NGUYỄN VŨ LƯƠNG (Chủ biên)
NGUYỄN NGỌC THẮNG

CÁC BÀI GIẢNG VỀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

ĐHQG HÀ NỘI
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHỐI THPT CHUYÊN TOÁN - TIN

NGUYỄN VŨ LƯƠNG (Chủ biên)
NGUYỄN NGỌC THẮNG

CÁC BÀI GIẢNG VỀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực của toán học và nhiều ngành khoa học tự nhiên. Đã có những cuốn sách chuyên khảo viết đầy đủ về bất đẳng thức, nhưng chỉ dành riêng cho các chuyên gia, các thầy cô giáo để có hiểu biết, có kiến thức sâu về bất đẳng thức. Những cuốn sách biên soạn về bất đẳng thức dành cho học sinh trung học cơ sở hay trung học phổ thông còn rất ít. Hai bất đẳng thức cơ bản quen thuộc nhất đối với các em học sinh là bất đẳng thức dạng trung bình

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \left(\Pi_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}, a_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1,n})$$

và bất đẳng thức Bunhiacôpxki

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big).$$

Từ những bài giảng cho học sinh Khối chuyên Toán - Tin Trường Đại học Khoa học Tự nhiên các tác giả muốn trình bày một cách tiếp cận mới về hai bất đẳng thức được áp dụng rộng rãi nhất này. Cuốn sách chia thành các bài giảng độc lập được sắp xếp một cách trình tự. Sau này chúng ta có thể bổ sung các bài giảng mới để cuốn sách ngày càng đầy đủ hơn. Mỗi bài giảng có một nội dung được hoàn thiện và sắp xếp từ dễ đến khó để độc giả có thể tự học. Bạn đọc nào đã làm quen với cuốn sách " Các bài giảng về bất đẳng thức Côsi" là bất đẳng thức dạng trung bình đã được xuất bản của cùng các tác giả cuốn sách này thì chắc chắn sẽ dễ dàng hơn khi đọc cuốn sách đang có trong tay các bạn "Các bài gảng về bất đẳng thức Bunhiacôpxki ". Nếu nhiều phương pháp giải hay, các bài toán khó được các em học sinh, các độc giả hiểu thấu đáo và cảm thấy đơn giản thì đó chính là điều mong muốn của những người viết cuốn sách này.

Như các bạn đã biết, khi viết về một nội dung phong phú và khá kinh điển thì chắc chắn sẽ còn nhiều thiếu sót nên các tác giả rất mong sự góp ý của các bạn độc giả. Các ý kiến góp ý xin gửi về địa chỉ:

Khối THPT chuyên Toán - Tin,
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên,
334 Đường Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội.

Mục Lục

Chương 1

Kiến thức cơ bản

1 Bất đẳng thức Bunhiacôpxki dạng đơn giản

Bất đẳng thức Bunhiacôpxki trong trường hợp đơn giản được thể hiện trong ví dụ 1.1 sau đây

Ví dụ 1.1. Chứng minh rằng $\forall a, b, c, x, y, z \in R$ ta có

1) $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \qquad (*)$

2) $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (**)$

Giải

1) Bất đẳng thức (*) tương đương với $\quad (bx - ay)^2 \geqslant 0$
Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.
2) Bất đẳng thức (**) tương đương với

$$2abxy + 2bcyz + 2cazx \leq a^2(y^2 + z^2) + b^2(z^2 + x^2) + c^2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geqslant 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

Sau đây xét một số áp dụng của bất đẳng thức (*),(**).

Ví dụ 1.2. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Big(\frac{a}{\sqrt{b}}\sqrt{b} + \frac{b}{\sqrt{c}}\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{a}}\sqrt{a}\Big)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq \Big(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\Big)(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant (a+b+c) \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 1.3. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Big(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\Big)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq \Big(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\Big)2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 1.4. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$(a+b+c)^2 =$

$$= \left(\sqrt{\frac{a}{b+2c}}\sqrt{a(b+2c)} + \sqrt{\frac{b}{c+2a}}\sqrt{b(c+2a)}\sqrt{\frac{c}{a+2b}}\sqrt{c(a+2b)}\right)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}\right) \cdot 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geqslant 1 \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 1.5. Với x, y, z là những số thực thoả mãn đẳng thức $|x+2y+3z| = \sqrt{14}$, chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$14 = (x+2y+3z)^2 \leq (1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geqslant 1 \quad \text{(đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} \\ |x+2y+3z| = \sqrt{14}. \end{cases}$$

Ví dụ 1.6. Với x, y, z là những số thực thoả mãn đẳng thức $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, chứng minh rằng

$$|x+y+z| \leq \sqrt{\frac{11}{6}}.$$

Giải

Ta có

$$(x+y+z)^2 = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}z\right)^2$$

$$\leq (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})(x^2+2y^2+3z^2) = \frac{11}{6}$$

$$\Rightarrow |x+y+z| \leq \sqrt{\frac{11}{6}} \quad \text{(đpcm).}$$

Trong một số trường hợp ta đưa vào tham số điều chỉnh sẽ nhận được những lời giải rất thú vị.

Ví dụ 1.7. Với $a, b > 0$, $a+b > 1$, chứng minh rằng

$$a^2 + \frac{b^2}{(a+b)^2-1} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(a+b)^2 = (a + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha}.b)^2 \leq (1+\frac{1}{\alpha})(a^2+\alpha b^2)$$

Ta chọn $\alpha > 0$ sao cho

$$(a+b)^2 = (1+\frac{1}{\alpha}) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{(a+b)^2-1} > 0$$

Và thu được

$$1 \leq a^2 + \frac{b^2}{(a+b)^2-1} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 1.8. Với $x, y > 0, x^2+y^2 = 2$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{2y}.$$

Giải

Ta có

$$P^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha x} + \sqrt{2y}\right)^2 \leq (\frac{1}{\alpha} + 1)(\alpha x + 2y) \quad (\alpha > 0)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & P^4 \leq (1 + \frac{1}{\alpha})^2(\alpha^2 + 4)(x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow \quad & P^4 \leq (1 + \frac{1}{\alpha})^2(\alpha^2 + 4)2 \\ \Leftrightarrow \quad & P \leq \sqrt[4]{2(\alpha^2 + 4)(1 + \frac{1}{\alpha})^2} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{x} = \sqrt{2y} \\ \dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 x = 2y \\ \alpha y = 2x \end{cases}$$

Suy ra $\quad \alpha^3 xy = 4xy \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{4}.$

Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt[3]{16}x = 2y \\ \sqrt[3]{4}y = 2x \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 2x^3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Do đó $\quad P_{max} = \sqrt[4]{2(\sqrt[3]{16} + 4)(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}})^2}.$

Ví dụ 1.9. Với h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao của một tam giác, r là độ dài bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h_a}} + \frac{2}{\sqrt{h_b}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{h_c}} \leq \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{r}}.$$

Giải

Ta đã biết $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$, do đó

$$\Big(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h_a}}+\frac{2}{\sqrt{h_b}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{h_c}}\Big)^2\le(3+4+5)\Big(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\Big)=\frac{12}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h_a}}+\frac{2}{\sqrt{h_b}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{h_c}}\le\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{r}}.$$

Ví dụ 1.10. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{2+b}+\frac{3c}{3+c}\le\frac{6(a+b+c)}{6+(a+b+c)}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\Big(\frac{a}{1+a}-1\Big)+\Big(\frac{2b}{2+b}-2\Big)+\Big(\frac{3c}{3+c}-3\Big)\le\frac{6(a+b+c)}{6+(a+b+c)}-6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{4}{2+b}+\frac{9}{3+c}\geqslant\frac{36}{6+a+b+c}$$

Ta có

$$\begin{aligned}36&=(1+2+3)^2\\&=\Big(\frac{1}{\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a}+\frac{2}{\sqrt{2+b}}\sqrt{2+b}+\frac{3}{\sqrt{3+c}}\sqrt{3+c}\Big)^2\end{aligned}$$

Suy ra $\quad 36\le\Big(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{4}{2+b}+\dfrac{9}{3+c}\Big)(6+a+b+c)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{4}{2+b}+\frac{9}{3+c}\geqslant\frac{36}{6+a+b+c}\quad\text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.11. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{5a}+\frac{1}{3b}+\frac{7}{15c}\geqslant\frac{15}{3a+5b+7c}.$$

Giải

Ta có

$$1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{5a}} \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} + \sqrt{\frac{1}{3b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \sqrt{\frac{7}{15c}} \cdot \sqrt{\frac{7c}{15}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{3b} + \frac{7}{15c}\right)\left(\frac{a}{5} + \frac{b}{3} + \frac{7c}{15}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5a} + \frac{1}{3b} + \frac{7}{15c} \geqslant \frac{15}{3a + 5b + 7c} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.12. Với $a, c > 0; b \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{4}{c+a} \geqslant \frac{8}{a+b+c}.$$

Giải

Ta có

$$16 = (1+1+2)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b} + \frac{1}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{2}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a}\right)^2$$

Suy ra

$$16 \leq \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{2}{c+a}\right) \cdot 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geqslant \frac{8}{a+b+c} \quad \text{(đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a + b = b + c = \frac{c+a}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.13. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+(a+b)^2}+\sqrt{b^2+(b+c)^2}+\sqrt{c^2+(c+a)^2} \geqslant \sqrt{5}(a+b+c).$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} a^2+(a+b)^2 &= \frac{1}{5}[a^2+(a+b)^2][1^2+2^2] \\ &\geqslant \frac{1}{5}(a+2(a+b))^2 = \frac{1}{5}(3a+2b)^2 \end{aligned}$$

Suy ra $\sqrt{a^2+(a+b)^2} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{5}}(3a+2b)$

Lập luận tương tự ta thu được

$$\sqrt{b^2+(b+c)^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}(3b+2c)$$

$$\sqrt{c^2+(c+a)^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}(3c+2a)$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{a^2+(a+b)^2}+\sqrt{b^2+(b+c)^2}+\sqrt{c^2+(c+a)^2} \geqslant \sqrt{5}(a+b+c) \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.14. Với $\alpha, \beta, \gamma > 0;\ \alpha+\beta+\gamma = 1;\ a, b, c > 0,$

chứng minh rằng $\dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{\beta}{b}+\dfrac{\gamma}{c} \geqslant \dfrac{1}{\alpha a+\beta b+\gamma c}.$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} 1 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 &= \left(\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\sqrt{\alpha a}+\sqrt{\frac{\beta}{b}}\sqrt{\beta b}+\sqrt{\frac{\gamma}{c}}\sqrt{\gamma c}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)(\alpha a+\beta b+\gamma c) \end{aligned}$$

và suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.15. Với $a, b, c > 0, ab+bc+ca = abc$, chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geqslant 1.$$

Ta có
$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

Cho $\alpha = \frac{1}{b}, \beta = \frac{1}{c}, \gamma = \frac{1}{a}$ và áp dụng bất đẳng thức trong ví dụ 1.14 ta có
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geqslant \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.16. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng
$$\frac{a^4}{b^2(b+c)} + \frac{b^4}{c^2(c+a)} + \frac{c^4}{a^2(a+b)} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 =$$
$$= (\frac{a}{\sqrt{b}}\sqrt{b} + \frac{b}{\sqrt{c}}\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{a}}\sqrt{a})^2 \leq (\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a})(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow a+b+c \leq (\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a})$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{a^2}{b\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{b^2}{c\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{c^2}{a\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\right)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^4}{b^2(b+c)} + \frac{b^4}{c^2(c+a)} + \frac{c^4}{a^2(a+b)}\right) \cdot 2(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{b^2(b+c)} + \frac{b^4}{c^2(c+a)} + \frac{c^4}{a^2(a+b)} \geqslant \frac{a+b+c}{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.17. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng
$$\frac{(a+bc)^3}{(1+b^3)(a^3+c^3)} \leq 2.$$

Giải

Với $a_i > 0, b_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3)$, ta có

$$(a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)^3 \leq (a_1^3 + b_1^3)(a_2^3 + b_2^3)(a_3^3 + b_3^3) \quad (*)$$

Thật vậy, đặt $x_i = a_i^3, y_i = b_i^3 \quad (i = 1, 2, 3)$ suy ra cần chứng minh

$$\sqrt[3]{x_1x_2x_3} + \sqrt[3]{y_1y_2y_3} \leq \sqrt[3]{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)}$$

$$\Leftrightarrow P = \sqrt[3]{\frac{x_1x_2x_3}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{y_1y_2y_3}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)}} \leq 1$$

Ta có

$$P \leq \frac{\dfrac{x_1}{x_1 + y_1} + \dfrac{x_2}{x_2 + y_2} + \dfrac{x_3}{x_3 + y_3}}{3} +$$

$$+ \frac{\dfrac{y_1}{x_1 + y_1} + \dfrac{y_2}{x_2 + y_2} + \dfrac{y_3}{x_3 + y_3}}{3} = 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) suy ra

$$(a + bc)^3 = (1.1.a + 1.b.c)^3 \leq (1^3 + 1^3)(1^3 + b^3)(a^3 + c^3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a + bc)^3}{(1 + b^3)(a^3 + c^3)} \leq 2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

BÀI TẬP

Bài 1. Với $x, y, z > 0$, $x^4 + y^4 + z^4 = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = x + y + 2z.$$

Bài 2. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn $abc = 1$, chứng minh rằng
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$$

Bài 3. Cho a, b, c, d là các số thực thoả mãn
$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2) = 16.$$

Bài 4. Với $a, b, c > 1$ thoả mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, chứng minh rằng
$$((a-1)^3 + 1)((b-1)^3 + 1)((c-1)^3 + 1) \geqslant 729.$$

Bài 5. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng
$$\frac{a^6}{b^3(c+a)} + \frac{b^6}{c^3(a+b)} + \frac{c^6}{a^3(b+c)} \geqslant \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Bài 6 . Với $a, b, c > 0$ thoả mãn $a + b + c + abc = 4$, chứng minh rằng
$$abc(3 + a^3)(3 + b^3)(3 + c^3) \geqslant 64.$$

Bài 7. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng
$$(a^2+b^2+1)(b^2+c^2+1)(c^2+a^2+1) \geqslant (ab+bc+1)(bc+ca+1)(ca+ab+1).$$

Bài 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}$$
trong đó a, b, c là những số thực dương.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = \left(\frac{x + z + \sqrt{2xy}}{x+1}\right)^2 - (z^2 + y).$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có, với $a > 0$

$$P^2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{a}x + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{a}y + 2z\Big)^2 \leq \big(\frac{2}{a} + 1\big)(ax^2 + ay^2 + 4z^2)$$

Suy ra

$$P^4 \leq (\frac{2}{a} + 1)^2(2a^2 + 16)(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$\Leftrightarrow P \leq \sqrt[4]{3(\frac{2}{a} + 1)^2(2a^2 + 16)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y \\ ax = 2z \\ \dfrac{x^2}{a} = \dfrac{z^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ a^2x^2 = 4z^2 \\ 4x^2 = az^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^3x^2z^2 = 16x^2z^2 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{16}$$

Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x = y \\ z^4 = \sqrt[3]{16}x^4 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 3. \end{cases}$$

hay khi

$$x = y = \sqrt[4]{\frac{3}{2 + \sqrt[3]{16}}},\ z = \sqrt[3]{2}\sqrt[4]{\frac{3}{2 + \sqrt[3]{16}}}$$

Do đó $\quad P_{max} = \sqrt[4]{3(\frac{2}{\sqrt[3]{16}} + 1)^2(8\sqrt[3]{4} + 16)}.$

Bài 2.
Vì $abc = 1$ nên

$$(ab+bc+ca)^2 = (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 =$$

$$= (\frac{1}{a\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)} + \frac{1}{b\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)} +$$

$$+ \frac{1}{c\sqrt{c(c+b)}}\sqrt{c(a+b)})^2$$

$$\leq (\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}) \cdot 2(ab+bc+ca)$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 3.
Ta có

$$P - 1 = (a+b)(c+d) + (1-ab)(cd-1)$$

Suy ra

$$(P-1)^2 \leq [(a+b)^2 + (1-ab)^2][(c+d)^2 + (cd-1)^2]$$

Ta có

$$\begin{aligned}(a+b)^2 + (1-ab)^2 &= a^2 + b^2 + 1 + a^2b^2\\ &= (1+a^2)(1+b^2)\\ (c+d)^2 + (cd-1)^2 &= (1+c^2)(1+d^2)\end{aligned}$$

Vậy

$$(P-1)^2 \leq (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = 16$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq P-1 \leq 4$$

$$-3 \leq P \leq 5$$

$P_{max} = 5$ (Khi $a = b = c = d = 1$)
$P_{min} = -3$ (Khi $a = c = 1,\ b = d = -1$).

Bài 4.
Ta có

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow a+b+c \geqslant 9$$

Từ điều kiện suy ra

$$ab + bc + ca = abc$$

hay

$$(a-1)(b-1)(c-1) = a+b+c-1$$

Do đó

$$729 \leq (a+b+c)^3 = ((a-1)(b-1)(c-1)+1)^3 \leq$$

$$\leq ((a-1)^3+1)((b-1)^3+1)((c-1)^3+1) \quad \text{(đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Bài 5.
Ta có

$$\frac{a^3}{b} + ab \geqslant 2a^2$$

$$\frac{b^3}{c} + bc \geqslant 2b^2$$

$$\frac{c^3}{a} + ca \geqslant 2c^2$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + (ab+bc+ca) \geqslant 2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca)$$

hay $ab + bc + ca \leq \dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{c} + \dfrac{c^3}{a}$

Do đó $(ab+bc+ca)^2 \leq \left(\dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{c} + \dfrac{c^3}{a}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{a^3}{b\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)} + \frac{b^3}{c\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)} + \right.$$

$$+\frac{c^3}{a\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}\Bigg)^2$$

$$\leq\left(\frac{a^6}{b^3(c+a)}+\frac{b^6}{c^3(a+b)}+\frac{c^6}{a^3(b+c)}\right)\cdot 2(ab+bc+ca)$$

Suy ra

$$\frac{a^6}{b^3(c+a)}+\frac{b^6}{c^3(a+b)}+\frac{c^6}{a^3(b+c)}\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 6 .
Trước hết ta chứng minh

$$(abc+xyz)^3\leq(a^3+x^3)(b^3+y^3)(c^3+z^3)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2b^2c^2xyz+3abcx^2y^2z^2\leq c^3b^3x^3+a^3c^3y^3+a^3b^3z^3+$$
$$+c^3x^3y^3+b^3x^3z^3+a^3y^3z^3$$

Điều này suy ra từ

$$c^3b^3x^3+a^3c^3y^3+a^3b^3z^3\geqslant 3a^2b^2c^2xyz$$

$$c^3x^3y^3+b^3x^3z^3+a^3y^3z^3\geqslant 3abcx^2y^2z^2.$$

Vì

$$(a-1)(b+1)(c+1)+(a-1)(b-1)(c-1)=2(a+b+c+abc)=8$$

Suy ra

$$8^3\leq[(a+1)^3+(a-1)^3][(b+1)^3+(b-1)^3][(c+1)^3+(c-1)^3]$$

$$\Leftrightarrow 8^3\leq 8abc(3+a^3)(3+b^3)(3+c^3)$$

$$\Leftrightarrow abc(3+a^3)(3+b^3)(3+c^3)\geqslant 64\quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 7.
Ta có

$$(a^2+b^2+1)(b^2+c^2+1)\geqslant(ab+bc+1)^2$$

$$(b^2+c^2+1)(c^2+a^2+1)\geqslant(bc+ca+1)^2$$

$$(c^2+a^2+1)(a^2+b^2+1)\geqslant(ca+ab+1)^2$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 8.
Ta có

$$P + 12 = (\frac{3a}{b+c} + 3) + (\frac{4b}{c+a} + 4) + (\frac{5c}{a+b} + 5)$$
$$= (a+b+c)(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b})$$
$$= \frac{1}{2}\Big((\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2\Big)\left(\left(\sqrt{\frac{3}{b+c}}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\sqrt{\frac{4}{c+a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{a+b}}\right)^2\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\Big(\sqrt{b+c}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b+c}} + \sqrt{c+a}\frac{2}{\sqrt{c+a}} + \sqrt{a+b}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a+b}}\Big)^2$$

Suy ra $\quad P + 12 \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2$

Vậy $\quad P_{min} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}.$$

Bài 9.
Ta có

$$(x + z + \sqrt{2xy})^2 = (1x + \sqrt{2x}\sqrt{y} + 1z)^2 \leq$$
$$\leq (x^2 + 2x + 1)(1 + z^2 + y) \leq (x+1)^2(1 + z^2 + y)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x + z + \sqrt{2xy}}{x+1}\right)^2 \leq 1 + z^2 + y \Leftrightarrow P \leq 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1, y = 2, z = 1$.
Vậy $\quad P_{max} = 1$.

2 Bất đẳng thức hàm lồi

Định nghĩa 2.1.

Hàm số liên tục $y = f(x)$ được gọi là hàm số lồi trên $[a, b]$ nếu với mọi giá trị $x_1, x_2 \in [a, b]$ ta có

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqslant f(\frac{x_1 + x_2}{2}).$$

Đối với hàm số lồi chúng ta có các kết quả sau

Ví dụ 2.1. Giả sử $y = f(x)$ lồi trên đoạn $[a, b]$, $x_k \in [a, b]$ $(k = \overline{1, n})$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k) \quad (2.1).$$

Giải

<u>Bước 1</u>
(Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2^k$).

Với $n = 2$ bất đẳng thức đúng theo định nghĩa.
Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = 2^k$, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2^{k+1}$.

Ta có

$$\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{2^{k+1}} f(x_i) = \frac{\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k} f(x_i) + \frac{1}{2^k}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} f(x_i)}{2}$$

.

$$\geqslant \frac{f(\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k} x_i) + f(\frac{1}{2^k}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} x_i)}{2} \quad \text{(theo giả thiết quy nạp)}$$

$$\geqslant f(\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i) \quad \text{(đpcm)}.$$

Bước 2
(Ta chứng minh nếu bất đẳng thức đúng với $n = m$ thì cũng đúng với $n = m - 1$).
Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \geqslant f\Big(\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} x_i\Big)$$

$$\Leftrightarrow P = \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f\Big(\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} x_i\Big) \geqslant mf\Big(\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} x_i\Big)$$

Vì theo giả thiết quy nạp bất đẳng thức đúng với $n = m$, ta suy ra

$$P \geqslant mf\left(\frac{\sum_{i=1}^{m-1} x_i + \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} x_i}{m}\right) = mf\Big(\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} x_i\Big) \quad \text{(đpcm).}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) chúng ta thu được kết quả mà nhiều cuốn sách lấy làm định nghĩa hàm lồi.

Ví dụ 2.2. Giả sử $y = f(x)$ lồi trên đoạn $[a, b]$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $x_1, x_2 \in [a, b]$, chứng minh rằng

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \geqslant f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \quad (2.2)$$

Giải

*) Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với α hữu tỷ. Đặt $\alpha = \dfrac{p}{q}$ (phân số tối giản).
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{p}{q}f(x_1) + \frac{q-p}{q}f(x_2) = f\Big(\frac{p}{q}x_1 + \frac{q-p}{q}x_2\Big)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q}\big[\underbrace{f(x_1) + \cdots + f(x_1)}_{p \text{ số hạng}} + \underbrace{f(x_2) + \cdots + f(x_2)}_{q-p \text{ số hạng}}\big] \geqslant$$

$$\geqslant f\Big(\frac{1}{q}\underbrace{(x_1+\cdots x_1)}_{p\ \text{số hạng}}+\frac{1}{q}\underbrace{(x_2+\cdots+x_2)}_{q-p\ \text{số hạng}}\Big)=f\Big(\frac{p}{q}x_1+\frac{q-p}{q}x_2\Big)$$

Bất đẳng thức đúng vì là một trường hợp riêng của bất đẳng thức (2.1).

