FM \parallel BC$ nên theo định lý Thales $\dfrac{QC}{QF} = \dfrac{BC}{FM} = \dfrac{BM}{FM} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DB}$ suy ra $QD \parallel BF$. Tương tự $PD \parallel CE$.

Từ đó theo định lý Thales và tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DQ}{BF}.\dfrac{BF}{CE}.\dfrac{CE}{DP} = \dfrac{CD}{BC}.\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CD}{BD}.\dfrac{AB}{AC} = 1$. Vậy $DP = DQ \quad (1)$.

Ta lại có $\angle ADQ = \angle ADB + \angle BDQ = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$. Vậy tương tự $\angle ADP = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$ do đó $\angle ADQ = \angle ADP \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\triangle ADQ = \triangle ADP$ $(c.g.c)$ suy ra $AP = AQ$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.11. Cho tam giác ABC. Gọi (O_a) là đường tròn bất kỳ đi qua B, C; hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ xác định tương tự. Hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ cắt nhau tại A_1, khác A. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự. Gọi Q là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác ABC. QB, QC lần lượt cắt (O_c), (O_b) tại A_2, A_3 khác B, C. Tương tự ta có B_2, B_3, C_2, C_3. Gọi (K_a), (K_b), (K_c) là các đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, và $C_1C_2C_3$. Chứng minh rằng

a) ba đường tròn $(K_a), (K_b), (K_c)$ có cùng một điểm chung.

b) hai tam giác $K_aK_bK_c$, ABC đồng dạng.

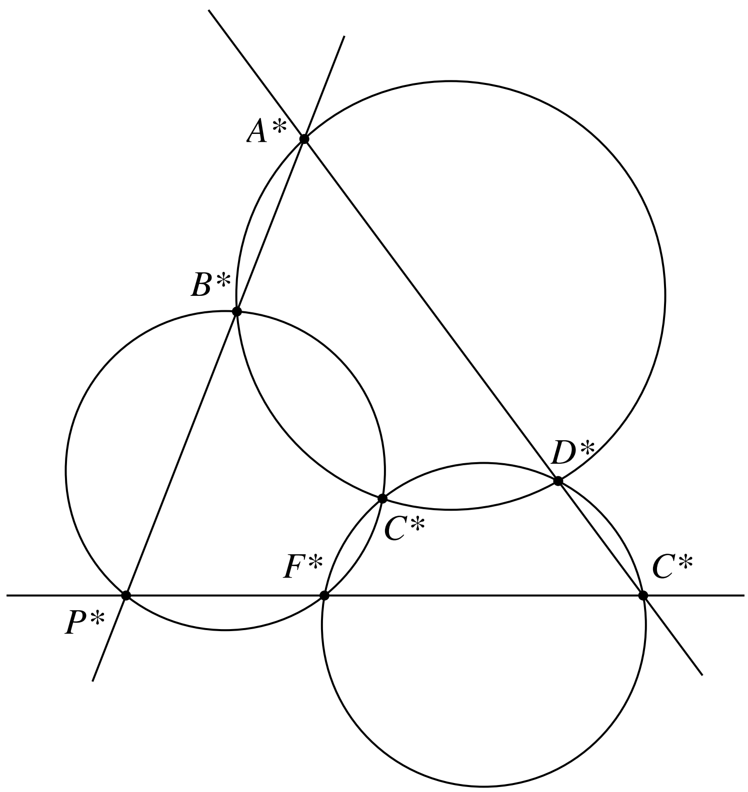
Ta đưa ra bổ đề sau

Bổ đề 2.11.1. Cho bốn đường tròn C_1, C_2, C_3, C_4 cắt nhau tại bốn điểm A, B, C, D; C_1 cắt C_4 tại A; C_2 cắt C_1 tại B, C_2 cắt C_3 tại C, C_4 cắt C_3 tại D. E, P, F, Q là các giao điểm khác A, B, C, D của C_1 và C_4; C_2 và C_1, C_2 và C_3, C_4 và C_3.

a) Chứng minh E, P, F, Q đồng viên (hoặc thẳng hàng) khi và chỉ khi A, B, C, D đồng viên (hoặc thẳng hàng)

b) Với giả thiết A, B, C, D thẳng hàng, đồng thời (ω) là một đường tròn bất kì đi qua E, F và cắt C_1, C_2, C_3, C_4 lần lượt tại I, J, H, G. Khi đó GJ, IH và AB đồng quy.

Lời giải. a) Nếu E, P, F, Q đồng viên.



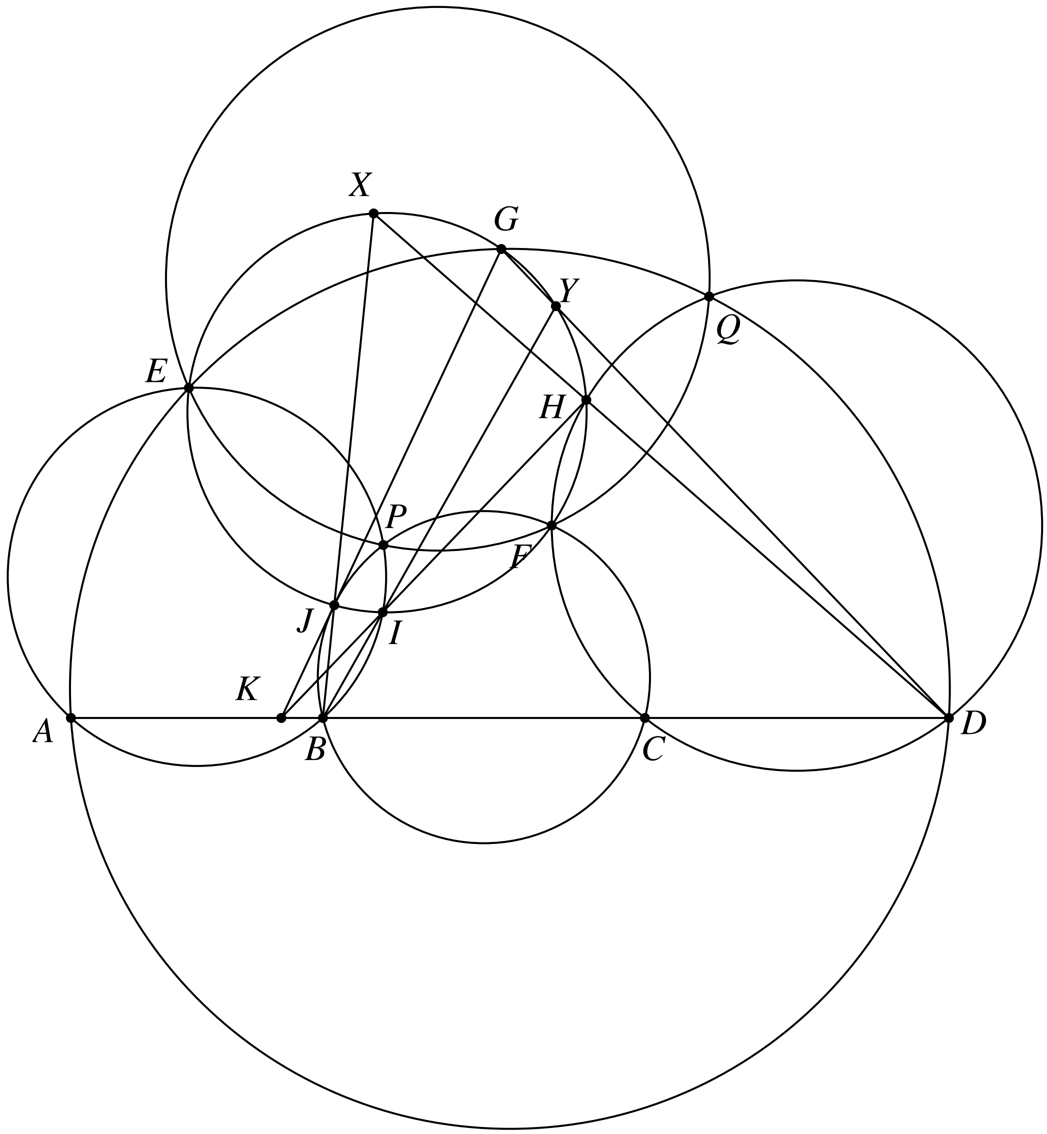
Hình 20.

Xép phép nghịch đảo tâm E phương tích bất kì, như vậy các đường tròn C_1, C_4, C_5 sẽ biến thành các đường thẳng C_1^*, C_4^*, C_5^*. Còn các đường tròn C_2, C_3 biến thành các đường tròn C_2^* và C_3^*, F thành $F*$ thẳng hàng với P^* và Q^*, D thành D^* thẳng hàng với A^* và Q^*, B thành B^* thẳng hàng với A^* và P^*. Như vậy C_2^* và C_3^* chính là các đường tròn $(P^*B^*F^*)$ và $(F^*D^*Q^*)$. Từ đó theo định lý Miquel thì A^*, B^*, C^*, D^* đồng viên như vậy A, B, C, D thẳng hàng hoặc đồng viên.

Nếu E, P, F, Q thẳng hàng chứng minh tương tự.

b) Theo định lý Miquel thì với ba đường tròn ω, C_2, C_3 đồng quy tại F ta có được HD cắt JB tại một điểm X thuộc ω, tương tự thì BI cắt DG tại một điểm Y thuộc ω. Từ đó áp dụng định lý

Pascal cho 6 điểm X, H, I, Y, G, J có $D = XH \cap DG$; $K = IH \cap JG$; $B = XJ \cap YI$ như vậy K, B, D thẳng hàng. Từ đó suy ra GJ, HI và AD đồng quy.

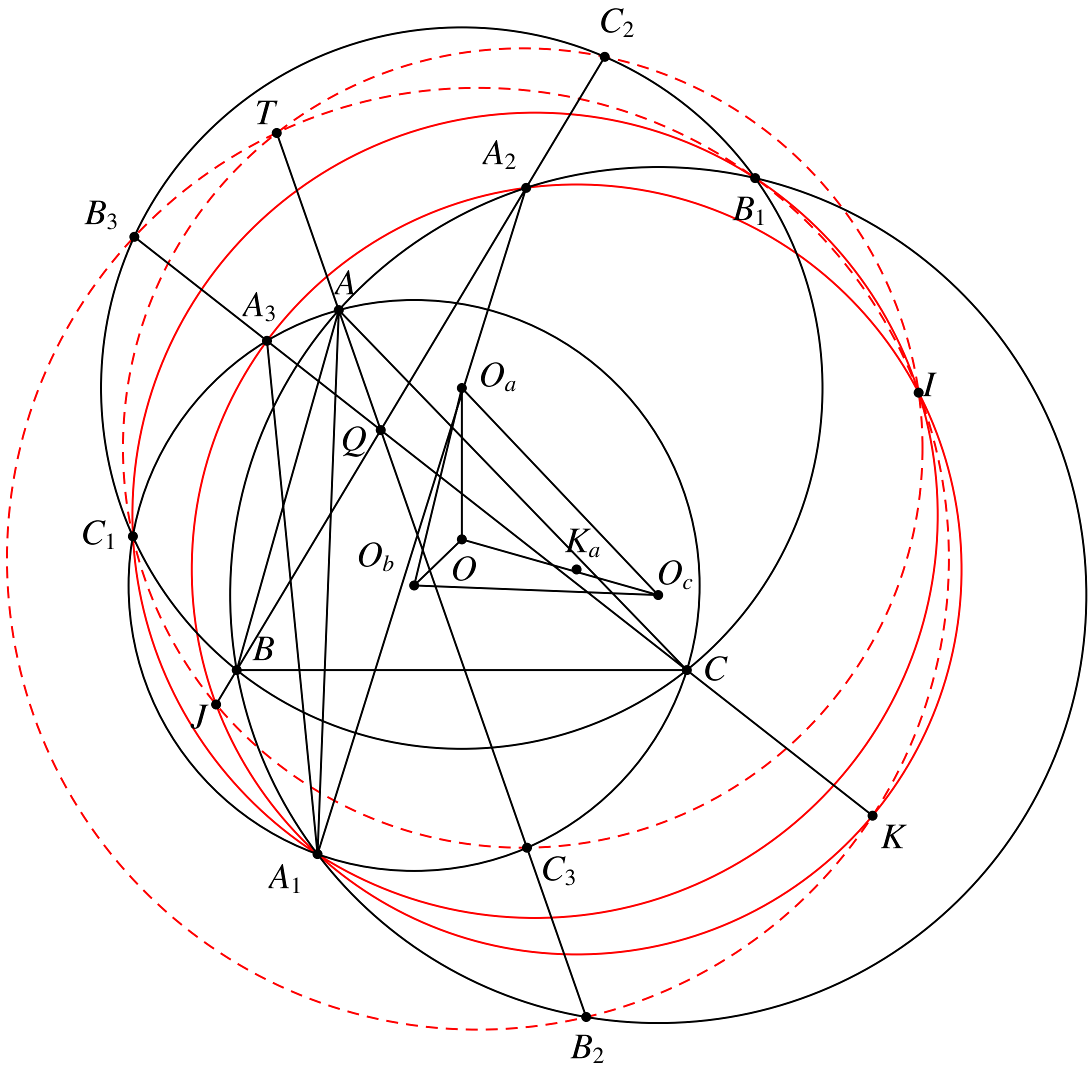


Hình 21.

Ta hoàn tất chứng minh bổ đề. □

Lời giải. Gọi T là giao điểm của đường tròn $(C_1C_2C_3)$ với AQ. B_3' là giao điểm của (O_a) với (TB_1B_2).

Chú ý rằng bốn đường tròn (O_c), (O_b), $(C_1C_2C_3)$, (TB_1B_2) cắt nhau tại 4 điểm A, T, C_3, B_2 thẳng hàng nên theo câu b của bổ đề với đường tròn ω chính là đường tròn (O_a) ta có CB_3', BC_2, AB_2 đồng quy. Từ đó suy ra $B_3' \equiv B_3$. Suy ra các đường tròn $(B_1B_2B_3)$ và $(C_1C_2C_3)$ cắt nhau tại một điểm T thuộc AQ.



Hình 22.

Áp dụng câu a của bổ đề suy ra các giao điểm còn lại của bốn đường tròn (O_c), (O_b), $(B_1B_2B_3)$, $(C_1C_2C_3)$ đồng viên. Nói cách khác $(A_1B_1C_1)$ đi qua I, trong đó I là giao điểm khác T của $(B_1B_2B_3)$ và $(C_1C_2C_3)$.

Tương tự như vậy $(A_1B_1C_1)$ đi qua I' trong đó I' là một giao điểm của $(B_1B_2B_3)$ và $(A_1A_2A_3)$

Từ đó suy ra $I \equiv I'$ (vì I và I' khác B_1), từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Gọi J, K là giao điểm của $(A_1A_2A_3)$ với QB, QC.

Ta có

$(AB, AC) \equiv (AB, AA_1) + (AA_1, AC) \equiv (A_2B, A_2A_1) + (A_3A_1, A_3C) \equiv (IJ, IA_1) + (IA_1, IK)$
$\equiv (IJ, IK) \equiv (K_aK_b, K_aK_c) (\bmod \pi)$

Tương tự ta cũng có $(BC, BA) \equiv (K_bK_c, K_bK_a) (\bmod \pi)$

Từ đó suy ra $\Delta ABC \sim \Delta K_aK_bK_c$. Ta có điều phải chứng minh □

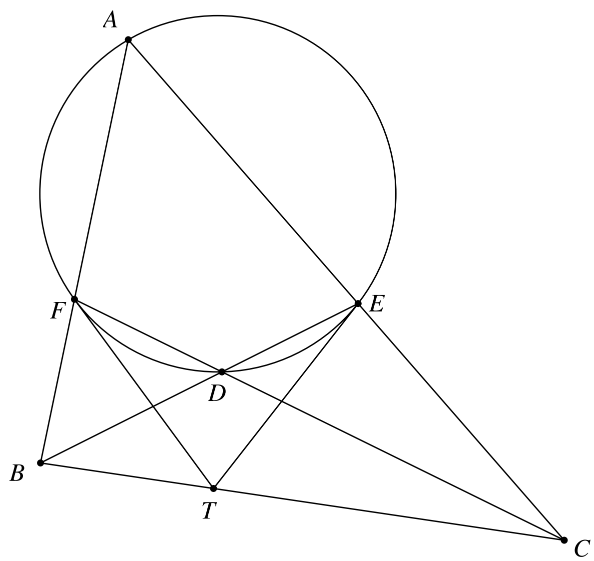
Bài 2.12. Giả sử E, F là hai điểm trên cạnh CA, AB của tam giác ABC. Gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng

a) T nằm trên BC nếu và chỉ nếu BE cắt CF tại một điểm thuộc đường tròn (K);

b) EF, PQ, BC đồng quy biết rằng BE cắt FT tại M, CF cắt ET tại N, AM và AN cắt đường tròn (K) tại P, Q khác A.

Lời giải. a)Gọi D là giao điểm của CF và BE

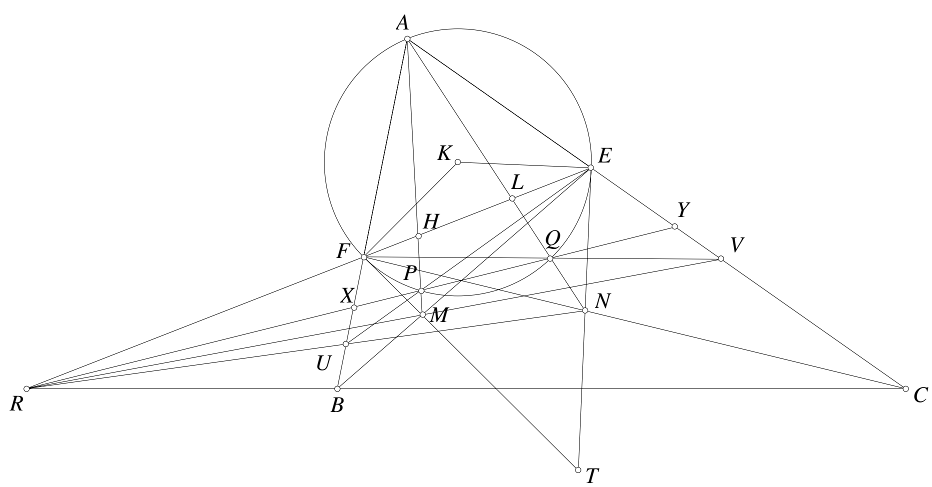
Nếu D thuộc (K). Khi đó áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm F, F, D, E, E, A thì thu được T, B, C thẳng hàng.



Hình 23.

Nếu T, B, C thẳng hàng thì áp dụng định lý đảo định lý Pascal với chú ý là $T = EE \cap FF$, $FD \cap AE = C$, $DE \cap AF = B$. Như thế thì D, E, A, F đồng viên. Ta có điều phải chứng minh.

b) Cách 1 chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn Trần Đăng Phúc



Hình 24.

Gọi PQ giao AB, AC lần lượt tại X, Y, EP giao AB tại U, FQ giao AC tại V, AM, AN cắt EF tại H, L.

Áp dụng định lý Pascal cho bộ sáu điểm P, Q, A, F, E, E suy ra R, N, U thẳng hàng. Tương tự có R, M, V thẳng hàng.

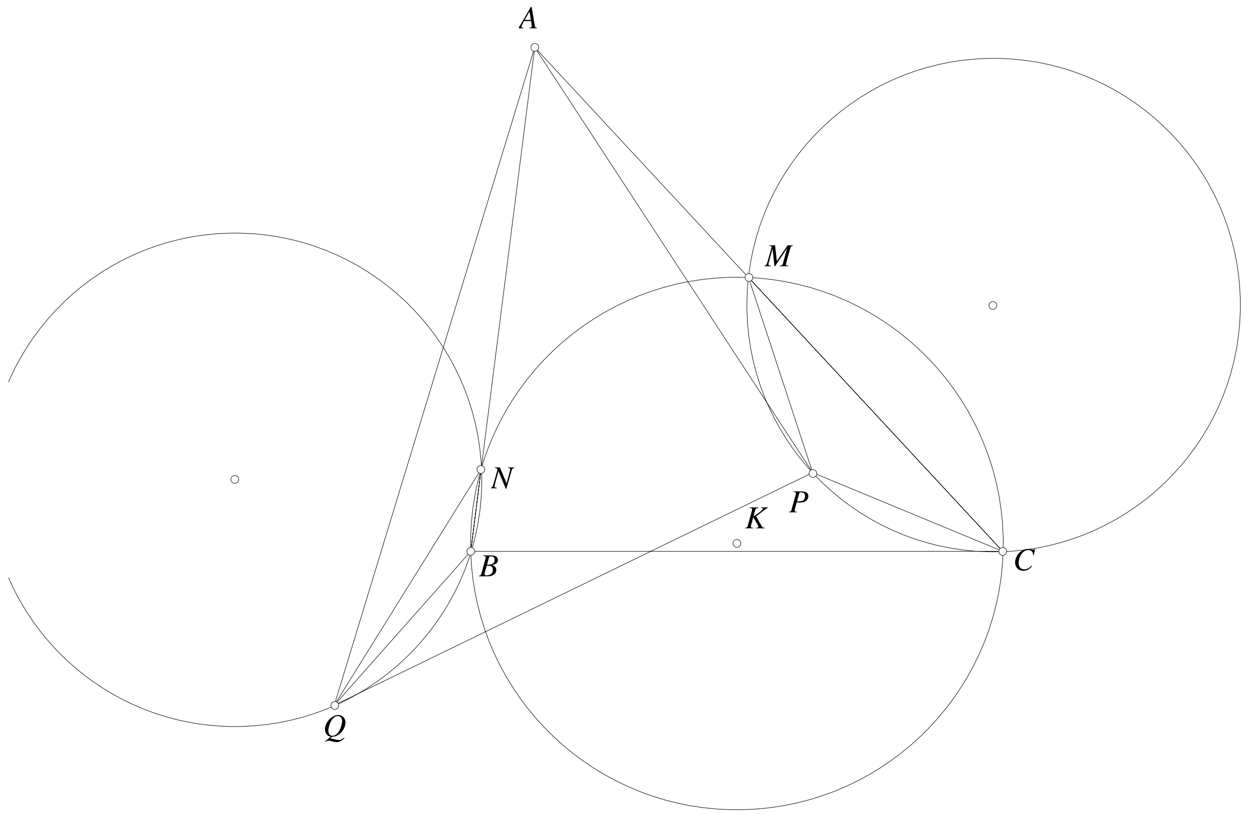
Ta lại có

$(AFUB) = E(AFUB) = (AHPM) = R(AHPM) = (AEYV)$ suy ra $\dfrac{(AFU)}{(AFB)} = \dfrac{(AEY)}{(AEV)}$ (1)

$(AEVC) = F(AEVC) = (ALQN) = R(ALQN) = (AFXU)$ suy ra $\dfrac{(AEV)}{(AEC)} = \dfrac{(AFX)}{(AFU)}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{(AFX)}{(AFB)} = \dfrac{(AEY)}{(AEC)} \iff (AFXB) = (AEYC)$ hay EF, PQ, BC đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.13. Cho tam giác ABC và đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại M, N. Dựng tam giác APQ bằng và ngược hướng tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau.



Hình 25.

Lời giải. Từ tam giác $\triangle APQ = \triangle ABC$ và B, C, M, N thuộc một đường tròn ta có $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AN}{AM}$, kết hợp $\angle QAN = \angle PAM$ suy ra tam giác $\triangle AQN \sim \triangle APM$ suy ra $\angle ANQ = \angle AMP$. Chú ý $\triangle APQ = \triangle ABC$ ngược hướng dễ suy ra $QB = PC$. Từ đây áp dụng định lý hàm số sin suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau. Đó là điều phải chứng minh. □

Tổng quát hai đề toán hay

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết tổng quát hai bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên toán tuổi thơ 2.

Trên TTT2 số 92 năm 2010 mục giải toán qua thư có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình vuông $MNPQ$ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Giả sử BN cắt MQ tại E. CM cắt NP tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$ và $\angle EAB = \angle FAC$.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 94 năm 2010. Phần chứng minh hai góc bằng nhau được mở rộng cho hình chữ nhật của cùng tác giả và có trên TTT2 số 127 năm 2013 trong mục thách đấu như sau

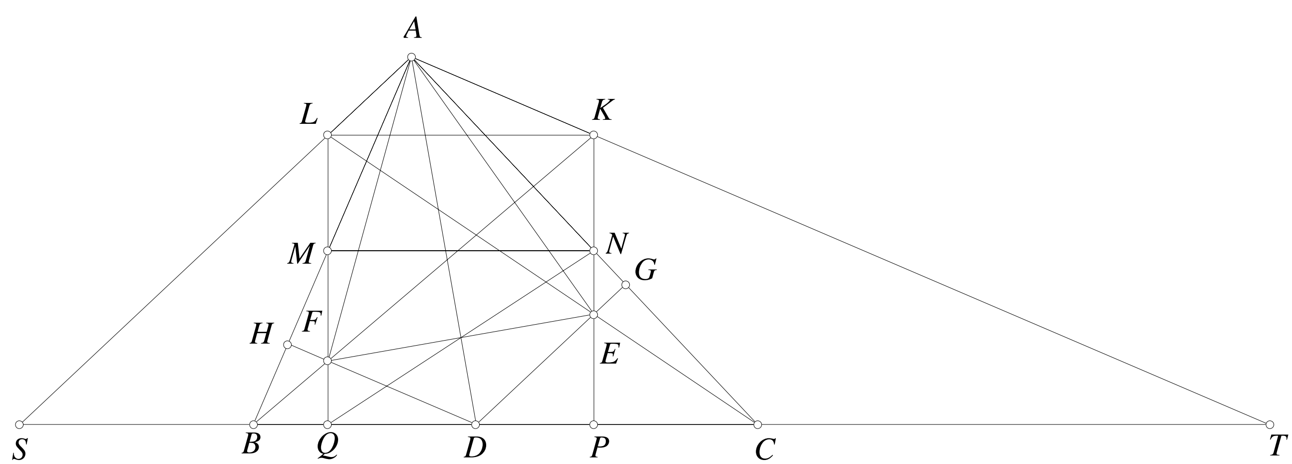
Bài 2. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi thõa mãn M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Gọi BN giao MQ tại K, CM giao NP tại L, BN giao CM tại X, QN giao PM tại Y.*

a) Chứng minh rằng $\angle KAB = \angle LAC$.

b) Chứng minh rằng XY luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 129 năm 2013. Bài báo này sẽ trình bày một số mở rộng cho hai bài toán trên. Một cách tự nhiên chúng ta suy nghĩ rằng liệu bài toán 1 có thể có cách phát biểu nào cho tam giác bất kỳ. Ta đi đến mở rộng đầu tiên như sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M thuộc đoạn AB, N thuộc đoạn AC, P, Q thuộc đoạn BC với P nằm giữa Q, C và $\angle MNQ = \frac{\angle BAC}{2}$. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L. CL cắt NP tại E. BK cắt MQ tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$.*



Hình 1.

Chứng minh. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Gọi AL, AK lần lượt cắt BC tại S, T. Ta sẽ chứng minh rằng DE song song SL, thật vậy

Theo định lý Theles ta có

$$\frac{CE}{CL} = \frac{CP}{CQ} = \frac{CP}{CN}.\frac{CN}{CQ}$$

$$= \frac{CA}{CS}.\frac{CD}{CA} \text{ (Chú ý do } \triangle CPN \sim \triangle CAS, \triangle CQN \sim \triangle CAD)$$

$$= \frac{CD}{CS}.$$

Từ đó $DE \parallel SL \perp AC$ nên DE vuông góc CA tại G. Tương tự DF vuông góc AB tại H.

Dễ chứng minh A, M, N, K, L nội tiếp đường tròn đường kính NL, MK nên $MNKL$ là hình chữ nhật. Vậy cũng từ định lý Thales ta dễ thấy $\frac{DE}{DG} = \frac{SL}{SA} = \frac{TK}{TA} = \frac{DF}{DH}$. Chú ý rằng AD là phân giác góc A và G, H là hình chiếu của D lên CA, AB nên $DG = DH$. Từ đó dễ có $DE = DF \quad (1)$.

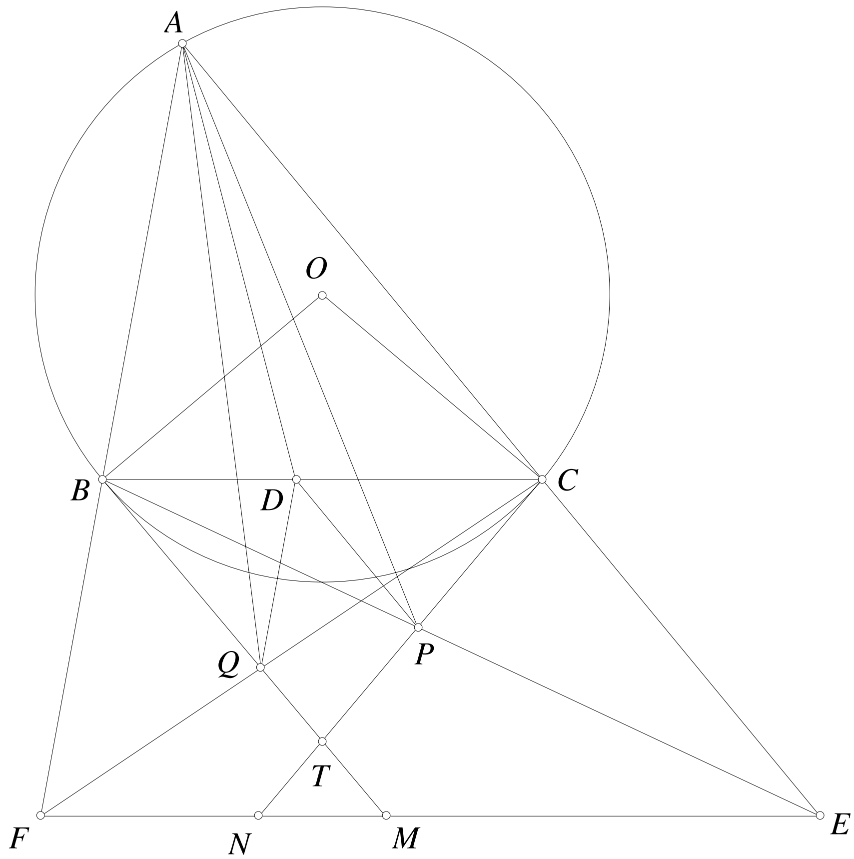
Cũng từ $DE \parallel SA, DF \parallel AT$ và AD là phân giác $\angle SAT$ dễ có $\angle GDA = \angle DAL = \angle DAK = \angle FDA \quad (2)$.

Từ (1),(2) dễ chỉ ta tam giác $\triangle DAE = \triangle DAF$ $(c.g.c)$ suy ra $AE = AF$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong chứng minh trên dễ chỉ ra được $\angle EAB = \angle FAC$.

Nếu trong bài toán 1, ta coi MQ, NP là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông AMN thì ta sẽ có một hướng mở rộng khác như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.*



Hình 2.

Chứng minh. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Do B, C đối xứng nhau qua OT và $BM = CN$ nên M, N đối xứng qua OT, suy ra $BC \parallel MN$.

Ta có $\angle FBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = \angle ACB$, chú ý góc đồng vị $\angle ABC = \angle BFM$ do đó $\triangle ABC \sim \triangle MFB$. Từ đó ta chú ý $FM \parallel BC$ nên theo định lý Thales $\dfrac{QC}{QF} = \dfrac{BC}{FM} = \dfrac{BM}{FM} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DB}$ suy ra $QD \parallel BF$. Tương tự $PD \parallel CE$.

Từ đó theo định lý Thales và tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DQ}{BF}.\dfrac{BF}{CE}.\dfrac{CE}{DP} = \dfrac{CD}{BC}.\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CD}{BD}.\dfrac{AB}{AC} = 1$. Vậy $DP = DQ \quad (1)$.

Ta lại có $\angle ADQ = \angle ADB + \angle BDQ = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$. Vậy tương tự $\angle ADP = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$ do đó $\angle ADQ = \angle ADP \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\triangle ADQ = \triangle ADP$ $(c.g.c)$ suy ra $AP = AQ$. Ta có điều phải chứng minh. □

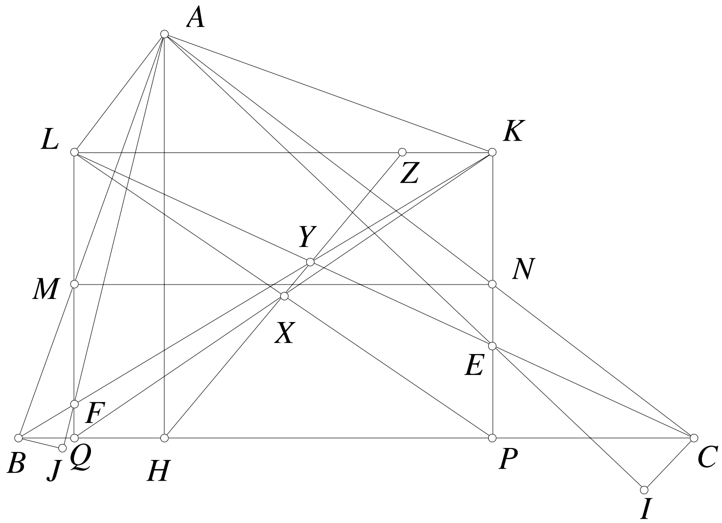
Nhận xét. Trong chứng minh trên ta cũng dễ thấy $\angle PAB = \angle QAC$.

Hướng mở rộng của bài toán 3 cũng có thể áp dụng tiếp được cho bài toán 2. Ta có bài toán như sau

Bài 5. *Cho tam giác ABC dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M, N lần lượt thuộc AB, AC và P, Q thuộc BC. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L. CL cắt NP tại E. BK cắt MQ tại F.*

a) Chứng minh rằng $\angle EAC = \angle FAB$.

b) Gọi LP giao QK tại X, BK giao CL tại Y. Chứng minh rằng XY luôn đi qua một điểm cố định khi hình chữ nhật $MNPQ$ di chuyển.



Hình 3.

Chứng minh. a) Gọi AL, AK cắt BC lần lượt tại S, T. Gọi I, J là hình chiếu của C, B lên AE, AF. Ta xét tỷ số

$$\frac{BJ}{CI} = \frac{BJ}{AK}.\frac{AK}{AL}.\frac{AL}{CI}$$
$$= \frac{BF}{FK}.\frac{AK}{AL}.\frac{LE}{EC}$$
$$= \frac{BQ}{LK}.\frac{AT}{AS}.\frac{LK}{PC}$$
$$= \frac{BQ}{AB}.\frac{AB}{AC}.\frac{AC}{PC}.\frac{AT}{AS}$$
$$= \frac{MQ}{AT}.\frac{AB}{AC}.\frac{AS}{NP}.\frac{AT}{AS} \text{ (Chú ý } \triangle BMQ \sim \triangle BAT, \triangle CNP \sim \triangle CSA)$$
$$= \frac{AB}{AC}.$$

Từ đó dễ có $\triangle ABJ \sim \triangle ACI$ suy ra $\angle BAF = \angle CAE$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi XY giao LK, BC lần lượt tại Z, H. Vì tứ giác $LKPQ$ là hình chữ nhật, X là giao hai đường chéo. Sử dụng định lý Thales ta có các biến đổi tỷ số sau

$$\frac{HP}{HC} = \frac{LZ}{HC} = \frac{LY}{YC} = \frac{LK}{BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}.$$

Suy ra $AH \parallel NP \perp BC$. Vậy AH vuông góc BC suy ra H cố định. Vậy XY đi qua H cố định. □

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 92,94 năm 2010.

[2] Tạp chí TTT2 số 127,129 năm 2013.

Tổng quát một đề toán hay

Trần Quang Hùng

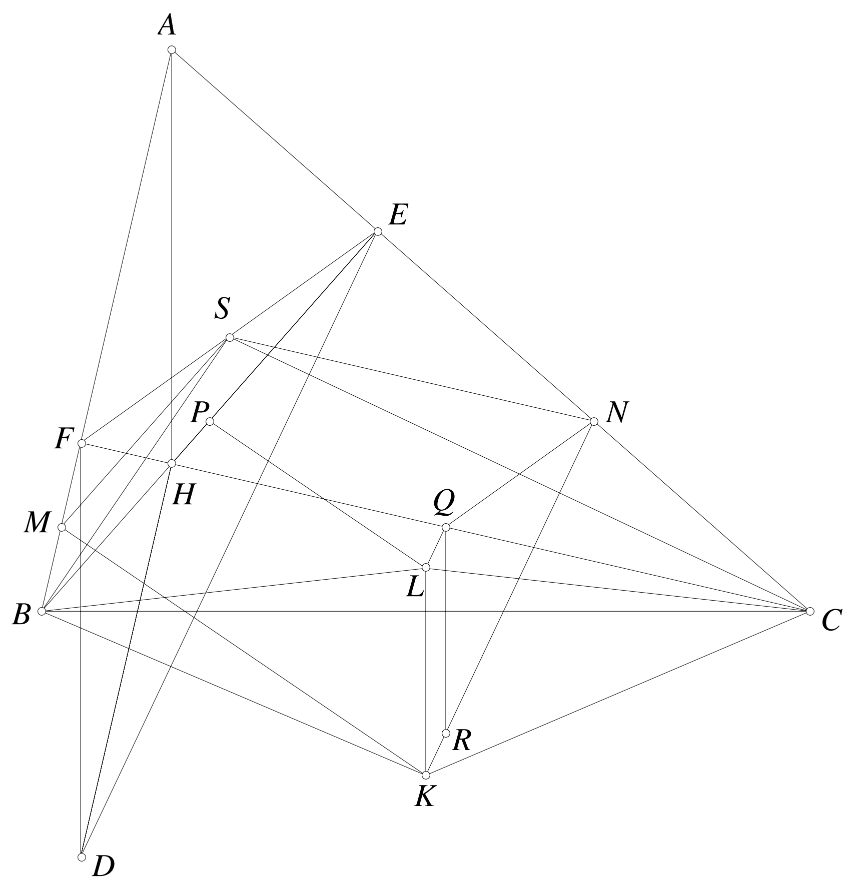
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra tổng quát cho một bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên toán tuổi thơ 2 với phép chứng minh sử dụng đồng thời công cụ vector và thuần túy hình học.

Trên TTT2 số 129 năm 2013 mục thách đấu có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho tam giác ABC không vuông. BE, CF là các đường cao cắt nhau tại trực tâm H. M, N, P, Q, S theo thứ tự là trung điểm của BF, CE, BE, CF, EF. K là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với BS và đường thẳng qua N vuông góc với CS. L là giao điểm của đường thẳng qua P vuông góc với BS và đường thẳng qua Q vuông góc với CS. Chứng minh rằng $2KL = HA$.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 131 năm 2014. Tôi xin trích dẫn lại lời giải của bạn Lê Huy Quang trên báo sử dụng các kỹ thuật về định lý 4 điểm và tam giác đồng dạng.



Hình 1.

Lời giải. Ta thấy $MB = \frac{1}{2}BE$, $MS = \frac{1}{2}BE$, $NS = \frac{1}{2}CF$, $NC = \frac{1}{2}CE$ và $BF^2 + CE^2 = BC^2 = BE^2 + CE^2$. Từ đó, chú ý rằng $KM \perp BS$, $KN \perp CS$, suy ra

$$KB^2 - KS^2 = MB^2 - MS^2 = \frac{1}{4}BF^2 - \frac{1}{4}BE^2 = \frac{1}{4}CE^2 - \frac{1}{4}CF^2 = NC^2 - NS^2 = KC^2 - KS^2.$$

Vậy $KB = KC$. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$, chú ý rằng BF, CE là các đường cao của ΔHBC, tương tự như trên, ta có $LB = LC$ vậy KL là trung trực BC nên KL vuông góc BC.

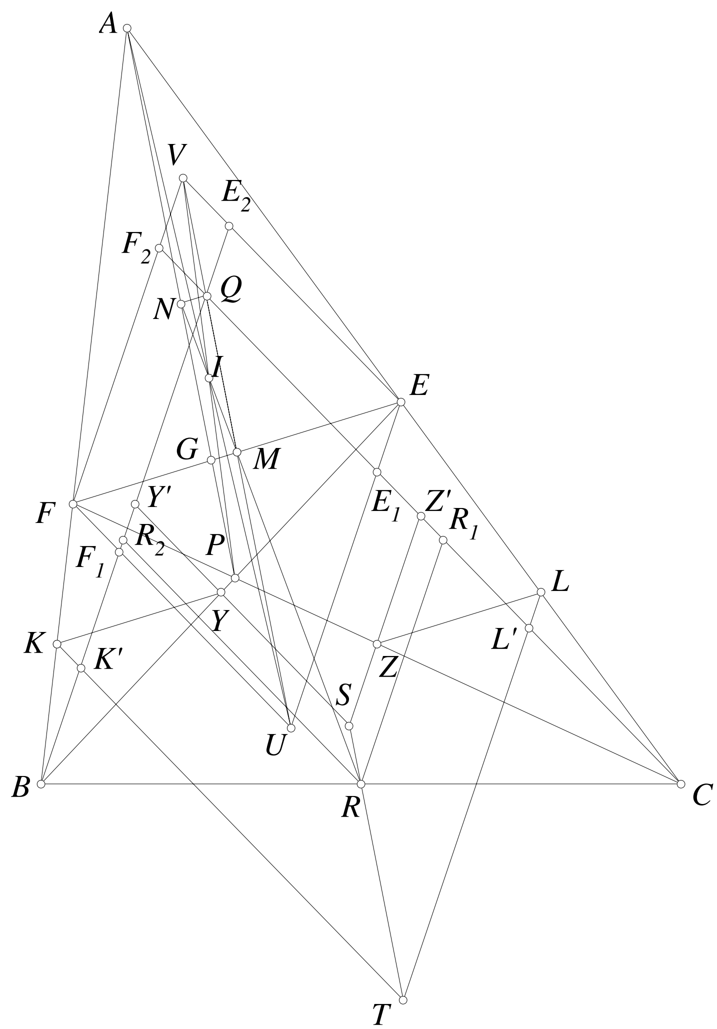
Lấy D, R sao cho các tứ giác $AHDF$, $QRKL$ là hình bình hành với R thuộc NK. Ta thấy $HE \perp NC$ và $HD \parallel AF \perp CF \parallel NS$. Do đó $\widehat{EHD} = \widehat{CNS}$. Mặt khác vì các tam giác CHE, CAF đồng dạng nên $\dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HE}{AF} = \dfrac{EC}{HC} = \dfrac{2NC}{2NS} = \dfrac{NC}{NS}$.

Vậy các tam giác EHD, CNS đồng dạng suy ra $\widehat{HED} = \widehat{NCS}$. Kết hợp là $DE \perp SN, SN \perp RN$ suy ra $DE \parallel KR$. Kết hợp với $CF \parallel RQ$; $FE \parallel QN$, suy ra các tam giác DEF và RNQ đồng dạng. Do đó $\dfrac{KL}{HA} = \dfrac{RQ}{DF} = \dfrac{QN}{FE} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $2KL = HA$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Đây là một bài toán dạng chứng minh tỷ số đoạn thẳng rất thú vị với THCS. Tuy vậy nếu nhìn theo phương diện hình học vector có thể thấy thực chất yêu cầu của đề toán là chứng minh $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{KL}$. Do đó phương pháp chiếu song song gợi mở cho ta ý tưởng để tổng quát bài toán này như sau.

Bài 2. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Giả sử PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Gọi PA cắt EF tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm EF, PA. Q đối xứng G qua trung điểm MN. Gọi K, L, Y, Z lần lượt là trung điểm của BF, CE, BE, CF. Lấy các điểm S, T sao cho $SY \parallel QC, SZ \parallel QB, TK \parallel QC, TL \parallel QB$. Chứng minh rằng ST đi qua trung điểm BC và $PA = 2ST$.*

Và như vậy lời giải của chúng ta cũng sẽ khác đáp án tách rời khỏi ý tưởng liên quan tới tính trực giao. Tôi sẽ đưa ra một lời giải thuần túy vector cho bài toán tổng quát.



Lời giải 1. Gọi SY, TK cắt QB tại Y', K'. SZ, TL cắt QC tại Z', L'. R là trung điểm BC. Lấy các điểm E_1, E_2 thuộc QC, QB sao cho QE_1EE_2 là hình bình hành. Lấy các điểm F_1, F_2 thuộc QB, QC sao cho QF_1FF_2 là hình bình hành. Lấy các điểm R_1, R_2 thuộc QC, QB sao cho QR_1RR_2 là hình bình hành. Ta dễ thấy

$2\overrightarrow{SR} = 2(\overrightarrow{Z'R_1} + \overrightarrow{Y'R_2}) = \overrightarrow{F_2Q} + \overrightarrow{E_2Q}$ (1)

$2\overrightarrow{ST} = 2(\overrightarrow{Z'L'} + \overrightarrow{Y'K'}) = \overrightarrow{F_2E_1} + \overrightarrow{E_2F_1}$ (2).

Lấy U đối xứng A qua trung điểm I của MN và V đối xứng P qua trung điểm I của MN. Ta có $2\overrightarrow{FU} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{FE}$ và $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$. Giả sử $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}, \alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Khi đó ta dễ chứng minh được dễ chỉ ra $\overrightarrow{FU} \parallel \overrightarrow{QC}$. Từ đó tương tự $\overrightarrow{EU} \parallel \overrightarrow{QB}$ và $\overrightarrow{FV} \parallel \overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{EV} \parallel \overrightarrow{QC}$. Vậy tứ giác $EUFV$ và QE_2VF_2 là hình bình hành.

Từ đó theo (1),(2) dễ thấy

$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{F_2Q} + \overrightarrow{E_2Q} = 2\overrightarrow{SR}$ (3)

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{VU} = \overrightarrow{VE} + \overrightarrow{VF} = \overrightarrow{F_2E_1} + \overrightarrow{E_2F_1} = 2\overrightarrow{ST}$ (4).

Từ (3),(4) suy ra $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{ST}$ suy ra ST đi qua R.

Cũng từ (4) có $PA = 2ST$. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải trên sử dụng công cụ vector phù hợp với học sinh lớp 10. Lời giải sau chỉ thuần túy hình học về đường trung bình và định lý Thales do bạn Trịnh Huy Vũ lớp 10A1 Toán THPT chuyên KHTN đề nghị.

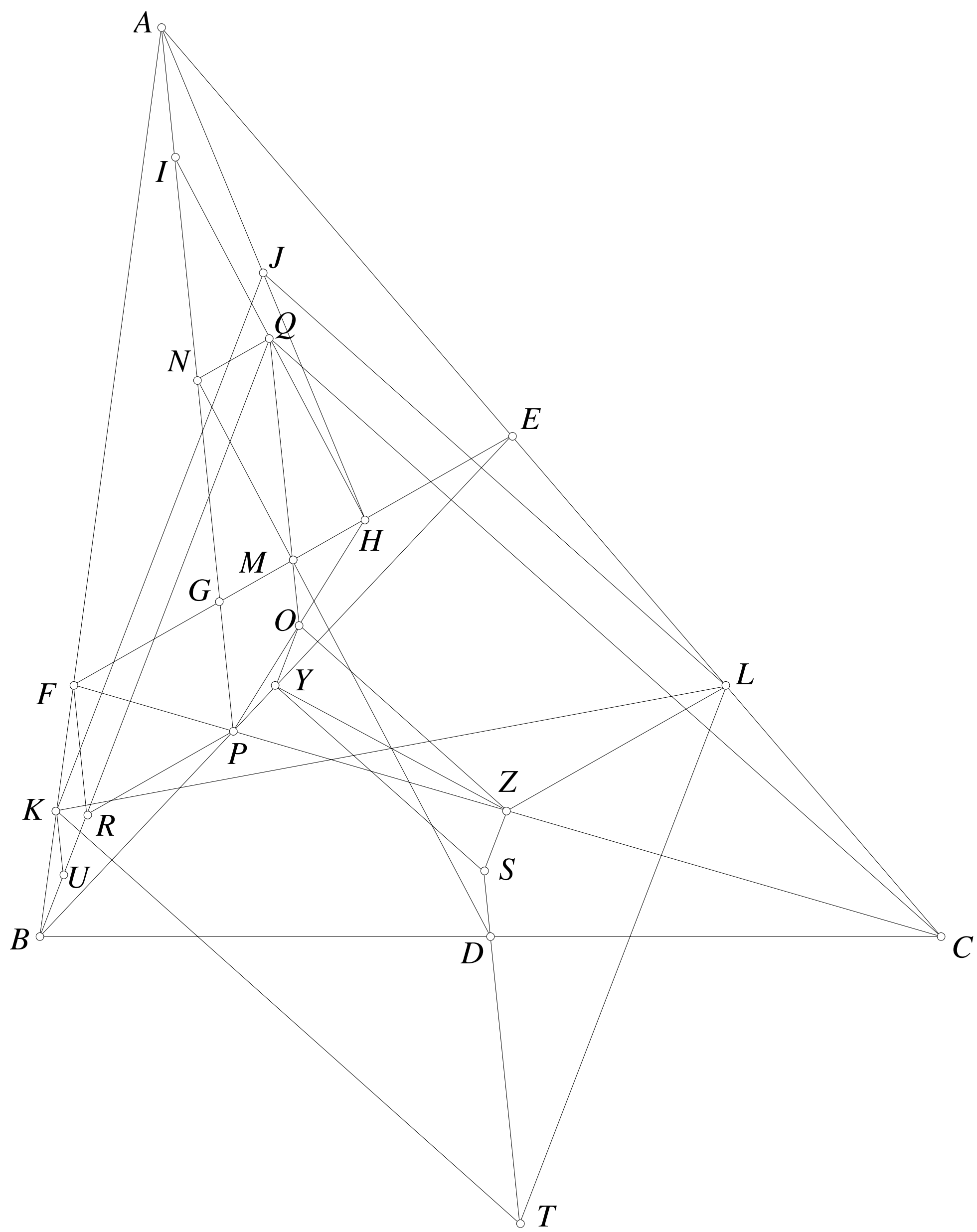
Ta cần một bổ đề sau

Bổ đề 2.1. *Cho tứ giác $ABCD$. AB giao CD tại E. AD giao BC tại F. AC giao BD tại G.*

a) Chứng minh rằng trung điểm của AC, BD, EF thẳng hàng.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Dựng các hình bình hành $AGDX, GMYN$. Chứng minh rằng E, X, Y thẳng hàng.

Bổ đề phần a) là kết quả rất cơ bản và nổi tiếng của hình học phẳng gọi là đường thẳng Gauss xin không trình bày lại chứng minh. Phần b) chỉ là hệ quả trực tiếp của phần a).



Lời giải 2. Gọi D là trung điểm cua BC. Gọi I, H lần lượt đối xứng G qua N, M, từ đề bài dễ thấy I, Q, H thẳng hàng. Dựng hình bình hành $FGPR$, áp dụng bổ đề cho tứ giác $AEPF$ dễ suy ra R thuộc BQ. Gọi U là trung điểm BR. Từ đó ta có $2KU = FR = GP = AI = 2JQ$ suy ra $KU = JQ$. Mặt khác $KU \parallel JQ$ vì cùng song song PA. Do đó tứ giác $KUQJ$ là hình bình hành, suy ra $KJ \parallel BQ$. Tương tự $LJ \parallel CQ$. Vậy J đối xứng T qua trung điểm KL. Tương tự O đối xứng S qua trung điểm YZ. Theo tính chất đường trung bình, JO đi qua trung điểm EF và $PA = 2JO$. Từ đó với chú ý rằng KL, YZ, MD có chung trung điểm, sử dụng phép đối xứng qua trung điểm KL thì ST đi qua trung điểm BC và $PA = 2ST$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Lời giải thứ 2 thuần túy hình học phù hợp với kiến thức học sinh lớp 8. Tuy vậy nếu để ý kỹ các biến đổi về song song và hình bình hành để cho chặt chẽ thì cần viết dưới dạng ngôn ngữ vector. Khi P là trực tâm của tam giác ABC. Ta thu được bài toán ban đầu. Việc cho P trùng vào một số điểm đặc biệt sẽ nảy sinh ra nhiều bài toán mới rất thú vị, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 129 năm 2013.

[2] Tạp chí TTT2 số 131 năm 2014.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh một bài toán hay

Trần Quang Hùng

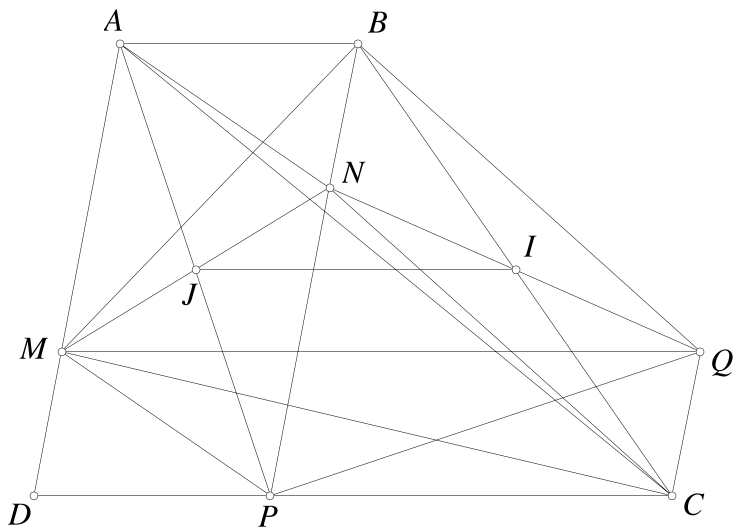
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra một hướng tiếp cận mới và một cách nhìn tổng quát cho một bài toán trên báo toán tuổi thơ 2.

Trên TTT2 số 81 năm 2009 mục giải toán qua thư có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$. Giả sử tồn tại điểm M trên cạnh AD và điểm N bên trong hình thang sao cho $\angle NBC = \angle MBA$, $\angle NCB = \angle MCD$. Gọi P là đỉnh thứ tư của hình bình hành $MANP$. Chứng minh rằng P thuộc cạnh CD.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 83 năm 2010. Tôi xin trích dẫn lại lời giải trên báo



Hình 1.

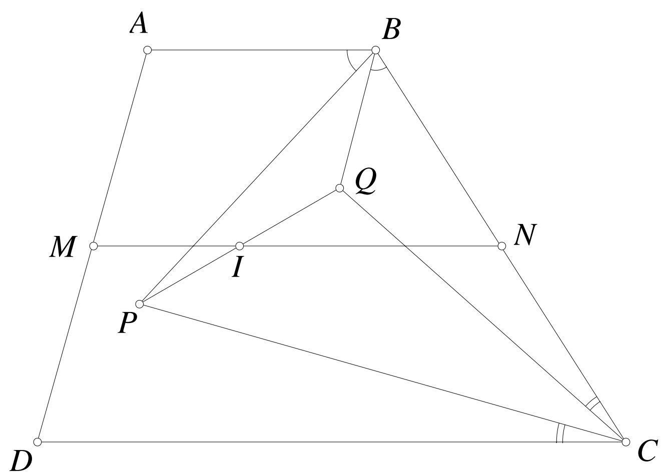
Lời giải. Lấy điểm Q sao cho tứ giác $BNCQ$ là hình bình hành. Gọi BC giao NQ tại I, AP giao MN tại J. Từ giả thiết $\angle NBC = \angle MBA$, $\angle NCB = \angle MCD$ và $AB \parallel CD$ suy ra

$\angle BQC = \angle BNC = 180° - \angle NBC - \angle NCB$
$= 180° - \angle MBA - \angle MCD$
$= 180° - (\angle ABC - \angle MBC) - (\angle BCD - \angle BCM)$
$= 180° - (\angle ABC + \angle BCD) + (\angle MBC + \angle BCM)$
$= 180° - 180° + (180° - \angle BMC)$
$= 180° - \angle BMC.$

Suy ra tứ giác $BMCQ$ nội tiếp. Mà $NB \parallel CQ$ và $\angle NBC = \angle MBA$ nên $\angle BMQ = \angle BCQ = \angle NBC = \angle MBA$. Suy ra $MQ \parallel BA$. Mà $IJ \parallel MQ$ mà IJ là đương trung bình của tam giác ABC nên $IJ \parallel AB$. Lại có $\dfrac{JA}{JP} = \dfrac{IB}{IC} = 1$ nên theo định lý Thales đảo ta có $PC \parallel AB$ vậy P thuộc CD. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán có phát biểu khá hấp dẫn là chứng minh đỉnh thứ tư của hình bình hành nằm trên cạnh. Tuy vậy phát biểu này có thể hiểu đơn giản là chứng minh đối xứng của A qua trung điểm MN nằm trên cạnh CD. Nếu nhìn theo cách này có thể hiểu bài toán đơn giản hơn nữa là chứng minh trung điểm của MN nằm trên đường trung bình của hình thang. Đây là một cách nhìn thú vị. Thực chất bài toán sẽ đúng cho mọi điểm M trong mặt phẳng không nhất thiết thuộc cạnh AD. Đó là một cách tổng quát bài toán. Tôi xin đưa ra lời giải cho bài toán này nhờ một số bổ đề tổng quát. Ta có một lưu ý rằng giả thiết $\angle NBC = \angle MBA$ thực chất có thể hiểu các tia BN, BA đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.

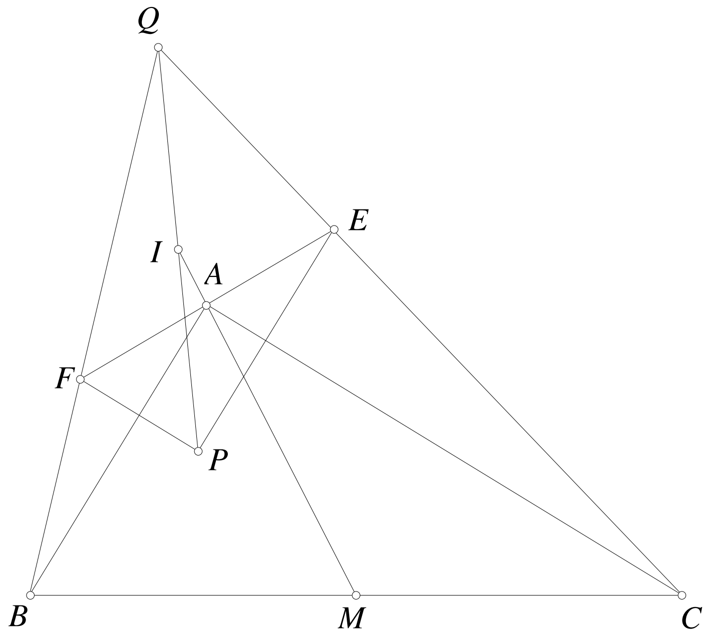
Bài 2. *Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ và P là một điểm bất kỳ. Đối xứng của PB qua phân giác $\angle ABC$ cắt đối xứng của PC qua phân giác $\angle BCD$ tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ luôn thuộc đường thẳng cố định khi P di chuyển trong mặt phẳng.*



Hình 2.

Nhận xét. Ta dễ thấy đường thẳng cố định chính là đường trung bình của hình thang. Nếu để ý kỹ ta thấy rằng các phân giác $\angle ABC$ và $\angle BCD$ vuông góc nhau và cắt nhau cũng trên đường trung bình của hình thang và đường trung bình là trung tuyến của tam giác vuông đó. Vậy thực chất trong bài toán này yếu tố hình thang không cần thiết. Ta đưa ra một bài toán khác trên tam giác vuông như sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM và P là điểm bất kỳ. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của P qua CA, AB. Gọi CE cắt BF tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ thuộc AM.*



Hình 3.

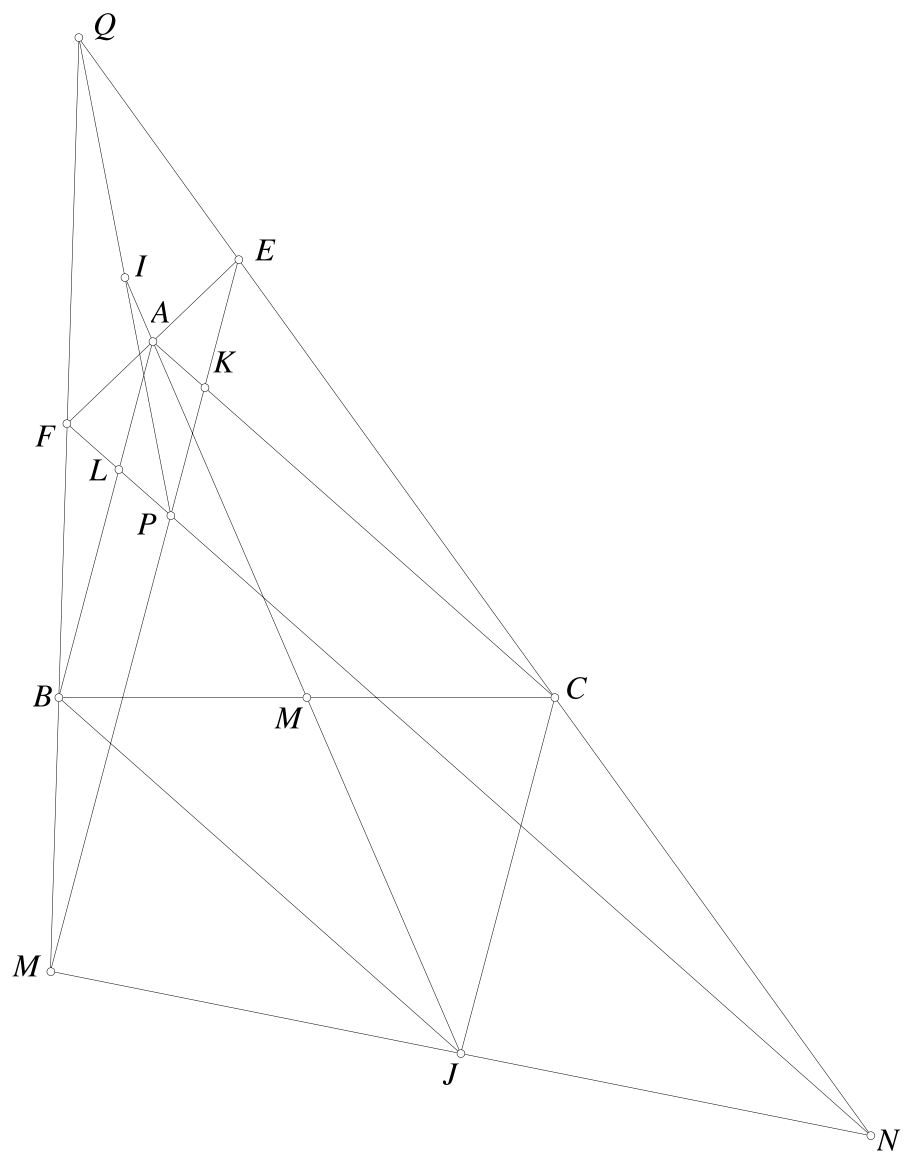
Nhận xét. Nếu nhìn dưới dạng tam giác vuông thế thì trong bài này yếu tố tam giác vuông cũng có thể thay thế và tổng quát hơn được. Ta đưa ra bài toán sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC trung tuyến AM và P là điểm bất kỳ. Gọi K, L lần lượt thuộc các đường thẳng CA, AB sao cho $PK \parallel AB, PL \parallel AC$. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của P qua K, L. Gọi CE cắt BF tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ thuộc AM.*

Bài toán này là bài toán thuần túy các yếu tố trung điểm và song song. Thật thú vị khi nhận thấy rằng nó là một hệ quả của đường thẳng Gauss. Ta cũng xem lời giải dưới đây

Bổ đề 4.1. *Cho tứ giác $ABCD$. AB giao CD tại E. AD giao BC tại F. Chứng minh rằng trung điểm của AC, BD, EF thẳng hàng.*

Bổ đề là kết quả rất cơ bản và nổi tiếng của hình học phẳng gọi là đường thẳng Gauss xin không trình bày lại chứng minh. Trở lại bài toán



Hình 4.

Lời giải bài toán. Gọi I là trung điểm PA. Gọi PE, PF lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Dễ thấy A là trung điểm EF nên áp dụng bổ đề cho tứ giác $PEQF$ dễ thấy I, A, J thẳng hàng với J là trung điểm của MN. Do $PK \parallel AB$ mà A là trung điểm EF nên B là trung điểm FM. Tương tự C là trung điểm EN. Từ đó dễ thấy $ACJB$ là hình bình hành. Vậy AJ đi qua trung điểm M của BC, kết hợp I, A, J thẳng hàng ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc cho P trùng với các điểm đặc biệt hoặc đặc biệt hóa tam giác ABC để thu được các kết quả tương tự bài trên báo là một việc làm thú vị xin dành cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 81 năm 2009.

[2] Tạp chí TTT2 số 83 năm 2010.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com

Mở rộng một bài toán hình học trên THTT

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra tổng quát cho một bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên báo toán học và tuổi trẻ với phép chứng minh thông qua tính chất chùm điều hòa và ứng dụng bổ đề E.R.I.Q, thêm vào đó là một vài ứng dụng của bài tổng quát.

Trên THTT số 402 tháng 12 năm 2010 mục đề ra kỳ này có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

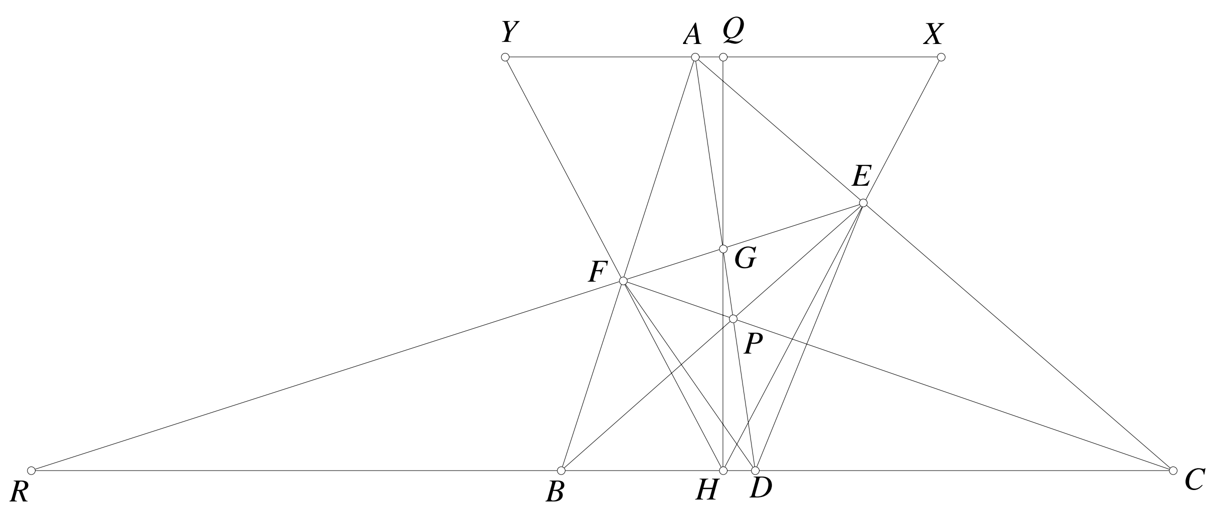
Bài toán 1. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD. M là một điểm thuộc đoạn AD. Các đường thẳng BM, CM theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. DE, DF theo thứ tự cắt các đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm của EF, KL đi qua A.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên đã có trên THTT số 406 năm 2011. Ngoài việc tính toán các tỷ số để sử dụng bổ đề E.R.I.Q như trong đáp án, ta còn có thể giải bài toán bằng cách sử dụng hai cặp tam giác đồng dạng XKA và YAF, XEA và YAL. Tuy nhiên, việc tính toán các tỷ số nhờ việc sử dụng phương tích kết hợp với định lý Thales giúp ta có một góc nhìn khác trong việc khai thác giả thiết các điểm đồng viên. Với ý tưởng sử dụng bổ đề E.R.I.Q như vậy, chúng ta có cách nhìn tổng quát như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. PA cắt EF tại G. H là hình chiếu của G lên BC. HE, HF lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HAC tại M, N khác H. HG cắt đường thẳng qua A song song BC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm MN, EF đi qua Q.

Để giải bài toán ta sử dụng hai bổ đề sau

Bổ đề 2.1. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. PA cắt EF tại G. H là hình chiếu của G lên BC. HE, HF, HG lần lượt cắt đường thẳng qua A song song BC tại X, Y, Q thì Q là trung điểm XY và $HX = HY$.

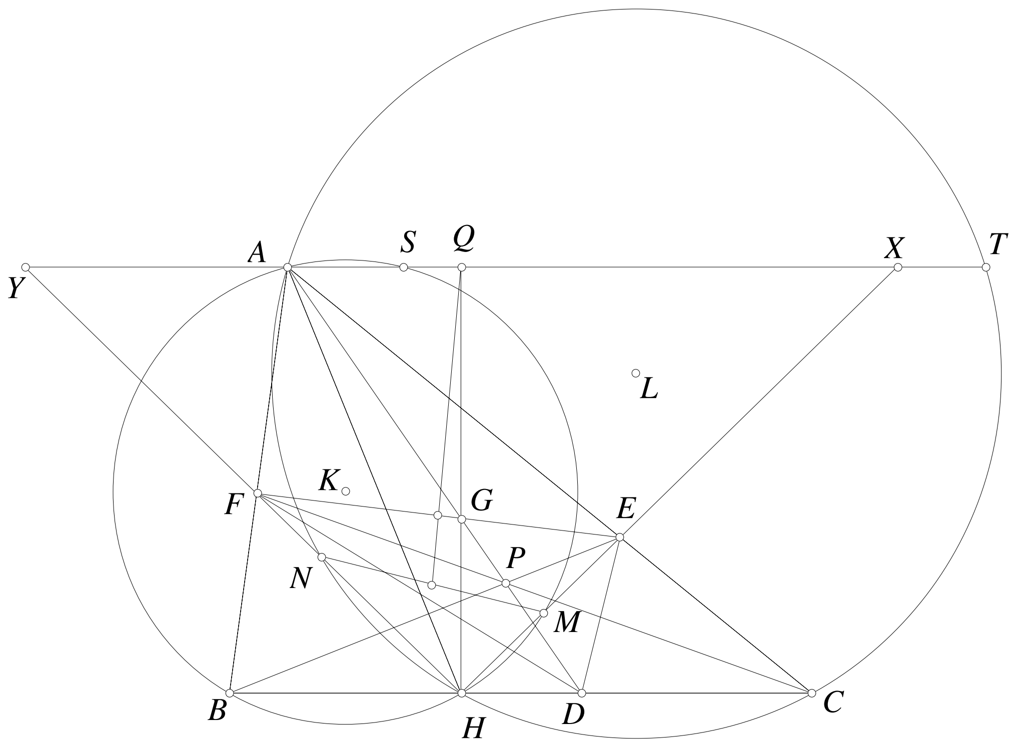


Chứng minh. Gọi EF giao BC tại R ta có hàng điều hòa cơ bản $(BC, DR) = -1$ chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng EF ta có hàng $(EF, GR) = -1$ do đó chùm $H(EF, GR) = -1$ lại có $HG \perp HR$ do đó từ tính chất chùm phân giác dễ suy ra HG là phân giác $\angle EHF$. Vậy trong tam giác HXY có $HG \equiv HQ$ là đường cao và phân giác do đó tam giác HXY cân tại H, suy ra Q là trung điểm XY và $HX = HY$. □

Bổ đề sau được đặt tên là E.R.I.Q là viết tắt các chữ cái đầu của cụm từ tiếng Anh "Equal Ratio In Quadrilateral" bởi kiến trúc sư Hy Lạp Kostas Vittas, chúng tôi tạm dịch là "tỷ số bằng nhau trong tứ giác".

Bổ đề 2.2. Cho tứ giác $ABCD$, các điểm M, N thuộc AB, CD sao cho $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{ND}}{\overline{NC}}$ thì các điểm chia AD, BC và MN cùng một tỷ số sẽ thẳng hàng.

Bổ đề là kết quả cơ bản có thể tham khảo nhiều cách chứng minh trong nhiều tài liệu khác nhau. Trở lại bài toán



Lời giải. Gọi AQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB, HAC lần lượt tại S, T. HE, HF lần lượt cắt AQ tại X, Y. Ta thấy A, S, H, M thuộc đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AHB và A, T, H, N thuộc đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác AHC nên $\overline{XS}.\overline{XA} = \overline{XM}.\overline{XH}$ và $\overline{YT}.\overline{YA} = \overline{YN}.\overline{YH}$, suy ra $\dfrac{\overline{XS}.\overline{XA}}{\overline{YT}.\overline{YA}} = \dfrac{\overline{XM}.\overline{XH}}{\overline{YN}.\overline{YH}}$ (1).

Ta lại chú ý tứ giác $ATCH$ là hình thang cân và có AQ là đường cao nên $\overline{TA} - \overline{CH} = 2\overline{QA}$. Từ đó ta có $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XH}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{XA} + \overline{CH}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{XA} + \overline{TA} - 2\overline{QA}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{QX} + \overline{QT}} = \dfrac{\overline{XA}}{-\overline{QY} + \overline{QT}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{YT}}$ (2).

Tương tự $\dfrac{\overline{YF}}{\overline{YH}} = \dfrac{\overline{YA}}{\overline{XS}}$ (3).

Từ (2),(3) suy ra $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XH}}.\dfrac{\overline{YH}}{\overline{YF}} = \dfrac{\overline{XA}.\overline{XS}}{\overline{YT}.\overline{YA}}$ (4).

Từ (1),(4) suy ra $\dfrac{\overline{XM}.\overline{XH}}{\overline{YN}.\overline{YH}} = \dfrac{\overline{XE}.\overline{YH}}{\overline{XH}.\overline{YF}}$ hay $\dfrac{\overline{XM}}{\overline{XE}} = \dfrac{\overline{YN}}{\overline{YF}}.\dfrac{YH^2}{XH^2} = \dfrac{\overline{YN}}{\overline{YF}}$. Chú ý $YH = XH$ theo bổ đề 2.1.

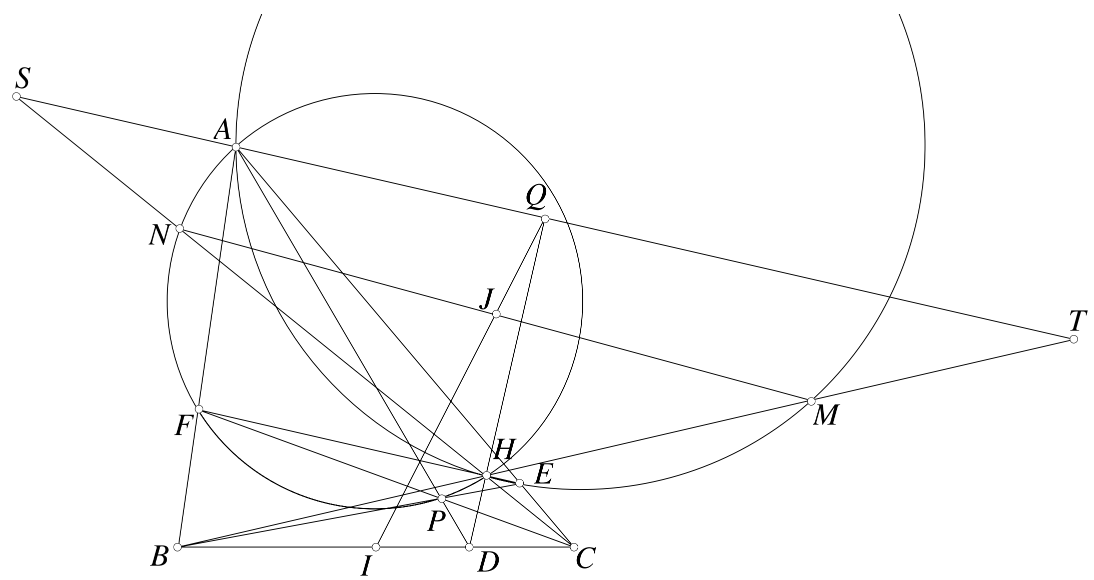
Từ đó cũng theo bổ đề 2.1 và bổ đề 2.2 trung điểm Q của XY và trung điểm của MN, EF thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi AD là đường cao của tam giác ABC ta thu được bài toán ban đầu. Bài toán phát biểu với P là điểm bất kỳ sẽ có giá trị ứng dụng lớn trong nhiều trường hợp đặc biệt khác nhau. Sau đây tôi xin dẫn ra một vài ví dụ ứng dụng bài toán này

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Gọi PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE, AHF tại M, N. Q là hình chiếu của A lên HD. Chứng minh rằng đường nối trung điểm BC, MN đi qua Q.

Lời giải thứ nhất. Áp dụng trực tiếp bài toán 2 cho tam giác AEF với các đường BE, CF và AD đồng quy, ta thu được điều phải chứng minh. □

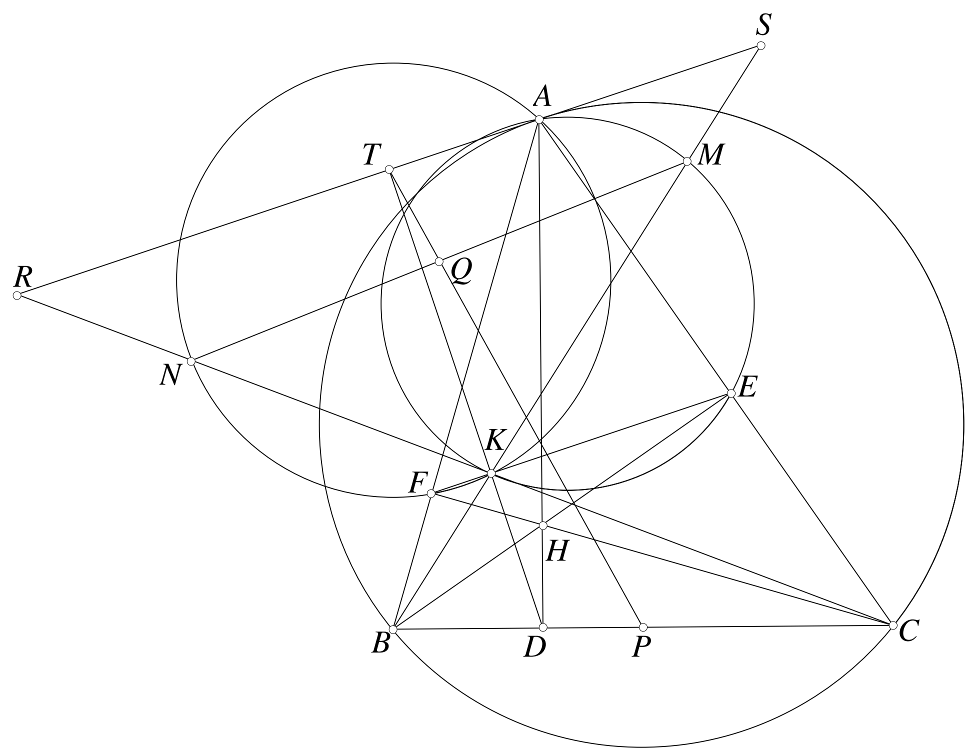
Chúng ta có thể trình bày một cách khác chứng minh bài toán này trực tiếp, đó cũng thể coi là một cách khác chứng minh bài toán 2.



