Métodos numéricos

Handbook

Fernando Pujaico Rivera

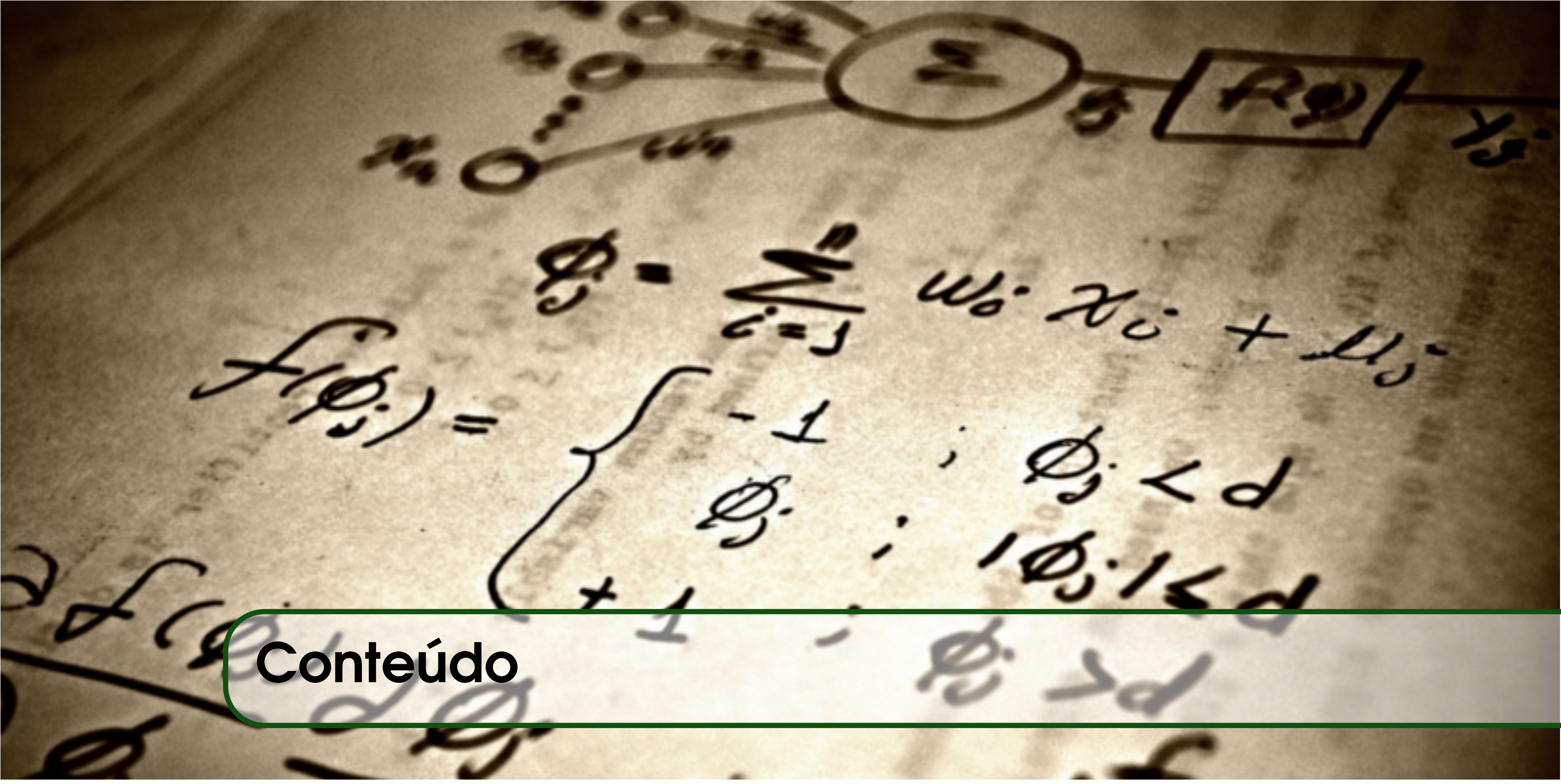
PUBLICADO POR VIRTUAL BOOKS

BOOK-WEBSITE.COM