*) Xét trường hợp $\alpha \in R$.
Khi đó tồn tại

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty},\ \alpha_n \in Q,\ \lim \alpha_n = \alpha \quad (n \to +\infty)$$

Áp dụng kết quả vừa chứng minh trên ta có

$$\alpha_n f(x_1) + (1-\alpha_n) f(x_2) \geqslant f(\alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)x_2)$$

Qua giới hạn 2 vế của bất đẳng thức trên ta thu được

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geqslant f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \quad \text{(đpcm).}$$

Bất đẳng thức (2.2) có thể mở rộng để thu được bất đẳng thức Jensen sau đây:

Ví dụ 2.3. Giả sử $y = f(x)$ là hàm lồi trên $[a,b]$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $x_i \in [a,b]$ $\quad (i = \overline{1,n})$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \geqslant f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \qquad (2.3).$$

Giải

$n = 2$ (chính là bất đẳng thức 2.2).
Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = m-1$, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = m$.
Ta có

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i} f(x_i) + \alpha_m f(x_m)$$

Kí hiệu

$$A = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1 - \alpha_m, \quad \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i} = 1$$

Áp dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) \geqslant (1 - \alpha_m) f\Big(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} x_i\Big) + \alpha_m f(x_m)$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.2) ta thu được

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) \geqslant f[(1 - \alpha_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} x_i + \alpha_m x_m]$$

$$= f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i) \quad \text{(đpcm).}$$

Bất đẳng thức hàm lồi là một dạng mở rộng của bất đẳng thức Bunhiacôpxki nên bao gồm một số lượng lớn các bất đẳng thức cơ bản mà chúng ta thường gặp. Sau đây chúng ta xét một số ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 2.4. Hàm liên tục $y = f(x)$ thoả mãn tính chất $f''(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$.

Giải

Với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ (giả sử $x_1 \geqslant x_2$) ta cần chứng minh

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqslant f(\frac{x_1 + x_2}{2})$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) - f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geqslant f(\frac{x_1 + x_2}{2}) - f(x_2)$$

Áp dụng định lý Lagrăng ta thu được

$$f'(c_1)(\frac{x_1 - x_2}{2}) \geqslant f'(c_2)(\frac{x_1 - x_2}{2})$$

trong đó

$$x_2 < c_2 < \frac{x_1 + x_2}{2} < c_1 < x_1 \Leftrightarrow f'(c_1) \geqslant f'(c_2)$$

Vì $f''(x) \geqslant 0$ suy ra $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng.
Vậy bất đẳng thức $f'(c_1) \geqslant f'(c_2)$ đúng.

Hàm liên tục $y = f(x)$ là hàm lõm trên $[a, b]$ nếu hàm $y = -f(x)$ là hàm lồi trên $[a, b]$. Vậy hàm liên tục $y = f(x)$ là hàm lõm trên $[a, b]$ nếu $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ có $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\dfrac{x_1 + x_2}{2})$. Tương tự như ví dụ 2.3 có thể chứng minh được nếu $y = f(x)$ là hàm lõm trên $[a, b]$ thì $\forall x_i \in [a, b], \alpha_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, n}), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \leq f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big)$$

Tương tự như ví dụ 2.4 ta chứng minh được nếu hàm liên tục thoả mãn tính chất $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ thì $f(x)$ là hàm lõm trên $[a, b]$.
Cũng xin lưu ý bạn đọc tên gọi hàm lồi, hàm lõm trong một số tài liệu gọi ngược nhau nên hiện người ta thường gọi là hàm lồi lên phía trên hoặc lồi xuống phía dưới.

Ví dụ 2.5. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$P = \sqrt{a+b} + 2\sqrt{b+c} + 3\sqrt{c+a} \leq \sqrt{6} \cdot \sqrt{4a + 3b + 5c}.$$

Giải

Rõ ràng hàm $f(x) = \sqrt{x}$ có $f''(x) < 0 \quad \forall x > 0$ nên ta có

$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{c+a} + \sqrt{c+a} \leq$$

$$\leq 6\sqrt{\frac{4a + 3b + 5c}{6}}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \sqrt{6} \cdot \sqrt{4a + 3b + 5c}.$$

Ví dụ 2.6. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \geqslant \sqrt{3}\Big(\frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c}} + \frac{1}{\sqrt{c+2a}}\Big).$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geqslant \frac{9}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{b}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{\sqrt{\dfrac{a+2b}{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a+2b}}$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{c}} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{b+2c}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{2}{\sqrt{a}} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{c+2a}}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 2.7. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$a^a + b^b + c^c \geqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

Giải

Ta có $f(x) = x^x$ trên $x \in R^+$ là hàm lồi vì

$$f(x) = e^{xlnx} \to f'(x) = e^{xlnx}(lnx + 1)$$

$$\to f''(x) = e^{xlnx}(1 + lnx)^2 + e^{xlnx}\frac{1}{x} > 0 \text{ khi } x > 0$$

Suy ra

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \geqslant f(\frac{a+b+c}{3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^a + b^b + c^c}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{a+b+c}{3}} \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Với $0 < a, b, c \leq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+ab^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+bc^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+ca^2}}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với A, B, C là các góc của một tam giác thì

$$P = \sqrt{\sin A} + 2\sqrt{\sin\frac{B}{2}} + 3\sqrt{\sin\frac{C}{3}} \leq \frac{6}{\sqrt{2}}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với $A, B, C \in (0, \pi)$ thì

$$\sin A \sin B \sin C \leq \sin\frac{A+2B}{3}\cdot\sin\frac{B+2C}{3}\cdot\sin\frac{C+2B}{3}.$$

Bài 4. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant \left(\frac{a+2b}{3}\right)^4 + \left(\frac{b+2c}{3}\right)^4 + \left(\frac{c+2a}{3}\right)^4.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Với $0 < a, b, c \leq 1$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \leq \frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^3}} \leq$$

$$\leq 3 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+b^3}}{3}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+ab^2}}$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+c^3}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+bc^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+a^3}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+ca^2}}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 2.
Vì hàm $f(x) = \sin x$ có $f''(x) = -\sin x < 0 \forall x \in (0, \pi)$ nên suy ra

$$P \leq 6\sqrt{\frac{\sin A + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{3} + \sin\frac{C}{3} + \sin\frac{C}{3}}{6}}$$

$$P \leq \sqrt{\sin\frac{A + \frac{B}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{3} + \frac{C}{3} + \frac{C}{3}}{6}}$$

$$\Leftrightarrow P \leq 6 \cdot \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{\sqrt{2}}.$$

Bài 3.
Ta có

$$\sin A \cdot \sin^2 B \leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin B}{3}\right)^3 \leq \sin^3\frac{A+2B}{3}$$

Tương tự

$$\sin B \sin^2 C \leq \sin^3 \frac{B+2C}{3}$$

$$\sin C \sin^2 A \leq \sin^3 \frac{C+2A}{3}$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 4.

Ta có $f(x) = x^4$ có $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0$ nên

$$\frac{a^4+b^4+b^4}{3} \geqslant \left(\frac{a+2b}{3}\right)^4,$$

$$\frac{b^4+c^4+c^4}{3} \geqslant \left(\frac{b+2c}{3}\right)^4,$$

$$\frac{c^4+a^4+a^4}{3} \geqslant \left(\frac{c+2a}{3}\right)^4.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

3 Bất đẳng thức Bunhiacôpxki

Ví dụ 3.1 (Đẳng thức Lagrăng).

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 + \sum_{1\le i\le j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad (3.1)$$

Giải

Ta chứng minh đẳng thức trên bằng phương pháp quy nạp.
Với $n = 2$ ta có

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

(Hiển nhiên đúng)
Giả sử công thức đúng với $m - 1$ ta chứng minh công thức đúng với $n = m$.
Ta cần chứng minh công thức sau đúng:

$$P = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m} b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right)^2 + \sum_{1\le i\le j\le m} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = Q$$

Ta có

$$P = \sum_{i=1}^{m-1} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} b_i^2 + a_m^2 \sum_{i=1}^{m-1} b_i^2 + b_m^2 \sum_{i=1}^{m-1} a_i^2 + a_m^2 b_m^2$$

$$Q = \sum_{1\le i\le j\le m-1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + \sum_{i=1}^{m-1} (a_i b_m - a_m b_i)^2 +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i b_i\right)^2 + 2a_m b_m \sum_{i=1}^{m-1} a_i b_i + a_m^2 b_m^2$$

Sử dụng giả thiết quy nạp ta thu được

$$P = Q \Leftrightarrow a_m^2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} b_i^2 + b_m^2 \sum_{i=1}^{m-1} a_i^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (a_i b_m - a_m b_i)^2 + 2a_m b_m \sum_{i=1}^{m-1} a_i b_i$$

(Đẳng thức hiển nhiên đúng).

Ví dụ 3.2 (Bất đẳng thức Bu - nhia- cop -ski).
Với $a_i \in R, b_i \in R \quad (i = \overline{1, n})$, chứng minh rằng

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) \qquad (3.2)$$

Giải

Cách 1 (Sử dụng đẳng thức Lagrăng).
Từ đẳng thức

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 + \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

suy ra $\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Cách 2 (Sử dụng tính chất của hàm bậc 2).
Xét hàm số

$$f(x) = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2x\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2$$

Ta có $f(x) \geqslant 0$ với mọi giá trị của x.
Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \to a_i = 0$ với mọi $i = \overline{1, n}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Áp dụng tính chất của hàm bậc 2 khi $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$ suy ra

$$\Delta' = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Cách 3 (Áp dụng bất đẳng thức trung bình).

Ta có $\frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2) \geqslant x_k y_k$ với mọi $k = \overline{1, n}$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + y_k^2) \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Kí hiệu $A = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2},\ B = \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$

Chọn $x_k = \frac{a_k}{A},\ y_k = \frac{b_k}{B}$ ta có

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1$$

và thu được

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{A.B} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq A^2 B^2 = \sum_{i=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_k^2 \quad \text{(dpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_k = y_k \Leftrightarrow \frac{a_k}{b_k} = \frac{A}{B}$ với mọi k.

Cách 4 (Sử dụng tính chất hàm số lồi).

Áp dụng bất đẳng thức (2.3) (tính chất của hàm số lồi) ta suy ra

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

trong đó $\alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$ và $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = 1$

Chọn $f(x) = x^2$ là hàm số lồi trên R ta thu được

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

$$\Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$$

Chọn $\alpha_i = b_i^2$, $x_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ ta thu được

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i a_i\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Sau đây chúng ta xét một số ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 3.3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+2y+3z)^2 + (y-2x)^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Giải

Từ đẳng thức

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) =$$

$$= (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2$$

Suy ra

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqslant (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2$$

Chọn $a=1, b=2, c=3$ ta thu được

$$14(x^2+y^2+z^2) \geqslant (x+2y+3z)^2 + (y-2x)^2$$

$$\Leftrightarrow P \leq 14 \Leftrightarrow P_{max} = 14$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Ví dụ 3.4. Chứng minh rằng

$$P = \Big(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{6}\Big)^2 \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{6}.$$

Giải

Ta có

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c}{\sqrt{6}}\right)^2$$

Suy ra

$$P \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{6}\right) = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{6}\right) \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 3.5. Với $a_k \in R, b_k \in R \quad (k = \overline{1, n})$, chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^4}{b_k^2} \tag{3.3}$$

Giải

Ta có bất đẳng thức đối với hàm lồi f

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \quad \text{(Bất đẳng thức Jensen)}$$

trong đó $\alpha_k \geqslant 0, \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k > 0 \quad (k = \overline{1, n})$.

Chọn hàm lồi $f(x) = x^4$ trên R ta thu được

$$\frac{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k)^4}{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k)^4} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^4}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^3 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^4$$

Chọn $\alpha_k = b_k^2, \ x_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ ta thu được

$$\left(\sum_{a_k b_k}^{n} a_k b_k\right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^4}{b_k^2} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 3.6. Với $x, y, z \in R$ thoả mãn $4x^4 + y^4 + z^4 = 36$, chứng minh rằng

$$|x + 2y + 2z| \leq 9.$$

Giải

Áp dụng kết quả của ví dụ (3.5) ta có

$$(x + 2y + 2z)^4 \leq (1^2 + 2^2 + 2^2)^3\Big(\frac{x^4}{1} + \frac{y^4}{2^2} + \frac{z^4}{2^2}\Big)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y + 2z)^4 \leq \frac{9^3}{4}(4x^4 + y^4 + z^4) = 9^4$$

$$\Leftrightarrow |x + 2y + 2z| \leq 9 \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 3.7. Với $a_k > 0,\ b_k > 0 \quad (k = \overline{1, n})$, chứng minh rằng

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k^3)(\sum_{k=1}^{n} b_k^3)^2 \geqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k b_k^2)^3 \qquad (3.4).$$

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{x_k^3 + 2y_k^3}{3} \geqslant x_k y_k^2 \quad (x_k > 0,\ y_k > 0)$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^3 + 2y_k^3}{3} \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k y_k^2 \qquad (3.5)$$

Kí hiệu $A = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n} a_k^3},\ B = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n} b_k^3}$

Đặt $x_k = \dfrac{a_k}{A},\ y_k = \dfrac{b}{B}$ ta có

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 1,\ \sum_{k=1}^{n} y_k^3 = 1$$

Thay vào bất đẳng thức (3.5) ta thu được

$$1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k^2}{A.B^2} \Leftrightarrow \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k^2\Big)^3 \leq A^3.B^6 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^3\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^3\Big)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 3.8. Với x, y, z thoả mãn đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 = 17$, chứng minh rằng

$$x + 4y + 4z \leq 17.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (3.4) ta có

$$(x + 4y + 4z)^3 \leq (x^3 + y^3 + z^3)(1^3 + 2^3 + 2^3)^2 \leq 17^3$$

$$\Leftrightarrow x + 4y + 4z \leq 17 \quad \text{(đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = z = 2$.

Ví dụ 3.9. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{(b+c)^3} + \frac{b^4}{(c+a)^3} + \frac{c^4}{(a+b)^3} \geqslant \frac{a+b+c}{8}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (3.3) ta có

$$(a+b+c)^4 = \Big(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\Big)^4$$

$$\leq [2(a+b+c)]^3\Big(\frac{a^4}{(b+c)^3} + \frac{b^4}{(c+a)^3} + \frac{c^4}{(a+b)^3}\Big)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{(b+c)^3} + \frac{b^4}{(c+a)^3} + \frac{c^4}{(a+b)^3} \geqslant \frac{a+b+c}{8} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 3.10 (Rumani 2004).
Cho các số thực $a_1, a_2, \cdots a_{100}$ thoả mãn điều kiện

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_{100}^2 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{100})^2 = 101.$$

Chứng minh rằng $|a_k| \leq 10$ với mọi $k = \overline{1,100}$.

Giải

Giả sử có tồn tại a_k sao cho $|a_k| > 10$, không giảm tổng quát ta giả sử

$$|a_1| > 10 \Leftrightarrow a_1^2 > 100 \qquad (3.6)$$

Mặt khác ta có

$$101 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{100})^2 >$$

$$> 100 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{100}^2 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{100})^2$$

Suy ra $a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_{100}^2 + (a_1 + a_2 + \cdots a_{100})^2 < 1$.
Kí hiệu

$$S = a_1 + a_2 + \ldots a_{100} \Rightarrow a_1 = S - (a_2 + a_3 + \cdots a_{100})$$

Suy ra

$$a_1^2 = (S - a_2 - a_3 \cdots - a_{100})^2 \leq 100(S^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2) < 100 \qquad (3.7)$$

(Bất đẳng thức Bu-nhia-cop-ski)
Từ (3.6), (3.7) suy ra mâu thuẫn. Vậy bài toán được chứng minh.

BÀI TẬP

Bài 1. Với $a_k > 0$, $b_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k^2}\Big)^2 \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k}\Big)^3 \quad (3.8).$$

Bài 2. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$(a+b+c)^3 \leq \Big(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\Big)(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b})^2.$$

Bài 3 (IMO 1997). Với $a_1, a_2, \cdots a_n$ là n số nguyên dương phân biệt, chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}.$$

Bài 4 (China 2003).

Với $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0$ thoả mãn đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+a_i} = 1$, chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ ta có

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n-1) + a_k^2} \leq 1.$$

Bài 5 (Korea 2002).

Với x_i, y_i $(i = \overline{1,n})$ là những số thực dương thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$, chứng minh rằng

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2|1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i|.$$

Bài 6. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{2+a^3} + \sqrt[3]{2+b^3} + \sqrt[3]{2+c^3} \geqslant \sqrt[3]{27(a+b+c)}.$$

Bài 7. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^9}{(b+c)^8} + \frac{b^9}{(c+a)^8} + \frac{c^9}{(a+b)^8} \geqslant \frac{a+b+c}{2^8}.$$

Bài 8. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3abc$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(c+a)} \geqslant \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Áp dụng bất đẳng thức Jensen đối với hàm lồi f

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k x_k}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\Big) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k f(x_k)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

trong đó $\alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i > 0$.

Chọn hàm lồi $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x \in R^+)$ ta có

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}}$$

$$\Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^3 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}}\Big)^2$$

Chọn $x_k = a_k^2,\ \alpha_k = \dfrac{b_k}{a_k}$ ta thu được

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k^2}\Big)^2 \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}\Big)^3 \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 2.
Áp dụng bất đẳng thức (3.8) ta có

$$(a+b+c)^3 = \left(\frac{\frac{a}{\sqrt{b+c}}}{\frac{1}{\sqrt{b+c}}} + \frac{\frac{b}{\sqrt{c+a}}}{\frac{1}{\sqrt{c+a}}} + \frac{\frac{c}{\sqrt{a+b}}}{\frac{1}{\sqrt{a+b}}}\right)^3 \leq$$

$$\leq \Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big)(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b})^2.$$

Bài 3.
Ta có

$$\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\Big)^2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\cdot\frac{\sqrt{a_1}}{1}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}\cdot\frac{\sqrt{a_2}}{2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\cdot\frac{\sqrt{a_m}}{n}\Big)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}\right)\left(\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2}\right)$$

Vì $a_1, a_2, \cdots a_n$ là n số nguyên dương phân biệt ta suy ra

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$$

Suy ra

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \quad \text{(đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = 1,\ a_2 = 2 \ldots a_n = n$.

Bài 4 .

Ta có

$$(n-1)^2(1+a_i)^2 = (n-1+(n-1)a_i)^2 =$$
$$= (\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-1} + (n-1)a_i)^2$$

Suy ra

$$(n-1)^2(1+a_i)^2 \leq (n-1+(n-1)^2)(n-1+a_i^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-1+a_i^2} \leq \frac{n(n-1)}{(n-1)^2(1+a_i)^2} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+a_i)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_i}{(n-1)+a_i^2} \leq \frac{n}{n-1}\cdot\frac{a_i}{(1+a_i)^2} \quad \forall i = \overline{1,n}$$

Suy ra

$$P \leq \frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_k)^2} = \frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k+1-1}{(1+a_k)^2}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{n}{n-1} - \frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+a_k)^2} \qquad (3.9)$$

Mặt khác ta có

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+a_k)^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+a_k)^2} \le -\frac{1}{n-1} \qquad (3.10)$$

Từ (3.9), (3.10) ta suy ra

$$P \le \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1} = 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = n-1$.

Bài 5 .

Ta có

$$2|1 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i| = |\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i|$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$$

Suy ra

$$2|1 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \geqslant (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

Vì $y_1^2 + y_2^2 \le 1$ ta suy ra

$$2|1 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \geqslant [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]((y_1^2 + y_2^2))$$
$$\geqslant [(x_1 - y_1)y_2 + (y_2 - x_2)y_1]^2$$
$$\geqslant (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 6.

Theo (3.4) ta có

$$\left(1(1+1+1)^2+1(1+1+1)^2+a(a+b+c)^2\right)^3 \le (2+a^3)(3^3+3^3+(a+b+c)^3)^2$$

$$\Leftrightarrow 3^2 + 3^2 + a(a+b+c)^2 \le \sqrt[3]{2+a^3}\cdot\sqrt[3]{(3^3+3^3+(a+b+c)^3)^2}$$

Tương tự ta có

$$3^2 + 3^2 + b(a+b+c)^2 \le \sqrt[3]{2+b^3}\cdot\sqrt[3]{(3^3+3^3+(a+b+c)^3)^2}$$

$$3^2 + 3^2 + c(a+b+c)^2 \le \sqrt[3]{2+c^3}\cdot\sqrt[3]{(3^3+3^3+(a+b+c)^3)^2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$3^3 + 3^3 + (a+b+c)^3 \le (\sqrt[3]{2+a^3} + \sqrt[3]{2+b^3} +$$

$$+ \sqrt[3]{2+c^3})^3 \cdot \sqrt[3]{(3^3 + 3^3 + (a+b+c)^3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2+a^3} + \sqrt[3]{2+b^3} + \sqrt[3]{2+c^3} \geqslant \sqrt[3]{3^3 + 3^3 + (a+b+c)^3} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[3]{27(a+b+c)} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 7.

Ta có

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \le \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b+c} \cdot a^{\frac{1}{2}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{c+a} \cdot b^{\frac{1}{2}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{c+a} \cdot c^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\le \left(\frac{a^3}{(b+c)^2} + \frac{b^3}{(c+a)^2} + \frac{c^3}{(a+b)^2}\right)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{4}\right)^2 \le \left(\frac{a^3}{(b+c)^2} + \frac{b^3}{(c+a)^2} + \frac{c^3}{(a+b)^2}\right)^2$$

$$\le \left(\frac{a^5}{(b+c)^4} + \frac{b^5}{(c+a)^4} + \frac{c^5}{(a+b)^4}\right)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{16}\right)^2 \le \left(\frac{a^5}{(b+c)^4} + \frac{b^5}{(c+a)^4} + \frac{c^5}{(a+b)^4}\right)^2$$

$$\le \left[\frac{a^9}{(b+c)^8} + \frac{b^9}{(c+a)^8} + \frac{c^9}{(a+b)^8}\right](a+b+c)$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài 8.
Ta có

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\Big(\frac{1}{a\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}+$$

$$+\frac{1}{b\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)}+\frac{1}{c\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}\Big)^2$$

$$\leq\left(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(c+a)}\right)\cdot 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(c+a)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2(abc)^2}=\frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

4 Một số dạng hệ quả

Trong tiết này chúng ta trình bày một số dạng hệ quả của bất đẳng thức Bu-nhi-a-cop-ski .

Ví dụ 4.1 (Bất đẳng thức tam giác).
Với $x_k \in R, y_k \in R \quad (k = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \qquad (4.1)$$

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \qquad (4.2)$$

Tương tự ta có

$$\sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \qquad (4.3)$$

Cộng vế với vế của bất đẳng thức (4.2), (4.3) ta suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 4.2. $x_k \in R,\ y_k \in R \quad (k = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geqslant \frac{(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k}.$$

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\sqrt{y_k}\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geqslant \frac{(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 4.3. Với $\alpha \in R^+$, chứng minh rằng

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$f(x) = \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 4\alpha|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| + 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant 0.$$

Giải

Nếu $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, suy ra $b_k = 0$ với mọi $k = \overline{1,n}$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Nếu $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 > 0$ ta có

$$\Delta' = 4|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|^2 - 4\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq 0$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki Suy ra $f(x) \geqslant 0$ với mọi $\alpha > 0$ (đpcm).

Ví dụ 4.4. Chứng minh rằng với mọi $k > 0$ ta có

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k}.$$

Giải

Ta có

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\, a_k \frac{1}{\sqrt{k}} b_k\right)^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 4.5. Chứng minh rằng với mọi $k > 0$ ta có

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} k^3 a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}.$$

Giải

Ta có

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} a_k \cdot \frac{1}{k^2\sqrt{k}}\right)^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k^3 a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 4.6. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q}$$

với $a_k > 0 \quad (k = \overline{1, n})$.

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{p+q}{2}} \cdot a_k^{\frac{p-q}{2}}\Big)^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 4.7. Chứng minh rằng

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 \leq (n-1)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2\Big).$$

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 = \Big((a_1+a_2) + \sum_{k=3}^{n} a_k\Big)^2 \leq (n-1)[(a_1+a_2)^2 + \sum_{k=3}^{n} a_k^2]$$

$$\Leftrightarrow \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 \leq (n-1)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2\Big) \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 4.8. Chứng minh rằng

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} 1a_k\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} 1^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = n\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Ví dụ 4.9. Với $a_k > 0,\ b_k > 0 \quad (k = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$P = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_kb_k} \geqslant 4n^2.$$

Giải

Ta có $(a_k + b_k)^2 \geqslant 4a_kb_k$ suy ra

$$P \geqslant 4\sum_{k=1}^{n} a_kb_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_kb_k}$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{a_kb_k})^2 \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{a_kb_k}}\Big)^2 \geqslant 4\Big(\sum_{k=1}^{n} 1\Big)^2 = 4n^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 4.10. Với $a_k > 0 \quad (k = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 = \Big(\frac{a_1}{\sqrt{a_2}}\sqrt{a_2} + \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\sqrt{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_n}}\sqrt{a_n} + \frac{a_n}{\sqrt{a_1}}\sqrt{a_1}\Big)^2$$

$\leq P\sum_{k=1}^{n} a_k$

Suy ra $\quad P \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \quad$ (đpcm).