Lời giải thứ hai. Gọi T, S lần lượt là giao điểm của HM, HN với AQ. Áp dụng tính chất chùm điều hòa như trong bổ đề 1 bài toán 2 thì ta suy ra được HQ là phân giác góc $\angle SHT$ mà $HQ \perp ST$ suy ra tam giác HST cân tại H. Suy ra Q là trung điểm ST và $\angle HST = \angle HTS$. Lại có $\angle ANS = 180° - \angle ANH = 180° - \angle AFH = \angle BAT$. Do đó $\triangle SAN \sim \triangle TBA$ suy ra $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{TB}} = \dfrac{\overline{SN}}{\overline{TA}}$, hay $\overline{SA}.\overline{TA} = \overline{SN}.\overline{TB}$. Chứng minh tương tự suy ra $\overline{SA}.\overline{TA} = \overline{TM}.\overline{SC}$ suy ra $\overline{TM}.\overline{SC} = \overline{SN}.\overline{TB}$ hay $\dfrac{\overline{SN}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{TM}}{\overline{TB}}$. Từ đây áp dụng bổ đề E.R.I.Q ta thu được điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Hai bài toán này cũng có thể coi là một. Trong lời giải bài toán 2 chúng ta tính toán các tỷ số nhờ định lý Thales và phương tích rồi dùng E.R.I.Q. Nhưng trong lời giải thứ hai bài toán 3 ta sử dụng hai cặp tam giác đồng dạng. Mỗi phương pháp đều có ưu và nhược điểm. Cách làm tính toán thì hơi dài nhưng logic vì chúng ta biến đổi độ dài đại số trong các bước là đều chính xác. Cách làm sử dụng tam giác đồng dạng ngắn hơn nhưng việc dùng độ dài đại số trên các trục không song song là chưa đảm bảo logic. Việc đưa ra hai lời giải qua hai dạng phát biểu như trong bài viết là hợp lý vì tránh được sự trùng lặp, đồng thời cách phát biểu như đề bài toán 3 đã làm cho vấn đề được "ẩn đi" một chút. Việc áp dụng bài toán 2 và bài toán 3 vào các tam giác khác nhau tạo ra nhiều bài toán mới hoặc bổ đề mới rất thú vị. Ta đến một ví dụ khác áp dụng bài toán 2 và bài toán 3 như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF. K là hình chiếu của D lên EF. Gọi KB, KC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác KAE, KAF tại M, N khác K. Gọi P, Q là trung điểm MN, BC. Chứng minh rằng PQ và DK cắt nhau trên tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

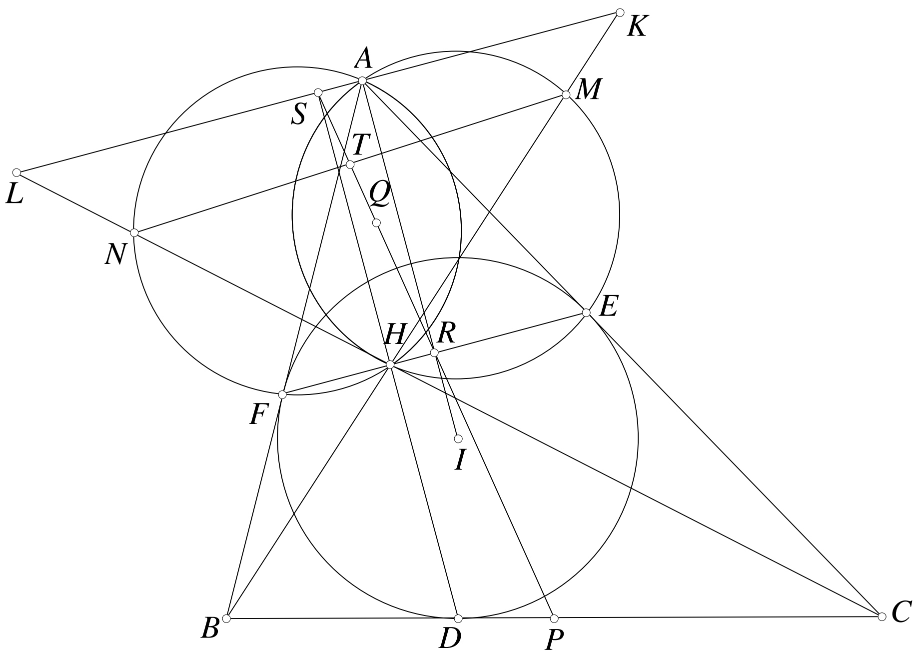


Hình 1.

Lời giải. Gọi S, R lần lượt là giao điểm KM, KN với tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Áp dụng bổ đề chứng minh trên ta suy ra DK là phân giác góc BKC. Lại có kết quả quen thuộc là $EF \parallel RS$ nên DK vuông góc với RS mà DK lại là phân giác $\angle RKS$ suy ra tam giác KRS cân tại K. Gọi T là giao điểm DK, RS, suy ra T là trung điểm RS. Đến đây ta thấy ngay mô hình của bài toán 3 là trung điểm các đoạn thẳng MN, BC và T thẳng hàng. Ta được điều phải chứng minh. □

Sau đây là một ứng dụng đẹp khác

Bài toán 5. Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại M, N khác H. Chứng minh rằng trung điểm của BC, MN và AH thẳng hàng.

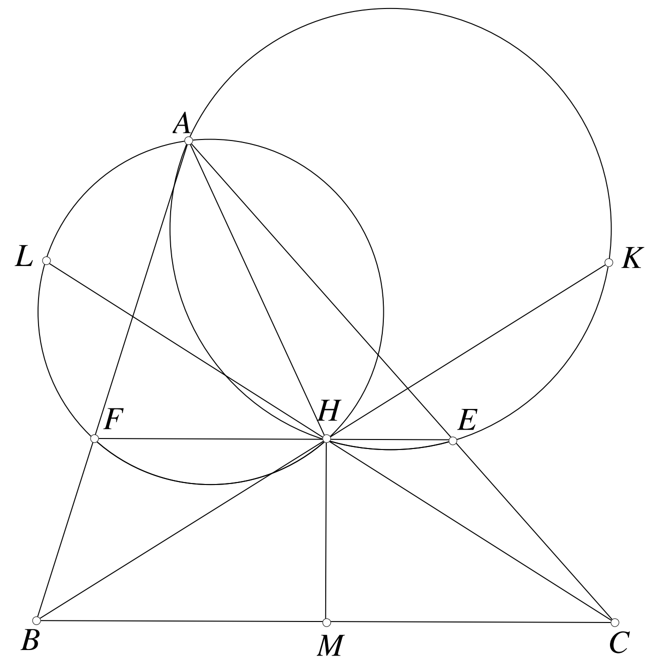


Hình 2.

Lời giải. Gọi P, R, Q, T lần lượt là trung điểm BC, EF, AH, MN. Gọi S là giao điểm QR, DH. Dễ dàng chứng minh được $ASHR$ là hình chữ nhật, suy ra AS là phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC. Gọi K, L lần lượt là giao điểm AS với HM, HN. Vẫn với tính chất hàng điều hòa như bổ đề 1 bài toán 2, ta suy ra được HS là phân giác $\angle KHL$, mà $DH \perp KL$ suy ra tam giác HKL cân tại H. Suy ra S là trung điểm KL. Áp dụng toán số 3, suy ra S, T, P thẳng hàng. Áp dụng một nhận xét quen thuộc là với điểm H nằm trong tam giác sao cho $\angle HBA = \angle HCA$ thì đường nối chân hình chiếu của H trên phân giác ngoài và phân giác trong góc A đi qua trung điểm BC, ta thu được S, R, P thẳng hàng. Từ đó suy ra P, R, Q thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta có thể không dùng nhận xét trên mà chứng minh trực tiếp P, R, S thẳng hàng như sau. Gọi ID cắt EF tại X và cắt (I) tại Y khác D. AY cắt BC tại Z. Dễ thấy AX đi qua trung điểm P của BC và P cũng là trung điểm của DZ, mặt khác $IP \parallel AY$ và $\dfrac{XR}{AS} = \dfrac{RX}{RH} = \dfrac{IX}{ID} = \dfrac{IX}{IY} = \dfrac{PX}{PA}$ nên P, R, S thẳng hàng.

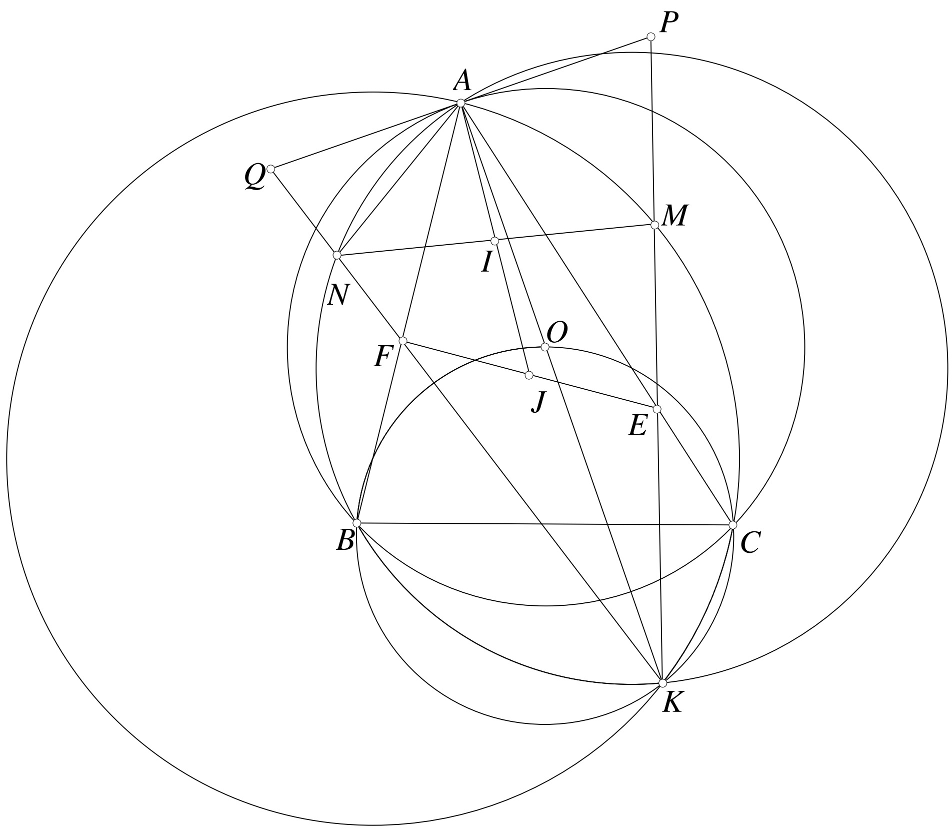
Bài toán 6. Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Các điểm E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. H là hình chiếu của M lên EF. HB, HC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại K, L. Chứng minh rằng $HK = HL$.



Hình 3.

Lời giải. Do $EF \parallel BC$, áp dụng định lý Thales suy ra $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$, lại có M là trung điểm BC suy ra $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -1$. Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với các điểm M, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB, ta có $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} . \dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}} . \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$ suy ra AM, BE, CF đồng qui. Chứng minh tương tự bài toán 3, dễ có HM là phân giác góc KHL và HM đi qua trung điểm KL, suy ra tam giác HKL cân tại H. Suy ra $HK = HL$. Đó là điều phải chứng minh. $\square$

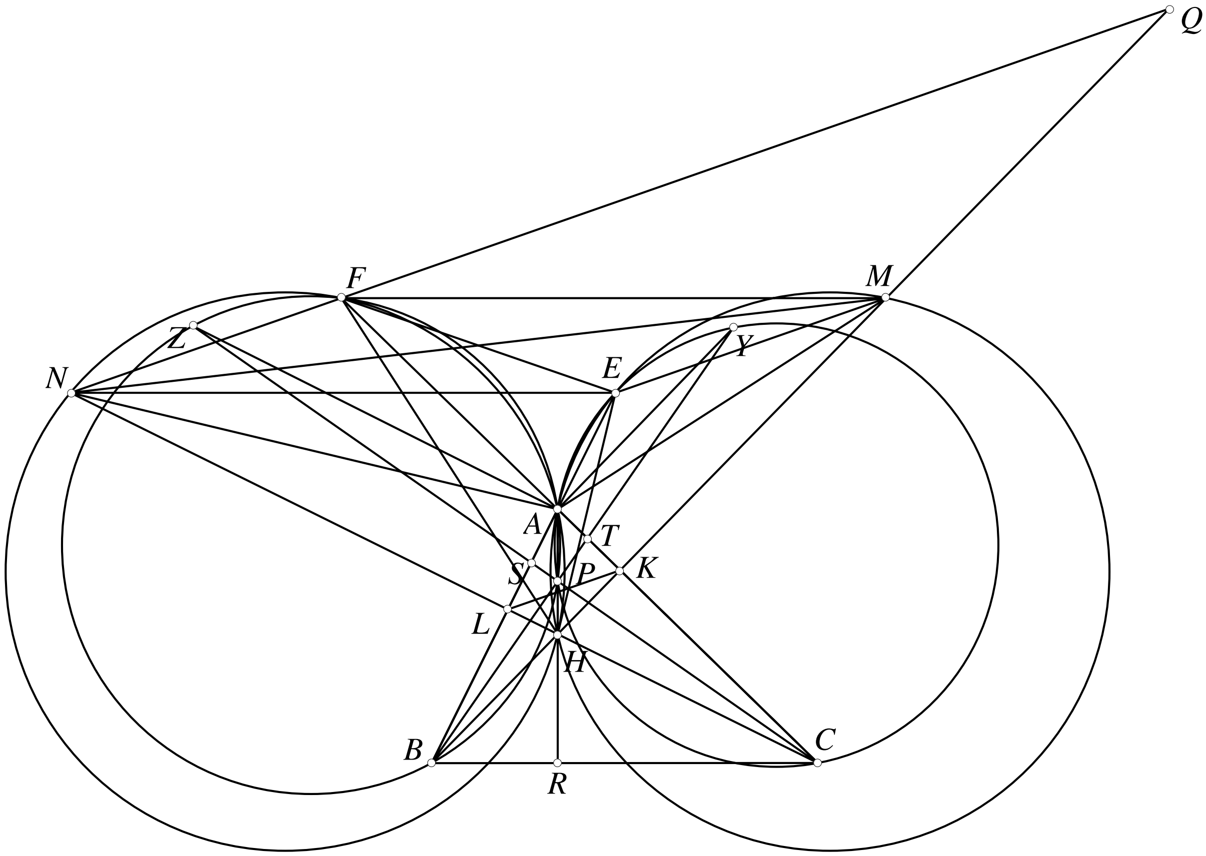
Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt AO tại K khác O. Lấy các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho KA là phân giác $\angle EKF$. KE, KF lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác KAC, KAB tại M, N khác K. Chứng minh rằng đường nối trung điểm của EF, MN đi qua A.



Hình 4.

Lời giải. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) với KE, KF. Dễ chứng minh được tam giác KPQ cân tại K và A là trung điểm PQ. Ta có $\angle KBC = \angle KOC = 2\angle OAC$ suy ra $\angle KBA = 2\angle OAC + \angle ABC = 180^\circ - \angle ABC = \angle KNA$ suy ra $\angle ANQ = \angle ABC = \angle EAP$, lại có $\angle NQA = \angle APE$ suy ra $\triangle ANQ \sim \triangle APE$. Suy ra $\overline{NQ}.\overline{EP} = \overline{AQ}.\overline{AP}$. Chứng minh tương tự suy ra $\overline{MP}.\overline{FQ} = \overline{AQ}.\overline{AP}$. Từ đây áp dụng bổ đề E.R.I.Q suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 8. Cho tam giác ABC trực tâm H. P là điểm bất kỳ trên AH. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APC, APB lần lượt cắt CA, AB tại E, F. HB, HC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHF, AHE tại M, N khác H. Chứng minh rằng tam giác AEF và AMN có chung đường đối trung.



Hình 5.

Lời giải. Gọi Q là giao điểm BM, FN. Ta có $\angle CNQ = \angle HAC = \angle CBQ$ suy ra C, B, N, Q cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $\angle NQB = \angle NCB = \angle BAH = \angle EMH$ suy ra $NQ \parallel EM$. Cũng từ tứ giác $BCKL$ nội tiếp nên dễ có $KL \parallel ME \parallel NQ$. Gọi PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại T, S và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PAC, PAB tại Y, Z khác P. Gọi AR, BK, CL là đường cao tam giác ABC. Dễ thấy hai tam giác ABY và AZC đồng dạng. Mặt khác lại có $BA.BE = BP.BY$ và $CA.CF = CP.CZ$ suy ra $\dfrac{BA.BE}{CA.CF} = \dfrac{BP.BY}{CP.CZ} = \dfrac{PB}{PC}.\dfrac{AY}{AC}$. Từ đó $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{PB}{PC}.\dfrac{AY}{AB} = \dfrac{PB}{AB}.\dfrac{AY}{PC} = \dfrac{PB}{AB}.\dfrac{AT}{TP} = \dfrac{CA}{SA}.\dfrac{SB}{CT}.\dfrac{AT}{AB} = \dfrac{ZB}{ZC}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{HB}{HC}$. Ta chú ý các đẳng thức cuối có được do áp dụng Menelaus cho tam giác ABT với S, P, C thẳng hàng và định lý Ceva tam giác ABC với BT, CS và AR đồng quy. Từ đó chú ý $\angle HBE = \angle HCF$ nên hai tam giác HBE và HCF đồng dạng. Suy ra $\angle HFA = \angle HEA = \angle KMA$. Từ đó hai tam giác vuông KFH và KMA đồng dạng. Từ đó $\dfrac{LC}{LN} = \dfrac{KF}{KC} = \dfrac{KF}{KH}.\dfrac{KH}{KC} = \dfrac{KM}{KA}.\dfrac{KH}{KC} = \dfrac{KM.KH}{KH.KB} = \dfrac{KM}{KB}$. Vậy từ hai tam giác ACL và ABK đồng dạng suy ra tam giác ABM và ACN đồng dạng. Vậy ta có

$$\frac{LB}{LE} = \frac{KB}{KM} = \frac{LC}{LN} = \frac{KC}{KF}$$

suy ra $NE \parallel MF \parallel BC$. Ta suy ra tứ giác $EMFN$ là hình bình hành hay EF, MN cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, vậy tam giác AEF, AMN có chung đường trung tuyến kẻ từ A. Ta chứng minh phân giác góc $\angle MAN$ cũng đồng thời là phân giác góc $\angle BAC$ do theo chứng minh trên hai tam giác $\triangle ACN \sim \triangle ABM$ nên $\angle FAN = \angle EAM$ hay phân giác $\angle FAE$ và phân giác $\angle MAN$ trùng nhau. Vậy đường đối trung đỉnh A của tam giác AMN và tam giác AEF trùng nhau. Suy ra điều phải chứng minh. □

Các bạn hãy làm bài tập sau để luyện tập.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC với P, Q đẳng giác trên phân giác góc A. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. D là hình chiếu của Q lên BC. H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại M, N khác H. Chứng minh rằng trung điểm của BC, MN và AH thẳng hàng.

Gợi ý. Gọi K, L là hình chiếu của B, C trên EF. Ta có các cặp tam giác đồng dạng $\triangle BDQ \sim \triangle BFP, \triangle CDQ \sim CEP, \triangle BKF \sim \triangle CLE$. Chú ý rằng $BK \parallel DH \parallel CL$ nên ta có $\dfrac{HK}{HL} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{DB}{DP}.\dfrac{DP}{DC} = \dfrac{FB}{FP}.\dfrac{EP}{EC} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BK}{CL}$. Từ đó $\triangle KBH \sim \triangle LCH$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Cuối bài viết tác giả muốn nói lời cảm ơn chân thành tới học trò **Nguyễn Ngọc Chi Lan** đã giúp tác giả nhiều trong việc hoàn thiện các lời giải bài toán 3, bài toán 6, 7, 8. Tác giả cũng muốn nói lời cảm ơn chân thành tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương đã đọc toàn bộ bài viết và cho nhiều góp ý giá trị đồng thời cho các nhận xét xác đáng cho bài toán 1, 2, 3, bạn **Dũng** cũng đưa ra các gợi ý lời giải khác để hoàn thiện cho các bài toán 5, 8, 9.

Tài liệu

[1] Tạp chí THTT số 402 tháng 12 năm 2010.

[2] Tạp chí THTT số 406 tháng 4 năm 2011.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

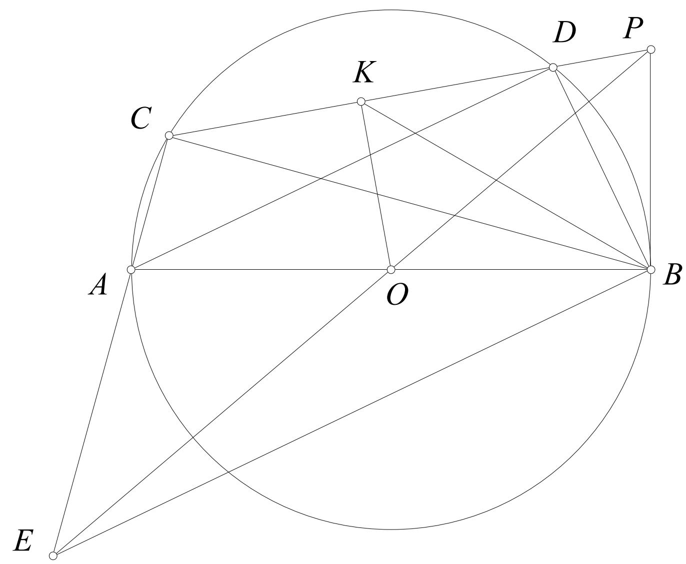
Một bài toán hay có nhiều ứng dụng

Tóm tắt nội dung

Một bài toán nhỏ rất đẹp với lời giải thuần túy hình học được áp dụng vào trong nhiều tình huống khác nhau tạo ra các bài toán thú vị xuất hiện trong nhiều cuộc thi học sinh giỏi.

Trong [1] có đề xuất một bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho C, D thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB. Tiếp tuyến tại B cắt CD tại P. CA cắt OP tại E thì BE song song AD.

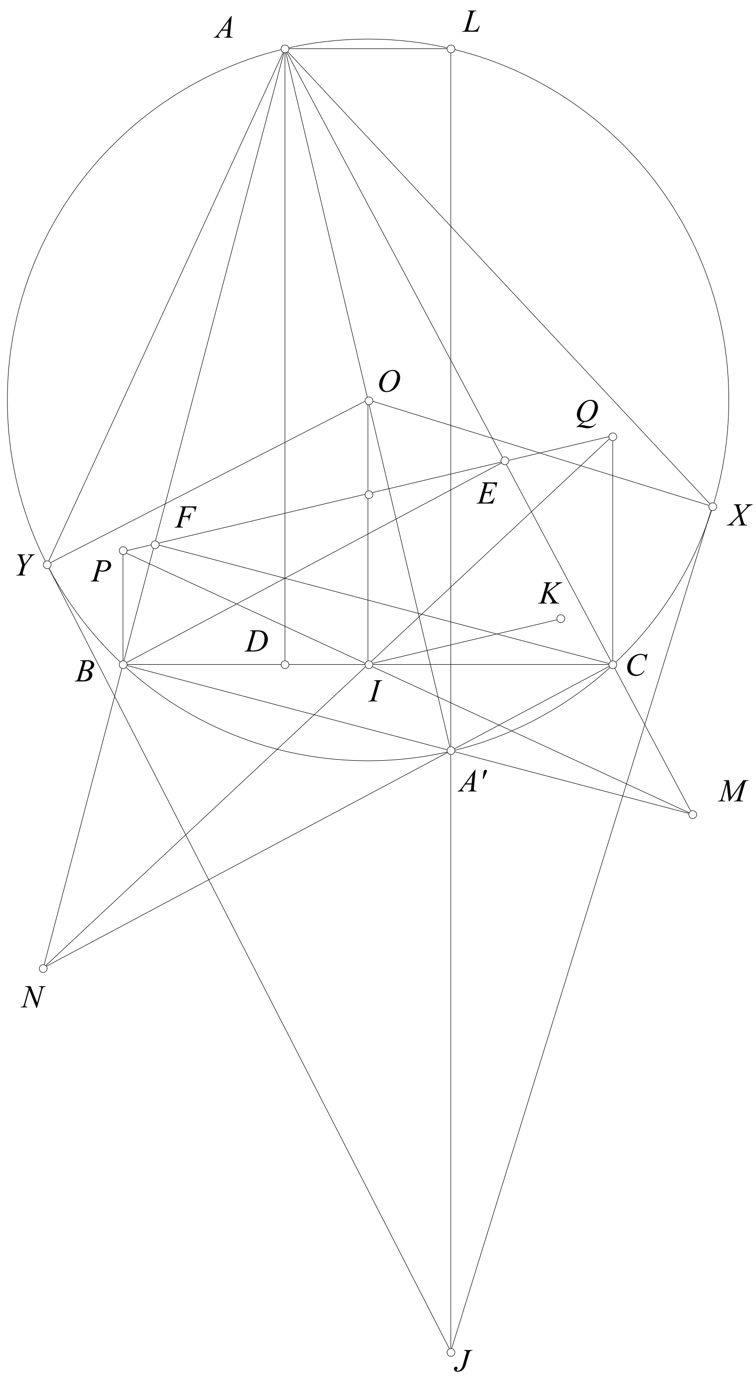


Hình 1.

Lời giải. Gọi K là trung điểm CD thì $OK \perp CD$ nên ta có $OBPK$ nội tiếp. Do đó $\angle BKD = \angle BOP = \angle AOE$, mặt khác $\angle EAO = \angle KDB$ vậy tam giác $\triangle EAO \sim \triangle BDK$ suy ra $\triangle EAB \sim \triangle BDC$. Từ đó $\angle DAB = \angle DCB = \angle ABE$ vậy $BE \parallel AD$. $\square$

Nhận xét. Bài toán tuy rất đơn giản, lời giải đẹp mộc mạc thuần túy hình học nhưng chứa đựng những ý nghĩa rất sâu sắc. Chúng ta hãy xét một số ứng dụng của nó qua các bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) các đường cao AD, BE, CF. AA' là đường kính của (O). $A'B, A'C$ cắt AC, AB lần lượt tại M, N. P, Q thuộc EF sao cho PB, QC vuông góc với BC. Đường thẳng qua A vuông góc với QN, PM lần lượt cắt (O) tại X, Y. Tiếp tuyến của (O) tại X, Y cắt nhau tại J. Chứng minh rằng JA' vuông góc BC.



Hình 2.

Lời giải. Theo bài toán 1 thấy PM, QN đi qua trung điểm I của BC. Lấy L thuộc (O) sao cho $AL \parallel BC$. Dựng $IK \parallel PQ \equiv EF \perp AA'$ khi đó dễ thấy IO đi qua trung điểm PQ nên chùm $I(KOPQ) = -1$. Ta lại thấy AO, AL, AY, AX lần lượt vuông góc với IK, IO, IP, IQ do đó $(A'LYX) = A(OLYX) = -1$. Vậy tứ giác $LXA'Y$ điều hòa, vậy tiếp tuyến tại X, Y của (O) cắt nhau trên $A'L \perp BC$. Ta có điều phải chứng minh. □

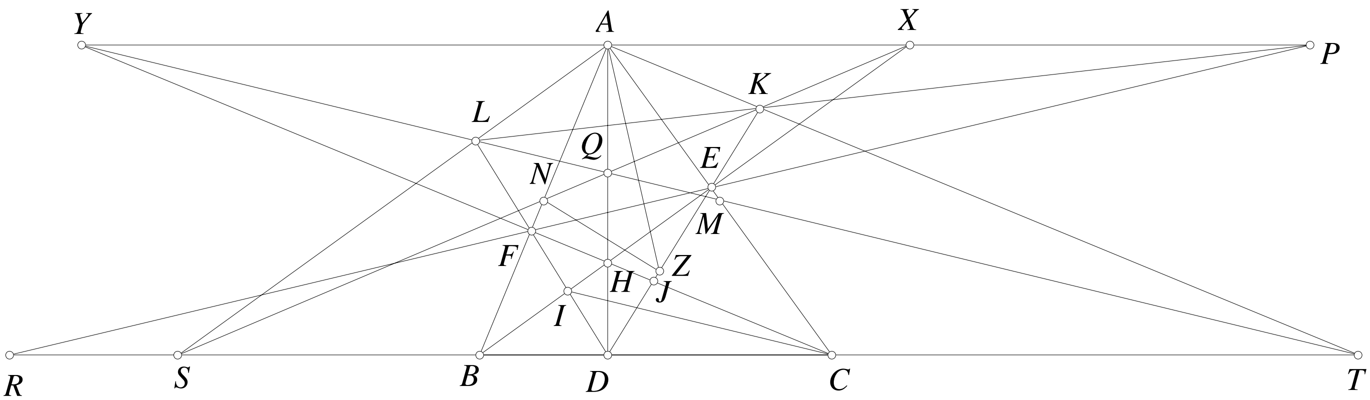
Nhận xét. Bài toán trên được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội tuyển KHTN năm 2009 và là đề ra trên THTT năm 2011.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H, các điểm D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, AB. Gọi DE cắt đường thẳng qua A vuông góc AB tại K. Gọi KN giao BC tại S

a) Chứng minh rằng $AS \perp AC$.

b) Gọi DF cắt đường thẳng qua A vuông góc AC tại L. Chứng minh rằng LM, NK, AD đồng quy.

c) Gọi KL cắt EF tại P. Chứng minh rằng $AP \parallel BC$.



Hình 3.

Lời giải. a) Gọi Z là trung điểm của DE. Dễ thấy $NZ \perp DE$ vậy tứ giác $AKNZ$ nội tiếp. Suy ra $\angle AZE = \angle ANK = \angle SNB$. Mặt khác tứ giác $AEDB$ nội tiếp nên $\angle AEZ = \angle SBN$. Từ đó ta có $\triangle AEZ \sim \triangle SBN$. Mà E, N là trung điểm của DE, AB do đó $\triangle AED \sim \triangle SBA$. Từ đó $\angle SAB = \angle ADE = \angle ABE$ nên $AS \parallel BE \perp AC$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi ML cắt BC tại T. Tương tự câu a) có $AT \perp AB$ do đó A, L, S và A, K, T thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ASC với L, M, T thẳng hàng ta có $\dfrac{LA}{LS}.\dfrac{TS}{TC}.\dfrac{MC}{MA} = 1$ suy ra $\dfrac{LA}{LS} = \dfrac{TC}{TS}$. Tương tự $\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{ST}{SB}$. Từ đó chú ý $CH \parallel AT, BH \parallel AS$ ta có $\dfrac{LA}{LS}.\dfrac{DS}{DT}.\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{TC}{TS}.\dfrac{DS}{DT}.\dfrac{ST}{SB} = \dfrac{TC}{TD}.\dfrac{DS}{SB} = \dfrac{AH}{AD}.\dfrac{AD}{AH} = 1$. Do đó SK, LT, AD đồng quy tại Q. Ta có điều phải chứng minh.

c) Gọi DF giao BE tại I. Ta chú ý trong tam giác AFD có B, I, H thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus $\dfrac{HA}{HD}.\dfrac{ID}{IF}.\dfrac{BF}{BA} = 1$. Từ đó chú ý $IB \parallel AL$ ta có $\dfrac{CT}{CD} = \dfrac{HA}{HD} = \dfrac{IF}{ID}.\dfrac{BA}{BF} = \dfrac{IF}{ID}.\dfrac{IL}{IF} = \dfrac{IL}{ID}$. Do đó ta chứng minh được $CI \parallel LT$. Gọi đường thẳng qua A song song BC cắt LT tại Y. Ta thấy các tam giác ALY và BIC có các cạnh tương ứng song song nên IL, CY và BA đồng quy tại F. Tương tự SK giao AY tại X thì DK, BX, CA đồng quy tại E. Gọi EF giao BC tại R. XY là đường thẳng qua A song song BC. Gọi XY cắt EF tại P, ta sẽ chứng minh P, L, K thẳng hàng, thật vậy ta có biến đổi tỷ số

$$\frac{PX}{PY}.\frac{LY}{LQ}.\frac{KQ}{KX}$$

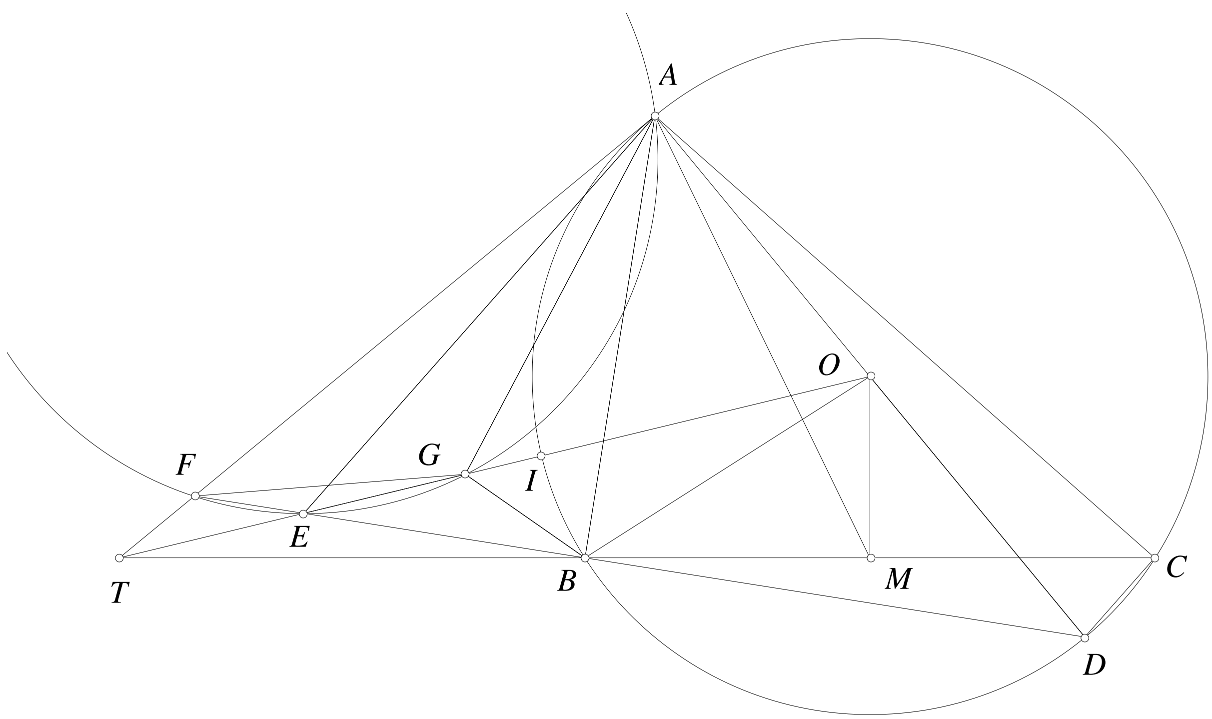
$= \frac{PX}{PA} \cdot \frac{PA}{PY} \cdot \frac{LY}{LT} \cdot \frac{LT}{LQ} \cdot \frac{KQ}{KS} \cdot \frac{KS}{KX}$
$= \frac{RB}{RC} \cdot \frac{RB}{RC} \cdot \frac{AY}{ST} \cdot \frac{LT}{LQ} \cdot \frac{KQ}{KS} \cdot \frac{ST}{AX}$
$= \frac{RB^2}{RC^2} \cdot \frac{AY}{AX} \cdot \frac{DT}{DS}$ (Chú ý áp dụng Ceva cho tam giác SQT với QD, SL, TK đồng quy)
$= \frac{DB^2}{DC^2} \cdot \frac{AY}{AX} \cdot \frac{AY}{AX}$ (Chú ý áp dụng Ceva và Menelaus cho tam giác ABC ta có $\frac{RB}{RC} = \frac{DB}{DC}$)
$= \frac{DB^2}{DC^2} \cdot \frac{DC^2}{DB^2} = 1.$
Vậy P, L, K thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Các bạn để ý kỹ thì nội dung câu a) chính là bài toán 1. Các bước trong lời giải câu a) là mô phỏng lại cách chứng minh bài toán 1. Nếu các bạn biết về phép chiếu song song hoàn toàn có thể mở rộng bài toán bằng cách thay trực tâm H bởi điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Cách chứng minh gần như tương tự. Bài toán trên đã được tác giả dùng trong kỳ thi HSG lớp 10 ở trường THPT chuyên KHTN năm 2013.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. D là điểm đối xứng của A qua O. OT cắt DB tại E.

a) Chứng minh rằng AE song song CD.

b) Gọi BE cắt AT tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt EO tại G khác E. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác AGB nằm trên (O).



Hình 4.

Chứng minh. a) Gọi M là trung điểm BC. Dễ có $OM \perp BC$. Chú ý $OA \perp AT$. Vậy tứ giác $AOMT$ nội tiếp, suy ra $\angle AOT = \angle AMT$ suy ra $\angle EOD = \angle AMC$. Kết hợp góc nội tiếp $\angle BDA = \angle ACM$

suy ra hai tam giác đồng dạng $\triangle AMC \sim \triangle EOD$. Chú ý M là trung điểm BC, O là trung điểm AD ta suy ra hai tam giác đồng dạng tương ứng $\triangle EAD \sim \triangle ABC$. Vậy từ đó $\angle EAD = \angle ABC$. Do tam giác ABC nhọn, dễ có $\angle ABC + \angle OAC = 90^\circ$ suy ra $\angle EAC = \angle EAD + \angle OAC = \angle ABC + \angle OAC = 90^\circ$. Ta có $AE \perp AC \perp CD$ nên AE song song CD. Ta có điều phải chứng minh.

b) Từ a) dễ có $\angle FAE = \angle TAC - 90^\circ = \angle DAC$. Do đó ta có $\angle FGT = \angle FAE = \angle DAC = \angle DBC = \angle FBT$ suy ra tứ giác $FGBE$ nội tiếp. Từ đó dễ có $\angle TGE = \angle TFB = \angle EGA$. Từ đó ta dễ có GO là phân giác $\angle AGB$ mà $OA = OB$ nên tứ giác $AGOB$ nội tiếp. Gọi đoạn GO cắt (O) tại I. Ta dễ có $OI = OA = OB$ mà I thuộc phân giác GO nên I là tâm nội tiếp tam giác AGB. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Các bạn để ý kỹ thì nội dung câu a) cũng chính là bài toán 1. Các bước trong lời giải câu a) là mô phỏng lại cách chứng minh bài toán 1. Bài toán trên được tác giả đề nghị trong kỳ thi HSG Vĩnh Phúc năm 2013.

Với bài toán tưởng chừng rất đơn sơ như bài toán 1 nếu biết ứng dụng vào trong nhiều tính huống khác nhau sẽ tạo ra được nhiều bài toán thú vị nữa. Các khám phá đó đang đợi các bạn.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh bài hình học số 4 trong kỳ thi IMO năm 2010

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

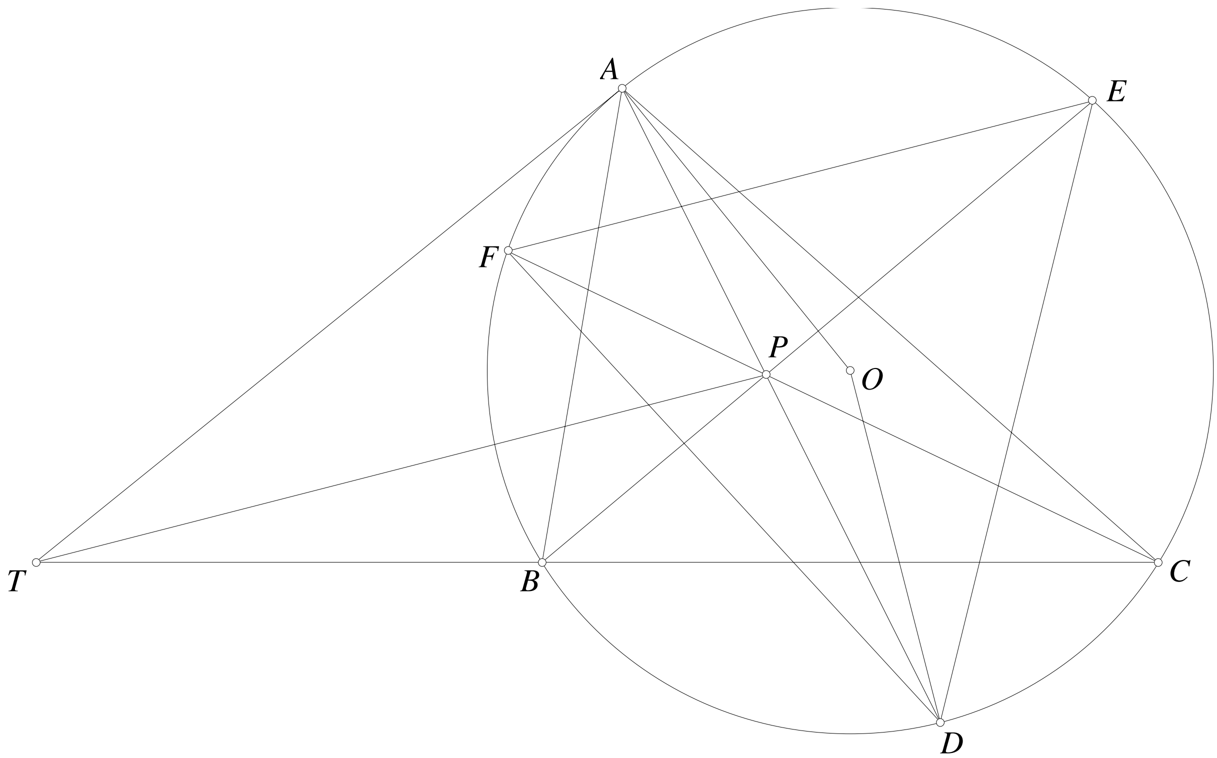
Bài viết xoay quanh bài toán số 4 thi IMO năm 2010 là một bài hình học hay nhiều ý nghĩa. Chúng tôi sẽ mở rộng và khai thác bài toán này với các lời giải thuần túy hình học. Cơ sở của bài viết này là [4].

1 Một số mở rộng

Trong kỳ thi IMO năm 2010 có bài toán số 4 là bài hình học như sau [1], ký hiệu được thay đổi đôi chút cho bài toán trở nên dễ hiểu

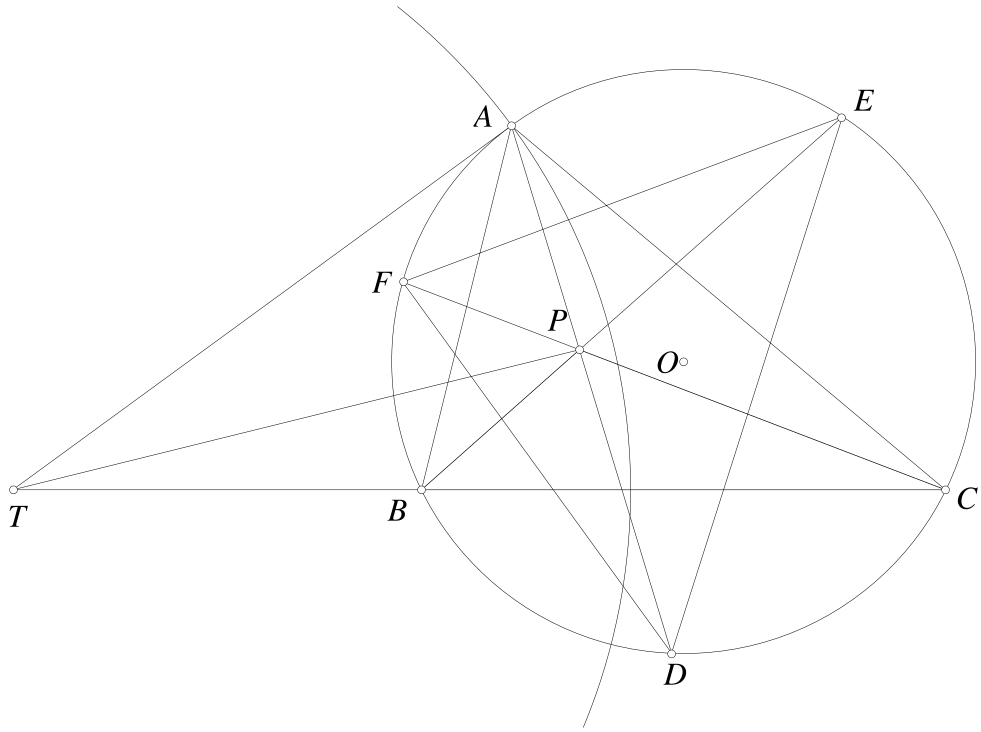
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Chứng minh rằng nếu $TA = TP$ thì $DE = DF$.

Bài toán trên theo sắp xếp trong đề thi là bài toán dễ nhất của ngày 2. Có rất nhiều lời giải được đề nghị trong [1] và cả trong shortlist. Sau đây tôi xin giới thiệu 2 lời giải. Một lời giải tôi cho là ngắn gọn nhất cho bài này có tham khảo trong [1] và một lời giải thứ 2 rất mới do tôi đề xuất. Và với lời giải thứ 2 ta hoàn toàn có thể nhìn bài toán dưới con mắt tổng quát.



Lời giải 1. Nếu $TA = TP$ thì do TA là tiếp tuyến của (O) nên $TP^2 = TA^2 = TB.TC$ do đó TP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC. Từ đó $\angle TPB = \angle PCB = \angle PEF$

suy ra $TP \parallel EF$. Mặt khác các tam giác TAP và OAD cân tại T và O có cạnh bên $TA \perp OA$ dễ suy ra cạnh bên còn lại vuông góc là $TP \perp OD$. Vậy từ đó $OD \perp EF$ với O là tâm ngoại tiếp tam giác DEF nên tam giác DEF cân tại D. Ta có điều phải chứng minh. □



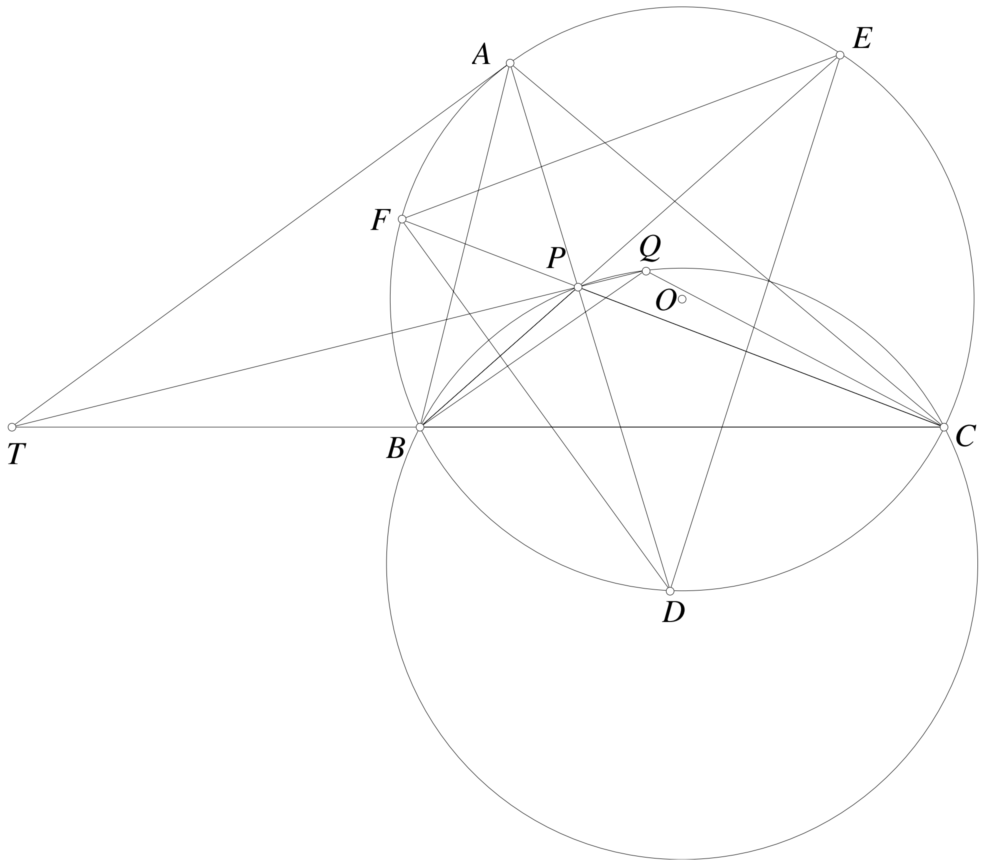
Lời giải 2. Ta có các tam giác đồng dạng PAB và PED nên $\frac{PB}{PD} = \frac{AB}{DE}$. Tương tự $\frac{PC}{PD} = \frac{AC}{DF}$. Từ hai tỷ số này suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.\frac{DF}{DE}$ hay $\frac{DF}{DE} = \frac{PB}{AB} : \frac{PC}{AC}$.
Đến đây ta chú ý đường tròn (T, TA) chính là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC nên $TA = TP$ khi và chỉ khi P thuộc (T, TA) khi và chỉ khi $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$ khi và chỉ khi $DF = DE$. □

Nhận xét. Lời giải 1 dựa vào tính chất tiếp tuyến và cộng góc ngắn gọn. Lời giải 2 thực chất dài hơn vì cần đến hiểu biết về đường tròn Apollonius cùng với một số tính chất của đường tròn này. Tuy nhiên qua lời giải 2 ta thấy ngay được bản chất vấn đề là từ đường tròn Apollonius. Nhờ lời giải trên ta dễ dàng đưa ra bài toán đảo như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Chứng minh rằng nếu $DE = DF$ thì $TA = TP$.

Từ đó ta có thể đề xuất bài toán như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại Q khác P. Chứng minh rằng $\frac{DF^2}{DE^2} = \frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}$.



Lời giải. Tương tự như lời giải 2 ta đã có $\frac{DF}{DE} = \frac{PB}{AB} : \frac{PC}{AC}$ (1).
Từ các tam giác đồng dạng có bản ta có $\frac{PB}{QC} = \frac{TB}{TQ}, \frac{QB}{PC} = \frac{TQ}{TC}$. Từ đó $\frac{TB}{TC} = \frac{PB}{PC} . \frac{QB}{QC}$. Mặt khác theo tính chất tiếp tuyến thì $\frac{TB}{TC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Vậy $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{PB}{PC} . \frac{QB}{QC}$ (2).
Từ (1),(2) suy ra $\frac{DF^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{AB^2} . \frac{PB^2}{PC^2} = \frac{QC}{QB} : \frac{PB}{PC} . \frac{PB^2}{PC^2} = \frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}$. Ta có điều phải chứng minh. □

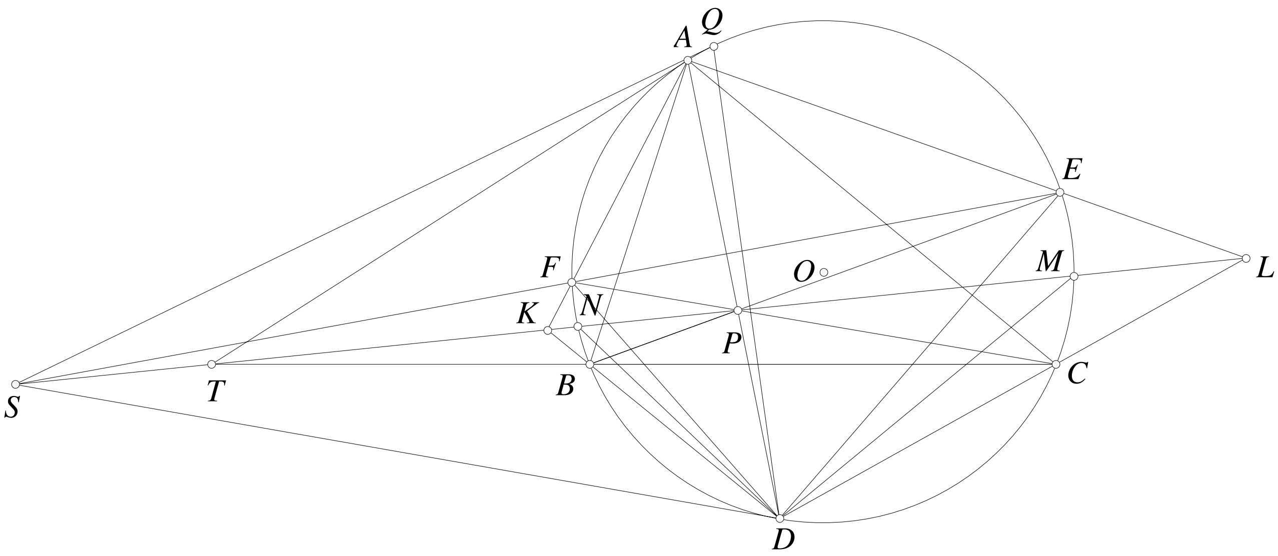
Nhận xét. Bài toán trên là một mở rộng của bài IMO khi mà $TA = TP$ thì $P \equiv Q$ ta thu được kết quả bài IMO. Như vậy lời giải 2 làm ta tổng quát được vấn đề. Để ý kỹ với cách làm hoàn toàn tương tự ta có thể tổng quát hơn nữa như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. T là một điểm bất kỳ trên đường thẳng BC. TA, TP lần lượt cắt (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại G, Q khác A, P. Chứng minh rằng

$$\frac{DF^2}{DE^2} = \left(\frac{GB}{GC} : \frac{AB}{AC}\right) . \left(\frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}\right).$$

Ta thấy nếu TA tiếp xúc (O) thì $A \equiv G$ ta thu được bài toán 2. Chúng ta tiếp tục tìm cách mở rộng bài toán 1. Trong [2] tác giả có đề xuất một bài toán mở rộng khác như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng tam giác DEF và tam giác DMN có chung đường đối trung.



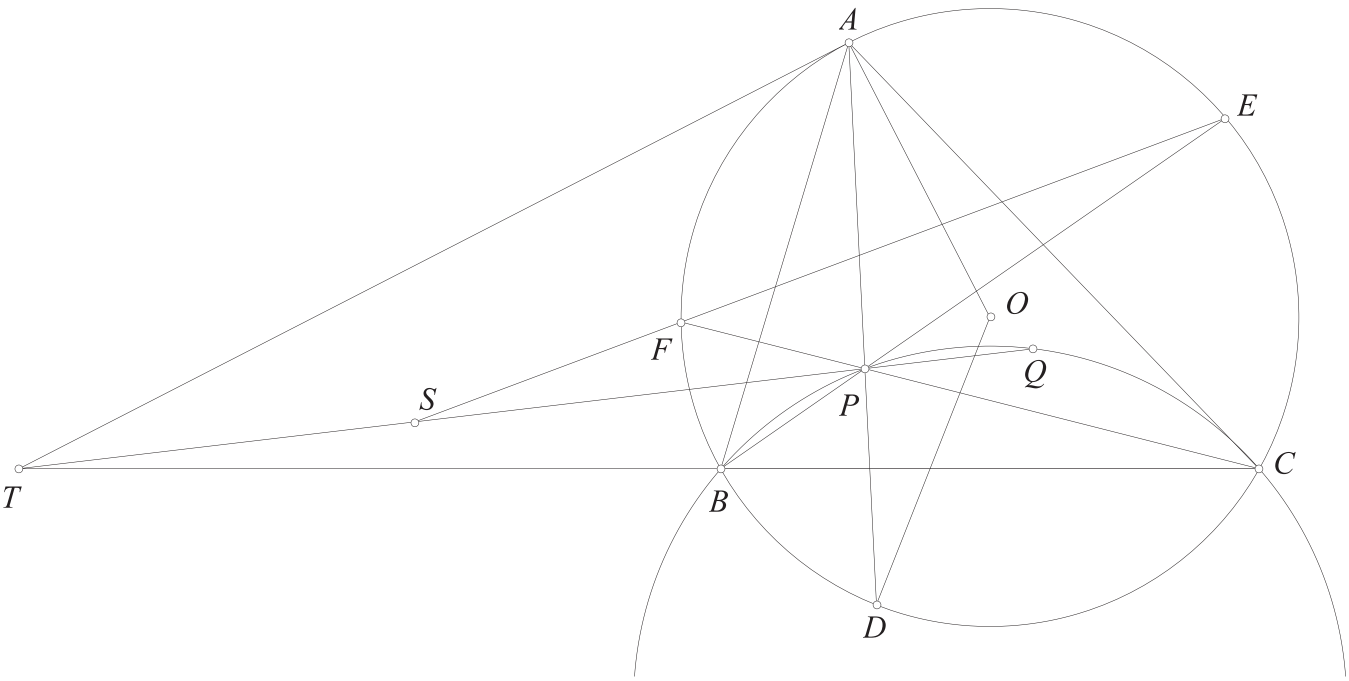
Lời giải sau sử dụng ý tưởng trong [2] được tác giả làm gọn hơn

Lời giải. Gọi AF giao BD tại K áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} A & B & F \\ C & A & D \end{pmatrix}$ suy ra K, P, T thẳng hàng. Tương tự L, P, T thẳng hàng, vậy K, L thuộc TP (1).
Gọi tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại S. Áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} D & F & B \\ E & D & A \end{pmatrix}$ suy ra S, K, P thẳng hàng. Tương tự S, L, P thẳng hàng, vậy K, L thuộc SP (2).
Từ (1),(2) suy ra S thuộc MN. Từ đây nếu gọi SQ là tiếp tuyến của (O) khác SD thì các tứ giác $DMQN$ và $DEQF$ điều hòa hay các tam giác DMN và DEF có cùng đường đối trung DQ. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Nếu $TA = TP$ thì dễ có $TP \perp OD$ nên tam giác DMN cân và có OD là đường đối trung nên DEF cũng có OD là đường đối trung nên DEF cân. Bài toán trên là một mở rộng đẹp của bài toán 1 theo kiểu tìm bất biến.

2 Một số ứng dụng vào các bài toán khác nhau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt EF tại S. Giả sử $\frac{SE}{SF}$ không đổi. Chứng minh rằng P luôn nằm trên một đường tròn cố định.



Lời giải. Gọi PT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại Q khác P. Xét phép nghịch đảo tâm P với phương tích $k = \overline{PA}.\overline{PD} = \overline{PB}.\overline{PE} = \overline{PC}.\overline{PF}$. Khi đó đường tròn (PBC) sẽ biến thành đường thẳng EF. Vì đường thẳng PT là không đổi qua nghịch đảo cực P nên giao điểm Q của PT và (PBC) sẽ biến thành giao điểm S của PT và EF. Theo bài toán 3 thì $\frac{DF^2}{DE^2} = \frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}$, qua nghịch đảo ta thu được

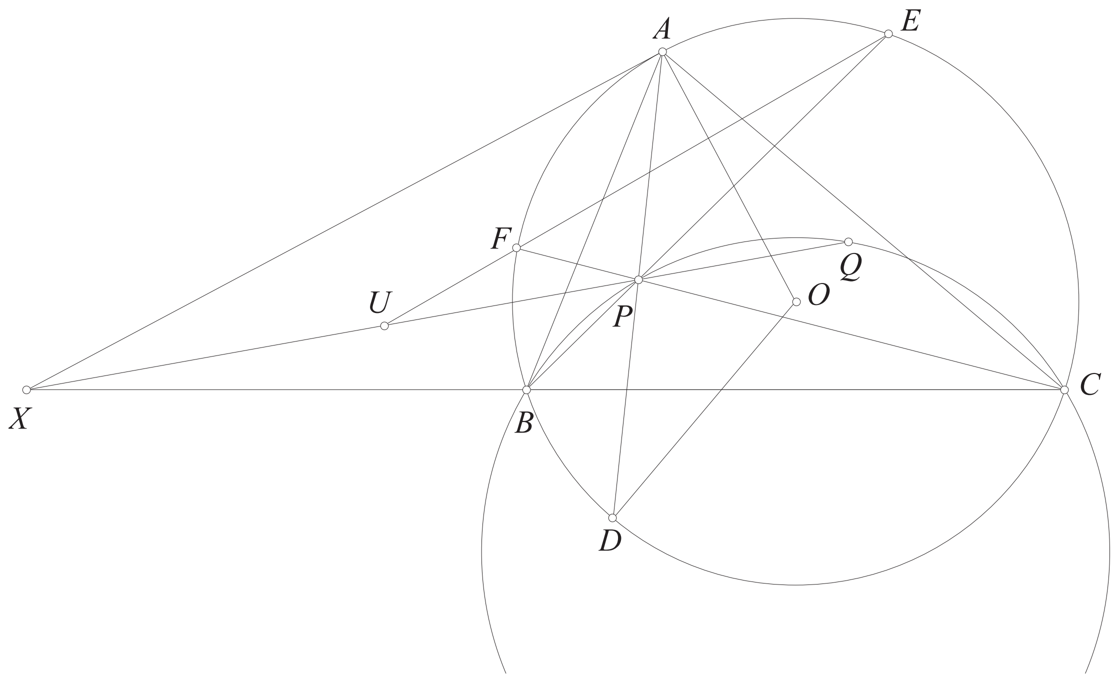
$$\left(\frac{\frac{|k|AC}{PA.PC}}{\frac{|k|AB}{PA.PB}}\right)^2 = \frac{|k|/PE}{|k|/PF} : \left(\frac{\frac{|k|SE}{PQ.PF}}{\frac{|k|SF}{PQ.PE}}\right).$$

Ta thu được

$$\frac{AC^2}{AB^2} : \frac{PC^2}{PB^2} = \frac{SF}{SE}.$$

Từ đó nếu P thay đổi mà $\frac{SE}{SF}$ không đổi thì $\frac{PB}{PC}$ không đổi nên P thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn BC ứng với tỷ số $\frac{PB}{PC} = \frac{SF}{SE}.\frac{AB^2}{AC^2}$. □

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. Chứng minh rằng PX, PY, PZ lần lượt cắt EF, FD, DE theo ba điểm thẳng hàng.



Lời giải thứ nhất. Gọi PX, PY, PZ lần lượt cắt EF, FD, DE tại U, V, W. Theo kết quả chứng minh bài toán 6 thì $\frac{UE}{UF} = \frac{AB^2}{AC^2} : \frac{PB^2}{PC^2}$, tương tự với V, W. Nhân các tỷ số tương ứng và chú ý U, V, W luôn nằm ngoài các đoạn EF, FD, DE nên U, V, W thẳng hàng. □

Lời giải sau được đề nghị bởi bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN

Lời giải thứ hai. Ta biến đổi tỷ số
$\frac{UE}{UF} = \frac{[PUE]}{[PUF]} = \frac{[PUE]}{[PXB]} \cdot \frac{[PXB]}{[PXC]} \cdot \frac{[PXC]}{[PUF]} = \frac{PU.PE}{PX.PB} \cdot \frac{XB}{XC} \cdot \frac{PX.PC}{PU.PF} = \frac{XB}{XC} \cdot \frac{PE}{PF} : \frac{PB}{PC} = \frac{XB}{XC} : \frac{PB^2}{PC^2}$.
Từ đó tương tự với V, W và các tỷ số tương ứng và chú ý U, V, W luôn nằm ngoài các đoạn EF, FD, DE nên U, V, W thẳng hàng. □

Chú ý. Từ cách làm thứ hai ta có thể thay X, Y, Z bởi ba điểm thẳng hàng bất kỳ lần lượt trên BC, CA, AB bài toán vẫn đúng. Một hệ quả thú vị khi quay trở lại mô hình ban đầu cũng bằng phép nghịch đảo ta có bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. PX, PY, PZ lần lượt cắt đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ lần lượt tại U, V, W. Chứng minh rằng bốn điểm P, U, V, W cùng thuộc một đường tròn.

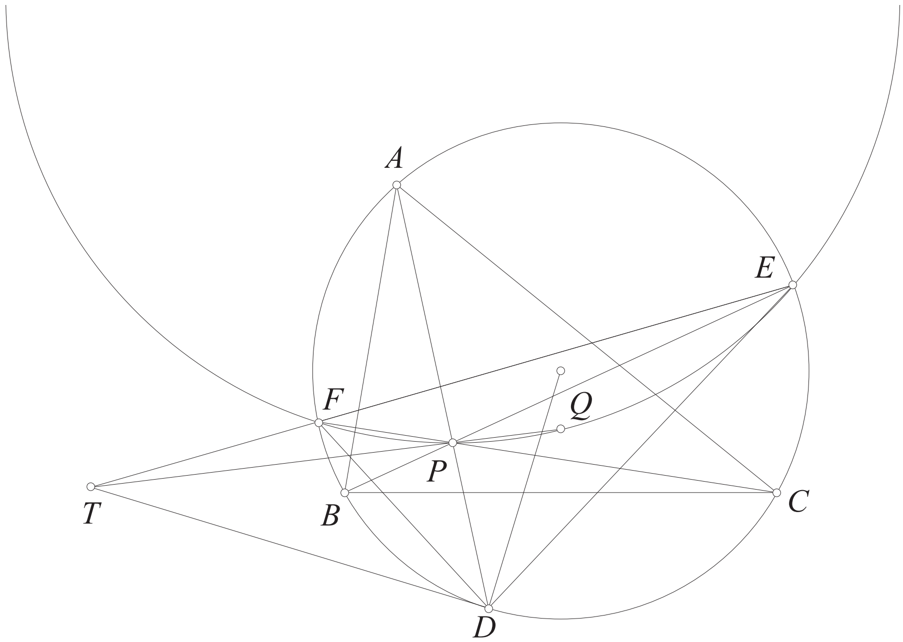
Lời giải. Theo cách chứng minh bài toán 6 thì qua nghịch đảo cực P phương tích $k = \overline{PA}.\overline{PD} = \overline{PB}.\overline{PE} = \overline{PC}.\overline{PF}$. thì U, V, W lần lượt biến thành giao điểm của PX, PY, PZ với EF, FD, DE. Theo bài toán 7 thì các giao điểm đó thẳng hàng nên bốn điểm P, U, V, W đồng viên. □

Ta hoàn toàn có thể mở rộng hơn như sau

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. X, Y, Z thẳng hàng và lần lượt thuộc BC, CA, AB. PX, PY, PZ lần lượt cắt đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ lần lượt tại U, V, W. Chứng minh rằng bốn điểm P, U, V, W cùng thuộc một đường tròn.

Chú ý rằng sử dụng bài toán 4 ta dễ dàng mở rộng các bài toán mới xây dựng trên cho các cát tuyến thay vì tiếp tuyến. Tiếp tục sử dụng bài toán 3, ta thu được bài toán sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. Chứng minh rằng tỷ số $\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF}$ luôn không đổi với mọi P.

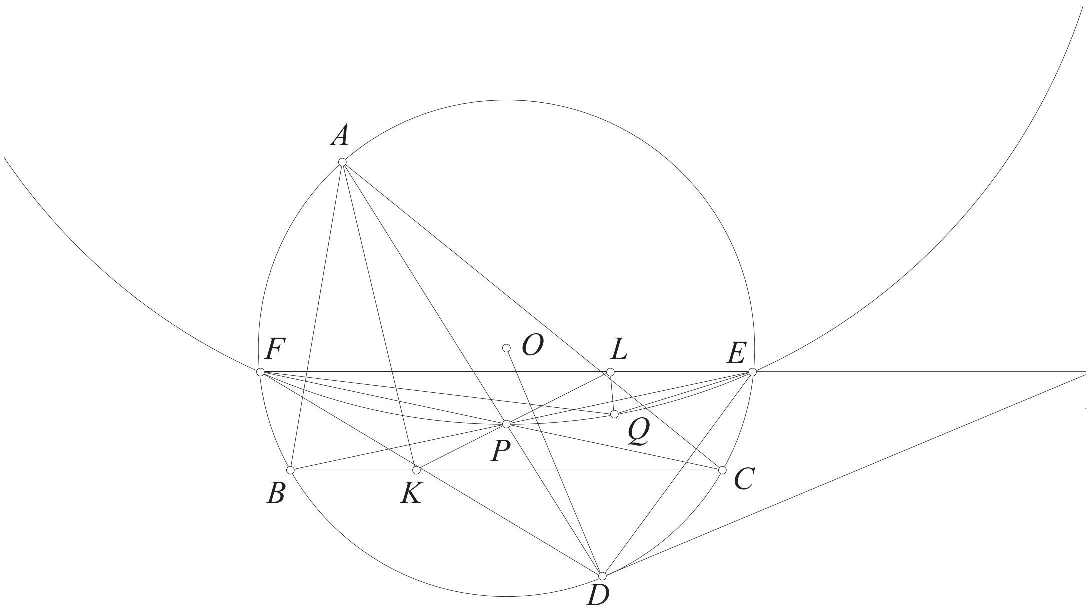


Lời giải. Áp dụng bài toán 3 vào tam giác DEF, ta thu được $\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF} = \frac{AC^2}{AB^2}$ không đổi. $\square$

Ta có hệ quả đơn giản là hai bài toán sau

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ di chuyển trên trung trực BC. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. Chứng minh rằng tỷ số $\frac{QE}{QF}$ luôn không đổi khi P thay đổi.

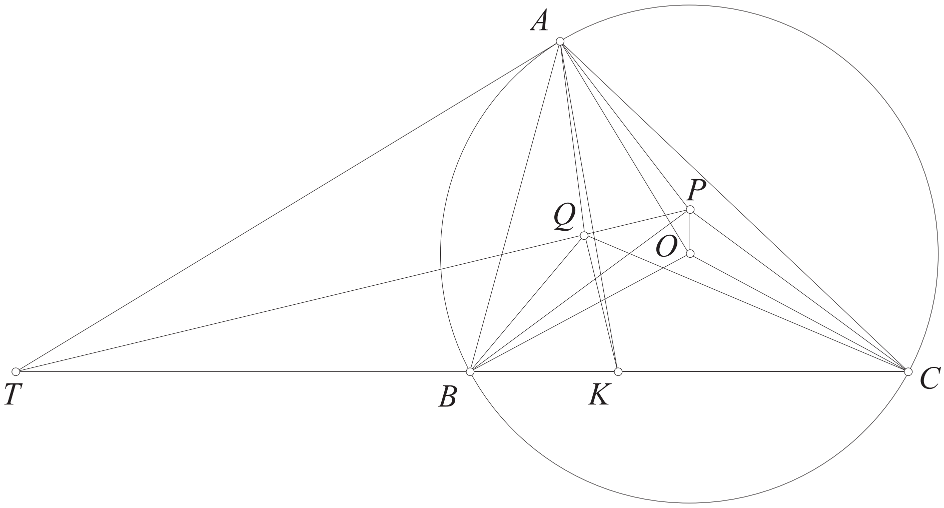
Bài toán 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ di chuyển trên trung trực BC. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. AK là đường đối trung của tam giác ABC. KP cắt EF tại L. Chứng minh rằng $QL \perp QP$.



Lời giải. Theo bài toán 9 $\frac{PE}{PF}:\frac{QE}{QF}=\frac{AC^2}{AB^2}$, ta lại dễ thấy $PE=PF$ và $EF\parallel BC$ nên ta thu được $\frac{QF}{QE}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{KB}{KC}=\frac{LF}{LE}$. Từ đó QL là phân giác $\angle EQF$, mặt khác QP là phân giác ngoài tam giác EQF nên $QL\perp QP$. $\square$

Bài toán sau có tính chất tương tự

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác nằm trên trung trực BC. Lấy điểm Q trên đường tròn (PBC) và nằm trong tam giác sao cho $\angle PQA+\angle OAP=90°$. Gọi AK là đường đối trung của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle AQK+\angle OAP=180°$.



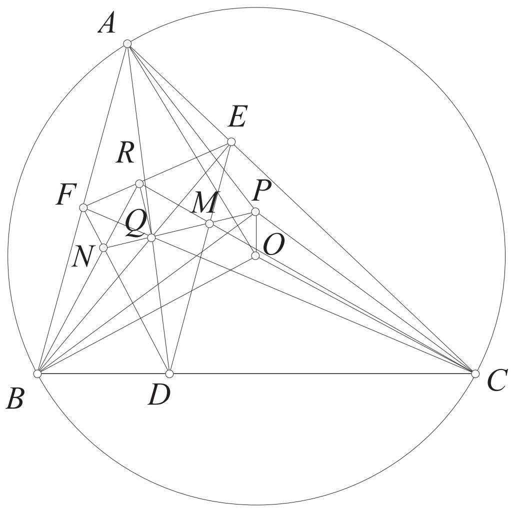
Lời giải. Gọi tiếp tuyến tại A của (O) cắt PQ tại T. Ta có $\angle TQA=180°-\angle AQP=180°-(90°-\angle PAO)=90°+\angle PAO=OAT+\angle PAO=\angle PAT$. Từ đó AT cũng là tiếp tuyến của đường tròn (APQ) nên là trục đẳng phương của (O) và (APQ). PQ là trục đẳng phương của (APQ) và (PBC) còn BC là trục đẳng phương của (PBC) và (O). Từ đó AT,PQ,BC đồng quy hay T thuộc BC. Từ đó $\frac{KB}{KC}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{TB}{TC}=\frac{QB}{QC}.\frac{PB}{PC}=\frac{QB}{QC}$. Vậy QK là phân giác

$\angle BQC$ hay $\angle PQK = 90°$. Vậy $\angle AQK + \angle OAP = 90° + \angle PQA + \angle OAP = 90° + 90° = 180°$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là mở rộng trực tiếp một bài toán quen thuộc về đường đối trung trong đó có sử dụng kỹ thuật tương tự trong cách chứng minh bài toán 3.

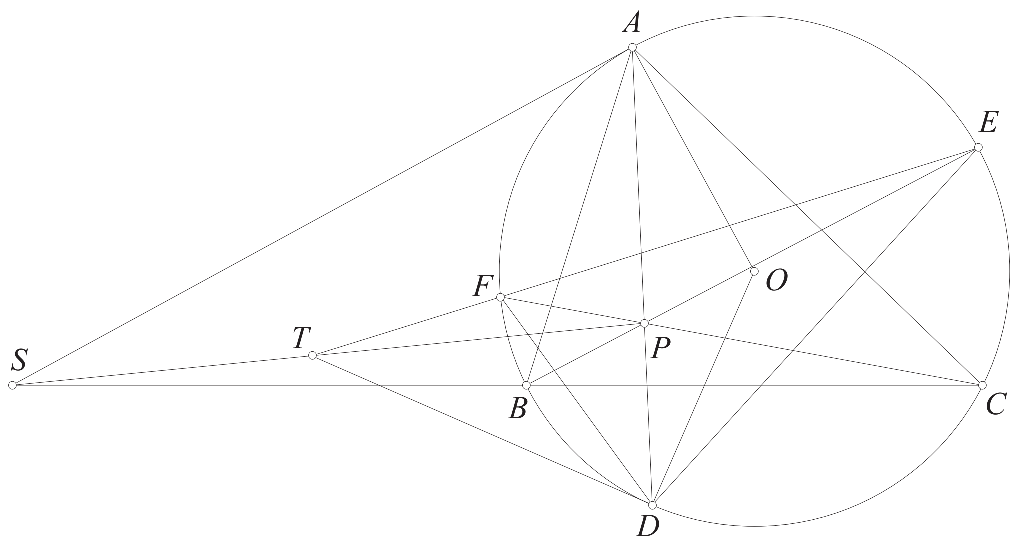
Bài toán 14. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác nằm trên trung trực BC. Lấy điểm Q trên đường tròn (PBC) và nằm trong tam giác sao cho $\angle PQA + \angle OAP = 90°$. QA, QB, QC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. DE, DF lần lượt cắt PQ tại M, N. Chứng minh rằng BN, CM, EF đồng quy tại R và $\angle RQA = \angle PAO$.

Lời giải sau được đề nghị bởi bạn **Huỳnh Bách Khoa** lớp 10 toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận.



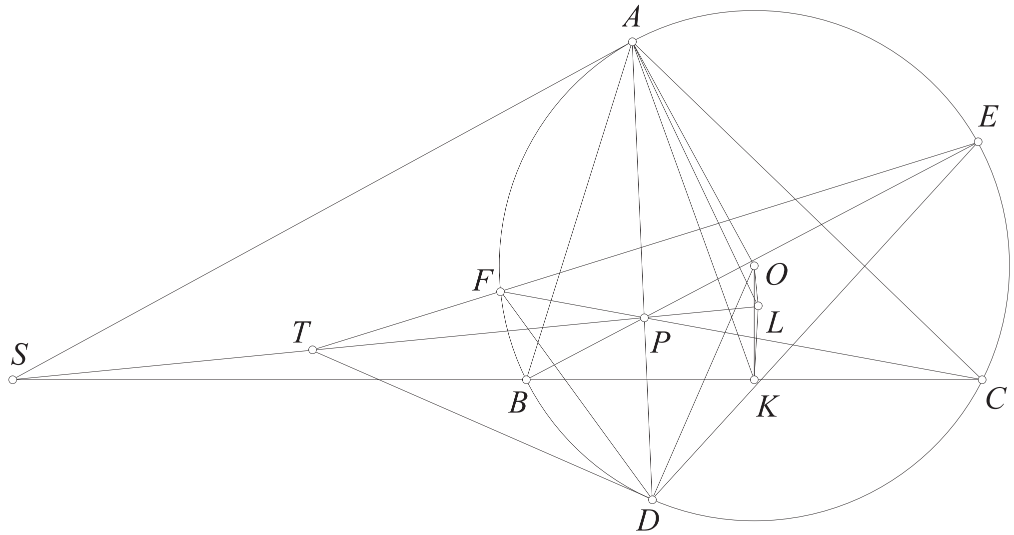
Lời giải. Dễ thấy BN, CM, EF đồng quy tại R theo định lý Pappus đảo. Ngoài ra ta có biến đổi tỷ số kép $Q(RP, BC) = N(RQ, EF) = N(BQ, EF) = -1$, mà QP là phân giác ngoài góc BQC nên $QR \perp PQ$. Do đó $\angle RQA = 90° - \angle AQP = \angle PAO$ □

Bài toán 15. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. Chứng minh rằng đường thẳng PT luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.



Lời giải. Áp dụng cách chứng minh bài toán 5 vào tam giác DEF thì PT luôn đi qua giao điểm S của tiếp tuyến qua A của (O) với BC, điểm đó hiển nhiên cố định. □

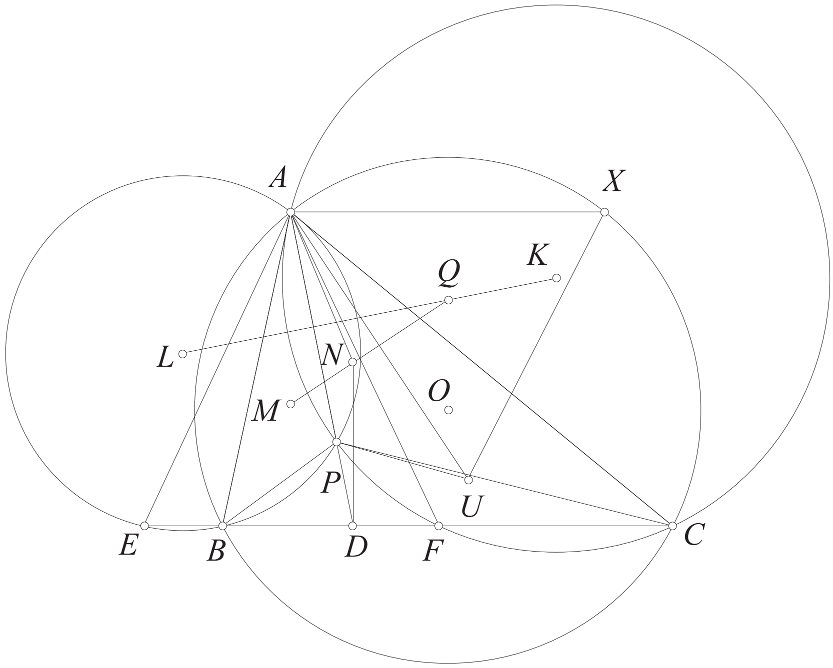
Bài toán 16. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. K, L là hình chiếu của O lên BC, PT. Chứng minh rằng bốn điểm A, O, K, L cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Áp dụng cách chứng minh bài toán 5 vào tam giác DEF thì PT luôn đi qua giao điểm S của tiếp tuyến qua A của (O) với BC. Dễ thấy các điểm A, O, L đều nhìn OS dưới góc vuông nên A, O, K, L cùng thuộc một đường tròn. □

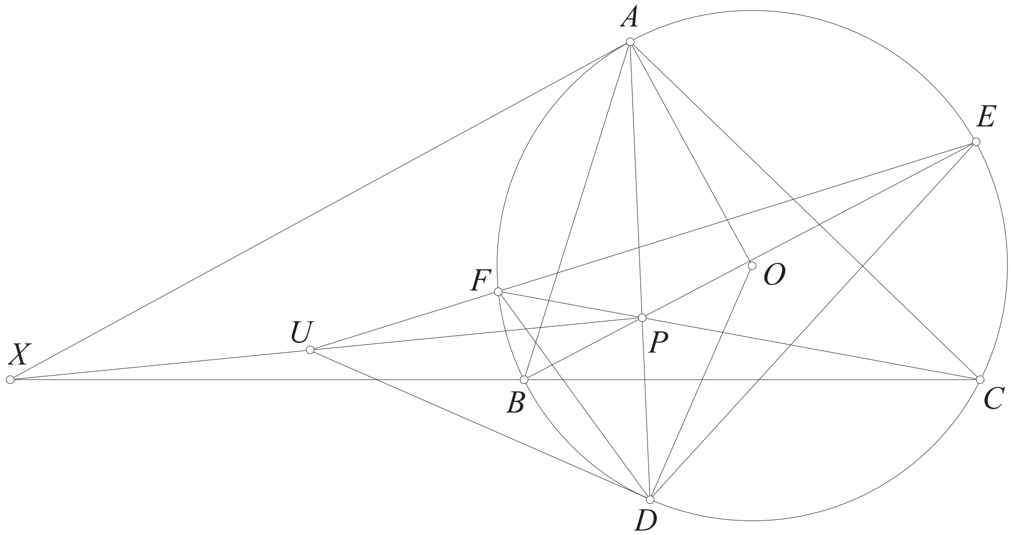
Nhận xét. Mặc dù hai bài toán trên khi để cạnh nhau làm ta thấy hiển hiên nhưng khi tách rời mỗi bài lại có một giá trị và ý nghĩa riêng.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong tam giác. Đường tròn $(K), (L)$ lần lượt ngoại tiếp các tam giác PAC, PAB lần lượt cắt BC tại F, E khác C, B. M là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. PA cắt BC tại D. Trung trực AD cắt đường thẳng qua D vuông góc BC tại N. MN cắt KL tại Q. Chứng minh rằng Q nằm trên trung trực BC.