Sau đây chúng ta xét một số ví dụ minh hoạ đơn giản

Ví dụ 4.11. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + a^2 + b^2} + \sqrt{1 + b^2 + c^2} + \sqrt{1 + c^2 + a^2} \geqslant \sqrt{9 + 2(a + b + c)^2}.$$

Giải

Ta có

$$(1(1+1+1)+a(a+b+c)+b(a+b+c))^2 \leq (1^2+a^2+b^2)(3^2+2(a+b+c)^2)$$

$\Leftrightarrow 3 + a(a+b+c) + b(a+b+c) \leq \sqrt{1+a^2+b^2} \cdot \sqrt{9+2(a+b+c)^2}$

Tương tự ta thu được

$$3 + b(a+b+c) + c(a+b+c) \leq \sqrt{1+b^2+c^2} \cdot \sqrt{9+2(a+b+c)^2}$$

$$3 + c(a+b+c) + a(a+b+c) \leq \sqrt{1+c^2+a^2} \cdot \sqrt{9+2(a+b+c)^2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được
$9 + 2(a+b+c)^2 \leq$

$$\leq \left(\sqrt{1+a^2+b^2} + \sqrt{1+b^2+c^2} + \sqrt{1+c^2+a^2}\right)\sqrt{9+2(a+b+c)^2}$$

Suy ra

$$\sqrt{1+a^2+b^2} + \sqrt{1+b^2+c^2} + \sqrt{1+c^2+a^2} \geqslant \sqrt{9+2(a+b+c)^2}.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng $\alpha_i > 0, x_i > 0 \quad (i = \overline{1,n})$, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i} \geqslant \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}.$$

Bài 2. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{2(a+b)} + \frac{1}{3(b+c)} + \frac{1}{6(c+a)} \geqslant \frac{6}{4a+5b+3c}.$$

Bài 3. Giả sử $x_i > 0 \quad (i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$P = \frac{x_1}{x_n(x_n + x_1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i(x_i + x_{i+1})} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Bài 4. Giả sử $x_i > 0 \quad (i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$P = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i + x_{i+1}}\Big) + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Bài 5. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)} \geqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big).$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$1 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\alpha_i}{x_i}} \sqrt{\alpha_i x_i}\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i} \geqslant \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.

Áp dụng bài 1 với $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{6}$ ta có

$$\frac{1}{2(a+b)} + \frac{1}{3(b+c)} + \frac{1}{6(c+a)} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{3}(b+c) + \frac{1}{6}(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{6}{4a+5b+3c} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 3.

Ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\Big)^2 =$$

$$\Bigg(\frac{1}{x_1\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}}\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} + \cdots + \frac{1}{x_n\sqrt{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1}}}\sqrt{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1}}\Bigg)^2$$

$$\leq P \cdot 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 4.

Ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 = \Big(\frac{x_1}{\sqrt{x_1+x_2}}\sqrt{x_1+x_2} +$$

$$+ \frac{x_2}{\sqrt{x_2+x_3}}\sqrt{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{x_n+x_1}}\sqrt{x_n+x_1}\Big)^2$$

$$\Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \leq P \cdot 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 5.
Áp dụng kết quả bài 3 ta có

$$\frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)}+\frac{x_3}{x_2(x_2+x_3)}+\frac{x_4}{x_3(x_3+x_4)}+$$
$$+\frac{x_5}{x_4(x_4+x_5)}+\frac{x_6}{x_5(x_5+x_6)}+\frac{x_1}{x_6(x_6+x_1)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_6}\Big)$$

(trong đó $x_i > 0 \quad (i=\overline{1,6})$).

Chọn $x_1 = a, x_2 = x_3 = b, x_4 = x_5 = x_6 = c$ ta thu được

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{1}{2b}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{a}{c(c+a)}\geqslant\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\Big)$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+a)}\geqslant\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\quad\text{(đpcm).}$$

Chúng ta có thể giải cách khác như sau

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2=\Big(\sqrt{\frac{b}{a(a+b)}}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{ab}}+$$
$$+\sqrt{\frac{c}{b(b+c)}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{bc}}+\sqrt{\frac{a}{c(c+a)}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{ac}}\Big)^2\leq$$
$$\leq\Big(\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+a)}\Big)\cdot 2\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)$$
$$\Leftrightarrow P\geqslant\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)\quad\text{(đpcm).}$$

5 Một số dạng mở rộng và liên quan

Trong bài giảng này chúng ta sử dụng đạo hàm và tính chất của đa thức bậc 2 để xây dựng dạng mở rộng hoặc tương tự của bất đẳng thức Bunhiacôpxki .

I. Sử dụng tính chất của đa thức bậc 2

Ví dụ 5.1. Giả sử $a_1^2 \geqslant \sum_{k=2}^n a_k^2$, chứng minh rằng

$$(a_1b_1 - \sum_{k=2}^n a_kb_k)^2 \geqslant \left(a_1^2 - \sum_{k=2}^n a_k^2\right)\left(b_1^2 - \sum_{k=2}^n b_k^2\right) \tag{5.1}$$

Giải

Nếu $a_1 = 0$ thì $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, bất đẳng thức đúng .

Với $a_1 \neq 0$ xét đa thức bậc 2

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 - \sum_{k=2}^n (a_kx - b_k)^2$$

Ta có

$$f(\frac{b_1}{a_1}) \leq 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

$$f(x) = (a_1^2 - \sum_{k=2}^n a_k^2)x^2 - 2(a_1b_1 - \sum_{k=2}^n a_kb_k)x + (b_1^2 - \sum_{k=2}^n b_k^2)$$

Từ giả thiết suy ra $A = a_1^2 - \sum_{k=2}^n a_k^2 > 0$
(Nếu $a_1^2 - \sum_{k=2}^n a_k^2 = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng) .
Vậy ta thu được $Af(\frac{b_1}{a_1}) \leq 0$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.
Suy ra

$$\Delta' = \left(a_1b_1 - \sum_{k=2}^n a_kb_k\right)^2 - \left(a_1^2 - \sum_{k=2}^n a_k^2\right)\left(b_1^2 - \sum_{k=2}^n b_k^2\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a_1b_1 - \sum_{k=2}^n a_kb_k\right)^2 \geqslant \left(a_1^2 - \sum_{k=2}^n a_k^2\right)\left(b_1^2 - \sum_{k=2}^n b_k^2\right)$$

Hoàn toàn tương tự như bất đẳng thức Bunhiacôpxki , từ bất đẳng thức (5.1) chúng ta có thể xây dựng các bất đẳng thức hệ quả mới.

Ví dụ 5.2. Giả sử $a_1^2 \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k^2}{k}$, chứng minh rằng

$$\Big(a_1b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_kb_k\Big)^2 \geqslant \Big(a_1^2 - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k^2}{k}\Big)\Big(b_1^2 - \sum_{k=2}^{n} kb_k^2\Big).$$

Giải

Ta có, theo (5.1)

$$\Big(a_1b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_kb_k\Big)^2 = \left(a_1b_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k}}\sqrt{k}b_k\right)^2$$

$$\geqslant \Big(a_1^2 - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k^2}{k}\Big)\Big(b_1^2 - \sum_{k=2}^{2} kb_k^2\Big) \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 5.3. Giả sử $a_1^2 \geqslant \sum_{k=2}^{n} a_k^2$, chứng minh rằng .

$$\Big((n-1)a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k\Big)^2 \geqslant (n-1)(n-2)\Big(a_1^2 - \sum_{k=2}^{n} a_k^2\Big).$$

Giải

Ta có

$$\Big((n-1)a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k\Big)^2 \geqslant \Big(a_1^2 - \sum_{k=2}^{n} a_k^2\Big)\Big((n-1)^2 - \sum_{k=2}^{n} 1\Big)$$

$$\geqslant \Big(a_1^2 - \sum_{k=2}^{n} a_k^2\Big) \cdot (n-1)(n-2) \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 5.4. Giả sử $a, b, c > 0$; $\dfrac{2a^2}{b+c} \geqslant \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b}$ và $b + c > 2a$, chứng minh rằng

$$|2a - b - c| \geqslant \frac{2a^2}{b+c} - \frac{b^2}{c+a} - \frac{c^2}{a+b}.$$

Giải

Ta có

$$(2a-b-c)^2 = \Big(\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{2(b+c)} - \frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} - \frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\Big)^2$$

$$\geqslant \Big(\frac{2a^2}{b+c} - \frac{b^2}{c+a} - \frac{c^2}{a+b}\Big)(b+c-2a)$$

$$= \Big(\frac{2a^2}{b+c} - \frac{b^2}{c+a} - \frac{c^2}{a+b}\Big)|b+c-2a| \quad (\text{vì } b+c > 2a)$$

$$\Leftrightarrow |2a-b-c| \geqslant \frac{2a^2}{b+c} - \frac{b^2}{c+a} - \frac{c^2}{a+b} \quad (\text{đpcm}).$$

II. Sử dụng đạo hàm
Chúng ta chứng minh một số kết quả phụ cần thiết.

Ví dụ 5.5. Với $\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$, chứng minh rằng

$$\alpha a + \beta b \geqslant a^{\alpha} b^{\beta} \qquad (5.2)$$

trong đó a, b là những số thực dương.

Giải

Chia hai vế bất đẳng thức cho $b > 0$ ta có

$$\alpha\Big(\frac{a}{b}\Big) + (1-\alpha) \geqslant \Big(\frac{a}{b}\Big)^{\alpha}$$

Đặt $t = \dfrac{a}{b} > 0$ ta thu được

$$(5.2) \Leftrightarrow f(t) = t^{\alpha} - \alpha t + \alpha - 1 \leq 0 \quad (t > 0)$$

Ta có

$$f'(t) = \alpha(t^{\alpha-1} - 1) = 0 \Rightarrow t = 1$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\quad f(t) \leq 0\ \forall t > 0 \quad$ (đpcm).

Ví dụ 5.6. Giả sử $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ là những số thực dương thoả mãn $\alpha + \beta + \gamma = 1$, chứng minh rằng

$$P = \alpha a + \beta b + \gamma c \geqslant a^\alpha b^\beta c^\gamma \qquad (5.3).$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức(5.2) ta thu được

$$P = (\alpha + \beta)\left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta}a + \frac{\beta}{\alpha + \beta}b\right] + \gamma c \geqslant (\alpha + \beta)\left(a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right) + \gamma c$$

(Vì $\dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} + \dfrac{\beta}{\alpha + \beta} = 1$)

Suy ra (áp dụng bất đẳng thức 5.2)

$$P \geqslant \left(a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right)^{\alpha+\beta} \cdot c^\gamma = a^\alpha b^\beta c^\gamma \quad \text{(đpcm)}.$$

Chúng ta dễ dàng thu được kết quả tổng quát sau đây bằng phương pháp chứng minh quy nạp.

Ví dụ 5.7. Giả sử $a_i > 0, \alpha_i > 0 \quad (i = \overline{1, n})$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \geqslant \Pi_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \quad (n \geqslant 2) \qquad (5.4).$$

Giải

Với $n = 2$, bất đẳng thức đúng (bất đẳng thức 5.2)

Giả sử bất đẳng thức đúng khi $n = m$ ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = m + 1$.
Ta có

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i a_i = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i} a_i\right) + \alpha_{m+1} \cdot a_{m+1}$$

Sử dụng giả thiết quy nạp ta nhận được

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i a_i \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\Big)\left(\Pi_{i=1}^{m} a_i^{\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}}\right) + \alpha_{m+1}a_{m+1}$$

(Vì $\dfrac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i} + \dfrac{\alpha_2}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i} + \cdots + \dfrac{\alpha_m}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i} = 1$)

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \geqslant \left(\Pi_{i=1}^{m} a_i^{\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}}\right)^{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i} \cdot (a_{m+1})^{\alpha_{m+1}}$$

$$= \Pi_{i=1}^{m+1} a_i^{\alpha_i} \quad \text{(đpcm)}.$$

Sử dụng kết quả nêu trên ta xây dựng dạng mở rộng của bất đẳng thức Bunhiacôpxki sau:

Ví dụ 5.8. Giả sử $a_k > 0, b_k > 0 \quad (k = \overline{1,n}), \alpha, \beta > 0; \alpha + \beta = 1$, chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} b_k^{\beta} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big)^{\beta} \qquad (5.5).$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng tương đương

$$P = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}\Big)^{\alpha}\cdot\Big(\frac{b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\Big)^{\beta} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức (5.2) ta thu được

$$\Big(\frac{a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}\Big)^{\alpha}\cdot\Big(\frac{b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\Big)^{\beta} \leq \alpha\Big(\frac{a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}\Big) + \beta\Big(\frac{b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\Big)$$

Suy ra

$$P \leq \alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} + \beta\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$$

$$P \leq \alpha + \beta = 1.$$

Chú ý 1. Xét trên R^+ bất đẳng thức Bunhiacôpxki được viết dưới dạng

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{2}} \cdot b_k^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{2}} \cdot b_k^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{2}}$$

Là rường hợp riêng của bất đẳng thức (5.5) khi $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Chú ý 2. Khi xét trên R^+ dạng của bất đẳng thức trung bình và bất đẳng thức Bunhiacôpxki trong trường hợp mở rộng có thể xem như là một bất đẳng thức .

Bất đẳng thức dạng trung bình

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \left(\Pi_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

là tường hợp riêng của bất đẳng thức (5.4) khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$.

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử a, b là những số thực dương, chứng minh rằng:

1) $$\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha \text{ với } \alpha > 1 \text{ hoặc } \alpha < 0$$

2) $$\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha \text{ với } 0 < \alpha < 1 \qquad (5.6).$$

Bài 2. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng:

1) $$\frac{a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^\alpha \text{ khi } \alpha < 0 \text{ hoặc } \alpha > 1 \qquad (5.7)$$

2) $$\frac{a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha}{3} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^\alpha \text{ khi } 0 < \alpha < 1 \qquad (5.8).$$

Bài 3. Giả sử $a_i, \alpha_i \quad (i = \overline{1, n})$ là các số thực dương thoả mãn đẳng thức $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, chứng minh rằng

$$\Pi_{i=1}^n (1 + a_i)^{\alpha_i} \geqslant 1 + \Pi_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \qquad (5.9)$$

Bài 4. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \geqslant a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng

$$y = (\sin^2 x)^{\sin^2 x} \cdot (\cos^2 x)^{\cos^2 x} + 2\sin^2 x \cos^2 x \leq 1.$$

Bài 6. Giả sử a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1.$$

Bài 7. Giả sử a, b, c là những số thực dương thoả mãn
$\frac{2bc}{a^2(b+c)} \geqslant \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)}$ và $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{2}{a}$.

Chứng minh rằng

$$\frac{2bc}{a^2(b+c)} - \frac{ca}{b^2(c+a)} - \frac{ab}{c^2(a+b)} \leq \left|\frac{2}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{a}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b}{a+b}\right)^{\alpha}\geqslant 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \text{ với } \alpha>1 \text{ hoặc } \alpha<0$$

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b}{a+b}\right)^{\alpha}\leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \text{ với } 0<\alpha<1.$$

Đặt $t=\dfrac{a}{a+b}$, suy ra $0<t<1$ và

$f(t)=t^{\alpha}+(1-t)^{\alpha}\geqslant 2(\frac{1}{2})^{\alpha}$ với $\alpha>1$ hoặc $\alpha<0$

$f(t)=t^{\alpha}+(1-t)^{\alpha}\leq 2(\frac{1}{2})^{\alpha}$ với $0<\alpha<1$.

Ta có $f'(t)=\alpha t^{\alpha-1}-\alpha(1-t)^{\alpha-1}=0\Rightarrow +\frac{1}{2}$.

Khi $\alpha<0,\alpha>1$, nhờ xét dấu đạo hàm ta suy ra

$$f(t)\geqslant f(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^{\alpha}\quad \text{(đpcm)}.$$

Khi $0<\alpha<1$, nhờ xét dấu đạo hàm ta suy ra

$$f(t)\leq f(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^{\alpha}\quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.
Bất đẳng thức (5.7) tương đương với

$$P=a^{\alpha}+b^{\alpha}+c^{\alpha}+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\alpha}\geqslant 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\alpha}$$

khi $c<0$ hoặc $\alpha>1$.

Áp dụng bất đẳng thức (5.6) ta có

$$P\geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}+2\left(\frac{c+\dfrac{a+b+c}{3}}{2}\right)^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant 4\left(\frac{a+b+c+\dfrac{a+b+c}{3}}{4}\right)^{\alpha} = 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\alpha} \quad \text{(đpcm)}.$$

Tương tự, áp dụng (5.6) cho trường hợp $0 < \alpha < 1$ ta chứng minh được (5.8).

Bài 3.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \Pi_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+a_i}\right)^{\alpha_i} + \Pi_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{1+a_i}\right)^{\alpha_i} \leq 1 \quad \text{(áp dụng (5.4) (đpcm))}.$$

Bài 4.
Đặt $\alpha = \dfrac{a}{a+b+c}, \beta = \dfrac{b}{a+b+c}, \gamma = \dfrac{c}{a+b+c}$.

Ta có $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Áp dụng bất đẳng thức (5.3) thu được

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geqslant a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 5.
Chọn $\alpha = \sin^2 x$, $\beta = \cos^2 x$ ta có $\alpha + \beta = 1$ và áp dụng (5.2) ta thu được

$$(\sin^2 x)^{\sin^2 x} \cdot (\cos^2 x)^{\cos^2 x} + 2\sin^2 x \cos^2 x \leq$$
$$\leq \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 6.
Áp dụng bất đẳng thức (5.3) thu được

$$a^a b^b c^c \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$a^b b^c c^a \leq ab + bc + ca$$

$$a^c b^a c^b \leq ac + ba + cb$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên thu được

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq (a+b+c)^2 = 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 7.

Ta có

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}\sqrt{2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{b\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}-\frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^2$$

$$\geqslant\left[\frac{2}{a^2(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}-\frac{1}{b^2(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})}-\frac{1}{c^2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}\right]\left[\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a}\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a}\geqslant\frac{2bc}{a^2(b+c)}-\frac{ca}{b^2(c+a)}-\frac{ab}{c^2(a+b)}\quad\textbf{(đpcm)}.$$

6 Một số kết quả làm mạnh bất đẳng thức Bunhiacôpxki

Trong bài này chúng tôi trình bày một số bất đẳng thức mới mạnh hơn (chặt hơn) và áp dụng.

Ví dụ 6.1. Giả sử $a_i \in R, b_i \in R, a_i^2 + b_i^2 \neq 0 \quad (i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2 + b_i^2}\cdot\frac{a_ib_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}\Big)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2) - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big] \geqslant \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\Big] \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^2$$

Bất đẳng thức đúng vì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2+b_i^2}\cdot\frac{a_i^2}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^4}{a_1^2+b_i^2}$$

(Do đó $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2b_i^2}{a_i^2+b_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^4}{a_i^2+b_i^2}$).

Ví dụ 6.2. Chứng minh rằng

$$\frac{9x^2}{9+x^2}+\frac{16y^2}{16+y^2}+\frac{25z^2}{25+z^2} \geqslant \frac{(3x+4y+5z)^2}{50+x^2+y^2+z^2}.$$

Giải

Sử dụng kết quả của ví dụ (6.1) ta có

$$(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)\left(\frac{a^2x^2}{a^2+x^2}+\frac{b^2y^2}{b^2+y^2}+\frac{c^2z^2}{c^2+z^2}\right)$$

Chọn $a=3, b=4, c=5$ chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 6.3. Giả sử $a_i \in R^+, b_i \in R^+ \quad (i=\overline{1,n})$.
Kí hiệu
$a = \min\{a_i\}, A = \max\{a_i\}$

$b = \min\{b_i\}, B = \max\{b_i\} \quad (i=\overline{1,n})$.

Chứng minh rằng

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2} \leq \frac{(ab+AB)^2}{4abAB}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{b}{A} \le \frac{b_i}{a_i} \le \frac{B}{a} \quad (i = \overline{1,n})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b}{A}\right)\left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{B}{a}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_i^2}{a_i^2} + \frac{bB}{aA} \le \left(\frac{b}{A} + \frac{B}{a}\right)\frac{b_i}{a_i}$$

$$\Leftrightarrow b_i^2 + \frac{bB}{aA}a_i^2 \le \left(\frac{b}{A} + \frac{B}{a}\right)a_i b_i \quad (i = \overline{1,n}).$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 + \frac{bB}{aA}\sum_{i=1}^n a_i^2 \le \frac{ab + AB}{aA} \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ab + AB}{aA}\right)^2 (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 + \frac{bB}{aA}\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2$$

$$\geqslant \frac{4bB}{aA}(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2} \le \frac{(ab + AB)^2}{4abAB} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 6.4. Giả sử $a_i \in R^+, b_i \in R^+ \quad (i = \overline{1,n})$.

Kí hiệu
$a = \min\{a_i\}, A = \max\{a_i\}$
$b = \min\{b_i\}, B = \max\{b_i\} \quad (i = \overline{1,n})$.

Chứng minh rằng

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_ib_i} - \frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \le \left(\sqrt{\frac{A}{b}} - \sqrt{\frac{a}{B}}\right)^2.$$

Giải

Tương tự như ví dụ 6.3 ta thu được

$$\frac{bB}{aA}\sum_{i=1}^n a_i^2 \le \frac{ab+AB}{aA}\sum_{i=1}^n a_ib_i - \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 \le \frac{ab+AB}{bB}\sum_{i=1}^n a_ib_i - \frac{aA}{bB}\sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_ib_i} \le \frac{ab+AB}{bB} - \frac{aA}{bB}\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_ib_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_ib_i} - \frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \le$$

$$\le \frac{ab+AB}{bB} - \left[\frac{aA}{bB}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_ib_i} + \frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right]$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình ta có

$$\frac{aA}{bB}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_ib_i} + \frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{aA}{bB}}$$

Suy ra

$$-\left[\frac{aA}{bB}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_ib_i} + \frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right] \le -2\sqrt{\frac{aA}{bB}}$$

Ta thu được

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_ib_i} - \frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \le$$

$$\le \frac{a}{B} + \frac{A}{b} - 2\sqrt{\frac{aA}{bB}} = \left(\sqrt{\frac{A}{b}} - \sqrt{\frac{a}{B}}\right)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 6.5. Cho ba bộ số thực $a_i, b_i, x_i \quad (i = \overline{1, n})$ mỗi bộ không đồng thời bằng không thoả mãn
$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0, \sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$, các bộ $\{a_i\}, \{b_i\}$ không tỉ lệ. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2}.$$

Giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i t = 0 \quad \forall t \in R,$$

suy ra

$$\sum_{i=1}^n (a_i t + b_i) x_i = 1 \quad \forall t \in R$$

Ta có

$$1 = \Big[\sum_{i=1}^n (a_i t + b_i) x_i\Big]^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i t + b_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant \frac{1}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)t^2 + 2(\sum_{i=1}^n a_i b_i)t + \sum_{i=1}^n b_i^2} = \frac{1}{At^2 + 2Bt + C},$$

trong đó $\quad A = \sum_{i=1}^n a_i^2, B = \sum_{i=1}^n a_i b_i, C = \sum_{i=1}^n b_i^2.$

Chọn $t = -\dfrac{B}{A}$ ta thu được

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant \frac{1}{A \cdot \dfrac{B^2}{A^2} - 2B \cdot \dfrac{B}{A} + C} = \frac{1}{\dfrac{-B^2}{A} + C} = \frac{A}{AC - B^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2} \quad \text{(đpcm)}.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử $b_i \in R^+, a_i \in R^+, k \in N^+$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^k}{a_i^{k-1}} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} b_i)^k}{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{k-1}}.$$

Bài 2. Giả sử a, b, c là những số thực dương thoả mãn $ab + bc + c + a = 4abc$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geqslant 3.$$

Bài 3. Giả sử a, b, c là những số thực dương thoả mãn $abc + bc + ca + a^2b^2c = 4a^2b^2c^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geqslant 3.$$

Bài 4. Giả sử a, b, c là những số thực dương, thoả mãn điều kiện $2ac + a + 2b = 5bc$. Chứng minh rằng

$$a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geqslant 3.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.

Ta có

$$(\sum_{i=1}^{n} b_i)^k = \Big(\underbrace{\sqrt[k]{a_1} \cdots \sqrt[k]{a_1}}_{k-1 \text{ thừa số}} \cdot \sqrt[k]{\frac{b_1^k}{a_1^{k-1}}} + \cdots + \underbrace{\sqrt[k]{a_n} \cdots \sqrt[k]{a_n}}_{k-1 \text{ thừa số}} \cdot \sqrt[k]{\frac{b_n^k}{a_n^{k-1}}}\Big)^k$$

$$\leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{k-1}\Big(\frac{b_1^k}{a_1^{k-1}} + \frac{b_2^k}{a_2^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1^k}{a_1^{k-1}}\Big)$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^k}{a_i^{k-1}} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} b_i)^k}{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{k-1}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.
Từ giả thiết $ab + bc + c + a = 4abc$ ta thu được

$$P = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} = 4$$

$$\Rightarrow 64 = \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc}\right)^3 =$$

$$= \left(1 \cdot \frac{1}{c} \cdot 1 + \frac{1}{c} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot 1 + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot 1\right)^3$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)^2 \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow (P+1)^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow P + 1 \Leftrightarrow P \geqslant 3 \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 3.
Từ điều kiện suy ra

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{a^2bc} + \frac{1}{b^2ca} + \frac{1}{c} = 4$$

Ta có

$$4^4\left(1 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1\right)^4 \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geqslant 3 \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 4.
Từ điều kiện ta suy ra

$$5^3 = \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{c}\right)^3$$

$$\leq (a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 1 + 1)(\frac{1}{b^3} + 1 + a^3 + 1 + \frac{1}{c^3})(1 + a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 1)$$

$$\leq (a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 2)^3$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 2$$

$$\Leftrightarrow a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geqslant 5 \quad \text{(đpcm)}.$$

Chương 2

Một số phương pháp xây dựng bất đẳng thức

1 Một phương pháp xây dựng bất đẳng thức dạng phân thức

Chúng ta bắt đầu với hai bất đẳng thức khác nhau về thứ tự biến số.

Ví dụ 1.1. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{b+2c}}\sqrt{a(b+2c)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{b}{c+2a}}\sqrt{b(c+2a)} + \sqrt{\frac{c}{a+2b}}\sqrt{c(a+2b)}\right)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq P \cdot 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geqslant 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.2. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Big(\sqrt{\frac{a}{a+2b}}\sqrt{a(a+2b)} +$$

$$+\sqrt{\frac{b}{b+2c}}\sqrt{b(b+2c)} + \sqrt{\frac{c}{c+2a}}\sqrt{c(c+2a)}\Big)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq P \cdot (a+b+c)^2 \Leftrightarrow P \geqslant 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Để xây dựng bất đẳng thức phân thức khó hơn chúng ta sử dụng các kỹ năng sau:

- Đưa thêm tham số
- Đổi bộ biến số
- Ước lượng một biểu thức đối xứng

I. Đưa thêm tham số

Ví dụ 1.3. Với α, a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{b+\alpha c} + \frac{b}{c+\alpha a} + \frac{c}{a+\alpha b} \geqslant \frac{3}{1+\alpha}.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Big(\sqrt{\frac{a}{b+\alpha c}}\sqrt{a(b+\alpha c)} +$$

$$+\sqrt{\frac{b}{c+\alpha a}}\sqrt{b(c+\alpha a)} + \sqrt{\frac{c}{a+\alpha b}}\sqrt{c(a+\alpha b)}\Big)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq P(1+\alpha)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(1+\alpha)(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{3}{1+\alpha} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 1.4. Với a, b, c là các số thực dương, $\alpha \geqslant 2$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{a+\alpha b} + \frac{b}{b+\alpha c} + \frac{c}{c+\alpha a} \geqslant \frac{3}{1+\alpha}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{a+\alpha b}}\sqrt{a(a+\alpha b)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{b}{b+\alpha c}}\sqrt{b(b+\alpha c)} + \sqrt{\frac{c}{c+\alpha a}}\sqrt{c(c+\alpha a)}\right)^2$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &\leq P(a^2+b^2+c^2+\alpha(ab+bc+ca)) \\ &= P((a+b+c)^2+(\alpha-2)(ab+bc+ca)) \\ &\leq P((a+b+c)^2+\frac{\alpha-2}{3}(a+b+c)^2) \\ &\Leftrightarrow 1 \leq P(1+\frac{\alpha-2}{3}) = P(\frac{1+\alpha}{3}) \\ &\Leftrightarrow P \geqslant \frac{3}{1+\alpha} \quad \text{(đpcm).}\end{aligned}$$

Các ví dụ (1.1), (1.2) là hệ quả của (1.3), (1.4) với $\alpha = 2$.

Từ các kết quả ở ví dụ (1.3), (1.4) chọn $\alpha = \dfrac{1}{abc}$ chúng ta thu được:

Ví dụ 1.5. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2b}{ab^2+1} + \frac{b^2c}{bc^2+1} + \frac{c^2a}{ca^2+1} \geqslant \frac{3abc}{1+abc}.$$

Hướng dẫn

Đặt $\alpha = \dfrac{1}{abc}$ chuyển bất đẳng thức về dạng tham số ở ví dụ 1.3.

Ví dụ 1.6. Với a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2c}{a^2c+1} + \frac{b^2a}{b^2a+1} + \frac{c^2b}{c^2b+1} \geqslant \frac{1}{9(1+abc)}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Đặt $\alpha = \dfrac{1}{abc} \geqslant 27$ và áp dụng ví dụ (1.4).

Chúng ta có thể đưa thêm nhiều tham số như sau:

Ví dụ 1.7. Với $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+\alpha c} + \frac{b}{c+\beta a} + \frac{c}{a+\gamma b}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha ac + \beta ba + \gamma cb}{(a+b+c)^2}\right) \geqslant 1$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Bigg(\sqrt{\frac{a}{b+\alpha c}}\sqrt{a(b+\alpha c)}+$$

$$+\sqrt{\frac{b}{c+\beta a}}\sqrt{b(c+\beta a)} + \sqrt{\frac{c}{a+\gamma b}}\sqrt{c(a+\gamma b)}\Bigg)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a}{b+\alpha c} + \frac{b}{c+\beta a} + \frac{c}{a+\gamma b}\right)(ab+bc+ca+\alpha ac+\beta ba+\gamma cb)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{a}{b+\alpha c} + \frac{b}{c+\beta a} + \frac{c}{a+\gamma b}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha ac + \beta ba + \gamma cb}{(a+b+c)^2}\right)$$

Áp dụng kết quả của ví dụ (1.7) và chọn bộ tham số α, β, γ cụ thể chúng ta thu được các bất đẳng thức:

Ví dụ 1.8. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $2ab + 5bc = 2(a^2 + b^2 + c^2) + ac$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+3b} \geqslant 1.$$

Giải

Điều kiện của bài toán được viết dưới dạng

$$\frac{ac + 2ab + 3bc}{(a+b+c)^2} = \frac{2}{3}$$

Áp dụng kết quả của ví dụ (1.7) với $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.9. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\left(\frac{a^2}{ab+1} + \frac{b^2}{bc+1} + \frac{c^2}{ca+1}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{(a+b+c)^2}\right) \geqslant 1.$$

Giải

Sử dụng kết quả của ví dụ 1.7 và chọn $\alpha = \dfrac{1}{ac}, \beta = \dfrac{1}{ab}, \gamma = \dfrac{1}{bc}$ chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.10. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{a+b+c}\right) \geqslant 1.$$

Giải

Sử dụng kết quả của ví dụ 1.7 và chọn $\alpha = \dfrac{1}{c}, \beta = \dfrac{1}{a}, \gamma = \dfrac{1}{b}$ chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.11. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b(a+2c)} + \frac{b^2}{c(b+2a)} + \frac{c^2}{a(c+2b)} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Big(\frac{a}{\sqrt{b(a+2c)}}\sqrt{b(a+2c)}+$$

$$+\frac{b}{\sqrt{c(b+2a)}}\sqrt{c(b+2a)}+\frac{c}{\sqrt{a(c+2b)}}\sqrt{a(c+2b)}\Big)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq P\cdot 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geqslant 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

II. Đổi bộ biến số

Từ các bất đẳng thức ở ví dụ (1.1), (1.2) chúng ta thay đổi bộ biến số để thu được các bất đẳng thức mới sau đây.

Ví dụ 1.12. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{2a+b+3c}+\frac{b+c}{2b+c+3a}+\frac{c+a}{2c+a+3b} \geqslant 1.$$

Giải

Đặt $x = a+b, y = b+c, z = c+a$ ta thu được bất đẳng thức tương đương

$$\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y} \geqslant 1 \quad \text{(xem ví dụ 1.1)}.$$

Ví dụ 1.13. Với a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$\frac{a+b-c}{3b+c-a}+\frac{b+c-a}{3c+a-b}+\frac{c+a-b}{3a+b-c} \geqslant 1.$$

Giải

Đặt $x = a+b-c, y = b+c-a, z = c+a-b$ ta thu được

$$\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x} \geqslant 1 \quad (x, y, z > 0) \quad \text{(xem ví dụ 1.2)}.$$

Ví dụ 1.14. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a(2b+c)}+\frac{ca}{b(2c+a)}+\frac{ab}{c(2c+b)} \geqslant 1.$$

Giải

Đặt $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$ ta thu được

$$\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geqslant 1 \quad \text{(Ví dụ 1.2).}$$

Ví dụ 1.15. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{ac}{ac+2b^2} + \frac{ba}{ba+2c^2} + \frac{cb}{cb+2a^2} \geqslant 1.$$

Giải

Đặt $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{c}, z = \dfrac{c}{a}$ ta thu được

$$\frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x} \geqslant 1 \quad \text{(Ví dụ 1.2).}$$

III. Ước lượng một biểu thức đối xứng

Thực chất khi thay thế một biểu thức trong bất đẳng thức bởi một biểu thức đối xứng khác sẽ nhận được một bất đẳng thức hệ quả (yếu hơn). Mặc dù vậy trong dạng phân thức thì bất đẳng thức mới khó hơn nhiều trong việc tìm cách chứng minh vì bậc của các số hạng thay đổi hay tính đối xứng thay đổi.

Trong phần này chúng ta trình bày cách chứng minh những bất đẳng thức như vậy.

Ví dụ 1.16. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$1 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$

Từ bất đẳng thức

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant \frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geqslant a^3+b^3+c^3$$

Suy ra

$$1 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \leq$$

$$\leq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$

$$\leq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(a+2b^2)+b^2(b+2c^2)+c^2(c+2a^2)}$$

Ta có

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = \Big(\frac{a}{\sqrt{a+2b^2}}a\sqrt{a+2b^2}+$$

$$+\frac{b}{\sqrt{b+2c^2}}b\sqrt{b+2c^2}+\frac{c}{\sqrt{c+2a^2}}c\sqrt{c+2a^2}\Big)^2$$

$$\leq P(a^2(a+2b^2)+b^2(b+2c^2)+c^2(c+2a^2))$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(a+2b^2)+b^2(b+2c^2)+c^2(c+2a^2)} \geqslant 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.17. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $abc \geqslant 1$, chứng minh rằng

$$P = \frac{ab^2}{ab^2+2}+\frac{bc^2}{bc^2+2}+\frac{ca^2}{ca^2+2} \geqslant 1.$$

Giải

Vì $abc \geqslant 1$ nên ta có

$$1 = \frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)} \leq$$

$$\leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{a(ab^2+2)+b(bc^2+2)+c(ca^2+2)}$$

Ta có

$$(ab+bc+ca)^2 = \Big(\frac{\sqrt{a}\,b}{\sqrt{ab^2+2}}\sqrt{a(ab^2+2)}+$$

$$+\frac{\sqrt{b}\,c}{\sqrt{bc^2+2}}\sqrt{b(bc^2+2)}+\frac{\sqrt{c}\,a}{\sqrt{ca^2+2}}\sqrt{c(ca^2+2)}\Big)^2$$

Suy ra

$$(ab+bc+ca)^2 \leq P(a(ab^2+2)+b(bc^2+2)+c(ca^2+2))$$

hay $P \geqslant 1$ (đpcm).

Ví dụ 1.18. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{ac}{b(2b+c)}+\frac{ba}{c(2c+a)}+\frac{cb}{a(2a+b)} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$1 = \frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b})}$$

Ta có

$$\frac{a^2}{b^2}+1 \geqslant 2\frac{a}{b}$$

$$\frac{b^2}{c^2}+1 \geqslant 2\frac{b}{c}$$

$$\frac{c^2}{a^2}+1 \geqslant 2\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$$

Cộng vế với vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Suy ra

$$1 \leq \frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+2(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b})} = \frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2}{a(\frac{1}{b}+\frac{2}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{2}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})}$$

Ta có

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2 = \Bigg(\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{2}{c}}}\sqrt{a(\frac{1}{b}+\frac{2}{c})}+$$

$$+\frac{\sqrt{b}}{c\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{2}{a}}}\sqrt{b(\frac{1}{c}+\frac{2}{a})}+\frac{\sqrt{c}}{a\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}}\sqrt{c(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})}\Bigg)^2$$

$$\leq \Big(\frac{ac}{b(2b+c)}+\frac{ba}{c(2c+a)}+\frac{cb}{a(2a+b)}\Big)\Big(a(\frac{1}{b}+\frac{2}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{2}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})\Big)$$

Suy ra $P \geqslant 1$ (đpcm).

BÀI TẬP

Bài 1. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Bài 2. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^3c}{b^2(2c^2+ab)} + \frac{b^3a}{c^2(2a^2+bc)} + \frac{c^3b}{a^2(2b^2+ca)} \geqslant 1.$$

Bài 3. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b+\alpha c} + \frac{b^2}{c+\alpha a} + \frac{c^2}{a+\alpha b} \geqslant \frac{a+b+c}{1+\alpha}.$$

Bài 4. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^3b}{ab^2+1} + \frac{b^3c}{bc^2+1} + \frac{c^3a}{ca^2+1} \geqslant \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Big(\frac{a}{\sqrt{b+2c}}\sqrt{b+2c} +$$
$$+\frac{b}{\sqrt{c+2a}}\sqrt{c+2a} + \frac{c}{\sqrt{a+2b}}\sqrt{a+2b}\Big)^2$$
$$\leq P \cdot 3(a+b+c) \Leftrightarrow P \geqslant \frac{a+b+c}{3} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.
Đặt $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{c}, z = \dfrac{c}{a}$ ta có $x+y+z \geqslant 3$

và $\quad P = \dfrac{x^2}{y+2z} + \dfrac{y^2}{z+2x} + \dfrac{z^2}{x+2y} \geqslant \dfrac{x+y+z}{3} \geqslant 1 \quad$ (đpcm).

Bài 3.
Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Big(\frac{a}{\sqrt{b+\alpha c}}\sqrt{b+\alpha c}+$$

$$+\frac{b}{\sqrt{c+\alpha a}}\sqrt{c+\alpha a}+\frac{c}{\sqrt{a+\alpha b}}\sqrt{a+\alpha b}\Big)^2$$

$$\leq P(1+\alpha)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{a+b+c}{1+\alpha} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 4.
Đặt $\alpha = \dfrac{1}{abc} > 0$ ta thu được

$$\frac{a^2}{b+\alpha c}+\frac{b^2}{c+\alpha a}+\frac{c^2}{a+\alpha b} \geqslant \frac{a+b+c}{1+\alpha}$$

(Xem bài 3).

2 Một dạng hệ quả của Bất đẳng thức Bunhiacôpxki và áp dụng

Trong bài này chúng ta xây dựng một số dạng hệ quả của bất đẳng thức Bunhiacôpxki và các áp dụng của các dạng hệ quả này trong việc chứng minh một số dạng bất đẳng thức.

DẠNG HỆ QUẢ 1.
Với $a_i \in R, b_i \in R^+ \quad (i = \overline{1,n})$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \qquad (2.1)$$

Giải

Ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \cdot \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\sqrt{b_i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 2.1. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Ví dụ 2.2. Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geqslant \frac{3}{a+b} \qquad (2.2)$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{x^2}{x(ay+bz)} + \frac{y^2}{y(az+bx)} + \frac{z^2}{z(ax+by)}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)} \geqslant \frac{3}{a+b} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 2.3. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{b(c+a)} + \frac{b}{a(b+c)} + \frac{c}{a^2+b^2} \geqslant \frac{3}{a+b}.$$

Giải

Từ bất đẳng thức (2.2) ta chọn $x = a, y = b, z = c$
suy ra $P \geqslant \dfrac{3}{a+b}$ (đpcm).

Ví dụ 2.4. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{a+2b+3c} + \frac{b}{b+2c+3a} + \frac{c}{c+2a+3b} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{a^2}{a(a+2b+3c)} + \frac{b^2}{b(b+2c+3a)} + \frac{c^2}{c(c+2a+3b)}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+5(ab+bc+ca)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+3(ab+bc+ca)}$$

Vì $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$ suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(a+b+c)^2} = \frac{1}{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 2.5. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2} = \frac{3}{4} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 2.6. Giả sử a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{ba+bc} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ca+cb}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) và điều kiện $abc = 1$ ta thu được

$$P \geqslant \frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)}{2} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2.7. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{ab^2}{b+c} + \frac{bc^2}{c+a} + \frac{ca^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{a^2b^2}{a(b+c)} + \frac{b^2c^2}{b(c+a)} + \frac{c^2a^2}{c(a+b)}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Ví dụ 2.8. Giả sử a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geqslant \frac{1}{a+b+c}.$$

Giải

Từ điều kiện đề bài suy ra $a^2 - bc + 1 > 0, b^2 - ca + 1 > 0, c^2 - ab + 1 > 0$.

Ta có

$$P = \frac{a^2}{a^3 - abc + a} + \frac{b^2}{b^3 - bca + b} + \frac{c^2}{c^3 - cab + c}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + (a+b+c)}$$

Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3})$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2}{3}}{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3} + 1)} = \frac{1}{a+b+c} \quad \text{(đpcm)}$$

DẠNG HỆ QUẢ 2.

Với $a_i, b_i \in R^+ \quad (i = \overline{1,n})$ ta có

$$1) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i^2} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \qquad (2.3)$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^4}{b_i^3} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^3} \qquad (2.4).$$

Giải

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ:
Với $a_i, b_i, c_i, d_i > 0 \quad (i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i)^3 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i^3 \qquad (2.5)$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i)^4 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^4 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^4 \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i^4 \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i^4 \qquad (2.6)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (2.6) (bất đẳng thức 2.5 chứng minh tương tự).
Đặt $A_i = a_i^4, B_i = b_i^4, C_i = c_i^4, D_i = d_i^4 \quad (i = \overline{1,n})$
Ta có

$$(2.6) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sqrt[4]{A_i B_i C_i D_i} \leq \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \sum_{i=1}^{n} D_i}$$

$$\Leftrightarrow M = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[4]{\frac{A_i B_i C_i D_i}{\sum A_i \sum B_i \sum C_i \sum D_i}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức dạng trung bình ta suy ra

$$M \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{A_i}{\sum A_i} + \frac{B_i}{\sum B_i} + \frac{C_i}{\sum C_i} + \frac{D_i}{\sum D_i}}{4}$$

$$M \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\sum A_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{\sum B_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{\sum C_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{D_i}{\sum D_i}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức (2.3).

Áp dụng (2.5), ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt[3]{b_i^2}}\sqrt[3]{b_i}\cdot\sqrt[3]{b_i}\Big)^3 \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)^2$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i^2} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \quad \text{(đpcm).}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (2.4).

Áp dụng (2.6), ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^4 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt[4]{b_i^3}}\sqrt[4]{b_i}\cdot\sqrt[4]{b_i}\cdot\sqrt[4]{b_i}\Big)^4 \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^4}{b_i^3}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{a_i^4}{b_i^3} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^4}{(\sum_{i=1}^{n} b_i)^3} \quad \text{(đpcm).}$$

Sau đây là một số ví dụ áp dụng:

Ví dụ 2.9. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{(a+2b+3c)^3} + \frac{b}{(b+2c+3a)^3} + \frac{c}{(c+2a+3b)^3} \geqslant \frac{1}{8(a+b+c)^2}.$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{a^4}{a^3(a+2b+2c)^3} + \frac{b^4}{b^3(b+2c+2a)^3} + \frac{c^4}{c^3(c+2a+2b)^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.4) ta suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^4}{(a^2+b^2+c^2+5(ab+bc+ca))^3} = \frac{(a+b+c)^4}{[(a+b+c)^2+3(ab+bc+ca)]^3}$$

Vì $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$ ta suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^4}{[2(a+b+c)^2]^3} = \frac{1}{8(a+b+c)^2} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 2.10. Giả sử a, b, c, x, y là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{(bx+cy)^3} + \frac{b}{(cx+ay)^3} + \frac{c}{(ax+by)^3} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{9}{(x+y)^3(ab+bc+ca)} \quad (2.7)$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{a^4}{a^3(bx+cy)^3} + \frac{b^4}{b^3(cx+ay)^3} + \frac{c^4}{c^3(cx+by)^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.4) ta suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^4}{(x+y)^3(ab+bc+ca)^3} \geqslant \frac{9(ab+bc+ca)^2}{(x+y)^3(ab+bc+ca)^3} =$$

$$= \frac{9}{(x+y)(ab+bc+ca)} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 2.11. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+2c)^3} + \frac{b}{(c+2a)^3} + \frac{c}{(a+2b)^3} \geqslant \frac{1}{3(ab+bc+ca)}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (2.7) với $x = 1, y = 2$.

Ví dụ 2.12. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{b^3(c+a)^3} + \frac{b}{a^3(b+c)^3} + \frac{c}{(a^2+b^2)^3} \geqslant \frac{9}{(a+b)^3(ab+bc+ca)}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (2.7) với $x = a, y = b$.

Ví dụ 2.13. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a^5(b+c)^2} + \frac{1}{b^5(c+a)^2} + \frac{1}{c^5(a+b)^2} \geqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{(abc)^2}.$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{\frac{1}{a^3}}{a^2(b+c)^2} + \frac{\frac{1}{b^3}}{b^2(c+a)^2} + \frac{\frac{1}{c^3}}{c^2(a+b)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.3) ta suy ra

$$P \geqslant \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3}{[2(ab+bc+ca)]^2} = \frac{(ab+bc+ca)}{8(abc)^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{(abc)^2}$$

DẠNG HỆ QUẢ 3.

Giả sử $a_i, b_i \in R^+ \quad (i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\sqrt{b_i}} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} b_i}} \qquad (2.8)$$

Giải

Ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt[4]{b_i}}\sqrt[4]{b_i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\sqrt{b_i}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\sqrt{b_i}} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bất đẳng thức (2.8) suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức (2.1) khi thay b_i bởi $\sqrt{b_i}$. Sau đây chúng ta xét một số ví dụ áp dụng.

Ví dụ 2.14. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = a\sqrt{\frac{a}{a+2b}} + b\sqrt{\frac{b}{b+2c}} + c\sqrt{\frac{c}{c+2a}} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}.$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{a^2}{\sqrt{a(a+2b)}} + \frac{b^2}{\sqrt{b(b+2c)}} + \frac{c^2}{\sqrt{c(c+2a)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.8) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a(a+2b)} + \sqrt{b(b+2c)} + \sqrt{c(c+2a)}} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{\dfrac{(a+b+c)^2}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{3}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 2.15. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (2.8) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+c)(b+a)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{3}}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{b^2}{\sqrt[3]{c+2a}} + \frac{c^2}{\sqrt[3]{a+2b}} \geqslant \frac{(a+b+c)^{\frac{5}{3}}}{3}.$$

Bài 2. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b^2(b+c)} + \frac{b^2}{c^2(c+a)} + \frac{c^2}{a^2(a+b)} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Bài 3. Giả sử $a_i, b_i \in R^+$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^3}{(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i})^2}.$$

Bài 4. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{27}.$$

Bài 5. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^6}{b^3(b+c)^2} + \frac{b^6}{c^3(c+a)^2} + \frac{c^6}{a^3(a+b)^2} \geqslant \frac{a+b+c}{4}.$$

Bài 6. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^3}{b^3(a+b)^2} + \frac{b^3}{c^3(b+c)^2} + \frac{c^3}{a^3(c+a)^2} \geqslant \frac{27}{4(a+b+c)^2}.$$

Bài 7. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Bài 8. Giả sử $a_i \in R^+, b_i \in R^+ \quad (i = \overline{1, n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^3}{n \sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

Bài 9. Giả sử $a_i \in R^+, b_i \in R^+ \quad (i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^4}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^4}{n^2 \sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

Bài 10. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{2b+3c}{a+2b+3c} + \frac{2c+3a}{b+2c+3a} + \frac{2a+3b}{c+2a+3b} \leq \frac{5}{2}.$$

Bài 11. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+2b} + \frac{bc}{b+2c} + \frac{ca}{c+2a} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Bài 12. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^3}{a^2+3bc} + \frac{b^3}{b^2+3ca} + \frac{c^3}{c^2+3ab} \geqslant \frac{a+b+c}{4}.$$

Bài 13. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^3}{b^2(c+a)+abc} + \frac{b^3}{c^2(a+b)+abc} + \frac{c^3}{a^2(b+c)+abc} \geqslant 1.$$

Bài 14. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^4}{bc(2a^2+bc)} + \frac{b^4}{ca(2b^2+ca)} + \frac{c^4}{ab(2c^2+ab)} \geqslant 1.$$

Bài 15. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b^2+c^2+bc} + \frac{b^2}{c^2+a^2+ca} + \frac{c^2}{a^2+b^2+ab} \geqslant 1.$$

Bài 16. Giả sử x, y, z là những số thực dương; $a, b, c \in R$. Chứmg mim rằng

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{1}{3}\left[\frac{(a+2b)^2}{x+2y} + \frac{(b+2c)^2}{y+2z} + \frac{(c+2a)^2}{z+2x}\right]$$

Bài 17. Giả sử $a_i \in R^+, b_i \in R^+$ $(i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{\sqrt[3]{b_i}} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^3}{n\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{b_i}}.$$

Bài 18. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{b^2+c^2+bc}} + \frac{b^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{c^2+a^2+ca}} + \frac{c^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{a^2+b^2+ab}} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt[3]{3}}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt[3]{b+2c} + \sqrt[3]{c+2a} + \sqrt[3]{a+2b}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt[3]{(a+b+c)}} = \frac{(a+b+c)^{\frac{5}{3}}}{3} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.