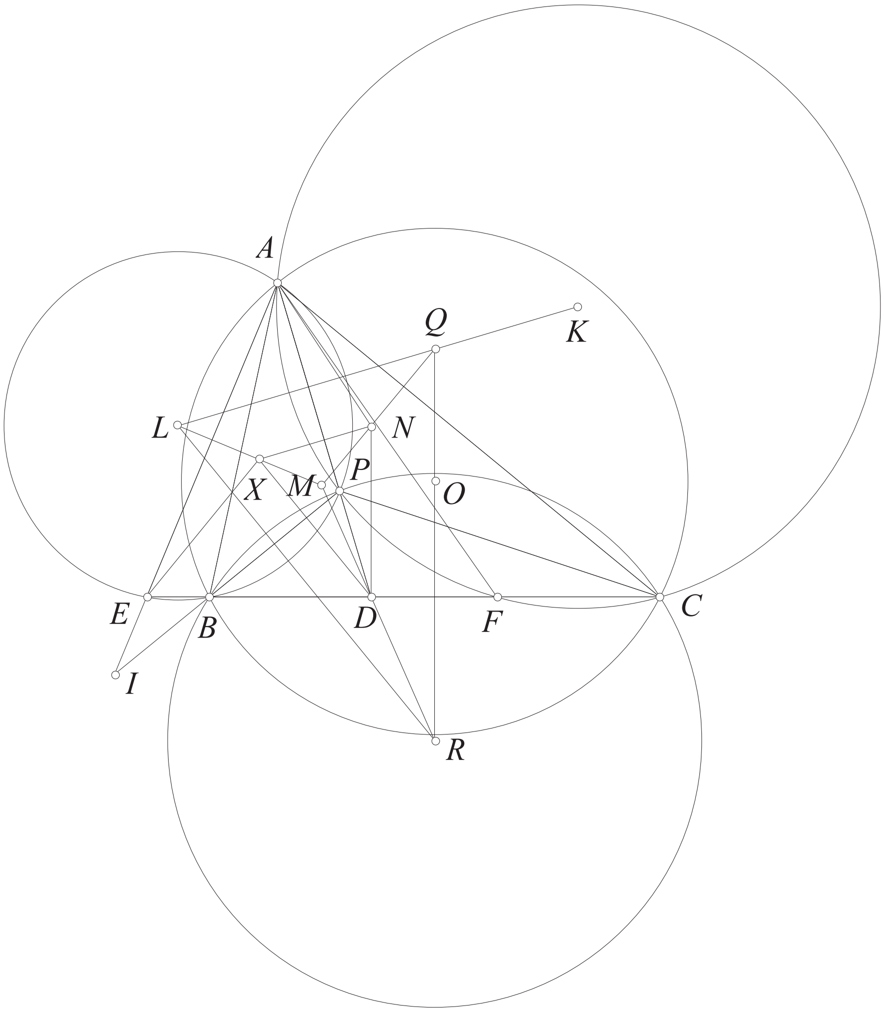
Lời giải. Gọi U đối xứng với A qua MN dễ thấy Q là tâm ngoại tiếp tam giác APU. Gọi X đối xứng A qua trung trực BC. Ta sẽ chứng minh bốn điểm A, P, U, X đồng viên khi đó hiển nhiên Q là tâm của đường tròn đi qua A, P, U, X nên Q nằm trên trung trực AX hay cũng là trung trực BC, thật vậy. Ta chú ý rằng U là giao điểm của đường tròn (M) ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn (N) qua A, D tiếp xúc với BC tại D. Từ đó sử dụng phép nghịch đảo cực A phương tích bất kỳ ta chuyển về bài toán sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại X. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại U. Chứng minh rằng P, U, X thẳng hàng.



Đây chính là nội dung bài toán 14. □

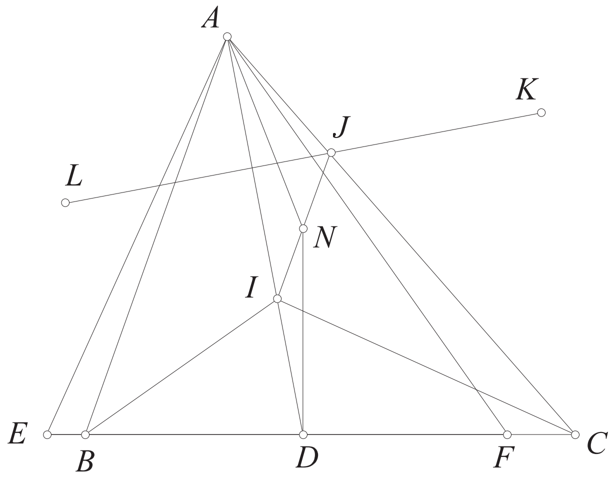
Lời giải sau không sử dụng nghịch đảo được đề nghị bởi **Huỳnh Bách Khoa** lớp 10 toán THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận [5].



Lời giải. Ta có $DE.DB = DF.DC = DA.DP$ nên D là tâm vị tự trong của (AEF) và (PBC). Gọi R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC thì M, D, R thẳng hàng. Gọi X là tâm của (AED) thì ta có $\angle MXD = 180° - \angle EXD - \angle LXE = \angle AED - \angle EAD = \angle AED - \angle PBD = \angle AIP = \angle MLR$ với I là giao điểm của AE và PB. Do đó $DX \parallel LR$, mà $XN \parallel LK$ nên $\frac{MN}{MQ} = \frac{MX}{ML} = \frac{MD}{MR}$, do đó $RQ \parallel ND \perp BC$ mà R thuộc trung trực BC nên Q thuộc trung trực BC. □

Nhận xét. Bài toán trên sẽ rất thú vị nếu xem nó như một bài toán tổng quát của những trường hợp P đặc biệt. Vậy ta xét bài toán sau

Bài toán 18. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. E, F lần lượt là đối xứng của A qua IC, IB. AI cắt BC tại D. Trung trực AD cắt đường thẳng qua D vuông góc BC tại N. Chứng minh rằng IN, trung trực AI và trung trực BC đồng quy.



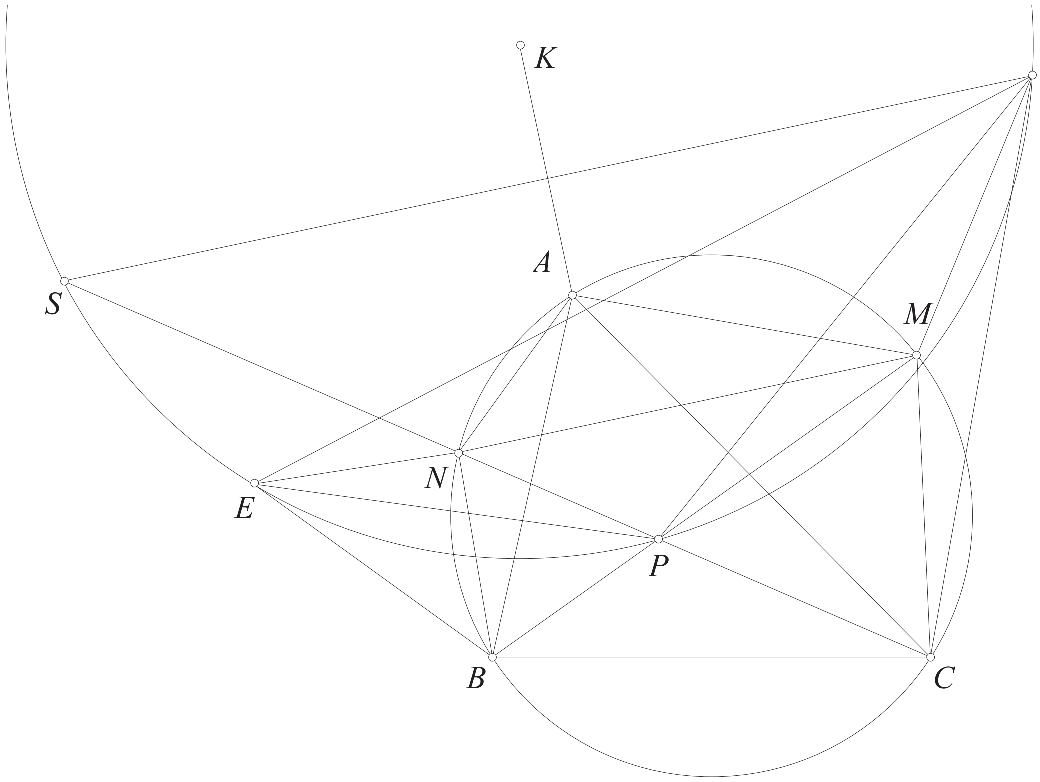
Lời giải. Ta dễ thấy I là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. Mặt khác ta biết một kết quả quen thuộc là các điểm A, I, C, F cùng thuộc một đường tròn (K) và các điểm A, I, B, E cũng thuộc một đường tròn (L) và hiển nhiên KL là trung trực AI. Từ đó nếu IN cắt KL tại J theo bài trước thì J nằm trên trung trực BC ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong riêng trường hợp với tâm nội tiếp trên bài toán cũng có rất nhiều phát triển khác nữa. Ta tiếp tục với một số ứng dụng tiếp theo

Bài toán 19. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. P nằm trong tam giác sao cho $TP = TA$. PB, PC lần lượt cắt (O) tại E, F khác B, C. Dựng tam giác cân BAQ đồng dạng cùng hướng với FOD và tam giác cân CAR đồng dạng cùng hướng với EOD. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PQR nằm trên AO.

Trước hết ta chứng minh một bài toán khác như sau [5] là mở rộng của bài toán 2 trong cuộc thi ELMO 2016 [6]

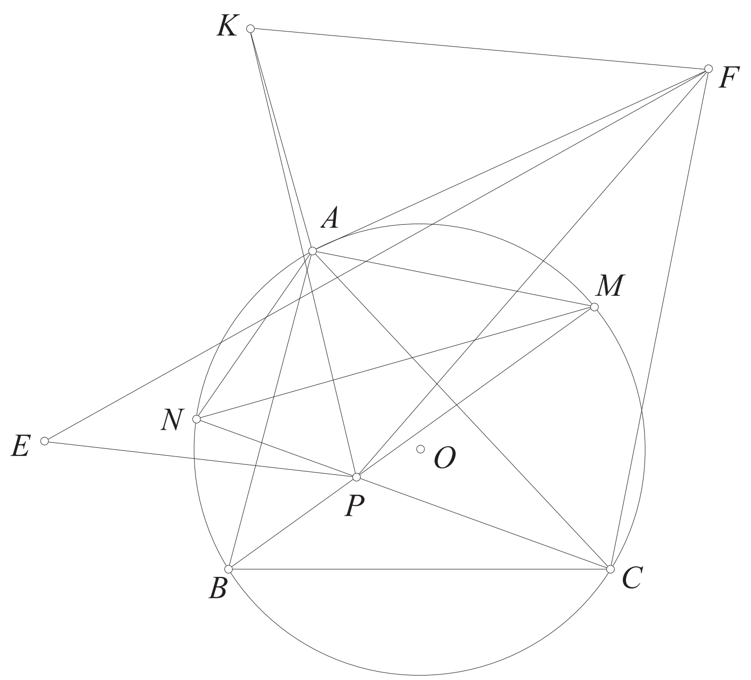
Bài toán 20. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là điểm bất kỳ trong tam giác. PB, PC lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua AN, AM. K là tâm ngoại tiếp tam giác PEF. Chứng minh rằng $AK \perp MN$.



Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An [5].

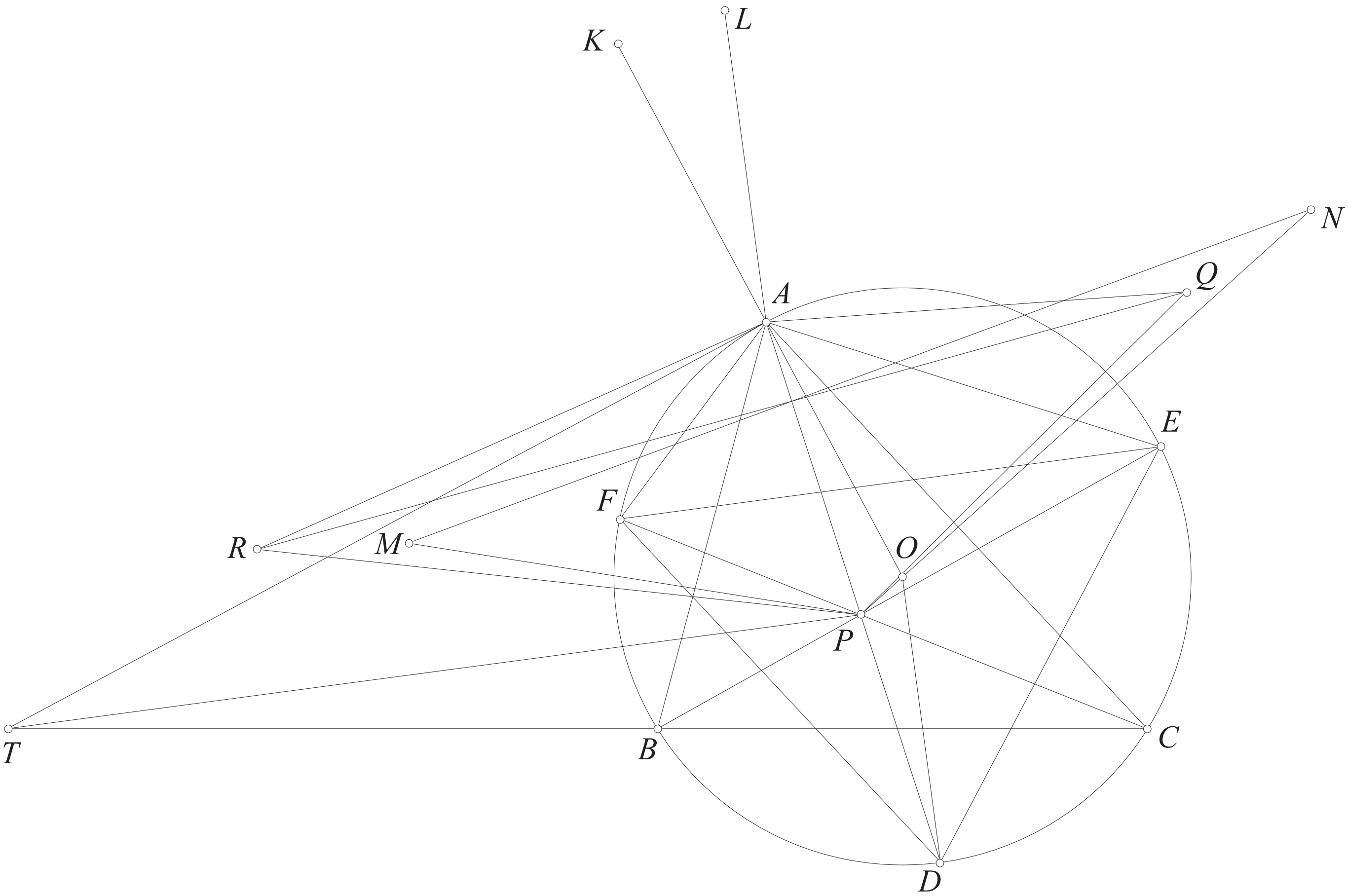
Lời giải. Chú ý rằng $\angle AMC = \angle AMF$ and $\angle ANE = \angle ANB$ nên $\angle PMF = \angle PMA + \angle AMF = \angle ACB + 180^\circ - \angle ABC$ và $\angle PNE = 360^\circ - \angle ANP - \angle ANP = 180^\circ + 180^\circ - \angle ABC - \angle ANB = 180^\circ - \angle ABC + \angle ACB$. Như vậy $\angle PMF = \angle PNE$. Ta lại có $\frac{NP}{NE} = \frac{NP}{NB} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MF}$, vì vậy hai tam giác PMF và PNE đồng dạng nên suy ra hai tam giác PMN và PFE đồng dạng. Gọi PN cắt (K) tại S khác P. Ta thấy $\angle PSF = \angle PEF = \angle PNM$, nên $FS \parallel MN$. Chú ý rằng $AC = AF$ và $\angle FAC = 2\angle MAC = 2\angle MNC = 2\angle FSC$. Từ đây A là tâm ngoại tiếp tam giác SFC. Dễ thấy $AK \perp SF \parallel MN$. □

Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Nga Nhi** lớp 9 toán THPT chuyên Hà Nội Amsterdam [7].



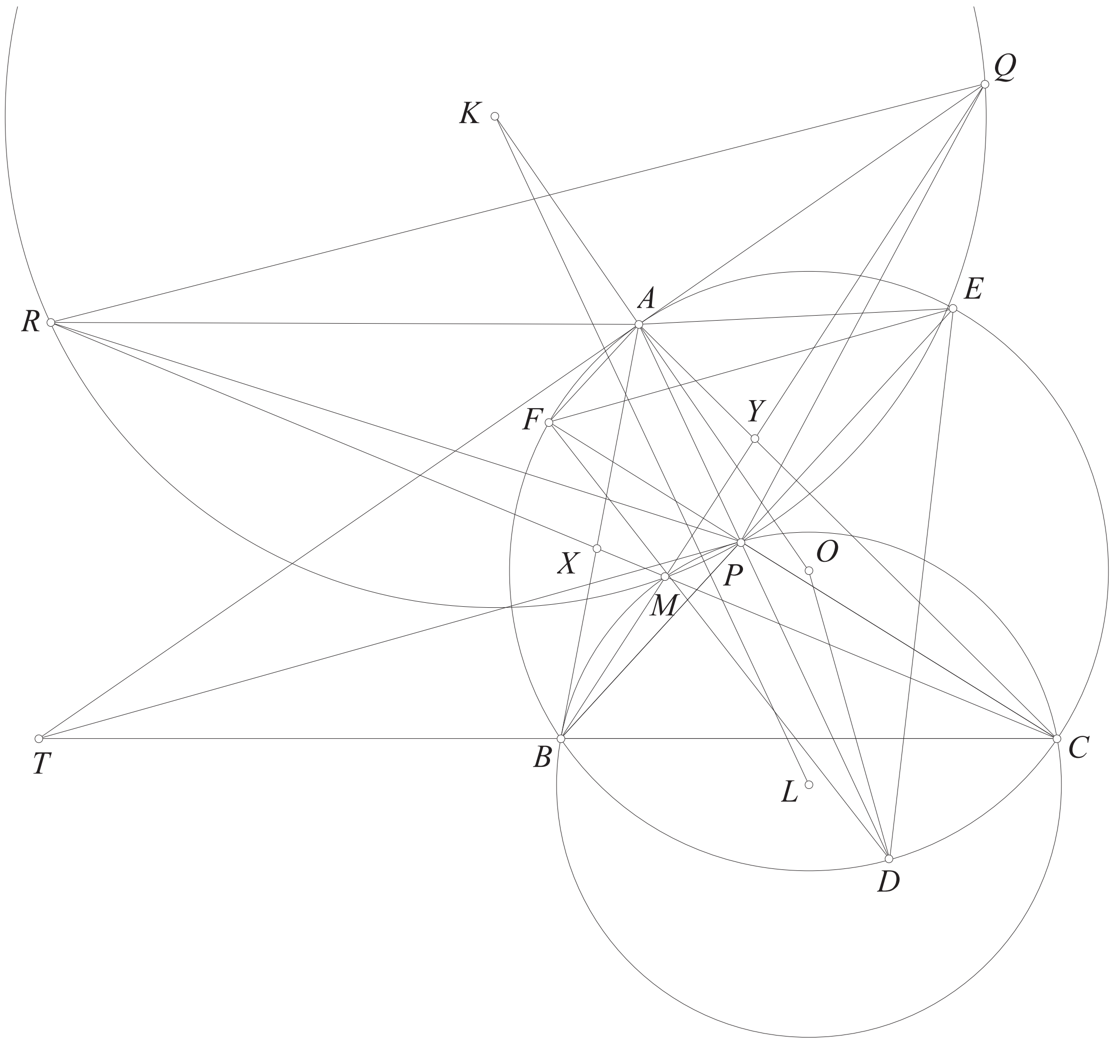
Lời giải. Chú ý rằng $\angle AMC = \angle AMF$ and $\angle ANE = \angle ANB$ nên $\angle PMF = \angle PMA + \angle AMF = \angle ACB + 180^\circ - \angle ABC$ và $\angle PNE = 360^\circ - \angle ANP - \angle ANP = 180^\circ + 180^\circ - \angle ABC - \angle ANB = 180^\circ - \angle ABC + \angle ACB$. Như vậy $\angle PMF = \angle PNE$. Ta lại có $\frac{NP}{NE} = \frac{NP}{NB} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MF}$, vì vậy hai tam giác PMF và PNE đồng dạng nên suy ra hai tam giác PMN và PFE đồng dạng. Từ đó $\angle PKF = 2\angle PEF = 2\angle PNM = 2\angle CAM = \angle CAF$. Vậy hai tam giác cân FAC và FKP đồng dạng. Ta suy ra hai tam giác FKA và FPC đồng dạng. Vậy $\angle KAM = \angle KAF + \angle FAM = \angle PCF + \angle CAM = \angle PCA + 90^\circ = \angle NMA + 90^\circ$. Từ đó $AK \perp MN$. □

Trở lại bài toán 19.



Lời giải. Gọi M, N lần lượt đối xứng với B, C qua AF, AE. Chú ý rằng, tích hai phép đối xứng trục không song song là một phép quay, ta dễ thấy phép quay tâm A với góc quay $\angle FOD = 2\angle FAP$ biến B thành Q. Mặt khác đối xứng trục AF biến B thành M. Từ đó đối xứng trục AP biến M thành Q. Tương tự đối xứng trục AP biến N thành R. Từ đó qua đối xứng trục AP thì tâm K ngoại tiếp tam giác PQR biến thành tâm L ngoại tiếp tam giác PMN. Chú ý rằng theo bài toán trên và bài toán 1 thì $AL \perp EF \perp OD$. Từ đó $AL \parallel OD$. Kết hợp tính đối xứng thì $\angle KAP + \angle PAO = \angle LAP + \angle ODA = 180°$, suy ra K, A, O thẳng hàng. □

Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An [5].



Lời giải. Gọi BQ cắt CR tại M. Để ý $\triangle CAR \sim \triangle EOD$ và $\triangle BAQ \sim \triangle FOD$ dễ suy ra $\angle BMC = \angle BPC$ hay B, M, P, C đồng viên. Theo bài toán 1 thì $DE = DF$ từ đó $\triangle CAR \sim \triangle BAQ$. Để ý $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$ suy ra $\frac{PB}{BQ} = \frac{PC}{CR}$, từ đây $\triangle RPC \sim \triangle QPB$ nên R, Q, P, M đồng viên. Gọi AB, AC lần lượt cắt MC, MB tại X, Y. Để ý $\angle ACR = \angle ABQ$ nên B, X, Y, C đồng viên, ta suy ra $XY \perp AO$. Lại có $\angle ABM = \angle ACR = \angle ARC$ nên A, R, B, M đồng viên suy ra $XR.XM = XB.XA$ hay X thuộc trục đẳng phương của (O) và (PQR). Tương tự thì XY là trục đẳng phương của (O) và (PQR) vậy $XY \perp OK$ hay A, O, K thẳng hàng. □

3 Một số bài toán áp dụng

Phần này các bạn hãy làm một số bài toán sau để thực hành các bài toán có trong phần trước

Bài toán 21. Cho tam giác ABC với phân giác AD. Trung trực AD cắt BC tại T. P là một điểm nằm trong tam giác. G, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng $GE = GF$ khi và chỉ khi $TP = TD$.

Bài toán 22. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng có duy nhất hai vị trí của điểm P trong mặt phẳng sao cho tam giác Pedal của P ứng với tam giác ABC là tam giác đều.

Bài toán 23. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt (O) tại M, N. Gọi R, Q là trung điểm của MN, BC. Chứng minh rằng $\angle RAQ = |\angle MAB - \angle NAC|$.

Bài toán 24 (IMO Shorlist 2013 G4)**.** Cho tam giác ABC với đường phân giác AD. (K) là đường tròn qua A, D và tiếp xúc với AB. E là điểm đối xứng của A qua CK. DE cắt AC tại F. Chứng minh rằng $BA = BF$.

Bài toán 25. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P bất kỳ nằm trong tam giác. PA, PB, PC lần lượt cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Dựng tam giác cân BAQ đồng dạng cùng hướng với FOD và tam giác cân CAR đồng dạng cùng hướng với EOD. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PQR nằm trên AO khi và chỉ khi $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

Bài toán 26. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P bất kỳ nằm trong tam giác. PB, PC lần lượt cắt (O) tại E, F khác B, C. M, N lần lượt là đối xứng của B, C qua AF, AE. K là tâm ngoại tiếp tam giác PMN. Gọi L đối xứng K qua trung trực AP. Chứng minh rằng $PL \parallel AO$ khi và chỉ khi $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

Lời cảm ơn

Tác giả xin được nói lời cảm ơn chân thành tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương và bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã giúp tác giả đọc cẩn thận bài viết này.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h356195

[2] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h460401

[3] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

[4] http://analgeomatica.blogspot.com/2014/02/xung-quanh-bai-hinh-hoc-thi-imo-nam-2010.html

[5] VMF's Marathon Hình học http://diendantoanhoc.net/

[6] ELMO 2016 P2 http://artofproblemsolving.com/community/q1h1262190

[7] Trần Quang Hùng, Bài giảng tập huấn đội tuyển Arab Saudi năm 2016.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về một bài toán trên tam giác vuông

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

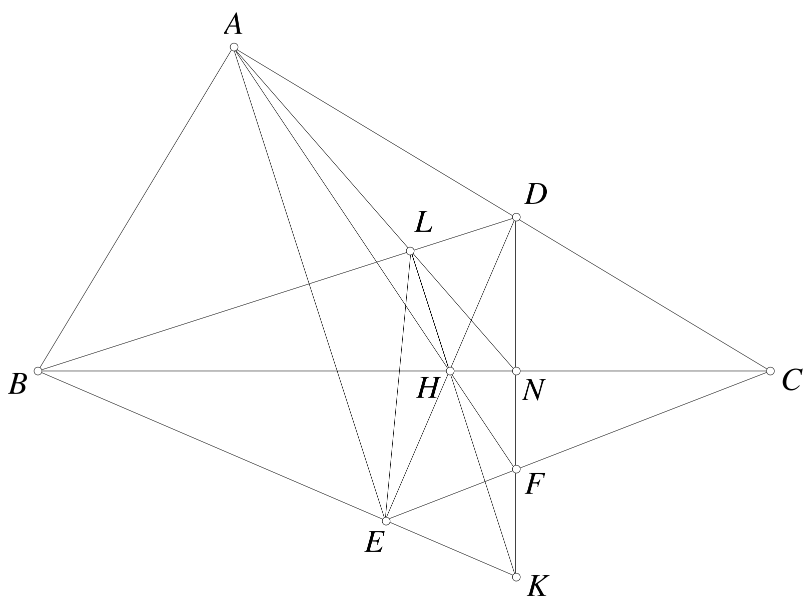
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán thú vị trên tam giác vuông xuất hiện trong kỳ thi chọn đội tuyển Romani đi thi olympic Balkan năm 2007 cùng với các mở rộng khai thác cho bài toán đó với công cụ tỷ số kép.

Trong [1] có bài toán thú vị sau cho tam giác vuông.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. D là một điểm trên cạnh AC. E đối xứng A qua BD và F là giao điểm của CE và đường thẳng qua D vuông góc BC. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy.

Trong [1] xuất hiện rất nhiều lời giải tuy nhiên lời giải sau theo tôi là thú vị nhất, không dùng các khái niệm quá cao, lời giải được đề nghị bởi Petrisor Neagoe trong [1] được tác giả làm gọn.



Hình 1.

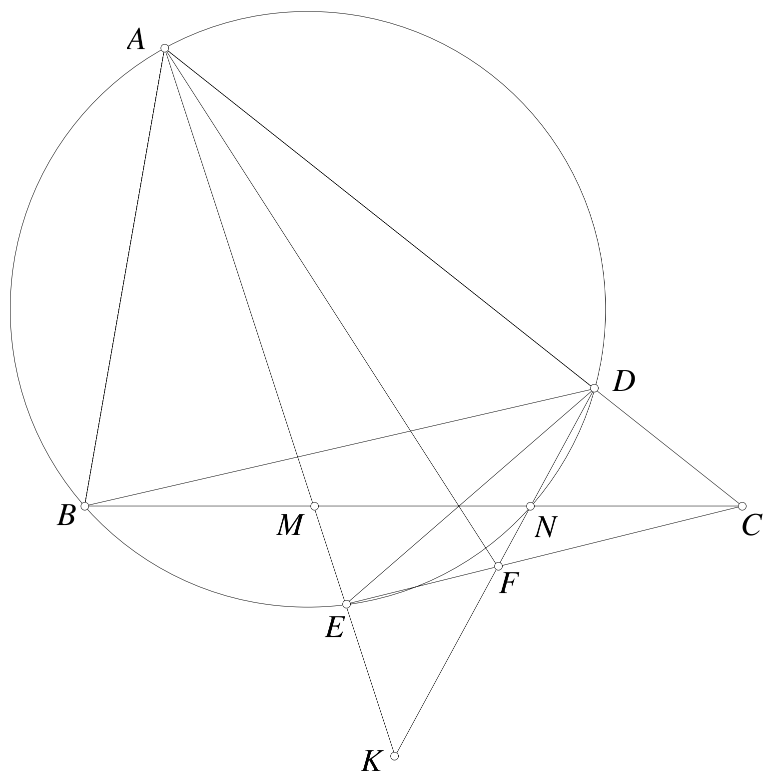
Lời giải. Gọi BE giao DF tại K, DF giao BC tại N, DE giao BN tại H, KH giao BD tại L. Ta dễ thấy H là trực tâm tam giác KBD. Theo tính chất trực tâm thì LB là phân giác ngoài $\angle ELN$ hay các đường thẳng LE, LN đối xứng nhau qua BD. Mặt khác theo giả thiết A, E đối xứng nhau qua BD nên LE, LA đối xứng nhau qua BD suy ra LA, LN trùng nhau. Đến đây áp dụng định lý Desargue cho các tam giác FEK và ADL chú ý giao điểm của các cặp đường thẳng FE giao AD, EK giao DL, KF giao LA theo thứ tự là C, B, N thẳng hàng. Vậy AF, DE, LK đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán có nhiều cách giải bằng hàng điều hòa nhưng cách giải bằng định lý Desargue được xem là đẹp và nhẹ nhàng mang nhiều tính hình học.

Ta có thể hình dung trong tam giác vuông thì đường cao cũng là đương đối trung, mặt khác đối xứng của đỉnh góc vuông qua cạnh huyền thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông góc có thể coi là giao của đường đối trung và đường tròn ngoại tiếp. Ý tưởng này giúp ta mở rộng bài toán trên thành một bài toán cho tam giác bất kỳ như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với D là một điểm bất kỳ trên AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt BC tại N khác B. Đường đối trung qua A của tam giác ABD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại E khác A. BE cắt DN tại F. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy.

Bài toán này có một lời giải khá đơn giản bằng hàng điểm điều hòa và tứ giác điều hòa. Lời giải sau do tác giả đề xuất

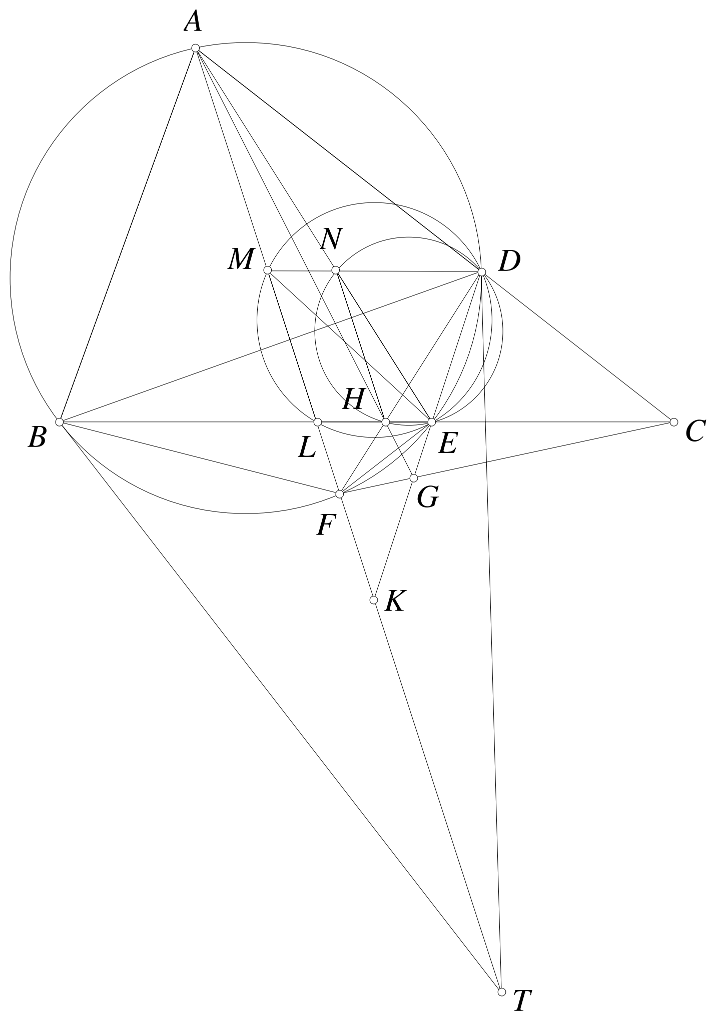


Hình 2.

Lời giải. Gọi DF giao AE tại K. AE giao BC tại M. Do đường đối trung qua A của tam giác ABD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại E khác A nên tứ giác $ADEB$ điều hòa do đó có hàng (AE, BD) điều hòa trên đường tròn. Chiếu bằng tâm N lên đường AE ta được $(AE, MK) = N(AE, BD) = (AE, BD) = -1$. Chiếu hàng điều hòa (AE, MK) bằng tâm C lên đường thẳng DF ta được $(DF, NK) = C(AE, MK) = -1$. Từ đó ta có hai hàng điều hòa $(KN, FD) = (KM, AE)$ suy ra MN, AF, DE đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Khi tam giác ABC vuông tại A. E chính là đối xứng của A qua BD. Ta thu lại được bài toán ban đầu. Bài toán này có một số khai thác đẹp, tiêu biểu là bài chọn đội tuyển KHTN năm 2012-2013 trong [2] như sau

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC. D là một điểm thuộc đoạn AC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E khác B. Tiếp tuyến tại B, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại T. AT cắt đường tròn ngoại tiếp tại tam giác ABD tại F khác A. CF giao DE tại G. AG giao BC tại H. M là trung điểm của AF. AE giao MD tại N. Chứng minh rằng $HN \parallel AT$.



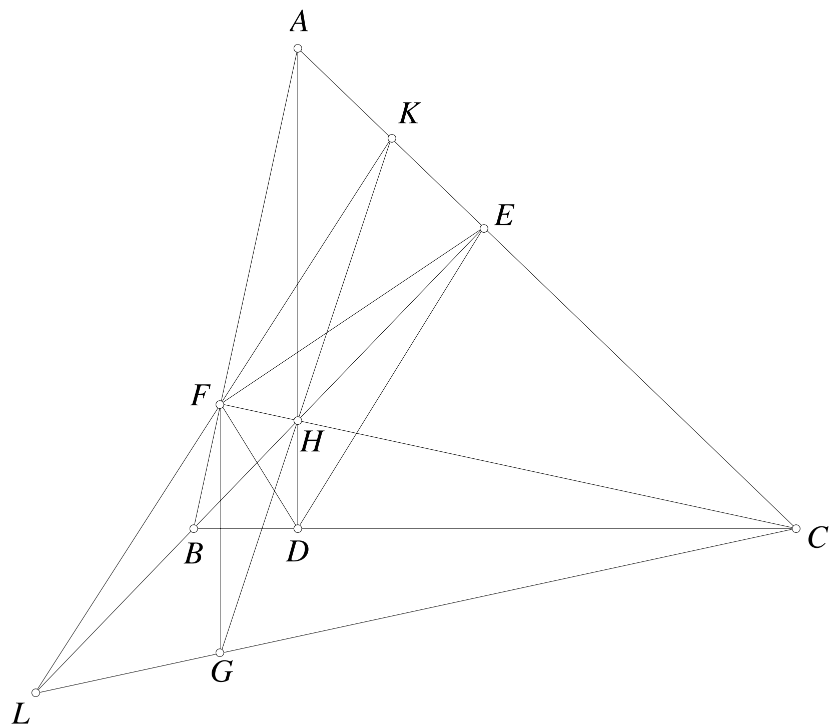
Hình 3.

Lời giải. Gọi DE giao AT tại K. Ta dễ thấy tứ giác $ABFD$ điều hòa nên $(AF, LK) = E(AF, BD) = -1$. Từ đó $(DG, EK) = C(DG, EK) = (AF, LK) = -1$ hay $(GD, EK) = -1 = (AF, LK)$ suy ra AG, DF, EL đồng quy tại H.

Từ $(AF, LK) = -1$, theo hệ thức Maclaurin, chú ý tứ giác $ABED$ nội tiếp ta suy ra $\overline{KM}.\overline{KL} = \overline{KF}.\overline{KA} = \overline{KE}.\overline{KD}$. Do đó tứ giác $MDEL$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle NDH = \angle MDH = \angle MDE - \angle HDE = \angle MLB - \angle FDE = \angle MLB - \angle FBE = \angle LFB = \angle AEB = \angle NEH$. Suy ra tứ giác $NDEH$ nội tiếp suy ra $\angle DNH = \angle DEC = \angle DML$ vậy $HN \parallel ML \equiv AT$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nếu áp dụng mô hình trong cách giải bài toán 1 ta có thể đề xuất bài toán thú vị sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. G đối xứng F qua BC. CG cắt BE tại L. LF cắt AC tại K. Chứng minh rằng KG đi qua trực tâm H.



Hình 4.

Nếu để ý kỹ các bạn thấy thực ra bài toán này là bài toán 1 "xoay ngược" áp dụng vào tam giác KBD trực tâm H. Tuy vậy dựa vào bài toán mới này ta dễ dàng đề xuất bài toán tổng quát như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua F song song AD cắt BC tại M. G đối xứng F qua M. CG cắt BE tại L. LF cắt AC tại K. Chứng minh rằng KG đi qua P.

Các bạn hãy làm bài toán đơn giản này như một bài luyện tập và chú ý rằng tuy đơn giản nhưng nó có những khai thác và ứng dụng khá bất ngờ. Các bạn hãy khám phá.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=860114

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Mở rộng bài toán hình thi IMO năm 2012

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

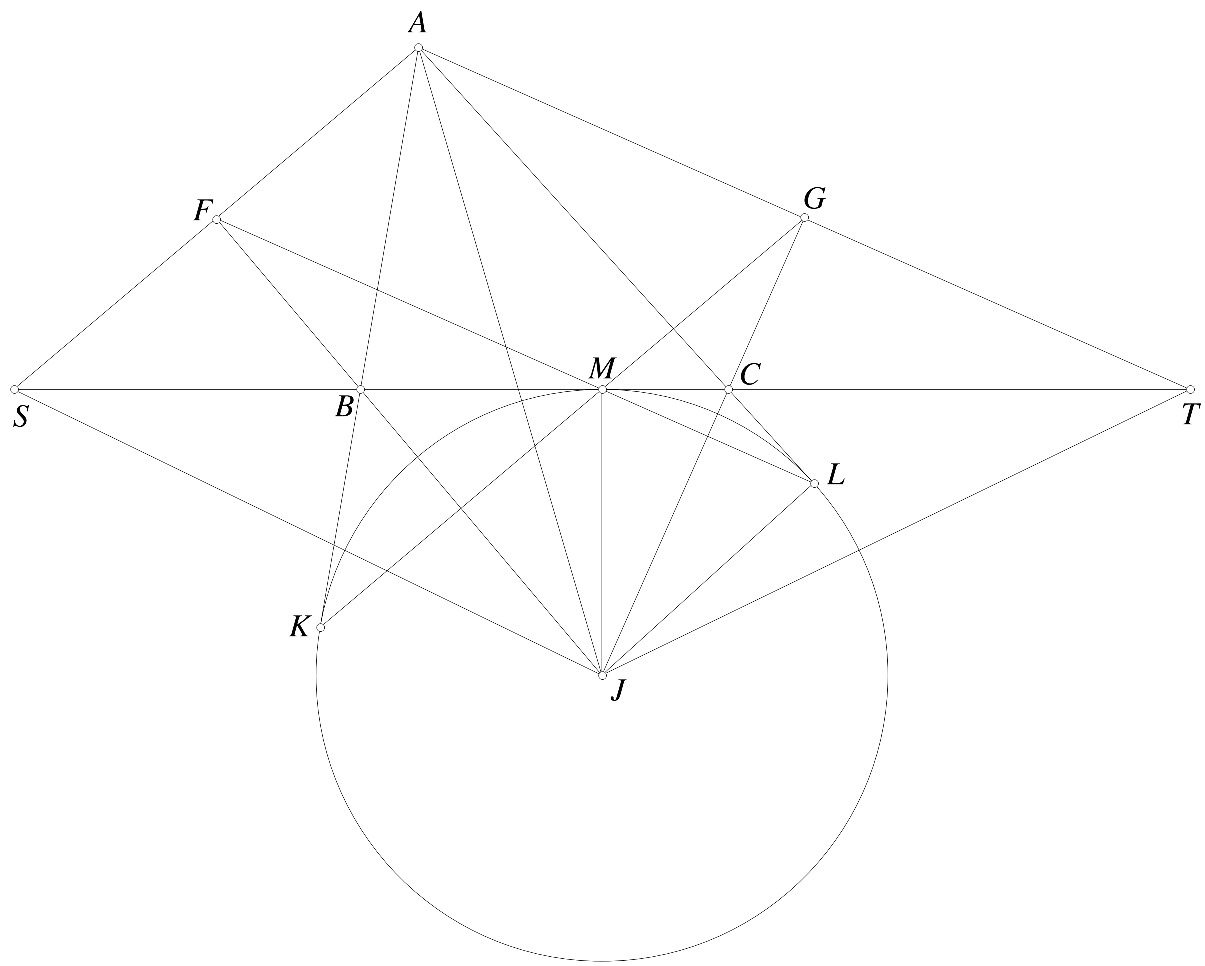
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra nhiều hướng mở rộng khác nhau cho bài toán hình thi IMO năm 2012 ngày thứ nhất với các công cụ hình học thuần túy và hàng điểm điều hòa.

Trong kỳ thi IMO năm 2012 ngày thi thứ nhất có một bài toán hình học hay. Bài toán ở vị trí số 1 là bài thi dễ nhất ngày hôm đó. Bài toán như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và J là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A. Đường tròn bàng tiếp này tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc với các đường thẳng AB, AC tại K, L. Đường thẳng LM và BJ cắt nhau tại F. Đường thẳng KM và CJ cắt nhau tại G. AF, AG lần lượt cắt BC tại S, T. Chứng minh rằng M là trung điểm của ST.

Bài toán trên là một bài toán không khó nhưng rất thú vị và đặc biệt có rất nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Tôi xin dẫn ra một lời giải gần như đơn giản nhất cho bài toán này

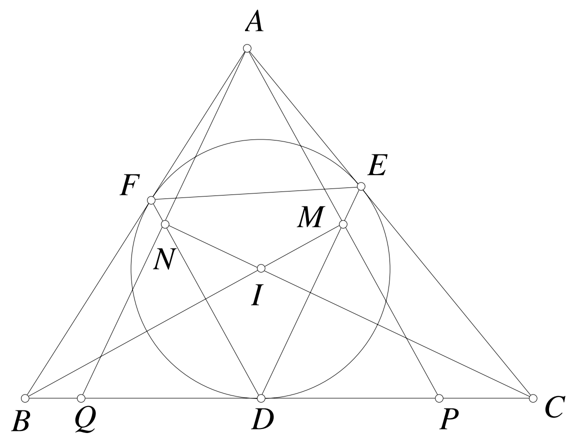


Hình 1.

Lời giải. Theo tính chất góc ngoài $\angle BJA = \angle KBJ - \angle BAJ = \dfrac{1}{2}\angle KBC - \dfrac{1}{2}\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle ACB = \angle ALF$. (Chú ý đẳng thức cuối do tam giác CML cân tại C). Từ đó tứ giác $AFJL$ nội tiếp suy ra $\angle AFJ = \angle ALJ = 90°$. Mặt khác BF là phân giác $\angle ABS$ suy ra FB là trung trực SA suy ra $JA = JS$. Tương tự $JA = JT$ suy ra $JS = JT$ mà $JM \perp ST$ vậy M là trung điểm ST. $\square$

Nhận xét. Bài toán trên là một bài toán đẹp, tuy đặt ở vị trí số 1 là bài dễ của ngày 1 nhưng vẫn không hề quá đơn giản so với một bài IMO. Bài toán trên phát biểu trên đường tròn bàng tiếp. Hẳn nhiên nó cũng có một cách nhìn qua tâm nội tiếp như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. IB, IC lần lượt cắt DE, DF tại M, N. AM, AN lần lượt cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng D là trung điểm của PQ.



Hình 2.

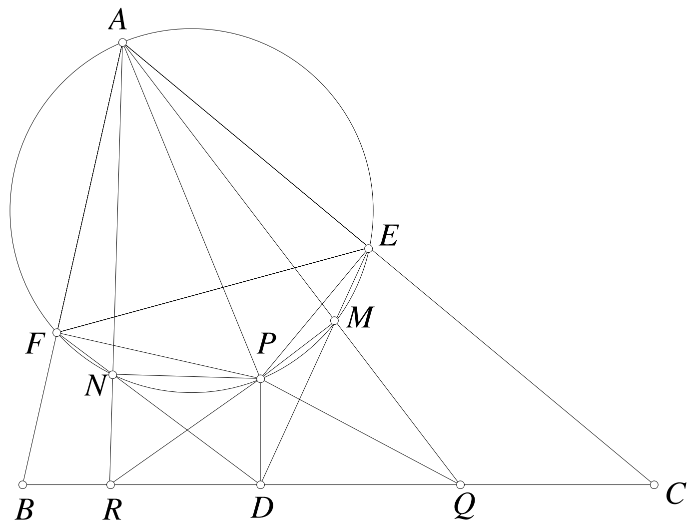
Tương tự như cách làm trong bài toán 1 ta có nhận xét M, N đều thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Ta đi đến bài toán tổng quát như sau

Bài toán 3. Cho P là một điểm nằm trên phân giác trong góc A của tam giác ABC. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt DE, DF lần lượt tại M, N khác E, F. AM, AN cắt BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng D là trung điểm PQ.

Bài toán trên lại tiếp tục lại được mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt DE, DF tại M, N khác E, F. AM, AN cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{PE}{PF}$.

Sau đây là lời giải khá đơn giản cho bài toán mở rộng này



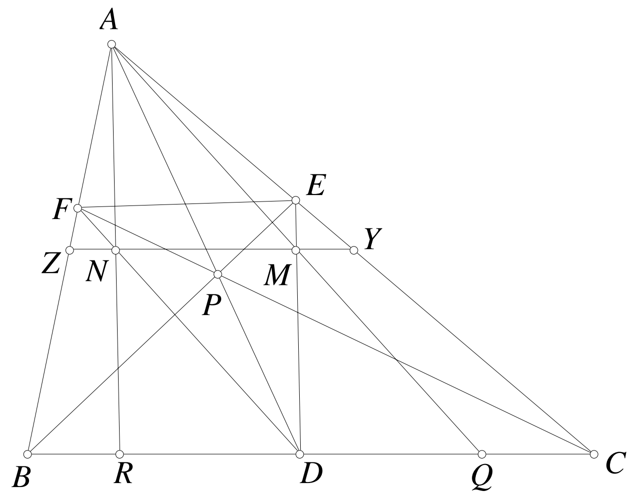
Hình 3.

Lời giải. Do M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cũng là đường tròn đường kính AP nên $\angle AMP = 90^\circ$ suy ra tứ giác $PMQD$ nội tiếp suy ra $\angle PQD = \angle PMD = \angle PAE$. Vậy các tam giác vuông $\triangle PAE \sim \triangle PQD$ suy ra $\dfrac{PQ}{PD} = \dfrac{PA}{PE}$. Tương tự có $\dfrac{PR}{PD} = \dfrac{PA}{PF}$. Chia hai tỷ số cho nhau ta có $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{PE}{PF}$ đó là điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Chứng minh bài toán mở rộng khá đơn giản so với suy nghĩ là bài toán mở rộng thường cầu kỳ hơn. Khi P nằm trên đường phân giác góc A ta thu được bài toán 3. Việc cho P trùng với một số điểm đặc biệt cũng sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Sau đây là một hướng mở rộng khác cho bài toán. Ta chú ý rằng trong bài toán 2 với D, E, F là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp thì AD, BE, CF đồng quy hơn nữa dễ chứng minh M, N thuộc đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ABC. Đến đây dùng phép chiếu song song ta dễ dàng đề xuất bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Y, Z lần lượt là trung điểm CA, AB. YZ cắt DE, DF lần lượt tại M, N. AM, AN cắt BC lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng D là trung điểm của QR.



Hình 4.

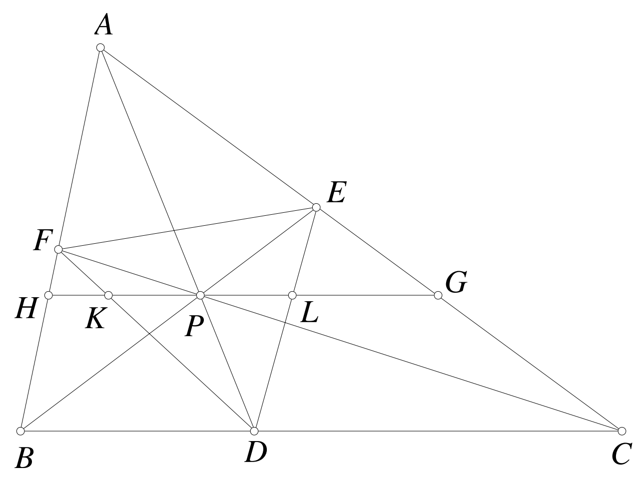
Ta có thể mở rộng bài toán thêm chút nữa nếu thay đường trung bình bằng đường song song bất kỳ như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Y, Z lần lượt thuộc CA, AB sao cho $YZ \parallel BC$. YZ cắt DE, DF lần lượt tại M, N. AM, AN cắt BC lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng D là trung điểm của QR.

Bài toán được giải dựa trên một bổ đề khá cơ bản như sau

Bổ đề 6.1. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng qua P song song BC cắt DE, DF tại L, K thì P là trung điểm KL.

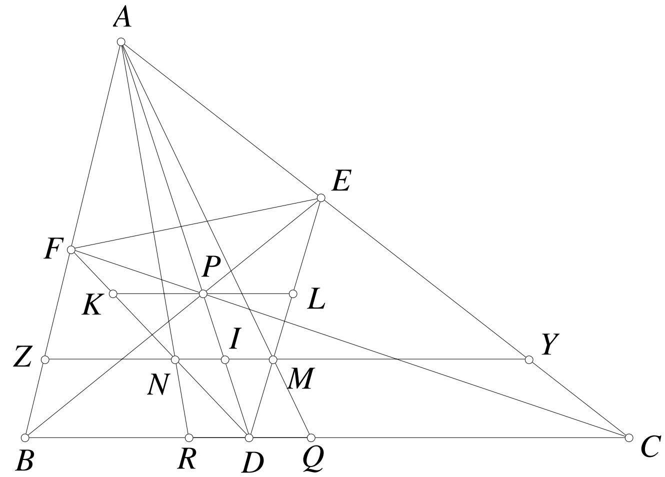
Bổ đề có lời giải rất đơn giản chỉ nhờ định lý Thales



Hình 5.

Chứng minh. Gọi KL cắt CA, AB lần lượt tại G, H. Dựa vào định lý Thales ta có biến đổi tỷ số $\dfrac{PK}{PL} = \dfrac{PK}{PH}.\dfrac{PH}{PG}.\dfrac{PG}{PL} = \dfrac{CD}{CB}.\dfrac{BD}{CD}.\dfrac{BC}{BD} = 1$. Vậy P là trung điểm KL. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Quay lại bài toán



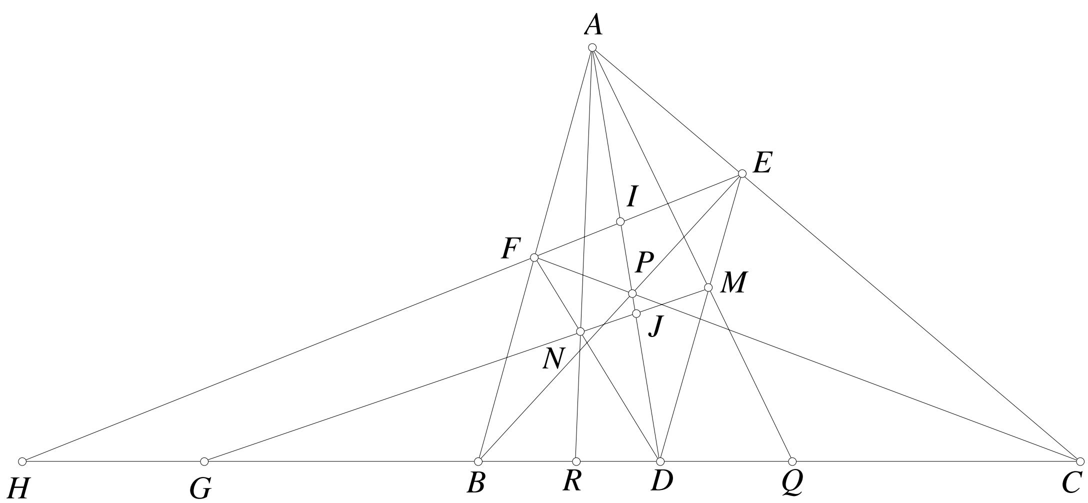
Hình 6.

Lời giải. Qua P kẻ đường thẳng song song BC cắt DE, DF lần lượt tại L, K. Theo bổ đề P là trung điểm KL. Gọi PD giao MN tại I vì $MN \parallel KL$ nên dễ suy ra I là trung điểm MN. Lại có $MN \parallel RQ$ nên D là trung điểm RQ. Ta hoàn tất chứng minh. □

Nếu dùng phép chiếu xuyên tâm, ta dễ dàng đề xuất bài toán mở rộng hơn như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Một đường thẳng bất kỳ cắt DE, DF, BC lần lượt tại M, N, G. AM, AN lần lượt cắt BC tại Q, R. Chứng minh rằng $(QR, DG) = -1$.

Bài toán trên thực sự là mở rộng của bài toán 6 nếu các bạn để ý kỹ khi $MN \parallel BC$ thì điểm G ở vô cực $(QR, DG) = -1$ suy ra D là trung điểm QR. Bài toán có lời giải cũng rất đơn giản

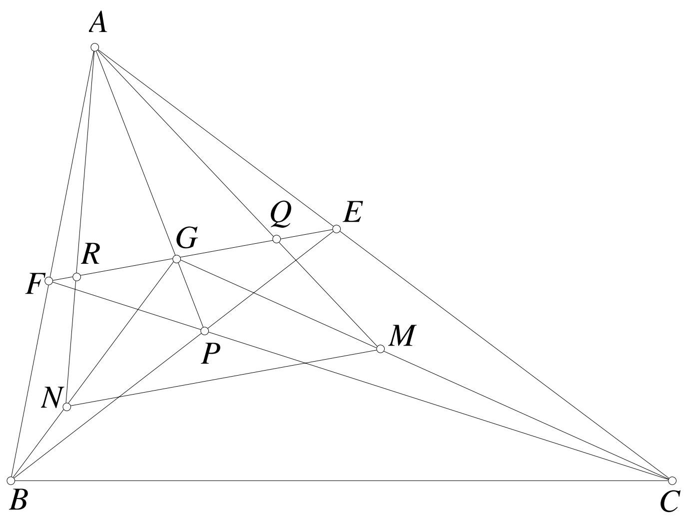


Hình 7.

Lời giải. Gọi EF giao BC tại H, EF giao AD tại I, MN giao AP tại J. Ta có hàng điều hòa cơ bản $(EF, IH) = -1$. Chiếu xuyên tâm D hàng điều hòa (EF, IH) lên đường thẳng MN ta có $(MN, JG) = D(MN, JG) = (EF, IH) = -1$. Chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng BC ta có $(QR, DG) = A(QR, DG) = (MN, JG) = -1$. □

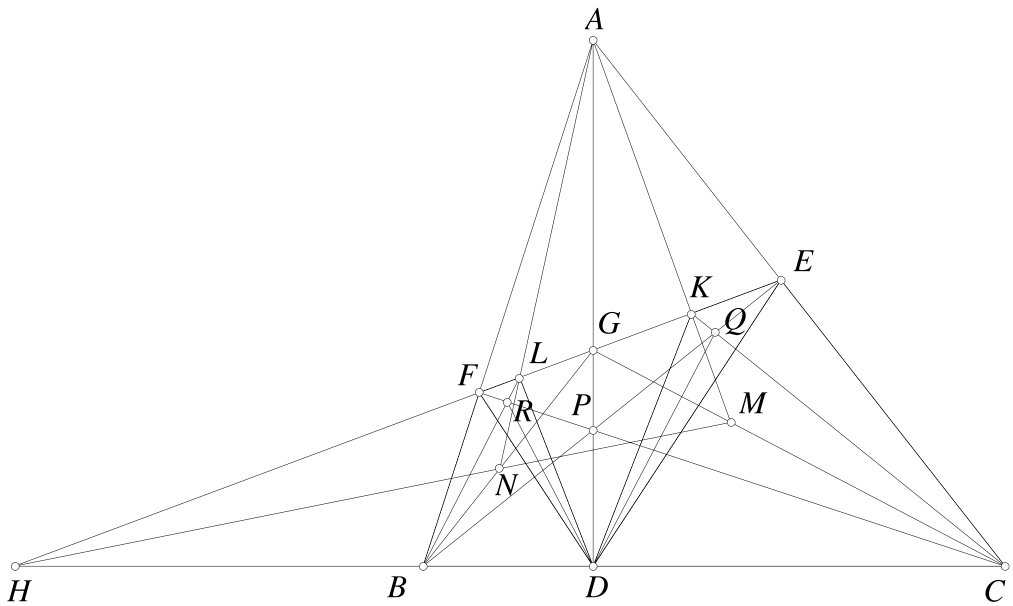
Nhận xét. Lời giải còn xem ra đơn giản hơn trường hợp song song. Tuy vậy cả hai bài toán 6,7 đều có những ứng dụng khá phong phú. Chẳng hạn như bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. PA cắt EF tại G. Các điểm M, N lần lượt thuộc GC, GB sao cho $MN \parallel EF$. AM, AN lần lượt cắt EF tại Q, R. Chứng minh rằng G là trung điểm QR.



Hình 8.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC đường cao AD. P là điểm trên AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. EF giao PA, BC lần lượt tại G, H. Một đường thẳng qua H cắt GC, GB lần lượt tại M, N. AM, AN cắt EF lần lượt tại K, L. CK, BL lần lượt cắt BE, CF tại Q, R. Chứng minh rằng $\angle QDE = \angle RDF$.



Hình 9.

Các bạn hãy làm như các bài luyện tập.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2736397

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về hai bài toán hình học hay

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết giới thiệu một hướng mở rộng cho hai đề toán, một đề trong kỳ thi Olympic toàn Nga và một đề kỳ thi học sinh giỏi trường chuyên sư phạm với các công cụ về phương tích trục đẳng phương và hình học thuần túy.

Trong kỳ thi olympic toàn Nga năm 2013 cho lớp 9 bài số 3 ngày thứ 2 có bài toán sau [1]

Bài toán 1. Các hình vuông $CAKL$ và $CBMN$ được vẽ ra ngoài tam giác nhọn ABC. CN cắt AK tại X. CL cắt BM tại Y. Điểm P nằm trong tam giác ABC là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KXN và LYM. S là trung điểm AB. Chứng minh rằng $\angle ACS = \angle BCP$.

Trong kỳ thi học sinh giỏi lớp 10 trường THPT chuyên sư phạm 2014 có bài toán sau [2]

Bài toán 2. Cho tam giác ABC không cân tại A với $\angle BAC > 45°$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình vuông $ABKL, ACMN$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK.

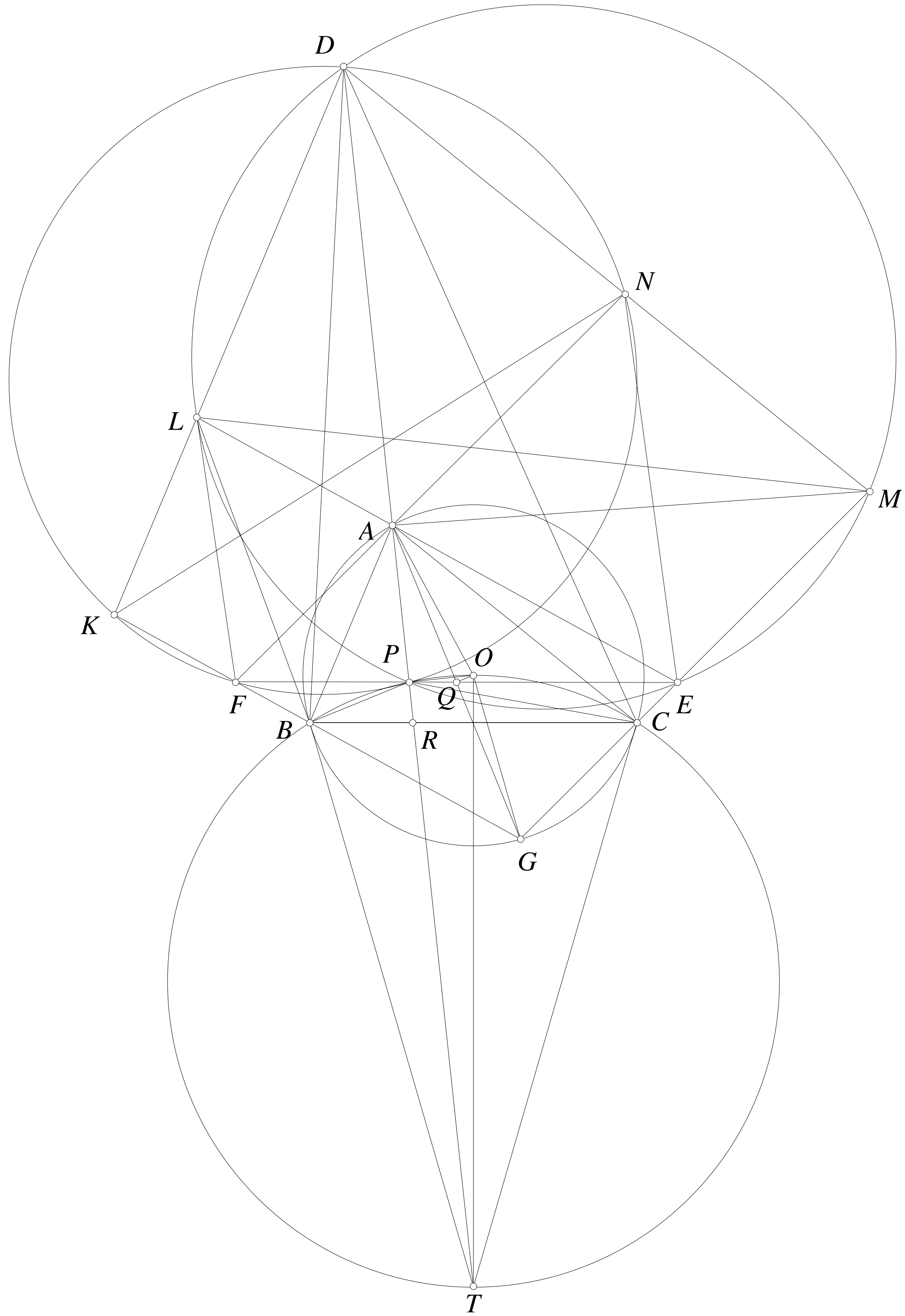
a) Chứng minh rằng E, F, O, P thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn.

Nhận xét. Hai bài toán trên là hai bài toán hay mang nhiều ý nghĩa. Ta có thể thấy các yếu tố hình vuông có thể coi như các hình chữ nhật đồng dạng hoặc tổng quát hơn là các hình bình hành đồng dạng. Với ý tưởng đó tôi xin giới thiệu một bài toán tổng quát cho cả hai bài toán trên cũng với lời giải.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC tâm ngoại tiếp O. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABKL, ACMN$ sao cho $\triangle ABL \sim \triangle CAM$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK. Chứng minh rằng B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. Gọi KB giao CM tại G do $\triangle ABL \sim \triangle CAM$ nên dễ có $\angle ABK + \angle ACM = 180°$ nên G nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ thấy tứ giác $AFGE$ là hình bình hành nên $\angle AFG = 180° - \angle FGE = \angle BAC$. Lại có góc nội tiếp $\angle AGF = \angle ACB$ nên $\triangle AFG \sim \triangle BAC$ suy ra $AC.FA = AB.FG = AB.AE$. Cũng từ tam giác đồng dạng $\triangle ABL \sim \triangle CAM$ dễ có $AC.AL = AB.AN$. Từ đó suy ra $\dfrac{AF}{AL} = \dfrac{AE}{AN}$ hay $AL.AE = AF.AN$ vậy A thuộc trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK.



Hình 1.

Gọi KL giao MN tại D ta thấy $\angle DNF = 180^\circ - \angle ANM = 180^\circ - \angle FKL$ suy ra D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác NFK. Tương tự D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác LME. Vậy DP

là thuộc trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK nên A thuộc DP. Từ đó chú ý các tứ giác $DMEP$ và $DKFP$ nội tiếp dễ có $\angle APF + \angle APE = \angle DME + \angle DKF = 180^\circ$ vậy P thuộc EF.

Gọi Q là trung điểm của AG dễ thấy $\angle AOQ = \dfrac{1}{2}\angle AOG = \angle ACG = \angle AMC = 180^\circ - \angle DPE = 180^\circ - \angle APQ$ suy ra tứ giác $APQO$ nội tiếp mà $OQ \perp AQ$ nên $AP \perp OP$.

Gọi AP giao BC tại R ta dễ có $\dfrac{RB}{RC} = \dfrac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \dfrac{S_{LAB}}{S_{LAC}} = \dfrac{AL.AB}{AN.AC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Từ đó AP là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy AP đi qua giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O) là T. Từ $OP \perp AP$ dễ thấy O, P, B, C đều thuộc đường tròn đường kính OT. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi các hình bình hành là hình vuông ta thu được các kết quả trong cả hai bài toán trên. Ta thấy rằng để đi tới kết luận B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn ta phải đi qua các công đoạn chứng minh AP là đường đối trung như trong bài toán 1 và P thuộc EF như trong ý a) bài toán 2. Điểm P thực chất trong bài toán này là cố định không phục thuộc cách chọn các hình bình hành vì nó là hình chiếu của tâm ngoại tiếp O lên đường đối trung. Hình chiếu của tâm ngoại tiếp O lên đường đối trung là một điểm đặc biệt trong tam giác có rất nhiều ứng dụng, chẳng hạn nó chính là tâm phép đồng dạng biến đoạn thẳng CA thành AB. Việc khai thác bài toán mở rộng sẽ mang lại cho chúng ta nhiều bài toán đẹp. Các bạn hãy làm các bài toán luyện tập sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC không cân tại A. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình chữ nhật đồng dạng $ABKL, ACMN$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK. Gọi KN giao LM tại Q. Chứng minh rằng $\angle PAB = \angle QAC$.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3067570

[2] http://diendantoanhoc.net/forum/ đề thi học sinh giỏi chuyên sư phạm

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về một bổ đề quan trọng

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

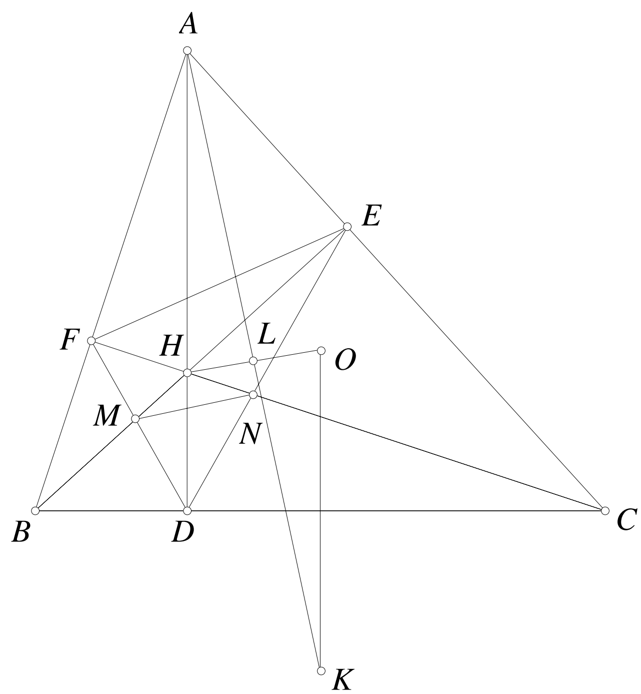
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bổ đề quan trọng có nhiều ứng dụng trong các bài toán khác nhau với các công cụ về phương tích và trục đẳng phương.

Trên báo THTT số 355 tháng 1 năm 2007 có một bài toán hay sau của tác giả Hồ Quang Vinh [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF. DE, DF lần lượt cắt CF, BE tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc với MN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

Bài toán có lời giải sử dụng khái niệm phương tích và trục đẳng phương



Hình 1.

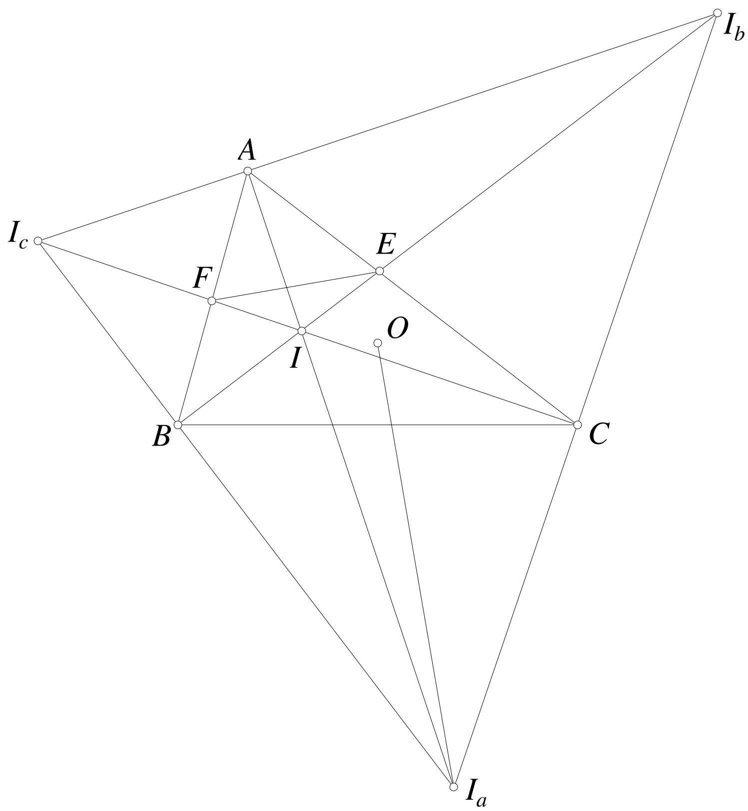
Lời giải. Do đối xứng của H qua BC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đối xứng nhau qua BC. Từ đó tâm K đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đối xứng O qua BC. Cũng từ đó dễ thấy AK đi qua trung điểm L của OH cũng là tâm đường tròn Euler đi qua D, E, F. Gọi (K) và (L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và DEF

Các tứ giác $FHDB, EHDC$ nội tiếp suy ra $\mathcal{P}_{M/(K)} = \overline{MH}.\overline{MB} = \overline{MF}.\overline{MD} = \mathcal{P}_{M/(D)}$. Vậy M thuộc trục đẳng phương của (K) và (L). Tương tự N thuộc trục đẳng phương của (K) và (L) nên $MN \perp KL \equiv AL$. Vậy đường thẳng qua A vuông góc MN đi qua K. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán là một kết quả rất đẹp của hình học phẳng. Dựa vào đó ta sẽ khai thác được nhiều tính chất thú vị. Ta xét tiếp bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, phân giác BE, CF, tâm ngoại tiếp O, tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a. Chứng minh rằng $OI_a \perp EF$.

Bài toán này chính là một áp dụng cơ bản của bài toán 1.

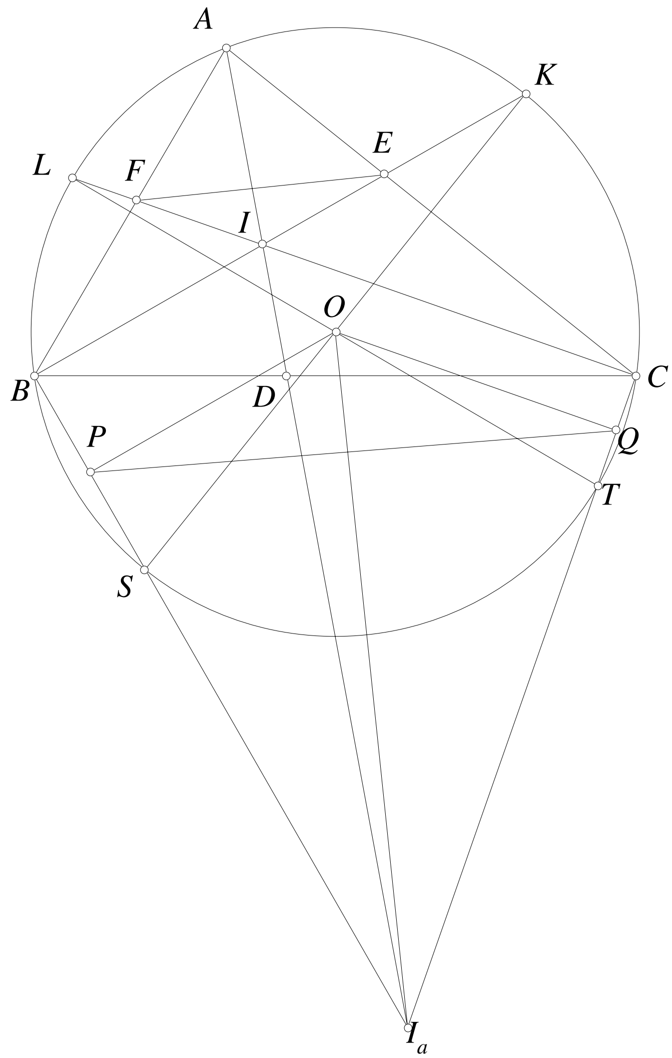


Hình 2.

Lời giải 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và tâm các đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh B, C là I_b, I_c thì dễ thấy I là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$ và các đường cao là I_aA, I_bB, I_cC đồng thời đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$. Từ đó áp dụng bài toán 1 cho tam giác $I_aI_bI_c$ ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc chuyển qua xét một bài toán áp dụng vào tam giác tạo bởi ba tâm đường tròn bàng tiếp là việc làm rất hay gặp và mang nhiều ý nghĩa cũng như tính sáng tạo. Do đó một trong những yếu tố phụ rất hay vẽ khi gặp các bài toán có tâm nội tiếp là hãy vẽ thêm ba tâm đường tròn bàng tiếp ở ba đỉnh.

Bài toán có một lời giải trực tiếp thuần túy hình học được tác giả tham khảo trong [2] như sau



Hình 3.

Lời giải 2. Gọi BE, CF cắt (O) tại điểm thứ hai K, L. Ta dễ thấy $BE.BK = ac$, $\dfrac{IE}{BE} = \dfrac{b}{a+b+c}$ suy ra $IE.BK = \dfrac{abc}{a+b+c}$. Tương tự ta được $IE.BK = IF.CL$ suy ra $\dfrac{BK}{CL} = \dfrac{IF}{IE}$ (1).

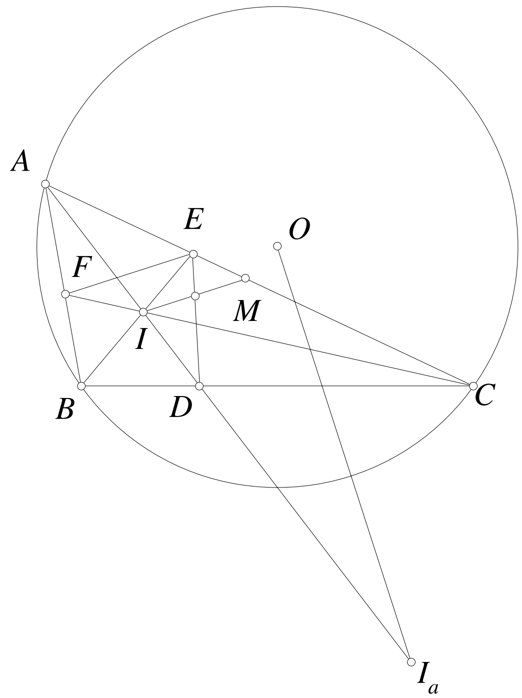
Gọi I_aB, I_aC cắt (O) lần lượt tại S, T. Vì $IB \perp I_aB, IC \perp I_aC$ nên SK, LT là đường kính của (O). Gọi P, Q là trung điểm của PS, CT. Theo tính chất đường trung bình dễ thấy $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{2BK}{2CL} = \dfrac{IF}{IE}$ (theo (1)). Mặt khác dễ thấy $\angle FIE = \angle POQ$ từ đây suy ra $\triangle OPQ \sim \triangle IFE$ suy ra $\angle IFE = \angle OPQ = \angle OI_aQ$. Mà $IF \perp I_aQ$ suy ra $FE \perp I_aO$. Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán 2 là một bài toán hay có nhiều ứng dụng. Chúng ta hãy cũng xét qua một số bài toán sau.

Đề toán sau được tác giả đề nghị trên THTT số 424 tháng 10 năm 2012 [3]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC, tâm đường tròn ngoại tiếp (O), tâm đường tròn nội tiếp I, tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a. AI, BI lần lượt cắt BC, CA tại D, E. Đường thẳng qua I vuông góc OI_a cắt AC tại M. Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm IM.

Bài toán là một ứng dụng trực tiếp của bài toán 2



Hình 4.

Lời giải. Gọi IC cắt AB tại F. Dễ thấy $E(FD, IC) = -1$ mà theo bài toán 2 $IM \parallel EF$ do cùng vuông góc OI_a. Theo tính chất hàng điều hòa suy ra ED đi qua trung điểm IM. □

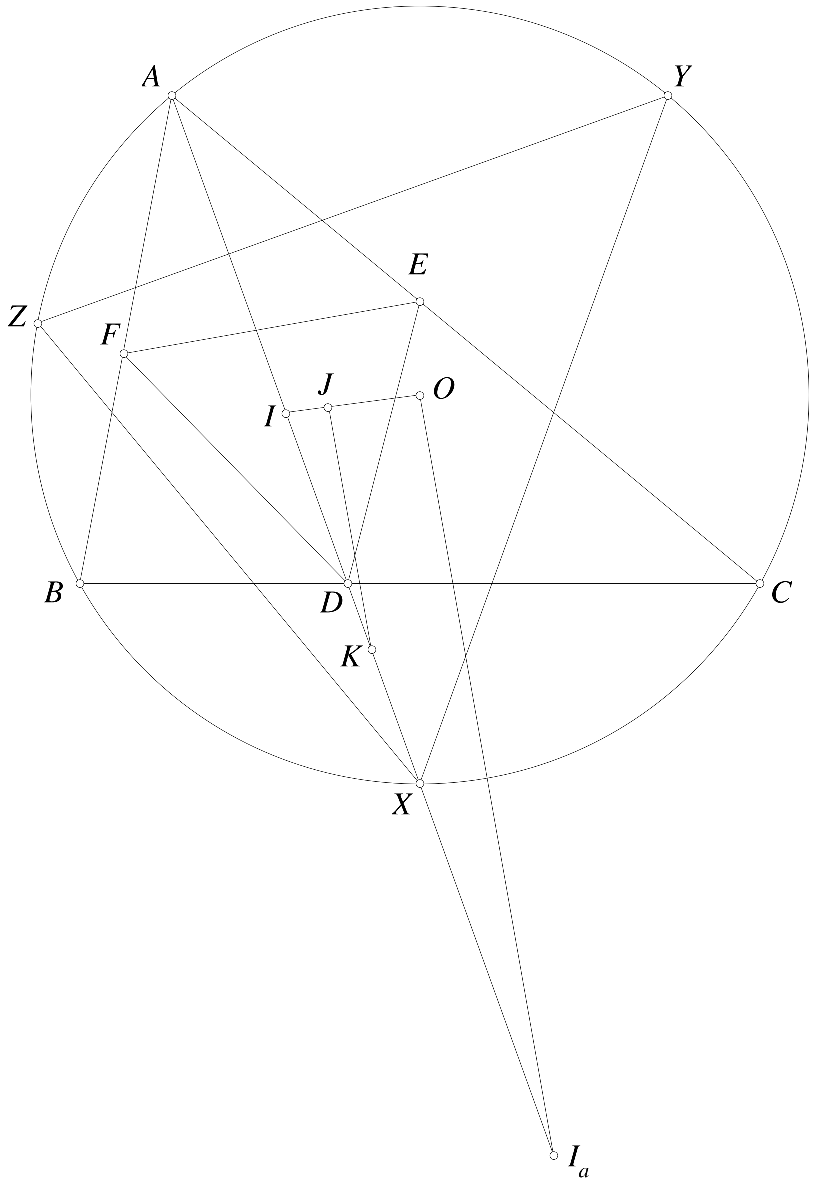
Bài toán sau khá thú vị là ý b) đề thi học sinh giỏi toán lớp 10 trường THPT chuyên sư phạm

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) và tâm đường tròn nội tiếp I. AI, BI, CI theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 và cắt (O) tại A_2, B_2, C_2 khác A, B, C. Các đường thẳng $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ theo thứ tự đi qua A_2, B_2, C_2 và vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ đồng quy tại một điểm thuộc OI.