Áp dụng bất đẳng thức (2.1) ta thu được

$$P \geqslant \frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2}{2(a+b+c)} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 3.

Ta có

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt[3]{b_i}} \sqrt[6]{b_i} \cdot \sqrt[6]{b_i}\Big)^3 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i})^2$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^3}{(\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i})^2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 4.
Áp dụng bài 3 ta có

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{(\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2a}+\sqrt{a+2b})^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3(3(a+b+c))^2}$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{27} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 5.
Ta có

$$P = \frac{(\frac{a^2}{b})^3}{(b+c)^2} + \frac{(\frac{b^2}{c})^3}{(c+a)^2} + \frac{(\frac{c^2}{a})^3}{(a+b)^2}$$

Áp dụng bài 3 ta nhận được

$$P \geqslant \frac{(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})^3}{4(a+b+c)^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{4(a+b+c)^2} = \frac{a+b+c}{4}.$$

Bài 6.
Ta có

$$P = \frac{(\frac{a}{b})^3}{(a+b)^2} + \frac{(\frac{b}{c})^3}{(c+b)^2} + \frac{(\frac{c}{a})^3}{(a+c)^2}$$

Áp dụng bài 3 ta nhận được

$$P \geqslant \frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^3}{[2(a+b+c)]^2} \geqslant \frac{27}{4(a+b+c)^2}.$$

Bài 7.
Ta có

$$P = \frac{a^3}{a^2(b+c)^2} + \frac{b^3}{b^2(c+a)^2} + \frac{c^3}{c^2(a+b)^2}$$

Áp dụng bài 3 ta nhận được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{4(ab+bc+ca)^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{4\cdot\frac{1}{9}(a+b+c)^4} = \frac{9}{4(a+b+c)} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 8.
Áp dụng (2.5) ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt[3]{b_i}} \sqrt[3]{b_i} \cdot 1\Big)^3 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^3}{n \sum_{i=1}^{n} b_i} \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 9.
Áp dụng (2.6) ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^4 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt[4]{b_i}} \sqrt[4]{b_i} \cdot 1 \cdot 1\Big)^4 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^4}{b_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot n^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^4}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^4}{n^2 \sum_{i=1}^{n} b_i} \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 10.
Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2b+3c}{a+2b+3c} - 1 + \frac{2c+3a}{b+2c+3a} - 1 + \frac{2a+3b}{c+2a+3b} - 1 \leq \frac{5}{2} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+2b+3c} + \frac{b}{b+2c+3a} + \frac{c}{c+2a+3b} \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2}{a^2+2ab+3ac} + \frac{b^2}{b^2+2bc+3ba} + \frac{c^2}{c^2+2ca+3cb} \geqslant \frac{1}{2}$$

Theo (2.1) ta có

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b+c)^2} = \frac{1}{2}.$$

Bài 11.
Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{ab}{a+2b} - \frac{a}{2} + \frac{bc}{b+2c} - \frac{b}{2} + \frac{ca}{c+2a} - \frac{c}{2} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2a} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$$

Ta có

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{3} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 12.
Áp dụng bài 3 và

$$(\sqrt{a^2+3bc} + \sqrt{b^2+3ca} + \sqrt{c^2+3ab})^2 \leq 3[(a+b+c)^2 + ab + bc + ca]$$

ta nhận được

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3[(a+b+c)^2 + ab + bc + ca]} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3[(a+b+c)^2 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2]}$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{a+b+c}{4} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 13.
Ta có

$$(a+b+c)^3 \geqslant 3(ab+bc+ca)(a+b+c)$$
$$\geqslant 3[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc]$$

Ta có

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc]} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^3} = 1.$$

Bài 14.
Ta có

$$(a+b+c)^4 \geqslant 9(ab+bc+ca)^2$$

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^4}{9(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c))} =$$

$$= \frac{(a+b+c)^4}{9(ab+bc+ca)^2} \geqslant 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 15.
Ta có

$$P = \frac{a^3}{a(b^2+a^2)+abc} + \frac{b^3}{b(c^2+a^2)+abc} + \frac{c^3}{c(a^2+b^2)+abc}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3[a(b^2+a^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc]}$$

Vì

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &\geqslant 3(a+b+c)(ab+bc+ca)\\ &\geqslant 3[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc]\end{aligned}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^3} = 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 16.
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{b^2}{y} &\geqslant \frac{(a+2b)^2}{x+2y}\\ \frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}+\frac{c^2}{z} &\geqslant \frac{(b+2c)^2}{y+2z}\\ \frac{c^2}{z}+\frac{a^2}{x}+\frac{a^2}{x} &\geqslant \frac{(c+2a)^2}{z+2x}\end{aligned}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 17.
Áp dụng bài 8 với b_i được thay bằng $\sqrt[3]{b_i}$, hoặc có thể chứng minh như sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{\sqrt[9]{b_i}} \cdot \sqrt[9]{b_i} \cdot 1\right)^3 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{\sqrt[3]{b_i}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{b_i} \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{\sqrt[3]{b_i}} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3}{n\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{b_i}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 18.
Ta có

$$\frac{P}{\sqrt[3]{3}} = \frac{a^3}{\sqrt[3]{3ab^2 + 3ac^2 + 3abc}} + \frac{b^3}{\sqrt[3]{3bc^2 + 3ba^2 + 3abc}} + \frac{c^3}{\sqrt[3]{3ca^2 + 3cb^2 + 3abc}}$$

Suy ra

$$\frac{P}{\sqrt[3]{3}} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3[\sqrt[3]{3ab^2 + 3ac^2 + 3abc} + \sqrt[3]{3bc^2 + 3ba^2 + 3abc} + \sqrt[3]{3ca^2 + 3cb^2 + 3abc}]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{\sqrt[3]{3}} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{9\sqrt[3]{\dfrac{3a(b^2+c^2) + 3b(c^2+a^2) + 3c(a^2+b^2) + 9abc}{3}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(a+b+c)^3}{9 \cdot \dfrac{(a+b+c)}{\sqrt[3]{3}}} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt[3]{3}} \quad \text{(đpcm)}.$$

3 Bất đẳng thức tam giác

Trong phần này chúng ta trình bày một phương pháp chứng minh và xây dựng các dạng mở rộng của bất đẳng thức tam giác.

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng

$$P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^2}.$$

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i + c_i)\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i + c_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^2}$$

Tương tự ta thu được

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i + c_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i + b_i + c_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^2 \leq$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i + c_i)^2}.$$

Ví dụ 3.2. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{5a^2 + b^2 - 2ab} + \sqrt{5b^2 + c^2 - 2bc} + \sqrt{5c^2 + a^2 - 2ca} \geqslant 2(a + b + c).$$

Giải

Ta có

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5a^2 + b^2 - 2ab} = \sqrt{(a + b)^2 + (3a - b)^2} \geqslant \sqrt{2}(2a)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5a^2 + b^2 - 2ab} \geqslant 2a$$

Tương tự

$$\sqrt{5b^2 + c^2 - 2bc} \geqslant 2b$$

$$\sqrt{5c^2 + a^2 - 2ca} \geqslant 2c$$

Cộng vế với vế bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 3.3. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + a^2 + b^2} + \sqrt{1 + b^2 + c^2} + \sqrt{1 + c^2 + a^2} \geqslant \sqrt{9 + 2(a + b + c)^2}.$$

Giải

Ta có

$$(3 + a(a + b + c) + b(a + b + c))^2 \leq (1 + a^2 + b^2)(9 + 2(a + b + c)^2)$$

Suy ra

$$3 + (a + b)(a + b + c) \leq \sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{9 + 2(a + b + c)^2}$$

Tương tự có

$$3 + (b + c)(a + b + c) \leq \sqrt{1 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{9 + 2(a + b + c)^2}$$

$$3 + (c + a)(a + b + c) \leq \sqrt{1 + c^2 + a^2} \cdot \sqrt{9 + 2(a + b + c)^2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{1 + a^2 + b^2} + \sqrt{1 + b^2 + c^2} + \sqrt{1 + c^2 + a^2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{9 + 2(a + b + c)^2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Xét trường hợp mở rộng

Ví dụ 3.4. Giả sử $a_i, b_i, c_i \in R^+$ $(i = \overline{1, n})$, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} a_i^3} + \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} b_i^3} + \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} c_i^3} \geqslant \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^3}.$$

Giải

Ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i + c_i)^2\Big)^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i + c_i)(a_i + b_i + c_i)\Big)^3 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^3\Big)^2$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i + c_i)^2 \leq \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} a_i^3} \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^3\Big)^{\frac{2}{3}}$$

Tương tự

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i + c_i)^2 \leq \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} b_i^3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i + b_i + c_i)^2 \leq \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} b_i^3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 3.5. Giả sử $a_i, b_i, c_i \in R^+ \quad (i = \overline{1, n})$, chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{\sum_{i=a}^{n} a_i^4} + \sqrt[4]{\sum_{i=a}^{n} b_i^4} + \sqrt[4]{\sum_{i=a}^{n} c_i^4} \geqslant \sqrt[4]{\sum_{i=a}^{n} (a_i + b_i + c_i)^4}.$$

Giải

Áp dụng (2.6) ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i + c_i)^3\Big)^4 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^4 \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^4\Big)^3$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i + c_i)^3 \leq \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n} a_i^4} \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^4\Big)^{\frac{3}{4}}$$

Tương tự

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i + c_i)^3 \leq \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n} b_i^4} \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^4\Big)^{\frac{3}{4}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i + b_i + c_i)^3 \leq \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n} c_i^4} \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)^4\Big)^{\frac{3}{4}}$$

Cộng vế với vế bất đẳng thức trên ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 3.6. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1 + a^3} + \sqrt[3]{1 + b^3} + \sqrt[3]{1 + c^3} \geqslant \sqrt[3]{27 + (a + b + c)^3}.$$

Giải

Ta có

$$(1\cdot 3^2 + a(a+b+c)^2)^3 \le (1+a^3)(27+(a+b+c)^3)^2$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot 9 + a(a+b+c)^2 \le \sqrt[3]{1+a^3}(27+(a+b+c)^3)^{\frac{2}{3}}$$

Tương tự

$$1\cdot 9 + b(a+b+c)^2 \le \sqrt[3]{1+b^3}(27+(a+b+c)^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$1\cdot 9 + c(a+b+c)^2 \le \sqrt[3]{1+c^3}(27+(a+b+c)^3)^{\frac{2}{3}}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 3.7. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{1+a^4+b^4}+\sqrt[4]{1+b^4+c^4}+\sqrt[4]{1+c^4+a^4} \geqslant \sqrt[4]{81+2(a+b+c)^4}.$$

Giải

Ta có

$$(1\cdot 3^3 + a(a+b+c)^3 + b(a+b+c)^3)^4 \le (1+a^4+b^4)(81+2(a+b+c)^4)^3$$

Suy ra

$$1\cdot 3^3 + (a+b)(a+b+c)^3 \le \sqrt[4]{1+a^4+b^4}(81+2(a+b+c)^4)^{\frac{3}{4}}$$

Tương tự ta có

$$1\cdot 3^3 + (b+c)(a+b+c)^3 \le \sqrt[4]{1+b^4+c^4}(81+2(a+b+c)^4)^{\frac{3}{4}}$$

$$1\cdot 3^3 + (c+a)(a+b+c)^3 \le \sqrt[4]{1+c^4+a^4}(81+2(a+b+c)^4)^{\frac{3}{4}}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 3.8. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+c^4}+\frac{1}{b}\sqrt{b^2+a^4}+\frac{1}{c}\sqrt{c^2+b^4} \geqslant 9+(a+b+c)^2.$$

Giải

Ta có

$$P = \sqrt{1 + \frac{c^4}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{a^4}{b^2}} + \sqrt{1 + \frac{b^4}{c^2}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \sqrt{9 + \left(\frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c}\right)^2} \geqslant \sqrt{9 + (a+b+c)^2} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 3.9. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{b+c}\sqrt{(b+c)^2 + a^4} + \frac{1}{c+a}\sqrt{(c+a)^2 + b^4} +$$
$$+ \frac{1}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 + c^4} \geqslant \sqrt{9 + \frac{1}{4}(a+b+c)^2}.$$

Giải

Ta có

$$P = \sqrt{1 + \frac{a^4}{(b+c)^2}} + \sqrt{1 + \frac{b^4}{(c+a)^2}} + \sqrt{1 + \frac{c^4}{(a+b)^2}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \sqrt{9 + \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right)^2} \geqslant \sqrt{9 + \frac{1}{4}(a+b+c)^2}.$$

Ví dụ 3.10. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1+a^3} + \sqrt[3]{1+b^3} + \sqrt[3]{1+c^3} \geqslant \sqrt[3]{1 + (\frac{a+2b}{3})^3} +$$
$$+ \sqrt[3]{1 + (\frac{b+2c}{3})^3} + \sqrt[3]{1 + (\frac{c+2a}{3})^3}.$$

Giải

Ta có

$$\sqrt[3]{1+a^3}+\sqrt[3]{1+b^3}+\sqrt[3]{1+b^3} \geqslant \sqrt[3]{27+(a+b+b)^3} = \sqrt[3]{27+(a+2b)^3}$$

$$\sqrt[3]{1+b^3}+2\sqrt[3]{1+c^3} \geqslant \sqrt[3]{27+(b+2c)^3}$$

$$\sqrt[3]{1+c^3}+2\sqrt[3]{1+a^3} \geqslant \sqrt[3]{27+(c+2a)^3}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{4+b^2} + \sqrt{9+c^2} \geqslant \sqrt{36+(a+b+c)^2}.$$

Bài 2. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \sqrt{1+(a^2+2\sqrt{b})^2} + \sqrt{1+(b^2+2\sqrt{c})^2}+$$

$$+\sqrt{1+(c^2+2\sqrt{a})^2} \geqslant 3\sqrt{1+(a+b+c)^2}.$$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt[4]{1+\sin^8 x} + \sqrt[4]{1+\cos^8 x}.$$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt[3]{1+\sin^6 x} + \sqrt[3]{8+\sin^6 x}.$$

Bài 5. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao hạ từ các đỉnh tương ứng A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng

$$P = \sqrt[3]{1+\frac{1}{h_a^3}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{h_b^3}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{h_c^3}} \geqslant \sqrt[3]{27+\frac{1}{r^3}}.$$

Bài 6. Gọi r, R, p tương ứng là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp và nửa chu vi ΔABC. Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \geqslant \sqrt{9+(\frac{r+4R}{p})^2}.$$

Bài 7. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \sqrt{a^2+b^2+ab} + \sqrt{b^2+c^2+bc} + \sqrt{c^2+a^2+ca} \geqslant \sqrt{3}(a+b+c).$$

Bài 8. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+b^2+4ab}+\sqrt{b^2+c^2+4bc}+\sqrt{c^2+a^2+4ca} \le \sqrt{6}(a+b+c).$$

Bài 9. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \sqrt[3]{7a^3+2b^3+9ab^2}+\sqrt[3]{7b^3+2c^3+9bc^2}+$$
$$+\sqrt[3]{7c^3+2a^3+9ca^2} \geqslant \sqrt[3]{18}(a+b+c).$$

Bài 10. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{b(2a-b)(2a^2+b^2-2ab)}+\sqrt[4]{c(2b-c)(2b^2+c^2-2bc)}+$$
$$+\sqrt[4]{a(2c-a)(2c^2+a^2-2ca)} \le a+b+c.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$P=\sqrt{1+a^2}+\sqrt{2^2+b^2}+\sqrt{3^2+c^2} \geqslant \sqrt{(1+2+3)^2+(a+b+c)^2}$$
$$\Leftrightarrow P \geqslant \sqrt{36+(a+b+c)^2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.
Ta có

$$P \geqslant \sqrt{9+(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c})^2}$$

Ta có

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a} \geqslant 3a$$
$$b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b} \geqslant 3b$$
$$c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c} \geqslant 3c$$

Suy ra

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c} \geqslant 3(a+b+c)$$

Vậy

$$P \geqslant \sqrt{9+9(a+b+c)^2} = 3\sqrt{1+(a+b+c)^2}.$$

Bài 3.
Ta có

$$y = \sqrt[4]{1+(\sin^2 x)^4} + \sqrt[4]{1+(\cos^2 x)^4} \geqslant \sqrt[4]{16+(\sin^2 x+\cos^2 x)^4}$$

Suy ra $\quad y_{min} = \sqrt[4]{17}$ (đạt khi $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$).

Bài 4.
Ta có

$$y = \sqrt[3]{1+(\sin^2 x)^3} + 2\sqrt[3]{1+\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)^3}$$

Suy ra

$$y \geqslant \sqrt[3]{27+(\sin^2 x+\cos^2 x)^3} = \sqrt[3]{28}$$

(đạt khi $2\sin^2 x = \cos^2 x$).

Bài 5.
Ta có

$$P \geqslant \sqrt[3]{27+\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^3} = \sqrt[3]{27+\frac{1}{r^3}}.$$

Bài 6.
Ta có

$$P = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \sqrt{9+\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2} = \sqrt{9+(\frac{r+4R}{p})^2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 7.
Cách 1.
Ta có

$$P = \sqrt{(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}} + \sqrt{(b+\frac{c}{2})^2+\frac{3c^2}{4}} + \sqrt{(c+\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \sqrt{[\frac{3}{2}(a+b+c)]^2 + [\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)]^2} =$$

$$= \sqrt{3(a+b+c)^2} = \sqrt{3}(a+b+c)$$

Cách 2.
Ta có

$$a^2 + b^2 + ab = \frac{3}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 \geqslant \frac{3}{4}(a+b)^2$$

Suy ra

$$\sqrt{a^2+b^2+ab} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$$

Vậy thu được

$$P \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b) + \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c) + \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a) = \sqrt{3}(a+b+c).$$

Bài 8.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2ab} + \sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + 2bc} +$$

$$+ \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 2ca} \leq \sqrt{3}(a+b+c)$$

Ta có

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2ab = \frac{3}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 \leq \frac{3}{4}(a+b)^2$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2ab} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$$

Vậy $P \leq \sqrt{3}(a+b+c)$.

Bài 9.
Ta có

$$7a^3 + 2b^3 + 9ab^2 \geqslant 2(a+b)^3 + 2a^3$$

Tương tự ta có

$$7b^3 + 2c^3 + 9bc^2 \geqslant 2(b+c)^3 + b^3$$

$$7c^3 + 2a^3 + 9ca^2 \geqslant 2(c+a)^3 + c^3$$

Suy ra

$$\frac{P}{\sqrt[3]{2}} \geqslant \sqrt[3]{(a+b)^3 + a^3} + \sqrt[3]{(b+c)^3 + b^3} + \sqrt[3]{(c+a)^3 + c^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác trong ví dụ 3.4 ta thu được

$$\frac{P}{\sqrt[3]{2}} \geqslant \sqrt[3]{8(a+b+c)^3 + (a+b+c)^3} = \sqrt[3]{9}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \sqrt[3]{18}(a+b+c) \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 10.
Ta có

$$b(2a-b)(2a^2+b^2-2ab) = (a+(a-b)(a-(a-b))(a^2+(a-b)^2) =$$

$$= a^4 - (a-b)^4 \leq a^4$$

Suy ra

$$\sqrt[4]{b(2a-b)(2a^2+b^2-2ab)} \leq a$$

Tương tự

$$\sqrt[4]{c(2b-c)(2b^2+c^2-2bc)} \leq b$$

$$\sqrt[4]{a(2c-a)(2c^2+a^2-2ca)} \leq c$$

Cộng vế với vế ba đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

4 Dạng hằng đẳng thức của Bất đẳng thức Bunhiacôpxki

Từ hằng đẳng thức

$$(2x+2y-z)^2+(2y+2z-x)^2+(2z+2x-y)^2 = 9(x^2+y^2+z^2) \quad (4.1).$$

Chúng ta xây dựng các bất đẳng thức dạng hệ quả của Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cop-ski .

Ví dụ 4.1. Giả sử a, b, c, x, y, z là những số thực dương, chứng minh rằng

$$ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z) \quad (4.2)$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}
&c(2x+2y-z)+a(2y+2z-x)+b(2z+2x-y)\\
=&c(2x+2y+2z-3z)+a(2y+2z+2x-3x)+b(2z+2x+2y-3y)\\
=&2(a+b+c)(x+y+z)-3(ax+by+cz)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$(2(a+b+c)(x+y+z)-3(ax+by+cz))^2 \le 9(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

(Sử dụng đẳng thức (4.1))

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(x+y+z)-3(ax+by+cz) \le$$

$$\le 3\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z) \le$$

$$\le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}+ax+by+cz \quad \text{(đpcm)}.$$

Từ hằng đẳng thức

$$(x+y+z-t)^2+(y+z+t-x)^2+(z+t+x-y)^2+$$
$$+(t+x+y-z)^2=4(x^2+y^2+z^2+t^2) \qquad (4.3)$$

Ta xây dựng được bất đẳng thức

Ví dụ 4.2. Giả sử $a,b,c,d,x,y,z,t \in R$, chứng minh rằng

$$(ax+by+cz+dt)+\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(a+b+c+d)(x+y+z+t) \quad (4.4)$$

Giải

Ta có

$$P=d(x+y+z-t)+a(y+z+t-x)+b(z+t+x-y)+c(t+x+y-z)$$

Suy ra

$$P=d(x+y+z+t-2t)+a(y+z+t+x-2x)+$$
$$+b(z+t+x+y-2y)+c(t+x+y+z-2z)$$
$$P=(a+b+c+d)(x+y+z+t)-2(ax+by+cz+dt)$$

Suy ra

$$P^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$$

(Sử dụng bất đẳng thức (4.3))

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)}+(ax+by+cz+dt) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(a+b+c+d)(x+y+z+t) \quad \text{(đpcm)}.$$

Áp dụng dạng hệ quả trên chúng ta giải một số bài toán sau:

Ví dụ 4.3. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$3 + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})} \geqslant \frac{2}{3}(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}).$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức (4.2) với $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$.

Ví dụ 4.4. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$3\sqrt{(b^2 + c^2 + 1)(a^2 + 2)} \geqslant 4 + (b + c)(2a + 1) - a.$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức (4.2) trong đó

$$x = y = 1, z = a$$

$$a = b, b = c, c = 1$$

ta thu được

$$b + c - a + \sqrt{(b^2 + c^2 + 1)(2 + a^2)} \geqslant \frac{2}{3}(b + c + 1)(2 + a)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(b^2 + c^2 + 1)(a^2 + 2)} \geqslant 4 + (b + c)(2a + 1) - a$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.5. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{(a^2 + 2)(b^2 + 2)} + \sqrt{(b^2 + 2)(c^2 + 2)} + \sqrt{(c^2 + 2)(a^2 + 2)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{8}{3}(a + b + c) - \frac{1}{3}(ab + bc + ca) + 2.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (4.2) trong đó

$$a = a, b = c = 1$$

$$x = b, y = z = 1$$

ta nhận được

$$3\sqrt{(a^2+2)(b^2+2)} \geqslant 4(a+b) - ab + 2$$

Tương tự ta có

$$3\sqrt{(b^2+2)(c^2+2)} \geqslant 4(b+c) - bc + 2$$

$$3\sqrt{(c^2+2)(a^2+2)} \geqslant 4(c+a) - ca + 2$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử a, b là những số thực dương, chứng minh rằng

$$3\sqrt{(2a^2+1)(2b^2+1)} \geqslant 2ab + 4(a+b) - 1.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$2s(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}) + \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2})} \geqslant \frac{4p}{3r}.$$

Bài 3. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$3 + 2\sqrt{(3a^2+1)(3b^2+1)} + 2\sqrt{(3b^2+1)(3c^2+1)} +$$
$$+2\sqrt{(3c^2+1)(3a^2+1)} \geqslant 3(ab+bc+ca) + 6(a+b+c).$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Sử dụng bất đẳng thức (4.2) với

$$a = b = a, c = 1$$

$$x = y = b, z = 1$$

ta nhận được

$$2ab + 1 + \sqrt{(2a^2+1)(2b^2+1)} \geqslant \frac{2}{3}(2a+1)(2b+1)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(2a^2+1)(2b^2+1)} \geqslant 2ab + 4(a+b) - 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.
Áp dụng bất đẳng thức (4.2) với $x = h_a, y = h_b, z = h_c$ ta có

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} + \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})$$

Sử dụng đẳng thức

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

ta thu được

$$2s(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2})+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2})}\geqslant\frac{4p}{3r}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 3.
Áp dụng bất đẳng thức (4.4) với

$$a=b=c, d=1$$

$$x=y=z=b, t=1$$

ta nhận được

$$1+2\sqrt{(3a^2+1)(3b^2+1)}\geqslant 3ab+3(a+b)$$

Tương tự ta có

$$1+2\sqrt{(3b^2+1)(3c^2+1)}\geqslant 3bc+3(b+c)$$

$$1+2\sqrt{(3c^2+1)(3a^2+1)}\geqslant 3ca+3(c+a)$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

5 Sử dụng công thức tính tổng hữu hạn trong Bất đẳng thức Bunhiacopski

Trong bài giảng này chúng ta sử dụng các công thức tính tổng hữu hạn và bất đẳng thức Bunhiacopski xây dựng một số dạng bất đẳng thức.