Bài toán trên dưới cách nhìn của bài toán 2 là một bài toán khá quen thuộc. Sau đây là một cách tổng quát cho bài toán này

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), phân giác AD, BE, CF đồng quy tại I. AI, BI, CI lần lượt cắt (O) tại X, Y, Z khác A, B, C. Gọi K, L, N các điểm lần lượt chia IX, IY, IZ cùng một tỷ số. Chứng minh rằng các đường thẳng qua K, L, N lần lượt vuông góc với EF, FD, DE đồng quy trên OI.

Bài toán là một ứng dụng trực tiếp của bài toán 2



Hình 5.

Lời giải. Gọi đường thẳng qua K vuông góc EF cắt OI tại J. Gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Theo bài toán 2 thì $I_aO \perp EF \perp KJ$ vậy $KJ \parallel OI_a$. Chú ý X là trung điểm II_a. Giả sử K chia IX tỷ số k tức là $\overline{IK} = k\overline{IX} = \frac{k}{2}\overline{II_a}$. Do đó theo định lý Thales $\frac{\overline{IJ}}{\overline{IO}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{II_a}} = \frac{k}{2}$. Từ đó J xác định trên OI. Tương tự các đường thẳng qua L, N lần lượt vuông góc với FD, DE cũng đi qua J trên OI. □

Nhận xét. Việc chỉ ra một điểm cố định và chứng minh các đường thẳng cùng đi qua điểm đó là một cách làm rất hay gặp trong bài toán chứng minh các đường thẳng đồng quy. Qua hai bài toán ta thấy rằng nhờ có bài toán 2 mà toàn bộ các bài toán có yếu tố vuông góc với EF ta hầu như quy về song song với OI_a.

Bài toán sau là một cách phát biểu đẹp khác của bài toán 5

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn. Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Điểm J trên OI chia OI tỷ số k cố định. Chứng minh rằng đường thẳng qua J vuông góc EF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.

Qua bài toán 2 và cách làm bài toán 5 ta dễ nhận ra điểm cố định nằm trên trung trực BC. Bài toán trên là bài toán hay và có nhiều áp dụng phong phú xin dành cho bạn đọc. Ta cũng có một cách nhìn khác cho bài toán trên như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn. Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. J là điêm trên đường thẳng IA sao cho $IJ = k$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng qua J vuông góc EF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.

Các bạn hãy làm thêm các bài toán sau để rèn luyện thêm kỹ năng về bổ đề này.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. EF cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng tam giác IMN cân.

Bài toán trên có tham khảo trong [2]

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. IB, IC lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. P, Q lần lượt nằm trên tia đối tia BC, CB sao cho $BP = BA, CQ = CA$. K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác NBP, MCQ. BL cắt CK tại D. Đường tròn bàng tiếp góc A là (I_a) cắt (O) tại S, T. Chứng minh rằng $AD \perp ST$.

Bài toán trên có tham khảo trong [4]

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác góc B, C cắt (O) tại E, F khác B, C. P, Q thuộc tia đối tia BC, CB sao cho $BP = BA, CQ = CA$. Từ A vẽ tiếp tuyến AX, AY tới đường tròn ngoại tiếp tam giác BFP và tiếp tuyến AZ, AT tới đường tròn ngoại tiếp tam giác CEQ. Gọi M, N là trung điểm XY, ZT. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN cắt nhau tại R khác A. Đường tròn (K) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong (O) cắt BC tại G, H. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AGH nằm trên AR.

Bài toán trên là của tác giả và được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội tuyển TST của trường THPT chuyên KHTN.

Tài liệu

[1] Tạp chí toán học tuổi trẻ số 355 tháng 1 năm 2007

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=136301

[3] Tạp chí toán học tuổi trẻ số 424 tháng 10 năm 2012

[4] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=329713

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Một số bài toán trên tâm đường tròn Euler

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

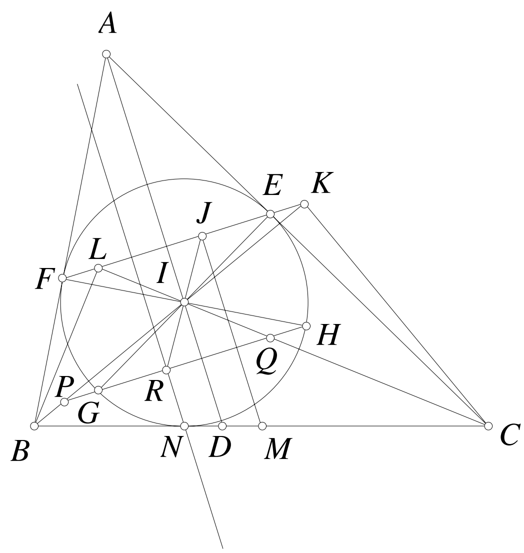
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một số bài toán hay liên quan tới tâm đường tròn Euler hầu như đều là kết quả của tác giả trong quá trình đi dạy với nhiều công cụ hình học thuần túy khác nhau.

Đường tròn Euler hay tên quốc tế thường gọi là đường tròn 9 điểm [7] đi qua trung điểm ba cạnh, chân ba đường cao và trung điểm ba đoạn thẳng nối trực tâm và ba đỉnh tam giác là một kết quả rất nổi tiếng và được khai thác trong rất nhiều bài toán khác nhau. Tâm đường tròn này cũng là một đề tài thú vị trong các cuộc thi học sinh giỏi toán trong nước và quốc tế. Tôi xin trình bày lại một số bài toán chủ yếu do tôi đề xuất liên quan đến tâm đường tròn thú vị này.

Xuất phát từ kỳ thi học sinh giỏi quốc gia năm 2013 có bài toán hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. Gọi IB, IC lần lượt cắt EF tại K, L. Chú ý tam giác AEF cân tại A nên $\angle KEC = \angle AEF = \dfrac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - (90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}) = 180^\circ - \angle BIC = \angle KIC$. Từ đó tứ giác $KEIC$ nội tiếp suy ra $\angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$. Tương tự $\angle ILB - 90^\circ$. Từ đó nếu gọi M là trung điểm BC, J là trung điểm KL đễ có tam tam giác KLM cân nên $MJ \perp EF \quad (1)$.

Do G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng đường thẳng EF qua I. GH, EF lần lượt cắt IB tại P, K suy ra I là trung điểm PK, tương tự I là trung điểm QL. Vậy hai đoạn KL và PQ đối xứng nhau qua I. Từ đó nếu gọi R là trung điểm PQ thì trung điểm J của KL và R đối xứng nhau qua I hay I là trung điểm RJ.

Gọi trung trực PQ cắt BC tại N, ta thấy RN vuông góc PQ, PQ song song $EF \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra RN song song JM. Gọi IA cắt BC tại D, dễ có $ID \equiv IA$ vuông góc EF nên ID cũng song song với RN, JM. Từ đó trong hình thang $RJMN$ có I là trung điểm RJ nên ID là đường trung bình, vậy D là trung điểm MN.

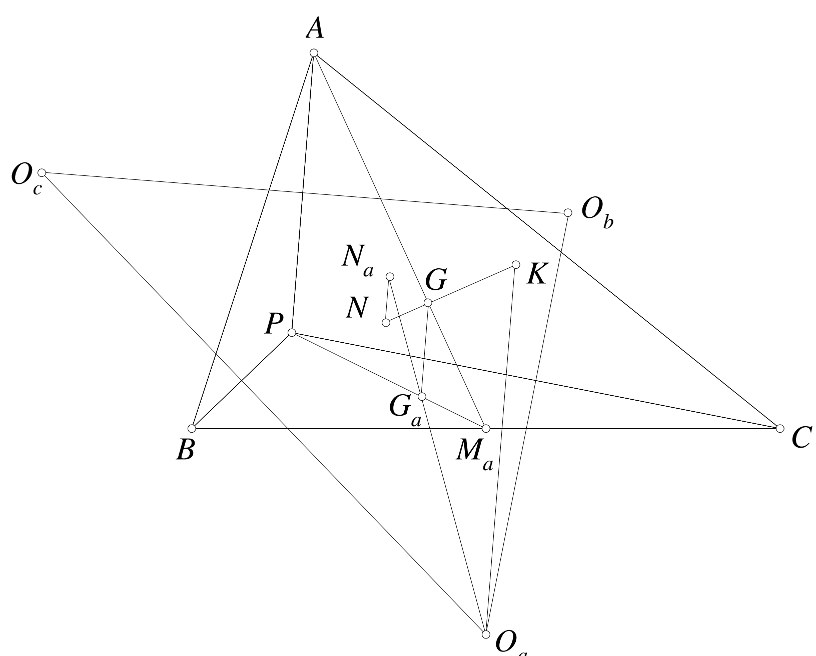
Theo tính chất đường phân giác $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi nên D cố định. M là trung điểm BC cố định nên N đối xứng M qua D cố định. Vậy trung trực PQ đi qua N cố định. □

Nhận xét. Việc dựng ra thêm các điểm phụ L, K trong lời giải đóng vai trò quan trọng, nó cho phép ta sử dụng phép vị tự để chuyển các tính chất đường thẳng RN và JM cho nhau. Trong quá trình tìm hiểu bài toán tôi nhận thấy rằng thực chất K, L, N là các chân đường cao từ C, B, I của tam giác IBC. Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác NKL là đường tròn Euler của tam giác IBC nên nó cũng đi qua M và vì vậy tâm đường tròn Euler của tam giác IBC nằm trên trung trực KL cũng là đường thẳng JM. Vậy nếu từ tâm đường tròn Euler của tam giác IBC mà ta vẽ đường thẳng song song với IA thì nó cũng chính là trung trực KL mà đi qua trung điểm BC. Ta dễ thấy là các đường thẳng qua trung điểm BC, CA, AB mà lần lượt song song với IA, IB, IC thì đồng quy. Do đó ta đề xuất bài toán thú vị sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC tâm nội tiếp I. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác IBC, ICA, IAB thì các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song với IA, IB, IC đồng quy.

Qua tìm hiểu và khai thác tôi nhận ra rằng bài toán này đúng không chỉ với tâm nội tiếp I mà thực chất nó đúng với mọi điểm P bất kỳ trong mặt phẳng. Do đó tôi đề xuất bài toán sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.



Hình 1.

Lời giải. Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB. Ta dễ thấy đường thẳng qua O_a song song PA chính là đường cao từ O_a của tam giác $O_aO_bO_c$ do đó các đường thẳng qua O_a, O_b, O_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại trực tâm K của tam giác $O_aO_bO_c$.

Gọi G_a, G_b, G_c, G lần lượt là trọng tâm tam giác PBC, PCA, PAB, ABC ta dễ thấy PG_a và AG đi qua trung điểm M_a của BC, từ đó dễ thấy G_aG song song PA nói cách khác các đường thẳng qua G_a, G_b, G_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

Đến đây là lại chú ý vì N_a là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC nên dễ có $2\overrightarrow{G_aN_a}+\overrightarrow{G_aO_a}=\overrightarrow{0}$. Từ đó sử dụng phép chiếu song song phương PA xuống đường thẳng KG, gọi N là hình chiếu song song phương PA của N_a xuống KG ta dễ suy ra $2\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{0}$ nói cách khác đường thẳng qua N_a song song PA đi qua N xác định. Tương tự các đường thẳng qua N_b, N_c lần lượt song song với PB, PC cũng đi qua N ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trong trường hợp tâm nội tiếp đã thú vị thì bài toán tổng quát của chúng ta còn thú vị hơn rất nhiều. Việc cho P di chuyển trùng một số tâm đặc biệt để tạo ra bài toán mới là công việc thú vị. Qua bài toán này ta cũng dễ rút ra tâm đường tròn Euler cũng chỉ là một trường hợp đặc biệt. Tương tư như cách chứng minh trên thì bài toán cũng sẽ đúng với trực tâm hoặc tổng quát hơn là một điểm trên đường thẳng Euler chia đoạn nối trực tâm, trọng tâm tỷ số cố định. Ta có các bài toán khác như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua H_a, H_b, H_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác PBC, PCA, PAB. Gọi G_a, G_b, G_c lần lượt là trọng tâm các tam giác PBC, PCA, PAB. Gọi L_a, L_b, L_c lần lượt chia các đoạn H_aG_a, H_bG_b, H_cG_c cùng một tỷ số. Chứng minh rằng các đường thẳng qua L_a, L_b, L_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.

Hoặc một khai thác tương tự được tác giả đề nghị trong cuộc thi giải toán mathley [3], các bạn hãy làm như bài luyện tập

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và DEF nội tiếp đường tròn (O). Gọi N_a, N_b, N_c là tâm đường tròn Euler các tam giác DBC, ECA, FAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song AD, BE, CF đồng quy.

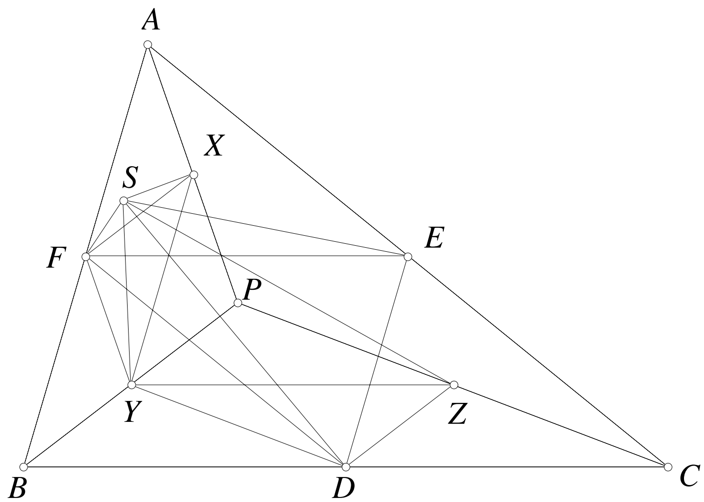
Sau khi đề xuất bài toán 3, tôi đã mạnh dạn nghĩ tới kết quả thay đường thẳng song song bởi đường thẳng vuông góc và thật tuyệt vời khi bài toán vuông góc đúng và rất thú vị như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt vuông góc với PA, PB, PC đồng quy.

Bài toán trên theo đánh giá của tôi là bài toán hay. Tôi đã sử sụng bài toán này trong đợt kiểm tra đội tuyển VMO của trường THPT chuyên KHTN thật đáng tiếc là không có em nào giải được bài toán này.

Lời giải đầu tiên của bài toán này được góp ý từ một sinh viên trường ĐH khối kinh tế nhưng dài và không đẹp, sau đây tôi trình bày một lời giải khác tham khảo ý tưởng từ học trò **Tạ Hà**

Nguyên học sinh lớp 12A1 Toán khóa 48 trường THPT chuyên KHTN. Trong suốt bài toán này ta ký hiệu (XYZ) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.



Lời giải. Gọi D, E, F, X, Y, Z lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, PA, PB, PC, thì các đường tròn $(DYZ), (EZX), (FXY), (DEF)$ lần lượt là các đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB, ABC. Gọi đường tròn (DYZ) và đường tròn (DEF) cắt nhau tại S khác D. Ta có biến đổi góc

$(SF, SY) = (SF, SD) + (SD, SY)$
$= (EF, ED) + (ZD, ZY)$ (Do S thuộc các đường tròn $(DYZ), (DEF)$)
$= (BD, BF) + (BY, BD)$ (Do $EF \parallel BD, ED \parallel AC, YZ \parallel BD, ZD \parallel BY$)
$= (BY, BF)$
$= (XF, XY)$ (Do $XY \parallel BF, XF \parallel BY$).

Do đó S thuộc (FXY). Tương tự S thuộc (EZX). Ta có điều phải chứng minh.

Theo bài toán 3 thì các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song PA, PB, PC đồng quy tại Q. Ta chỉ cần chứng minh rằng Q nằm trên đường tròn $(N_aN_bN_c)$ thì hiển nhiên đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt vuông góc với PA, PB, PC sẽ đồng quy tại điểm đối tâm Q. Vậy ta biến đổi góc $(QN_b, QN_c) = (PB, PC) = (DZ, DY) = (SZ, SY) = (N_aN_b, N_aN_c)$. Ta chú ý đẳng thức cuối có là do đường tròn (N_a) và (N_b) có dây cung chung là SZ nên $N_aN_b \perp SZ$, tương tự $N_aN_c \perp SY$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán nếu cho P trùng với một số điểm đặc biệt cũng sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị.

Bài toán trên cũng đã được tác giả gửi làm đề đề nghị cho cuộc thi giải toán kỷ niệm 50 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ. Xong thật đáng tiếc không hiểu vì lý do gì mà bài toán lại được đăng lên diễn đàn toán học AoPS ở [2] bởi một nick name đến từ Việt Nam trước khi được đăng báo. Vì sự không may mắn này tôi xin thu hồi lại bài toán không gửi cho báo nữa và viết lại trong bài viết này để bạn đọc cùng tìm hiểu.

Ngoài ra khi khai thác các bài toán xoay quanh tâm đường tròn Euler tôi cũng đã tự tìm ra được nhiều bài toán khác khá thú vị, xin giới thiệu một vài bài toán với bạn đọc

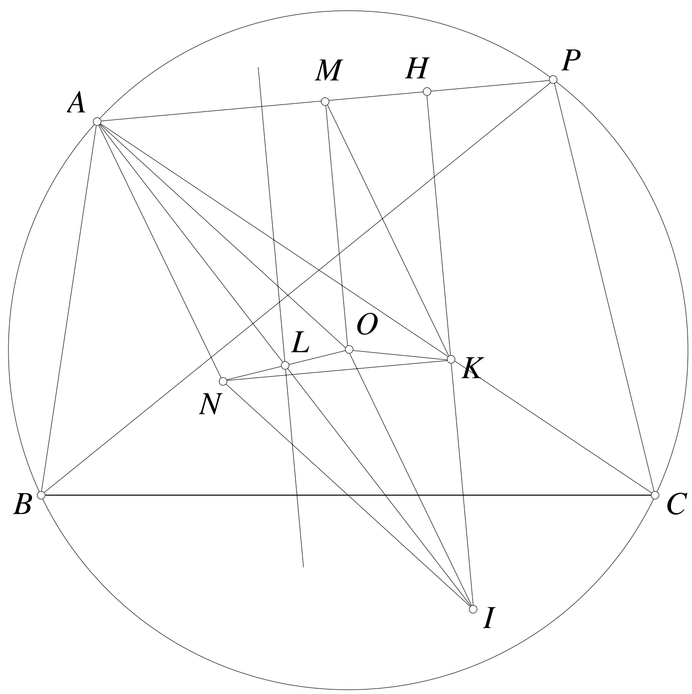
Bài toán 8. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi K, L, N lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác DEC, BCA, FAE. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của K, L, N theo thứ tự lên AD, BE, CF. Chứng minh rằng trung trực của AX, EY, CZ đồng quy.

Trước hết ta có bổ đề sau

Bổ đề 8.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trên (O). K là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC.

a) Chứng minh rằng đường thẳng qua K vuông góc với PA luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

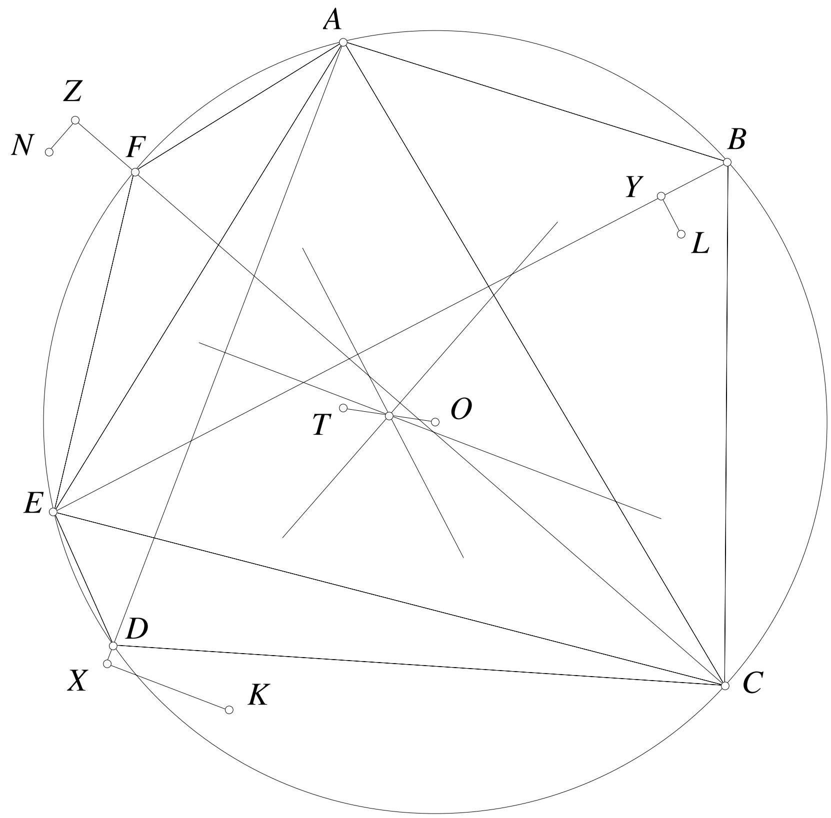
b) Gọi H là hình chiếu của K lên PA. Chứng minh rằng trung trực của AH luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 2.

Chứng minh. a) Gọi N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi L là trung điểm của ON. Gọi I đối xứng A qua L, gọi M là trung điểm PA. Ta đã biết kết quả quen thuộc $\overrightarrow{KN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MA}$ suy ra $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MK}$. Do I đối xứng A qua L nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OI}$. Vậy từ đó $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{KI}$ suy ra $KI \parallel OM \perp PA$. Vậy đường thẳng qua K vuông góc PA đi qua I cố định. Ta có điều phải chứng minh.

b) Dễ thấy trung trực của AH đi qua trung điểm L của AI cũng là trung điểm ON cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

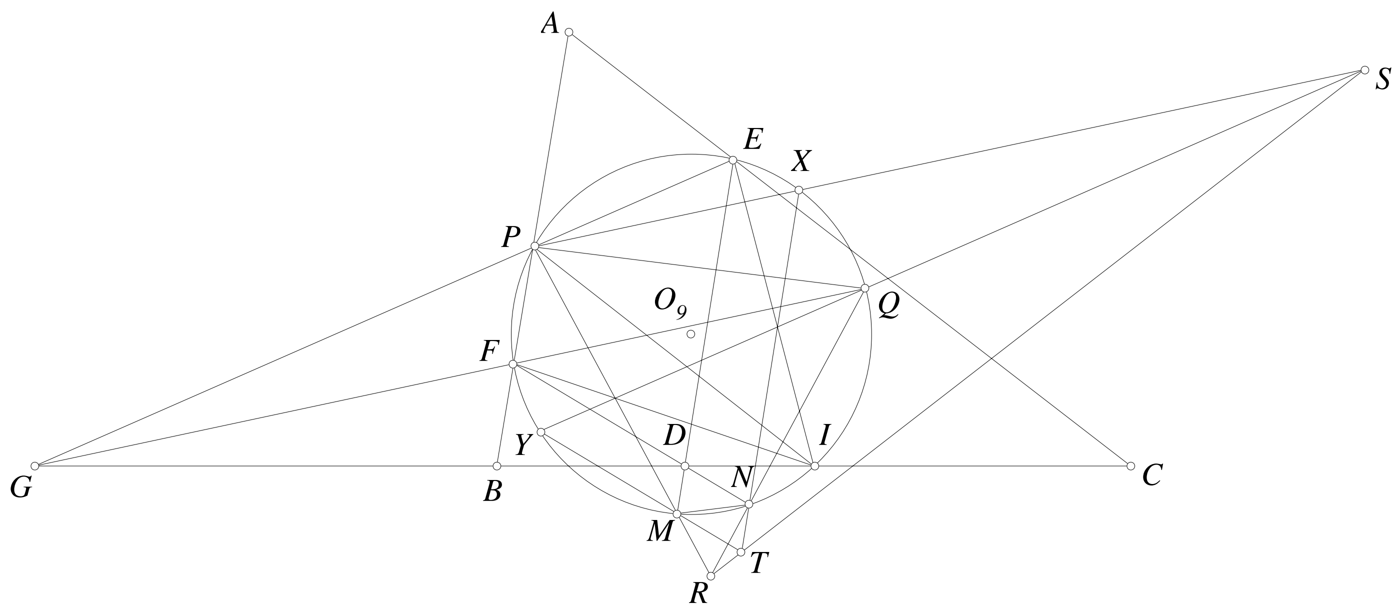


Hình 3.

Lời giải bài toán. Bài toán là hệ quả của bổ đề trên ta dễ thấy trung trực các đoạn AX, EY, CZ đồng quy tại trung điểm OT với T là tâm đường tròn Euler của tam giác AEC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trên dựa vào bổ đề là một bài toán đi qua điểm cố định rất thú vị. Chúng ta hoàn toàn có thể dựa vào bài toán đi qua điểm cố định để đề xuất thành các bài toán chứng minh đồng quy như trên. Bài toán trên đã được tác giả đề nghị trong kỳ thi chọn đội tuyển thi học sinh giỏi quốc gia trường THPT chuyên KHTN năm 2013 xem [4].

Bài toán 9. Cho tam giác ABC đường cao BE, CF và đường tròn Euler là (O_9), D, G thuộc BC sao cho $(BC, DG) = -1$. ED, FD lần lượt cắt (O_9) lần lượt tại M, N khác E, F. GE, GF cắt (O_9) lần lượt tại P, Q khác E, F. PM giao NQ tại R. Gọi S là đối xứng của G qua trung điểm PQ. Gọi T là đối xứng của D qua trung điểm MN. Chứng minh rằng R, S, T thẳng hàng.



Hình 4.

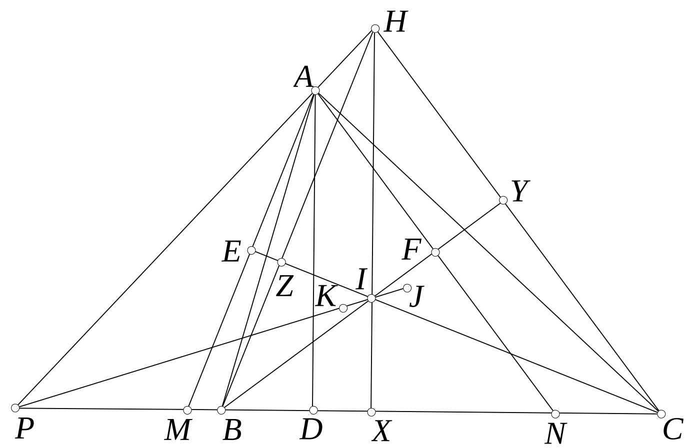
Lời giải. Gọi I là trung điểm của BC theo hệ thức Newton ta dễ có $IE^2 = IF^2 = IB^2 = IC^2 = \overline{ID}.\overline{IG}$.

Từ đó dễ có $\angle IFD = \angle IGF, \angle IED = \angle IGE$. Gọi PS cắt (O_9) tại X. Suy ra $\angle EPX = \angle EGF = \angle IGE - \angle IGF = \angle IED - \angle IFD = \angle IED - \angle IEN = \angle MEN$. Từ đó dễ suy ra $EM \parallel NX$ suy ra NT đi qua X. Tương tự gọi SQ cắt (O_9) tại Y thì MT đi qua Y. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} P & N & Y \\ Q & M & X \end{pmatrix}$ ta thu được R, S, T thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán trên cũng là một kết quả đẹp được tác giả tạo ra khi đang tìm hiểu về các hệ thức trong hàng điểm điều hòa. Cũng thật đáng tiếc không hiểu vì một lý do gì mà bài toán cũng được đăng lên trong [6] bởi một nick name người Việt Nam mà cũng không thấy nhắc tới tên tác giả.

Ngoài ra việc khai thác tính chất tâm đường tròn Euler của tam giác IBC như trong bài toán 1 và bài toán 2 cũng đã mang đến rất nhiều bài toán thú vị khác, sau đây là ba bài toán thú vị do tôi đề xuất

Bài toán 10. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. D, E, F là hình chiếu của A lên BC, IC, IB. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng KI đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác IBC.



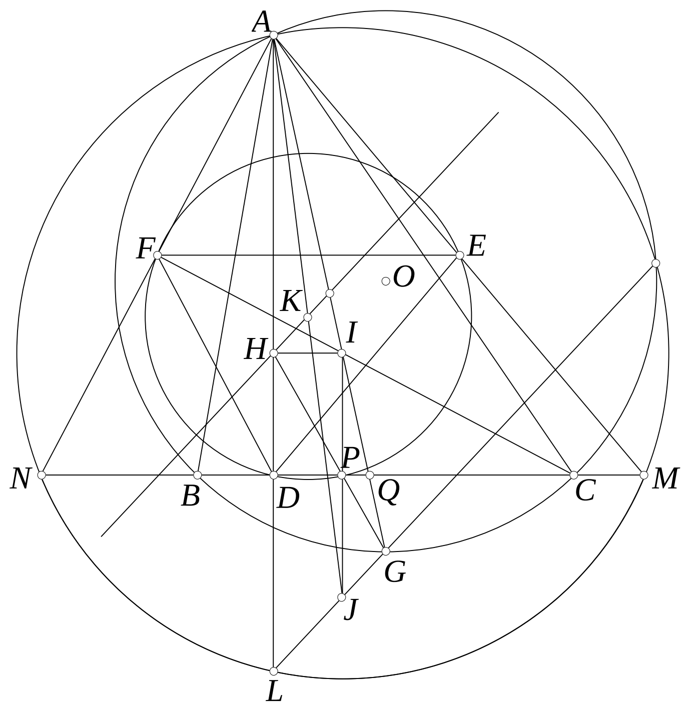
Hình 5.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm AE, AF với BC. Dễ dàng chứng minh E, F lần lượt là trung điểm AM, AN. Suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng là tâm đường tròn Euler của tam giác AMN. Cũng chứng minh được I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Gọi IX, BY, CZ lần lượt là các đường cao của tam giác IBC và H là trực tâm tam giác. Dễ thấy $AM \parallel HB, AN \parallel HC$. Gọi P là giao điểm AH, BC. Phép vị tự tâm P biến tam giác AMN thành tam giác HBC. Lại có IK là đường thẳng Euler của tam giác AMN. Gọi J là tâm đường tròn Euler của tam giác HBC, khi đó IJ là đường thẳng Euler của tam giác HBC. Vậy I, J, K thẳng hàng. J là tâm ngoại tiếp (XYZ), suy ra J cũng là tâm Euler của tam giác IBC. Suy ra điều phải chứng minh.

□

Bài toán 11. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. D, E, F là hình chiếu của A lên BC, IC, IB. Gọi AI cắt đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại G khác A. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua trung điểm AG.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm AE, AF với BC. H, K lần lượt là trực tâm và tâm ngoại tiếp tam giác DEF. AH cắt (AMN) tại L. J là đối xứng của A qua K và P là hình chiếu của I lên BC. Ta có các kết quả quen thuộc: L là đối xứng của A qua H, I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN và J là đối xứng của I qua BC. Như vậy, dễ thấy $HK \parallel JL$ hay JL song song với đường thẳng Euler của tam giác DEF. Do $\angle FAH = \angle FCD = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle ACF = \angle ADF = \angle FEH$ suy ra A, E, F, H cùng thuộc một đường tròn. Lại có $AE \perp IE, AF \perp IF$ suy ra A, E, F, I cùng thuộc một đường tròn, suy ra H thuộc đường tròn đường kính AI, suy ra $IH \perp AD$ suy ra $IHDP$ là hình chữ nhật.

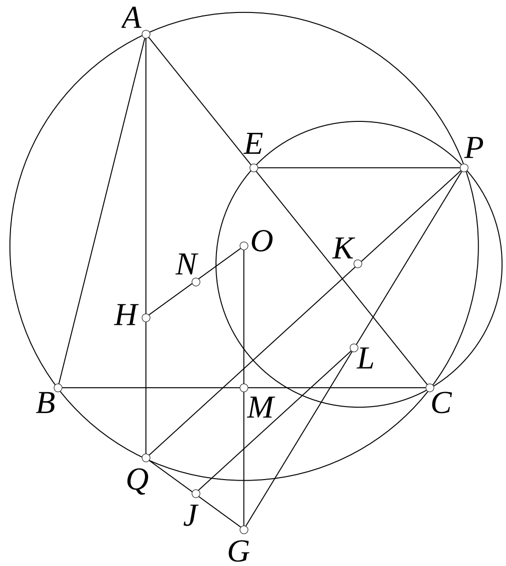


Hình 6.

Ta chứng minh H, P, G thẳng hàng. Gọi Q là giao điểm AG, BC. Lại có G là tâm ngoại tiếp tam giác IBC nên dễ có $QG.QA = QI(QG + GI)$ suy ra $QG.IA = QI.GI$ suy ra $\dfrac{QG}{IG} = \dfrac{IQ}{IA}$ suy ra $\dfrac{PQ}{PD} = \dfrac{PQ}{HI} = \dfrac{QG}{IG}$, suy ra H, P, G thẳng hàng. Suy ra L, J, G thẳng hàng. Suy ra $HK \parallel LG$ suy ra HK đi qua trung điểm AG. □

Bài toán 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P di chuyển trên (O). Đường thẳng qua P song song BC cắt CA tại E. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCE và L là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC. Chứng minh rằng đường thẳng qua L song song PK luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Lời giải. Gọi H, N lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC, và G là đối xứng của P qua L. Kết quả quen thuộc, ta có G là đối xứng của O qua BC. Gọi Q là giao điểm AH với (O). Do $PE \parallel BC$ suy ra $\angle CEP = \angle ACB$, suy ra $\angle CPK = 90° - \angle CEP = 90° - \angle ACB = \angle CAQ = \angle CPQ$ suy ra P, K, Q thẳng hàng.



Hình 7.

Đường thẳng qua L song song PK cắt GQ tại J. Suy ra J là trung điểm LQ. Tứ giác $OHQG$ là hình thang cân, NJ là đường trung bình của hình thang. Suy ra J đối xứng N qua BC. Suy ra đường thẳng qua L song song PK luôn đi qua điểm cố định là điểm đối xứng với tâm Euler của tam giác ABC qua BC. □

Nhận xét. Ba bài toán trên là ba bài toán mới trên tâm đường tròn Euler và cũng đã được tác giả dùng nhiều lần trong các đợt tập huấn các đội tuyển trên cả nước. Các bài toán trên được hoàn thiện lời giải bởi học trò **Nguyễn Ngọc Chi Lan** học sinh lớp 12A1 Toán khóa 48 trường THPT chuyên KHTN.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, mở rộng bài toán hình học trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia năm 2013, tạp chí toán học và tuổi trẻ số 429 tháng 3 năm 2013.

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=577336

[3] Cuộc thi giải toán mathley, http://www.hexagon.edu.vn/mathley.html

[4] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

[5] Trần Quang Hùng, Tỷ số kép, phép chiếu xuyên tâm, hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa, http://analgeomatica.blogspot.com/

[6] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=560895

[7] http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh một bài toán hình học trong IMO Shortlist 2012

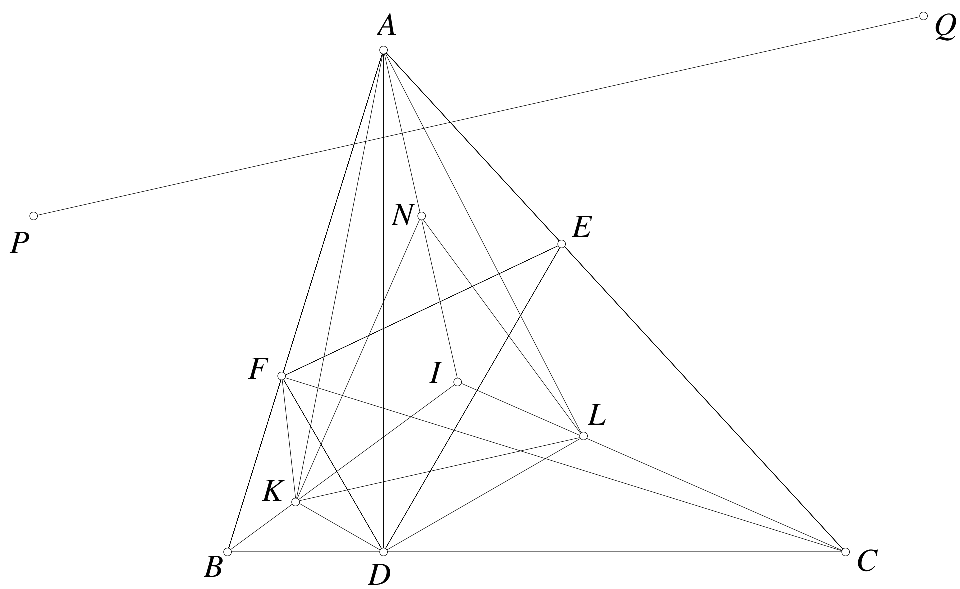
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong shortlist năm 2012 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong shortlist năm 2012 có một bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác ABK, ACL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

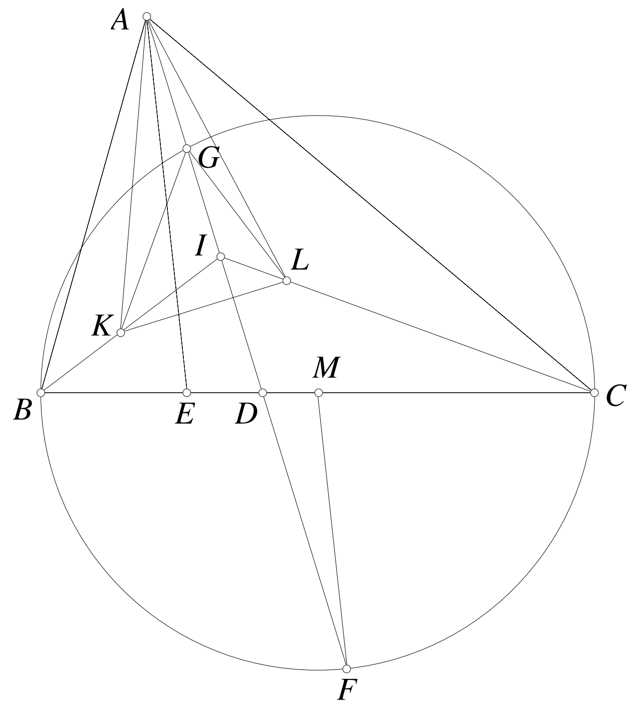


Hình 1.

Lời giải. Ta dễ có các tam giác $\triangle DFB \sim \triangle DCE$ mà K, L là tâm nội tiếp các tam giác này suy ra $\triangle DKF \sim \triangle DLC$. Từ cặp đồng dạng này suy ra $\triangle DKL \sim \triangle DFC$. Suy ra $\angle DKL = \angle DFC = \angle DAC$. Từ đó có $\angle BKL = \angle BKD + \angle DKL = 90^\circ + \dfrac{\angle BFD}{2} + \angle DFC = 90^\circ + \dfrac{\angle ACB}{2} + 90^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \dfrac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - \angle LCB$ suy ra tứ giác $BKLC$ nội tiếp. Tương tự nếu gọi N là tâm nội tiếp tam giác AEF thì các tứ giác $ANKB$ và $ANLC$ nội tiếp. Vậy AN là dây cung chung của đường tròn (P) ngoại tiếp ABK và đường tròn (Q) ngoại tiếp ACL suy ra $PQ \perp AN$. Dễ thấy BK, CL, AN đồng quy tại I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Từ đó có các góc ngoài $\angle ILN = \angle NAC = \angle NAC = \angle IKN$. Tương tự $\angle INK = \angle ILK, \angle INL = \angle IKL$ suy ra I là trực tâm tam giác KLN. Vậy $PQ \perp AN \equiv AI \perp KL$ suy ra $PQ \parallel KL$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Việc chứng minh tứ giác $KBCL$ nội tiếp đóng vài trò quan trọng trong lời giải bài toán. Cách trên dùng các tam giác đồng dạng chung đỉnh thật sự hiệu quả và dễ hiểu không phải vẽ thêm một hình phụ nào, cách làm đó dựa vào ý tưởng của bạn Trần Đăng Phúc một học trò cũ của tôi. Ngoài ra trong [1] và trong shortlist gốc cũng đưa ra thêm một số cách khác nhau chứng minh tứ giác $KBCL$ nội tiếp. Bài toán sẽ được khai thác xung quanh vấn đề này, ta đi đến một bài khai thác sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D. E là điểm nằm giữa B, D sao cho $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB, EAC. Chứng minh rằng tứ giác $KBCL$ nội tiếp.



Hình 2.

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC. Lấy F nằm trên đường tròn đường kính BC và nằm ngoài tam giác ABC sao cho $MF \parallel AE$. Ta dễ $DM = MB - DB = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{AB.BC}{AB + AC} = \dfrac{BC(AC - AB)}{2(AB + AC)} = \dfrac{MF(AC - AB)}{AB + AC}$. Do đó ta thấy $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{MD}{MF}$. Từ đó dễ chỉ ra $\triangle AED \sim \triangle MFD$. Từ đây dễ có A, D, F thẳng hàng. Gọi AF cắt đường tròn đường kính BC tại G khác F dễ có $\angle EAD = \angle DFM = \angle DGM$.

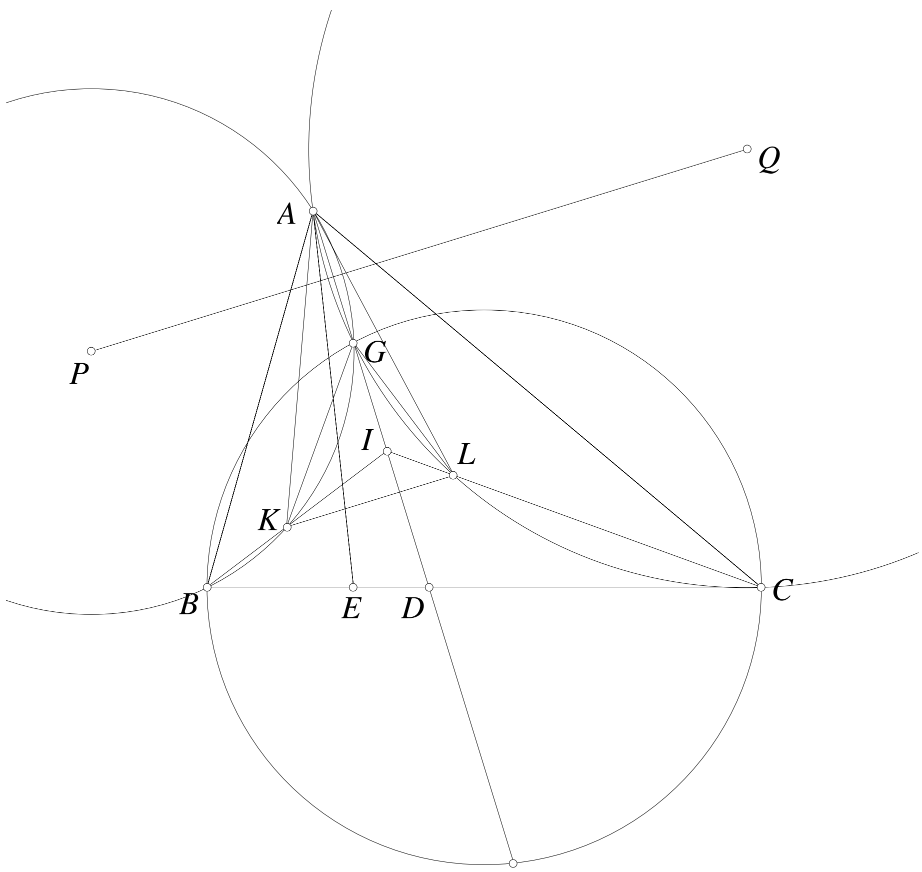
Tổng các góc trong cả hai tam giác EAD và GMD là $360°$ mặt khác $\angle EDG + \angle GDM = 180°$ nên ta suy ra $\angle AED + \angle DMG + 2\angle DGM = 180°$. Chú ý $\angle DMG = 2\angle MGC$ do đó $2(\angle DGM + \angle MGC) = 180° - \angle AED$ hay $\angle DGC = 90° - \dfrac{AED}{2}$. Vậy chú ý L là tâm nội tiếp tam giác AEC nên $\angle AGC = 180° - \angle DGC = 90° + \dfrac{\angle AED}{2} = \angle ALC$ suy ra tứ giác $AGLC$ nội tiếp. Vậy tương tự tứ giác $AGKB$ nội tiếp.

Chú ý các phân giác trong AD, BK, CL đồng quy tại tâm nội tiếp I. Cũng từ hai tứ giác $AGCL$ và $AGKB$ nội tiếp ta có $IK.IB = IG.IA = IL.IC$ nên tứ giác $BKLC$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Điều kiện điểm E thỏa mãn $\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{AC-AB}{AC+AB}$ là điều thú vị nhất của bài toán này. Ta thấy rằng điều kiện được xử lý rất khéo léo qua việc dựng điểm F trên đường tròn đường kính BC. Dựa vào ý tưởng bài toán shortlist ta đưa ra ngay được bài toán sau đây, chính là đề thi chọn đội tuyển KHTN năm 2013 vòng 1 ngày thứ 2 [2]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC với $AC>AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D. E là điểm nằm giữa B,D sao cho $\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{AC-AB}{AC+AB}$. Gọi K,L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB,EAC. Gọi P,Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KAB,LAC. Chứng minh rằng PQ song song KL.

Lời giải đầu tiên ta có thể sử dụng bài toán 2 như sau



Hình 3.

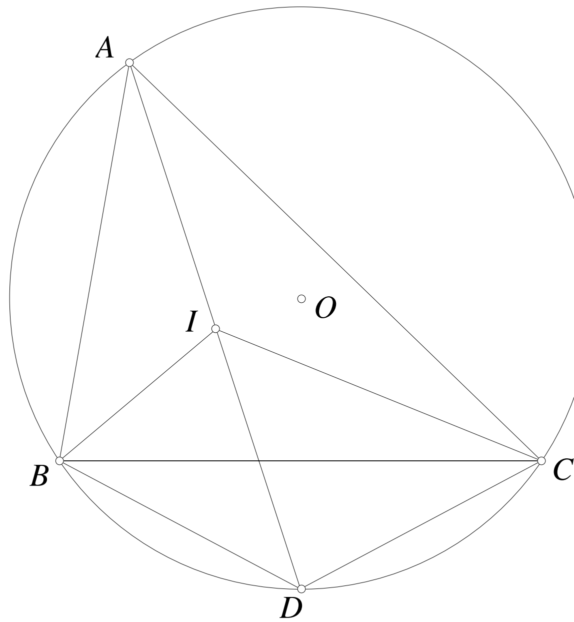
Lời giải 1. Từ các dựng điểm G như lời giải bài toán 2 ta thấy các tứ giác nội tiếp $AGKB,AGLC,BKLC$ ta được

$$\angle IKL+\angle GLK=\angle ICB+(\angle IBC+\angle GAC)=\frac{\angle ABC+\angle BAC+\angle BCA}{2}=90^\circ.$$

Hay $IK\perp GL$, tương tự $IL\perp GK$. Từ đây suy ra $AG\equiv IG\perp KL$. Chú ý hai đường tròn $(P),(Q)$ cắt nhau tại A,G do đó $AG\perp PQ$. Vậy từ hai tính chất trên dễ suy ra $PQ\parallel KL$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

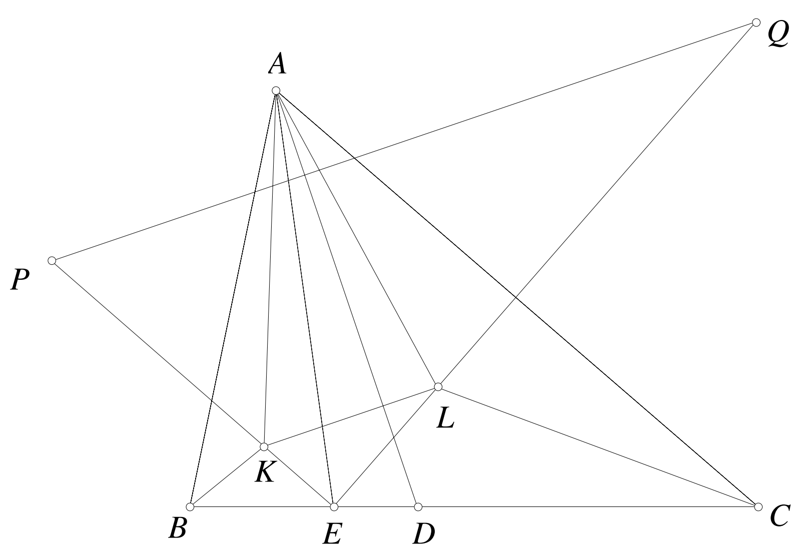
Tuy nhiên lời giải hai sau đây khá ngắn gọn suy ra trực tiếp bài toán, ta cần một bổ đề

Bổ đề 3.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. AI cắt (O) tại D khác A thì D là tâm ngoại tiếp tam giác IBC và $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB+AC}$.



Hình 4.

Chứng minh. Ta có $\angle BID = \angle IBA + \angle IAB = \angle IAC + \angle IBC = \angle CBD + \angle IBC = \angle IBD$. Do đó tam giác BID cân tại D. Tương tự tam giác CID cân tại D. Vậy $DI = DB = DC$. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABDC$ ta có $DB.CA + DC.AB = DA.AB$ hay $DI(AB+AC) = DA.BC$ suy ra $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB+AC}$. □



Hình 5.

Lời giải 2. Theo bổ đề dễ có $\dfrac{PK}{PE}=\dfrac{AB}{EA+EB}$ và $\dfrac{QL}{QE}=\dfrac{AC}{EA+EC}$. Vậy ta cần chứng minh

$\dfrac{AB}{EA+EB}=\dfrac{AC}{EA+EC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{AB}{EA+DB-ED}=\dfrac{AC}{EA+DC+ED}$

$\Leftrightarrow AB(EA+DC+ED)=AC(EA+DB-ED)$

$\Leftrightarrow AB(EA+ED)=AC(EA-ED)$

$\Leftrightarrow AB(1+\dfrac{ED}{EA})=AC(1-\dfrac{ED}{EA})$

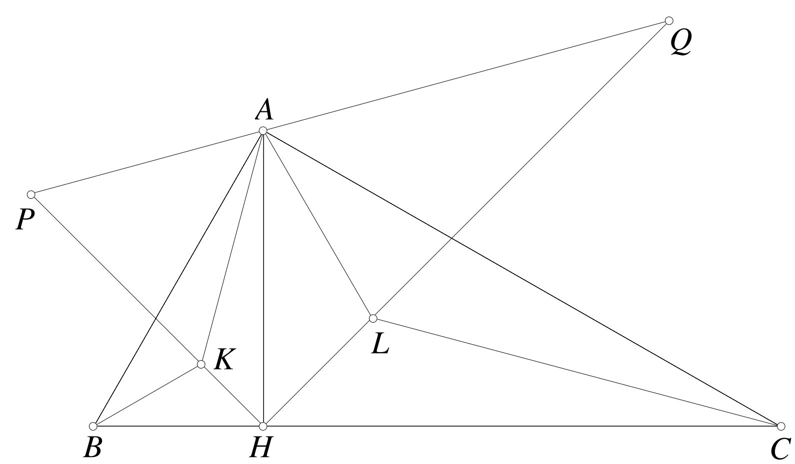
$\Leftrightarrow AB(1+\dfrac{AC-AB}{AB+AC})=AC(1-\dfrac{AC-AB}{AC+AB})$

$\Leftrightarrow AB.\dfrac{2AC}{AB+AC}=AC.\dfrac{2AB}{AB+AC}$ (luôn đúng).

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đặc biệt hóa bài toán 1 và bài toán 3 cho ta một trường hợp riêng rất có ý nghĩa sau

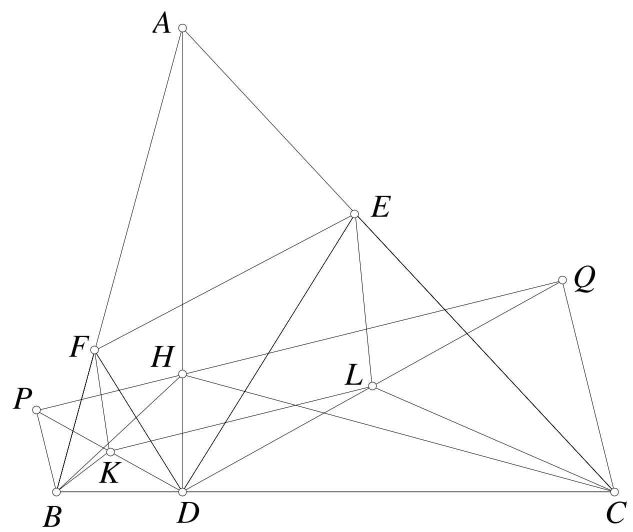
Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông ở A với AH là đường cao. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác AHB, AHC. P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác KAB, LAC. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.



Hình 6.

Nhận xét. Điều thú vị của bài toán trên là nó có thể coi là trường hợp riêng của cả hai bài toán 1 và bài toán 3 do đó cả hai cách giải cho bài toán 1 và bài toán 3 có thể áp dụng tương tự giải bài toán này. Và như vậy hai bài toán trên có thể coi là hai hướng tổng quát cho bài toán trên tam giác vuông này, tuy nhiên điều thú vị hơn là việc phát biểu bài toán cho tam giác vuông có thể giúp cho chúng ta có thêm một hướng mở rộng thứ ba cho bài toán này như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác FBK, ECL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

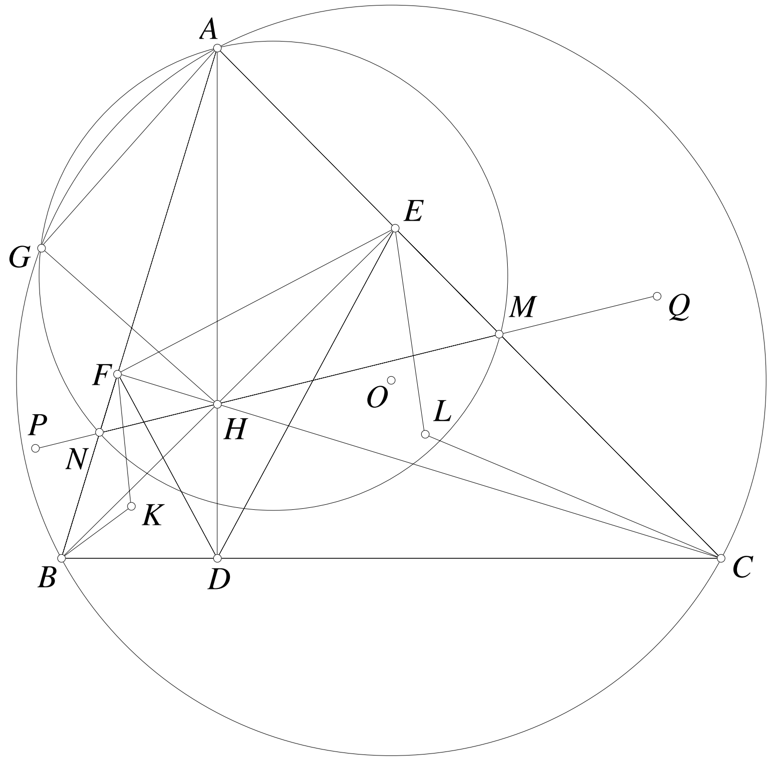


Hình 7.

Lời giải. Tương tự như lời giải thứ 2 của bài toán 3 ta có $KL \parallel PQ$ tương đương với $\dfrac{PK}{PD} = \dfrac{QL}{QD} \Leftrightarrow \dfrac{BF}{DB + DF} = \dfrac{CE}{DC + DE}$. Đẳng thức sau cùng đúng do tam giác DBF và DEC đồng dạng. Vậy bài toán được chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán được chứng minh rất ngắn gọn nhờ ý tưởng của lời giải thứ 2 cho bài toán 3. Một số hệ quả đơn giản được rút ra là PQ đi qua H và là phân giác ngoài của tam giác HBC và như vậy dễ thấy PQ vuông góc với phân giác trong góc $\angle BAC$. Nhờ nhận xét đó bài toán 5 được khai thác như sau

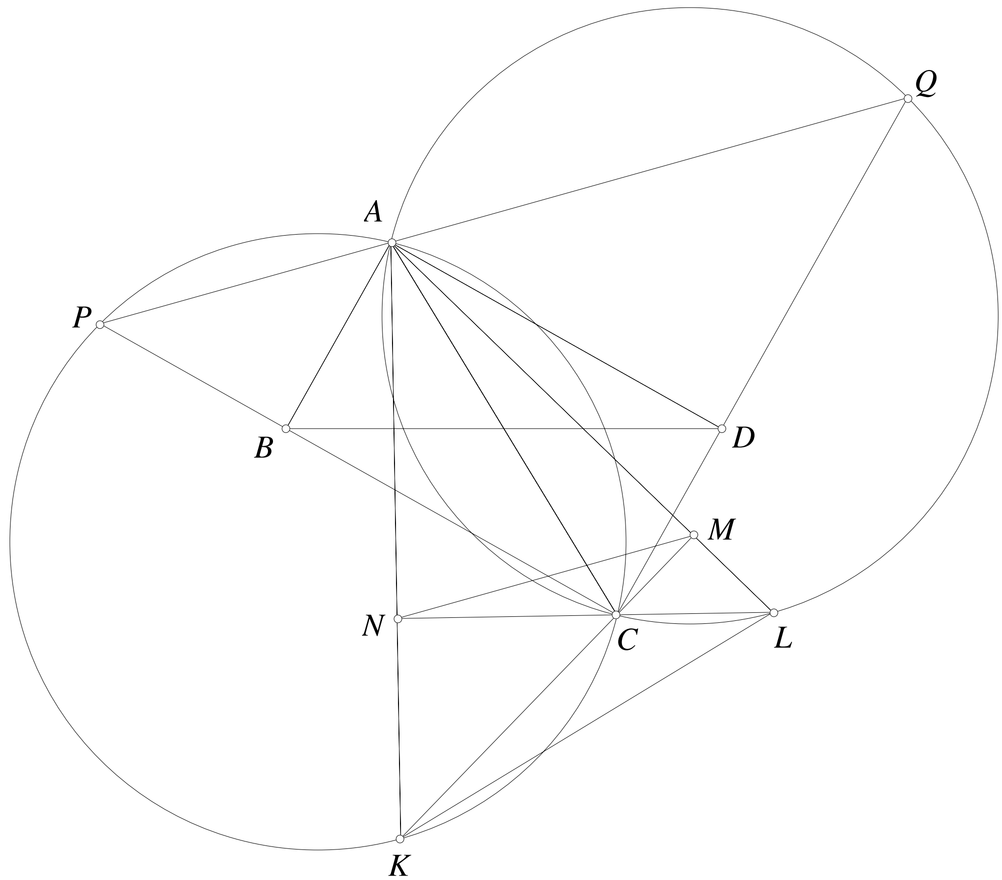
Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác FBK, ECL. Gọi PQ cắt CA, AB lần lượt tại M, N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại G khác A. Chứng minh rằng $GA \perp GH$.



Hình 8.

Bài toán là việc kết hợp bài toán 5 với bài toán chọn đội tuyển Thụy Sĩ năm 2006 [3] rất nổi tiếng. Lời giải chi tiết các bạn có thể tham khảo [3]. Bài toán 4 được khai thác một cách khác như sau

Bài toán 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có K, L là tâm bàng tiếp đỉnh A của các tam giác ABC, ACD. CB, CD lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK, ACL tại P, Q khác C. Gọi CK, CL lần lượt cắt AL, AK tại M, N. Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.



Hình 9.

Việc khai thác các tính chất khác nhau của tức giác $KBCL$ nội tiếp trong bài toán 1 sẽ cũng sẽ đưa ra nhiều được bài toán khác thú vị, tiêu biểu là bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF. Gọi $(X), (Y), (Z)$ là các đường tròn nội tiếp tam giác AEF, BFD, CDE. Gọi d_a là tiếp tuyến chung ngoài khác BC của $(Y), (Z)$. Tương tự có d_b, d_c. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy.

Hoặc một hướng mở rộng nhờ vị trí tương đối của trực tâm

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp của các tam giác của các tam giác DBE, DCF. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác HBK, HCL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

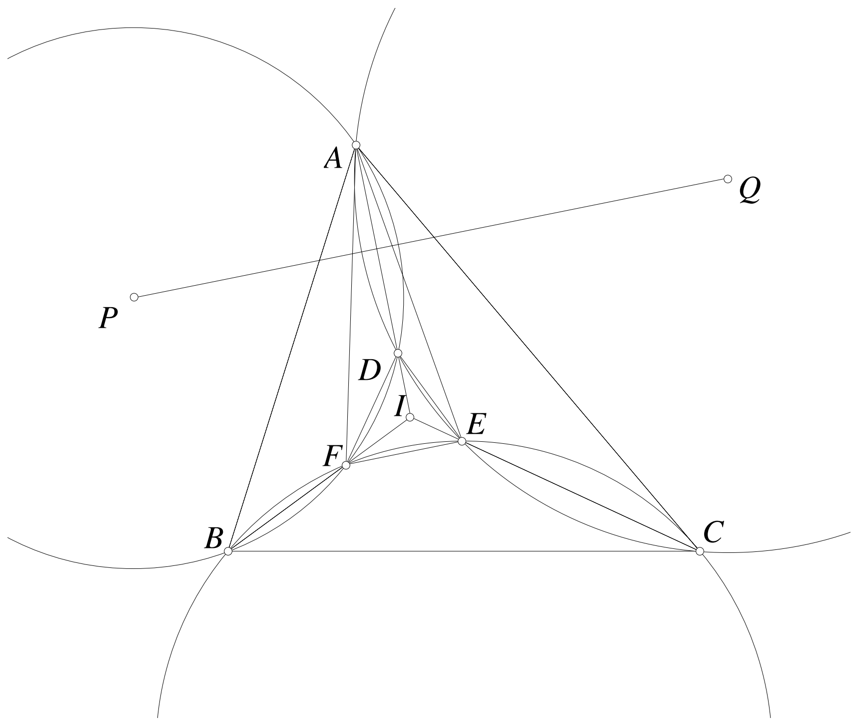
Hoặc một hướng mở rộng cho các tâm bàng tiếp như sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm bàng tiếp đỉnh D của các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác ABK, ACL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm bàng tiếp đỉnh D của các tam giác DBE, DCF. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác HBK, HCL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

Hoặc ta hoàn toàn có thể mở rộng bài toán từ sự kiện tứ giác $BKLC$ nội tiếp như sau

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Một đường tròn đi qua B, C cắt IC, IB lần lượt tại E, F. Gọi P, Q lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác ABF, ACE. Chứng minh rằng $PQ \parallel EF$.

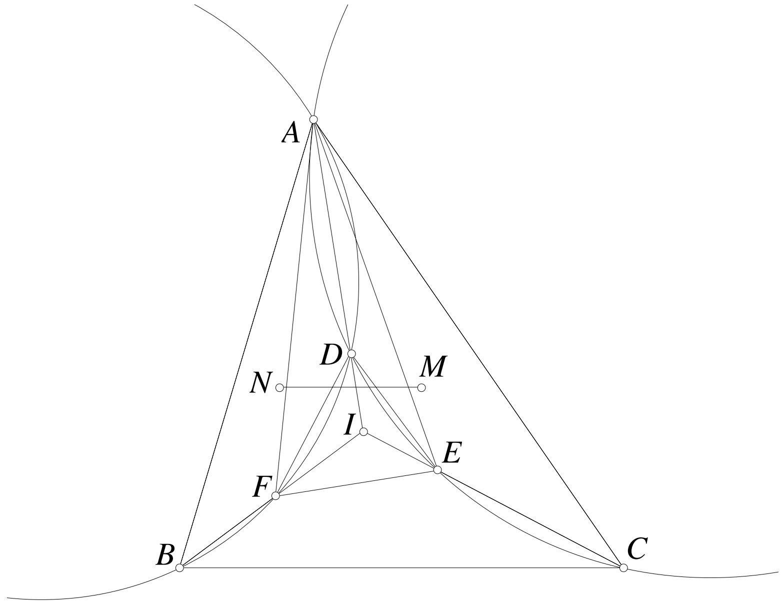


Hình 10.

Lời giải. Gọi đường tròn (P) ngoại tiếp tam giác ABF và đường tròn (Q) ngoại tiếp tam giác ACE cắt nhau tại D khác A. Theo tính chất tâm đẳng phương dễ thấy AD, BF, CE đồng quy. Nên AD đi qua I. Ta biết rằng AI đi qua tâm ngoại tiếp tam giác IBC mà tứ giác $CBEF$ nội tiếp nên $AI \perp EF$. Từ việc AI đi qua D thì $AI \perp PQ$. Từ đó $EF \parallel PQ$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán này là một mở rộng cho bài toán 1. Xung quanh nó vẫn có thể khai thác được thêm nhiều ý thú vị, chẳng hạn như bài toán sau

Bài toán 13. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. D là một điểm trên IA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB, DAC lần lượt cắt IB, IC tại F, E khác B, C. M, N đối xứng I qua DE, DF. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.



Hình 11.

Các bài toán trên đều được chứng minh không khó dựa vào các ý chứng minh trong bài viết, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] IMO Shortlist 2012, Geometry 3
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3160579

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013

[3] Topic Hard to approch it ở diễn đàn AoPS
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49p=89098

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

On two nice geometric problems

Tran Quang Hung - Hanoi Vietnam

Abstract

This article is about the extension of two geometric problems by using the power of a point and the radial axis tools and pure geometry. One was introduced on the Russian Maths Olympiad and the other occurred on the HNUE[1] High School for Gifted Students contest.

The following problem was proposed on All-Russian Mathematical Olympiad (2013, Grade 9, Day 2, Problem 3) [1]

Problem 1. Squares $CAKL$ and $CBMN$ are constructed on the sides of acuted-angled triangle ABC. Line CN intersects line AK at X. Line CL intersects line BM at Y. Point P, lying inside triangle ABC, is an intersection of circumcircles of triangles KXN and LYM. Point S is the midpoint of AB. Prove that $\angle ACS = \angle BCP$.

The following problem was presented on HNUE High School for Gifted Students contest 2014 in Vietnam [2]

Problem 2. Let ABC be not an isosceles triangle at A and $\angle BAC > 45°$. Let O be a circumcenter of triangle ABC. Constructing outside triangle ABC squares $ABKL, ACMN$. Lines AN, AL intersect CM, BK at E, F respectively. Denote P by an intersection of circumcircles of triangles LME and NFK such that P is inside triangle ABC.

a) Prove that E, F, O, P are collinear.

b) Prove that B, C, O, P are concyclic.

Comment. Those are two nice and meaningful geometric problems. We could regard square facts as the similar rectangles or similar parallelograms in general. Regarding to this idea, we are pleased to introduce the generalization of two geometric problems above.

Problem 3. Let ABC be triangle and O be its circumcenter. Constructing outside triangle ABC parallelograms $ABKL, ACMN$ such that $\triangle ABL \sim \triangle CAM$. Lines AN, AL intersect lines CM, BK at E, F respectively. Let P be intersection of circumcircles of triangles LME and NFK and P is inside triangle ABC. Prove that B, C, O, P are concyclic.

Solution. Let line KB intersect line CM at G. Because of $\triangle ABL \sim \triangle CAM$, it is easily seen that $\angle ABK + \angle ACM = 180°$. Therefore G lies on circumcircle (O) of triangle ABC. Clearly, quadrilateral $AFGE$ is parallelogram so $\angle AFG = 180° - \angle FGE = \angle BAC$. We also have inscribed angles $\angle AGF = \angle ACB$ so $\triangle AFG \sim \triangle BAC$. Deducing $AC.FA = AB.FG = AB.AE$. In the same way as similar triangles $\triangle ABL \sim \triangle CAM$, it is easily be seen that $AC.AL = AB.AN$. From that, we obtain $\dfrac{AF}{AL} = \dfrac{AE}{AN}$ or $AL.AE = AF.AN$. Thus A belongs to the radical axis of circumcircles of triangles LME and NFK.

[1] Hanoi National University of Education

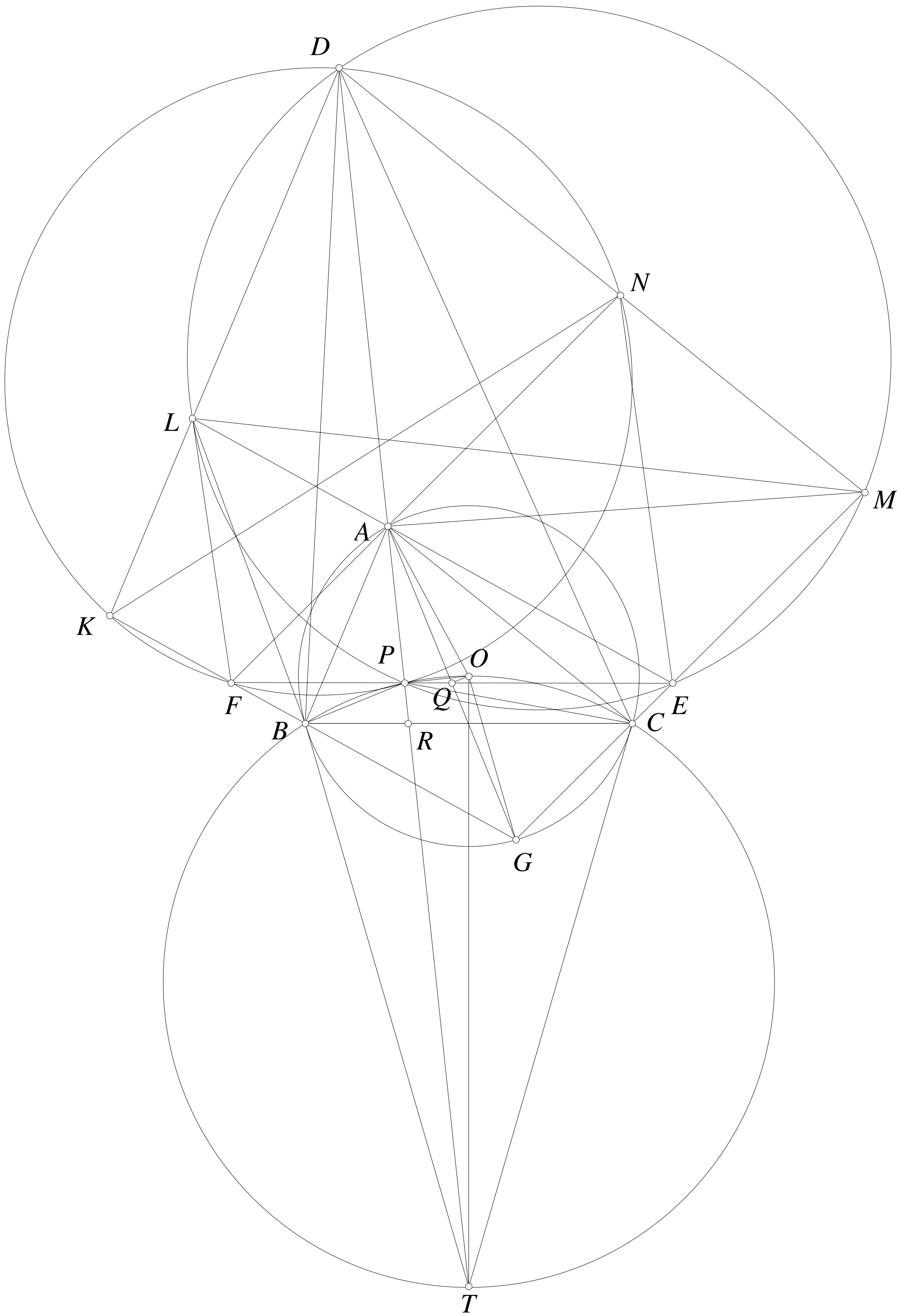


Figure 1.

Let line KL intersects line MN at D, we have $\angle DNF = 180^\circ - \angle ANM = 180^\circ - \angle FKL$ which implies that point D belongs to the circumcirle of triangle NFK. Similarly, D belongs to the circumcircle of triangle LME. Therefore, DP is the radical axis of circumcenters of triangles LME and NFK. We infer point A lies on line DP. Note that $DMEP$ and $DKEP$ are quadrilaterals inscribed in the circles, we get $\angle APF + \angle APE = \angle DME + \angle DKF = 180°$. Thus P lies on EF.

Let Q be a midpoint of AG. Obviously, $\angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOG = \angle ACG = \angle AMC = 180° - \angle DPE = 180° - \angle APQ$. Therefore, the quadrilateral $APQO$ is concyclic, which $OQ \perp AQ$. We imply $AP \perp OP$.

Denote R by an intersection of lines AP and BC, it is easy to prove that $\frac{RB}{RC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{LAB}}{S_{LAC}} = \frac{AL.AB}{AN.AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Consequently, AP is symmedian of triangle ABC. Thus, AP passes through the intersection of tangents to (O) at B, C, we call T. Since $OP \perp AP$, it is plain that points O, P, B, C lie on the circle of diameter OT. The proof is complete. □

Comment. When the parallelograms are squares, we obtain results of those two geometric problems. It could be seen to infer B, C, O, P be concyclic, we have to prove AP is symmemdian as in first problem and point P lies on EF as part a) of the second problem. In this problem, point P is essentially fixed and does not depend on the way of choosing parallelograms because it is the projection of circumcenter O on the $A-$symmedian line. The projection of circumcenter O on the symmedian line is a special point inside triangle and is useful. For instance, it is the center of the homothety taking segment CA to segment AB. We will discover others nice geometric problems if we exploit the extension of the problem. Let's practice the following problems.

Problem 4. Let ABC be not an isosceles triangle at A. Constructing outside triangle ABC similar rectangles $ABKL, ACMN$. Lines AN, AL intersects lines CM, BK at E, F respectively. Let P be an intersection of circumcircles of triangles LME and NFK such that P is inside triangle ABC. Line KN intersect line LM at Q. Prove that $\angle PAB = \angle QAC$.

References

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3067570

[2] http://diendantoanhoc.net/forum/

Tran Quang Hung - Hanoi Vietnam
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hình học hay như sau

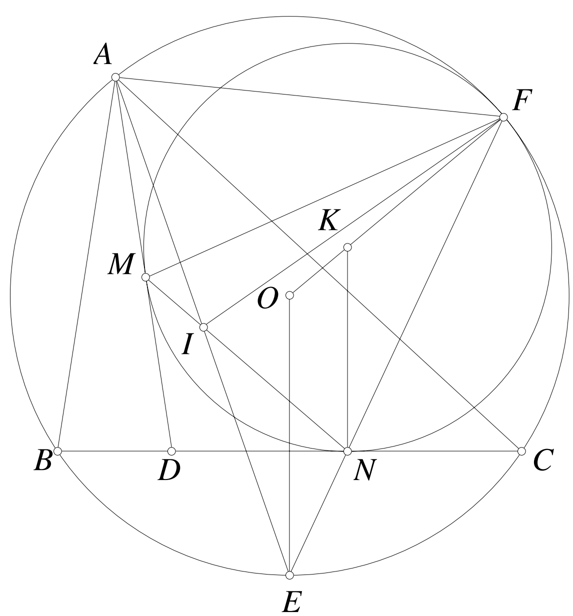
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) lấy điểm D. Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F. Gọi (K) đường tròn nằm trong tam giác EBD, tiếp xúc với EB, ED và tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi (L) là tâm đường tròn nằm trong tam giác FCD, tiếp xúc với FC, FD và tiếp xúc với đường tròn (O).

a) Gọi M là tiếp điểm của (K) với BE và N là tiếp điểm của (L) với CF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi qua một điểm cố định khi D di chuyển

b) Đường thẳng qua M và song song với CE cắt AC ở P, đường thẳng qua N và song song với BFcắt AB ở Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP, ANQ cùng tiếp xúc với một đường tròn cố định khi D di chuyển.

Bài toán này nếu ai đã quen thuộc với định lý Sawayama và Thébault và các mở rộng của nó thì khá đơn giản. Để tìm hiểu bài toán cũng như mở rộng của nó ta sẽ tìm hiểu lại định lý Sawayama và Thébault cùng với các mở rộng

Bài toán 2 (Định lý Sawayama và Thébault)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



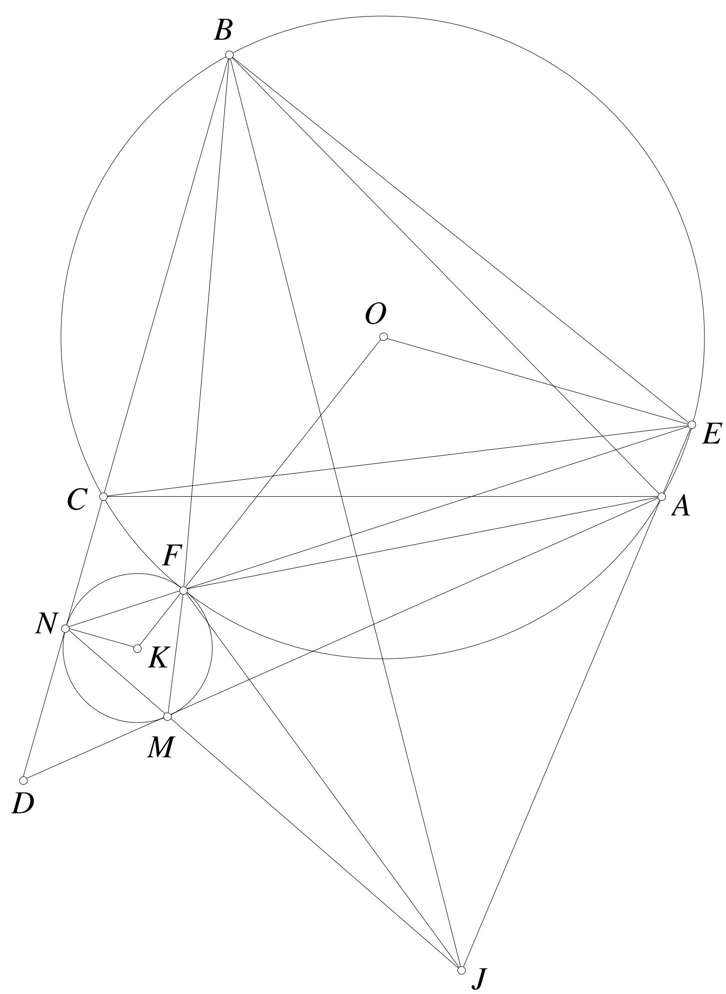
Hình 1.

Lời giải. Gọi phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại I. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FAE$ suy ra tứ giác $AFIM$ nội tiếp. Suy ra $\angle IFN = \angle MFN - \angle MFI = \angle DMN - \angle MFI = \angle AFI - \angle MFI = \angle AFM = \angle AIM = \angle EIN$. Từ đó $\triangle EIN \sim \triangle EFI$ suy ra $EI^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Lời giải trên là một trong những cách tiếp cận nhanh gọn nhất cho định lý Sawayama và Thébault. Bài toán phát biểu trên tâm nội tiếp hẳn nhiên sẽ có cách phát biểu trên tâm bàng tiếp, ta tìm hiểu phát biểu sau

Bài toán 3 (Định lý Sawayama và Thébault mở rộng)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc tia đối tia CB. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc ngoài (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC.



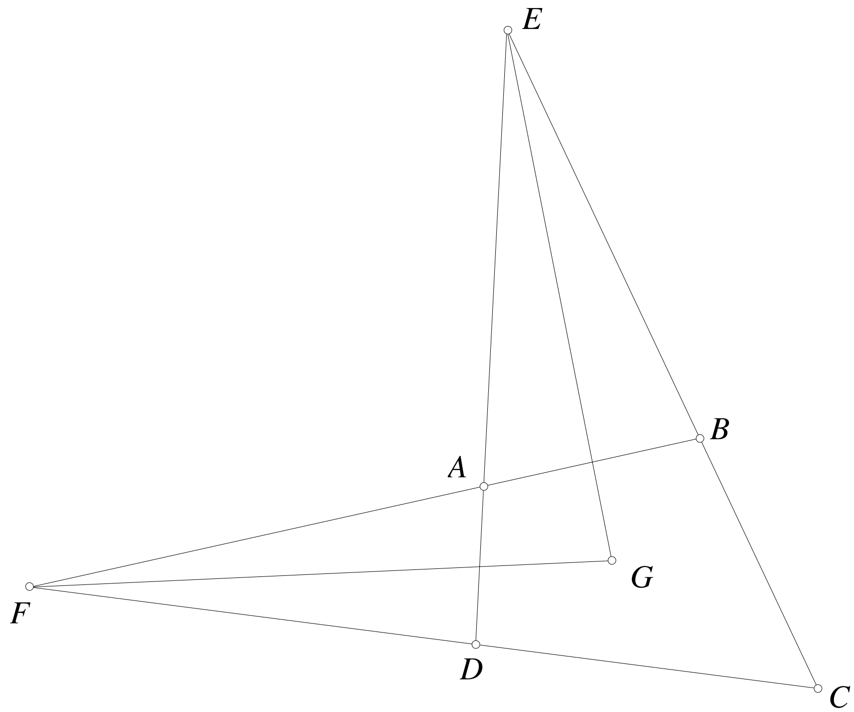
Hình 2.

Lời giải. Gọi phân giác ngoài tại đỉnh A cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại J. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FBE = \angle FAJ$ suy ra tứ giác $AFMJ$ nội tiếp. Suy ra $\angle EFJ = 180^\circ - \angle NFJ = 180^\circ - \angle NFM - \angle MFJ = 180^\circ - \angle JMA - \angle MAJ = \angle MJA$. Từ đó $\triangle EFJ \sim \triangle EJN$ suy ra $EJ^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra J là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

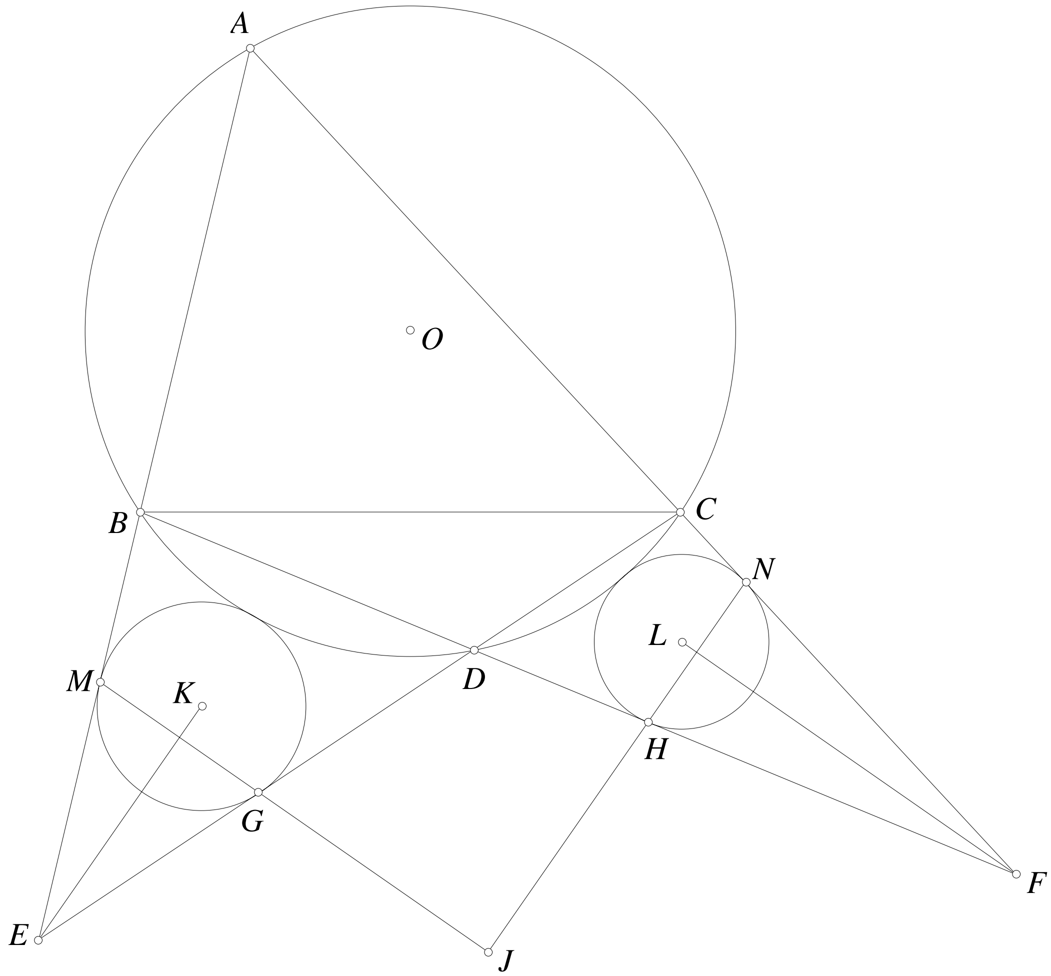
Để giải quyết bài toán 1 và mở rộng nó ta cần thêm một bài toán cơ bản sau

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử tia BA giao tia CD tại E, tia DA giao CB tại F. Phân giác góc $\angle E, \angle F$ cắt nhau tại G. Chứng minh rằng $2\angle G = \angle A + \angle C$.



Hình 3.

Bài toán trên rất đơn giản xin không trình bày cách chứng minh. Trở lại bài toán 1



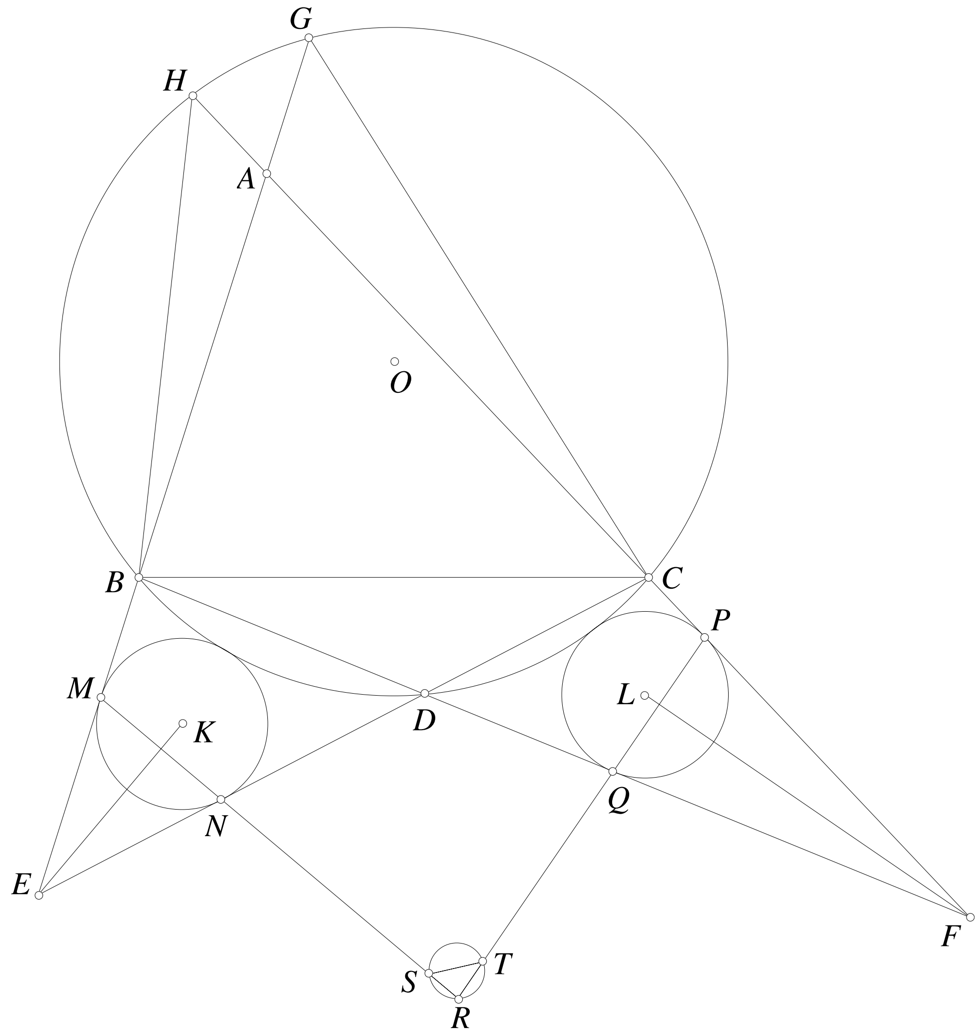
Hình 4.

Lời giải bài toán 1. a) Gọi (K) tiếp xúc ED tại G và (L) tiếp xúc FD tại H. Theo bài toán 3 thì MG, NH đi qua tâm bàng tiếp J ứng với đỉnh A. Theo bài toán 4 góc tạo bởi $(EK, LF) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D) = 90°$ do đó $EK \perp LF$. Lại dễ có $MG \perp EK \perp LF \perp NH$ từ đó MG vuông góc NH tại J nên đường tròn đường kính MN đi qua J cố định.

b) Dễ thấy tam giác EMG cân nên MJ cũng là phân giác ngoài tam giác AMP nên J cũng là tâm bàng tiếp góc A của tam giác AMP. Giả sử đường tròn (R) tiếp xúc với CA, AB tại Y, Z và tiếp xúc ngoài (O) thì tâm bàng tiếp J của tam giác ABC là trung điểm YZ. Do J là tâm bàng tiếp của AMP nên đường tròn (R) tiếp xúc AP, AM tại Y, Z cũng tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP luôn tiếp xúc (R) cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ý tưởng chính chứng minh bài toán 1 rõ ràng sáng sủa và ngắn gọn như vậy là của Nguyễn Văn Linh sinh viên đại học ngoại thương. Câu b) tiếp cận theo hướng trong lời giải xem ra khá đơn giản. Ta thử tập trung vào khai thác ý a). Câu a) nói lên MG, NH đi qua J cố định. Bài toán có thể được mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC một đường tròn (O) bất kỳ cố định đi qua B, C. D là điểm di chuyển trên (O) sao cho A, D khác phía BC. Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F. Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc EB, ED lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Gọi (L) là đường tròn tiếp xúc FC, FD lần lượt tại P, Q và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng giao điểm của MN, PQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi D di chuyển.

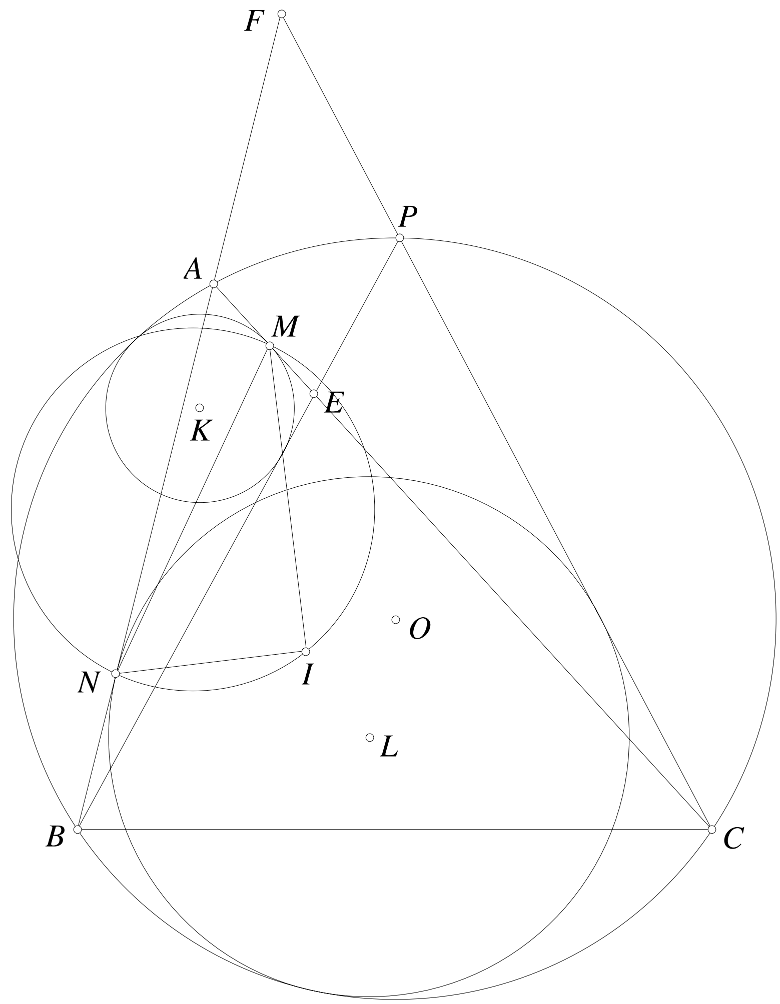


Hình 5.

Lời giải. Gọi AB, AC lần lượt cắt (O) tại G, H khác B, C. Áp dụng bài toán 3 vào tam giác GBC, HBC thì MN đi qua tâm bàng tiếp S ứng với đỉnh G của tam giác BGC cố định và PQ đi qua tâm bàng tiếp T ứng với đỉnh H của tam giác HBC cố định. Gọi MN cắt PQ tại R chú ý $EK \perp MN, FL \perp PQ$, theo bài toán 4 thì $\angle R = \angle(EK, KL) = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle D)$ vì (O) cố định nên $\angle D$ không đổi. Từ đó $\angle R$ không đổi và S, T cố định nên R thuộc đường tròn cố định đi qua S, T. $\square$

Nhận xét. Với ý tưởng thay đường tròn ngoại tiếp thành đường tròn bất kỳ đi qua B, C ta đã thu được một bài toán mới rất thú vị. Ngoài ra bài toán TST của chúng ta đã phát biểu trên định lý Sawayama và Thébault mở rộng. Ta hoàn toàn có thể có bài toán tương tự trên định ký Sawayama và Thébault gốc như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, EB và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn FB, FC và tiếp xúc $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). (K) tiếp xúc AC tại M và (L) tiếp xúc AB tại N. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi một điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 6.

Từ bài toán mở rộng ta hoàn toàn có thể đề xuất bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và đường tròn (O) cố định đi qua B, C. D là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ của (O) sao cho D, A cùng phía BC. DB, DC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, EB tại M, N và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn FB, FC tại P, Q và tiếp xúc (O) tại một điểm không cùng phía A so với BC. Chứng minh rằng giao điểm của MN và PQ luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.

Các bạn hãy làm bài toán trên như một bài luyện tập và còn rất nhiều khám phá mới vẫn còn đợi các bạn xung quanh các bài toán này

Tài liệu

[1] Vietnam TST bài 3 http://diendantoanhoc.net/form

[2] Nguyễn Thị Hường, Lương Ánh Nguyệt, Lương Thị Thanh Mai, Đào Thị Quỳnh Nga, Định lý Sawayama và Thébault http://analgeomatica.blogspot.com/2014/02/inh-ly-sawayama-va-thebault.html

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 2 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hình học như sau

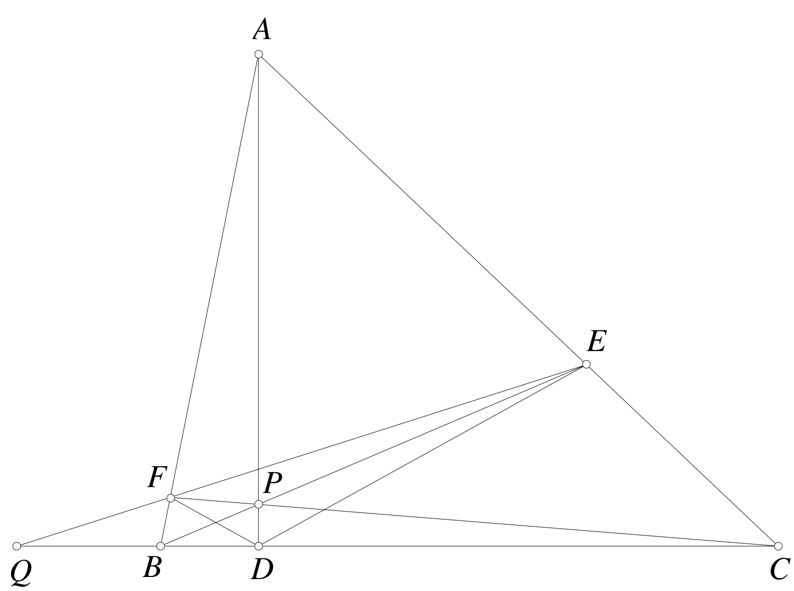
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn không cân đường cao AD và P thuộc AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F.

a) Giả sử tứ giác $AEDF$ nội tiếp. Chứng minh rằng $\dfrac{PA}{PD} = (\tan B + \tan C)\cot\dfrac{A}{2}$.

b) Gọi CP cắt đường thẳng qua B vuông góc AB tại M. BP cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. K là hình chiếu của A lên MN. Chứng minh rằng $\angle BKC + \angle MAN$ không đổi khi P di chuyển.

Hai câu a) và b) của bài toán không liên quan tới nhau. Ta sẽ tách riêng thành hai bài toán và phân tích từng bài toán một. Câu a) phát biểu điều kiện dưới dạng một biểu thức lượng giác như vậy không đẹp, ta hoàn toàn có thể có một hệ thức lượng thuần túy hình học của câu a). Ta xét bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn không cân đường cao AD và P thuộc AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Chứng minh rằng nếu tứ giác $AEDF$ nội tiếp thì $\dfrac{AD}{PD} = \dfrac{AB.AC + AD^2}{DB.DC}$.



Hình 1.

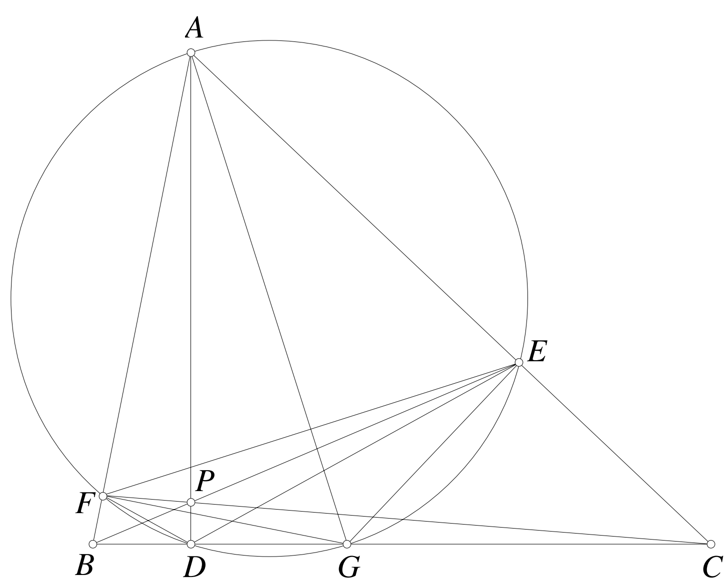
Lời giải 1. Gọi EF cắt BC tại Q. Ta có hàng điều hòa cơ bản $(BC, DQ) = -1$ lại có $DA \perp DQ$ nên DA là phân giác $\angle EDF$. Từ đó với tứ giác $AEDF$ nội tiếp ta dễ suy ra $AE = AF$. Theo định lý Ceva $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$ suy ra $\frac{EC}{FB} = \frac{DC}{DB}$. Ta lại dễ có $AC - AB = AE + EC - AF - FB = EC - FB$. Từ tỷ số và hiệu của EC, FB ta dễ suy ra $EC = \frac{(AC-AB)DB}{DC-DB}, FB = \frac{(AC-AB)DC}{DC-DB}$ và $AE = AF = AB - FB = \frac{AB.DC - AC.DB}{DC - DB}$.

Từ đó theo hệ thức Van Aubel thì

$$\frac{PA}{PD} = \frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{AB.DC - AC.DB}{DC(AC-AB)} + \frac{AB.DC - AC.DB}{DB(AC-AB)}$$
$$= \frac{AB}{AC-AB} - \frac{AC.DB}{DC(AC-AB)} + \frac{AB.DC}{DB(AC-AB)} - \frac{AC}{AC-AB}$$
$$= \frac{AB.DC^2 - AC.DB^2}{DB.DC(AC-AB)} - 1$$
$$= \frac{AB(AC^2 - AD^2) - AC(AB^2 - AD^2)}{DB.DC(AC-AB)} - 1$$
$$= \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC} - 1$$

Từ đó suy ra $\frac{AD}{PD} = 1 + \frac{PA}{PD} = \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ áp dụng hệ thức lượng giác cơ bản ta có $\frac{PA}{PD} = \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC} - 1 = \frac{1}{\cos B \cos C} + \tan B.\tan C - 1$. Không khó để kiểm tra đẳng thức $\frac{1}{\cos B \cos C} + \tan B.\tan C - 1 = (\tan B + \tan C)\cot\frac{A}{2}$, từ đó mục đích ban đầu của bài toán được thực hiện. Tuy nhiên việc biến đổi thuần túy hệ thức lượng theo các cạnh không làm ta nhìn rõ bản chất hình học của bài toán này. Chúng ta xét hướng tiếp cận khác câu a) bài toán 1 của tác giả Nguyễn Văn Linh



Hình 2.

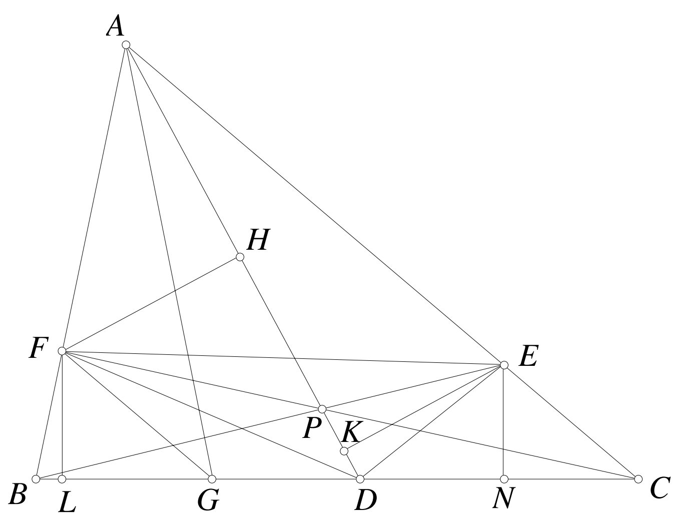
Lời giải 2. Tương tự phần trước ta đã có DA là phân giác $\angle EDF$ nên $AE = AF$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDF$ cắt BC tại G khác D. Dễ có DG là phân giác ngoài tại đỉnh D nên $GE = GF$ do đó $\triangle AGE = \triangle AGF$ nên AG là phân giác $\angle BAC$. Từ đó theo định lý Van Aubel $\frac{PA}{PD} = \frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{FA}{GF}.\frac{GF}{FB} + \frac{EA}{GE}.\frac{GE}{EC} = \cot\frac{A}{2}\tan B + \cot\frac{A}{2}.\tan C = (\tan B + \tan C)\cot\frac{A}{2}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc dựng thêm điểm G làm ta đi đến hệ thức lượng nhanh chóng xong điều đó không ý nghĩa bằng ta có nhận xét E, F chính là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADG với CA, AB. Điều này cho ta liên tưởng tới bài toán sau đã có trong Shortlist năm 1994 và lời giải có trong [2]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có phân giác AD. E, F là hình chiếu của D lên CA, AB. BE giao CF tại P. H là hình chiếu của P lên BC. Chứng minh rằng HP là phân giác $\angle EHF$.

Tuy vậy quan trọng hơn cách làm này cho ta một ý tưởng tổng quát bài toán phần a) này như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H, K là hình chiếu của F, E lên AD và L, N là hình chiếu của F, E lên BC. Chứng minh rằng $\frac{PA}{PD} = \frac{FH}{FL}.\frac{DA}{DB} + \frac{EK}{EN}.\frac{DA}{DC}$.



Hình 3.

Cách chứng minh sử dụng định lý Van Aubel tương tự. Chú ý khi AD là đường cao và $AEDF$ nội tiếp ta dễ thấy $\frac{FH}{FL} = \frac{EK}{EN} = \cot\frac{A}{2}$ và $\frac{DA}{DB} = \tan B, \frac{DA}{DC} = \tan C$, như vậy ta thu được bài toán ban đầu.

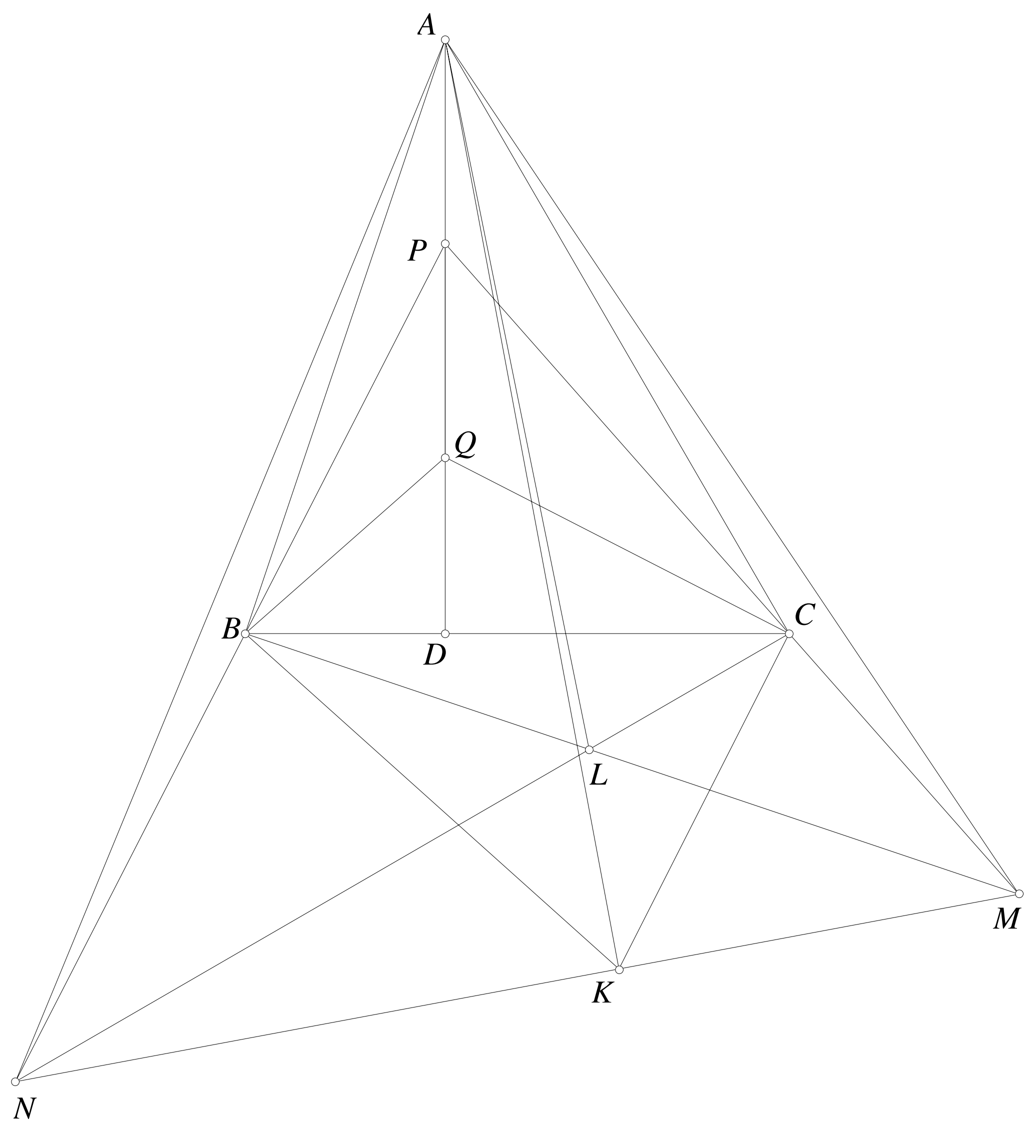
Trở lại phần b) bài toán. Vì phần b) xem ra quá đơn giản nên tôi xin đề xuất thêm một vài ý khác từ mô hình này, ta xét bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC đường cao AD. P di chuyển trên AD. PB, PC lần lượt cắt các đường thẳng qua C vuông góc CA và qua B vuông góc AB tại N, M. Gọi K là hình chiếu của A lên MN.

a) Chứng minh rằng $\angle MAN + \angle BKC$ không đổi khi P di chuyển.

b) Chứng minh rằng $\angle MAC = \angle NAB$.

c) Chứng minh rằng KA là phân giác $\angle BKC$.



Hình 4.

Lời giải. a) Gọi BM giao CN tại L thì L cố định. Ta chú ý các tứ giác $ACKN, ABKM$ nội tiếp ta có $\angle MAN + \angle BKC = \angle MAK + \angle NAK + \angle BKC = \angle MBK + \angle NCK + \angle BKC = \angle BLC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi Q là trực tâm tam giác PBC ta có $\angle NBC = 180^\circ - \angle PBC = \angle AQC$ và $\angle QAC = 90^\circ - \angle ACD = \angle BCN$. Từ đây suy ra $\triangle BCN \sim \triangle QAC$ suy ra $\dfrac{CA}{CN} = \dfrac{QA}{BC}$. Tương tự $\dfrac{BA}{BM} = \dfrac{QA}{BC}$.

Từ đó $\dfrac{CA}{CN} = \dfrac{BA}{BM}$ suy ra các tam giác vuông $\triangle CAN \sim \triangle BAM$ suy ra $\angle BAM = \angle CAN$ hay $\angle CAM = \angle BAN$. Ta có điều phải chứng minh.

c) Ta dễ có các góc ngoài bằng nhau $\angle CKM = \angle CAN = \angle BAM = \angle BKN$ từ đây dễ suy ra $\angle CKA = \angle BKA$ hay KA là phân giác $\angle BKC$. Ta có điều phải chứng minh. □

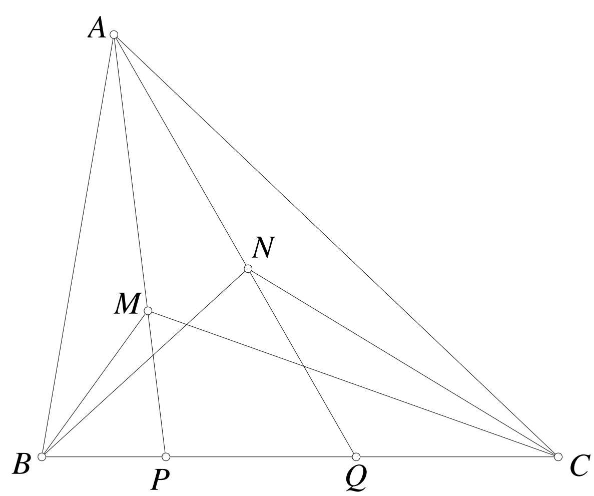
Nhận xét. Rõ ràng ý chứng minh phần a) quá đơn giản. Phần b) thực chất cũng là một bài toán đẳng giác quen thuộc. Tuy nhiên việc chỉ KA là phân giác $\angle BKC$ ở phần c) là một ý thú vị. Bài toán cho thấy MN là phân giác ngoài góc $\angle BKC$. Hay trung trực BC cắt MN tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BKC.

Ý b) của bài toán 5 cũng có thể mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F cố định thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. P, Q lần lượt thuộc AE, AF. PB, PC lần lượt cắt QC, QB tại N, M. Chứng minh rằng $\angle MAB = \angle NAC$.

Ta cần có một bổ đề

Bổ đề 6.1. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N bất kỳ cùng nằm trong hoặc cùng nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng $\angle MAB = \angle NAC$ khi và chỉ khi $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.



Hình 5.

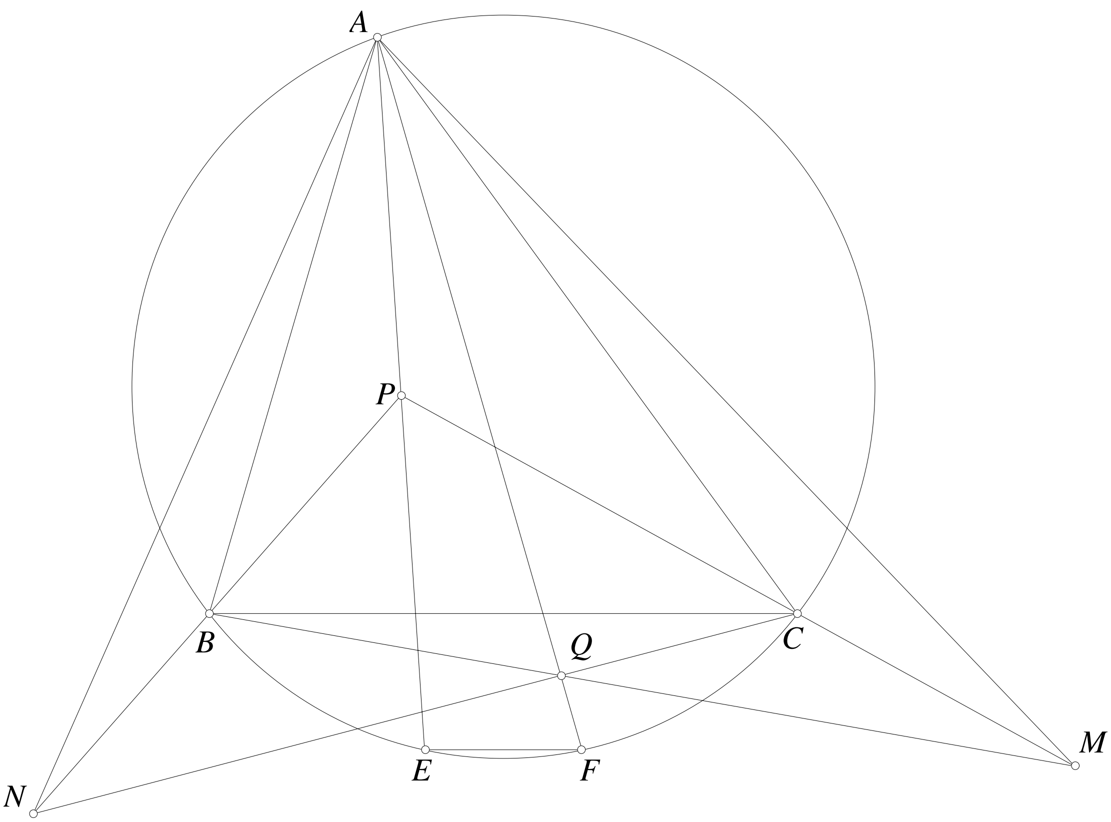
Chứng minh. Trường hợp M, N cùng nằm trong tam giác.

Nếu $\angle MAB = \angle NAC$. Áp dụng tính chất về diện tích tam giác có hai góc bằng nhau ta có $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{[NAB]}{[MAC]}.\dfrac{[MAB]}{[NAC]} = \dfrac{AB.AN}{AM.AC}.\dfrac{AB.AM}{AN.AC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Ta có điều phải chứng minh.

Nếu $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Gọi AM, AN cắt đoạn BC tại P, Q. Suy ra $\dfrac{QB}{QC}.\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Gọi P' là điểm thuộc BC sao cho $\angle P'AB = \angle QAC$. Theo phần trên thì $\dfrac{QB}{QC}.\dfrac{P'B}{P'C} =$

$\frac{[QAB]}{[QAC]}.\frac{[P'AB]}{[P'AC]} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Từ đó suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{P'B}{P'C}$ vậy $P' \equiv P$ vậy $\angle PAB = \angle QAC$ hay $\angle MAB = \angle NAC$. Ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp M, N nằm ngoài tam giác ta chứng minh tương tự. □



Hình 6.

Lời giải. Áp dụng bổ đề ta phải chứng minh rằng $\frac{[NAB]}{[NAC]}.\frac{[MAB]}{[MAC]} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Thật vậy ta có

$$\frac{[NAB]}{[NAC]}.\frac{[MAB]}{[MAC]} = (\frac{[NAB]}{[PAB]}.\frac{[PAB]}{[PAC]}.\frac{[PAC]}{[NAC]}).(\frac{[MAB]}{[QAB]}.\frac{[QAB]}{[QAC]}.\frac{[QAC]}{[MAC]})$$
$$= \frac{BN}{BP}.\frac{BM}{BQ}.(\frac{[PAC]}{[NAC]}.\frac{[QAC]}{[MAC]}).(\frac{[PAB]}{[PAC]}.\frac{[QAB]}{[QAC]})$$
$$= \frac{BN}{BP}.\frac{BM}{BQ}.\frac{CP}{CM}.\frac{CQ}{CN}.\frac{AB^2}{AC^2}.$$

Vậy ta sẽ chứng minh rằng $\frac{BN}{BP}.\frac{BM}{BQ}.\frac{CP}{CM}.\frac{QC}{QN} = 1$.

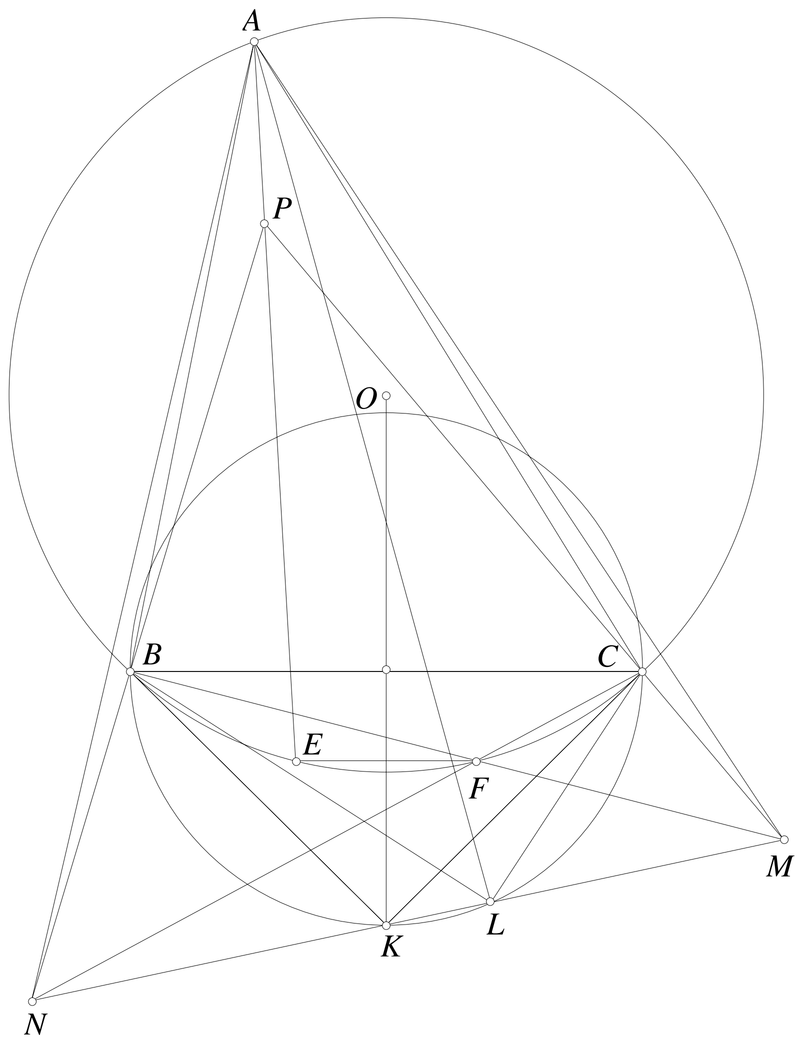
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CPN với Q, B, M thẳng hàng ta có $\frac{BN}{BP}.\frac{MP}{MC}.\frac{QC}{QN} = 1$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CQM với P, B, N thẳng hàng ta có $\frac{PC}{PM}.\frac{BM}{BQ}.\frac{NQ}{NC} = 1$.

Nhân hai đẳng thức trên cho ta $\frac{BN}{BP}.\frac{BM}{BQ}.\frac{CP}{CM}.\frac{CQ}{CN} = 1$. Vậy đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ý tưởng chính trong chứng minh là của Lê Thị Hải Linh học sinh lớp 11 chuyên toán Bắc Ninh. Với bài toán này ta có thể tiếp tục mở rộng ý c) của bài toán 5 như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F cố định thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. P di chuyển trên AE. PB, PC lần lượt cắt FC, FB tại N, M. Trung trực BC cắt MN tại K. Chứng minh rằng $\angle MAN + \angle BKC$ không đổi khi P di chuyển.



Hình 7.

Lời giải. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN và ABM cắt nhau tại L khác A. Ta có $\angle ALM + \angle ALN = \angle ABM + \angle ACN = 180^\circ$ suy ra L nằm trên MN. Theo bài toán 6 đã có $\angle NAC = \angle MAB$ suy ra $\angle CLM = \angle NAC = \angle MAB = \angle BLN$ vậy MN là phân giác ngoài tại đỉnh L của tam giác LBC. Từ đó trung trực BC cắt MN tại K thì K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC. Vậy $\angle MAN + \angle BKC = \angle MAL + \angle NAL + \angle BLC = \angle MBL + \angle NCL + \angle BLC = \angle BFC = 180^\circ - \angle BAC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tài liệu

[1] Vietnam TST bài 4 http://diendantoanhoc.net/form

[2] IMO Shortlist 1994, G1 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=352892

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về bài toán hình học IMO 2003

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học IMO năm 2003 với các công cụ hình học thuần túy và ứng dụng với lượng giác.

Năm 2003 trong cuộc thi IMO có bài toán hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $PQ = QR$ khi và chỉ khi phân giác $\angle ABC$ và $\angle ADC$ đồng quy với AC.

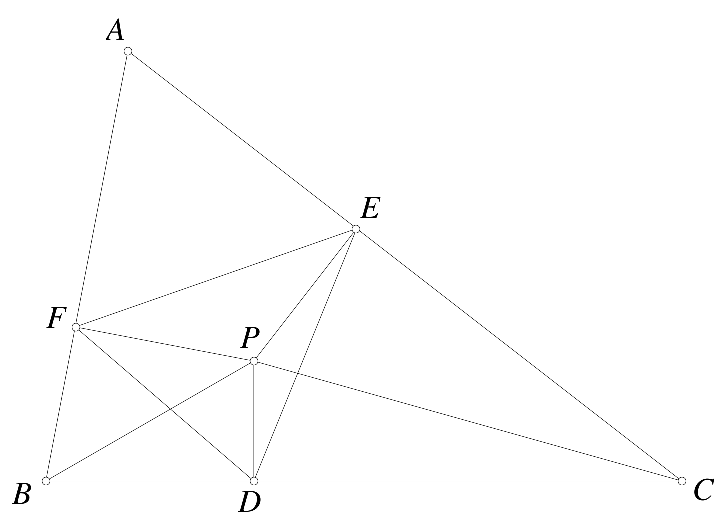
Bài toán trên là bài toán số 4 là một bài ở mức dễ trong kỳ thì. Bài toán là một phát biểu đẹp và có nhiều ý nghĩa. Trong lời giải của shortlist [2] năm đó cũng đã đề xuất một hướng tổng quát hơn như sau

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\dfrac{QP}{QR} = (AC, DB) = \dfrac{DA}{DC} : \dfrac{BA}{BC}$

Tôi xin đề xuất một hướng tổng quát hơn nữa cho bài toán này như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{PB}{PC} : \dfrac{AB}{AC}$.

Bài toán tuy tổng quát như có một lời giải khá đơn giản



Hình 1.

Lời giải. Ta chú ý PB, PC là đường kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác DBE, DCF, áp dụng định lý hàm số sin ta có $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{PB.\sin B}{PC.\sin C} = \dfrac{PB}{PC} : \dfrac{AB}{AC}$. □

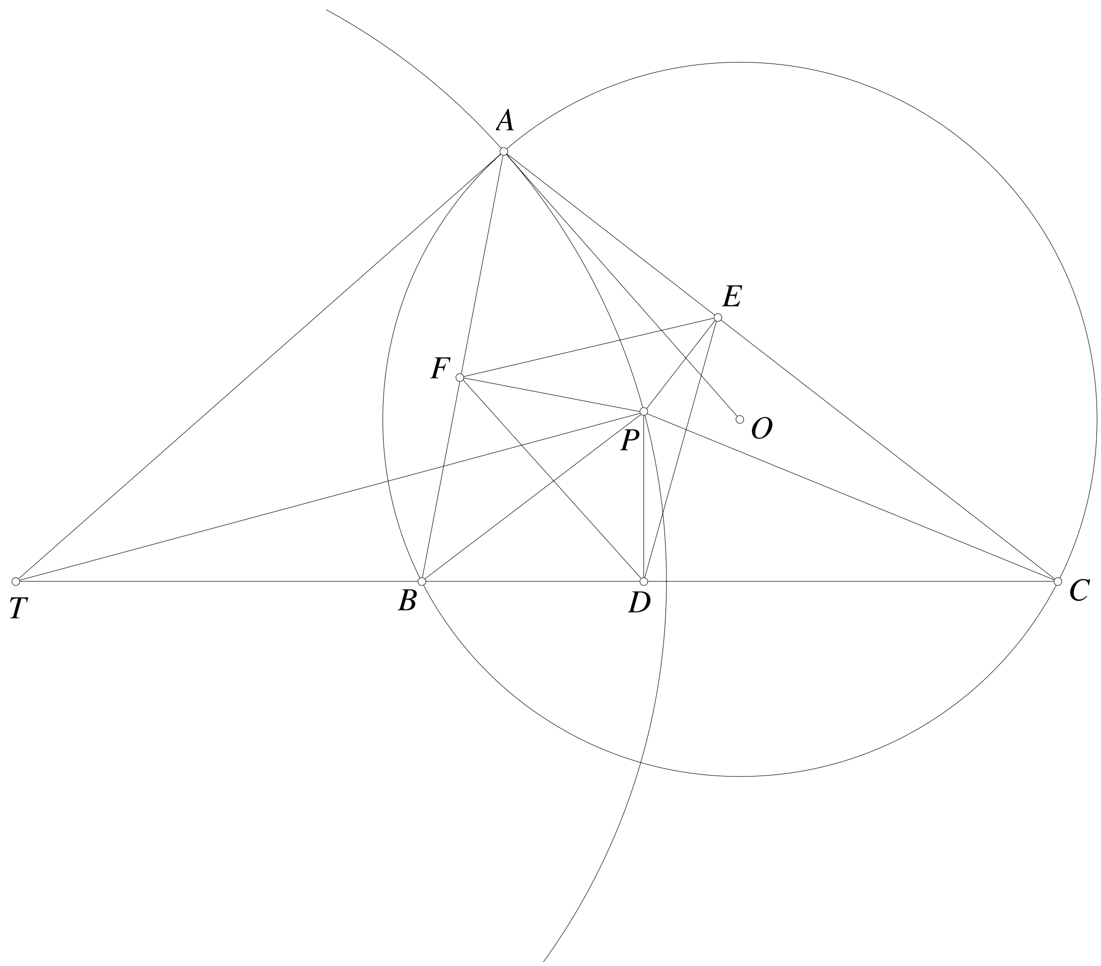
Nhận xét. Ta cũng có thể viết kết quả bài toán dưới dạng tỷ lệ thức như sau $\dfrac{PA.BC}{EF} = \dfrac{PB.CA}{FD} = \dfrac{PC.AB}{DE}$. Bài toán tổng quát xem ra hết sức đơn giản xong nó mang lại nhiều ứng dụng khá thú vị, tiêu biểu là ta xét lại ý tưởng trong bài IMO ta đề xuất bài toán sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. P là một điểm bất kỳ và D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng các khẳng định sau là tương đương

a) $TP = TA$

b) Phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy.

c) $DE = DF$.



Hình 2.

Lời giải. Từ a) suy ra b), ta chú ý $TP = TA$ thì T thuộc (T, TA) là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC suy ra $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{AB}{AC}$ suy ra phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy.

b) suy ra c), ra phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy suy ra $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{AB}{AC}$ theo bài toán 3 đã có $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{PA}{PB} : \dfrac{AB}{AC} = 1$ vậy $DE = DF$.

c) suy ra a), cũng từ bài toán 3 $\dfrac{PA}{PB} : \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF} = 1$ suy ra P thuộc là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC suy ra $TP = TA$.

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

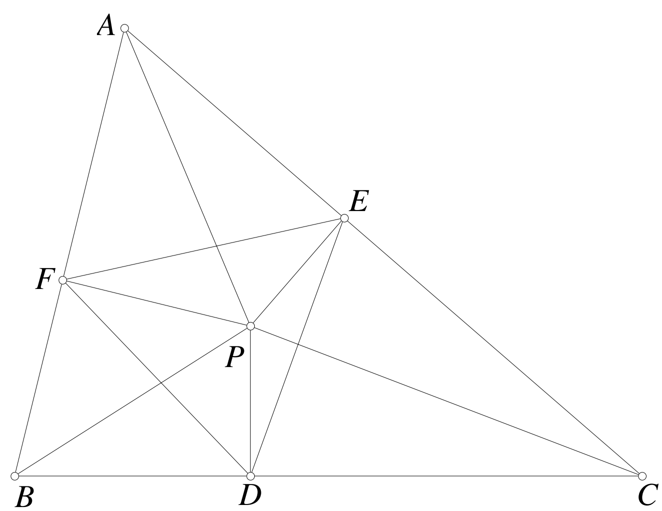
Nhận xét. Bài toán có thể hiểu đơn giản hơn là tam giác DEF cân tại D khi và chỉ khi P nằm trên đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC. Ta lại biết rằng ba đường tròn Apollonius ứng với ba đỉnh của tam giác ABC luôn có hai điểm chung gọi, vậy tam giác DEF đều khi và chỉ khi P trùng với một trong hai điểm đó. Từ đó ta đề xuất bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tồn tại đúng hai vị trí của P để tam giác DEF là tam giác đều.

Ta đi đến một ứng dụng khác như sau có thể coi là một mở rộng của định lý hàm số sin

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và P bất kỳ nằm trong tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \frac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \frac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}.$$



Hình 3.

Lời giải. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Theo định lý hàm số sin cho tam giác DEF ta có $\dfrac{EF}{\sin\widehat{EDF}} = \dfrac{FD}{\sin\widehat{FED}} = \dfrac{DE}{\sin\widehat{EFD}}$ (1).

Theo bài toán 3 ta lại có $\dfrac{PA.BC}{EF} = \dfrac{PB.CA}{FD} = \dfrac{PC.AB}{DE}$ (2).

Ta lại có $\angle EDF = \angle EDP + \angle FDP = \angle ECP + \angle FBP = 180^\circ - \angle PAC - \angle PAC + 180^\circ - \angle PAB - \angle PAB = \angle BPC - \angle A$. Tương tự $\angle FED = \angle CPA - \angle B, \angle EFD = \angle APB - \angle C$ (3)

Từ (1),(2) và (3) dễ suy ra $\dfrac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \dfrac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \dfrac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}$. $\square$

Nhận xét. Bài toán trên có thể coi là mở rộng định lý hàm số sin vì khi tam giác ABC nhọn có P trùng với tâm ngoại tiếp thì $PA = PB = PC$ và $\widehat{BPC} - \widehat{A} = \widehat{A}$. Từ đó ta thu được định lý sin cho tam giác ABC. Mặt khác $\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A}) = \sin\widehat{BPC}\cos A - \cos\widehat{BPC}\sin A$. Từ đó ta có thể viết bài toán tương đương $\dfrac{\sin\widehat{BPC}\cot A - \cos\widehat{BPC}}{PA} = \dfrac{\sin\widehat{CPA}\cot B - \cos\widehat{CPA}}{PB} = \dfrac{\sin\widehat{APB}\cot C - \cos\widehat{APB}}{PC}$. Từ đó ta có thể đề xuất bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nhọn. Giả sử có điểm P nằm trong tam giác sao cho

$$\sin\widehat{BPC}\cot A - \cos\widehat{BPC} = \sin\widehat{CPA}\cot B - \cos\widehat{CPA} = \sin\widehat{APB}\cot C - \cos\widehat{APB}.$$

Chứng minh rằng P là tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

Tuy nhiên bài toán 6 cũng dẫn ta đến một hệ quả thú vị là tính được tọa độ tỷ cự điểm Fermat như sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC có các góc không quá $120°$ và F là điểm Fermat. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sin(60° + A)}\overrightarrow{FA} + \frac{b}{\sin(60° + B)}\overrightarrow{FB} + \frac{c}{\sin(60° + C)}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Vì F là điểm Fermat nên $\angle BFC = \angle CFA = \angle AFB = 120°$. Từ đó theo nhận xét bài 6 ta có $\dfrac{a.FA}{\sin(120° - A)} = \dfrac{b.FB}{\sin(120° - B)} = \dfrac{c.FC}{\sin(120° - C)}$ hay $\dfrac{a.FA}{\sin(60° + A)} = \dfrac{b.FB}{\sin(60° + B)} = \dfrac{c.FC}{\sin(60° + C)}$.

Ta lại biết kết quả cơ bản $\dfrac{\overrightarrow{FA}}{FA} + \dfrac{\overrightarrow{FB}}{FB} + \dfrac{\overrightarrow{FC}}{FC} = \overrightarrow{0}$. Từ đó ta thu được $\dfrac{a}{\sin(60° + A)}\overrightarrow{FA} + \dfrac{b}{\sin(60° + B)}\overrightarrow{FB} + \dfrac{c}{\sin(60° + C)}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}$. Đó là điều phải chứng minh. □

Tổng quát hơn cho ta đẳng thức vector thú vị sau đây

Bài toán 9. Cho tam giác ABC và P nằm trong tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sin\widehat{BPC}}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})}\overrightarrow{PA} + \frac{b\sin\widehat{CPA}}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})}\overrightarrow{PB} + \frac{c\sin\widehat{APB}}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Ta đã biết đẳng thức vector cơ bản với P nằm trong tam giác là $[PBC].\overrightarrow{PA} + [PCA]\overrightarrow{PB} + [PAB]\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ đẳng thức tương đương $\dfrac{\sin\widehat{BPC}}{PA}\overrightarrow{PA} + \dfrac{\sin\widehat{CPA}}{PB}\overrightarrow{PB} + \dfrac{\sin\widehat{APB}}{PC}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.

Theo nhận xét bài toán 6 lại có $\dfrac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \dfrac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \dfrac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}$.

Từ hai đẳng thức trên dễ cho ta

$$\frac{a\sin\widehat{BPC}}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})}\overrightarrow{PA} + \frac{b\sin\widehat{CPA}}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})}\overrightarrow{PB} + \frac{c\sin\widehat{APB}}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đẳng thức vector thú vị trên cho phép ta tính các tọa độ tỷ cực của các điểm trong tam giác mà ta biết các góc $\widehat{BPC}, \widehat{CPA}, \widehat{APB}$ chẳng hạn như các đỉnh tam giác Morley. Còn nhiều thú vị ẩn chứa trong các bài toán này bạn đọc hãy tiếp tục khám phá.

Tài liệu

[1] IMO 2003 bài 4 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=14&t=96

[2] IMO Shortlist 2003 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=177&t=15621

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Extension of a geometric problem in shortlist 2012

Tran Quang Hung

Abstract

This article turns around a mice geometric problem in shortlist 2012 by using pure geometry tools.

The following problem was proposed in shortlist 2012.

Problem 1. Let ABC be an acute triangle and its altitudes AD, BE, CF. Denote K, L by incenters of triangles BFD, CDE. Let P, Q be a circumcenters of triangles ABK, ACL. Prove that $PQ \parallel KL$.

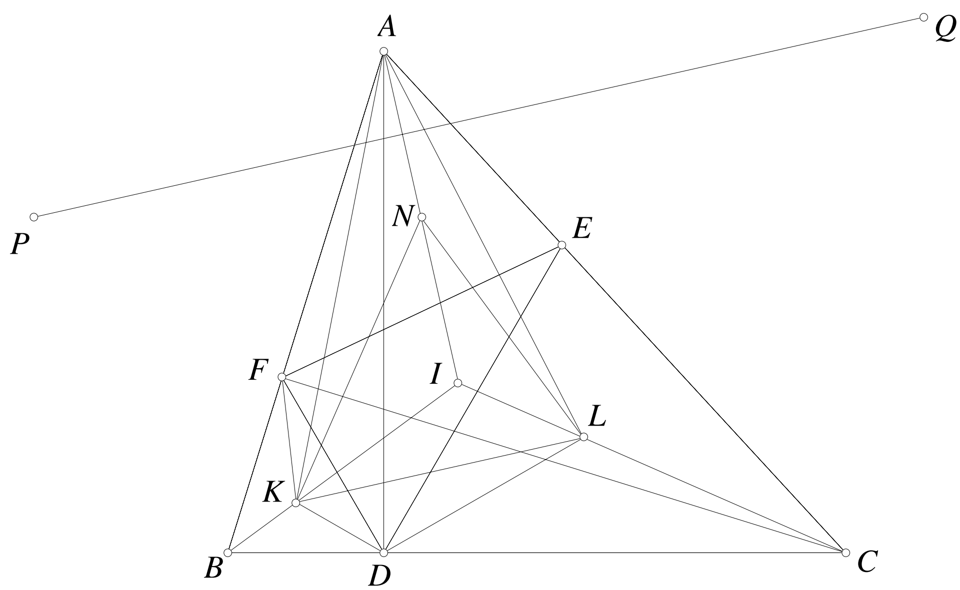


Figure 1.

Solution. It is easy to be seen that triangles $\triangle DFB \sim \triangle DCE$. As well-known, K, L are incenters of those triangle, we imply that $\triangle DKF \sim \triangle DLC$. From this similar pair follows $\triangle DKL \sim \triangle DFC$. Therefore $\angle DKL = \angle DFC = \angle DAC$. Since that, we have $\angle BKL = \angle BKD + \angle DKL = 90^\circ + \dfrac{\angle BFD}{2} + \angle DFC = 90^\circ + \dfrac{\angle ACB}{2} + 90^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \dfrac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - \angle LCB$ we deduce that the quadrilateral $BKLC$ is inscribed in a circle. Similarly, if N is incenter of triangle AEF then quadrilaterals $ANKB$ and $ANLC$ are concyclic. Hence AN is a chord of the circle (P) circumscribed about triangle ABK and the circle (Q) circumscribed about ACL. Therefore $PQ \perp AN$. It is obvious that BK, CL, AN are concurrent at I where I is the incenter of triangle ABC. From that, we have external angles $\angle ILN = \angle NAC = \angle NAC = \angle IKN$. Analogously, $\angle INK = \angle ILK, \angle INL = \angle IKL$ infers that I is an orthocenter of triangle KLN. Therefore $PQ \perp AN \equiv AI \perp KL$ follows $PQ \parallel KL$. This completes the proof. $\square$

Comment. Proving a cyclic quadrilateral $KBCL$ play an important role on the solution. On the solution above, the similar triangles having a common vertex was used effectively and clearly. Then, we do not need to draw any auxiliary figure. This solutions based of the idea of Tran Dang Phuc

- my old students. Furthermore, some different ways were proposed to show that the quadrilateral $KBCL$ was cyclic on [1] and on original. From exploiting around this method, we get the following problem.

Problem 2. Let ABC be a triangle and $AC > AB$. The angle bisector of $\angle BAC$ intersects BC at D. E be a point which lies between B and D such that $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Denote K, L by incenters of triangles EAB, EAC. Prove that the quadrilateral $KBCL$ is inscribed in a circle.

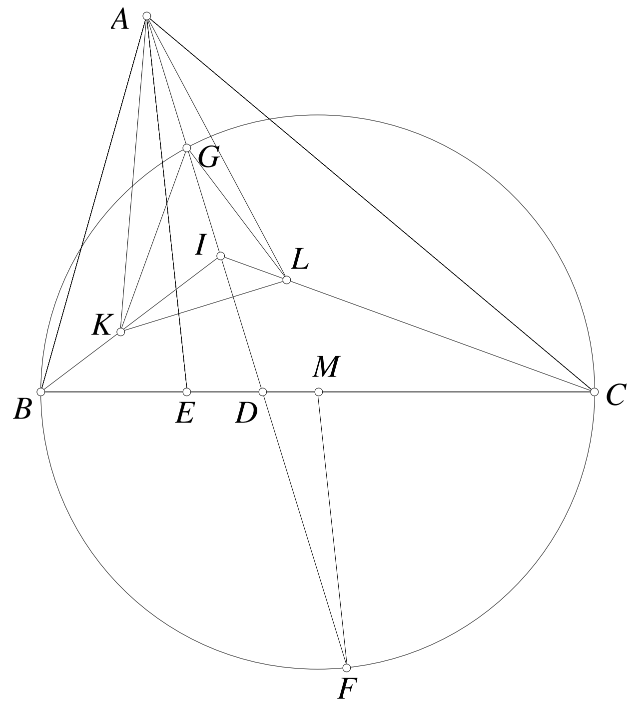


Figure 2.

Solution. Denote M by a midpoint of segment BC. Let F be a point which lies on the circle with diameter BC and outside triangle ABC such that $MF \parallel AE$. It is easy to prove $DM = MB - DB = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{AB.BC}{AB + AC} = \dfrac{BC(AC - AB)}{2(AB + AC)} = \dfrac{MF(AC - AB)}{AB + AC}$. Therefore, we have $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{MD}{MF}$. We could point out easily that $\triangle AED \sim \triangle MFD$. From this follows A, D, F are collinear. Let AF meet the circle with diameter BC at G which is differ from F. It is clear that $\angle EAD = \angle DFM = \angle DGM$.

The sum of angles in both triangles EAD and GMD is $360°$. On the other hands, $\angle EDG + \angle GDM = 180°$ we imply that $\angle AED + \angle DMG + 2\angle DGM = 180°$. Note that $\angle DMG = 2\angle MGC$, hence $2(\angle DGM + \angle MGC) = 180° - \angle AED$ or $\angle DGC = 90° - \dfrac{AED}{2}$. Note that L be a center of the incircle of triangle AEC, thus $\angle AGC = 180° - \angle DGC = 90° + \dfrac{\angle AED}{2} = \angle ALC$. So, we deduce that the quadrilateral $AGLC$ is concyclic. Analogously, the quadrilateral $AGKB$ is inscribed in a circle.

Note that the internal angle bisectors AD, BK, CL are concurrent at incenter I. From two concyclic quadrilaterals $AGCL$ and $AGKB$ follows $IK.IB = IG.IA = IL.IC$. Therefore, the quadrilateral $BKLC$ is concyclic. This completes the proof. $\square$

Comment. E satisfied $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$ is the most interesting point of this problem. We could see that the condition is solved ingeniously by drawing point F on the circle with diameter BC. Basing on the idea of the problem on shortlist, we present the following problem, which was proposed on HUS High school for Gifted Students contest (2013, Round 1, Day 2) [2].

Problem 3. Let ABC be a triangle such that $AC > AB$. Angle bisector of $\angle BAC$ intersects BC at D. Point E lies between B, D such that $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Denote K, L by incenters of triangles EAB, EAC respectively. Let P, Q be circumcircles of triangles KAB, LAC in turn. Prove that PQ is parallel to KL.

The first proof could be used to solve the problem 2, as follows

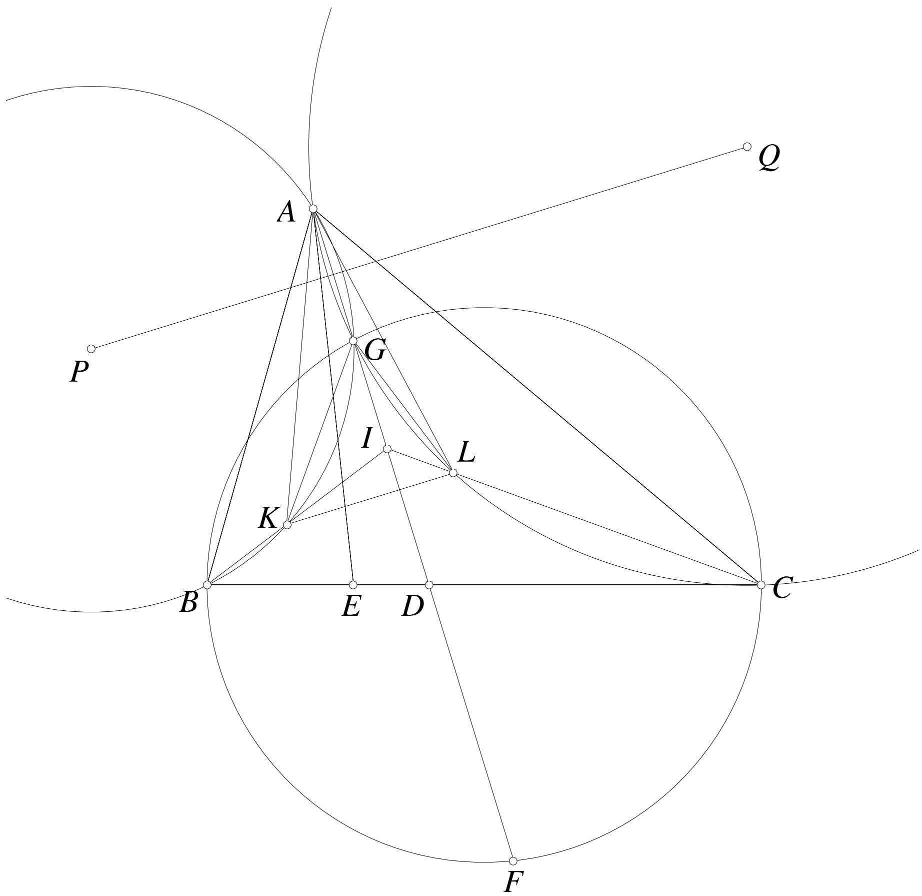


Figure 3.

Solution 1. By an construction analogous to the proof of problem 2, we get concyclic quadrilaterals $AGKB, AGLC, BKLC$. Therefore

$$\angle IKL + \angle GLK = \angle ICB + (\angle IBC + \angle GAC) = \frac{\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA}{2} = 90^\circ.$$

Or we could say that $IK \perp GL$, similarly $IL \perp GK$. So, we infers $AG \equiv IG \perp KL$. Note that two circles $(P), (Q)$ intersect each other at A, G. We get $AG \perp PQ$. Therefore, from properties above, it is easily to be seen that $PQ \parallel KL$. This concludes the proof. $\square$

However, the two following proofs are quite brief. Those solutions infer the problem immediately, so we have to prove a Lemma.

Lemma 3.1. Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) and I be incenter. AI intersects (O) at D which differs from A. Show that D is a circumcenter of triangle IBC and $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB+AC}$.

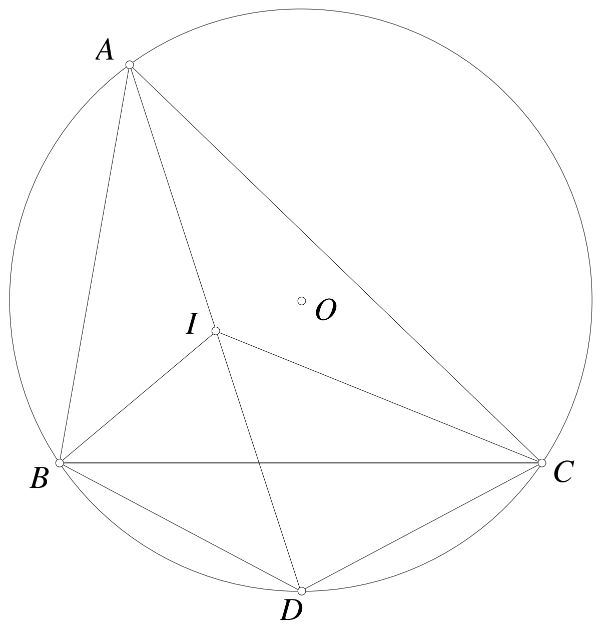


Figure 4.

Proof. We have $\angle BID = \angle IBA + \angle IAB = \angle IAC + \angle IBC = \angle CBD + \angle IBC = \angle IBD$. Then BID is an isosceles triangle at D. Analogously, CID is an isosceles triangle at D. T $DI = DB = DC$. Applying Ptolemy theorem with respect to the quadrilateral $ABDC$, we get $DB.CA + DC.AB = DA.AB$ or $DI(AB + AC) = DA.BC$. Therefore, $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB+AC}$. □

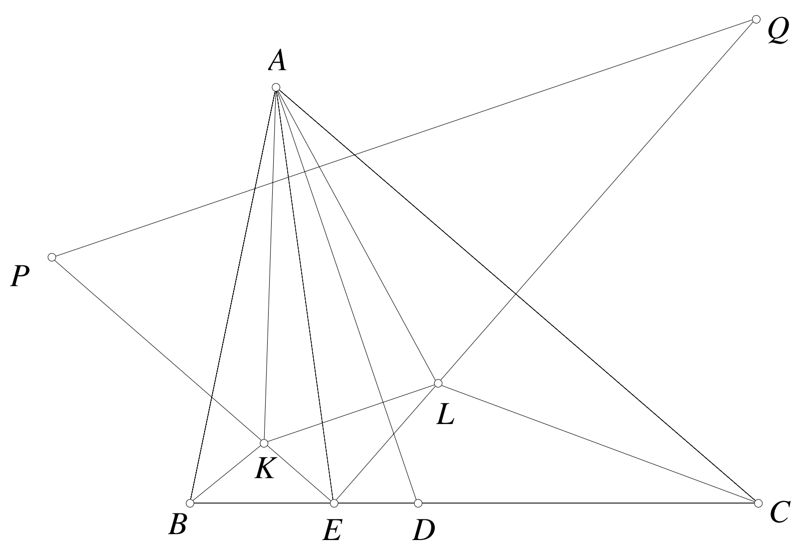


Figure 5.

Solution 2. From Lemma, it is easily to be seen that $\dfrac{PK}{PE} = \dfrac{AB}{EA+EB}$ and $\dfrac{QL}{QE} = \dfrac{AC}{EA+EC}$. Therefore, we have to show that

$$\frac{AB}{EA+EB} = \frac{AC}{EA+EC}$$
$$\Leftrightarrow \frac{AB}{EA+DB-ED} = \frac{AC}{EA+DC+ED}$$
$$\Leftrightarrow AB(EA+DC+ED) = AC(EA+DB-ED)$$
$$\Leftrightarrow AB(EA+ED) = AC(EA-ED)$$
$$\Leftrightarrow AB(1+\frac{ED}{EA}) = AC(1-\frac{ED}{EA})$$
$$\Leftrightarrow AB(1+\frac{AC-AB}{AB+AC}) = AC(1-\frac{AC-AB}{AC+AB})$$
$$\Leftrightarrow AB.\frac{2AC}{AB+AC} = AC.\frac{2AB}{AB+AC} \text{ (always true).}$$

This completes the proof. □

Comment. Exploiting different properties of the concyclic quadrilateral $KBCL$ on problem 1 could generate another interesting problems, especially as the following problem.

Problem 4. Let ABC be an acute triangle and AD, BE, CF be altitudes. Denote $(X), (Y), (Z)$ by circles inscribed in triangles AEF, BFD, CDE. Let d_a be a common tangent line which is different from BC of $(Y), (Z)$. Analogously, we have d_b, d_c. Prove that d_a, d_b, d_c are concurrent.

We will present the extension of the problem basing on the relative position of orthocenter.

Problem 5. Given an acute triangle ABC and its altitudes AD, BE, CF. Denote K, L by centers of incircles of triangles DBE, DCF. Let P, Q be circumcenters of triangles HBK, HCL. Show that $PQ \parallel KL$.

Another way to extend excenters was proposed as follows.

Problem 6. Given an acute triangle ABC and its altitudes AD, BE, CF. Denote K, L by excenters with respect to vertex D of triangles BFD, CDE. Let P, Q be centers of circumcircles of triangles ABK, ACL. Prove that $PQ \parallel KL$.

Problem 7. Given an acute triangle ABC and its altitudes AD, BE, CF. Denote K, L by a center of excircle with respect to vertex D of triangle DBE, DCF. Let P, Q be circumcircle of triangles HBK, HCL. Determine $PQ \parallel KL$.

On the other hands, we could extend the problem completely basing on the cyclic quadrilateral $BKLC$ as follows.

Problem 8. Given a triangle ABC and its incenter I. A circle (K) passing through B, C intersects IC, IB at E, F respectively. Denote P, Q by circumcenters of triangles ACE, ABF respectively. Show that $PQ \parallel EF$.

The reader is referred to the problems above which are solved easily basing on the idea in this article.

References

[1] IMO Shortlist 2012, Geometry 3
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3160579

[2] Tran Quang Hung, Collection of problems from HUS High Shool for Gifted Student contest, 2013.

Tran Quang Hung, High School for Gifted Students, Hanoi University of Science, Vietnam National University, Hanoi.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

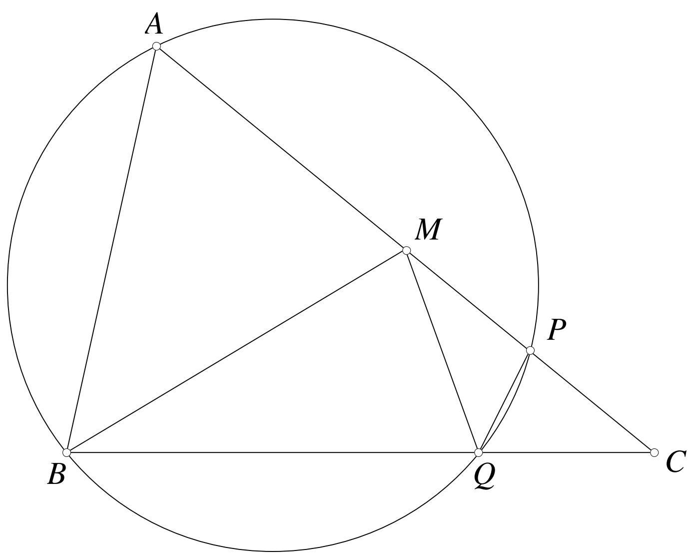
Từ bài thi Olympic Moscow tới bài thi Olympic chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học Olympic Moscow và bài toán thi Olympic chuyên KHTN với các công cụ hình học thuần túy.

Đề thi Olympic Moscow năm 2014 lớp 10 [1] có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với M là trung điểm AC và P là trung điểm CM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt đoạn thẳng BC tại Q khác B. Chứng minh rằng $\angle ABM = \angle MQP$.



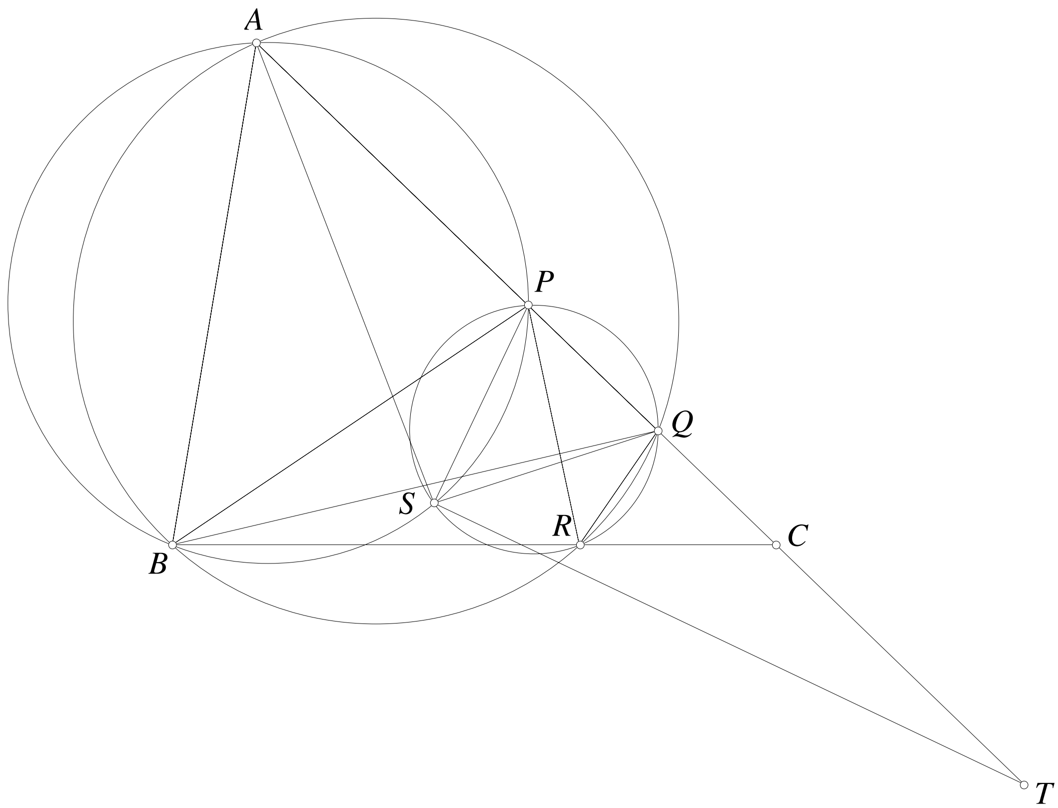
Hình 1.

Cũng trong năm 2014 đề thi Olympic chuyên KHTN [2] có bài toán hay như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B.

a) Chứng minh rằng $\angle ABP = \angle PRQ$.

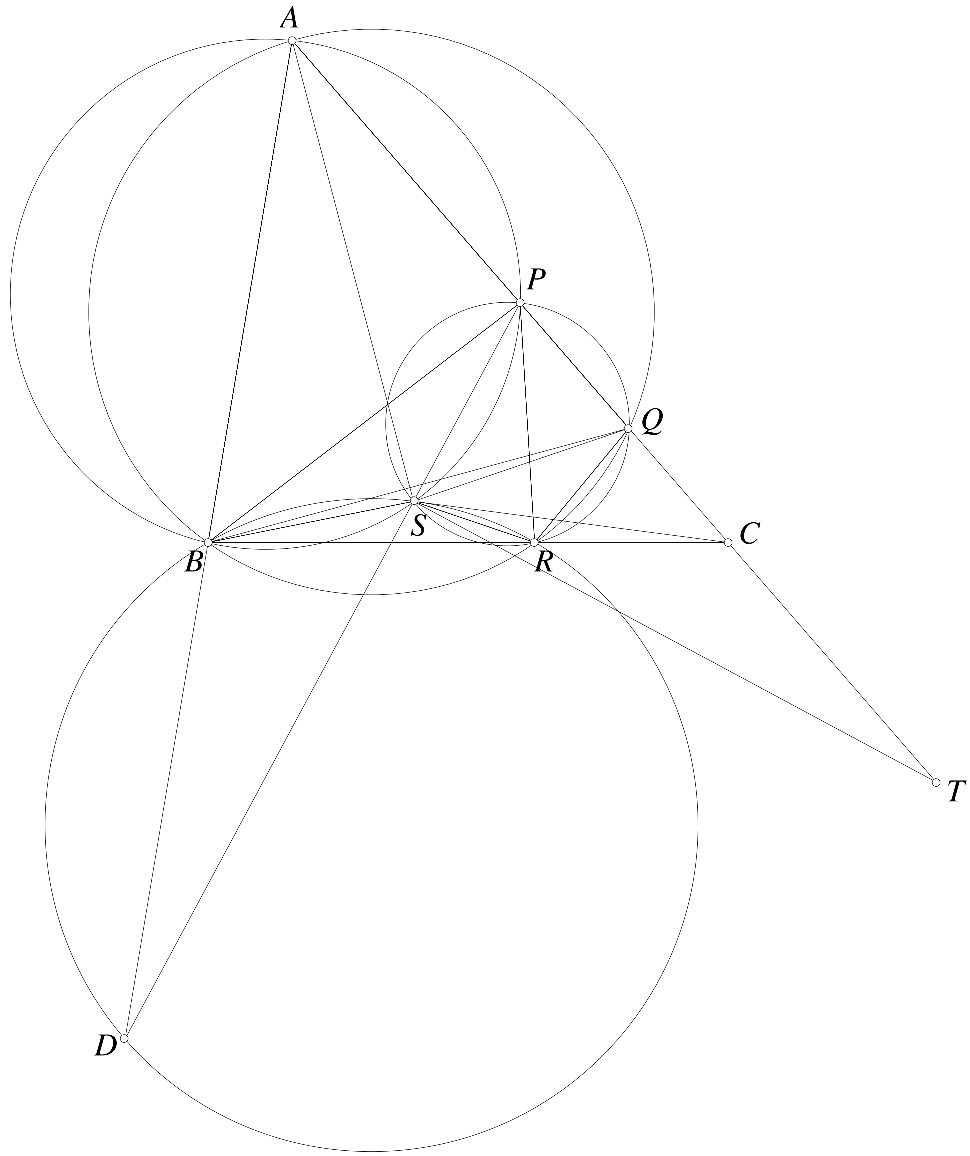
b) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và PQR cắt nhau tại S khác P. Chứng minh rằng tam giác CPS cân.



Hình 2.

Ta dễ thấy rằng phần a) bài toán 2 chính là mở rộng của đề thi Olympic Moscow khi thay trung điểm các đoạn thẳng bằng các điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số bất kỳ. Phần b) của bài toán 2 là một ý phát triển khá thú vị cho phần a) và có nhiều cách chứng minh. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một bài toán phát triển hơn nữa bài toán 2 và trong ý chứng minh của nó bao hàm bài toán 2 cùng với cách chứng minh thuần túy hình học.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và PQR cắt nhau tại S khác P. SP cắt AB tại D. Chứng minh rằng B, S, R, D cùng thuộc một đường tròn.