Ví dụ 5.1. Giả sử $a_i \in R^+ \quad (i = \overline{0, n})$, chứng minh rằng

$$2^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i^2}{C_n^i} \geqslant \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)^2.$$

trong đó $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ là số tổ hợp chập i của tập hợp gồm n phần tử.

Giải

Ta có công thức

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$$

suy ra

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{C_n^i}}\sqrt{C_n^i}\Big)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i^2}{C_n^i} \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i$$

$$\Leftrightarrow 2^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i^2}{C_n^i} \geqslant \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 5.2. Giả sử $a_i \in R^+ \quad (i = \overline{0, n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{i(i+1)(i+2)} \geqslant \frac{4\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Giải

Ta ký hiệu

$$S = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{S}{3!} = C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + \cdots + C_{n+2}^3$$
$$= C_4^0 + C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 + \cdots + C_{n+2}^{n-1}$$

Áp dụng công thức

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

ta thu được

$$\frac{S}{3!} = C_{n+3}^{n-1} = C_{n+3}^4 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!}$$

Suy ra $S = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4}.$

Ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{i(i+1)(i+2)}}\sqrt{i(i+1)(i+2)}\Big)^2 \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i(i+1)(i+2)} \cdot \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2)$$
$$= \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i(i+1)(i+2)} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i(i+1)(i+2)} \geqslant \frac{4\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 5.3. Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \sqrt{n}$$

Giải

Ta có

$$P^2 = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1}\Big)^2 \leq n\Big(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\Big)$$

Ta có

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Suy ra

$$P^2 \leq n\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = n(1 - \frac{1}{n+1}) < n$$

Suy ra $\quad P < \sqrt{n} \quad$ (đpcm).

Ví dụ 5.4. Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{4}}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{4}}} < \sqrt{2n}.$$

Giải

Ta có

$$P^2 \leq n\Big(\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\Big)$$

Ta có

$$\frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\cdot\sqrt{k+1}}$$

Suy ra

$$\frac{1}{2(k+1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\cdot 2\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

Suy ra

$$\frac{1}{2(k+1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Suy ra

$$P^2 \leq 2n\Big(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)$$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq 2n(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}) < 2n \Leftrightarrow P < \sqrt{2n} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 5.5. Giả sử $x_i \in R^+ \quad (i = \overline{0,n})$, chứng minh rằng

$$P = \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \frac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Giải

Ta có

$$P^2 < n\left(\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_m^2}\right)\right)^2$$

Ta có

$$\left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}\right)^2 < \frac{x_k^2}{(1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2)(1+x_1^2+\cdots-x_k^2)}$$

$$< \frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}$$

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2 \leq \frac{x_1^2}{1(1+x_1^2)} = 1 - \frac{1}{1+x_1^2}$$

Suy ra

$$P^2 < n\left(1 - \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_1^2} - \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{1}{1+x_1^2+\cdots x_{n-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow P^2 < n\left(1 - \frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}\right) < n \Leftrightarrow P < \sqrt{n} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 5.6. Chứng minh rằng

$$C_{2n}^n\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\right) > \left(\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\right)^2.$$

Ở đây C_n^k là số tổ hợp chập k của tập hợp gồm n phần tử.

Giải

Ta có

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Ta có

$$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i = \sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^j x^j$$

Đồng nhất hệ số bậc n ở hai vế của đẳng thức ta thu được

$$C_{2n}^n = C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \cdots + C_n^n C_n^0$$

$$= (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$$

Ta có

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}\Big)^2 \le \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{k+1})^2$$

$$\Leftrightarrow \Big(\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\Big)^2 < C_{2n}^n \cdot \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{k+1})^2$$

Suy ra

$$C_{2n}^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} > \Big(\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\Big)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử $a_i \in R \quad (i = \overline{1,n})$ thoả mãn đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{2n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Bài 2. Giả sử $x_i \in R^+ \quad (i = \overline{1,n}; \quad n > 2)$ thoả mãn đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n^2 + 1.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} > n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$P = (a_{2n} - a_n) + (a_{2n-1} - a_{n-1}) + \cdots + (a_{n+1} - a_1)$$

Đặt $b_i = a_{i+1} - a_i \quad (i = \overline{1, 2n-1})$ ta có

$$\begin{aligned}
a_{2n} - a_n &= a_{2n} - a_{2n-1} + a_{2n-1} + a_{2n-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n \\
&= b_{2n-1} + b_{2n-2} + \cdots + b_n \\
a_{2n-1} - a_{n-1} &= b_{2n-2} + b_{2n-3} + \cdots + b_{n-1} \\
&\ \ \cdots \\
a_{n+1} - a_1 &= b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1
\end{aligned}$$

Suy ra

$$P = b_{2n-1} + 2b_{2n-2} + 3b_{2n-3} + \cdots + nb_n + (n-1)b_{n-1} + (n-2)b_{n-2} + 2b_2 + b_1$$

Vậy

$$P = b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n + (n-1)b_{n+1} + (n-2)b_{n+2} + \cdots + 2b_{2n-2} + b_{2n-1}$$

Áp dụng bất bất đẳng thức Bu-nhi-a-cop-ski ta có

$$P^2 \leq (1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{2n-1}^2)$$

Theo giả thiết ta có $\sum_{i=1}^{2n-1} b_i^2 = 1$.

Suy ra

$$P^2 \leq 2(1^2+2^2+\cdots+n^2) - n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n^2 = \frac{n(2n^2+1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{b_1}{1} = \frac{b_2}{2} = \cdots = \frac{b_n}{n} = \frac{b_{n+1}}{n-1} = \cdots = \frac{b_{2n-2}}{2} = \frac{b_{2n-1}}{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = b_{2n-1} = t \\ b_2 = b_{2n-2} = 2t \\ \cdots \\ b_{n-1} = b_{n+1} = (n-1)t \\ b_n = nt \\ b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2n-1}^2 = 1 \end{cases}$$

Suy ra

$$t^2[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2] = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{3}{n(2n^2+1)}}.$$

Bài 2.
Ta có

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)^2=$$

$$=\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_i^2}{x_j^2}+\frac{x_j^2}{x_i^2}-4\frac{x_i}{x_j}-4\frac{x_j}{x_i}+6\right)$$

$$=\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i^2}\Big)-4\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\Big)+3n^2$$

Áp dụng bất bất đẳng thức Bu-nhi-a-cop-ski ta có

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)^2\geqslant\frac{2}{n(n-1)}$$

Suy ra

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i^2}\Big)\geqslant n^2+4+\frac{2}{n(n-1)}$$

Đẳng thức không xảy ra vì khi $x_1=x_2=\cdots=x_n$ thì

$$\sum_{i=1}^n x_i\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\neq n^2+1$$

Vậy ta có

$$\sum_{i=1}^n x_i^2\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i^2}>n^2+4+\frac{2}{n(n-1)}\quad\text{(đpcm).}$$

6 Bất đẳng thức Bunhiacôpxki và một số dạng bất đẳng thức chứa căn thức

Một số bất đẳng thức chứa căn thức có thể sử dụng bất đẳng thức dạng trung bình hoặc bất đẳng thức Bunhiacôpxki để chứng minh.

Ví dụ (IMO 2001). Giả sử a, b, c là những số thực dương chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geqslant 1.$$

Giải

Cách 1 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki).
Ta có

$$P = \frac{a^2}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a(a^2 + 8bc)}} + \frac{b^2}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{(b^2 + 8ca)}} + \frac{c^2}{c \cdot \sqrt{(c^2 + 8ab)}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}} = \frac{(a+b+c)^2}{S},$$

trong đó $S = a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}$.

Ta có

$$\begin{aligned} S^2 &= (\sqrt{a}\sqrt{a(a^2 + 8bc)} + \sqrt{b}\sqrt{b(b^2 + 8ca)} + \sqrt{c}\sqrt{c(c^2 + 8ab)})^2 \\ &\leq (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &\geqslant a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \end{aligned}$$

Suy ra

$$S^2 \leq (a+b+c)^4 \Leftrightarrow S \leq (a+b+c)^2$$

Vậy $\quad P \geqslant \dfrac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1 \quad$ (đpcm).

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức trung bình).
Ta có

$$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2-(a^{\frac{4}{3}})^2=(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})$$

mà

$$a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\geqslant 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$$
$$b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\geqslant 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2-(a^{\frac{1}{3}})^2\geqslant 8a^{\frac{2}{3}}bc\\
&\Leftrightarrow (a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\geqslant (a^{\frac{4}{3}})^2+8a^{\frac{2}{3}}bc\geqslant a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)\\
&\Leftrightarrow a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\geqslant a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^2+8bc}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}\\
&\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

Tương tự ta thu được

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\geqslant \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \qquad (6.2)$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \qquad (6.3)$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Từ hai cách giải trên ta nhận thấy khi chúng ta chứng minh các bất đẳng thức dạng căn thức thì sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki tiện ích hơn nhiều.

Ví dụ 6.2 (China 2004). Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Giải

Ta có

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Đặt $x = \frac{b^2}{a^2}, y = \frac{c^2}{b^2}, z = \frac{a^2}{c^2}$ ta thu được bài toán tương đương sau:

Giả sử $x, y, z > 0, xyz = 1$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Không giảm tổng quát, giả sử $z \geqslant 1$, suy ra $xy \le 1$ ta có

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \le \frac{2}{1+xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+x^2y^2} \le \frac{2}{1+xy}$$

$$\Leftrightarrow 2+2xy+(x^2+y^2)+xy(x^2+y^2) \le 2+2(x^2+y^2)+2x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(1-xy)+2xy(xy-1) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (1-xy)(x-y)^2 \geqslant 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng vì } xy \le 1)$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le 2\sqrt{\frac{\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}}{2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$$

Vậy ta có

$$P \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{z}}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{z+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

Ta có

$$1 + z^2 \geqslant \frac{1}{2}(z+1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{z+1}$$

Suy ra

$$P \leq \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{z+1}} + \frac{\sqrt{2}}{z+1} = \frac{2\sqrt{z(z+1)} + \sqrt{2}}{z+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2z(z+1)} + 1)}{z+1}$$

Suy ra

$$P \leq \frac{\sqrt{2}}{z+1}\left(\frac{2z + z + 1}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{z+1} \cdot \frac{3(z+1)}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Từ bất đẳng thức trên ta có thể mở rộng và thu được các bất đẳng thức sau đây:

Ví dụ 6.3. Giả sử $a \geqslant b \geqslant c > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+c^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+a^3}} \leq \frac{3}{\sqrt[3]{2}}.$$

Giải

Trước hết chúng ta chứng minh bất đẳng thức trung gian sau:

Giả sử $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$, chứng minh rằng

$$M = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+c^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+d^3}} + \frac{a}{\sqrt[3]{d^3+a^3}} \leq \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{b^3}{a^3}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{c^3}{b^3}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{d^3}{c^3}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{a^3}{d^3}}}$$

Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{d}{c}, t = \frac{a}{d}$. Từ điều kiện thứ tự ta nhận được

$$0 < x, y, z \leq 1, \quad t > 1, \quad xyzt = 1$$

$$M = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+z^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}} \leq \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

Vì $0 < x, y, z \leq 1$ ta có

$$\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} \leq \frac{3}{1+xyz} \qquad (6.4)$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} + \frac{1}{1+xyz} \leq \frac{4}{1+xyz}$$

Ta có

$$B \leq \frac{2}{1+(xy)^{3/2}} + \frac{2}{1+z^{3/2}(xyz)^{1/2}} \leq \frac{4}{1+xyz} \quad \text{(đpcm)}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+z^3}} \leq$$

$$\leq 3\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3}}{3}} \qquad (6.5)$$

Từ các bất đẳng thức (6.4),(6.5) ta suy ra

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+z^3}} \leq \frac{3}{\sqrt[3]{1+xyz}}$$

thu được

$$M \leq \frac{3}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{t}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}} = \frac{3\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}}$$

Ta có

$$1+t^3 \geqslant 2\left(\frac{1+t}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}(1+t)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1+t^3} \geqslant \frac{1+t}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}} \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{t+1}$$

Suy ra

$$M \leq \frac{3\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t+1}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{t+1} = \frac{3\sqrt[3]{t(t+1)^2} + \sqrt[3]{4}}{t+1}$$

Vì

$$\sqrt[3]{t(t+1)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{2t(t+1)^2} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{2t+t+1+t+1}{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{4t+2}{3}$$

Suy ra

$$M \le \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(4t+2)+\sqrt[3]{4}}{t+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{4t+4}{t+1} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trung gian khi cho $c = d$ ta thu được

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+c^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{2c^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+a^3}} \le \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+c^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+a^3}} \le \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bây giờ chúng ta xét một số bất đẳng thức có điều kiện.

Ví dụ 6.4. Giả sử x, y, z là những số thực dương thoả mãn

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{2x-y} + \sqrt{2y-z} + \sqrt{2z-x} \le \sqrt{3(x+y+z)}.$$

Giải

Từ điều kiện của bài toán ta có

$$\frac{2x-y}{x} + \frac{2y-z}{y} + \frac{2z-x}{z} = 6 - \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) = 3.$$

Ta có

$$(\sqrt{2x-y} + \sqrt{2y-z} + \sqrt{2z-x})^2 =$$

$$=\left(\sqrt{x}\sqrt{\frac{2x-y}{x}}+\sqrt{y}\sqrt{\frac{2y-z}{y}}+\sqrt{z}\sqrt{\frac{2z-x}{z}}\right)^2\leq 3(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-y}+\sqrt{2y-z}+\sqrt{2z-x}\leq\sqrt{3(x+y+z)}\quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 6.5. Giả sử x, y, z là những số thực dương thoả mãn các điều kiện

$$x\leq 2z,\ z\leq 2y,\ y\leq 2x,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{2y-z}+\sqrt[3]{2z-x}\leq\sqrt[3]{9(xy+yz+zx)}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{2x-y}{xy}+\frac{2y-z}{yz}+\frac{2z-x}{zx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$$

Ta có

$$(\sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{2y-z}+\sqrt[3]{2z-x})^3=$$

$$\left(\sqrt[3]{xy}\sqrt[3]{\frac{2x-y}{xy}}\cdot 1+\sqrt[3]{yz}\sqrt[3]{\frac{2y-z}{yz}}\cdot 1+\sqrt[3]{zx}\sqrt[3]{\frac{2z-x}{zx}}\cdot 1\right)^3\leq$$

$$\leq 3(xy+yz+zx)3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{2y-z}+\sqrt[3]{2z-x}\leq\sqrt[3]{9(xy+yz+zx)}\quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 6.6. Giả sử x, y, z là những số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{3}{2}.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geqslant\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)+\frac{9}{2}}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)=\frac{3}{2}$$

Ta có

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=\left(\sqrt{x+1}\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\sqrt{y+1}\sqrt{\frac{y}{y+1}}+\sqrt{z+1}\sqrt{\frac{z}{z+1}}\right)^2$$

$$\leq \frac{3}{2}(x+y+z+3)$$

Suy ra

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)+\frac{9}{2}}\quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 6.7. Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thoả mãn

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2}.$$

Chứng minh rằng

$$P=\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{3(a+b+c)}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{a+b-c}{a+b}+\frac{b+c-a}{b+c}+\frac{c+a-b}{c+a}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Suy ra

$$(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b})^2=$$

$$=\left(\sqrt{a+b}\sqrt{\frac{a+b-c}{a+b}}+\sqrt{b+c}\sqrt{\frac{b+c-a}{b+c}}+\sqrt{c+a}\sqrt{\frac{c+a-b}{c+a}}\right)^2$$

$$\leq 2(a+b+c)\frac{3}{2}$$

Suy ra $\quad P\leq\sqrt{3(a+b+c)}.$

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng với a, b, c là các cạnh, p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC ta có

$$\frac{1}{\sqrt{p-a}} + \frac{1}{\sqrt{p-b}} + \frac{1}{\sqrt{p-c}} \leq \frac{\sqrt{p}}{r}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với A, B, C là các góc của ΔABC ta có

$$P = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} \leq$$
$$\leq \sqrt{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}.$$

Bài 3. Giả sử $a \geqslant b \geqslant c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[4]{a^4+b^4}} + \frac{b}{\sqrt[4]{b^4+c^4}} + \frac{c}{\sqrt[4]{c^4+a^4}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[4]{2}}.$$

Bài 4. Giả sử $a \geqslant b \geqslant c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} + \frac{b}{\sqrt[n]{b^n+c^n}} + \frac{c}{\sqrt[n]{c^n+a^n}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[n]{2}} \quad (n \geqslant 2).$$

Bài 5. Chứng minh rằng

$$P = \sqrt{h_a+h_b} + \sqrt{h_b+h_c} + \sqrt{h_c+h_a} \leq \sqrt{\frac{2}{r}}\sqrt{h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a}.$$

Trong đó h_a, h_b, h_c là các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C và r là bán kính đường cao nội tiếp ΔABC.

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}=\frac{1}{r^2}$$

Suy ra

$$\left(\sqrt{\frac{1}{p-a}}+\sqrt{\frac{1}{p-b}}+\sqrt{\frac{1}{p-c}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{p-b}\frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}+\sqrt{p-c}\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{p-a}\frac{1}{\sqrt{(p-c)(p-a)}}\right)^2\le p\cdot\frac{1}{r^2}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{p-a}}+\frac{1}{\sqrt{p-b}}+\frac{1}{\sqrt{p-c}}\le\frac{\sqrt{p}}{r}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 2.
Ta có

$$P^2=\left(\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\sqrt{\cos\frac{C}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\sqrt{\cos\frac{A}{2}}\right)^2$$

Suy ra

$$P^2\le 1\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\le\sqrt{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 3.
Ta chứng minh bất đẳng thức trung gian sau:
Giả sử $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{\sqrt[4]{a^4+b^4}} + \frac{b}{\sqrt[4]{b^4+c^4}} + \frac{c}{\sqrt[4]{c^4+d^4}} + \frac{d}{\sqrt[4]{d^4+e^4}} + \frac{e}{\sqrt[4]{e^4+a^4}} \geqslant \frac{5}{\sqrt[4]{2}} \tag{6.6}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{b^4}{a^4}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{c^4}{b^4}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{d^4}{c^4}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{e^4}{d^4}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{a^4}{e^4}}} \geqslant \frac{5}{\sqrt[4]{2}}$$

Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{d}{c}, t = \frac{e}{d}, u = \frac{a}{e}$ ta có

$0 < x, y, z, t \leq 1,\ u \geqslant 1$ và $xyztu = 1$.

$$P = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+y^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+z^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+t^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+u^4}}$$

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+y^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+z^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+t^4}} \leq$$

$$\leq 4\sqrt[4]{\frac{\frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4} + \frac{1}{1+t^4}}{4}}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+y^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+z^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+t^4}} \leq \frac{4}{\sqrt[4]{1+xyzt}} = \frac{4}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{u}}}$$

Thu được

$$P \leq \frac{4\sqrt[4]{u}}{\sqrt[4]{u+1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+u^4}}$$

Ta có

$$1 + u^4 \geqslant 2(\frac{1+u}{2})^4 = \frac{1}{8}(1+u)^4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{1+u^4} \geqslant \frac{1}{\sqrt[4]{8}}(1+u) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{1+u^4}} \leq \frac{\sqrt[4]{8}}{1+u}$$

Suy ra

$$P \leq \frac{4\sqrt[4]{u}}{\sqrt[4]{u+1}} + \frac{\sqrt[4]{8}}{u+1} = \frac{4\sqrt[4]{u(u+1)^3} + \sqrt[4]{8}}{u+1}$$

Ta có

$$\sqrt[4]{u(u+1)^3} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\sqrt[4]{2u(u+1)^3} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{2u+3(u+1)}{4} = \frac{5u+3}{4\sqrt[4]{2}}$$

Suy ra

$$P \leq \frac{\frac{5u+3}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{8}}{u+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{5(u+1)}{(u+1)} = \frac{5}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{(đpcm).}$$

Áp dụng bất đẳng thức (6.6) với $c = d = e$ ta thu được

$$\frac{a}{\sqrt[4]{a^4+b^4}} + \frac{b}{\sqrt[4]{b^4+c^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{c}{\sqrt[4]{c^4+a^4}} \geqslant \frac{5}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt[4]{a^4+b^4}} + \frac{b}{\sqrt[4]{b^4+c^4}} + \frac{c}{\sqrt[4]{c^4+a^4}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[4]{2}}.$$

Bài 4.
Tương tự ví dụ 6.3 và bài tập 3 chúng ta chứng minh kết quả trung gian sau:
Giả sử $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_{n+1} > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_2^n + a_3^n}} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{\sqrt[n]{a_{n+1}^n + a_1^n}} \geqslant \frac{n+1}{\sqrt[n]{2}}$$

Sau đó áp dụng bất đẳng thức trên với
$a_1 = a, a_2 = b, a_3 = a_4 = \cdots = a_{n+1} = c$, chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 5.

Vì $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ suy ra

$$\frac{h_a + h_b}{h_a h_b} + \frac{h_b + h_c}{h_b h_c} + \frac{h_c + h_a}{h_c h_a} = \frac{2}{r}$$

Ta có

$$P^2 = \left(\sqrt{\frac{h_a + h_b}{h_a h_b}}\sqrt{h_a h_b} + \sqrt{\frac{h_b + h_c}{h_b h_c}}\sqrt{h_b h_c} + \sqrt{\frac{h_c + h_a}{h_c h_a}}\sqrt{h_c h_a}\right)^2$$

$$\leq \frac{2}{r}(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a)$$

$$\Leftrightarrow P \leq \sqrt{\frac{2}{r}} \cdot \sqrt{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a} \quad \textbf{(đpcm).}$$

7 Phép biến đổi thuận

Trong bài giảng này chúng ta trình bày một phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki giải một số bất đẳng thức. Khá nhiều bất đẳng thức trong các kỳ thi quốc tế, thi vô địch các quốc gia được giải một cách dễ dàng bằng phương pháp mà chúng ta trình bày trong bài giảng này.
Phép biến đổi sử dụng biểu thức dạng $(ax+by+cz)^2$ mô tả các biểu thức trong các bất đẳng thức chúng ta gọi là biến đổi thuận Bunhiacôpxki. Những bất đẳng thức dạng phân thức có bậc ở mẫu số lớn hơn hoặc bằng bậc ở tử số thường được chứng minh bằng phép biến đổi thuận Bunhiacôpxki .

I. Phương pháp giải (biến đổi thuận Bunhiacôpxki)
1. Để tìm biểu thức xuất phát chúng ta bỏ đi những thừa số phức tạp (biểu thức có phép toán cộng). Giảm một bậc đối với thừa số bậc lẻ ở mẫu số, tăng một bậc đối với thừa số bậc lẻ ở tử số. Khai căn bậc 2 khi các thừa số đều bậc chẵn ta thu được biểu thức xuất phát cần tìm.

2. Biểu diễn các số hạng ở biểu thức xuất phát dưới dạng tích của luỹ thừa $\frac{1}{2}$ của từng số hạng trong bất đẳng thức và một thừa số.

3. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cùng với một số bất đẳng thức trung gian cần thiết.