Hình 3.

Lời giải. Từ $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{QC}{QP}$ suy ra $\dfrac{PC}{PC+PA} = \dfrac{QC}{QC+QP}$ hay $\dfrac{PC}{AC} = \dfrac{QC}{PC}$ suy ra $PC^2 = CA.CQ = CR.CB$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR tiếp xúc AC tại P suy ra $\angle APB = \angle BRP$. Từ đó $\angle ABP = 180^\circ - \angle BAP - \angle APB = \angle BRQ - \angle BRP = \angle PRQ$. Gọi đường thẳng qua S vuông góc SP cắt AC tại T. Dễ có $\angle ASP = \angle ABP = \angle PRQ = \angle QSP$ nên SP là phân giác trong $\angle ASQ$ vậy ST là phân giác ngoài. Từ đó $\dfrac{TQ}{TA} = \dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{PQ+CQ}{PA+CP} = \dfrac{CP}{AC} = \dfrac{TQ-CQ}{TA-CP} = \dfrac{CT}{CT+AP}$. Suy ra $CP(CT+AP) = CT.AC = CT(AP+PC)$ hay $CP.AP = CT.AP$ suy ra $CP = CT$ hay C là trung điểm PT, từ đó tam giác CSP cân. Ta có $CS^2 = CP^2 = CQ.CA = CR.CB$ suy ra $\angle SRC = \angle BSC = \angle BSD + \angle DSC = \angle BAP + \angle APS = \angle 180^\circ - \angle BDS$. Vậy $\angle BDS = 180^\circ - \angle SRC = \angle SRB$ suy ra tứ giác $BSRD$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc biến đổi tỷ số độ dài để chứng minh tam giác CSP cân có thể làm gọn hơn nhờ việc sử dụng hàng điểm điều hòa xong chúng tôi chọn cách làm này vì nó khá sơ cấp hơn và có nội dung gần với chương trình THCS ở Việt Nam. Toàn bộ bài toán và lời giải đều có thể viết dưới dạng độ dài đại số cùng với góc định hướng cho chặt chẽ xong chúng tôi nhận thấy rằng điều này không cần thiết lắm. Hình học thuần túy coi trọng tính trực quan và vẻ đẹp hơn là sự chặt chẽ về logic. Do đó trong việc làm và hiểu bài toán một cách trực quan trên hình vẽ đôi khi chưa được chặt chẽ do có một số trường hợp phải xét không đúng logic trong lời giải nhưng điều này hoàn toàn bỏ qua được khi dựa vào quan điểm của chúng ta xem vẻ đẹp của bài toán và lời giải quan trọng hơn hay tính logic quan trọng hơn.

Tài liệu

[1] Olympic Moscow năm 2014 lớp 10
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=589088

[2] Đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014 bài 2.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

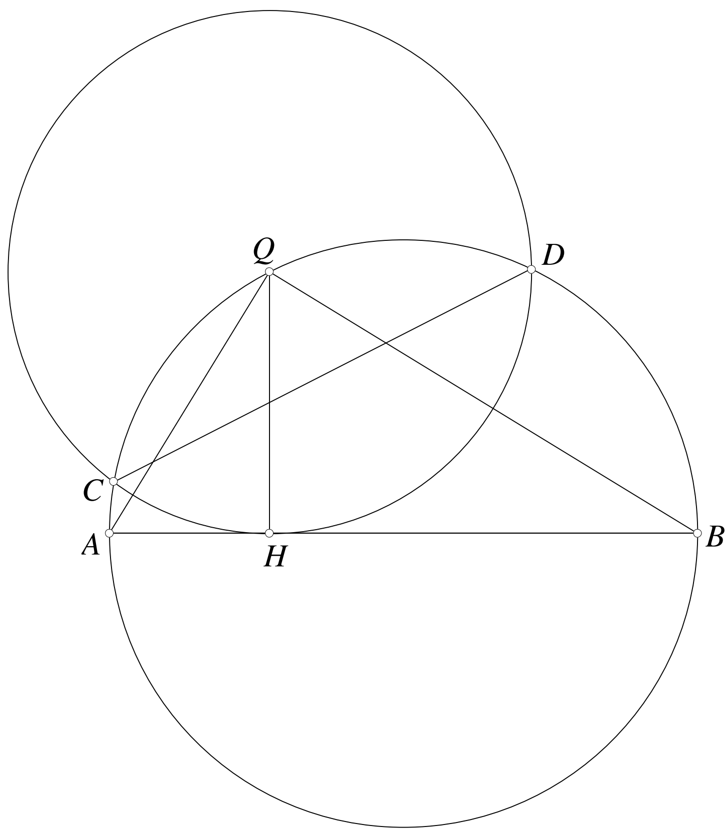
Từ bài thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ tới bài thi Olympic chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ và bài toán thi Olympic chuyên KHTN với các công cụ về hàng điểm điều hòa.

Đề thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2006 ngày thứ 2 [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Từ điểm Q trên đường tròn đường kính AB vẽ QH vuông góc với AB với H thuộc AB. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn tâm Q bán kính QH tại C, D. Chứng minh rằng CD chia đôi QH.



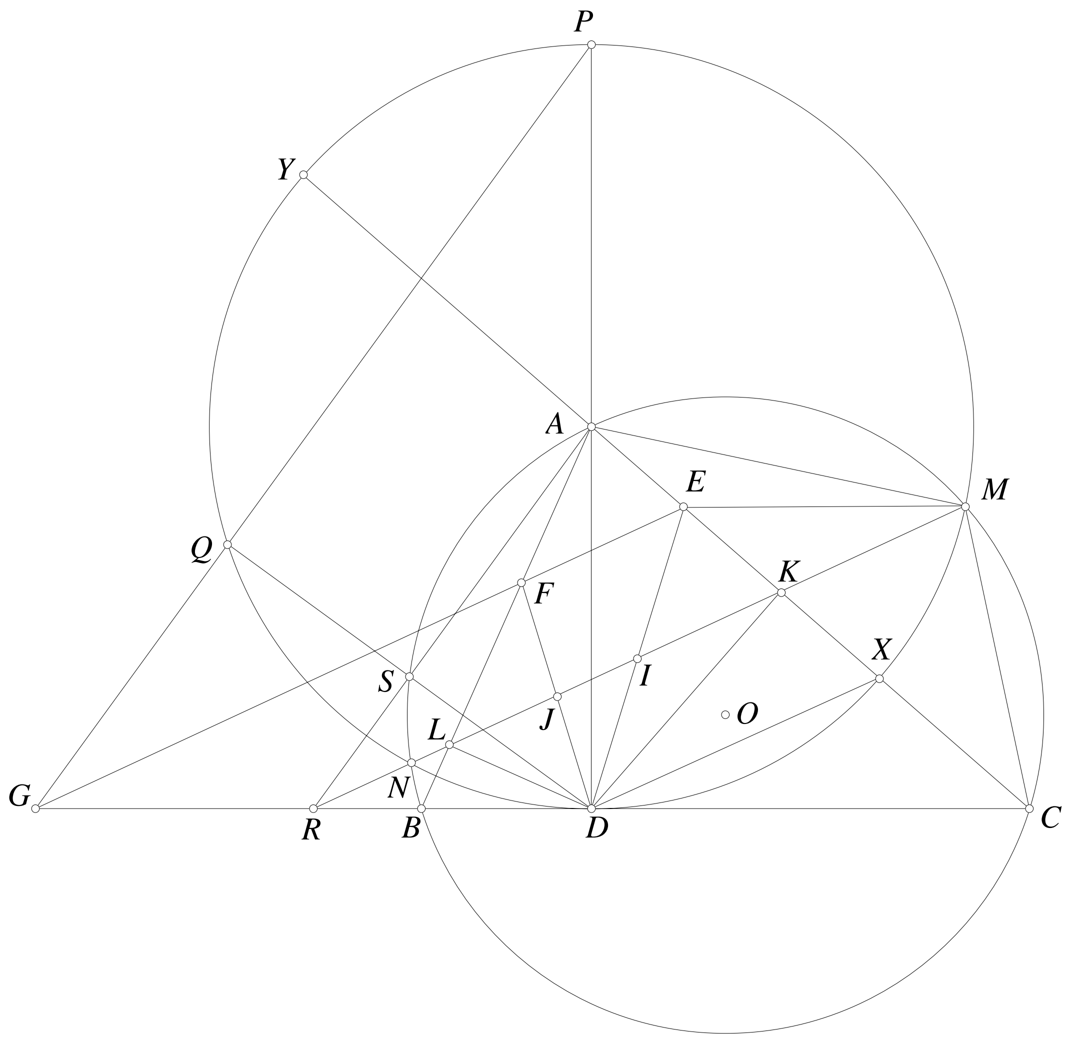
Hình 1.

Bài toán là một kết quả rất hay và mang nhiều ý nghĩa và có nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Bài toán cũng có nhiều lời giải và hướng phát triển cũng như nhiều hướng khai thác. Bài thi Olympic chuyên KHTN [2] là một ví dụ của sự mở rộng và khai thác kết quả này

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE, CF với D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB. Gọi (ω) là đường tròn tâm A đi qua D. (ω) cắt (O) tại M, N.

a) Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm DE, DF.

b) Gọi EF cắt BC tại G và DP là đường kính của (ω). PG cắt (ω) tại Q khác P. Chứng minh rằng trung điểm của DQ nằm trên (O).



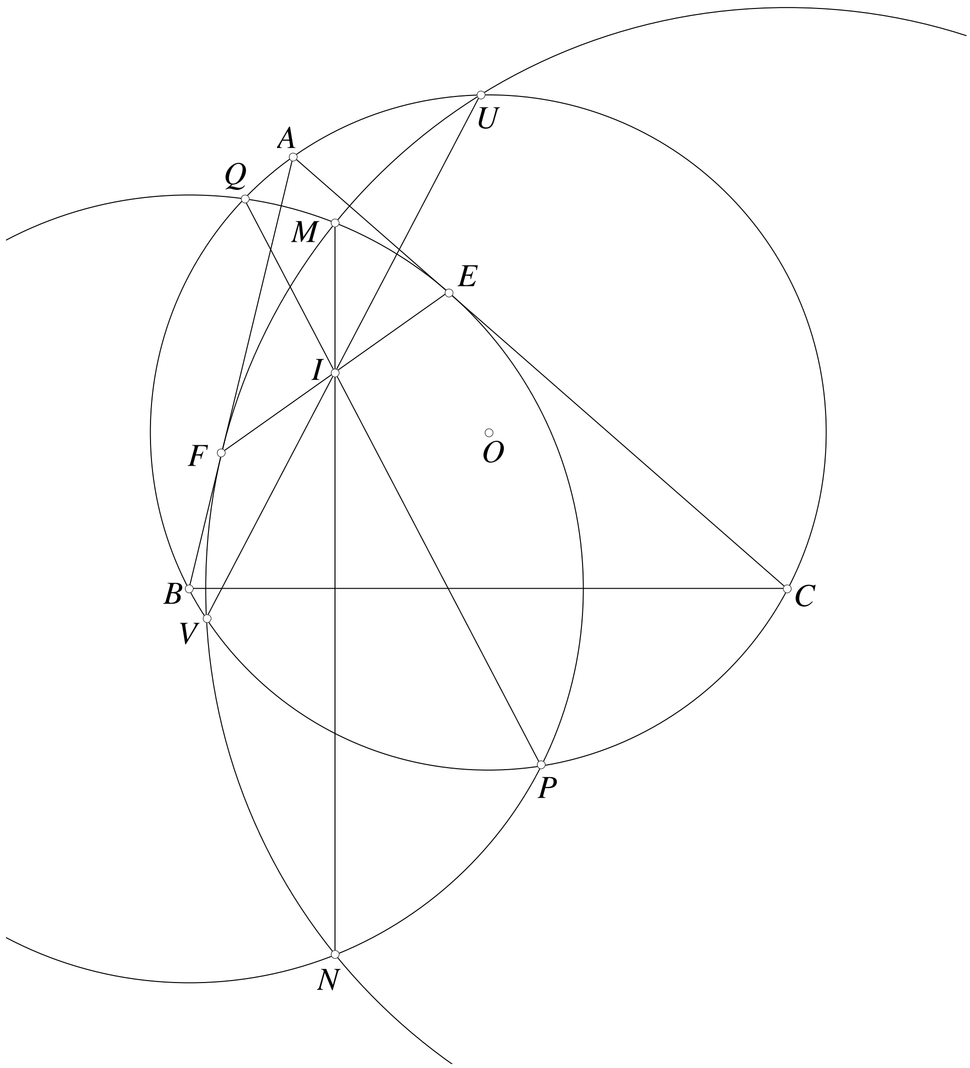
Hình 2.

Lời giải. a) Gọi MN cắt DE, DF, AC, AB lần lượt tại I, J, K, L. (ω) cắt AC tại X, Y. Ta thấy $\overline{KX}.\overline{KY} = \overline{KM}.\overline{KN} = \overline{KA}.\overline{KC}$ suy ra $(KC, XY) = -1$ vậy $AD^2 = AX^2 = AY^2 = \overline{AK}.\overline{AC}$ từ đó dễ thấy $DK \perp AC$. Tương tự $DL \perp AB$. Vậy tứ giác $AKDL$ nội tiếp suy ra $\angle LKF = \angle LAD = 90° - \angle ABD = 90° - \angle DEC = \angle IDK$. Từ đó tam giác IDK cân, mặt khác tam giác DKE vuông suy ra I là trung điểm DE. Tương tự J là trung điểm DF. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi MN giao BC tại R. AR cắt QD tại S. Theo a) dễ thấy R là trung điểm GD mà A là trung điểm DP nên S là trung điểm QD. Do $DQ \perp PG$ nên $DS \perp SA$. Từ đó S, K, L thuộc đường tròn đường kính AD. Dễ thấy hàng $(BC, GD) = -1$ và R là trung điểm DG nên $\overline{RS}.\overline{RA} = \overline{RK}.\overline{RL} = RD^2 = RG^2 = \overline{RB}.\overline{RC}$. Từ đó tứ giác $ASBC$ nội tiếp nên S thuộc (O). Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Rõ ràng bài toán 2 phần a) là sự mở rộng bài toán 1 từ tam giác vuông sang tam giác bất kỳ còn phần b) là một sự phát triển khá đẹp. Chúng tôi chọn cách trình bày bằng hàng điểm điều hòa để mang một phong cách mới thực ra cả 2 phần các bạn đều có thể làm một cách thuần túy hình học THCS. Đằng sau bài toán thi còn nhiều phát triển khác đáng chú ý

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao BE, CF. Đường tròn (B, BE) cắt đường tròn (C, CF) tại M, N. Chứng minh rằng MN chia đôi EF.

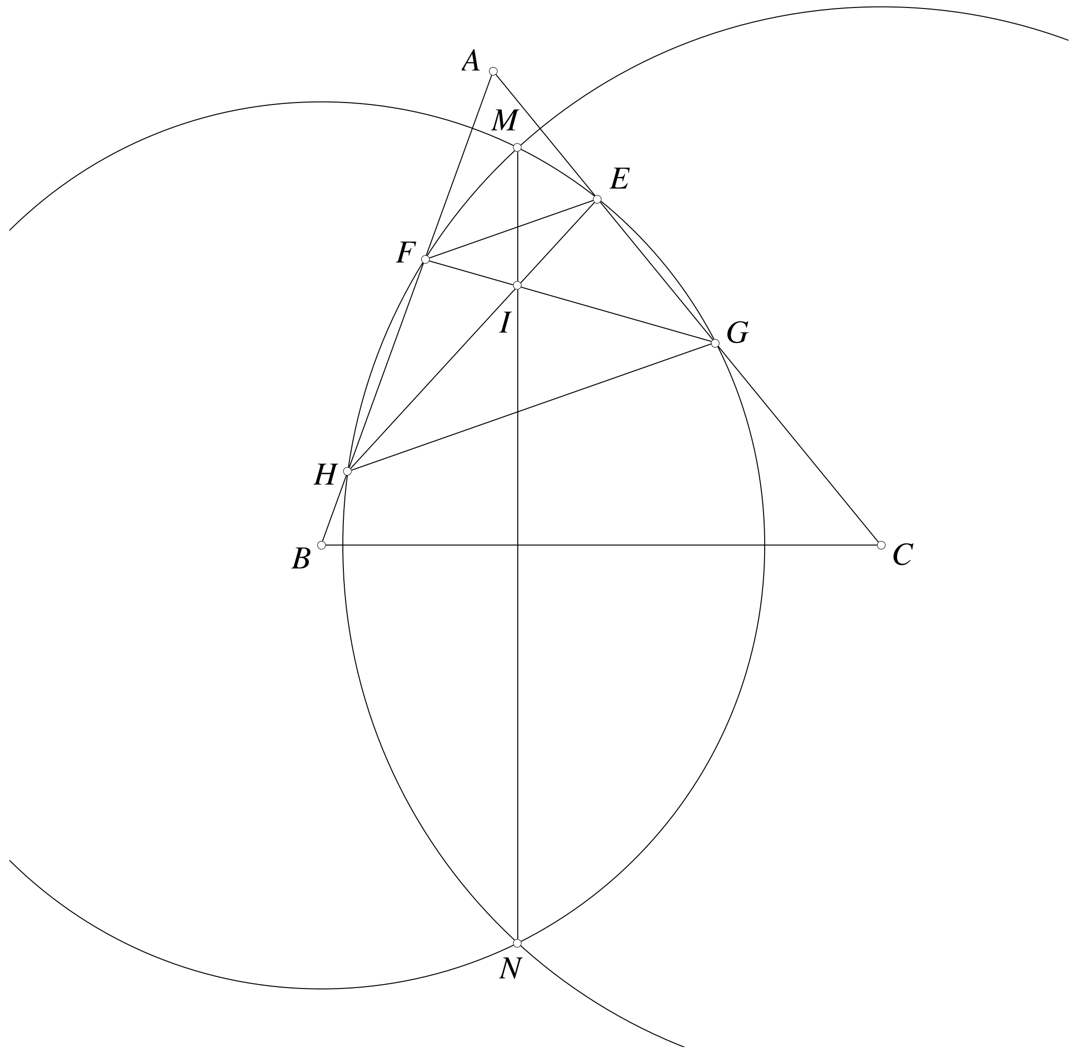


Hình 3.

Lời giải. Gọi đường tròn (B, BE) cắt (O) tại P, Q và (C, CF) cắt (O) tại U, V. Theo bài toán 2 dễ thấy PQ, UV cùng đi qua trung điểm EF. Dễ thấy theo tính chất tâm đẳng phương thì MN, PQ, UV đồng quy do đó MN đi qua trung điểm EF. $\square$

Bài toán trên là một kết quả đẹp nó có một mở rộng như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn. Đường tròn (B, BE) cắt CA tại G khác E. Đường tròn (C, CF) cắt AB tại H khác F. Đường tròn (B, BE) cắt (C, CF) tại M, N. Chứng minh rằng FG, EH và MN đồng quy.



Hình 4.

Xung quanh bài toán 2, 3, 4 vẫn còn nhiều điều thú vị cho các bạn cùng khám phá, xin dành điều đó cho các bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2006 bài 2 ngày 2

www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=508188

[2] Đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014 bài 5.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi chuyên sư phạm năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi hình học thi chuyên sư phạm năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chuyên sư phạm ngày 2 có bài toán hình học khá hay như sau

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm AB và N, P theo thứ tự thuộc BC, CD sao cho $MN \parallel AP$.

a) Chứng minh rằng tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\angle NOP = 45°$.

b) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP nằm trên OC.

c) Chứng minh rằng BD, AN, PM đồng quy.

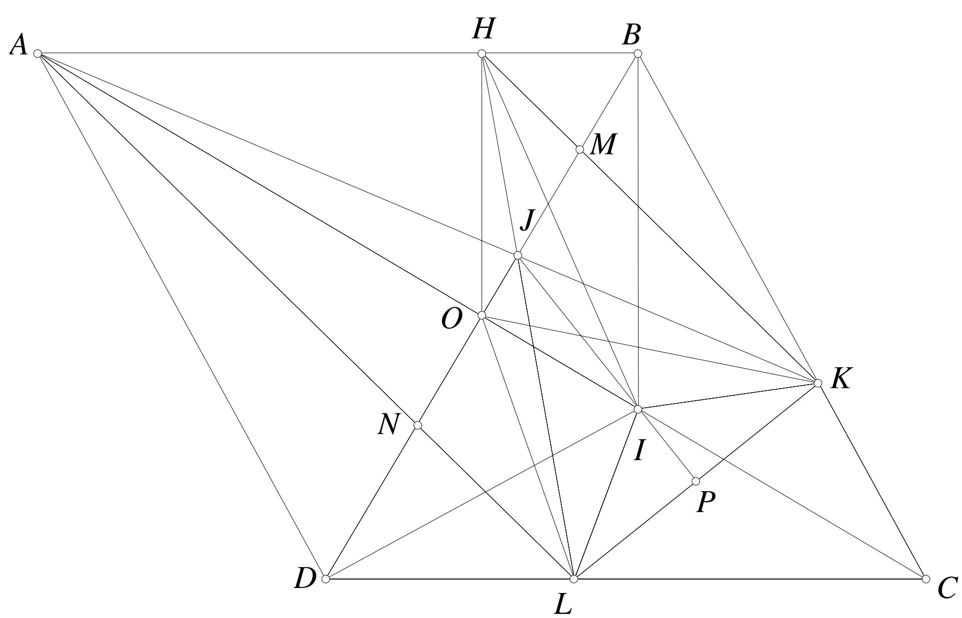
Bài toán là những kết quả đẹp nhiều ý nghĩa. Tuy vậy nếu để ý kỹ thì ý cuối cùng không liên quan tới hai ý trên. Mặt khác điều kiện hình vuông có thể thay thế được bởi điều kiện nhẹ hơn là hình thoi. Do đó tôi xin đề xuất một bài toán tổng quát hơn đồng thời thêm một ý nữa liên kết hai ý hay của bài toán trên

Bài 2. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC giao BD tại O. H là hình chiếu của O lên AB. Các điểm K, L theo thứ tự thuộc đoan CB, CD sao cho $HK \parallel AL$.

a) Chứng minh rằng tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác OKL nằm trên AC.

b) Chứng minh rằng HL, AK và BD đồng quy tại J.

c) Chứng minh rằng IJ chia đôi KL khi và chỉ khi bốn điểm D, L, I, J cùng thuộc một đường tròn.



Hình 1.

Lời giải. a) Ta dễ thấy các tam giác HBC và LDA có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng. Từ đó chú ý tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH, ta có $DL.BC = HB.AD = BH.BA = OB^2 = OB.OD$. Mặt khác $\angle KBO = \angle LDO$ nên $\triangle OBK \sim \triangle LOD$. Vậy $\angle KOL = \angle KOD - \angle DOL = (\angle OBK + \angle OKB) - \angle OKB = \angle OBK$. Từ đó với I là tâm ngoại tiếp tam giác OKL, chú ý tam giác DCB cân thì $\angle KIL = 2\angle KOL = 2\angle OBK = 180° - \angle DCB$ suy ra tứ giác $LIKC$ nội tiếp mà $IK = IL$ suy ra CI là phân giác $\angle KCL$ trùng với CA. Vậy I thuộc CA.

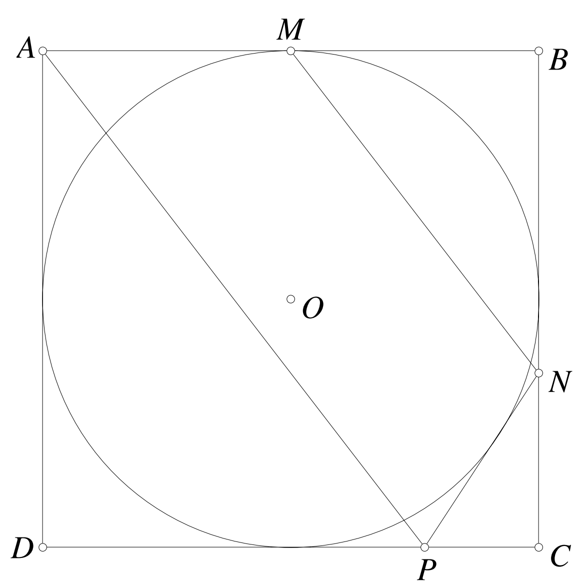
b) Gọi BD cắt HK, AL tại M, N. Ta chú ý các tam giác HBC và LDA đồng dạng mà $\angle MBK = \angle NDA$. Từ đó các tam giác MBK và NDA đồng dạng tương ứng. Vậy dễ suy ra $\frac{MH}{MK} = \frac{NL}{NA}$. Lại có $HK \parallel AL$. Từ đó theo định lý Theles mở rộng dễ thấy HL, AK và MN đồng quy.

c) Nếu IJ đi qua trung điểm P của KL. Từ tam giác IKL cân suy ra IJ là trung trực KL. Từ đó chú ý tam giác BDC cân tại B nên $\angle JIL = \angle JIL = \frac{360° - \angle LIK}{2} = \frac{180° + \angle LCK}{2} = 180° - \angle BDC$ suy ra tứ giác $DJIL$ nội tiếp.

Nếu tứ giác $DJIL$ nội tiếp mà tứ giác $LIKC$ nội tiếp, theo định lý Miquel dễ thấy tứ giác $BKIJ$ nội tiếp. Chú ý I nằm trên AC là trung trực BD nên $\angle ILJ = \angle IDJ = \angle IBJ = \angle IKJ$. Lại có $\angle IJL = \angle IDL = \angle IBK = \angle IJK$. Mặt khác đã có $IK = IL$. Vậy $\triangle IKJ = \triangle ILJ$ $(g.c.g)$ suy ra IJ là trung trực KL nên IJ chia đôi KL. □

Nhận xét. Thực ra ý tưởng chính trong câu a) bài toán gốc xuất phát từ một bài toán tiếp xúc khá quen thuộc. Câu a) bài toán mở rộng cũng là sự mở rộng của bài toán tiếp xúc đó. Việc phát triển các ý b), c) làm hai bài toán trở nên mới và lạ hơn cũng như mang nhiều ý nghĩa hơn. Xin giới thiệu lại với các bạn hai bài toán quen thuộc này

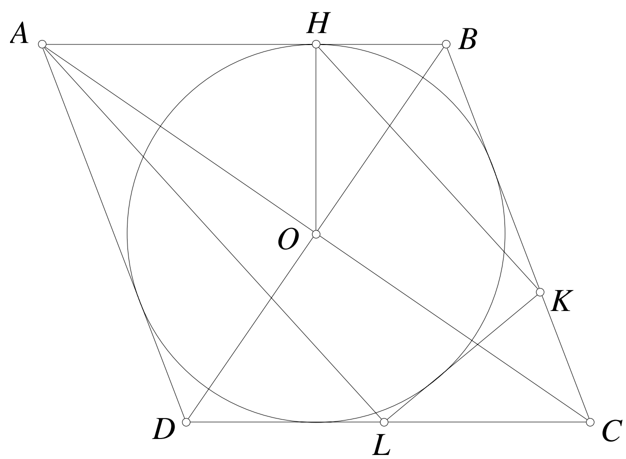
Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ có (O) là đường tròn nội tiếp. M là trung điểm AB. Các điểm N, P theo thứ tự thuộc cạnh BC, CD sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng NP luôn tiếp xúc đường tròn (O).



Hình 2.

Từ đó bài toán trên hình thoi được đề xuất và phát biểu khó hơn

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ có AC giao BD tại O. H là hình chiếu của O lên AB. Các điểm K, L theo thứ tự thuộc cạnh BC, CD sao cho $HK \parallel AL$. Chứng minh rằng KL luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi K, L di chuyển.



Hình 3.

Có nhiều điều thú vị khác xoay quanh các bài toán tiếp xúc này. Các bạn hãy cùng khám phá.

Tài liệu

[1] Đề thi chuyên sư phạm ngày 2 tại http://diendantoanhoc.net/home

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển bài toán hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

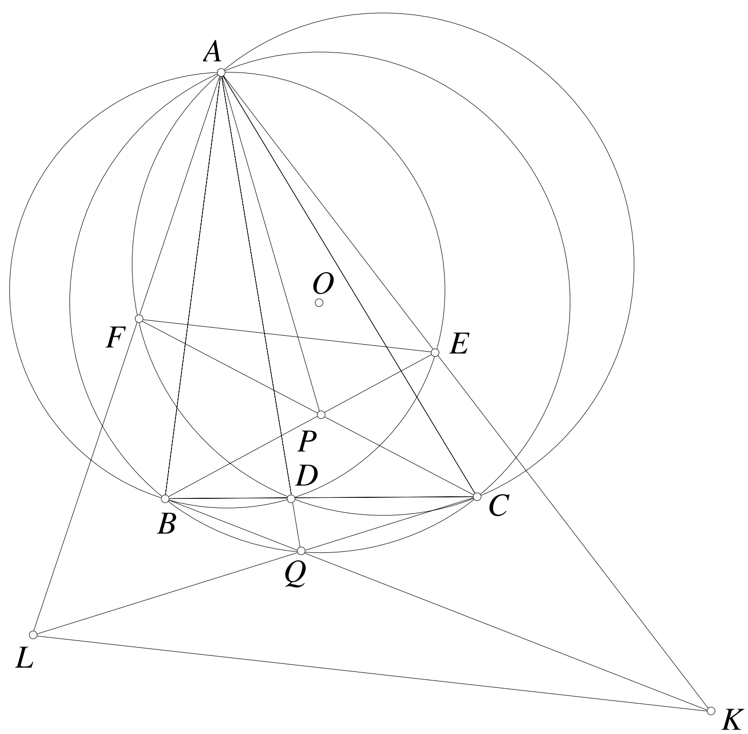
Trong kỳ thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên KHTN năm 2014 ngày 2 có bài toán hình học hay như sau

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh rằng tam giác ABE đồng dạng bới tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB. Chứng minh rằng $\angle QKL + \angle PAB = \angle QLK + \angle PAC$.



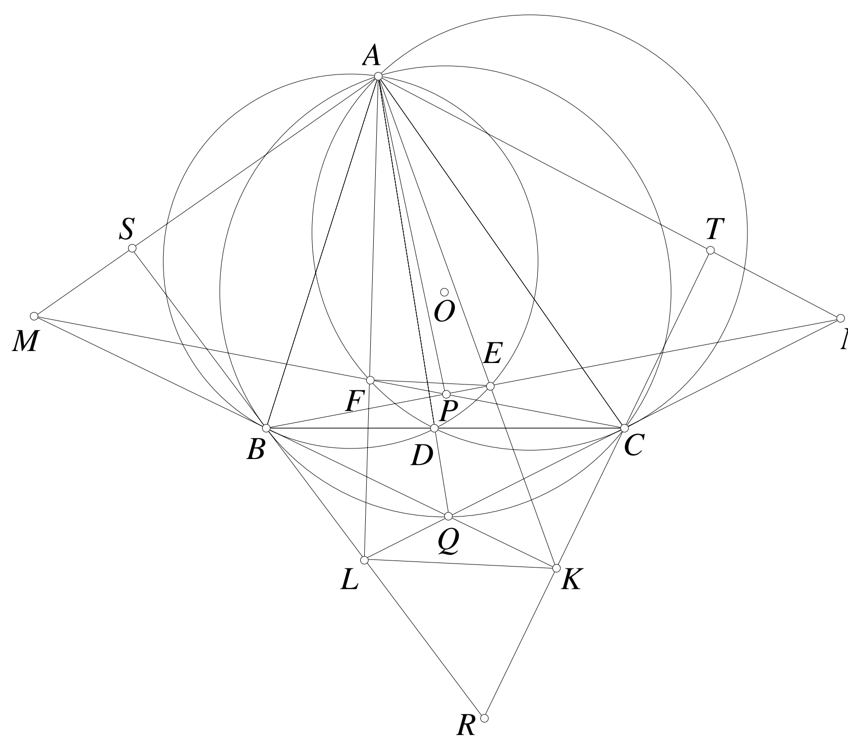
Hình 1.

Lời giải. 1) Ta có $\angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = \angle EBD + \angle FCB = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - \angle EPF$ suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp, điều phải chứng minh.

2) Từ tứ giác $AEPF$ nội tiếp suy ra $\angle AEB = \angle LFC$ (1).
Ta lại có $\angle FCL = \angle FCB + \angle BCL = \angle PBC + \angle BAQ = \angle DAE + \angle BAQ = \angle BAE$ (2).
Từ (1),(2) suy ra $\Delta FCL \sim \Delta EAB$, điều phải chứng minh.
3) Từ $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\dfrac{FL}{BE} = \dfrac{FC}{AE}$ hay $FL.EA = FC.EB$ (3).
Chứng minh tương tự $EK.FA = FC.EB$ (4).
Từ (3),(4) suy ra $FL.EA = EK.FA$ hay $\dfrac{FL}{FA} = \dfrac{EK}{EA}$ suy ra $EF \parallel KL$.
Ta lại có $\angle QLK = \angle ALK - \angle ALQ = \angle AFE - \angle ABE = \angle APE - \angle ABE = \angle PAB$.
Tương tự ta có $\angle QKL = \angle PAC$.
Từ đó suy ra $\angle QKL + \angle PAB = \angle QLK + \angle PAC$, điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đây là bài toán hay có kết cấu chặt chẽ các ý liên quan tới nhau. Ba câu được chia ra ba mức độ dễ, trung bình và khó để phân loại được học sinh. Ý chính của bài toán tập trung vào việc chứng minh $EF \parallel KL$. Ý cuối của bài toán là một cách khai thác sự kiện này. Việc chỉ ra các tam giác đồng dạng và hai đường thẳng song song có thể dùng để khai thác thêm nhiều bài toán thú vị khác từ mô hình này, xin giới thiệu với bạn đọc một vài bài toán như vậy

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác s $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và DAC. PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A. AE cắt đường thẳng QB tại K. AF cắt đường thẳng QC tại L. CK giao BL tại R. CF giao QB tại M. BE giao QC tại N. RB cắt AM tại S. RC cắt AN tại T. Chứng minh rằng bốn điểm A, S, R, T cùng thuộc một đường tròn.

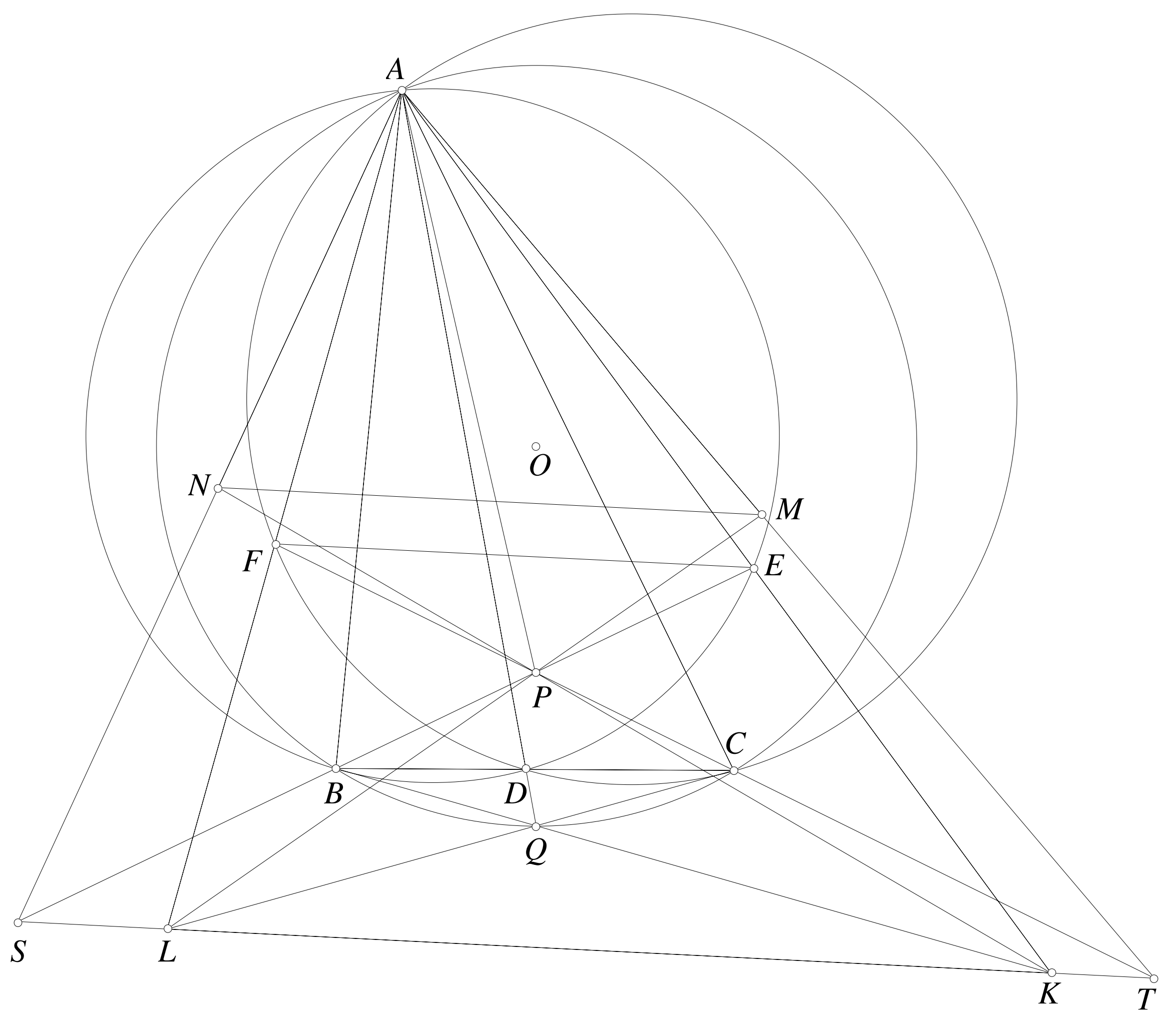


Hình 2.

Lời giải. Từ trong chứng minh bài 1 $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\angle FLC = \angle ABE$ suy ra tứ giác $ABLN$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $ACLM$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle SAT = \angle MAC + \angle NAB - \angle BAC = \angle QKR + \angle QLR - (180^\circ - \angle BQC) = 360^\circ - \angle KRL - 180^\circ = 180^\circ - \angle KRL$. Từ đó suy ra tứ giác $ASRT$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán được khai thác tiếp tục như sau

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AE cắt đường thẳng QB tại K ,đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Giả sử các đường thẳng PE, PF cắt KL tương ứng tại S và T. Các đường thẳng $PL,\ PK$ lần lượt cắt AT, AS tại M và N. Chứng minh rằng $MN \parallel EF$.



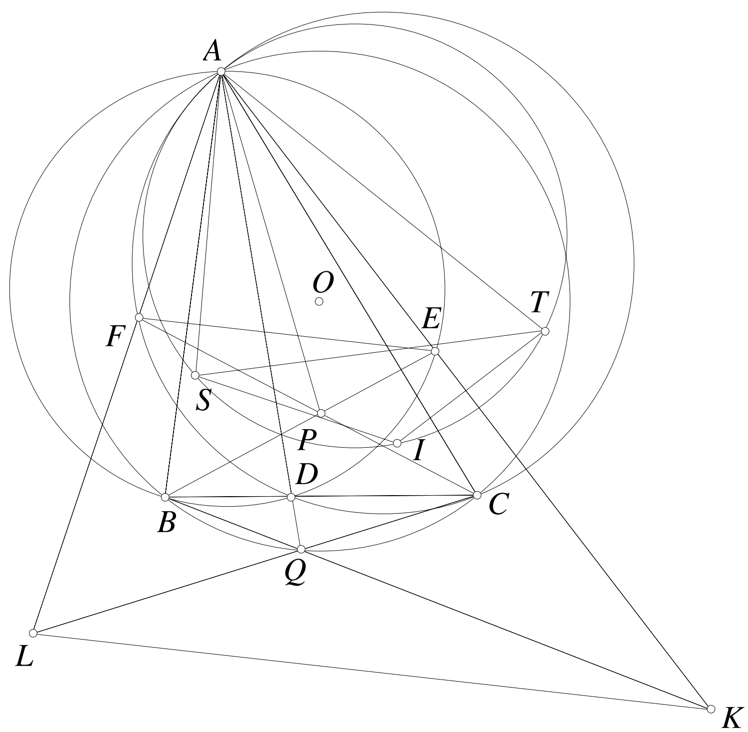
Hình 3.

Lời giải. Theo bài 1 đã có ra $EF \parallel KL$. Ta lại có $\angle FAP = \angle FEP = \angle PSL$ suy ra tứ giác $APLS$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $APKT$ nội tiếp, suy ra $\angle MPN = \angle MPA + \angle APN = \angle AST +$

$\angle ATS = 180^\circ - \angle SAT$ suy ra tứ giác $AMPN$ nội tiếp. Vậy $\angle ANM = \angle APM = \angle AST$ suy ra $MN \parallel ST \parallel EF$, điều phải chứng minh. □

Bài toán vẫn được tiếp tục khai thác như sau

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AE cắt đường thẳng QB tại K ,đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Giả sử P cố định và D di chuyển trên BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL luôn thuộc một đường tròn cố định khi D di chuyển.



Hình 4.

Lời giải. Từ trong chứng minh bài 1 $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\angle FLC = \angle ABE$. Ta chú ý P cố đinh nên $\angle ABE$ không đổi do đó $\angle FLC$ không đổi. Mặt khác A, C cố định nên đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ALC là đường tròn cố định. Tương tự đường tròn (S) ngoại tiếp tam giác AKB cũng là đường tròn cố định. Nếu gọi I là tâm ngoại tiếp tam giác AKL thì dễ thất $IS \perp AL, IT \perp AK$ từ đó $\angle SIT = 180^\circ - \angle KAL = \angle EPF$ vì P cố định nên $\angle EPF$ không đổi. Mà S, T cố định, từ đó đường tròn ngoại tiếp tam giác IST cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Chú ý. Ta dễ chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác IST đi qua A.

Như vậy qua một số ví dụ trên, các bạn phần nào thấy được các sự phát triển khác nhau của một số vấn đề được nêu ra trong bài toán thi. Rõ ràng bài toán thi là một bài toán mang nhiều ý nghĩa. Các bạn có thể tự tìm ra cho mình một vài phát triển thú vị khác từ mô hình bài toán gốc từ các yếu tố cố định và di chuyển đã có.

Tài liệu

[1] Đề thi chuyên KHTN ngày 2 tại http://diendantoanhoc.net/forum

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 1

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển bài toán hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 1 bằng các công cụ hình học của cấp 3.

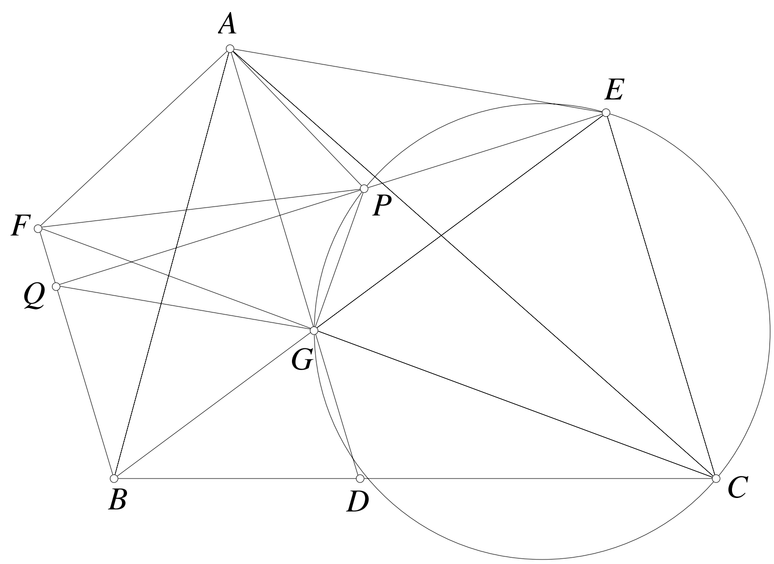
Trong kỳ thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên KHTN năm 2014 ngày 1 có bài toán hình học hay như sau

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < BC$. D là điểm thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác của $\angle BAC$. Đường thẳng qua C song song với AD cắt trung trực của AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt trung trực của AB tại F.

1) Chứng minh rằng tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

2) Chứng minh rằng các đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là G.

3) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BFtại Q. Đường thẳng QEcắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn.



Hình 1.

Lời giải. 1) Hai tam giác $\triangle ABF$ và $\triangle ACE$ lần lượt cân tại F, E. Ta có $\angle FBA = \angle BAD = \angle CAD = \angle ECA$ suy ra $\triangle ABF \sim \triangle ACE$, điều phải chứng minh.

2) Giả sử G là giao điểm của BE và CF. Ta có $\dfrac{GF}{GC} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ suy ra $GD \parallel FB$. Kết hợp với $FB \parallel AD$ ta có $G \in AD$, điều phải chứng minh.

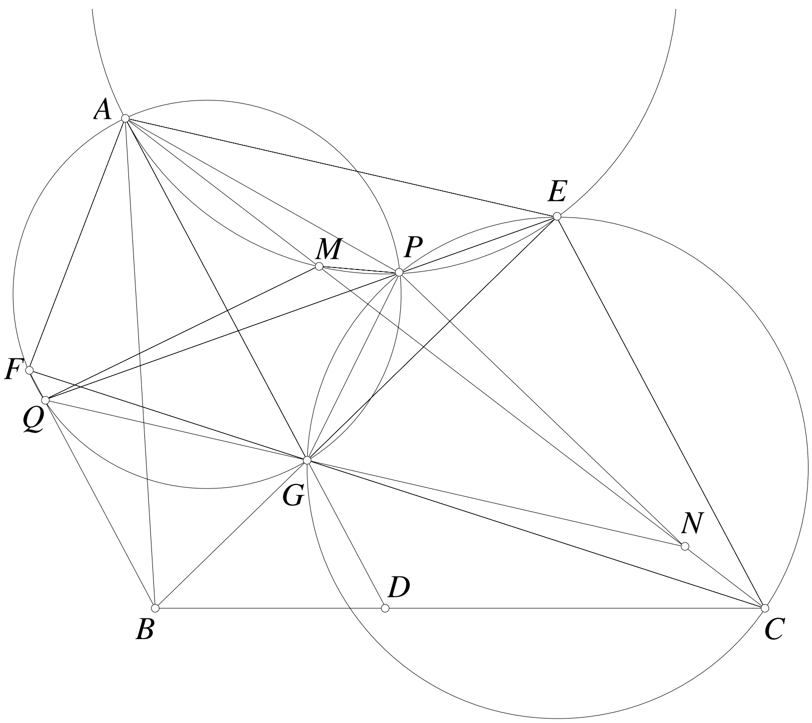
3) Ta có$\angle BQG = \angle QGA = \angle GAE = \angle GAC + \angle CAE = \angle GAB + \angle BAF = \angle GAF$. Suy ra tứ giác $AGQF$ nội tiếp. Mặt khác ta có $\angle QPG = \angle GCE = \angle GFQ$. Vậy tứ giác $FQGP$ nội tiếp. Do đó các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn, điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán hay có kết cấu chặt chẽ các ý liên quan tới nhau. Ba câu được chia ra ba mức độ dễ, trung bình và khó để phân loại được học sinh. Ý chính của bài toán tập trung vào việc chứng minh năm điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn. Đây là ý hay có nhiều khai thác thú vị. Xin giới thiệu với bạn đọc một vài khai thác như vậy

Bài 2. Cho tam giác ABC phân giác AD với D thuộc đoạn BC. Đường thẳng qua C song song AD cắt trung trực AC tại E. Đường thẳng qua B song song AD cắt trung trực AB tại F.

1) Chứng minh rằng BE, CF và AD đồng quy tại điểm G.

2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác GAF và GCE cắt nhau tại P khác G. PE cắt BF tại Q. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác APE cắt AC tại M khác P. Gọi FG cắt AC tại N. Chứng minh rằng bốn điểm Q, M, P, N cùng thuộc một đường tròn.



Hình 2.

Lời giải. 1) Ta đã chứng minh trong ý 2 của bài 1.

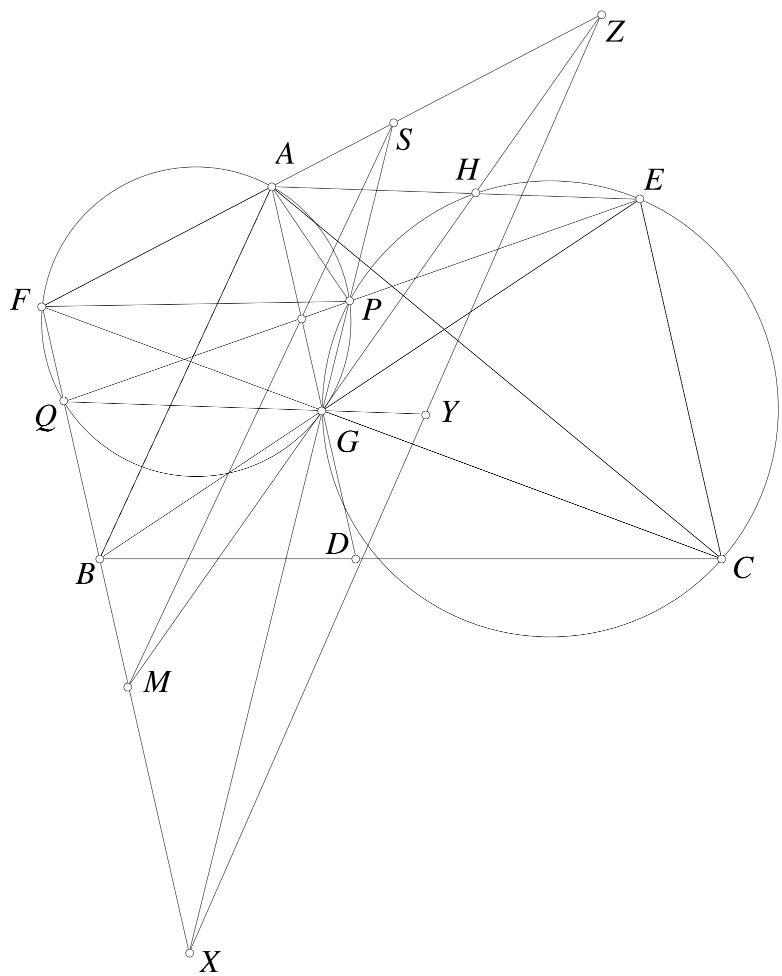
2) Ta có tứ giác $PECG$ nội tiếp suy ra $\angle QPG = \angle ECG = \angle BFG$ đẳng thức cuối do $BF \parallel CE$ nên góc so le trong bằng nhau. Từ đó suy ra tứ giác $FPGQ$ nội tiếp. Suy ra Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác GAF. Ta có $\angle QGA = 180^\circ - \angle AFB = 2\angle FAB = \angle GAE$ suy ra $GQ \parallel AE$. Từ đó $\angle MPQ = \angle MAE = \angle MNQ$ suy ra tứ giác $MPNQ$ nội tiếp, điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là sự khai thác rất đẹp yếu tố $GQ \parallel AE$. Từ bài toán gốc việc năm điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn khiến ta nghĩ nhiều tới định lý Pascal. Sau đây là một hướng khai thác đẹp mắt cho ý tưởng này.

Bài 3. Cho tam giác ABC phân giác AD với D thuộc đoạn BC. Đường thẳng qua C song song AD cắt trung trực AC tại E. Đường thẳng qua B song song AD cắt trung trực AB tại F.

1) Chứng minh rằng BE, CF và AD đồng quy tại điểm G.

2) Gọi AE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại H khác E. Đường thẳng qua G song song AE cắt FB tại Q. QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. FB cắt GH tại M. FA cắt GP tại S. Chứng minh rằng SM, QE và AD đồng quy.



Hình 3.

Lời giải. 1) Đã chứng minh trong bài toán 1.

2) Trước hết theo bài toán 1 thì năm điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn. Ta lại có $\angle PGH = \angle PEH = \angle PQG$. Từ đó PH tiếp xúc đường tròn đi qua A, P, G, Q, F. Áp dụng định lý Pascal cho bộ các điểm $\begin{pmatrix} G & A & Q \\ F & G & P \end{pmatrix}$ ta suy ra các giao điểm của $GP \cap FQ \equiv X,\ AP \cap GQ \equiv Y,\ GH \cap FA \equiv Z$ thẳng hàng. Từ đó áp dụng định lý Desargues cho tam giác $\triangle PSA$ và $\triangle QMG$ có các giao điểm $PS \cap QM \equiv X,\ SA \equiv MG \equiv Z,\ QP \cap GQ \equiv Y$ thẳng hàng. Từ đó PQ, SM, AG đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc chỉ ra PH tiếp xúc đường tròn đi qua A, P, G, Q, F đóng vai trò quan trọng. Sau đó việc xử lý bằng các định lý xạ ảnh là Pascal và Desargues làm bài toán trở nên có ý nghĩa hơn.

Bài toán vẫn còn rất nhiều ứng dụng thú vị khác, các bạn hãy dành thời gian khám phá.

Tài liệu

[1] Đề thi chuyên KHTN ngày 1 tại http://diendantoanhoc.net/forum

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về một bài toán hay trên THTT

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển bài toán hình học trên THTT số 440 tháng 2 năm 2014 với các công cụ hình học thuần túy.

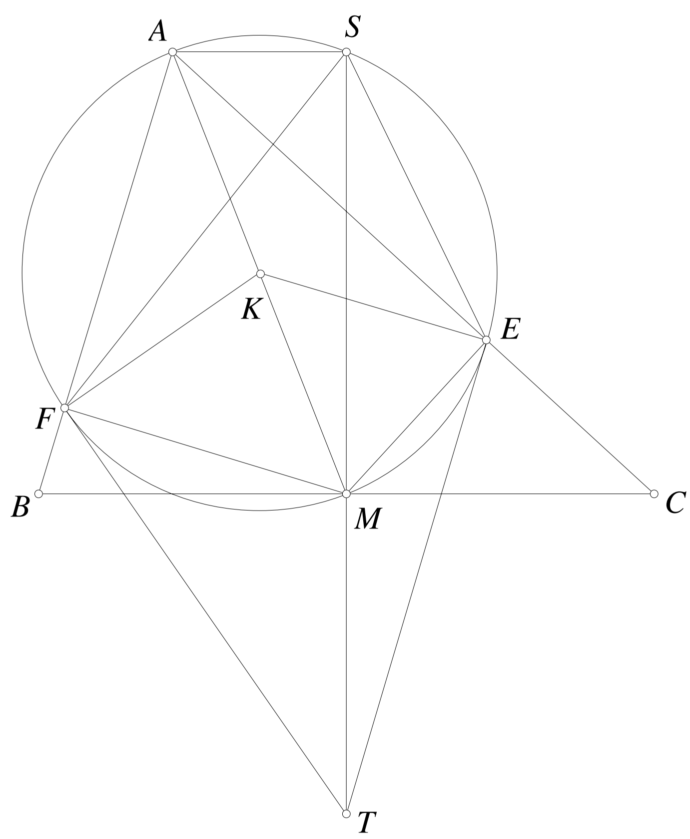
Trên báo THTT số 440 tháng 2 năm 2014, cuộc thi kỷ niệm 50 năm [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, trực tâm H và M là trung điểm BC. P là một điểm thuộc đường thẳng HM. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC.

Bài toán này là một mở rộng khá có ý nghĩa của một bài toán rất nổi tiếng và kinh điển. Bài toán đó xuất hiện lần đầu trong cuộc thi tranh cúp Kolmogorov ở Nga [2] và lại xuất hiện lại trong kỳ thi chọn đội tuyển Kazakhstan thi Olympics Balkan năm 2007 [3]. Bài toán đó như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Đường tròn đường kính AM cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường kính AM cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TM \perp BC$.

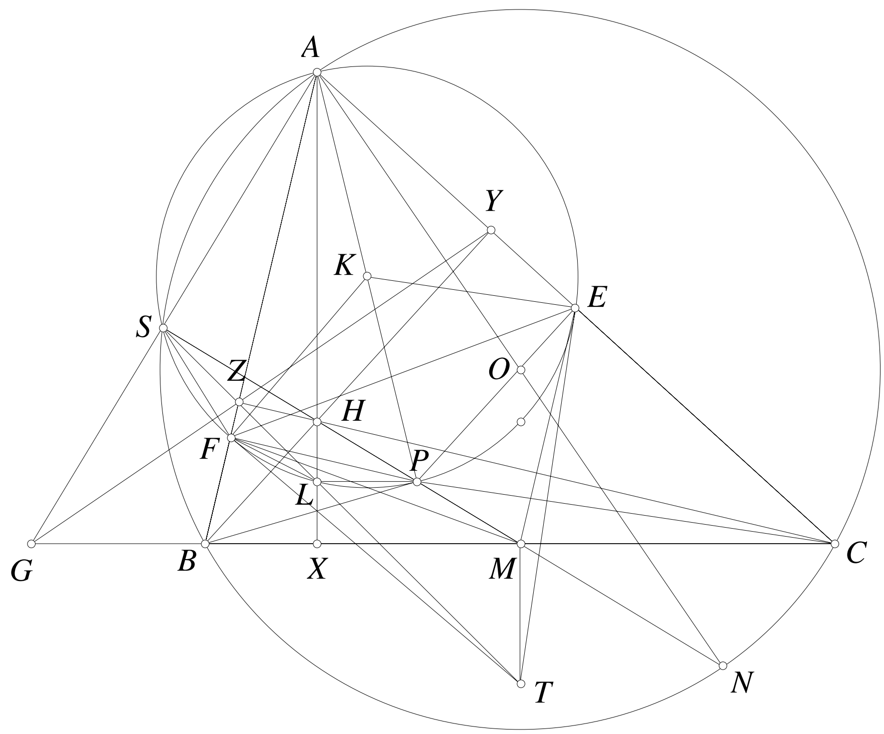
Bài toán này có một lời giải ứng dụng tứ giác điều hòa rất đẹp tôi xin trình bày lại như sau



Hình 1.

Lời giải bài toán 2. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (K) tại S khác A. Do M là trung điểm BC nên chùm $A(BC, SM) = -1$. Chiếu lên đường tròn (K) suy ra hàng $(FE, SM) = -1$ do đó tứ giác $SEMF$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại E, F và SM đồng quy. Dễ thấy $SM \perp SA \parallel BC$ do đó SM là trung trực BC nên tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Sau đây tôi xin trình bày lại hai lời giải cho bài toán 1.



Hình 2.

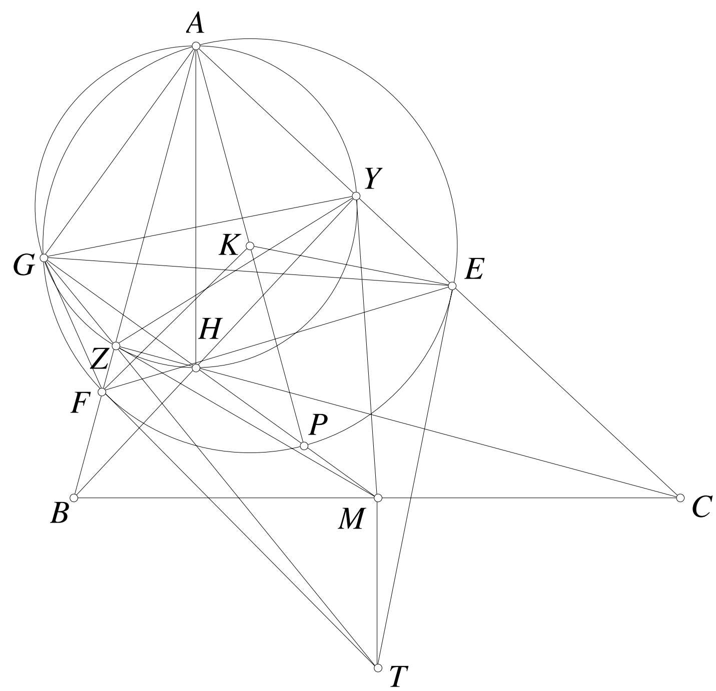
Lời giải thứ nhất bài toán 1. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AN là đường kính của (O). AX, BY, CZ là đường cao của tam giác ABC. Dễ thấy tứ giác $HBNC$ là hình bình hành do đó HM đi qua N. Gọi NH cắt (O) tại S khác N suy ra $\angle NSA = 90°$. Vậy S cũng thuộc đường tròn đường kính AH, mặt khác dễ thấy Y, Z cũng nằm trên đường tròn đường kính AH. Gọi YZ cắt BC tại G thì dễ có hàng $(BC, XG) = -1$. Ta chú ý M, X, Y, Z đều nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC do đó $\overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GX}.\overline{GM} = \overline{GY}.\overline{GZ}$ suy ra G thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AH và (O) suy ra G thuộc AS.

Ta lại chú ý $\angle ASP = 90°$ nên S cũng thuộc đường tròn (K). Gọi AX cắt (K) tại L khác A. Ta thấy chùm $A(BC, XG) = -1$ chiếu lên đường tròn (K) suy ra hàng $(FE, LS) = -1$ suy ra tứ giác $SELF$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại điểm T thuộc SL. Theo tính chất tiếp tuyến ta dễ có $\dfrac{TL}{TS} = \dfrac{FL^2}{FS^2}$ (1).

Ta cố định tam giác ABC, xét P di chuyển ta thấy $\angle FSL = \angle FAL$ không đổi khi P di chuyển, $\angle FLS = \angle FAS$ cũng không đổi khi P di chuyển vì ta chú ý S cố định do N, H cố định. Do đó tam giác FSL có hai góc không đổi nên luôn tự đồng dạng do đó tỷ số $\dfrac{FL^2}{FS^2}$ không đổi (2).

Từ (1),(2) ta có tỷ số $\dfrac{TL}{TS}$ luôn không đổi mà S cố định, L di chuyển trên đường cao AX cố định do đó T di chuyển trên đường thẳng song song AX cố định. Theo bài toán 2 khi P trùng M thì T thuộc trung trực BC cũng song song AX. Do đó T luôn thuộc trung trực BC cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Lời giải thứ 2 sau đây thuần túy hình học THCS được trích dẫn từ trên báo THTT số 444 tháng 6 năm 2014 được tác giả làm gọn hơn

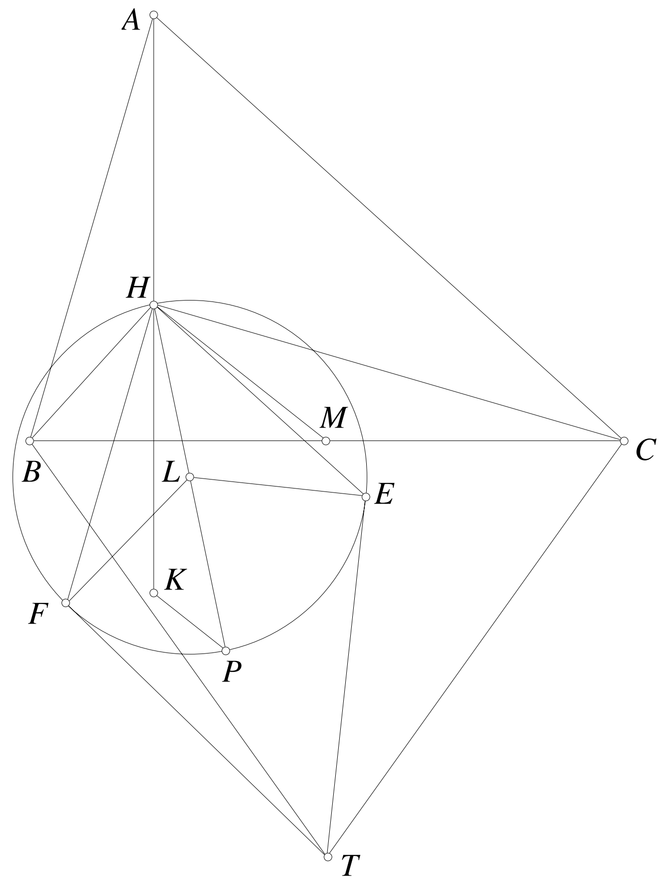


Hình 3.

Lời giải thứ hai bài toán 1. Gọi BY, CZ là đường cao của tam giác ABC dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ đi qua H. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt (K) tại G khác A. Ta dễ thấy $HG \perp GA \perp PG$ từ đó P, H, G thẳng hàng. Ta cũng dễ thấy $\triangle GYE \sim \triangle GZF$ suy ra $\triangle GYZ \sim \triangle GEF$. Dễ thấy M là giao hai tiếp tuyến tại Y, Z của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ. Gọi hai tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Từ $\triangle GYZ \sim \triangle GEF$ suy ra $\triangle GFT \sim \triangle GZM$ hay $\triangle GZF \sim \triangle GMT$ suy ra $\angle GMT = \angle GZF = 180^\circ - \angle GZA = 180^\circ - \angle GHA = \angle AHP$ suy ra $TM \parallel AH \perp BC$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Cách giải trong lời giải thứ nhất là cách tác giải nghĩ ra bài toán này. Tuy nhiên cách giải trong lời giải thứ hai mới thực sự là sơ cấp và nhiều ý tưởng khai thác. Việc dựng ra điểm G chính là dựng ra tâm đồng dạng biến đoạn YZ thành EF và biến M thành T. Lời giải chứa đựng ý tưởng sâu sắc về biến hình nhưng được trình bày dưới dạng các bổ đề về tam giác đồng dạng chung đỉnh. Sau đây là một số khai thác cho bài toán này

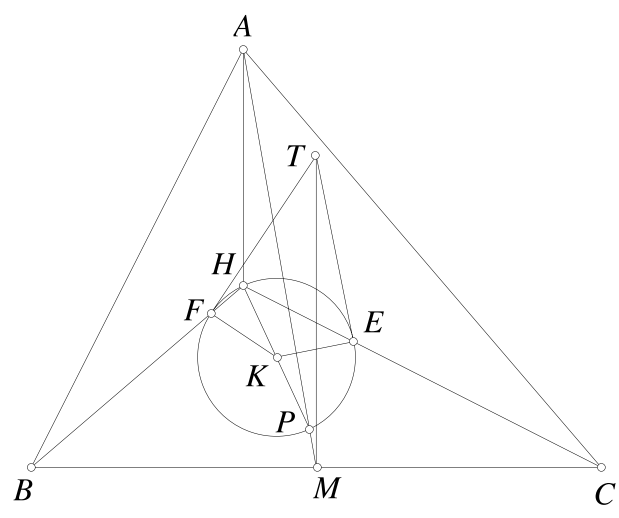
Bài toán 3. Cho tam giác ABC trực tâm H và M là trung điểm BC. K đối xứng A qua H. P là một điểm sao cho $PK \parallel HM$. Trên đường tròn đường kính HP lấy các điểm E, F sao cho $HF \parallel AB, HE \parallel AC$. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường kính HP cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TB = TC$.



Hình 4.

Đây là một bài toán hay, các bạn có thể giải nó dễ dàng từ bài toán gốc bằng phép tịnh tiến.

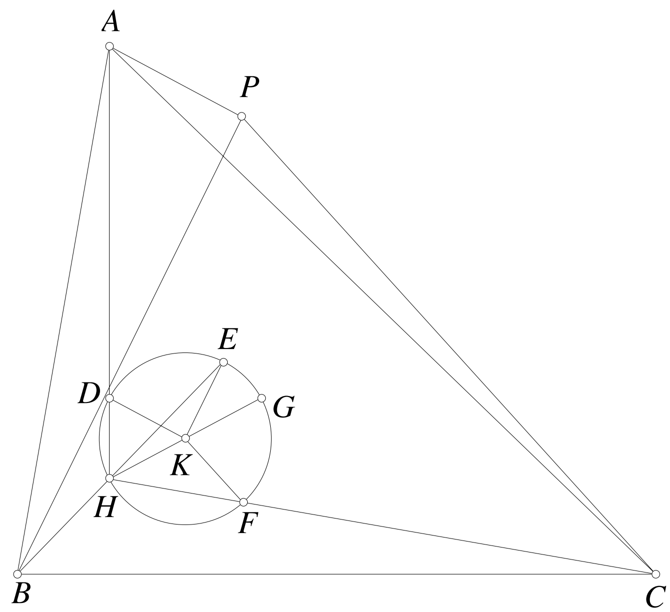
Bài toán 4. Cho tam giác ABC trực tâm H và trung tuyến AM. P là một điểm thuộc AM. Đường tròn (K) đường kính PH lần lượt cắt HC, HB tại E, F khác H. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường tròn (K) cắt nhau trên trung trực BC.



Hình 5.

Bài toán trên thực ra chỉ là bài toán 1 viết lại cho tam giác HBC và trực tâm A tuy nhiên bài toán trên sẽ gợi mở cho ta một ý tưởng hay khi P là trọng tâm như sau

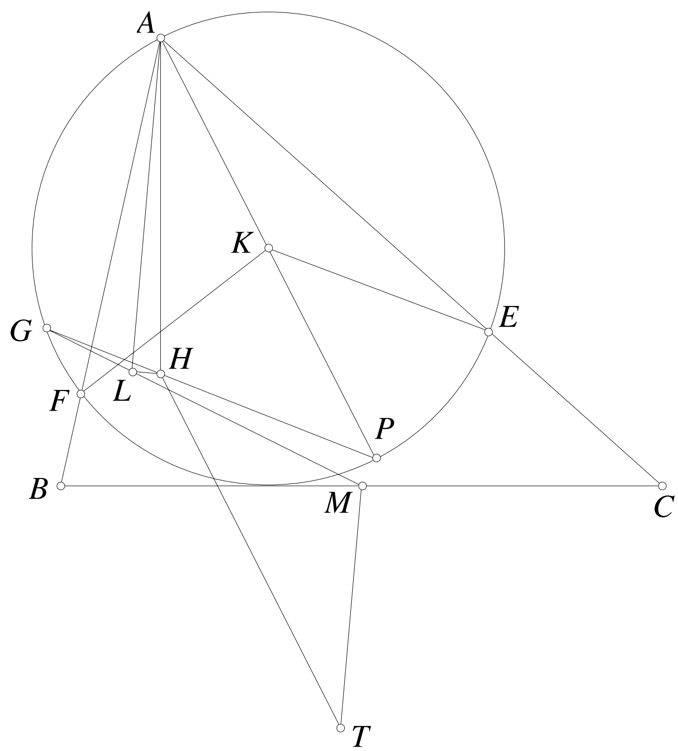
Bài toán 5. Cho tam giác ABC trực tâm H, trọng tâm G. Đường tròn (K) đường kính HG lần lượt cắt HA, HB, HC tại D, E, F khác H. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với KD, KE, KF đồng quy.



Hình 6.

Bài toán trên rất thú vị nhưng thực ra là ý tưởng của tam giác trực giao, các bạn hãy cùng suy nghĩ. Nếu tập trung vào khai thác ý tưởng trong lời giải thứ 2 ta sẽ dẫn ra được nhiều điều thú vị

Bài toán 6. Cho tam giác ABC trực tâm H và P là điểm bất kỳ. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB tại E, F khác A. PH cắt (K) tại G khác H. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A song song với MT cắt MG tại L. Chứng minh rằng $LA \perp LH$.



Hình 7.

Bài toán là một mở rộng quan trọng của bài toán 1 với tư tưởng đồng dạng. Các bạn hãy làm bài tập sau như là ứng dụng của bài toán trên

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trên trung trực BC. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TB = TC$ khi và chỉ khi P là trung điểm BC.

Tài liệu

[1] Tạp chí THTT số 440 tháng 2 năm 2014

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=16779

[3] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=202517

[4] Tạp chí THTT số 444 tháng 6 năm 2014

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Một số đề hình học trong kỳ thi vào trường PTNK

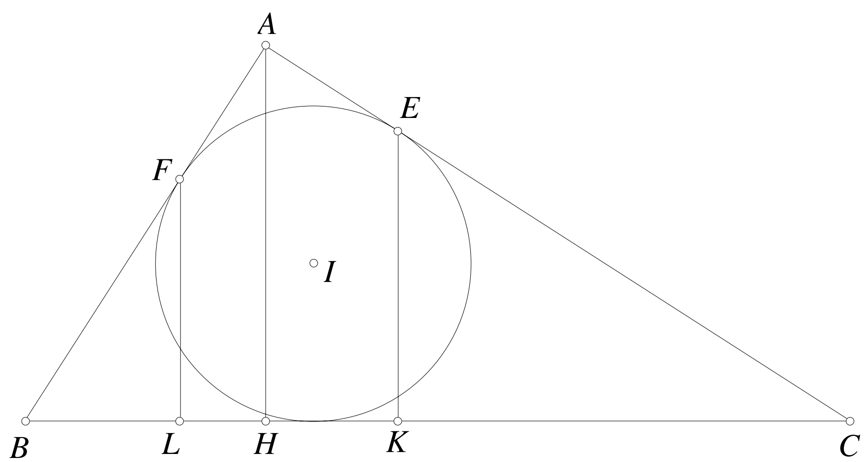
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết sẽ tập trung khai thác và phát triển một số đề hình học thi vào trường PTNK từ năm 1999 tới năm 2015.

Đề thi vào trường PTNK năm 2000 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc CA, AB tại E, F. Gọi K, L là hình chiếu của E, F lên BC. Chứng minh rằng $AH^2 = 2EK.FL$.



Hình 1.

Lời giải. Từ tính chất cơ bản của đường tròn nội tiếp thì

$$BF = \frac{BC + BA - AC}{2}, CE = \frac{CB + CA - AB}{2}.$$

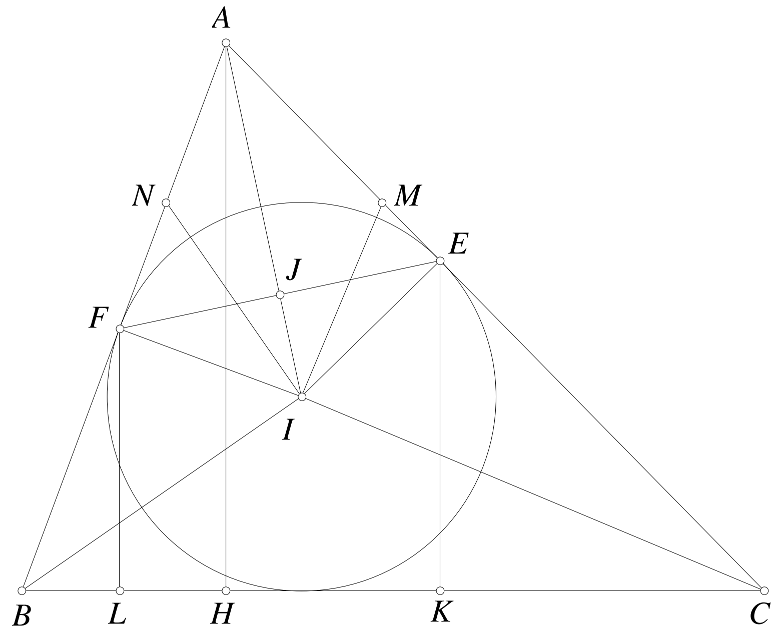
Từ đó theo định lý Thales

$$\frac{EK.FL}{AH^2} = \frac{BF}{BA}.\frac{CE}{CA} = \frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{AB.AC} = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB.AC}{AB.AC} = 2$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là ứng dụng cơ bản của tính chất đường tròn nội tiếp định lý Thales và định lý Pythagore. Cuối đề bài cũng đặt ra câu hỏi là xét bài toán với tam giác thường ? Đó là vấn đề thú vị khi thay thế góc vuông hiển nhiên bài toán không thể đúng nếu giữ nguyên các giả thiết. Tuy vậy nếu phát triển giả thiết gốc thêm một chút ta sẽ thu được bài toán mới rất thú vị như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC đường cao AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. Gọi K, L là hình chiếu của E, F lên BC. Gọi IA cắt EF tại J. Chứng minh rằng $AH^2 = \frac{IA}{IJ}.EK.FL$.



Hình 2.

Lời giải. Ta thấy $\dfrac{IA}{IJ}.\dfrac{EK.FL}{AH^2} = \dfrac{IA^2}{IA.IJ}.\dfrac{BF}{BA}.\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{IA^2}{AB.AC}.\dfrac{BF.CE}{IF.IE}$ (1).

Lấy các điểm M, N thuộc CA, AB sao cho $IM \perp IC, IN \perp IB$ ta dễ thấy $\triangle ANI \sim \triangle AIC$, $\triangle AMI \sim \triangle AIB$. Từ đó $\dfrac{BF}{IF} = \dfrac{IB}{IN} = \dfrac{IB}{\frac{IA}{AC}.IC} = \dfrac{IB.AC}{IA.IC}$ (2).

Tương tự $\dfrac{CE}{IE} = \dfrac{IC.AB}{IA.IB}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\dfrac{IA}{IJ}.\dfrac{EK.FL}{AH^2} = 1$ hay $AH^2 = \dfrac{IA}{IJ}.EK.FL$. □

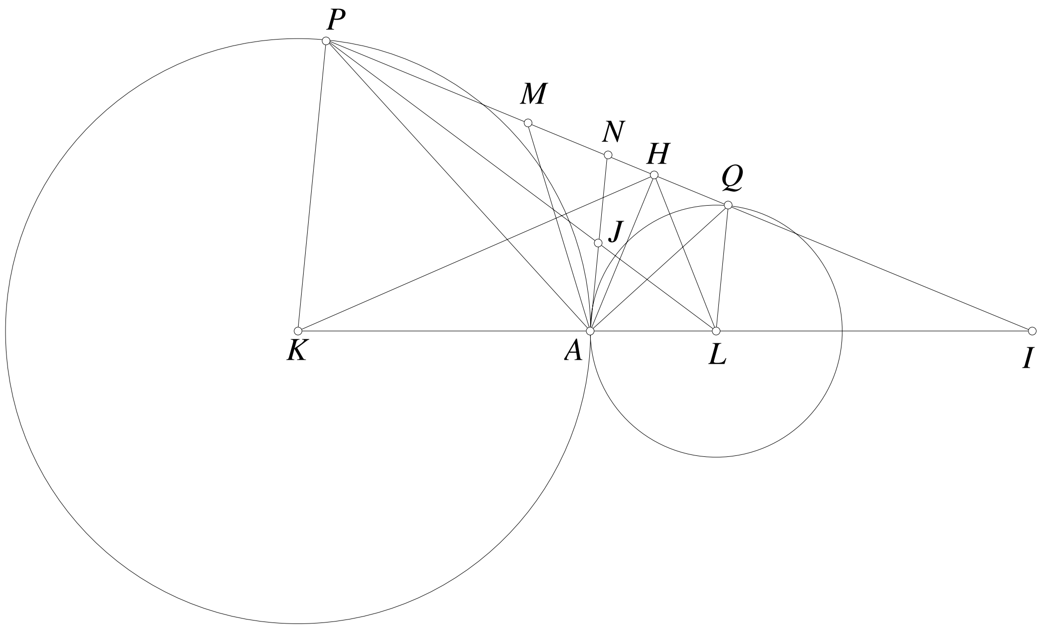
Nhận xét. Ta thấy ngay khi tam giác vuông tại A thì $IA = 2IJ$ ta thu được bài toán ban đầu. Thực chất tác giả đạt được bài toán trên nhờ một số biến đổi lượng giác tương tự cách làm ở bài toán gốc. Tuy vậy trong quá trình giải thì tìm được lời giải như trên thực sự đã thoát ly được ý tưởng lượng giác và làm bài toán trở nên ý nghĩa hơn. Thực chất bài toán 1 vẫn còn rất nhiều điều thú vị chờ các bạn khám phá. Bài toán 2 mới chỉ là khai thác có tính ban đầu, các bạn hãy suy nghĩ thêm về vấn đề này.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2001 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 3. Cho hai đường tròn (K) và (L) có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài nhau tại A. Các điểm P, Q lần lượt thuộc $(K), (L)$ sao cho $\angle PAQ = 90°$.

a) Gọi H là hình chiếu của A lên P, Q. Chứng minh rằng H luôn thuộc một đường tròn cố định khi P, Q di chuyển.

b) Gọi M là trung điểm PQ. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{2}{AH} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ}$ thì AM là tiếp tuyến chung của (K) và (L).



Hình 3.

Lời giải. a) Ta thấy các tam giác KAP và LAQ cân tại K, L nên $\angle KAP + \angle LAQ = 180^\circ - 2\angle PAK + 180^\circ - 2\angle QAL = 360^\circ - 2.90^\circ = 180^\circ$ suy ra $KP \parallel LQ$. Do (K) và (L) bán kính khác nhau nên PQ cắt KL tại I. Theo định lý Thales dễ thấy $\dfrac{IK}{IL} = \dfrac{KP}{LQ}$ không đổi mà K, L cố định nên I cố định. Từ đó H thuộc đường tròn đường kính IA cố định. Ta có điều phải chứng minh.

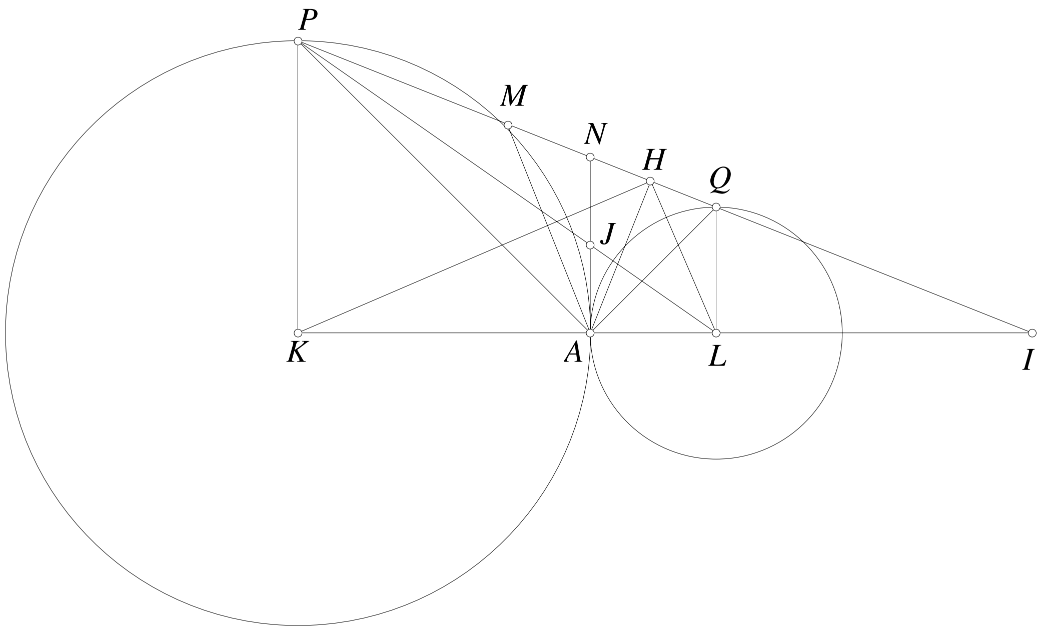
b) Lấy điểm N thuộc PQ sao cho $AN \parallel KP \parallel LQ$. Gọi PL cắt AN tại J. Theo định lý Thales dễ thấy $\dfrac{AJ}{KP} = \dfrac{AL}{KL} = \dfrac{LQ}{KP + LQ}$ vậy $\dfrac{1}{AJ} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ}$. Tương tự $\dfrac{1}{NJ} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ} = \dfrac{1}{AJ}$. Vậy $\dfrac{2}{AN} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ} = \dfrac{2}{AH}$. Suy ra $H \equiv N$. Từ đó $KP \parallel LQ \parallel AH \perp PQ$ nên PQ là tiếp tuyến chung của (K) và (L). Dễ thấy tiếp tuyến chung tại A khi đó phải đi qua M là trung điểm PQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đề bài gốc có ý cuối là phát biểu và chứng minh khi hai đường tròn tiếp xúc trong, tuy vậy cách làm hoàn toàn tương tự. Việc chỉ ra điểm cố định đóng vài trò quan trọng trong câu a). Câu b) là một ứng dụng quan trọng của định lý Thales trong hình thang. Bài toán có thể được khai thác như sau

Bài toán 4. Cho hai đường tròn (K) và (L) có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài nhau tại A. Các điểm P, Q lần lượt thuộc $(K), (L)$ sao cho $\angle PAQ = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng đối xứng của A qua PQ luôn thuộc một đường tròn cố định khi P, Q di chuyển.

b) Gọi M là trung điểm PQ và H là hình chiếu của A lên PQ. Chứng minh rằng nếu phân giác $\angle MAH$ là tiếp tuyến chung của (K) và (L) thì $HK \perp HL$.



Hình 4.

Các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2003 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 5. a) Cho đường tròn (O) và một điểm I cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua I cắt (O) tại MN. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng quay quanh I.

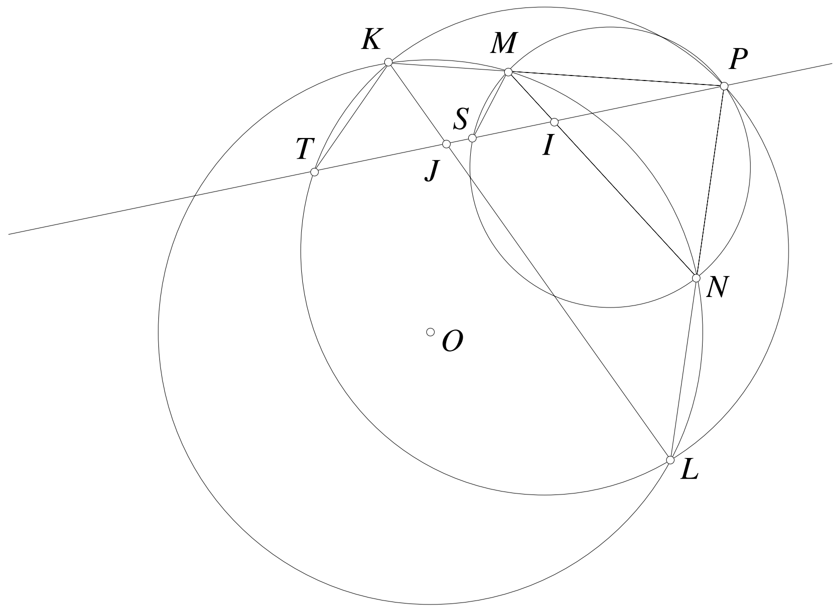
b) Cho đường tròn (O) và đường thẳng d ở ngoài (O). P di chuyển trên d. Đường tròn đường kính PO cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Cả hai bài toán trên thực chất đều là các vấn đề đã rất kinh điển và đã xuất hiện trước đó rất lâu trong nhiều tài liệu. Tôi sẽ không đi sâu vào giải mà sẽ mở rộng và khai thác cả hai bài toán đó

Bài toán 6. Cho đường tròn (O) và điểm I không nằm trên (O). MN là một dây cung đi qua I. P là một điểm cố định cũng không thuộc (O).

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định khác P.

b) Gọi PM, PN cắt (O) tại K, L khác M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL luôn đi qua một điểm cố định khác P.



Hình 5.

Lời giải. a) Gọi R là bán kính của (O). Không mất tổng quát giả sử I nằm trong (O), trường hợp ở ngoài tương tự. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN cắt PI tại S khác P. Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn thì $IS.IP = IM.IN = R^2 - OI^2$ không đổi nên S cố định.

b) Gọi KL cắt PI tại J. Không mất tổng quát giả sử P nằm ngoài (O), trường hợp ở trong tương tự. Ta thấy $\angle MSP = \angle MNP = \angle MKJ$ suy ra tứ giác $MKJS$ nội tiếp. Vậy $PS.PJ = PK.PM = OP^2 - R^2$ nên J cố định. Dây KL đi qua J cố định tương tự câu a) đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL đi qua T cố định khác P. □

Nhận xét. Đây là bài toán rất tổng quát và nhiều ý nghĩa. Chúng ta thường hay gặp những trường hợp đặc biệt của bài toán này trong nhiều bài toán ở các kỳ thi THCS ở Việt Nam. Các bạn một lần nữa thấy trường hợp riêng đó trong đề năm 2006 [1]. Sau đây là một ứng dụng của phần b) bài gốc

Bài toán 7. Cho đường tròn (O) nằm trong hai dải đường thẳng song song a, b. P thuộc a. Tiếp tuyến của (O) qua P cắt b tại A, B. M là trung điểm AB. Chứng minh rằng PM luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

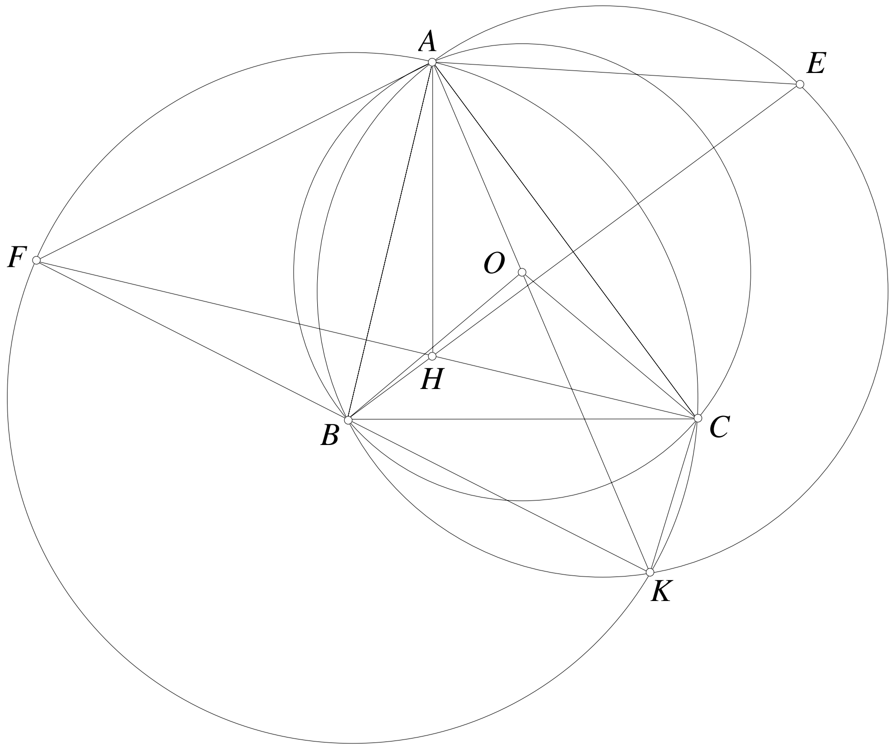
Phần b) là một bài tập kinh điển mà nó có quá nhiều ứng dụng, các bạn hãy tìm hiểu thêm.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2010 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với dây BC cố định không là đường kính và A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K khác A.

a) Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định khi A di chuyển.

b) Chứng minh rằng AK đi qua O.



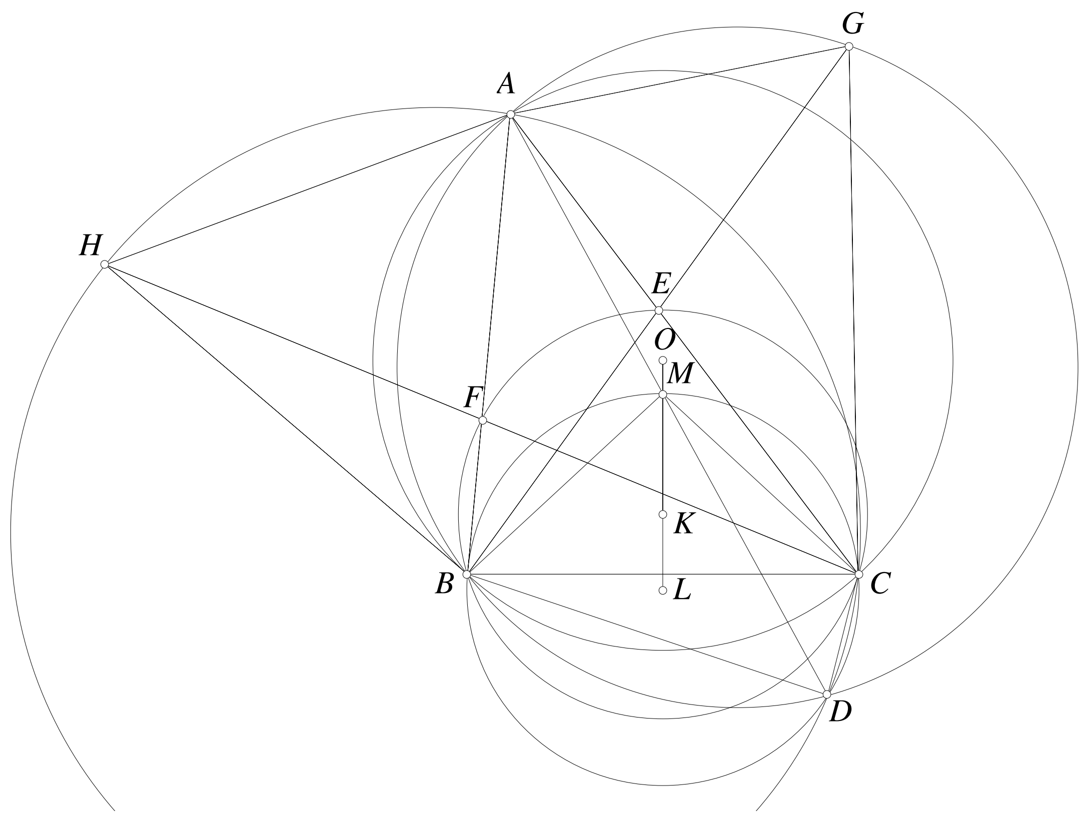
Hình 6.

Lời giải. a) Ta có $\angle BKC = \angle BKA + \angle CKA = \angle AFC + \angle AEB = \angle ACH + \angle ABH = 90^\circ - \angle BAC + 90^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BOC$. Vậy tứ giác $KBOC$ nội tiếp hay K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cố định.

b) Từ tứ giác $BOCK$ nội tiếp mà $OB = OC$ nên KO là phân giác $\angle BKC$. Từ trên dễ có $\angle CKA = \angle CFA = \angle ACH = \angle ABH = \angle AEB = \angle AEB = \angle BKA$ vậy KA là phân giác $\angle BKC$ nên K, O, A thẳng hàng. □

Nhận xét. Bài toán gốc phát biểu câu b) là chứng minh AK đi qua điểm cố định nhưng rõ ràng điểm cố định là O đã xuất hiện ngay trong đề nên phát biểu theo cách chứng minh thẳng hàng thuận tiện hơn. Nếu để ký kỹ ta cũng dễ thấy tâm ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC. Bài toán này tuy đơn giản xong có khá nhiều ý tưởng để phát triển, sau đây là một phát triển như thế

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với dây BC cố định không là đường kính và A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. (K) là một đường tròn cố định đi qua B, C lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác B, C. G, H lần lượt đối xứng B, C theo thứ tự qua E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH và tam giác ABG cắt nhau tại D khác A. Chứng minh rằng AD luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển.

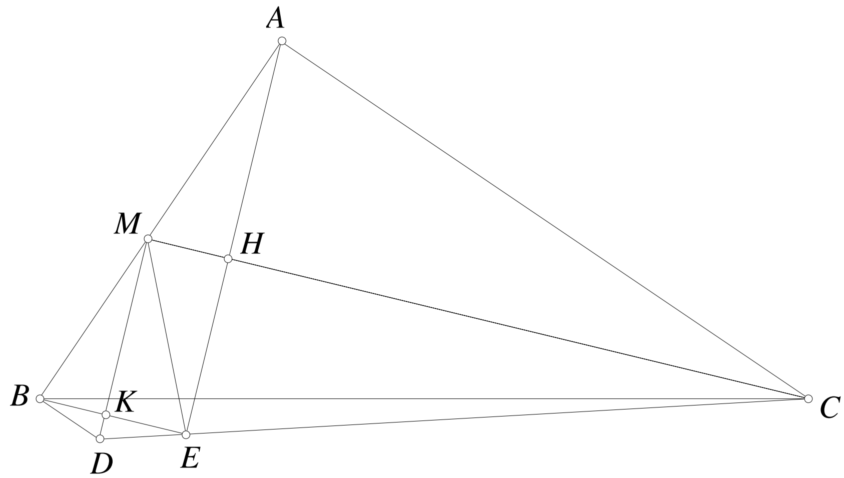


Hình 7.

Lời giải. Trước hết ta thấy AFC có các góc không đổi do (K) và (O) cố định. H lại đối xứng C qua F nên dễ thấy $\angle CDA = \angle CHA$ không đổi. Tương tự $\angle BDA = \angle BGA$ không đổi. Vậy nên $\angle BDC$ không đổi, D sẽ nằm trên đường tròn (L) cố định. Ta lại dễ thấy $\angle AFH = \angle AEG$, mặt khác $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{EG}{FH}$. Từ $\triangle AFH \sim \triangle AEG$. Vậy $\angle BDA = \angle AHF = \angle AGE = \angle ADB$. Từ đó DA là phân giác $\angle BDC$. Nếu gọi DA cắt (L) tại M khác A thì dễ thấy M phải thuộc trung trực BC, vậy M là giao của trung trực BC và (L) cố định suy ra AD đi qua M cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2012 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là một điểm trên cạnh AB. Đường thẳng qua M vuông góc MC cắt đường thẳng qua B song song AC tại D. Đường thẳng qua A song song MD cắt đường thẳng qua B song song MC tại E. Chứng minh rằng D, E, C thẳng hàng.



Hình 8.

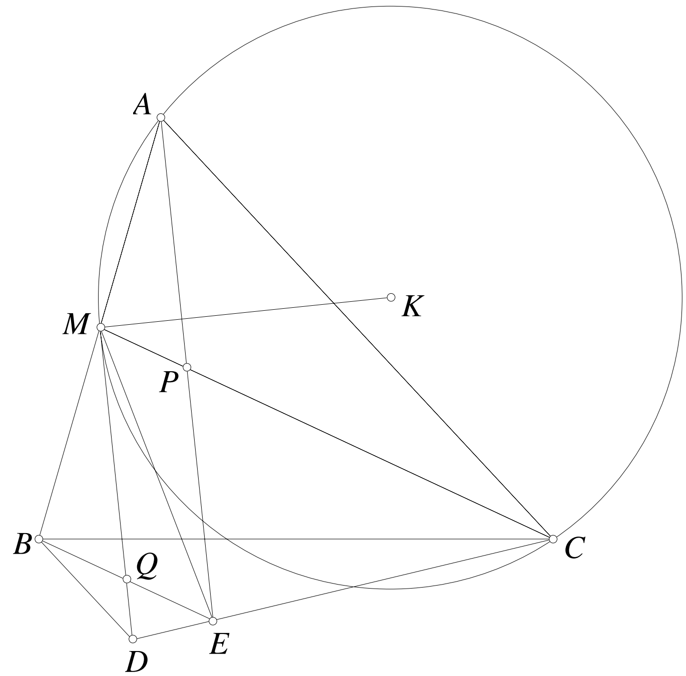
Lời giải. Gọi MC cắt AE tại H, MD cắt BE tại K. Ta dễ thấy các tam giác AMC, BDM vuông. Mặt khác $\angle BMD = \angle BAE = \angle = \angle ACM$. Do đó các tam giác AMC, BDM đồng dạng có đường cao tương ứng là AH, BK nên $\dfrac{HM}{HC} = \dfrac{KD}{KM}$. Từ đó dễ thấy trong tam giác DMC đường thẳng qua H song song với MD và đường thẳng qua K song song MC cắt nhau trên CD, vậy E thuộc CD. □

Nhận xét. Cách giải của bài toán chỉ thuần túy kiến thức lớp 8 về tam giác đồng dạng và định lý Thales. Bổ đề về hai đường thẳng cắt nhau trên CD là một bổ đề quen thuộc dùng định lý Thales xin nhắc lại bổ đề như sau.

Bổ đề 10.1. Cho tam giác ABC có E, F lần lượt thuộc cạnh CA, AB. Chứng minh rằng đường thẳng qua E song song AB và đường thẳng qua F song song AC đồng quy với BC khi và chỉ khi $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{FB}{FA}$.

Bổ đề là quen thuộc xin không nhắc lại cách chứng minh. Bài toán phát biểu trên tam giác vuông thì cũng sẽ có một cách nhìn trên tam giác bất kỳ như sau

Bài toán 11. Cho tam giác ABC với M là một điểm trên cạnh BC. Tiếp tuyến tại M của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC cắt đường thẳng qua B song song AC tại D. Đường thẳng qua A song song MD cắt đường thẳng qua B song song MC tại E. Chứng minh rằng C, D, E thẳng hàng.



Hình 9.

Lời giải. Do MD tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM nên $\angle MAC = \angle BMD = \angle MAP$. Do đó $\triangle MAP \sim \triangle MCA$ suy ra $\dfrac{MP}{MC} = \dfrac{MP}{MA}.\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{AP^2}{AC^2}$ (1).

Ta lại có góc có cạnh tương ứng song song là $\angle DBE = \angle MCA = \angle MAP = \angle BMD$, vậy $\triangle DBQ \sim \triangle DMB$ suy ra $\dfrac{DQ}{DM} = \dfrac{DQ}{DB}.\dfrac{DB}{DM} = \dfrac{BQ^2}{BM^2}$ (2).

Ta lại dễ thấy $\triangle BQM \sim \triangle MPA$ do chúng có cạnh tương ứng song song, từ đó $\dfrac{BQ^2}{BM^2} = \dfrac{MP^2}{MA^2} = \dfrac{AP^2}{AC^2}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\dfrac{MP}{MC} = \dfrac{DQ}{DM}$ hay $\dfrac{PM}{PC} = \dfrac{QD}{QM}$. Từ theo bổ đề đường thẳng qua A song song MD và đường thẳng qua B song song MC đồng quy với DC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán thực chất là ứng dụng tính chất tam giác đồng dạng chung cạnh, một trong những kiến thức cơ bản của các tam giác đồng dạng. Ta có thể loại bỏ yếu tố đường tròn và phát biểu một cách thuần túy kiến thức lớp 8. Bài toán còn nhiều vấn đề để khai thác xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2014 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, J là tâm nội tiếp các tam giác AHB, AHC. AI, AJ cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng MJ, IN, AH đồng quy.

Bài toán thực chất là ứng dụng một hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có thể tìm một lời giải dùng kiến thức lớp 8 như sau. Ta có bổ đề sau

Bổ đề 12.1. Cho tam giác ABC phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BE.CF = 2IB.IC$.

Chứng minh. Ta đã biết các hệ thức cơ bản của phân giác $\dfrac{IB}{BE} = \dfrac{BA+BC}{AB+BC+CA}$ và $\dfrac{IF}{IC} = \dfrac{CA+CB}{AB+BC+CA}$ do đó ta có biến đổi tương đương

$BE.CF = 2IB.IC$

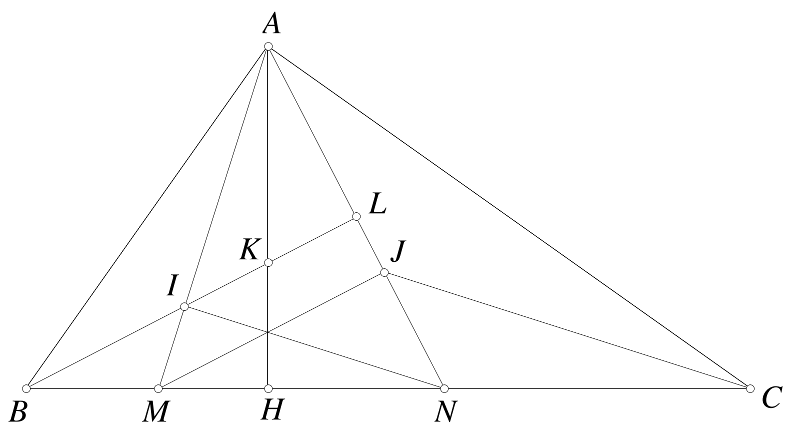
$2(BC+BA)(CB+CA) = (AB+BC+CA)^2$

$2BC^2 + 2BC.BA + 2BC.CA + 2AB.AC = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2BC.BA + 2BC.CA + 2AB.AC$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Tương đương tam giác ABC vuông tại A. □

Trở lại bài toán



Hình 10.

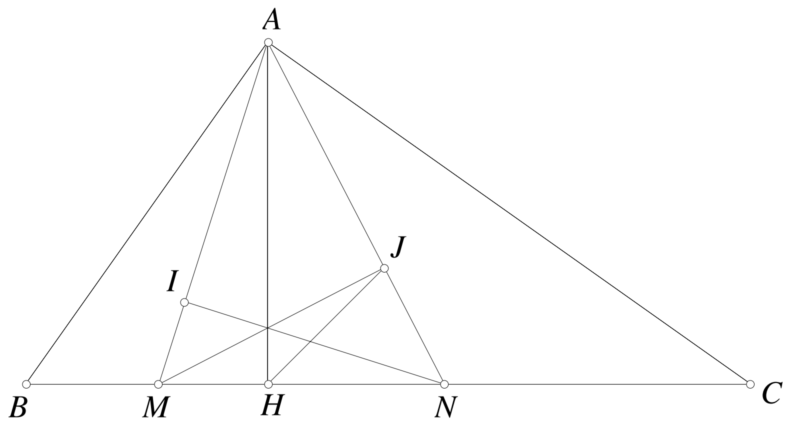
Lời giải 1. Gọi BI cắt AH tại K. Áp dụng bổ đề cho tam giác ABH ta có $BK.AM = 2IB.IA$ hay $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{BK}{2BI}$ (1).

Gọi L là trung điểm AN. Ta chú ý ABK và CAN đồng dạng có phân giác tương ứng là BK và CJ. Nên $\dfrac{BK}{2BI} = \dfrac{AN}{2AJ} = \dfrac{AL}{AJ}$ (2).

Ta dễ thấy $\angle BAN = \angle BAH + \angle HAN = \angle ACB + \angle NAC = \angle ANB$ do đó tam giác ABN cân. Vậy B, I, K, L thẳng hàng (3).

Từ (1),(2),(3) theo định lý Thales đảo thì $MJ \parallel IL \perp AN$. Tương tự $NI \perp AN$. Vậy trong tam giác AMN các đường cao MJ, IN, AH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải sau sử dụng thêm kiến thức lớp 9 có phần nhẹ nhàng hơn

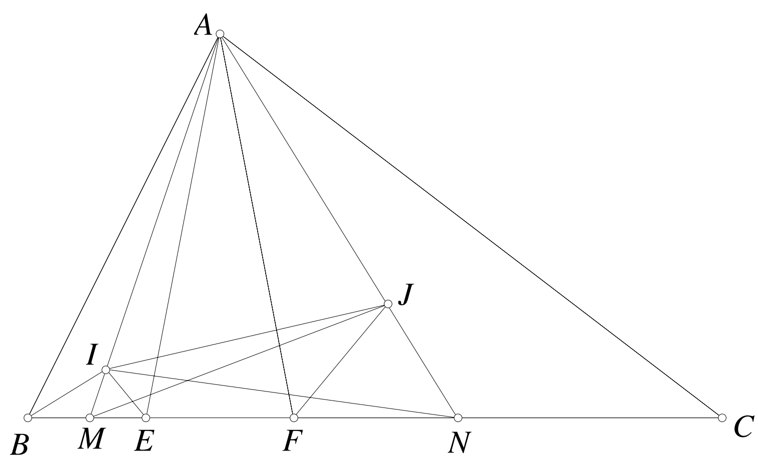


Hình 11.

Lời giải 2. Ta dễ thấy $\angle MAN = \dfrac{1}{2}\angle BAC = 45^\circ = \angle JHC$ nên tứ giác $AMHJ$ nội tiếp. Từ đó $\angle AJM = \angle AHM = 90^\circ$ vậy $MJ \perp AN$. Tương tự $NI \perp AN$. Vậy trong tam giác AMN các đường cao MJ, IN, AH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thứ 2 xem ra ngắn gọn hơn lời giải thứ nhất nhưng lại dùng kiến thức cao hơn. Ý chính của bài toán là tập trung chứng minh $MJ \perp AN$, từ đây ta dễ thấy tứ giác $MIJN$ nội tiếp, đây cũng là một ý hay từ đề toán gốc. Ta có thể mở rộng bài toán như sau

Bài toán 13. Cho tam giác ABC có các điểm E, F lần lượt thuộc tia CB, BC sao cho tam giác $\angle BAF = \angle BCA, \angle CAE = \angle ABC$. I, J là tâm nội tiếp tam giác ABE, ACF. AI, AJ cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, I, J cùng thuộc một đường tròn.



Hình 12.

Lời giải. Không mất tổng quát giả sử vị trí các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác ta làm tương tự. Ta có $\angle EAF = 180^\circ - \angle AEF - \angle AFE = 180^\circ - (\angle ABC + \angle BAE) - (\angle ACB + \angle CAF) = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ABC - \angle ABC) - (\angle ACB + \angle ABC - \angle ACB) = 180^\circ - 2\angle BAC$. Từ đó $\angle IAJ = \angle IAF + \angle EAF + \angle FAJ = \dfrac{1}{2}(\angle BAC - \angle ABC) + (180^\circ - 2\angle BAC) + \dfrac{1}{2}(\angle BAC - \angle ACB) = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BAC$.

Từ đó $2\angle JFN = \angle AFC = \angle ABC + \angle BAF = \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC = 2\angle IAJ$. Từ đó tứ giác $AJFM$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $AIEN$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle IMJ = \angle AFJ = \frac{1}{2}\angle AFN = \frac{1}{2}\angle AEM = \angle IEA = \angle INJ$ suy ra tứ giác $IJNM$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

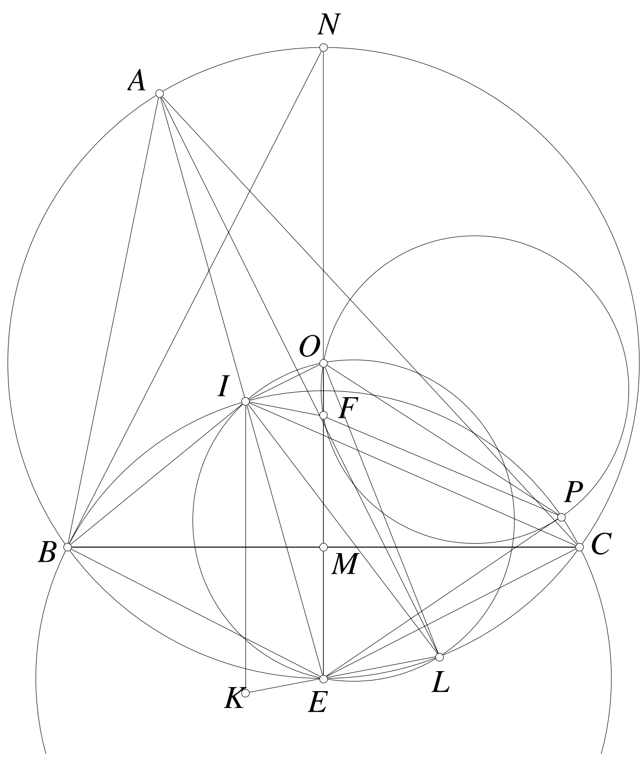
Nhận xét. Cách giải dùng tứ giác nội tiếp có hiệu lực hơn trong trường hợp tổng quát.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2015 [3] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ một số ý tưởng trong đề gốc nhưng được tác giả chỉnh sửa lại một chút cho đẹp hơn)

Bài toán 14. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn qua O, I tiếp xúc IA cắt trung trực BC tại F khác O. P là một điểm di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

a) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF luôn đi qua điểm E cố định khi P thay đổi.

b) Gọi K đối xứng I qua BC. KE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OIE tại L khác E. Chứng minh rằng L nằm trên (O).



Hình 13.

Lời giải. a) Gọi AI cắt (O) tại E khác A thì E là tâm ngoại tiếp tam giác IBC. Từ đó $EP^2 = EI^2 = EO.EF$. Từ đó EP tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác POF hay tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua E cố định.

b) Gọi M là trung điểm BC và EN là đường kính của (O). Từ hệ thức lượng trong tam giác vuông ta thấy $EF.EO = EI^2 = EB^2 = EM.EN = EM.2EO$. Từ đó $EF = 2EM$ như vậy E và F đối xứng nhau qua BC. Từ đó $IFEK$ là một hình thang cân. Ta có biến đổi góc $\angle OLE = \angle IOA =$

$180° - \angle EIO = 180° - \angle IFE = \angle IFO = \angle IKE = \angle OEL$. Từ đó tam giác $OL = OE$ nên L thuộc (O). □

Nhận xét. Ý a) chủ yếu dùng để phát hiện điểm E, vì yếu tố cố định không có mặt trong đề bài nên bài toán có phần thú vị. Ý b) sau khi chỉ ra được hai điểm đối xứng chỉ là bước đầu. Bước sau dùng biến đổi góc để chỉ ra tam giác cân và chứng minh điểm thuộc đường tròn bằng định nghĩa là một ý rất thú vị, vì thường khi biến đổi góc để chứng minh điểm thuộc đường tròn ta chỉ hay suy nghĩ đi chứng minh góc nnội tiếp bằng nhau rồi để đưa về tứ giác nội tiếp. Ý b) tác giả xây dựng lại từ hai ý bài toán gốc dựa trên một kết quả đã có trong kỳ thi thử vào chuyên KHTN năm 2012. Ta chú ý rằng có một hệ quả thú vị của ý b) chính là chứng minh $AL \perp OI$, các bạn hãy thử như một bài luyện tập.

Lời kết. Các đề thi toán chuyên của trường PTNK từ năm 1999 tới 2015 có nhiều bài toán hay có ý tưởng. Trong bài viết không bao quát hết tất cả các bài toán hình học trong 15 năm vì ở đây tác giả chỉ chọn lọc ra các bài toán mà theo ý chủ quan của tác giả là hay và mang ý nghĩa. Quan điểm hình học đẹp được thể hiện xuyên suốt bài viết do đó một số bài toán có nội dung cực trị, bất đẳng thức hoặc tính toán cũng không được đề cập tới. Bài viết có mục đích mang lại một cái nhìn khác lạ hơn cho các đề toán thi. Bài viết cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi toán chuyên PTNK 1999 - 2013 tại
http://www.ptnk.edu.vn/kqts/dethi/De_thi_tuyen_sinh_lop_10_mon_Toan_chuyen.pdf

[2] Đề thi toán chuyên PTNK 2014 tại http://diendantoanhoc.net/home

[3] Đề thi toán chuyên PTNK 2015 tại http://diendantoanhoc.net/home

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 1

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 1 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Năm 2014 kỳ thi IMO năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hay như sau

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ lồi với $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. H là hình chiếu của A lên BD. Các điểm S, T thuộc cạnh AB, AD sao cho H nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác CST và $\angle CHS - \angle CSB = 90°$, $\angle THC - \angle DTC = 90°$. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HST.

Trong [1] cũng dẫn ra nhiều lời giải. Đáng chú ý là lời giải của nick name leader có ý tưởng rất đặc sắc. Với ý tưởng đó tôi xin nêu ra một bài toán tổng quát đồng thời thêm hai ý khai thác nữa kết quả có ý nghĩa này.

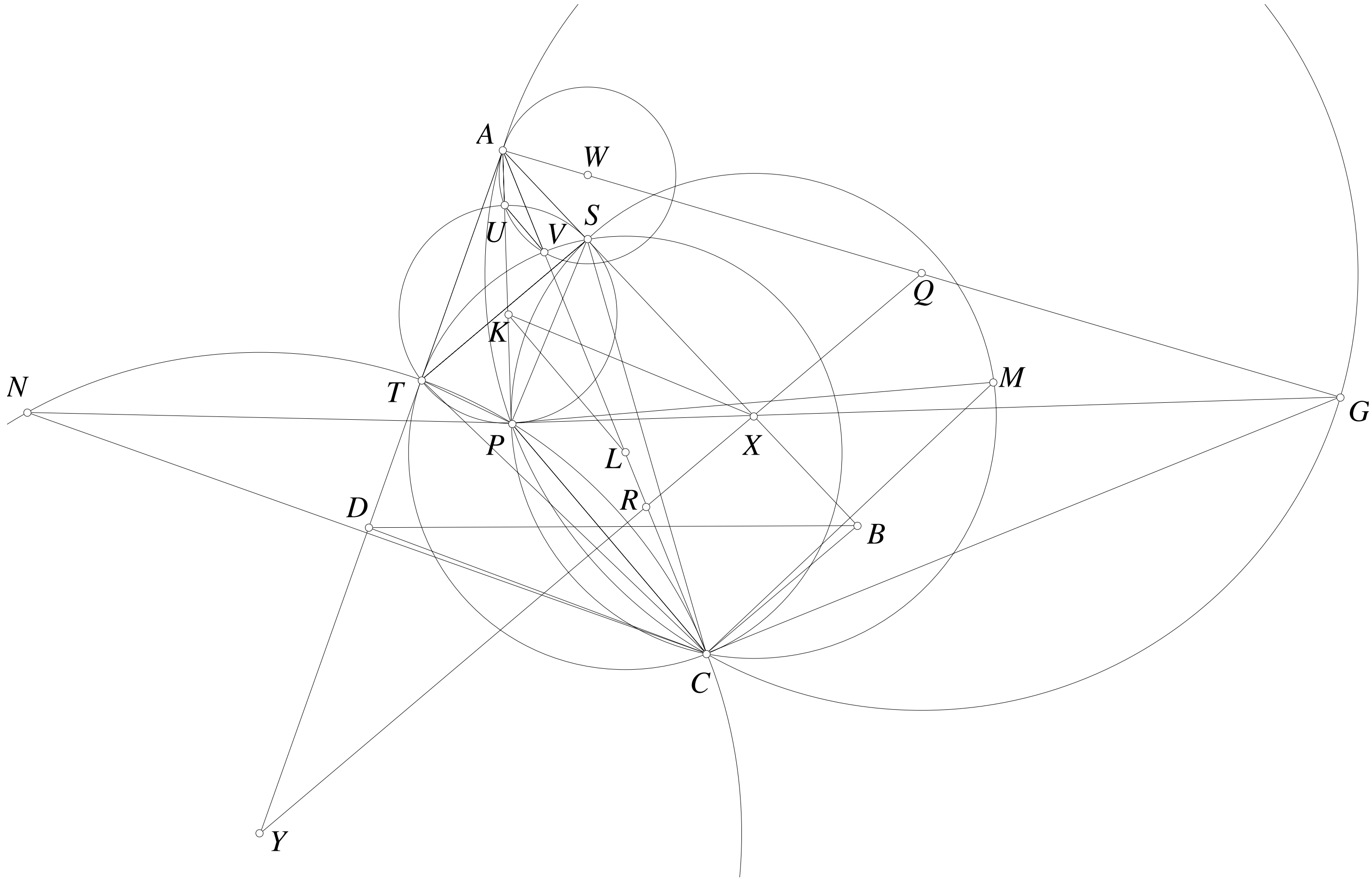
Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ lồi. P là điểm nằm trong tam giác ABD sao cho $\angle PAD = \angle CAB$. Các điểm S, T thuộc các cạnh AB, AD sao cho $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90°$ và P nằm trong tam giác CST.

a) Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PST thuộc AP.

b) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST và tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt nhau tại điểm G trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APC.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PST cắt AP tại U khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt AC tại V khác C. Chứng minh rằng AG đi qua tâm ngoại tiếp tam giác AUV.

Lời giải. a) Gọi M, N là đối xứng của C qua AB, AD. Từ điều kiện đề bài $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90°$ ta dễ thấy các tứ giác $CPSM$ và $CPTN$ nội tiếp với tâm tương ứng là X, Y. Ta phải chứng minh rằng trung trực của PS, PT đồng quy với PA. Thật vậy, áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác PAS, PAT ta thấy điều phải chứng minh tương đương với $\frac{XS}{XA} = \frac{YT}{YA}$ hay $\frac{AX}{AY} = \frac{PX}{PY} = \frac{CX}{CY}$. Gọi XY cắt trung trực PA tại Q và cắt AC tại R. Ta có biến đổi góc $\angle XAQ = \angle PAQ - \angle PAX = (90° - \frac{\angle AQP}{2}) - \angle CAD = 90° - \angle ACP - \angle CAD = \angle YRC - \angle CAD = \angle AYX$. Từ đó ta thấy ngay QA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY nhưng Q lại là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APC do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác APC là đường tròn Apollonious của đoạn XY. Ta có điều phải chứng minh.



Hình 1.

b) Theo a) ta dễ thấy tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST thuộc AP. Một cách hoàn toàn tương tự tâm L của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST thuộc AC. Tương đó dễ thấy tiếp tuyến tại P, C là các đường thẳng qua P vuông góc PA và qua C vuông góc CA nên chúng cắt nhau tại G chính là đối xứng của A qua Q thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác APC. Ta có điều phải chứng minh.

c) Từ việc áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác PAS ta thấy $\dfrac{KP}{KA} = \dfrac{XS}{XA} = \dfrac{LP}{LA}$. Từ đó $KL \parallel PC$. Từ đó dễ thấy $UV \parallel KL \parallel PC$. Từ đó A và tâm ngoại tiếp của AUV và APC thẳng hàng. Nên tâm ngoại tiếp của AUV thuộc AG. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán 1 là bài số 3 trong ngày thi 1. Với vị trí đó bài toán là bài khó nhất trong ngày. Việc dựng thêm điểm đối xứng M, N là cách để khai thác giả thiết $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90$ một cách tốt nhất. Thực ra nếu không dựng thêm điểm đối xứng bằng cộng góc ta cũng có thể chỉ ra được tiếp tuyến tại S của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPS vuông góc với AC ý này tương đương với việc chỉ ra tâm của của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPS thuộc AC, đó là một hướng khác khai thác giả thiết. Đoạn sau việc xử lý bằng đường tròn Apollonious theo tôi là cách xử lý hay nhất vì từ đó ta dễ dàng đạt được lời giải tương tự cho bài toán tổng quát. Bài toán thi IMO này là một bài toán rất hay có ý nghĩa.

Toàn bộ 3 ý của bài toán 2 có thể tóm gọn lại trong một bài toán như sau

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ lồi. P là điểm nằm trong tam giác ABD sao cho $\angle PAD = \angle CAB$. Các điểm S, T thuộc các cạnh AB, AD sao cho $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90°$ và P nằm trong tam giác CST. Tếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST và tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt nhau tại điểm G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PST cắt AP tại U khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt AC tại V khác C. Chứng minh rằng AG đi qua tâm ngoại tiếp tam giác AUV.

Đây là một bài toán khó suy ra từ bài toán IMO. Xung quanh bài toán này còn rất nhiều ý tưởng hay nữa. Xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi IMO ngày 1 tại

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=1098

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

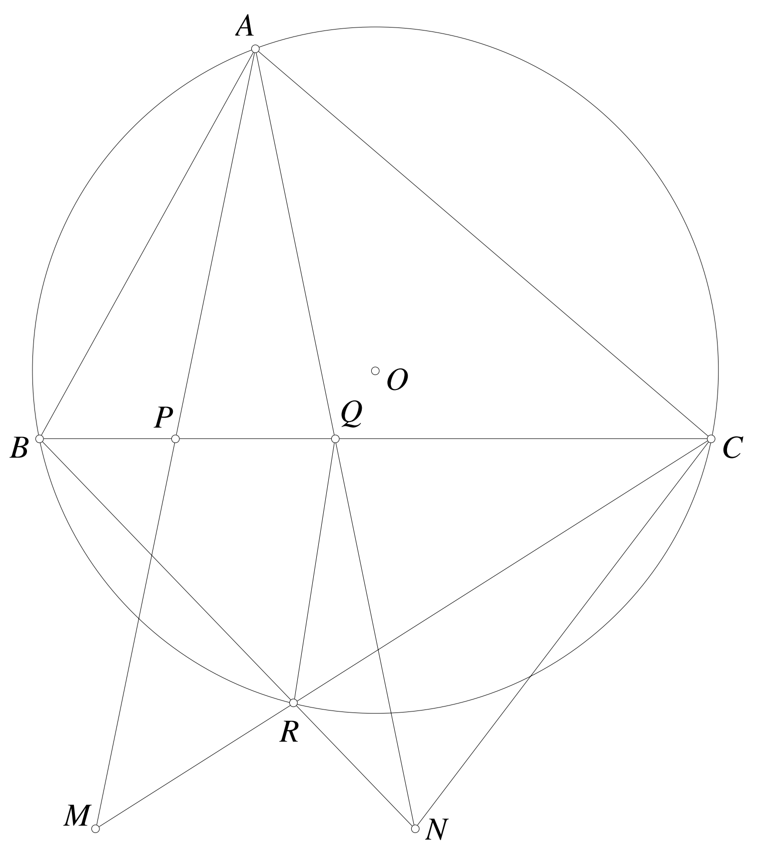
Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Năm 2014 kỳ thi IMO năm 2014 ngày thứ 2 [1] có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có $\angle A$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là đối xứng của A qua P, Q. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải sau do tác giả tìm ra nhưng sau khi tham khảo [1] thì thấy ý tưởng đó trùng với ý tưởng trong lời giải của nick name nima1376 trong [1]. Tôi xin trình bày lại lời giải



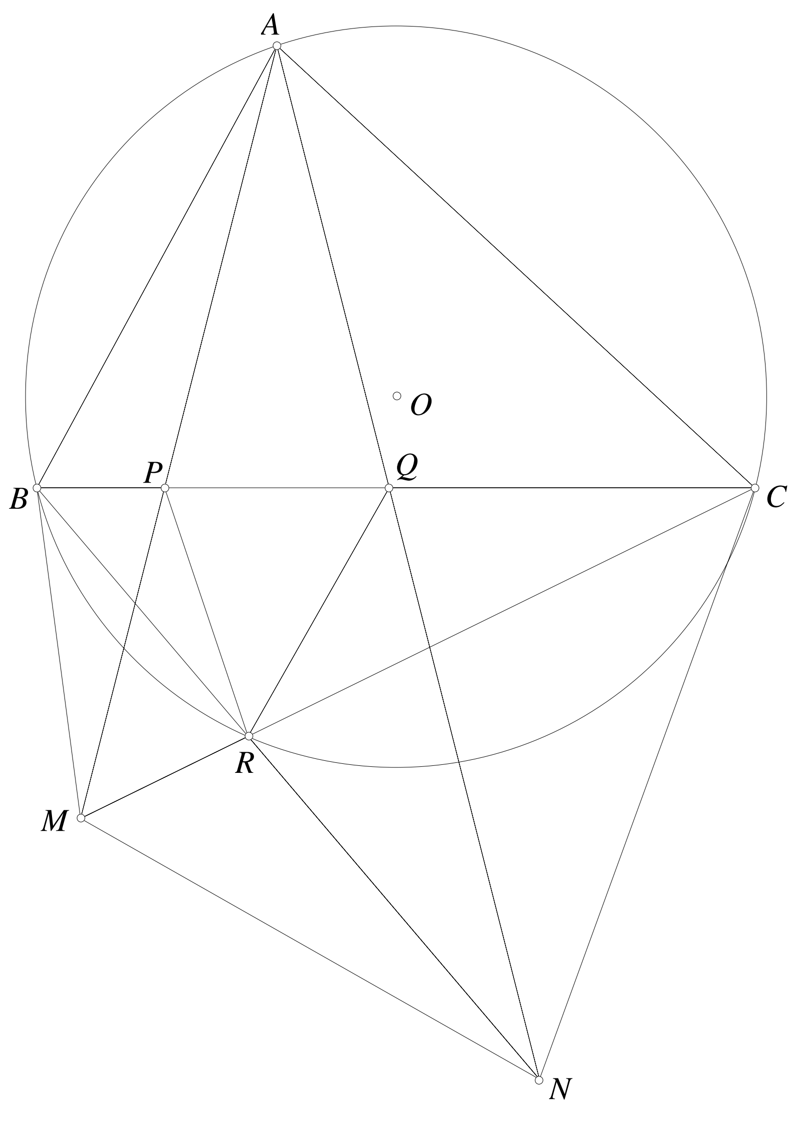
Hình 1.

Lời giải. Dễ thấy các tam giác đồng dạng $\triangle ABC \sim \triangle PAC \sim \triangle QBA$ do đó $\dfrac{BQ}{QA} = \dfrac{PA}{PC}$ hay $\dfrac{QB}{QN} = \dfrac{PC}{PC}$ dễ thấy $\angle MPC = \angle NQB$ nên $\triangle MPC \sim \triangle BQN$ suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = \angle BAC$. Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán thứ 4 của ngày 2 là một bài toán dễ và có rất nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Cách giải trên có thể coi là cách ngắn gọn nhất tiếp cận bài toán này không những thế nó còn mở ra rất nhiều hướng tổng quát khác nhau. Trong bài viết này tôi xin giới thiệu một vài hướng tổng quát khác nhau cho bài toán ý nghĩa trên cùng lời giải.

Trong bài toán ta dễ thấy tam giác APQ cân. Việc lấy đối xứng A qua P, Q được M, N thực chất có thể hiểu $PM.QN = AP.AQ = AP^2 = AQ^2$. Đây là điểm mấu chốt của toàn bộ bài toán. Chúng ta tìm hiểu mở rộng đầu tiên như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có $\angle BAC$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là các điểm thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = AP.AQ$. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

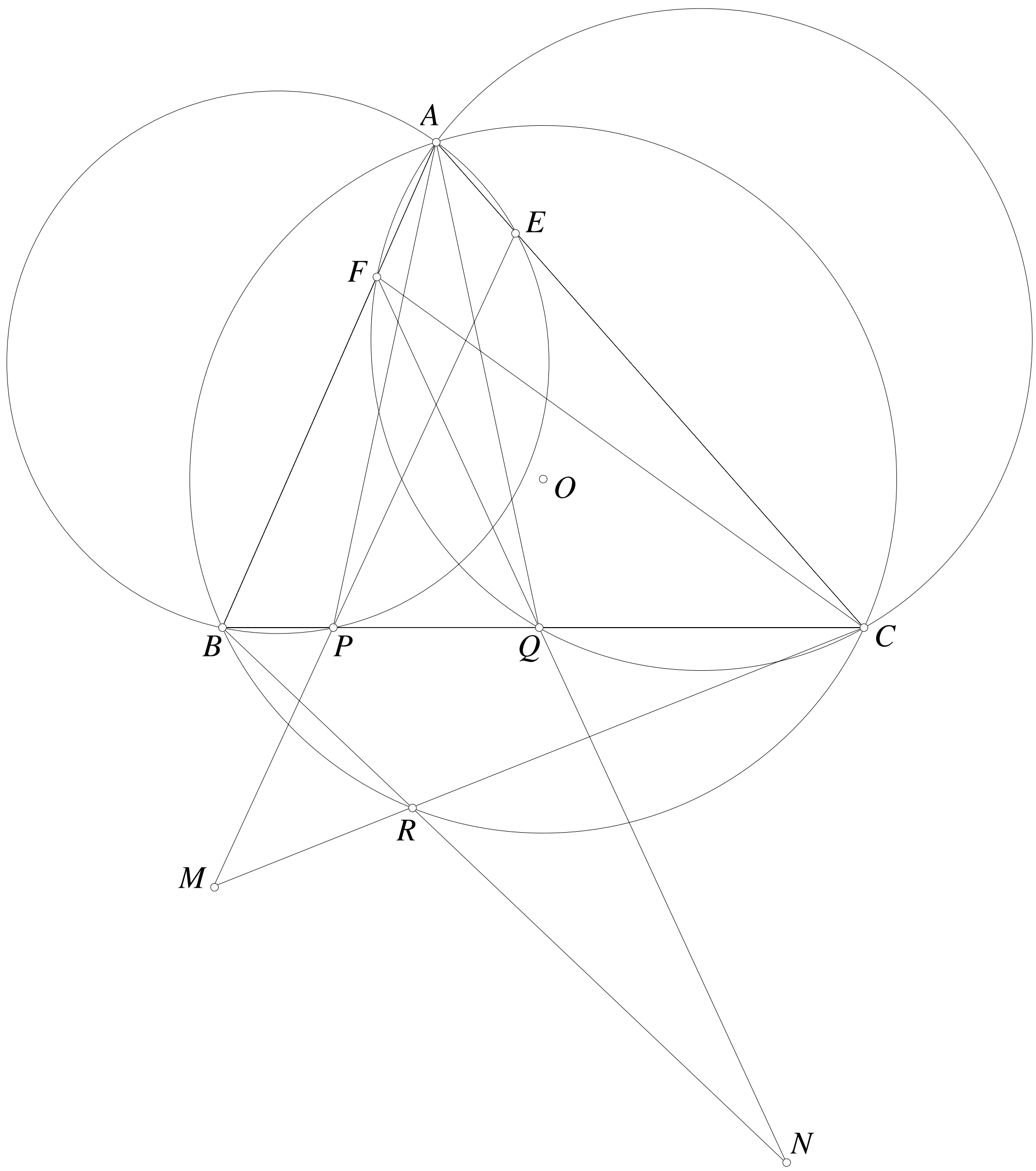


Hình 2.

Nhận xét. Bài toán này là một mở rộng đầu tiên đơn giản và có lời giải hoàn toàn tương tự. Để mở rộng tiếp ta để ý các giả thiết góc $\angle PAB = \angle BCA$ và $\angle CAQ = \angle ABC$. Thực chất các giả thiết này cho thấy là các đường tròn (APB) tiếp xúc AC và đường tròn (AQC) tiếp xúc AB. Tiếp điểm có thể thay thế bằng giao điểm. Sau đây là một khai thác cho ý tưởng này.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải có ý tưởng hoàn toàn tương tự

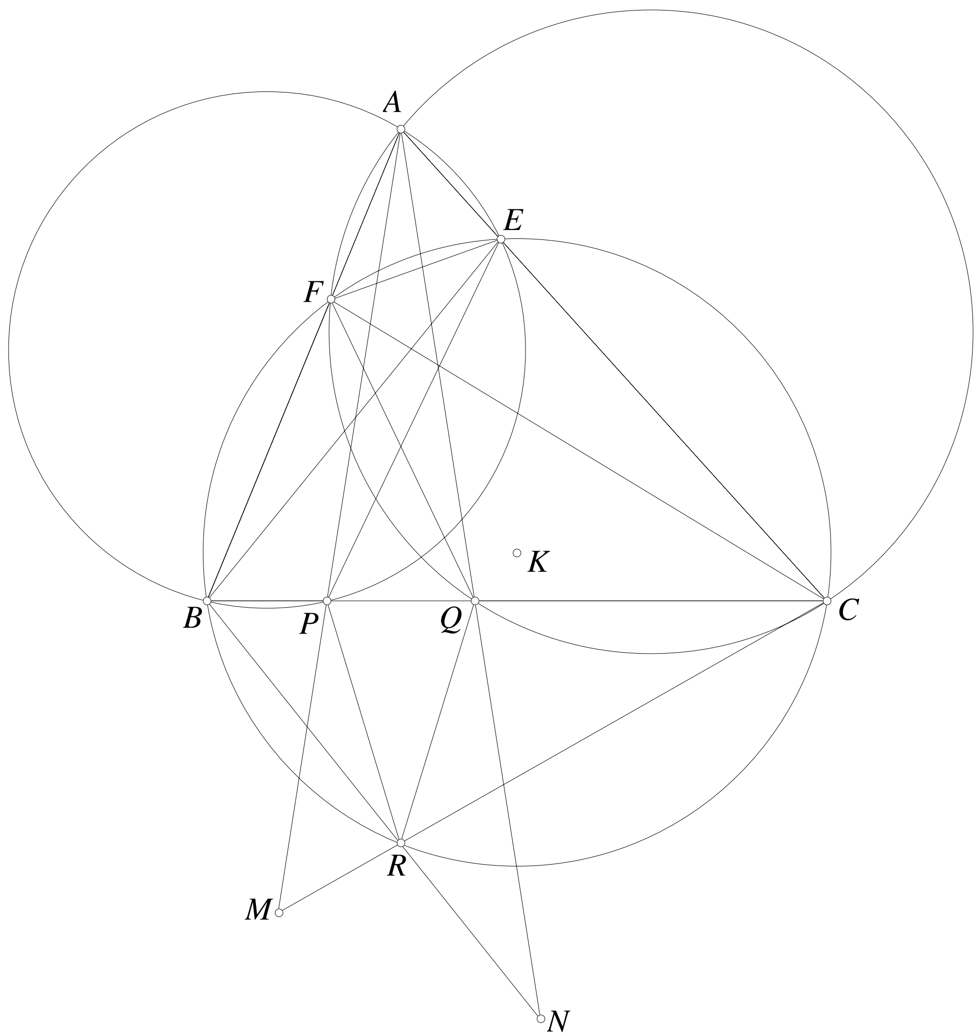


Hình 3.

Lời giải. Ta dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle PEC \sim \triangle QBF$ do đó kết hợp giả thiết $PM.QN = PE.QF = QB.PC$. Dễ thấy $\angle MPC = \angle NQB$. Nên $\triangle MPC \sim \triangle BQN$. Suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = \angle BAC$. Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp. $\square$

Nhận xét. Khi góc đáy tam giác APQ bằng $\angle BAC$ ta có bài toán số 2. Đoạn sau lời giải hoàn toàn tương tự. Ta sẽ có một mở rộng ý nghĩa hơn như sau.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$. Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau trên một đường tròn cố định khi M, N di chuyển.



Hình 4.

Lời giải. Ta dễ thấy $\angle AEB = \angle APB = \angle AQC = \angle AFC$ suy ra $\angle BEC = \angle BFC$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (K) cố định. Ta sẽ chứng minh BM và CN cắt nhau trên (K), thật vậy. Ta dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle PEC \sim \triangle QBF$ do đó kết hợp giả thiết $PM.QN = PE.QF = QB.PC$. Do tam giác APQ cân nên dễ suy ra $\angle MPC = \angle NQB$. Từ đó $\triangle MPC \sim \triangle BQN$. Suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = 180° - \angle CQA = 180° - \angle CFA = \angle BFC$. Từ đó tứ giác $BFCR$ nội tiếp nên R thuộc (K). □

Nhận xét. Khi góc đáy tam giác APQ bằng $\angle BAC$ ta cũng thu lại được bài toán số 2. Đoạn sau của lời giải có khác bài toán 3 một chút song ý nghĩa vẫn không đổi. Trên mô hình của bài toán gốc và các bài toán mở rộng còn có nhiều khai thác đáng chú ý, các bạn hãy làm như các bài luyện tập

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có $\angle A$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là các điểm thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = AP.AQ$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (O) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi R di chuyển.

d) Gọi BM giao CN tại Z. Chứng minh rằng XZ luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN. Chứng minh rằng AK vuông góc với BC.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (O) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau tại một điểm R trên một đường tròn (K) cố định khi M, N di chuyển.

b) Gọi L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN. Chứng minh rằng AL vuông góc với BC.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$.

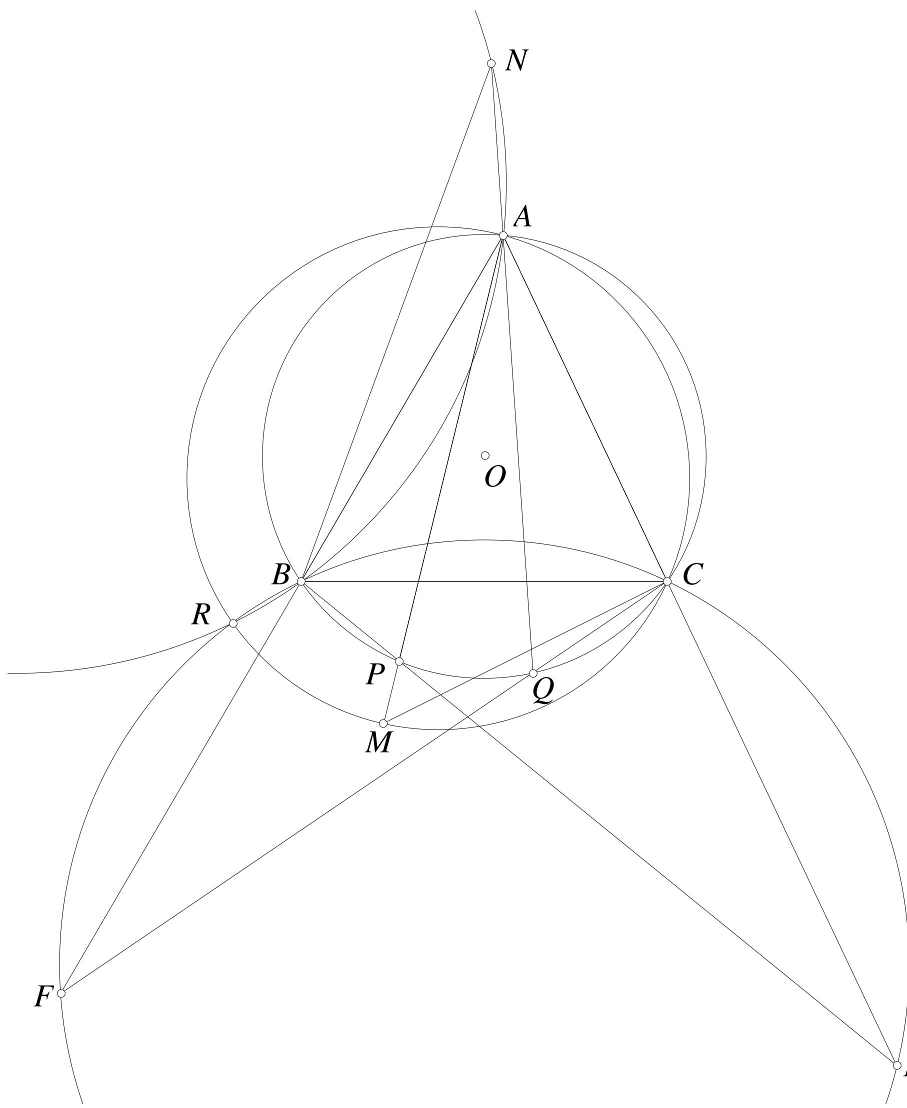
a) Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau trên một đường tròn (K) cố định khi M, N di chuyển.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (K) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bạn nào quen với phép nghịch đảo có thể giải thêm bài toán sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm P, Q thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A sao cho $AP = AQ$. PB, QC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, AQ sao cho $\frac{PM}{PE}.\frac{QN}{QF} = \frac{AM}{AE}.\frac{AN}{AF}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN cắt nhau tại R khác A. Chứng minh rằng R luôn thuộc một đường tròn cố định khi M, N di chuyển.



Hình 5.

Lời kết. Bài toán IMO này tuy là một bài toán dễ xong vẻ đẹp và tính gợi mở của nó là không thể phủ nhận. Nó hoàn toàn xứng đáng là một bài thi IMO. Bên cạnh bài toán gốc bài toán mở rộng còn rất nhiều ý để khai thác mô hình và phát triển thêm mà trong một bài viết không thể liệt kê hết. Xin dành cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi IMO ngày 2 tại
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=1098&t=597090

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về bài hình học thi HSG lớp 10 KHTN

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

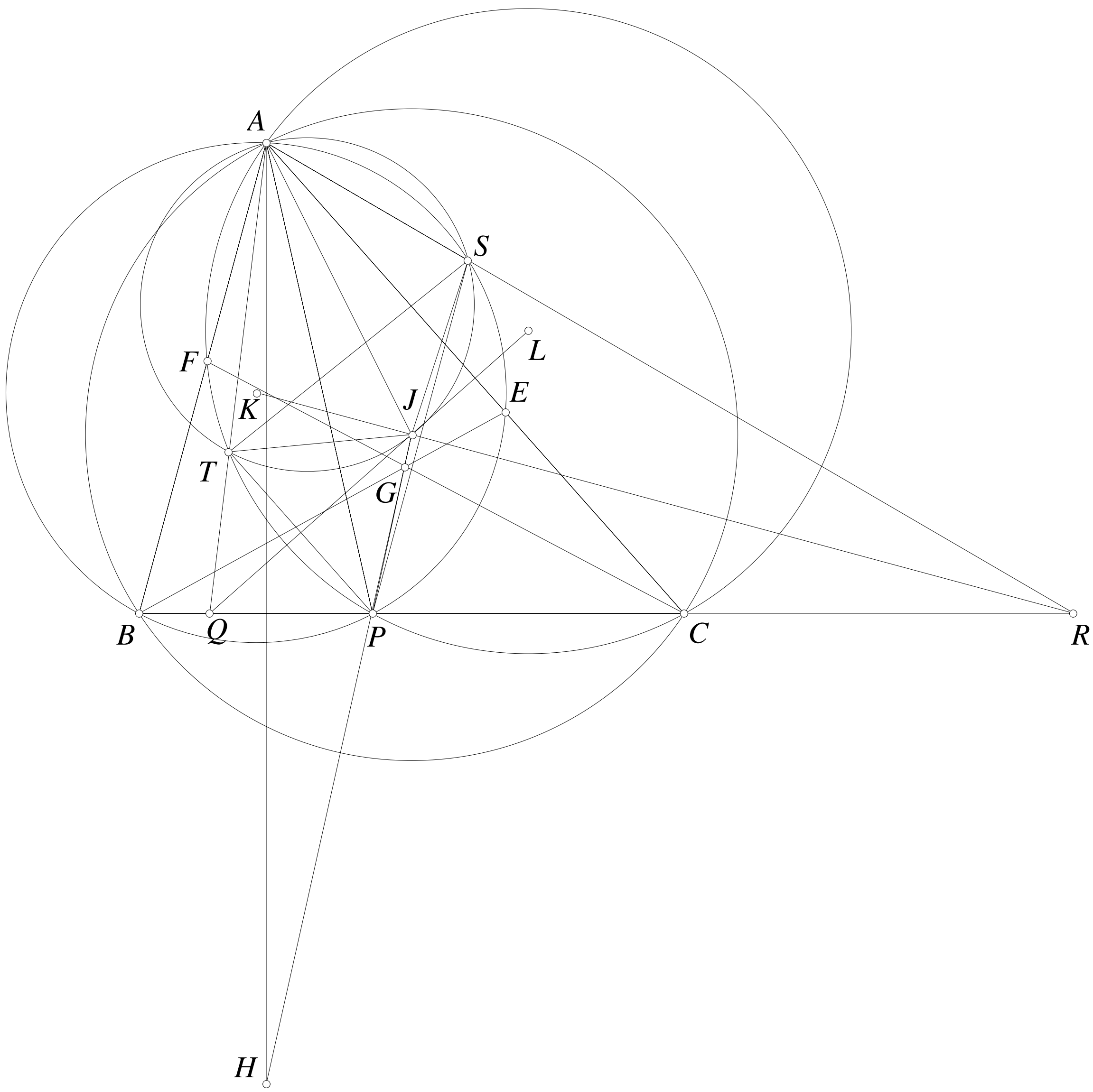
Bài viết xoay quanh bài hình học thi HSG lớp 10 KHTN năm 2014.

Đề thi chọn HSG lớp 10 chuyên KHTN năm 2014 có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC. $(K),(L)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC. Lấy S thuộc (K) sao cho $PS \parallel AB$, lấy T thuộc (L) sao cho $PT \parallel AC$.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST luôn đi qua một điểm J cố định khác A.

b) Gọi (K) cắt CA tại E khác A. (L) cắt AB tại F khác A. BE cắt CF tại G. Chứng minh rằng đường thẳng PG đi qua J khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.



Lời giải. a) Gọi J là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AST đi qua J cố định.

Thật vậy, gọi AT, AS giao BC tại Q, R. Ta dễ thấy các tứ giác $ABPS$ và $ACPT$ là các hình thang cân do đó tam giác ABR và ACQ cân tại R và Q. Dễ thấy JK, JL là trung trực của AB, AC do đó JK đi qua R và JL đi qua Q. Suy ra trong tam giác AQR thì J là tâm nội tiếp hay AJ là phân giác $\angle SAT \quad (1)$.

Ta lại có tứ giác $ACPT$ là hình thang cân nên JQ cũng là trung trực của PT do đó $JT = JP$. Tương tự $JS = JP$. Do đó $JT = JS \quad (2)$.

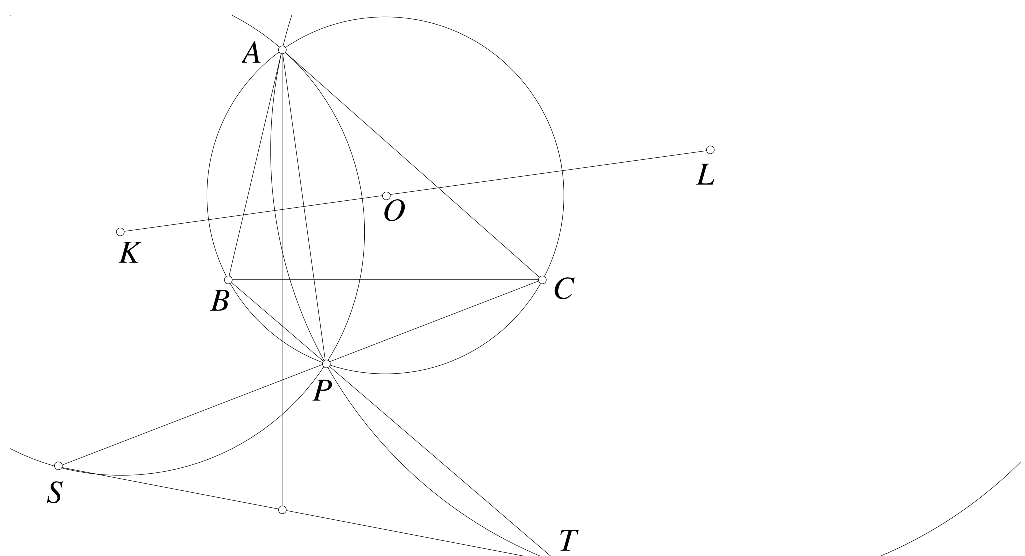
Từ (1),(2) suy ra J thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AST. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta dễ thấy tứ giác $AEGF$ nội tiếp. Từ đó $\angle EGC = \angle EAF = \angle EPG$ nên tứ giác $CEGP$ nội tiếp kéo theo tứ giác $BFGP$ cũng nội tiếp. Từ đó nếu gọi H đối xứng A qua BC thì $\angle BPH = \angle APB = \angle AEB = \angle GPC$ do đó PG đi qua H. Nên đường thẳng PG và AP đối xứng nhau qua BC. Từ đó PG đi qua tâm ngoại tiếp J của tam giác ABC khi và chỉ khi AP đi qua đối xứng của J qua BC khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

□

Nhận xét. Đây là bài toán hay có tính chất phân loại, điểm cố định ở câu a) có thể dễ đoán nhận nhờ vào việc xét một số vị trí đặc biết của P. Câu b) đòi hỏi phải biết tính chất PG đi qua đối xứng của A qua BC, tuy nhiên đây là một tính chất khá quen thuộc với các bạn lớp 9. Từng ý của bài toán này có nhiều ý nghĩa ta sẽ phân tích riêng từng ý. Câu a) nếu bạn nào quen với phép nghịch đảo có thể thấy nó cũng chính là bài toán dưới đây

Bài toán 2. Cho tam giác ABC cố định nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). Gọi (K) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc AC. (K) cắt PC tại S khác P. Gọi (L) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc AB. (L) cắt PB tại T khác P. Chứng minh rằng đường thẳng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 1.

Lời giải. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Ta sẽ chứng minh ST đi qua D cố định. Thật vậy, theo tính chất tiếp tuyến dễ thấy $BD^2 = BA^2 = BP.PT$ suy ra $\triangle BPD \sim \triangle BDT$ suy ra

$\angle BDT = \angle BPD$. Tương tự $\angle CDS = \angle CPD$. Từ đó ta có $\angle SDT = \angle BDT + \angle CDS - \angle BDC = \angle BPD + \angle CPD - \angle BAC = 360 - \angle BPC - \angle BAC = 180°$. Từ đó ta có ST đi qua D. Ta có điều phải chứng minh. □

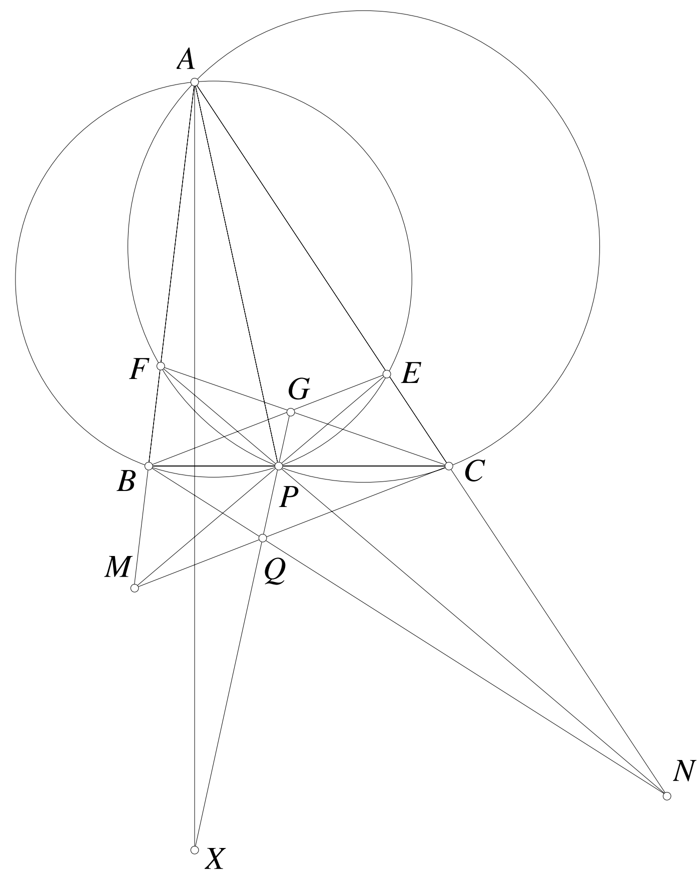
Nhận xét. Đây chính là đề toán dành cho THCS tác giả đề nghị cho cuộc thi 50 năm THTT. Bài toán có lời giải đơn giản dựa trên kiến thức THCS như trên không liên quan gì tới nghịch đảo. Cả hai bài toán có nhiều ứng dụng vào trong các bài toán khác nhau, chẳng hạn các bạn có thể xem bài toán sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC tâm nội tiếp I. P là một điểm trên BC. Gọi K, L là đối xứng của P qua trung trực IB, IC. Chứng minh rằng IA và trung trực BC cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL.

Ý b) của bài toán 1 cũng là một ứng dụng hay của bài toán gốc sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác C, B. BE cắt CF tại G. Chứng minh rằng PG luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Điểm cố định là đối xứng của A qua BC. Lời giải của nó đã nằm trong ý b) bài toán 1. Tuy vậy những phát triển xung quanh bài toán này rất nhiều. Nếu các bạn biết về định lý Pappus không khó để thấy bài toán sau là một hệ quả.



Hình 2.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác C, B. PE, PF lần lượt cắt AB, CA tại M, N. BN cắt CM tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Nếu kết hợp bài toán này với bài toán 1 cho ta một bài toán khá thú vị như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC. $(K), (L)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác

PAB, PAC. Lấy S thuộc (K) sao cho $PS \parallel AB$, lấy T thuộc (L) sao cho $PT \parallel AC$. Gọi (K) cắt CA tại E khác A. (L) cắt AB tại F khác A. PE, PF lần lượt cắt AB, CA tại M, N. BN cắt CM tại Q. Chứng minh rằng PQ và trung trực EF cắt nhau tại một điểm trong tam giác ABC và trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AST khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

Nếu kết hợp các bài toán trên với bài toán 2 cũng sẽ đưa lại nhiều vấn đề thú vị, ví dụ như bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại Q. Gọi PB, PC lần lượt cắt các đường tròn qua A, P tiếp xúc AC, AB tại S, T. Gọi K, L là đối xứng của Q qua trung trực CA, AB. Trung trực KL cắt phân giác $\angle KAL$ tại R. QR cắt ST tại H. Chứng minh rằng AH vuông góc BC khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn dự tuyển HSG lớp 10 THPT chuyên KHTN

http://diendantoanhoc.net

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Hai bài hình học thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển hai bài hình học thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Kỳ thì chọn đội tuyển PTNK ngày thứ nhất có bài hình học như sau

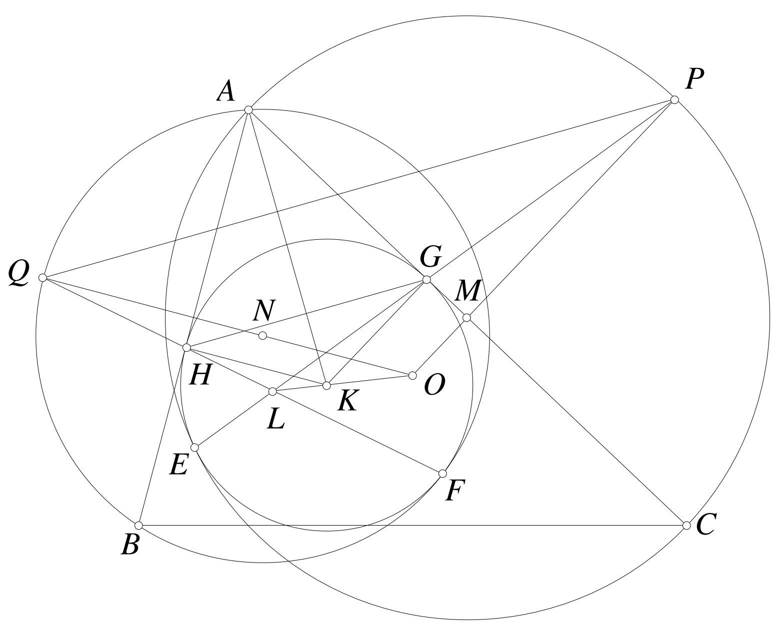
Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm O, B,C cố định và A di chuyển trên (O). (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. (O_1) là đường tròn qua A,B tiếp xúc (I) tại E. (O_2) là đường tròn qua A,C tiếp xúc (I) tại F. Phân giác $\angle AEB$ cắt (O_1) tại M và phân giác $\angle AFC$ cắt (O_2) tại N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EFMN$ nội tiếp.

b) Gọi J là giao của EM và FN. Chứng minh rằng đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

Nhận xét. Sẽ thú vị nếu ta so sánh bài toán với bài thi chọn đội tuyển Romani năm 2006 [2]. Hai bài toán có chung một cấu hình và ý tưởng. Tuy nhiên cách tiếp cận bài thi chọn đội tuyển PTNK theo ý a) và b) như trên là một cách đi hay, bài toán thi như vậy trở nên có ý nghĩa. Tuy vậy việc cho xuất hiện điểm cố định O ngay trong đề bài làm cho bài toán trở nên dễ dàng hơn. Do đó tôi xin đề xuất một bài toán tổng quát hơn như sau

Bài 2. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) thay đổi tiếp xúc CA, AB. Đường tròn (M) qua A,C tiếp xúc trong (K) tại E. Đường tròn (N) qua A,B tiếp xúc trong (K) tại F. Phân giác các góc $\angle AEC$ và $\angle AFB$ cắt nhau tại L. Chứng minh rằng đường thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định khi (K) di chuyển.



Hình 1.

Lời giải. Gọi (K) tiếp xúc CA, AB tại G, H. Theo một bổ đề quen thuộc thì EG là phân giác $\angle AEC$ do đó EG đi qua L và cắt (M) tại trung điểm P của cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa E. Tương tự FH đi qua L và cắt (N) tại trung điểm Q của cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa F. Dễ thấy PM, QN là trung trực của CA, AB nên PM, QN cắt nhau tại tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh rằng EG, FH đồng quy với KO như vậy KL sẽ đi qua O cố định, thật vậy.

Trước hết ta có $AP^2 - AQ^2 = PG.PE - QH.QF = (KP^2 - KG^2) - (KQ^2 - KH^2) = KP^2 - KQ^2$. Từ đó $PQ \perp AK \perp HG$. Vậy $PQ \parallel HG$. Tam giác OPQ và KGH có các cạnh tương ứng song song nên từ đó OK, PG, QH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

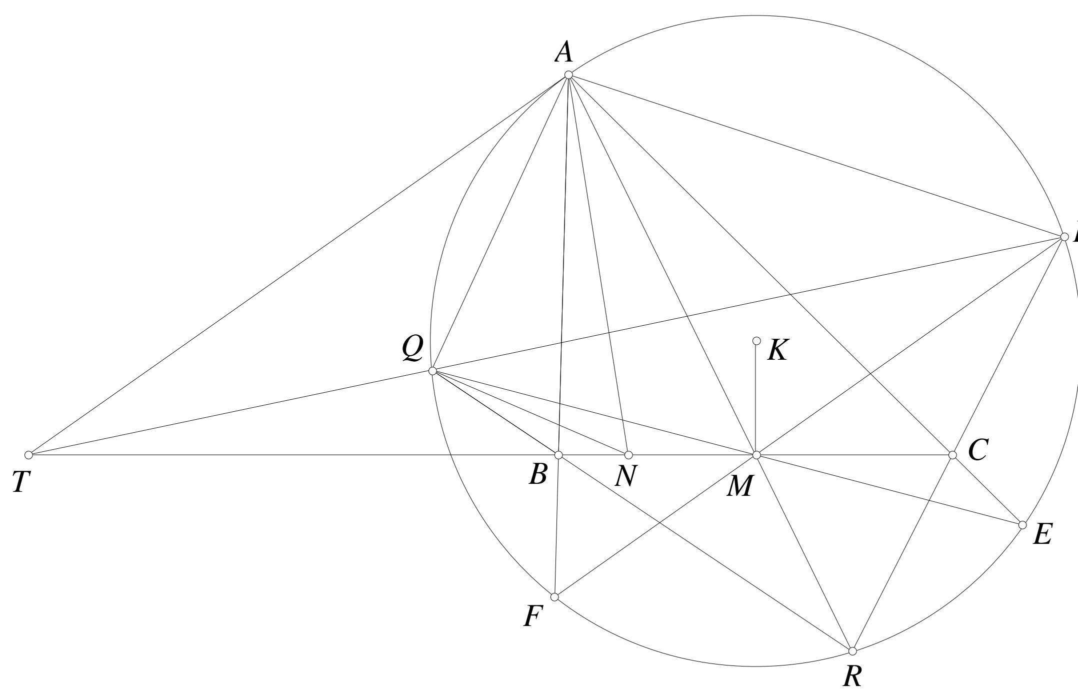
Nhận xét. Điều thú vị của bài toán trên là phải đoán nhận được điểm cố định O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đường tròn (K) là đường tròn nội tiếp ta nhận lại được bài toán thi.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển PTNK ngày thứ hai có bài hình học như sau

Bài 3. Cho tam giác ABC không cân có I là trung điểm của BC. Đường tròn (I) có tâm I đi qua A cắt AB, AC lần lượt tại M, N. IM, IN cắt (I) tại P, Q. Gọi K là giao của PQ với tiếp tuyến của (I) tại A. Chứng minh rằng K thuộc BC.