Sau đây chúng ta xét các bài giải mẫu:

Ví dụ 7.1. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng
$$P=\frac{a}{b^2(c+a)}+\frac{b}{c^2(a+b)}+\frac{c}{a^2(b+c)}\geqslant\frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Giải

Phương pháp giải

1. Từ số hạng $\frac{a}{b^2(c+a)}$ ta bỏ thừa số phức tạp $c+a$. Giảm một bậc của b^2 và khai căn ta thu được $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Biểu thức xuất phát là

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2.$$

2. Ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a}{b^2(c+a)}}\cdot\sqrt{b(c+a)}$$

trong đó $\sqrt{\dfrac{a}{b^2(c+a)}}$ là căn bậc hai của một số hạng trong bất đẳng thức.

3. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có phương pháp giải như sau:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{b^2(c+a)}}\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{\frac{b}{c^2(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{c}{a^2(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}\right)^2\leq P\cdot 2(ab+bc+ca)$$

Vì $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{c}}+\sqrt{\dfrac{c}{a}}\geqslant 3$ ta suy ra

$$P\geqslant\frac{9}{2(ab+bc+ca)}\quad\text{(đpcm).}$$

Ví dụ 7.2. Giả sử a,b,c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P=\frac{a^3c}{b^5(a+c)}+\frac{b^3a}{c^5(b+a)}+\frac{c^3b}{a^5(c+b)}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

Giải

1. Từ số hạng $\dfrac{a^3c}{b^5(a+c)}=\dfrac{a^2}{b^5(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})}$ bỏ thừa số phức tạp $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$ và tăng b^5 thành b^6 và khai căn ta thu được $\dfrac{a}{b^3}$ và biểu thức xuất phát là

$$\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\right)^2.$$

2. Ta có

$$\frac{a}{b^3} = \frac{a}{b^3\sqrt{\frac{1}{b}(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})}} \cdot \sqrt{\frac{1}{b}(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})}.$$

3. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có phương pháp giải như sau:

$$\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\right)^2 = \left(\frac{a}{b^3\sqrt{\frac{1}{b}(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})}}\sqrt{\frac{1}{b}(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})}+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{c^3\sqrt{\frac{1}{c}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}}\sqrt{\frac{1}{c}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}+\frac{c}{a^3\sqrt{\frac{1}{a}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}}\sqrt{\frac{1}{a}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}\right)^2 \leq$$

$$\leq P \cdot 2(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$$

Vì $\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)^2$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}).$$

Ví dụ 7.3. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b(b+2c)}+\frac{b^2}{c(c+2a)}+\frac{c^2}{a(a+2b)} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{b(b+2c)}}\sqrt{b(b+2c)}+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{\sqrt{c(c+2a)}}\sqrt{c(c+2a)}+\frac{c}{\sqrt{a(a+2b)}}\sqrt{a(a+2b)}\right)^2$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq P(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$= P(a+b+c)^2 \Leftrightarrow P \geqslant 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.4. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{bc^2}{a^2(b+2c)} + \frac{ca^2}{b^2(c+2a)} + \frac{ab^2}{c^2(a+2b)} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 = \left(\frac{1}{a\sqrt{a^2b(b+2c)}}\sqrt{a^2b(b+2c)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{b\sqrt{b^2c(c+2a)}}\sqrt{b^2c(c+2a)}+\frac{1}{c\sqrt{c^2a(a+2b)}}\sqrt{c^2a(a+2b)}\right)^2$$

Suy ra

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 \leq (\frac{1}{a^4b(b+2c)}+\frac{1}{b^4c(c+2a)}+\frac{1}{c^4a(a+2b)})(ab+bc+ca)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^4b(b+2c)}+\frac{1}{b^4c(c+2a)}+\frac{1}{c^4a(a+2b)} \geqslant \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc^2}{a^2(b+2c)} + \frac{ca^2}{b^2(c+2a)} + \frac{ab^2}{c^2(a+2b)} \geqslant 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.5. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{ab}{ab+2c^2} + \frac{bc}{bc+2a^2} + \frac{ca}{ca+2b^2} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2=\left(\frac{a}{b\sqrt{a(\frac{a}{b^2}+\frac{2}{c})}}\sqrt{a(\frac{a}{b^2}+\frac{2}{c})}+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{c\sqrt{b(\frac{b}{c^2}+\frac{2}{a})}}\sqrt{b(\frac{b}{c^2}+\frac{2}{a})}+\frac{c}{a\sqrt{c(\frac{c}{a^2}+\frac{2}{b})}}\sqrt{c(\frac{c}{a^2}+\frac{2}{b})}\right)^2$$

Suy ra

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2\leq P\cdot(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2\Leftrightarrow P\geqslant 1\quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.6. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P=\frac{a^4}{b^3(a+c)}+\frac{b^4}{c^3(a+b)}+\frac{c^4}{a^3(b+c)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Giải

Ta có

$$(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})^2=\left(\frac{a^2}{b\sqrt{b(a+c)}}\sqrt{b(a+c)}+\right.$$

$$\left.+\frac{b^2}{c\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}+\frac{c^2}{a\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}\right)^2\leq P\cdot 2(ab+bc+ca)$$

Mặt khác ta có

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2\geqslant(a+b+c)^2$$

Suy ra

$$P\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geqslant\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}\quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.7. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P=\frac{a^6}{b(c^2+a^2)}+\frac{b^6}{c(a^2+b^2)}+\frac{c^6}{a(b^2+c^2)}\geqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{2}.$$

Giải

Ta có

$$(a^3+b^3+c^3)^2=\Big(\frac{a^3}{\sqrt{b(c^2+a^2)}}\sqrt{b(c^2+a^2)}+$$

$$+\frac{b^3}{\sqrt{c(a^2+b^2)}}\sqrt{c(a^2+b^2)}+\frac{c^3}{\sqrt{a(b^2+c^2)}}\sqrt{a(b^2+c^2)}\Big)^2$$

Suy ra

$$(a^3+b^3+c^3)^2\le P(b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2))\le P.2(a^3+b^3+c^3)$$

Suy ra

$$P\geqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{2}\quad\text{(đpcm).}$$

Ví dụ 7.8 (Rumania 2004). Giả sử a,b,c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P=\frac{a}{bc(c+a)}+\frac{b}{ca(a+b)}+\frac{c}{ab(b+c)}\geqslant\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Giải

Ta có $$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2=$$

$$=\Big(\sqrt{\frac{a}{bc(c+a)}}\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{b}{ca(a+b)}}\sqrt{a+b}+\sqrt{\frac{c}{ab(b+c)}}\sqrt{b+c}\Big)^2$$

$$\le P\cdot 2(a+b+c)$$

Ta có

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2\geqslant 3(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant\frac{27}{a+b+c}$$

Suy ra

$$\frac{27}{a+b+c}\le P\cdot 2(a+b+c)\Leftrightarrow P\geqslant\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Ví dụ 7.9 (Japan 2004). Giả sử a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$, chứng minh rằng

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leq 2(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}).$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$3+\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} \leq 2(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})$$

$$\Leftrightarrow a[\frac{1}{c}-\frac{1}{b+c}]+b[\frac{1}{a}-\frac{1}{c+a}]+c[\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}] \geqslant \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

Ta có

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2=$$
$$=\left(\sqrt{\frac{ab}{c(b+c)}}\sqrt{b+c}+\sqrt{\frac{bc}{a(c+a)}}\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{ca}{b(a+b)}}\sqrt{a+b}\right)^2 \leq$$
$$\leq P\cdot 2(a+b+c)$$

Ta có bất đẳng thức

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geqslant a+b+c$$

Suy ra

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2 \geqslant 3(a+b+c)$$

Thu được

$$3(a+b+c) \leq P\cdot 2(a+b+c) \Leftrightarrow P \geqslant \frac{3}{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.10. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{1+a} + \frac{4}{2+b} + \frac{9}{3+c} \geqslant \frac{36}{a+b+c+6}.$$

Giải

Ta có

$$36 = (1+2+3)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} + \frac{2}{\sqrt{2+b}}\sqrt{2+b} + \frac{3}{\sqrt{3+c}}\sqrt{3+c}\right)^2$$

Suy ra

$$36 \leq P(6+a+b+c) \Leftrightarrow P \geqslant \frac{36}{6+(a+b+c)} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.11. Giả sử $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$P = \frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{a+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Giải

Vì $a, b, c > 1$ suy ra $\log_b a > 0, \log_c b > 0, \log_a c > 0$

Ta có

$$(\sqrt{\log_a c} + \sqrt{\log_c b} + \sqrt{\log_b a})^2$$

$$= \left[\sqrt{\frac{\log_b a}{b+a}}\sqrt{b+a} + \sqrt{\frac{\log_c b}{c+b}}\sqrt{c+b} + \sqrt{\frac{\log_a c}{a+c}}\sqrt{a+c}\right]^2$$

$$\leq P \cdot 2(a+b+c)$$

Mặt khác

$$\left(\sqrt{\log_a c} + \sqrt{\log_c b} + \sqrt{\log_b a}\right)^2 \geqslant 9\sqrt[6]{\log_a c \log_c b \log_b a} = 9$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.12. Giả sử $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2b_2}{a_2+b_2} + \frac{a_3b_3}{a_3+b_3} \le \frac{(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)}{a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{a_1b_1}{a_1+b_1} - a_1\right) + \left(\frac{a_2b_2}{a_2+b_2} - a_2\right) + \left(\frac{a_3b_3}{a_3+b_3} - a_3\right) \le$$

$$\le \frac{(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)}{a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3} - (a_1+a_2+a_3)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \frac{a_3^2}{a_3+b_3} \geqslant \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)}$$

Ta có

$$(a_1+a_2+a_3)^2 =$$

$$= \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1+b_1}}\sqrt{a_1+b_1} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2+b_2}}\sqrt{a_2+b_2} + \frac{a_3}{\sqrt{a_3+b_3}}\sqrt{a_3+b_3}\right)^2$$

$$\le P(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3} \quad \text{(đpcm)}.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{9}{c+a} \geqslant \frac{18}{a+b+c}.$$

Bài 2. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b^2(c^3+a^3)} + \frac{b^2}{c^2(a^3+b^3)} + \frac{c^2}{a^2(b^3+c^3)} \geqslant \frac{9}{2(a^3+b^3+c^3)}.$$

Bài 3. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{ab}{c(c+b)} + \frac{bc}{a(b+c)} + \frac{ca}{b(c+a)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Bài 4. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{(b+2c)^2(c+a)} + \frac{b^2}{(c+2a)^2(a+b)} +$$

$$+ \frac{c^2}{(a+2b)^2(b+c)} \geqslant \frac{1}{2(a+b+c)}.$$

Bài 6. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^6}{cb^2(a+b)} + \frac{b^6}{ac^2(b+c)} + \frac{c^6}{ba^2(c+a)} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Bài 7. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^4}{b(c+a)(b+c)^2} + \frac{b^4}{c(a+b)(c+a)^2} + \frac{c^4}{a(b+c)(a+b)^2} \geqslant \frac{3}{8}.$$

Bài 8. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b(c+a)} + \frac{b^2}{c(a+b)} + \frac{c^2}{a(b+c)} \geqslant \frac{a+b-c}{a+b} + \frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a}.$$

Bài 9. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b(c+a)}+\frac{b^2}{c(a+b)}+\frac{c^2}{a(b+c)} \geqslant \frac{3}{2}-\frac{a(a-b)}{(b+c)(c+a)}-$$
$$-\frac{b(b-c)}{(c+a)(a+b)}-\frac{c(c-a)}{(a+b)(b+c)}.$$

Bài 10. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$(1+\frac{2a}{b})^2+(1+\frac{2b}{c})^2+(1+\frac{2c}{a})^2 \geqslant 9 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)}.$$

Bài 11. Giả sử a, b, c là những số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \geqslant 1.$$

Bài 12. Giả sử a, b, c là những số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2} \leq 1.$$

Bài 13. Giả sử a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$36 = (1+2+3)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}+\frac{2}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}+\frac{3}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a}\right)^2$$

$$36 \leq P\cdot 2(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{18}{a+b+c} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.
Ta có

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{a}{b\sqrt{c^3+a^3}}\sqrt{c^3+a^3}+\frac{b}{c\sqrt{a^3+b^3}}\sqrt{a^3+b^3}+\frac{c}{a\sqrt{b^3+c^3}}\sqrt{b^3+c^3}\right)^2$$

Suy ra

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \leq P\cdot 2(a^3+b^3+c^3)$$

Vì $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$, suy ra $\quad P \geqslant \frac{9}{2(a^3+b^3+c^3)}$.

Bài 3.
Ta có

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2 =$$
$$=\left(\sqrt{\frac{ab}{c(c+b)}}\sqrt{a+b}+\sqrt{\frac{bc}{a(b+c)}}\sqrt{b+c}+\sqrt{\frac{ca}{b(c+a)}}\sqrt{c+a}\right)^2$$
$$\leq P\cdot 2(a+b+c)$$

Ta có

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2 \geqslant 3(a+b+c)$$

Suy ra $\quad P \geqslant \frac{3}{2} \quad$ (đpcm).

Bài 4.
Ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geqslant 1$$

Ta có

$$\left(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{(\sqrt{c+a})(b+2c)}\sqrt{c+a}+\frac{b}{(c+2a)\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}+\right.$$

$$\left.+\frac{c}{(a+2b)\sqrt{(b+c)}}\sqrt{b+c}\right)^2$$

Suy ra

$$1\leq\left(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right)^2\leq P\cdot 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow P\geqslant\frac{1}{2(a+b+c)}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 6.
Ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant a^2+b^2+c^2$$

Ta có

$$\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)^2=\left(\frac{a^3}{b\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}+\right.$$

$$\left.+\frac{b^3}{c\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}+\frac{c^3}{a\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)}\right)^2$$

$$\geqslant P\cdot 2(ab+bc+ca)$$

Suy ra

$$(a^2+b^2+c^2)^2\leq P\cdot 2(ab+bc+ca)\leq P\cdot 2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow P\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 7.
Ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$$

Ta có

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)^2=\left(\frac{a^2}{(b+c)\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)}+\right.$$

$$\left.+\frac{b^2}{(c+a)\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}+\frac{c^2}{(a+b)\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}\right)^2$$

Suy ra

$$\frac{(a+b+c)^2}{4}\leq P\cdot 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow P\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{8(ab+bc+ca)}\geqslant\frac{3(ab+bc+ca)}{8(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow P\geqslant\frac{3}{8}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 8.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P=\frac{a^2+b^2}{b(c+a)}+\frac{b^2+c^2}{c(a+b)}+\frac{c^2+a^2}{a(b+c)}\geqslant 3$$

Ta có

$$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}\right)^2\leq P.2(ab+bc+ca)$$

Ta có

$$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$$

Suy ra

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geqslant \sqrt{2}(a+b+c)$$

Từ đó suy ra

$$2(a+b+c)^2 \leq P \cdot 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geqslant \frac{3(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} = 3 \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 9.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{b(c+a)}+\frac{b^2}{c(a+b)}+\frac{c^2}{a(b+c)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2} - a\left[\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right] - b\left[\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}\right] - c\left[\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right]$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{a^2+b^2-ab}{b(c+a)}+\frac{b^2+c^2-bc}{c(a+b)}+\frac{c^2+a^2-ca}{a(b+c)} \geqslant \frac{3}{2}$$

Ta có

$$(\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}+\sqrt{c^2+a^2-ca})^2 =$$

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2-ab}{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{\frac{b^2+c^2-bc}{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{c^2+a^2-ca}{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}\right)^2 \leq P.2(ab+bc+ca)$$

Ta có

$$a^2+b^2-ab = \frac{1}{4}(a+b)^2+\frac{3}{4}(a-b)^2 \geqslant \frac{1}{4}(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2-ab} \geqslant \frac{1}{2}(a+b)$$

Suy ra

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}+\sqrt{c^2+a^2-ca} \geqslant a+b+c$$

Do đó

$$(a+b+c)^2 \leq P \cdot 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{3}{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 10.
Ta có
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$
và
$$(1+\frac{2a}{b})^2+(1+\frac{2b}{c})^2+(1+\frac{2c}{a})^2 \geqslant \frac{1}{3}\Big(3+2(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\Big)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{3}\Big(3+\frac{2(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\Big)^2$$
Suy ra ta cần phải chứng minh
$$\frac{1}{3}\Big(3+\frac{2(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\Big)^2 \geqslant 9\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$
Đặt $t=\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$ ta thu được $t \geqslant 3$ và
$$(3+2t)^2 \geqslant 27t \Leftrightarrow 4t^2-15t+9 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (t-3)(4t-3) \geqslant 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng vì } t \geqslant 3).$$

Bài 11.
Ta có
$$P=\frac{a^4}{a^3+2a^2b^2}+\frac{b^4}{b^3+2b^2c^2}+\frac{c^4}{c^3+2c^2a^2}$$
Suy ra
$$P \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$
Vì $a+b+c=3$ ta suy ra
$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3} \geqslant \frac{(a+b+c)}{3}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$
Bất đẳng thức thứ tự Trebưsep)
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3+b^3+c^3$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} = 1.$$

Bài 12.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(1-\frac{2}{2+a}\right)+\left(1-\frac{2}{2+b}\right)+\left(1-\frac{2}{2+c}\right) \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c} \geqslant 1$$

Vì $abc = 1$ suy ra có tồn tại những số thực dương x, y, z cho sao $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ và bất đẳng thức cần chứng minh là

$$P = \frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x} \geqslant 1$$

$$P = \frac{x^2}{x^2+2xy}+\frac{y^2}{y^2+2yz}+\frac{z^2}{z^2+2zx} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)}$$

$\Leftrightarrow P \geqslant 1$ (đpcm).

Bài 13.
Ta có

$$P = \frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2}+\frac{c^4}{c^3+c^2a+ca^2}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{a+b+c}{3} \quad \text{(đpcm)}.$$

8 Phép biến đổi nghịch Bunhiacôpxki

Biến đổi một bất đẳng thức đưa về sử dụng dạng hệ quả của bất đẳng thức Bunhiacôpxki

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 \quad (b_i \in R^+, i = \overline{1,n}) \qquad (8.1)$$

được gọi là phép biến đổi nghịch Bunhiacôpxki .

Thực chất một bất đẳng thức đã giải được nhờ phép biến đổi thuận thì cũng giải được bằng phép biến đổi nghịch và ngược lại. Nhưng tuỳ theo dạng bất đẳng thức mà chúng ta sử dụng các phép biến đổi thích hợp Trong bài giảng này chúng ta quan tâm nhiều hơn đến các dạng bài toán cực trị khi a_i là các hằng số hay những dạng mà khi dùng phép biến đổi nghịch sẽ ngắn gọn và đơn giản.

I. Phương pháp giải

1. Thêm các hằng số vào từng số hạng của bất đẳng thức để có thể rút tổng $(a + b + c)$ hay một biểu thức đối xứng làm thừa số chung.

2. Sử dụng hệ quả (8.1) tìm cực trị.

Sau đây chúng ta xét một số ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 8.1 (M.S.Klamkin). Giả sử p, q, r, x, y, z là những số thực không âm, chứng minh rằng

$$M = \frac{p}{q+r}x^2 + \frac{q}{r+p}y^2 + \frac{r}{p+q}z^2 \geqslant xy + yz + zx - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Giải

Ta có

$$N = (\frac{px^2}{q+r} + x^2) + (\frac{qy^2}{r+p} + y^2) + (\frac{rz^2}{p+q} + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow M = (p + q + z)(\frac{x^2}{q+r} + \frac{y^2}{r+p} + \frac{z^2}{p+q}) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Ta có

$$M = \frac{1}{2}\Big((q+r)+(r+p)+(p+q)\Big)\Big(\frac{x^2}{q+r}+\frac{y^2}{r+p}+\frac{z^2}{p+q}\Big)-(x^2+y^2+z^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức (8.1) ta thu được

$$M \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2) = (xy+yz+zx)-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{p}{y+z-x} = \frac{q}{x+z-y} = \frac{r}{x+y-z}.$$

Ví dụ 8.2. Với a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, $x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{ax^2}{b+c-a}+\frac{by^2}{c+a-b}+\frac{cz^2}{a+b-c} \geqslant xy+yz+zx.$$

Giải

Ta có

$$P = (\frac{ax^2}{b+c-a}+\frac{x^2}{2})+(\frac{by^2}{c+a-b}+\frac{y^2}{2})+$$
$$+(\frac{cz^2}{a+b-c}+\frac{z^2}{2})-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2})$$

$$P = (a+b+c)\Big[\frac{\frac{1}{2}x^2}{b+c-a}+\frac{\frac{1}{2}y^2}{c+a-b}+\frac{\frac{1}{2}z^2}{a+b-c}\Big]-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

$$P = ((b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c))\Big[\frac{\frac{1}{2}x^2}{b+c-a}+\frac{\frac{1}{2}y^2}{c+a-b}+\frac{\frac{1}{2}z^2}{a+b-c}\Big]-$$
$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z)^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = xy+yz+zx \quad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 8.3. Giả sử a, b, c là những số thực dương, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}.$$

Giải

Ta có

$$P = (\frac{3a}{b+c} + 3) + (\frac{4b}{c+a} + 4) + (\frac{5c}{a+b} + 5) - 12$$

$$P = (a+b+c)(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b}) - 12$$

$$P = \frac{1}{2}[(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left(\frac{(\sqrt{3})^2}{b+c} + \frac{2^2}{c+a} + \frac{(\sqrt{5})^2}{a+b}\right) - 12$$

Suy ra (áp dụng bất đẳng thức (8.1))

$P \geqslant (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$ và dấu đẳng thức đạt được khi

$$\frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $P_{min} = (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12.$

Ví dụ 8.4. Giả sử a, b, c là những số thực dương, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3bc}{a(b+c)} + \frac{4ca}{b(c+a)} + \frac{5ab}{c(a+b)}.$$

Giải

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ ta thu được

$$P = \frac{3x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{5z}{x+y}$$

Và có $P_{min} = (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$ (Xem ví dụ 8.3).

II. Một số trường hợp mở rộng

Ta có bất đẳng thức

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^3$$

Ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt[3]{b_i^2}} \cdot \sqrt[3]{b_i} \cdot \sqrt[3]{b_i}\Big)^3 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 8.5. Giả sử a, b, c là những số thực dương, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{16c}{a+b} + \frac{54a}{b+c} + \frac{128b}{c+a} + \frac{8c^2}{(a+b)^2} + \frac{27a^2}{(b+c)^2} + \frac{64b^2}{(c+a)^2}.$$

Giải

Ta có

$$P = [8 + \frac{16c}{a+b} + \frac{8c^2}{(a+b)^2}] + [27 + \frac{54a}{b+c} + \frac{27a^2}{(b+c)^2}] +$$

$$+[64 + \frac{128b}{c+a} + \frac{64b^2}{(c+a)^2}] - (8 + 27 + 64)$$

$$\Leftrightarrow P = (a+b+c)^2\Big(\frac{8}{(a+b)^2} + \frac{27}{(b+c)^2} + \frac{64}{(c+a)^2}\Big) - 99$$

$$P = \frac{1}{4}((a+b)+(b+c)+(c+a))^2\Big(\frac{2^3}{(a+b)^2} + \frac{3^3}{(b+c)^2} + \frac{4^3}{(c+a)^2}\Big) - 99$$

Áp dụng bất đẳng thức (8.2) ta suy ra

$$P \geqslant \frac{1}{4}(2+3+4)^3 - 99 = \frac{333}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{8}{a+b} = \dfrac{27}{b+c} = \dfrac{64}{c+a}$.

Vậy $P_{min} = \dfrac{333}{4}$.

Ví dụ 8.6. Giả sử a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3, \\ b^2 + bc + c^2 = 16. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $b^2 + bc + ca \leq 8$.

Giải

Ta có

$$48 = (a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2) =$$

$$= \left[(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}\right]\left[(b + \frac{c}{2})^2 + \frac{3c^2}{4}\right]$$

Suy ra

$$48 \geqslant \left((a + \frac{b}{2})\frac{\sqrt{3}c}{2} + (b + \frac{c}{2})\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 48 \geqslant \frac{3}{4}(b^2 + bc + ca)^2 \Leftrightarrow b^2 + bc + ca \leq 8.$$

Ví dụ 8.7. Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abcd = 1$, chứng minh rằng

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2) \geqslant (a + b + c + d)^2.$$

Giải

Vì $abcd = 1$ suy ra có tồn tại 2 số b, d (không giảm tổng quát) sao cho chúng cùng lớn hơn hoặc bằng 1 hoặc cùng nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = (1+a^2+b^2+a^2b^2)(c^2+1+d^2+c^2d^2) \geqslant$$

$$\geqslant (1c + a1 + bd + abcd)^2 = (c + a + bd + 1)^2$$

Để chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng ta cần chứng minh

$$c + a + bd + 1 \geqslant a + b + c + d \Leftrightarrow bd + 1 \geqslant b + d$$

$$\Leftrightarrow (b - 1)(d - 1) \geqslant 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng).}$$

BÀI TẬP

Bài 1 . Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, $a+b+c=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+c^2+a^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}.$$

Trong đó a, b, c là các cạnh, p là nửa chu vi , r là bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác.