Nhận xét. Đây thực chất là một bài chứng minh đồng quy và là một bài toán hay có ý nghĩa. Tuy vậy điều kiện trung điểm I của BC có thể thay thế được. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu và chứng minh một bài toán tổng quát hơn

Bài 4. Cho tam giác ABC với K là một điểm trên trung trực BC. Đường tròn (K) đi qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. Gọi M là trung điểm BC. ME, MF cắt (K) tại Q, P khác E, F. Chứng minh rằng PQ, BC và tiếp tuyến tại A của (K) đồng quy.



Hình 2.

Lời giải. Gọi AM cắt (O) tại R khác A. Chú ý M là trung điểm BC và BC vuông góc với KM. Áp dụng bài toán con bướm cho tứ giác $AERQ$ suy ra RQ đi qua B. Tương tự RP đi qua C. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AQB cắt BC tại N khác B. Gọi tiếp tuyến tại A của (K) cắt BC tại T. Ta dễ thấy $\angle ANB = 180° - \angle AQR = \angle APR = \angle TAR$ suy ra $\angle AMT = \angle TAN$ hay TA tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Ta lại có $\angle QNB = \angle QAB = \angle QPM$ suy ra tứ giác $PQNM$ nội tiếp. Từ đó ta có $TM.TN = TA^2$ nên T nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (K) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQNM$ hay T thuộc PQ. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Khi K trùng với M ta thu lại được bài toán ban đầu.

Các bạn hãy cùng luyện tập một số bài toán tương tự sau

Bài 5. Cho tam giác ABC với đường cao AD, BE, CF và đường tròn nội tiếp (I). Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại X. Tương tự có Y, Z. Gọi M, N, P là trung điểm AD, BE, CF. Chứng minh rằng XM, YN, ZP đồng quy.

Bài 6. Cho tam giác ABC có đường tròn bàng tiếp góc A, B, C là $(I_a), (I_b), (I_c)$. (I_a) tiếp xúc BC tại D. Đường tròn qua B, C tiếp xúc với (I_a) tại X. Tương tự có E, F, Y, Z. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.

Bài 7. Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Đường tròn (M) qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. EM, FM cắt (O) tại P, Q khác E, F. PQ cắt CA, AB tại K, L. FK, EL cắt (M) tại G, H khác E, F. GH cắt BC tại T. Chứng minh rằng TA tiếp xúc (M).

Bài 8. Cho tam giác ABC với K thuộc trung trực BC và M là trung điểm BC. Đường tròn (K) qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. EM, FM cắt (O) tại P, Q khác E, F. PQ cắt CA, AB tại $K, L.FK, EL$ cắt (K) tại G, H khác E, F. GH cắt BC tại T. Chứng minh rằng TA tiếp xúc (K).

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014

http://diendantoanhoc.net/forum

[2] Romanian IMO TST 2006, day 3, problem 3

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=87922

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Từ bài toán thi của Romani tới bài thi HSG lớp 10 THPT chuyên KHTN

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng bài toán thi của Romani trong cuộc thi Grigore Moisil năm 2012.

Một cuộc thi toán của Romani năm 2012 mang tên nhà toán học Grigore Moisil [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với M là trung điểm của BC. Dựng các đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt nằm ở bên trái và bên phải điểm M, vuông góc BC và có khoảng cách tới M bằng nhau. Đường thẳng qua M vuông góc với AB, AC lần lượt cắt d_1, d_2 tại P, Q. Chứng minh rằng $AM \perp PQ$.

Bài toán trên có một mở rộng thú vị ở [2] như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với M, M' thuộc BC và đối xứng nhau qua trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông góc với AB, AC lần lượt cắt đường thẳng qua B, C vuông góc với BC tại P, Q. Chứng minh rằng $AM' \perp PQ$.

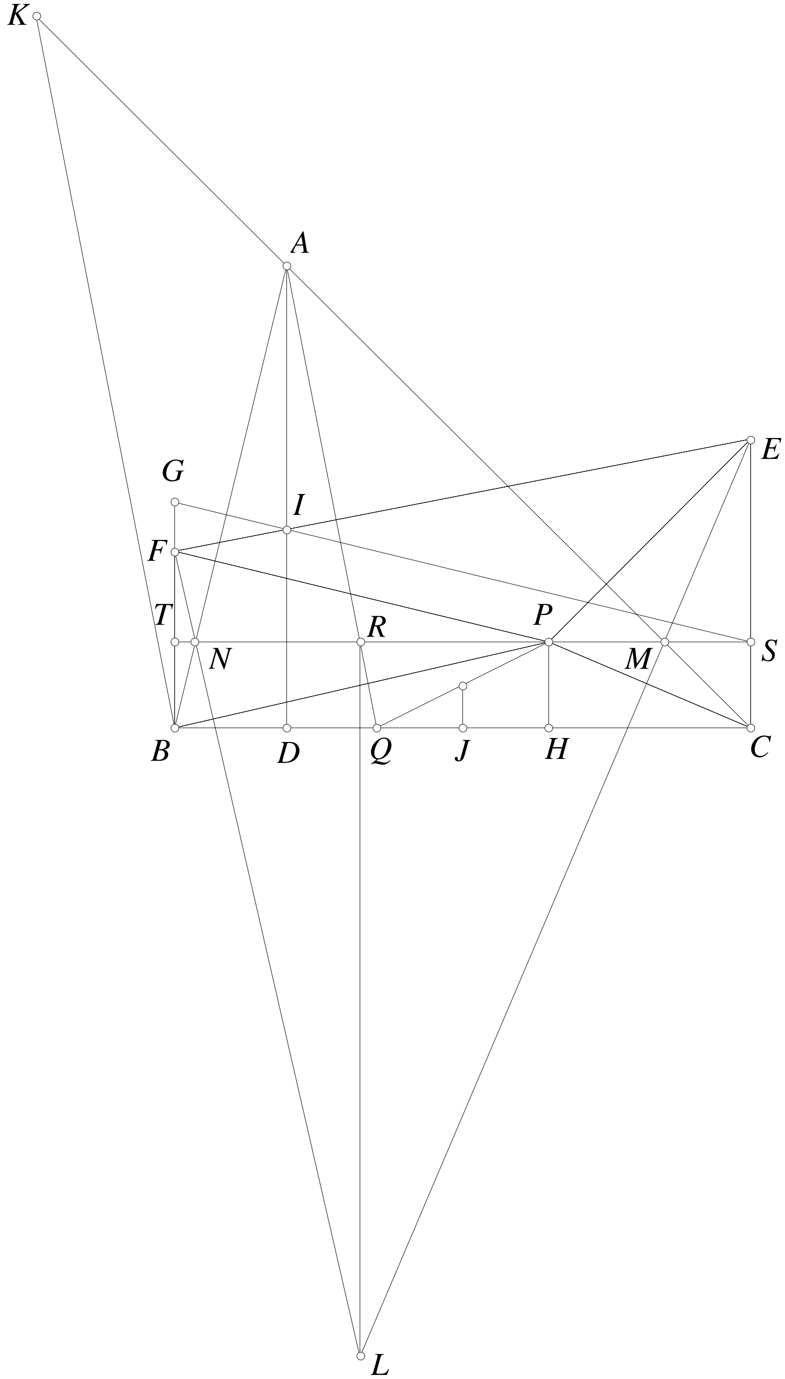
Bài toán gốc và bài toán mở rộng đều là bài toán hay và đặc sắc. Lời giải chi tiết có thể xem trong [1],[2] tôi không trình bày lại. Trong quá trình suy nghĩ tôi đã đề xuất một bài toán tổng quát hơn bài toán 2 cùng với các phát triển của nó trong đề thi HSG lớp 10 [3]. Điều thú vị là bài toán hoàn toàn dựa trên các biến đổi tỷ số độ dài đoạn thẳng và tam giác đồng dạng, là các kiến thức cơ bản của chương trình hình học lớp 8 ở Việt Nam

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho $MN \parallel BC$. P là điểm di chuyển trên đoạn MN. Lấy các điểm E sao cho $EP \perp AC$ và $EC \perp BC$. Lấy điểm F sao cho $FP \perp AB$ và $FB \perp BC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

b) Đường thẳng qua A vuông góc EF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng trung trực BC chia đôi PQ.

c) Gọi EM cắt FN tại L. AQ cắt MN tại R. Chứng minh rằng $RL \perp BC$.



Hình 1.

Lời giải. a) Gọi AD là đường cao tam giác ABC. MN cắt CE, BF tại S, T. Đường thẳng qua S vuông góc AC cắt EF tại I. Dễ thấy $\triangle SPE \sim \triangle DAC$ và $\triangle TPF \sim \triangle DAB$. Từ đó $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{ES}{FG} = \dfrac{ES}{PS}.\dfrac{PS}{FG} = \dfrac{ES}{PS}.\dfrac{TP}{TF} = \dfrac{CD}{AD}.\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{DC}{DB}$. Vậy I thuộc AD suy ra I là giao của AD và SG cố định. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi H là hình chiếu của P lên BC. Ta sẽ chứng minh $QB = HC$ từ đó dễ suy ra trung trực BC chia đôi PQ, thật vậy. Cũng từ $\triangle SPE \sim \triangle DAC$ và $\triangle TPF \sim \triangle DAB$, ta có $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{PE}{PS}.\dfrac{PS}{PT}.\dfrac{PT}{PF} = \dfrac{AC}{AD}.\dfrac{HC}{HB}.\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AB}.\dfrac{HB}{HC}$.

Lấy K thuộc AC sao cho $BK \parallel AQ$. Ta dễ thấy $\triangle ABK \sim \triangle PFE$ suy ra $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{BQ}{AK}.\dfrac{AK}{AB}.\dfrac{AB}{QC} = \dfrac{QC}{AC}.\dfrac{PE}{PF}.\dfrac{AB}{QC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{AC}{AB}.\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{HB}{HC}$.

Lại có H, Q đều nằm giữa BC nên dễ suy ra $QB = HC$. Ta có điều phải chứng minh.

c) Ta phải chứng minh EM, FN và đường thẳng qua R vuông góc MN đồng quy. Điều này tương đương với $\dfrac{ES}{FT} = \dfrac{MS}{MR}.\dfrac{NR}{NT}$. Ta dễ có $\triangle SME \sim \triangle SCP$ và $\triangle TNF \sim \triangle TBP$. Từ đó $\dfrac{ES}{FT} = \dfrac{ES}{MS}.\dfrac{MS}{NT}.\dfrac{NT}{FT} = \dfrac{MS}{NT}.\dfrac{PS}{SC}.\dfrac{BT}{PT} = \dfrac{MS}{NT}.\dfrac{PS}{PT} = \dfrac{MS}{MR}.\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{MS}{MR}.\dfrac{RN}{RM}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bạn Trịnh Huy Vũ lớp 11 A1 Toán THPT chuyên KHTN đề xuất lời giải khác cho ý b) như sau. Gọi L là trung điểm PQ. Ta sẽ chứng minh $LB = LC$ thật vậy. Ta có $2(LB^2 - LC^2) = \dfrac{2(BQ^2 + BP^2) - PQ^2}{2} - \dfrac{2(CQ^2 + CP^2) - PQ^2}{2} = QB^2 - QC^2 + BP^2 - CP^2 = (BF^2 + FQ^2) - (CE^2 + EQ^2) + (BP^2 - PA^2) - (CP^2 - PA^2) = BF^2 - CE^2 + AF^2 - AE^2 + (FB^2 - FA^2) + (CE^2 - AE^2) = 0$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán hoàn toàn có thể tổng quát hơn nữa theo cách của bài toán 1 và cách chứng minh hoàn toàn tương tự. Các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho $MN \parallel BC$. K, L thuộc đoạn BC sao cho $BK = CL$ và K nằm giữa B và L. P là điểm di chuyển trên đoạn MN. Lấy các điểm E sao cho $EP \perp AC$ và $EL \perp BC$. Lấy điểm F sao cho $FP \perp AB$ và $FK \perp BC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

b) Đường thẳng qua A vuông góc EF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

c) Gọi đường thẳng qua N vuông góc PK cắt đường thẳng qua M vuông góc PL cắt nhau tại L. AQ cắt MN tại R. Chứng minh rằng $RL \perp BC$.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=471881

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=471928

[3] Đề thi HSG lớp 10 lần 2 THPT chuyên KHTN

Về bài toán thi Olympic nữ sinh ở châu Âu

Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng và phát triển bài toán hình học trong kỳ thi Olympic toán dành cho nữ sinh ở châu Âu năm 2014.

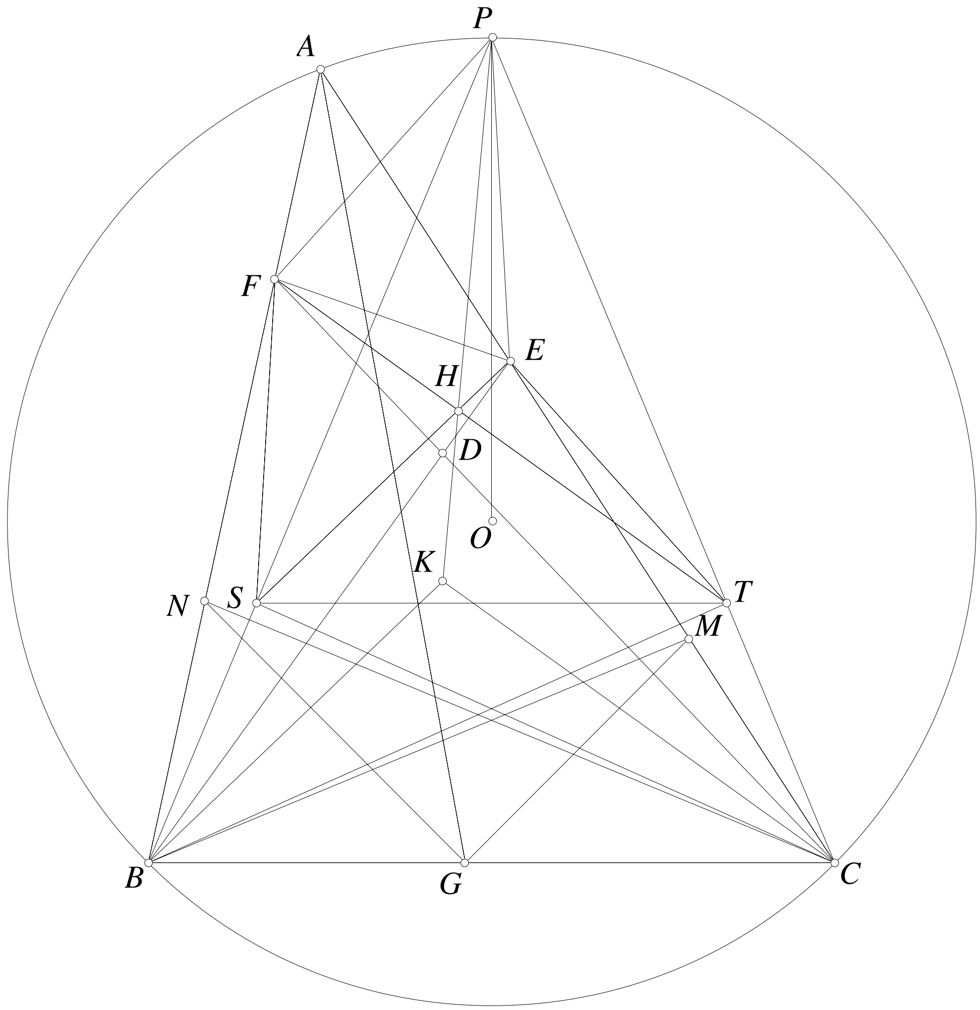
Trong kỳ thi Olympic toán dành cho nữ sinh ở châu Âu năm 2014 có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho D, E là các điểm nằm trên đoạn AB, AC của tam giác ABC sao cho $DB = BC = CE$. Đường thẳng CD và BE cắt nhau tại F. Chứng minh rằng tâm nội tiếp tam giác ABC, trực tâm tam giác DEF và trung điểm M của cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thẳng hàng.

Nhận xét. Trong quá trình phân tích bài toán này tôi nhận thấy tâm nội tiếp I thực chất cũng là trực tâm tam giác DEF do có $DB = BC = CE$. Từ đó yếu tố tâm nội tiếp có thể thay thế được, tôi đề xuất bài toán như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC cố định. Các điểm E, F lần lượt di chuyển trên các đoạn CA, AB sao cho $BF = CE$. BE cắt CF tại D. Gọi H, K là trực tâm tam giác DEF, DBC. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi E, F di chuyển.

Lời giải đầu tiên chúng tôi đưa ra dựa trên một ý tưởng trong [1]. Với lời giải này các biến đổi chỉ cần kiến thức THCS.



Hình 1.

Lời giải 1. Gọi AG là phân giác $\angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AGB, AGC lần lượt cắt CA, AB tại M, N khác A. Ta dễ thấy $\dfrac{BN}{CM} = \dfrac{BN.BA}{CM.CA}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{BD.BC}{CD.CB}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{DB}{DC}.\dfrac{CA}{AB} = 1$. Từ đó $BN = CM$, theo giả thiết $CF = CE$ suy ra $NF = ME$. Từ đó $\dfrac{[CNF]}{[BME]} = \dfrac{[CNF]}{[ABC]}.\dfrac{[ABC]}{[BME]} = \dfrac{NF}{AB}.\dfrac{AC}{ME} = \dfrac{AC}{AB}$ (1).

Ta lại dễ thấy $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BM}{AD}.\dfrac{AD}{CN} = \dfrac{BC}{AC}.\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $\dfrac{[CNF]}{[BME]} = \dfrac{CN}{BM}$ (3).

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và P là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). Ta sẽ chứng minh rằng HK đi qua P, thật vậy. Gọi EH, FH lần lượt cắt PB, PC tại S, T. Do $SE \perp FC$ nên dùng tổng các góc trong tứ giác dễ thấy $\angle ESB = 360^\circ - \angle SBC - \angle FCB - 90^\circ = 270^\circ - (90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BAC) - \angle FCB = 180^\circ - (\angle FCB - \angle NCB) = 180^\circ - \angle NCF$. Tương tự $\angle FTC = 180^\circ - \angle MCE$.

Từ đó ta dễ thấy $\dfrac{[SBE]}{[CNF]}=\dfrac{SB.SE}{CN.CF}$ và $\dfrac{[TCF]}{[BME]}=\dfrac{TC.TF}{BM.BE}$ (4).

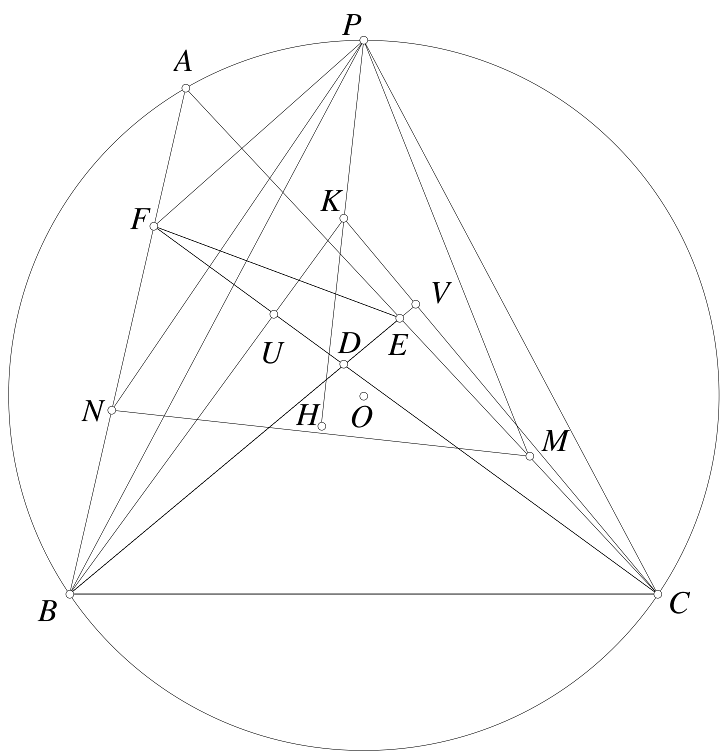
Mặt khác ta lại chú ý rằng $\angle SEB=\angle TFC$. Từ đó ta có

$\dfrac{ES.EB}{FT.FC}=\dfrac{[SBE]}{[TCF]}=\dfrac{[SBE]}{[CNF]}.\dfrac{[CNF]}{[BME]}.\dfrac{[BME]}{[TCF]}=\dfrac{SB.SE}{CN.CF}.\dfrac{CN}{BM}.\dfrac{BM.BE}{TC.TF}$ (Do (3) và (4))

$=\dfrac{SB}{TC}.\dfrac{ES.EB}{FT.FC}$.

Từ đó dễ suy ra $SB=TC$ hay $ST\parallel BC$. Từ đó ta thấy các tam giác HST và KBC có các cạnh tương ứng song song nên HK,BS,CT đồng quy tại P hay HK đi qua P cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải thứ 2 chúng tôi đưa ra dựa trên ý tưởng sử dụng phương tích và trục đẳng phương.

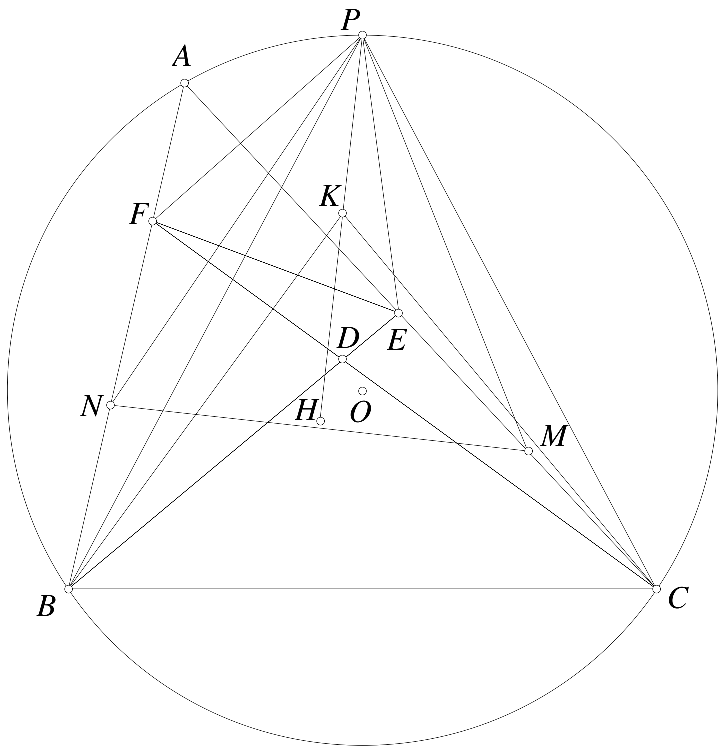


Hình 2.

Lời giải 2. Gọi BU,CV là đường cao của tam giác DBC. Tứ giác $BUVC$ nội tiếp ta suy ra $KU.KB=KV.KC$ từ đó phương tích của K đối với đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Vậy K thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE. Tương tự H cũng thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE. Gọi P là trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M,N là trung điểm CE,BF. Do $BF=CE$ nên ta dễ thấy hai tam giác PFB và PCE bằng nhau. Từ đó suy ra hai trung tuyến $PM=PN$. Từ đó $PM^2-ME^2=PN^2-NF^2$. Từ đó ta cũng thấy phương tích của P đối với đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Vậy H,K,P thẳng hàng trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán được tổng quát và phát biểu lại dưới dạng là tìm yếu tố cố định có phần thú vị hơn. Rõ rằng ta phải đoán nhận điểm cố định vì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không xuất hiện trong đề bài. Lời giải thứ 2 xem ra ngắn gọn hơn lời giải 1 nhưng lời giải 1 sử dụng kiến thức sơ cấp hơn. Nhờ cách giải thứ 2 ta có thể giải bài toán đảo như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với E, F lần lượt thuộc đoạn CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (O) cắt nhau tại P khác A. BE cắt CF tại D. Giả sử P và trực tâm các tam giác DEF, DBC thẳng hàng. Chứng minh rằng $CE = BF$.



Hình 3.

Lời giải. Gọi H, K là trực tâm tam giác DEF và tam giác DBC. Tương tự phần đầu lời giải 2 ta dễ thấy HK là trục đẳng phương của đường tròn đường kính CE và BF. Do đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (O) cắt nhau tại P khác A. Ta dễ thấy tam giác PBF và tam giá PCE đồng dạng. Từ đó ta có $\dfrac{PF}{PB} = \dfrac{PE}{PC}$ (1).

Ta chú ý do P, H, K thẳng hàng nên P thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính CE và BF. Sử dụng công thức tính phương tích bằng tích vô hướng suy ra $\overrightarrow{PE}.\overrightarrow{PC} = \mathcal{P}_{P/(CE)} = \mathcal{P}_{P/(BF)} = \overrightarrow{PF}.\overrightarrow{PB}$. Từ đó chú ý rằng $\angle EPC = \angle FPB$ nên suy ra $PE.PC = PF.PB$ (2).

Từ $(1), (2)$ suy ra $PF = PE, PB = PC$ kết hợp $\angle EPC = \angle FPB$ suy ra hai tam giác PFB và PEC bằng nhau suy ra $CE = BF$. Ta có điều phải chứng minh. □

Ta có ngay một số bài toán hệ quả như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với E, F là các điểm di chuyển trên đoạn CA, AB sao cho $CE = BF$. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm CA, AB, AE, AF. Lấy điểm S, T sao cho SM và TQ vuông góc

BE còn SN và TP vuông góc với CF. Gọi O, K là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. Chứng minh rằng giao điểm của ST và OK luôn thuộc một đường tròn cố định khi E, F di chuyển.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với E, F là các điểm thuộc đoạn CA, AB. M, N, P, Q là trung điểm CA, AB, AE, AF. Lấy điểm S, T sao cho SM và TQ vuông góc BE còn SN và TP vuông góc với CF. Gọi O, K là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. ST cắt OK tại R. Chứng minh rằng $AR \perp OK$ khi và chỉ khi $BE = CF$.

Nếu các bạn quen với phép nghịch đảo thì các bạn có thể làm một số bài toán sau để luyện tập

Bài toán 6. Cho tam giác ABC với phân giác AD. P là một điểm trên phân giác AD. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC cắt trung trực CA, AB tại M, N. AM, AN lần lượt cắt trung trực AF, AE tại S, T. Chứng minh rằng giao điểm của MN và ST luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ trong tam giác. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC cắt trung trực CA, AB tại M, N. AM, AN lần lượt cắt trung trực AF, AE tại S, T. Gọi MN cắt ST tại Q. EF cắt BC tại R. Chứng minh rằng AQ, BC và trung trực AR đồng quy khi và chỉ khi AP là phân giác $\angle BAC$.

Tài liệu

[1] European Girls' Mathematical Olympiad - Day 1 - P2
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=585058

[2] Trần Quang Hùng
Tuyển tập các bài hình học chọn đội tuyển KHTN.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về bài hình học chọn đội tuyển Việt Nam ngày 2 năm 2015

Tóm tắt nội dung

Bài viết muốn trình bày con đường đi tới bài hình học chọn đội tuyển Việt Nam năm 2015 ngày thứ 2 cùng với một số mở rộng và phát triển.

Đề chọn đội tuyển Việt Nam ngày 2 [1] có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn không cân và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha > 180^\circ - \angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt AC ở E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APC cắt AB ở F khác A. Gọi Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF, phân giác góc $\angle EDF$ cắt AP tại T.

a) Chứng minh rằng $\angle DET = \angle ABC, \angle DFT = \angle ACB$.

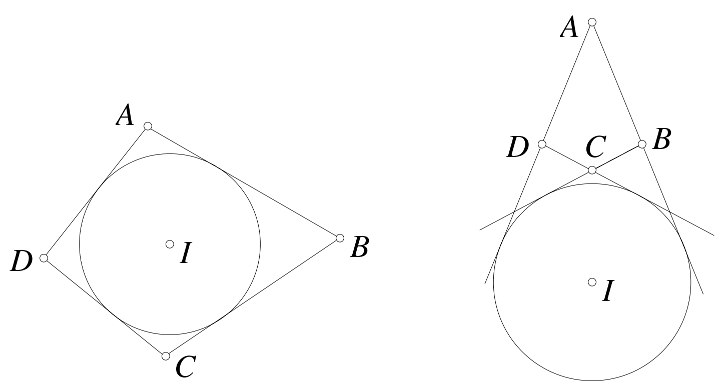
b) Đường thẳng PA cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Đường thẳng DT cắt (K) tại H. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Nhận xét. Đây là bài toán hay. Câu a) dùng gợi ý hướng giải cho câu b). Nếu để ý kỹ thực chất bài toán này là sự ghép nối của hai bài toán khác. Sau đây tôi xin giới thiệu lại với các bạn cả hai bài toán đó cùng với nguồn gốc của nó. Trước hết ta nhắc lại hai bài toán quan trọng về tứ giác ngoại tiếp.

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$.

a) Nếu $AB + CD = AD + BC$ thì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. Tức là tồn tại đường tròn (I) tiếp xúc các cạnh AB, BC, CD, DA.

b) Nếu $AB + AD = CB + CD$ thì tứ giác $ABCD$ bàng tiếp góc A, C. Từ là tồn tại một đường tròn (I) chứa trong góc A hoặc C tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA kéo dài.

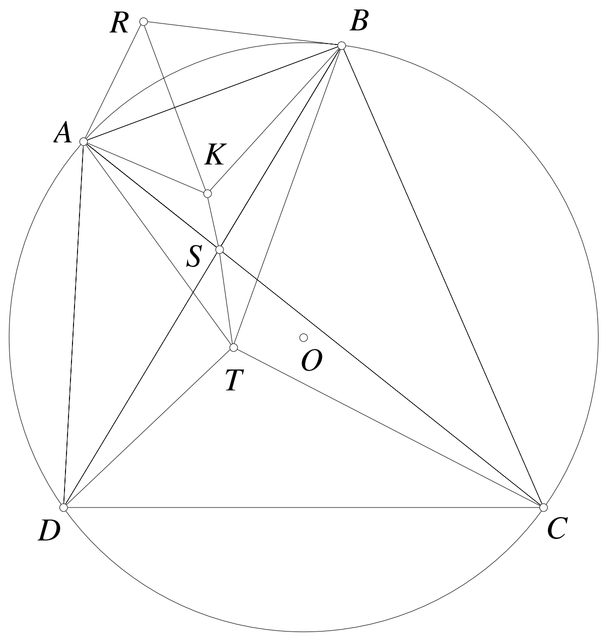


Hình 1.

Bổ đề là kết quả cơ bản có trong nhiều tại liệu. Chúng ta bắt đầu từ bài toán đầu tiên tham khảo [2] là đề chọn đội tuyển Indonesia

Bài toán 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD, SBC cắt tại tại T khác S. Dựng ra ngoài tứ giác tam giác ABR đồng dạng với DCT. Chứng minh rằng tứ giác $ATBR$ là tứ giác ngoại tiếp.

Đây là bài toán hay có rất nhiều cách tiếp cận khác nhau. Tuy vậy chúng tôi chọn lời giải sau gần như là ngắn gọn nhất và cũng chính là sử dụng hướng đi trong bài toán 1.



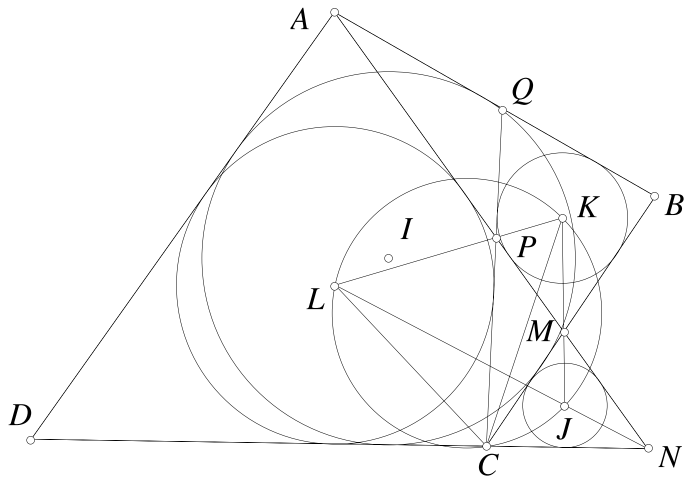
Hình 2.

Lời giải. Gọi K đối xứng R qua BC. Ta thấy $\angle KAS = \angle BAS - \angle BAK = \angle BDC - \angle RAB = \angle BDC - \angle TDC = \angle SDT = \angle SAT$. Từ đó AS là phân giác $\angle KAT$. Tương tự BS là phân giác $\angle KBT$. Dễ thấy TS là phân giác $\angle ATB$. Từ đó đường tròn (S) tiếp xúc với KA, KB, TA, TB suy ra $AK - AT = BK - BT$. Theo tính đối xứng suy ra $AR - AT = BR - BT$ hay $AR + BT = BR + AT$ suy ra tứ giác $ARBT$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong [2] cũng có một lời giải khác và ngoài ra bài toán cũng có thể giải bằng phép nghịch đảo hoặc tính chất phương tích. Ta dễ chứng minh được tâm nội tiếp tứ giác $ATBR$ là đẳng giác của K trong tam giác SAB đó chính là nội dung bài toán 1 phần a). Để tiếp tục chúng tôi xin nhắc lại và chứng minh bài toán trong IMO Shortlist 2009 trong [3] như sau

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Một đường thẳng đi qua A cắt đoạn thẳng BC và cắt tia đối tia CD tại N. Gọi J, K, L là tâm nội tiếp tam giác CNM, MAB và NAD. Chứng minh rằng trực tâm tam giác JKL nằm trên MN.

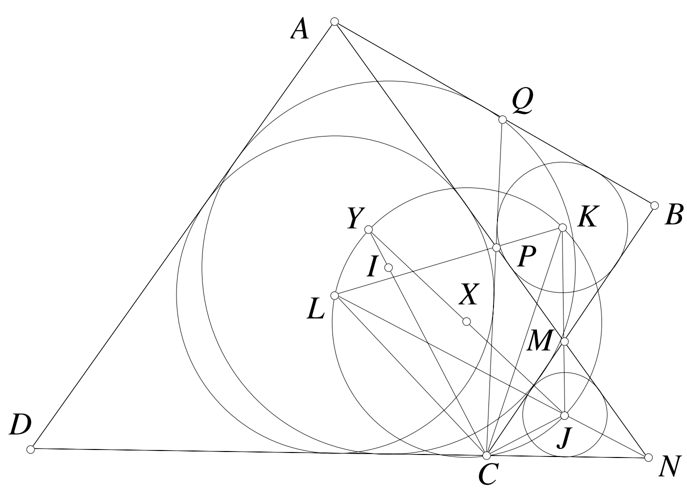
Đây là một kết quả đẹp, bao hàm nhiều ý tưởng. Chúng tôi xin giới thiệu lời giải sử dụng bài toán 2 như sau



Hình 3.

Lời giải. Gọi tiếp tuyến của đường tròn (L) nội tiếp tam giác NAD cắt AM, AB tại P, Q. Như vậy tứ giác $APCD$ nội tiếp. Kết hợp $ABCD$ nội tiếp suy ra $PA - PC = DA - DC = BA - BC$. Từ đó tứ giác $APCB$ bàng tiếp hay tứ giác $BQPM$ ngoại tiếp vậy CP tiếp xúc (K). Từ đó $2\angle LCK = \angle BCD = \angle CMN + \angle CNM = 2\angle JMN + 2\angle JNM = 2\angle MJL$. Từ đó tứ giác $CJKL$ nội tiếp. Từ đó theo định lý đường thẳng Steiner thì đường thẳng nối đối xứng của C qua JK, JL đi qua trực tâm tam giác JKL. Chú ý theo tính chất phân giác thì đường thẳng đó chính là MN. Vậy MN đi qua trực tâm tam giác JKL. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này có kết cấu chặt chẽ và ý tưởng hay. Chú ý điều kiện N thuộc tia đối tia CD cần thiết để bài toán đúng. Để ý rằng $CI \perp CJ$ nên nếu CI cắt đường tròn (X) ngoại tiếp tứ giác $CJKL$ tại Y thì JY là đường kính của (X). Phần nhận xét này chính là kết quả câu b) bài toán 1. Nếu để ý kỹ thi mô hình bài toán shortlist này cũng đã xuất hiện một lần trong đề thi VMO năm 2011 xem [4]



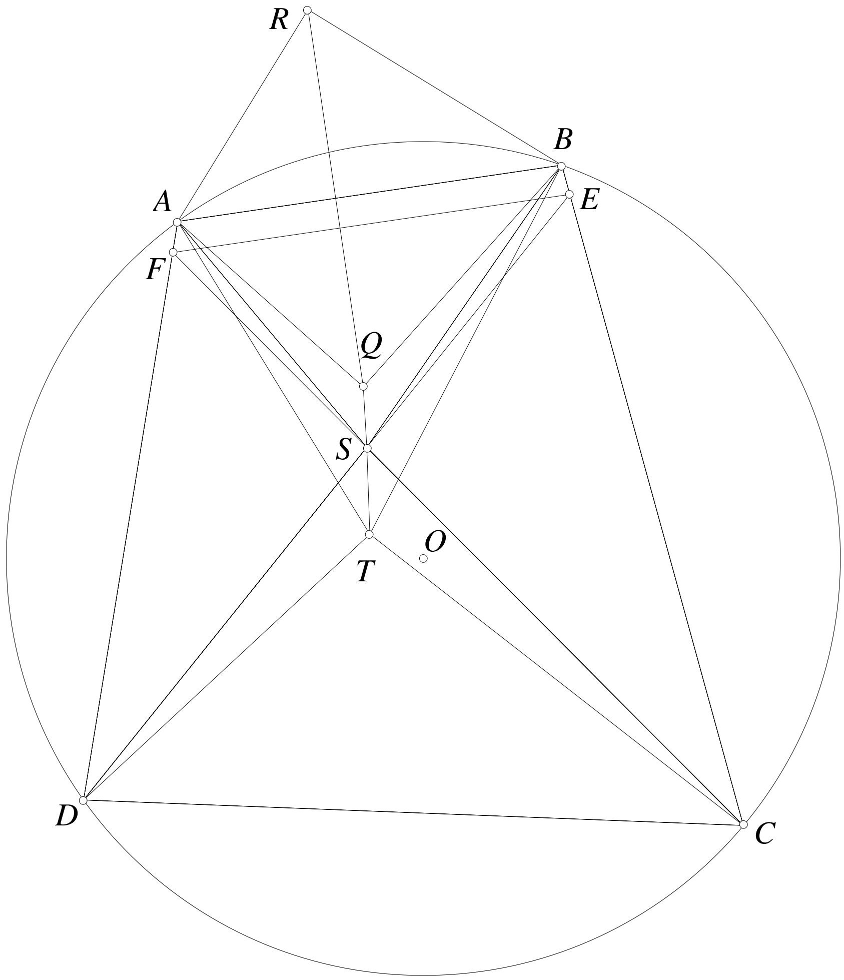
Hình 4.

Trở lại bài toán 1. Ta chú ý rằng do điều kiện chặt chẽ của bài toán Shortlist nên ta cần bổ sung thêm điều kiện cho bài toán 1 là M, N phải luôn cùng phía với P trên đường thẳng AP. Từ đó chú ý tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Bài toán chỉ là sự kết hợp một cách cơ học của bài toán 3 và bài toán 4. Chú ý rằng ta hoàn toàn có thể thay thế AP thành một đường thẳng bất kỳ đi qua P. Vậy ta có thể phát biểu lại bài toán này đẹp hơn như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, E khác A. Điểm Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF. Một đường thẳng đi qua P cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N sao cho M, N cùng phía với P. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Phân giác $\angle EDF$ cắt (K) tại H. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Nhận xét. Do bài toán chỉ là một cách kết hợp cơ học hai bài toán trên nên một khi giải và phân tích rõ hai bài toán trên thì bài toán kết hợp không còn mang nhiều ý nghĩa. Tuy vậy việc sử dụng cả hai bài toán lớn trong cùng một bài toán làm độ khó của bài toán thi tăng nhiều lần và chính vì vậy nó đánh giá cao và phân loại tốt được học sinh. Chúng ta tiếp tục với một mở rộng thú vị sau cho bài toán 3.

Bài toán 6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các điểm E, F thuộc cạnh CB, AD sao cho $EF \parallel AB$. DE cắt CF tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ASD và BSC cắt nhau tại T khác S. Dựng điểm R ở ngoài tứ giác $ABCD$ sao cho $\angle RAB = \angle ASF + \angle TDC$ và $\angle RBA = \angle BSE + \angle TCD$. Chứng minh rằng tứ giác $ATBR$ nội tiếp.



Hình 5.

Lời giải. Ta dễ thấy tứ giác $CDFE$ nội tiếp nên $\angle STA = \angle SDF = \angle SCE = \angle STB$. Từ đó TS là phân giác $\angle ATB$. Ta lại có $\angle QAS = \angle SAB - \angle QAB = \angle DAB - \angle DAS - \angle RAB = \angle DFE - (\angle DFS - \angle FSA) - (\angle ASF + \angle TDC) = \angle SFE - \angle TDC = \angle SDC - \angle TDC = \angle SDT = \angle SAT$. Vậy AS là phân giác $\angle QAT$. Tương tự BS là phân giác $\angle QBT$. Từ đó đường tròn (S) tiếp xúc với QA, QB, TA, TB suy ra $AQ - AT = BQ - BT$. Theo tính đối xứng suy ra $AR - AT = BR - BT$ hay $AR + BT = BR + AT$ suy ra tứ giác $ARBT$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi EF trùng AB ta thu được bài toán 3. Nếu việc kết hợp bài toán 3 và bài toán 4 cho ta bài toán TST thì việc kết hợp bài toán 6 và bài toán 4 sẽ cho ta một mở rộng cho bài TST nhưng rõ ràng việc kết hợp một cách cơ học như các bạn đã thấy nó cũng không còn mang nhiều ý nghĩa nữa.

Tuy vậy để thú vị hơn tôi xin đưa ra một ý tưởng như sau từ đề bài toán 1. Những điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle APB = \angle APC$ thì các điểm P đó có gì đặc biệt hay nói cách khác, quỹ tích P là gì. Bài toán sau sẽ giải đáp thắc mắc đó, chúng ta sẽ không cố gắng tìm quỹ tích P mà sẽ tìm quỹ tích điểm đẳng giác của P. Đó là một quỹ tích đẹp và chứng minh đơn giản, các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có đường tròn Apollonius ứng với A là (K). P là một điểm thuộc (K). Q đẳng giác với P trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle AQB = \angle AQC$.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đôi tuyển Việt Nam thì IMO năm 2015

[2] Indonesia IMO 2007 TST, Stage 2, Test 5, Problem 1
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h312083

[3] IMO Shortlist 2009 - Problem G8
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h355795p1932940

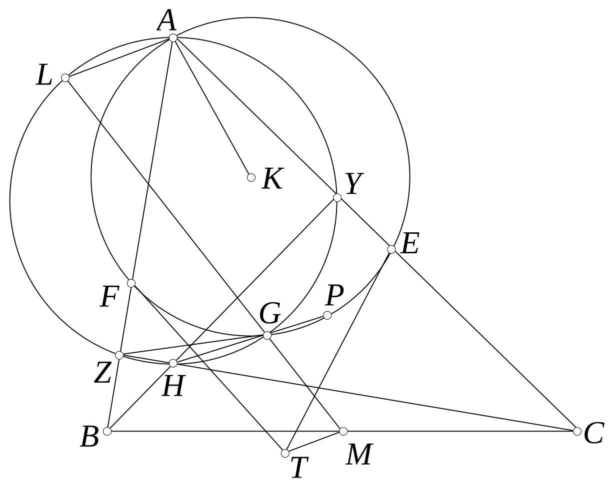
[4] A, M, N, P are concyclic iff d passes through I- [VMO 2011]
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h386167p2144390

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Proposed problems for TST

Tran Quang Hung

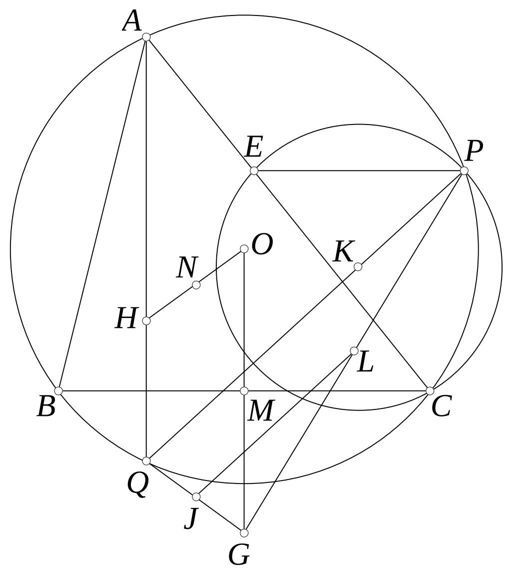
Problem 1 (Prepared)**.** Let ABC be a triangle with orthocenter H. P is a point. (K) is the circle with diameter AP. (K) cuts CA, AB again at E, F. PH cuts (K) again at G. Tangent line at E, F of (K) intersect at T. M is midpoint of BC. L is the point on MG such that $AL \parallel MT$. Prove that $LA \perp LH$.



Hnh 1.

Solution. Let BY, CZ be altitudes of ABC. HP cuts (K) again at G, thus $AG \perp PH$ so A, Z, H, G, Y lie on circle diameter AH. Easily seen MY, MZ are tangent to circle diameter AH. We have the tangent line at E, F of (K) intersect at T. From $\triangle GEF \sim \triangle GYZ$ we have $\triangle GZT \sim \triangle GMF$ deduce $\triangle GZF \sim \triangle GMT$ so $\angle GMT = \angle GZA$ but $\angle GMT = \angle GLA$ from $AL \parallel GT$, therefore $\angle GLA = \angle GZA$ so G, Z, L, A are cyclic. Thus, L lies on circle diameter AH, so $AL \perp AH$. $\square$

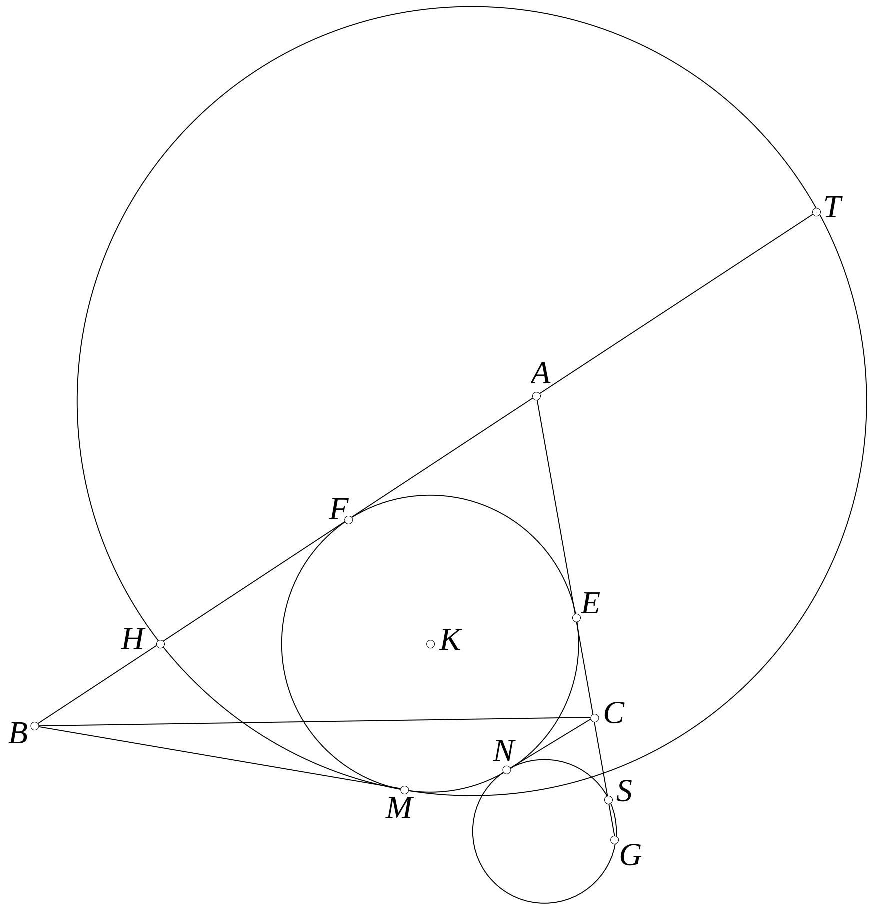
Problem 2 (Hard)**.** Let ABC be a triangle inscribed circle (O). P lies on (O). The line passes through P and parallel to BC cuts CA at E. K is circumcenter of triangle PCE and L is nine point center of triangle PBC. Prove that the line passes through L and parrallel to PK, always passes through a fixed point when P moves.



Hnh 2.

Solution. Let H, N be orthocenter and nine point center of triangle ABC. Let M be midpoint of BC, and G is symmetric of P through L. We are well known that G is reflection of O through BC. AH cuts (O) again at Q. Because of $PE \parallel BC$ we have $\angle CEP = \angle ACB$, so $\angle CPK = 90^\circ - \angle CEP = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAQ = \angle CPQ$ thus P, K, Q are collinear. The line passes through L parallel to PK cuts GQ at J. Thus, J is midpoint of LQ. Quadrilateral $OHQG$ is isoceles trapezoid and NJ is its median line. Therefore, J is relfeciton of N through BC. Therefore, the line passes through L and parrallel to PK, always passes through a fixed point, it is the reflection of N through BC. $\square$

Problem 3 (Medium)**.** Let ABC be a triangle and (K) is a circle that touches segments CA, AB at E, F, reps. M, N lie on (K) such that BM, CN are tangent to (K). G, H are symmetric of A through E, F. The circle passes through G and touches to (K) at N that cuts CA again at S. The circle passes through H and touches (K) at M that cuts AB again at T. Prove that the line passes through K and perpendicular to ST always passes through a fixed point when (K) changes.

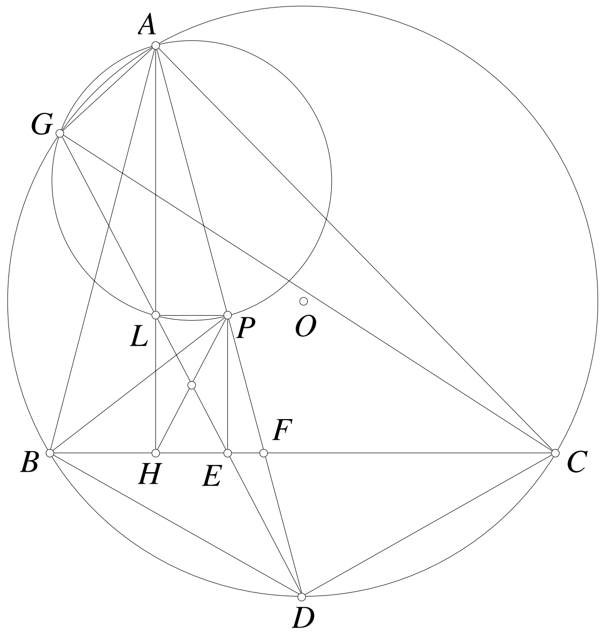


Hnh 3.

Solution. We have $CE^2 = CM^2 = CG.CS$ so $\dfrac{CE}{CS} = \dfrac{CG}{CE} = \dfrac{CE+CG}{CS+CE} = \dfrac{EG}{ES} = \dfrac{EA}{ES}$ deduce $\dfrac{EA}{CE} = \dfrac{ES}{CS} = \dfrac{EA+ES}{CE+CS} = \dfrac{AS}{ES}$ thus $SE^2 = SA.SC$. From this S lies on radical axis of (K) and circumcircle (O) of triangle ABC. Simiarly, with T. Thus ST is radical axis of (K) and (O). Therefore the line passes through K and perpendicular to ST always passes through fixed point O. We are done.

$\square$

Problem 4 (Easy)**.** Let ABC be acute triangle inscribed circle (O), altitude AH, H lies on BC. P is a point that lies on bisector $\angle BAC$ and P is inside triangle ABC. Circle diameter AP cuts (O) again at G. L is projection of P on AH. Assume that GL bisects HP. Prove that P is incenter of ABC.



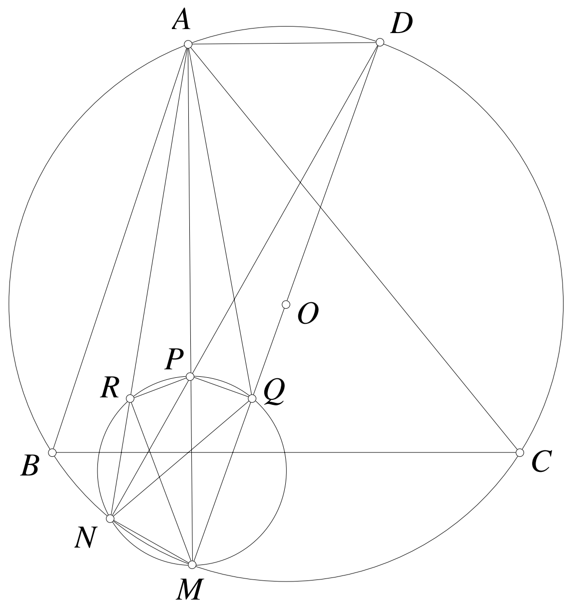
Hnh 4.

Solution. Let AP cuts BC at F and cuts (O) again at D. Note that $LP \parallel BC$ so we have $\angle AGL = \angle LPF = \angle BFD = \angle FCD + \angle FDC = \angle FBD + \angle AGC = \angle DGC + \angle AGC = \angle AGD$. From this G, L, D are collinear. GL cuts BC at E. Because GL bisects PH so $PLHE$ is rectangle. Follow Thales's theorem $\frac{DP}{DA} = \frac{PE}{AL} = \frac{LH}{AL} = \frac{PF}{AP}$ deduce $\frac{DA}{AP} = \frac{DP}{PF}$ or $\frac{DA}{DA - AP} = \frac{DP}{DP - PF}$ deduce $\frac{DA}{DP} = \frac{DP}{DF}$. Thus, $DP^2 = DF.DA$. We have $\angle DBF = \angle DAC = \angle DAB$ so triangles DBF and DAB are similar. Deduce $BD^2 = DF.DA = DP^2$. From this, $\angle PBC = \angle PBD - \angle CBD = \angle BPD - \angle CAD = \angle BPD - \angle DAB = \angle PBA$. Thus, P is incenter of triangle ABC. We are done. $\square$

Proposed problems for Junior Bankan

Tran Quang Hung

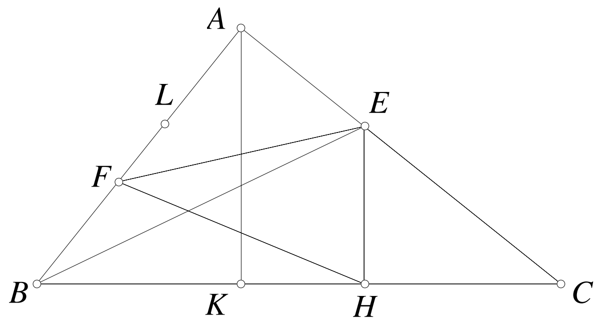
Problem 5. Let ABC be an acute triangle inscried circle (O). M lies on small arc $\overset{\frown}{BC}$. P lies on AM. Circle diameter MP cuts (O) again at N. MO cuts circle diameter MP again at Q. AN cuts circle diameter MP again at R. Prove that $\angle PRA = \angle PQA$.



Hnh 5.

Solution. Let MD be diameter of (O). We have $DN \perp MN \perp NP$. From this N, P, D are collinear. MD is diameter of (O) then $\angle PAD = 90°$. Q lies on circle diameter MP then $\angle PQD = 90°$. Thus $APQD$ is cyclic deduce $\angle NAP = \angle NDM = \angle PAQ$ and $\angle PQN = \angle PMN = \angle ADN = \angle AQP$. Therefore AP is bisector of $\angle NAQ$ and QP is bisector $\angle NQA$. And $\angle PMQ = \angle AMD = \angle AND = \angle RNP = \angle RMP$. From this $\triangle ARM = \triangle AQM(a.s.a)$. We deduce $\angle ARM = \angle AQM$ but $\angle PRM = \angle PQM = 90°$ deduce $\angle PRA = \angle PQA$. We are done. $\square$

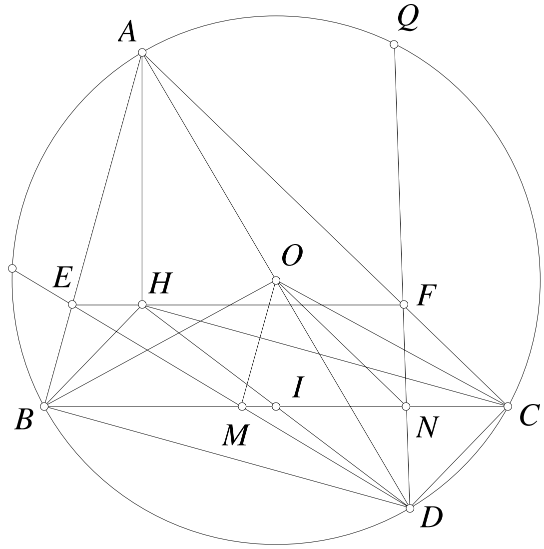
Problem 6. Let ABC be right triangle with hypotenus BC, bisector BE, E lies on CA. Assume that circumcircle of triangle BCE cuts segment AB again at F. K is projection of A on BC. L lies on segment AB such that $BL = BK$. Prove that $\dfrac{AL}{AF} = \sqrt{\dfrac{BK}{BC}}$.



Hnh 6.

Solution. Let H be projection of E on BC. We easily seen $EA = EH, BH = BA$ and $BCEF$ is cyclic so $\angle AFE = \angle ECH$ deduce AFE and HCE are congruent. From this, $BC = HB + HC = BA + AF$. We have $BA^2 = BK.BC = BK(BA + AF)$ deduce $BK.AF = BA(BA - BK) = BA(BA - BL) = BA.AL$. From this $\dfrac{AL}{AF} = \dfrac{BK}{BA} = \dfrac{BA}{BC}$ thus $\dfrac{AL}{AF} = \sqrt{\dfrac{BK}{BA}.\dfrac{BA}{BC}} = \sqrt{\dfrac{BK}{BC}}$. We are done. $\square$

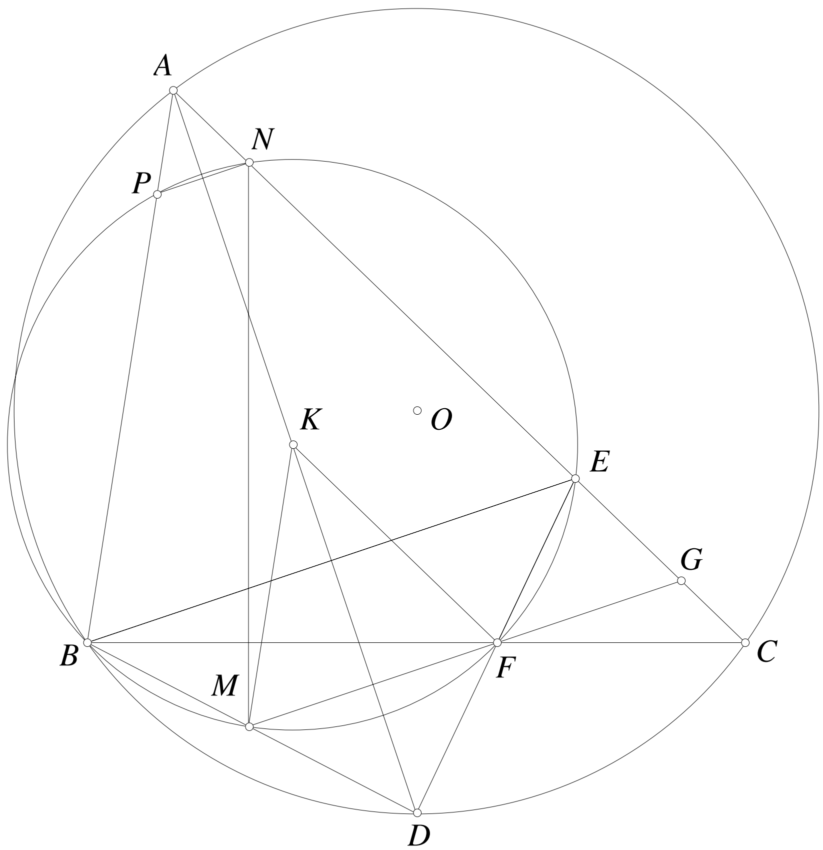
Problem 7. Let ABC be acute triangle inscribed circle (O). AD is diamater of (O). M, N lie on BC such that $OM \parallel AB, ON \parallel AC$. DM, DN cut (O) again at P, Q. Prove that $BC = DP = DQ$.



Hnh 7.

Solution. We easily seen $HCDB$ is parallelogram so H and D are symmetric through midpoint I of BC. Let DM, DN cut CA, AB at E, F, reps. Because O is midpoint of AD and $OM \parallel AE$ so M is midpoint of DE. Similarly N is midpoint of DF. Triangle FDB right at B and M is midpoint of FD so $MB = MD$. But $OB = OD$ thus OM is perpendicular bisector of BD therefore MO is bisector of $\angle FMN$. Similarly, NO is bisector of $\angle ENM$ deduce O is D-excenter of DMN. So O is equidistance to MN, DM and DN so $DP = DQ = BC$. We are done. $\square$

Problem 8. Let ABC be acute triangle with $AB < AC$ inscribed cirle (O). Bisector of $\angle BAC$ cuts (O) again at D. E is reflection of B through AD. DE cuts BC at F. Let (K) be circumcircle of triangle BEF. BD, EA cut (K) again at M, N, reps. Prove that $\angle BMN = \angle KFM$.



Hnh 8.

Solution. We easily seen E lies on AC. AD is perpedicular bisector of BE so K lies on AD or AD is reflection axis of (K). Hence if AB cuts (K) again at P then $AN = AP$. Thus $\angle BMN = \angle ANP = 90^\circ - \angle NAD = 90^\circ - \angle CBD$. We deduce $MN \perp BF$, therefore $\angle BMN = \angle KMF = \angle KFM$. $\square$

Hai bài hình học thi Olympic chuyên KHTN 2015

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết tập trung khai thác đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2015.

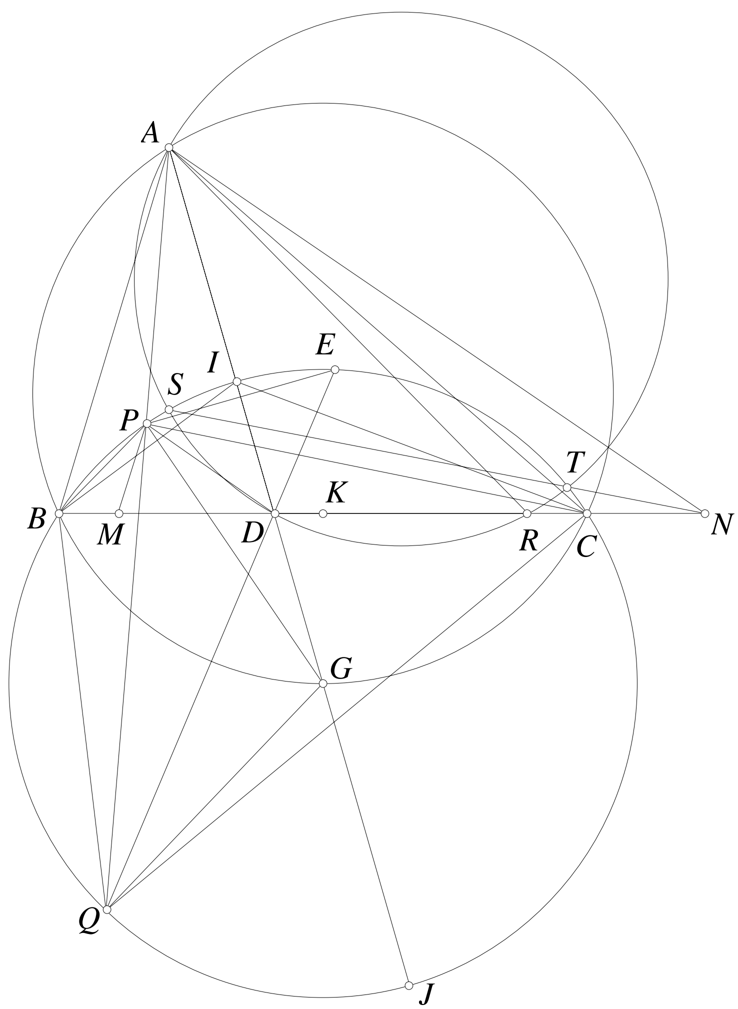
1 Bài hình học thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất

Kỳ thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất [1] có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và AI cắt BC tại D. Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại P, Q sao cho P nằm giữa A, Q.

a) Chứng minh rằng tích $DP.DQ$ luôn không đổi khi P, Q thay đổi.

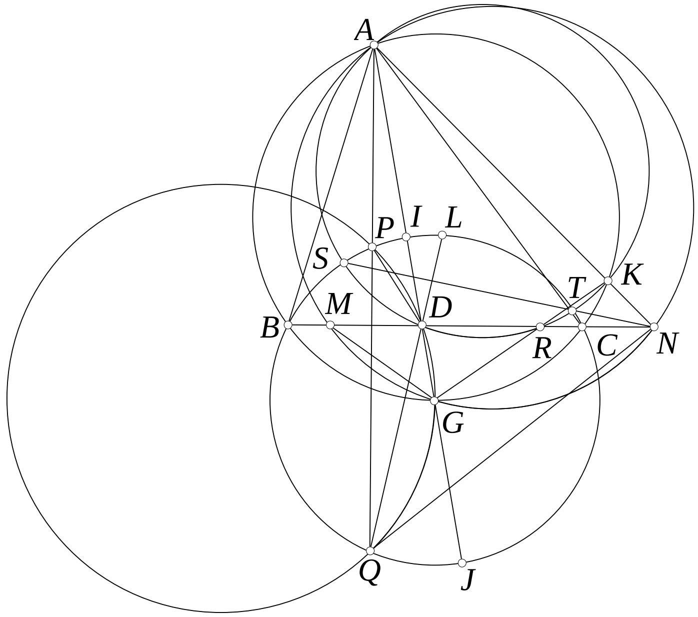
b) Giả sử đoạn thẳng PQ cắt đoạn thẳng BD. Trên đoạn DB lấy các điểm M sao cho $DM = DP$. Lấy R đối xứng M qua trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại S, T. ST cắt BC tại N. Chứng minh rằng tam giác DNQ cân.



Hình 1.

Lời giải 1. a) Gọi DQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại E khác Q. AI cắt (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại G khác A và J là tâm bàng tiếp góc A. Ta thấy $GP^2 = GB^2 = GD.GA$. Từ đó suy ra $\angle ADP = \angle GPQ = \angle GQP$ vậy tứ giác $PDGQ$ nội tiếp. Từ đó $\angle PDI = \angle PQG = \angle GPQ = \angle GDQ = \angle EDI$. Vậy P, E đối xứng nhau qua AI suy ra $DP.DQ = DE.DQ = DB.DC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta dễ thấy $NB.NC = NS.ST = ND.NR$. Từ đó $\dfrac{NB}{ND} = \dfrac{NR}{NC}$ hay $(BD, N) = (RC, N)$ hay $(ND, B) = (NC, R)$. Tương tự $\dfrac{NC}{ND} = \dfrac{NR}{NB}$ suy ra $(CD, N) = (RB, N)$ hay $(ND, C) = (NB, R)$. Từ đó $(ND, BC) = \dfrac{(ND, B)}{(ND, C)} = \dfrac{(NC, R)}{(NB, R)} = (BC, R)$. Vậy ta có biến đổi $(DN, CB) = (ND, BC) = (BC, R) = (CB, M)$ vậy theo hệ thức Maclaurin mở rộng suy ra $DN.DM = DB.DC = DP.DQ = DM.DQ$. Từ đó $DN = DQ$ nên tam giác DQN cân tại D. □



Hình 2.

Lời giải 2. a) Gọi AD cắt (O) tại G khác A và J là tâm bàng tiếp góc A, QD cắt đường tròn ngoại tiếp IBC tại L khác Q. Ta có $(AD, IJ) = -1$ và G là trung điểm IJ. Theo hệ thức Maclaurin, ta có $AP.AQ = AJ.AI = AD.AG$. Suy ra P, Q, D, G cùng thuộc một đường tròn. Vậy $\angle PDI = \angle PQG = \angle GPQ = \angle GDQ = \angle ADL$ suy ra $DP = DL$. Suy ra $DP.DQ = DL.DQ = DB.DC$. Suy ra điều phải chứng minh.

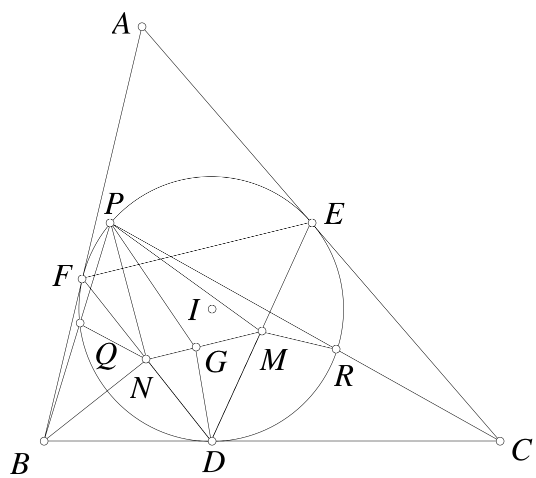
b) Gọi AN cắt ABC tại K khác A. Do $ND.NR = NS.NT = NB.NC = NA.NK$ nên tứ giác $AKRD$ nội tiếp, do đó $\angle AKR = \angle ADB = \angle ACG = \angle AKG$ suy ra K, R, G thẳng hàng. G thuộc trung trực BC suy ra G cũng thuộc trung trực MR. Do $\angle GMN = \angle GRM = \angle GAN$, suy ra A, M, G, N cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $DN.DM = DA.DG = DB.DC = DP.DQ$ mà $DP = DM$ suy ra $DQ = DN$ suy ra tam giác DNQ cân tại D. □

Nhận xét. Ý a) lời giải thứ nhất chỉ dùng đến kiến thức THCS với lời giải thứ hai thì cần hàng điểm điều hòa, tuy vậy mỗi cách đều có một cái hay riêng. Nếu ý b) giải như lời giải thứ nhất thì chỉ cần đường tròn bất kỳ đi qua D, R là được nhưng vai trò của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR thực sự cần thiết trong lời giải thứ 2. Bài toán này có nhiều ý nghĩa, sau đây là một số khai thác ứng dụng

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. M là trung điểm E, F. Một đường thẳng đi qua A cắt (I) tại P, Q. Chứng minh rằng tích $MP.MQ$ không đổi khi đường thẳng thay đổi.

Với bài toán trên là trường hợp đặc biệt của câu a) bài toán gốc, ta chú ý đường tròn nội tiếp (I) đi qua tâm nội tiếp tam giác AEF. Từ đó có điều phải chứng minh. Nếu áp dụng tiếp bài này ta thu được một bài toán thú vị sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. P là một điểm trên (I). PB, PC cắt (I) tại Q, R khác P. Gọi M, N là trung điểm DE, DF. DG là đường đối trung của tam giác AMN. Chứng minh rằng phân giác $\angle MPN$ đi qua G khi và chỉ khi $QN = MR$.



Hình 3.

Lời giải. Theo bài trước ta có $NP.NQ = ND^2$ và $MP.MR = MD^2$. Từ đó theo tính chất đường đối trung $\dfrac{NP.NQ}{MP.MR} = \dfrac{ND^2}{MD^2} = \dfrac{GN}{GM}$. Vậy $NQ = MR$ khi và chỉ khi $\dfrac{NP}{MP} = \dfrac{GN}{GM}$ khi và chỉ khi PG là phân giác của tam giác PMN. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ý b) của bài toán 1 có thể viết lại độc lập hơn với ý a) như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và AI cắt BC tại D. P là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và nằm trong tam giác ABC. Giả sử AP cắt đoạn BD. Trên đoạn DB lấy điểm M sao cho $DM = DP$. Lấy R đối xứng M qua trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại S, T. ST cắt BC tại N. Chứng minh rằng đường tròn (D, DN) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau trên PD.

Lời giải hoàn toàn tương tự

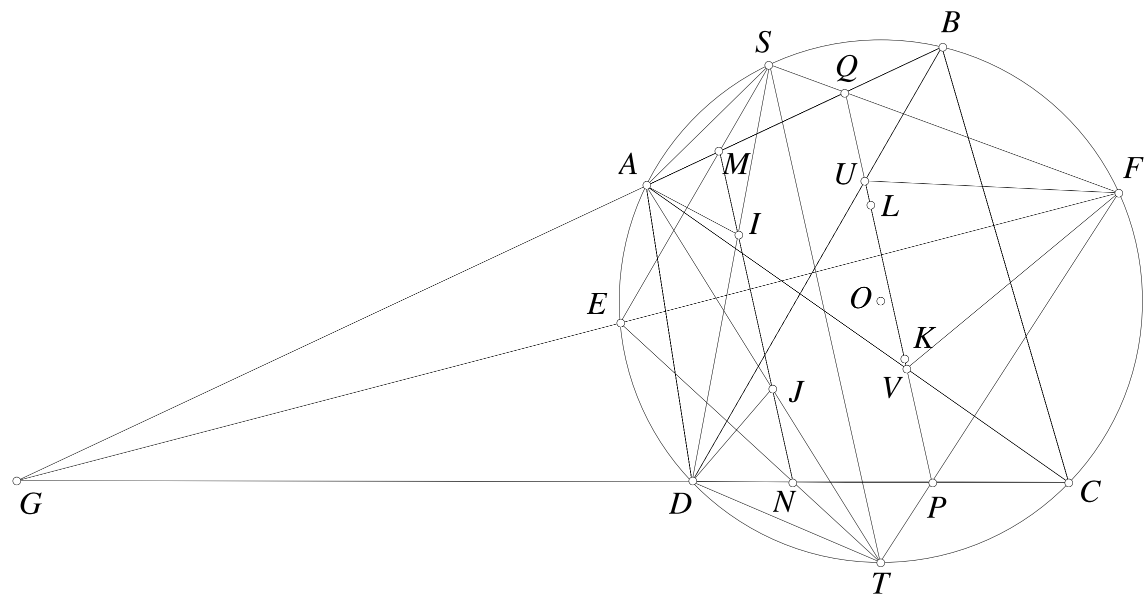
2 Bài hình học thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ hai

Kỳ thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất [2] có bài hình học như sau

Bài toán 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Gọi DI, AJ lần lượt cắt (O) tại S, T khác D, A. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AB, CD tại M, N.

a) Chứng minh rằng SM và TN cắt nhau trên đường tròn (O).

b) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.



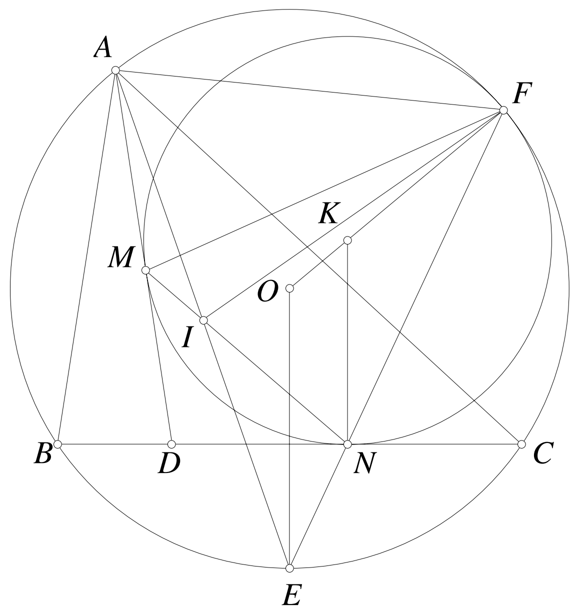
Hình 4.

Lời giải. a) Dễ thấy tam giác SAI và DTJ cân và có $\angle ASI = \angle DTJ$ nên hai tam giác đó đồng dạng. Lại dễ chứng minh tứ giác $AIJD$ nội tiếp nên $\angle MAI = \angle IAD = \angle DJN$ và $\angle NDJ = \angle JDA = \angle AIM$. Từ đó hai tam giác MAI và NJD đồng dạng. Từ đó suy ra SMA và TNJ đồng dạng. Vậy $\angle ASM = \angle NTJ$ do đó SM và TN cắt nhau tại E trên đường tròn (O).

b) Gọi AB cắt CD tại G. GE cắt (O) tại F khác E. Ta thấy $GC.GD = GE.GF = GM.GQ$. Từ đó tứ giác $MQFE$ nội tiếp nên $\angle QFE = \angle AME = \angle MAS + \angle MSA = \angle MBS + \angle AFE = \angle SFA + \angle ASE = \angle EFS$. Từ đó S, Q, F thẳng hàng. Tương tự T, P, F thẳng hàng. Từ chứng minh trên SMA và TNJ đồng dạng nên tam giác GMN cân suy ra $GM = GN$. Lại có $GM.GQ = GN.GP$ nên $GP = GQ$ suy ra $PQ \parallel MN \parallel ST$. Từ đó đường tròn nội tiếp tam giác FPQ tiếp xúc (O). Vậy theo định lý Poncelet nếu PQ cắt DB, AC tại U, V thì đường tròn ngoại tiếp tam giác FUV cũng tiếp xúc (O) và tiếp xúc DB, AC. Từ đó theo định lý Thebault thì PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC. □

Nhận xét. Đây là bài toán sử dụng hai bổ đề quan trọng là định lý Sawayama và Thebaut và định lý Poncelet. Chú ý rằng với định lý Sawayama và Thebaut thì hiểu một cách chặt chẽ phải phát biểu trên đường chéo của tứ giác nội tiếp, do đó việc sử dụng định lý Poncelet để đưa về đường tròn FUV tiếp xúc với CA, BD là cần thiết. Chúng tôi xin nhắc lại hai định lý này phần tiếp sau

Bài toán 6 (Định lý Sawayama và Thébault)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



Hình 5.

Chứng minh này tham khảo [4]

Lời giải. Gọi phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại I. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FAE$ suy ra tứ giác $AFIM$ nội tiếp. Suy ra $\angle IFN = \angle MFN - \angle MFI = \angle DMN - \angle MFI = \angle AFI - \angle MFI = \angle AFM = \angle AIM = \angle EIN$. Từ đó $\triangle EIN \sim \triangle EFI$ suy ra $EI^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 7 (Định lý Poncelet)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) tiếp xúc AB, CD tại M, N. Đường tròn (L) tiếp xúc với AC, BD tại P, Q. Chứng minh rằng nếu M, N, P, Q thẳng hàng thì $(K), (L)$ và (O) đồng trục.

Chứng minh chi tiết và mở rộng định lý này xem trong [5]

Bài toán gốc có thể phát biểu gọn lại chỉ còn một ý như sau

Bài toán 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AB, CD tại M, N. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.

Đây là một trong những khai thác thú vị của định lý Thebault. Khai thác này hoàn toàn có thể viết trên các đường chéo như sau

Bài toán 9. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AC, BD tại M, N. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN cắt BD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM cắt AC tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.

Bài toán có một mở rộng khác đơn giản nhưng thú vị như sau

Bài toán 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi S, T là trung điểm các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$. M, N lần lượt thuộc AB, CD. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng SM và TN cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi SQ và TP cắt nhau trên (O).

Tài liệu

[1] Đề hình học thi Olympic chuyên KHTN năm 2015 ngày thứ nhất
http://www.artofproblemsolving.com/community/
c6t48f6h1086852_constant_product_and_isocesles_triangles

[2] Đề hình học thi Olympic chuyên KHTN năm 2015 ngày thứ hai
http://www.artofproblemsolving.com/community/
c6t48f6h1087174_lines_intersect_on_circle_and_pass_through_incenters

[3] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài hình học chọn đội tuyển KHTN.

[4] Trần Quang Hùng, Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014
http://analgeomatica.blogspot.com/2014/03/xung-quanh-mot-bai-toan-hinh-hoc-trong.html

[5] Topic 3 circles with common tangency point
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h474157p4809875

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com