Bài 3. Giả sử a, b, c là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3(c-b)}{2b+a}+\frac{4(a-c)}{b+2c}+\frac{5(b-a)}{c+2a}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$P(a(1+b^2+c^2)+b(1+c^2+a^2)+c(1+a^2+b^2))\geqslant$$

$$\geqslant\Big(\sqrt{\frac{a}{1+b^2+c^2}}\sqrt{(1+b^2+c^2)a}+$$

$$+\sqrt{\frac{b}{1+c^2+a^2}}\sqrt{(1+c^2+a^2)b}+$$

$$+\sqrt{\frac{c}{1+a^2+b^2}}\sqrt{(1+b^2+c^2)c}\Big)^2\geqslant(a+b+c)^2$$

Suy ra

$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{1+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} = \frac{1}{1+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}$$

Ta có bất đẳng thức

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

Vì $a+b+c=1$ suy ra

$$(1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq abc$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{1}{4} + \frac{9}{4}abc$$

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \\ &= ab(1-c)+bc(1-a)+ca(1-b) \\ &= ab+bc+ca-3abc \end{aligned}$$

Suy ra

$$Q \leq \frac{1}{4} + \frac{9}{4}abc - 3abc = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}abc \leq \frac{1}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=0, b=c=\frac{1}{2}$.

Vậy $P \geqslant \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$

Suy ra $P_{min} = \frac{4}{5}$ đạt khi $a=0, b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 2.
Ta có đẳng thức

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}$$

Áp dụng kết quả ở ví dụ 8.1, với

$$p=3, q=4, r=5$$

$$x = \frac{1}{p-a}, y = \frac{1}{p-b}, z = \frac{1}{p-c}$$

ta thu được

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-b)^2} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{(p-c)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2}\Big)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{(p-c)^2} \geqslant \frac{1}{r^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{3}{\dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} - \dfrac{1}{p-a}} = \frac{4}{\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-c} - \dfrac{1}{p-b}} =$$

$$= \frac{5}{\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} - \dfrac{1}{p-c}}.$$

Bài 3.
Ta có

$$P = \Big(\frac{3(c-b)}{a+2b} + 3\Big) + \Big(\frac{4(a-c)}{b+2c} + 4\Big) + \Big(\frac{5(b-a)}{c+2a} + 5\Big) - 12$$

$$P = (a+b+c)\Big(\frac{3}{a+2b} + \frac{4}{b+2a} + \frac{5}{c+2a}\Big) - 12$$

$$P = \frac{1}{3}((a+2b) + (b+2c) + (c+2a))\Big(\frac{3}{a+2b} + \frac{4}{b+2c} + \frac{5}{c+2a}\Big) - 12$$

$$P \geqslant \frac{1}{3}(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$$

và đạt dấu đẳng thức khi

$$\frac{a+2b}{\sqrt{3}} = \frac{b+2c}{2} = \frac{c+2a}{\sqrt{5}}$$

Suy ra

$$P_{min} = \frac{1}{3}(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12.$$

9 Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki xây dựng bất đẳng thức có điều kiện thứ tự

Trong bài giảng này chúng tôi trình bày phương pháp xây dựng bất đẳng thức thứ tự khó từ các bất đẳng thức thứ tự đơn giản.

Ví dụ 9.1. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geqslant\frac{x^2z}{y}+\frac{y^2x}{z}+\frac{z^2y}{x} \qquad (9.1).$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\geqslant x^3z^2+y^3x^2+z^3y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2(x-y)+z^3(x^2-y^2)-z^2(x^3-y^3)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)[x^2y^2-z^2(x^2+y^2+xy)+z^3(x+y)]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)[x^2(y^2-z^2)-z^2y(y-z)-z^2x(y-z)]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)[x^2(y+z)-z^2y-z^2x]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)[y(x^2-z^2)+xz(x-z)]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x-z)(y(x+z)+xz)\geqslant 0$$

(Hiển nhiên đúng).

Nhận xét:
Khi chứng minh các bất đẳng thức với điều kiện thứ tự $x \geqslant y \geqslant z > 0$ chúng ta từng bước nhóm các số hạng có chung thừa số là $x-y$, sau đó $y-z$, $x-z$ để sử dụng điều kiện thứ tự.

Ví dụ 9.2. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \leq x^3y + y^3z + z^3x \qquad (9.2).$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$xy(y^2 - x^2) + yz(z^2 - y^2) + zx(x^2 - z^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow xy(y^2 - x^2) + yz(z^2 - x^2 + x^2 - y^2) + zx(x^2 - z^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y(x^2 - y^2)(z - x) + z(z^2 - x^2)(y - x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x - z)[-y(x + y) + z(z + x)] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x - z)[(z^2 - y^2) + zx - yx] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x - z)(z - y)(x + y + z) \leq 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng).}$$

Sử dụng bất đẳng thức (9.1) chúng ta xây dựng bất đẳng thức.

Ví dụ 9.3. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geqslant x^2 + y^2 + z^2 \qquad (9.3).$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2)^2 &= \left(x\sqrt{\frac{y}{z}} \cdot x\sqrt{\frac{z}{y}} + y\sqrt{\frac{z}{x}} \cdot y\sqrt{\frac{x}{z}} + z\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot z\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y}\right)\left(\frac{x^2z}{y} + \frac{y^2x}{z} + \frac{z^2y}{x}\right) \\ &\leq \left(\frac{x^2y}{x} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y}\right)^2\end{aligned}$$

(Sử lụng bất đẳng thức 9.1).
Suy ra

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{x^2y}{x} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví cụ 9.4. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$x^3y + y^3z + z^3x \geqslant x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \qquad (9.4).$$

Giải

Ta có

$$(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 =$$

$$= \left(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

$$\leq (x^3y + y^3z + z^3x)(xy^3 + yz^3 + zx^3)$$

$$\leq (x^3y + y^3z + z^3x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \quad \text{(Sử dụng bất đẳng thức 9.2)}$$

$$\leq x^3y + y^3z + z^3x \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 9.5. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z^2} + \frac{y^2z}{x^2} + \frac{z^2x}{y^2} \geqslant x + y + z \quad (9.5).$$

Giải

Ta có

$$(x + y + z)^2 = \left(\frac{x}{z}\sqrt{y} \cdot \frac{z}{x}\sqrt{y} + \frac{y}{x}\sqrt{z} \cdot \frac{x}{y}\sqrt{z} + \frac{z}{y}\sqrt{x} \cdot \frac{y}{z}\sqrt{x}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{x^2y}{z^2} + \frac{y^2z}{x^2} + \frac{z^2x}{y^2}\right)\left(\frac{z^2y}{x^2} + \frac{x^2z}{y^2} + \frac{y^2x}{z^2}\right)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^2y}{z^2} + \frac{y^2z}{x^2} + \frac{z^2x}{y^2} \geqslant \frac{z^2y}{x^2} + \frac{x^2z}{y^2} + \frac{y^2x}{z^2}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$x^4y^3 + y^4x^3 + z^4x^3 \geqslant x^3y^4 + y^3z^4 + z^3x^4$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3(x-y) + y^3z^3(y-z) + z^3x^3(z-x) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(y^3 - z^3 + z^3)(x-y) + y^3z^3(y-z) + z^3x^3(z-x) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(y^3 - z^3)(x-y) + z^3[x^3(z-y) + y^3(y-z)] \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(y^3 - z^3)(x-y) + z^3(z-y)(x^3 - y^3) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (y-z)(x-y)[x^3(y^2+yz+z^2) - z^3(x^2+xy+y^2)] \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (y-z)(x-y)[y^2(x^3-z^3) + xyz(x^2-z^2) + x^2z^2(x-z)] \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (y-z)(x-y)(x-z)[y^2(x^2+xz+z^2) + xyz(x+z) + x^2z^2] \geqslant 0$$

(Hiển nhiên đúng).

Ví dụ 9.6. Giả sử Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{z^3} + \frac{y^2}{x^3} + \frac{z^2}{y^3} \geqslant \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \qquad (9.6)$$

Giải

Ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{x}{y} + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{z}{y} \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{y}{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{x}{z} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{z}{x}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{y^2}{x^3} + \frac{z^2}{y^3} + \frac{x^2}{z^3}\right)\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y^2}{z^3} + \frac{z^2}{x^3}\right)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{y^2}{x^3}+\frac{z^2}{y^3}+\frac{x^2}{z^3}\geqslant\frac{x^2}{y^3}+\frac{y^2}{z^3}+\frac{z^2}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow y^5z^3+z^5x^3+x^5y^3\geqslant x^5z^3+y^5x^3+z^5y^3$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3(x^2-y^2)+y^3z^3(y^2-z^2)+z^3x^3(z^2-x^2)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(y^3-z^3+z^3)(x^2-y^2)+y^3z^3(y^2-z^2)+z^3x^3(z^2-x^2)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(y^3-z^3)(x^2-y^2)+z^3[x^3(x^2-y^2)+y^3(y^2-z^2)+x^3(z^2-x^2)]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(y^3-z^3)(x^2-y^2)+z^3[x^3(z^2-y^2)+y^3(y^2-z^2)]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(y-z)(y^2+yz+z^2)(x-y)(x+y)+$$

$$+z^3(y-z)(y+z)(y-x)(x^2+xy+y^2)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(y-z)[x^3(x+y)(y+z)^2-x^3yz(x+y)-$$

$$z^3(y+z)(x+y)^2+z^3xy(y+z)]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(y-z)[(x+y)(y+z)[x^3(y+z)-z^3(x+y)]+$$

$$xyz(yz^2+z^3-x^3-x^2y)]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(y-z)(x-z)\{(x+y)(y+z)[y(x^2+xz+z^2)+xz(x+z)]-$$

$$xyz(x^2+xz+z^2+y(x+z))\}\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(y-z)(x-z)\{(x^2+xz+z^2)((x+y)(y+z)y-xyz)+$$

$$+xz(x+z)(x+y)(y+z)-y^2\}\geqslant 0$$

Vì $(x+y)(y+z)y - xyz \geqslant 0, (x+y)(y+z) - y^2 \geqslant 0.$
Vậy bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng.
Suy ra

$$\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}\right)^2 \leq \left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y^2}{z^3} + \frac{z^2}{x^3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \leq \frac{x^2}{y^3} + \frac{y^2}{z^3} + \frac{z^2}{x^3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.
Từ điều kiện thứ tự $x \geqslant y \geqslant z > 0$ ta suy ra các điều kiện thứ tự hệ quả và dùng điều kiện thứ tự mới sẽ xây dựng được các bất đẳng thức mới.
*) Từ $x \geqslant y \geqslant z > 0$ suy ra $xy \geqslant xz \geqslant yz > 0$.
Sử dụng kết quả của ví dụ (9.5) ta thu được

Ví dụ 9.7. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \geqslant xy + yz + zx \quad (9.7).$$

Giải

Đặt $u = xy, v = xz, t = yz$.
Từ $x \geqslant y \geqslant z > 0$ suy ra $u \geqslant v \geqslant t > 0$, khi đó

$$(9.7) \Leftrightarrow \frac{u^2v}{t^2} + \frac{v^2t}{u^2} + \frac{t^2u}{v^2} \geqslant u + v + t$$

Đó chính là (9.5) đã được chính minh.

Ví dụ 9.8. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{y}{x} + \frac{x^3}{y^2z} + \frac{z^3}{y^3} \geqslant \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{xz}{y^2}.$$

Hướng dẫn

Từ $x \geqslant y \geqslant z > 0$ suy ra $\frac{x}{y} \geqslant 1 \geqslant \frac{z}{y} > 0$
Áp dụng kết quả ở ví dụ 9.7 bằng cách thay bộ ba (x, y, z) theo cùng thứ tự bởi bộ ba $(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y})$.

BÀI TẬP

Bài 1. Với $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geqslant x^2\sqrt{\frac{y}{z}} + y^2\frac{z}{x} + z^2\frac{x}{y}.$$

Bài 2. Với $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^3y}{z} + \frac{y^3z}{x} + \frac{z^3x}{y} \geqslant \frac{x^3z}{y} + \frac{y^3x}{z} + \frac{z^3y}{x}.$$

Bài 3. Với $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^3y}{z} + \frac{y^3z}{x} + \frac{z^3x}{y} \geqslant x^3 + y^3 + z^3.$$

Bài 4. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{y}{z} + \frac{y^3z}{x^4} + \frac{z^3}{x^2y} \geqslant 1 + \frac{y^3}{x^3} + \frac{z^3}{x^3}.$$

Bài 5. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geqslant \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z}.$$

Bài 6. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{xz}}{y} + \frac{\sqrt{yz}}{x} + \frac{\sqrt{xy}}{z} \leq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}.$$

Bài 7. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{xz}}{y} + \frac{\sqrt{zy}}{x} + \frac{\sqrt{yx}}{z} \leq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{xz}{y^2}.$$

Bài 8. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{xz^3}{y^3} + \frac{yx^3}{z^3} + \frac{zy^3}{x^3} \geqslant \frac{xy^3}{z^3} + \frac{yz^3}{x^3} + \frac{zx^3}{y^3}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\left(x^2\sqrt{\frac{y}{z}}+y^2\sqrt{\frac{z}{x}}+z^2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2\\
&=\left(x\sqrt{\frac{y}{z}}x+y\sqrt{\frac{z}{x}}y+z\sqrt{\frac{x}{y}}z\right)^2\\
&\le\left(\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\right)(x^2+y^2+z^2)\\
&\le\left(\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\right)^2
\end{aligned}$$

(Áp dụng kết quả của ví dụ 9.3).
Suy ra

$$\left(x^2\sqrt{\frac{y}{z}}+y^2\sqrt{\frac{z}{x}}+z^2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\le\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 2.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2\geqslant x^4z^2+y^4x^2+z^4y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2(x^2-y^2)+y^2z^2(y^2-z^2)+z^2x^2(z^2-x^2)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2-z^2+z^2)(x^2-y^2)+y^2z^2(y^2-z^2)+z^2x^2(z^2-x^2)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2-z^2)(x^2-y^2)+x^2z^2(z^2-y^2)+y^2z^2(y^2-z^2)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2-z^2)(x^2-y^2)+z^2(z^2-y^2)(x^2-y^2)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow(y^2-z^2)(x^2-y^2)(x^2-z^2)\geqslant 0\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 3.
Ta có

$$(x^3+y^3+z^3)^2 = \Big(x\sqrt{x}\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot x\sqrt{x}\sqrt{\frac{z}{y}}+$$

$$+\, y\sqrt{y}\sqrt{\frac{z}{x}}\cdot y\sqrt{y}\sqrt{\frac{x}{z}} + z\sqrt{z}\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot z\sqrt{z}\sqrt{\frac{y}{x}}\Big)^2$$

$$\le \Big(\frac{x^3y}{z}+\frac{y^3z}{x}+\frac{z^3x}{y}\Big)\Big(\frac{x^3z}{y}+\frac{y^3x}{z}+\frac{z^3x}{y}\Big)$$

$$\le \Big(\frac{x^3y}{z}+\frac{y^3z}{x}+\frac{z^3x}{y}\Big)^2 \quad \text{(áp dụng bài 2)}.$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3 \le \frac{x^3y}{z}+\frac{y^3z}{x}+\frac{z^3x}{y} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 4.

Từ giả thiết $x \geqslant y \geqslant z > 0$, suy ra $1 \geqslant \frac{y}{x} \geqslant \frac{z}{x} > 0$.
Trong bài tập 3 chúng ta thay (x, y, z) bởi bộ $(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 5.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$y^2z+z^2x+x^2y \geqslant x^2z+z^2y+y^2x$$

$$\Leftrightarrow yz(y-x)-z^2(y-x)-xy(y-x)+xz(y-x)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(y-z)(z-x)\geqslant 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng)}.$$

Bài 6.
Ta có

$$\left(\frac{\sqrt{xz}}{y}+\frac{\sqrt{yz}}{x}+\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}\cdot\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2$$

$$\leq\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}\right)$$

$$\leq\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)^2 \quad \text{(áp dụng bài 5).}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{xz}}{y}+\frac{\sqrt{yz}}{x}+\frac{\sqrt{xy}}{z}\leq\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}.$$

Bài 7.
Áp dụng kết quả của bài 6 bằng cách thay bộ (x, y, z) theo thứ tự tương ứng bởi bộ $(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y})$.

Bài 8.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$z^6x^4+x^6y^4+y^6z^4\geqslant y^6x^4+z^6y^4+x^6y^4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(x^2-z^2)(y^2-z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\geqslant 0.$$

10 Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki giải một số bài toán trong tam giác

Việc giải các bài toán trong tam giác thường sẽ dễ dàng hơn khi ta phát hiện được các đẳng thức trong tam giác liên hệ tới các yếu tố có mặt trong bài toán. Trong phần này chúng ta vẫn dùng các ký hiệu: a, b, c là các cạnh; A, B, C là các góc; h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C còn l_a, l_b, l_c là độ dài các trung tuyến, p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và r_a, r_b, r_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp của một tam giác.

Ví dụ 10.1. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{\sqrt{h_a}} + \frac{4}{\sqrt{h_b}} + \frac{5}{\sqrt{h_c}} \le \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{r}}.$$

Giải

Ta có

$$S = pr = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

Do đó

$$\left(\frac{3}{\sqrt{h_a}} + \frac{4}{\sqrt{h_b}} + \frac{5}{\sqrt{h_c}}\right)^2 \le 50 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{h_a}} + \frac{4}{\sqrt{h_b}} + \frac{5}{\sqrt{h_c}} \le \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{r}}.$$

Ví dụ 10.2. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} + \frac{4}{\sqrt{(p-b)(p-c)}} + \frac{5}{\sqrt{(p-c)(p-a)}} \le \frac{5\sqrt{2}}{r}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} =$$

$$= \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2}{S^2} = \frac{1}{r^2}$$

Do đó

$$\left(\frac{3}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}+\frac{4}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}+\frac{5}{\sqrt{(p-c)(p-a)}}\right)^2\leq 50\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}+\frac{4}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}+\frac{5}{\sqrt{(p-c)(p-a)}}\leq\frac{5\sqrt{2}}{r}.$$

(Điều phải chứng minh).

Ví dụ 10.3. Chứng minh rằng

$$3\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+5\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\leq 5\sqrt{2}.$$

Giải

Ta có đẳng thức

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1 \quad (1)$$

$$\text{vì } (1)\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=1-\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=1 \quad (\text{đpcm}).$$

Do đó

$$\left(3\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+5\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2\leq 50$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+5\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\leq 5\sqrt{2} \quad (\text{đpcm}).$$

Ví dụ 10.4. Chứng minh rằng

$$3\sqrt{\cos A}+4\sqrt{\cos B}+5\sqrt{\cos C}\leq 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{r}{R}}.$$

Giải

Vì

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}$$

nên

$$(3\sqrt{\cos A} + 4\sqrt{\cos B} + 5\sqrt{\cos C})^2 \le 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 + \frac{r}{R}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 10.5. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{\sqrt{r_a}} + \frac{4}{\sqrt{r_b}} + \frac{5}{\sqrt{r_c}} \le \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{r}}.$$

Giải

Ta có đẳng thức

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

Suy ra

$$\left(\frac{3}{\sqrt{r_a}} + \frac{4}{\sqrt{r_b}} + \frac{5}{\sqrt{r_c}}\right)^2 \le \frac{50}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{r_a}} + \frac{4}{\sqrt{r_b}} + \frac{5}{\sqrt{r_c}} \le \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{r}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 10.6. Chứng minh rằng

$$3\cos\frac{A}{2} + 4\cos\frac{B}{2} + 5\cos\frac{C}{2} \le 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2 + \frac{r}{2R}}.$$

Giải

Ta có

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$$

Suy ra

$$\left(3\cos\frac{A}{2} + 4\cos\frac{B}{2} + 5\cos\frac{C}{2}\right)^2 \leq 50\left(2 + \frac{r}{2R}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos\frac{A}{2} + 4\cos\frac{B}{2} + 5\cos\frac{C}{2} \leq 4\sqrt{4 + \frac{r}{R}} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 10.7. Chứng minh rằng

$$3\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} + 4\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + 5\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} \leq 5\sqrt{\frac{2p}{r}}.$$

Giải

Ta có đẳng thức

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{a}{r}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{b}{r}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{c}{r}$$

Suy ra

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

Do đó

$$\left(3\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} + 4\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + 5\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}\right)^2 \leq 50 \cdot \frac{p}{r}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} + 4\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + 5\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} \leq 5\sqrt{\frac{2p}{r}} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 10.8. Chứng minh rằng

$$3\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} + 4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}} + 5\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} \leq 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{r + 4R}{p}}.$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\\
&=r\Big(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\Big)\\
&=\frac{r\big((p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)\big)}{(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&=\frac{3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ca}{rp}\\
&=\frac{-p^2+ab+bc+ca}{rp}
\end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned}
&p^2r^2=S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\\
\Leftrightarrow\ &pr^2=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc\\
\Leftrightarrow\ &pr^2=-p^3+(ab+bc+ca)p-4Rrp\\
\Leftrightarrow\ &ab+bc+ca=r^2+p^2+4Rr
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r^2+4Rr}{pr}=\frac{r+4R}{p}$$

Ta có

$$\Big(3\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+5\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\Big)^2\le 50\cdot\frac{r+4R}{p}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+5\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\le 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{r+4R}{p}}\quad \text{(đpcm).}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

$$M = \frac{\mathrm{tg}^2 \frac{A}{2}}{\mathrm{cotg}\, \frac{B}{2}} + \frac{\mathrm{tg}^2 \frac{B}{2}}{\mathrm{cotg}\, \frac{C}{2}} + \frac{\mathrm{tg}^2 \frac{C}{2}}{\mathrm{cotg}\, \frac{A}{2}} \geqslant \frac{r(r+4R)^2}{p^3}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$M = \frac{1}{9h_a^2} + \frac{1}{16h_b^2} + \frac{1}{25h_c^2} \geqslant \frac{1}{50r^2}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$M = \frac{1}{9}\mathrm{tg}^2 \frac{A}{2}\mathrm{tg}^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{16}\mathrm{tg}^2 \frac{B}{2}\mathrm{tg}^2 \frac{C}{2} + \frac{1}{25}\mathrm{tg}^2 \frac{C}{2}\mathrm{tg}^2 \frac{A}{2} \geqslant \frac{1}{50}$$

LỜI GIẢI

Bài 1.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta thu được

$$M \geqslant \frac{(\mathrm{tg}\, \frac{A}{2} + \mathrm{tg}\, \frac{B}{2} + \mathrm{tg}\, \frac{C}{2})^2}{\mathrm{cotg}\, \frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\, \frac{C}{2} + \mathrm{cotg}\, \frac{A}{2}} = \frac{(\frac{r+4R}{p})^2}{\frac{p}{r}} = \frac{r(r+4R)^2}{p^3} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 2.

$$M = \frac{\frac{1}{h_a^2}}{9} + \frac{\frac{1}{h_b^2}}{16} + \frac{\frac{1}{h_c^2}}{25} \geqslant \frac{(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c})^2}{50} = \frac{1}{50r^2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 3.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta thu được

$$M \geqslant \frac{\left(\mathrm{tg}\, \frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\, \frac{B}{2} + \mathrm{tg}\, \frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\, \frac{C}{2} + \mathrm{tg}\, \frac{C}{2}\,\mathrm{tg}\, \frac{A}{2}\right)^2}{9+16+25} = \frac{1}{50} \quad \text{(đpcm)}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Andreescu. T. and. Feng. Z (2000)
Mathermatical Olympiads: Problems and Solutions from Around the World, Mathermatical Association of America, Washington. DC.
[2] J. Michael steele (2004)
The cauchy - Schwarz master class, Mathermatical association of Amerca, Cambridge University press.
[3] D. S. Mitrinovíc, J. E. Pecaríc and A. M. Fink
Classical and New inequalities in Analysis. Kluwer acadmic publishers
[4] C. H. Hardy, J. E Littlewood, G. Pólya (1952)
Inequalities. Cambridge University press

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312 ; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập:
KHỐI CHUYÊN TOÁN - TIN, ĐHKHTN

Trình bày:
BÙI QUANG TUẤN

CÁC BÀI GIẢNG VỀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

Mã số: 1L-54 ĐH2007
In 2000 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội
Số xuất bản: 868 - 2006/CXB/20-180/ĐHQGHN, ngày 17/11/2006
Quyết định xuất bản số: 118LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2007