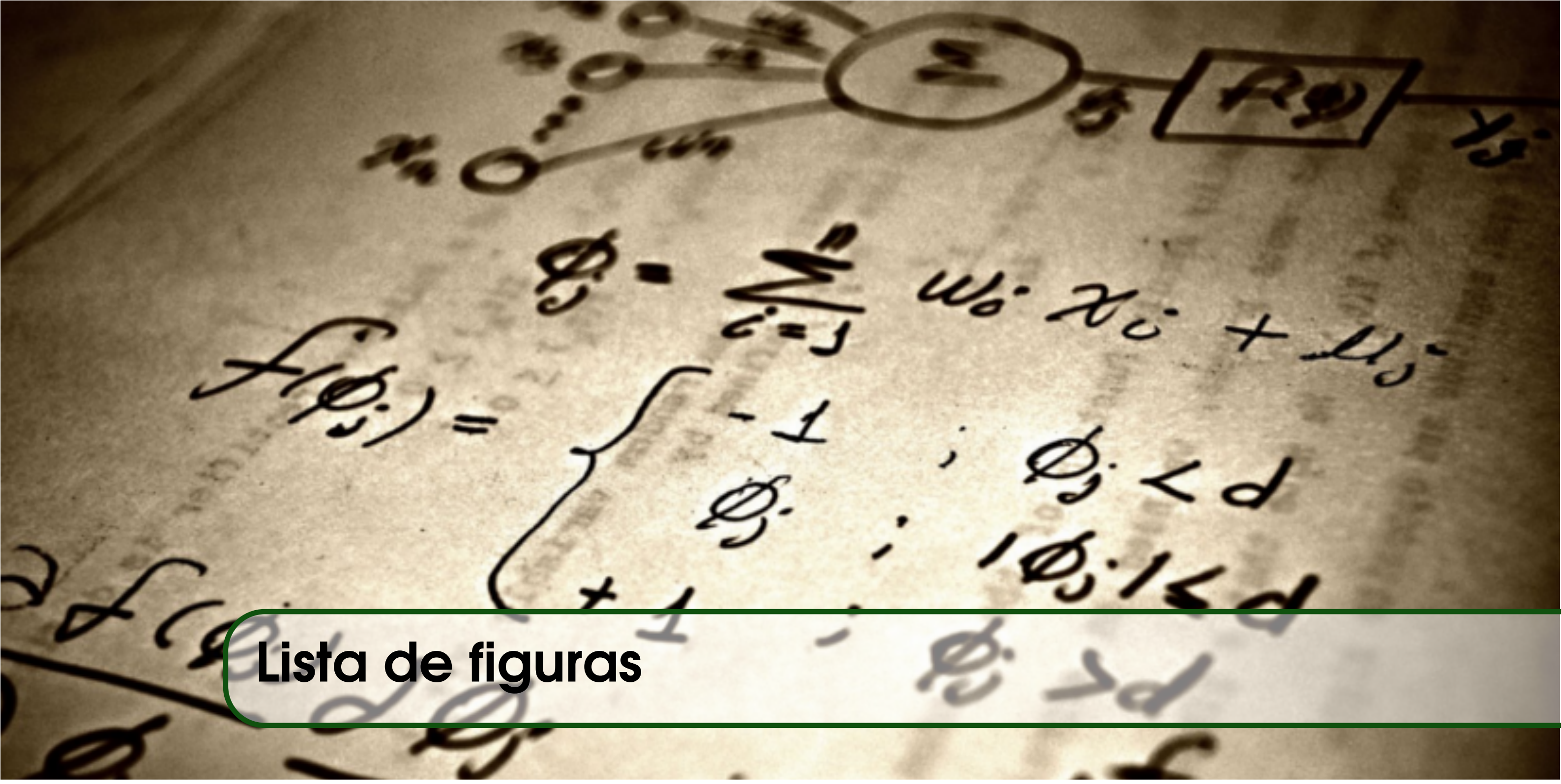
Primeira impressão , Março 2019

Amicum lege feliciter, vivas, gaudeas, floreas in Deo.
Fernando

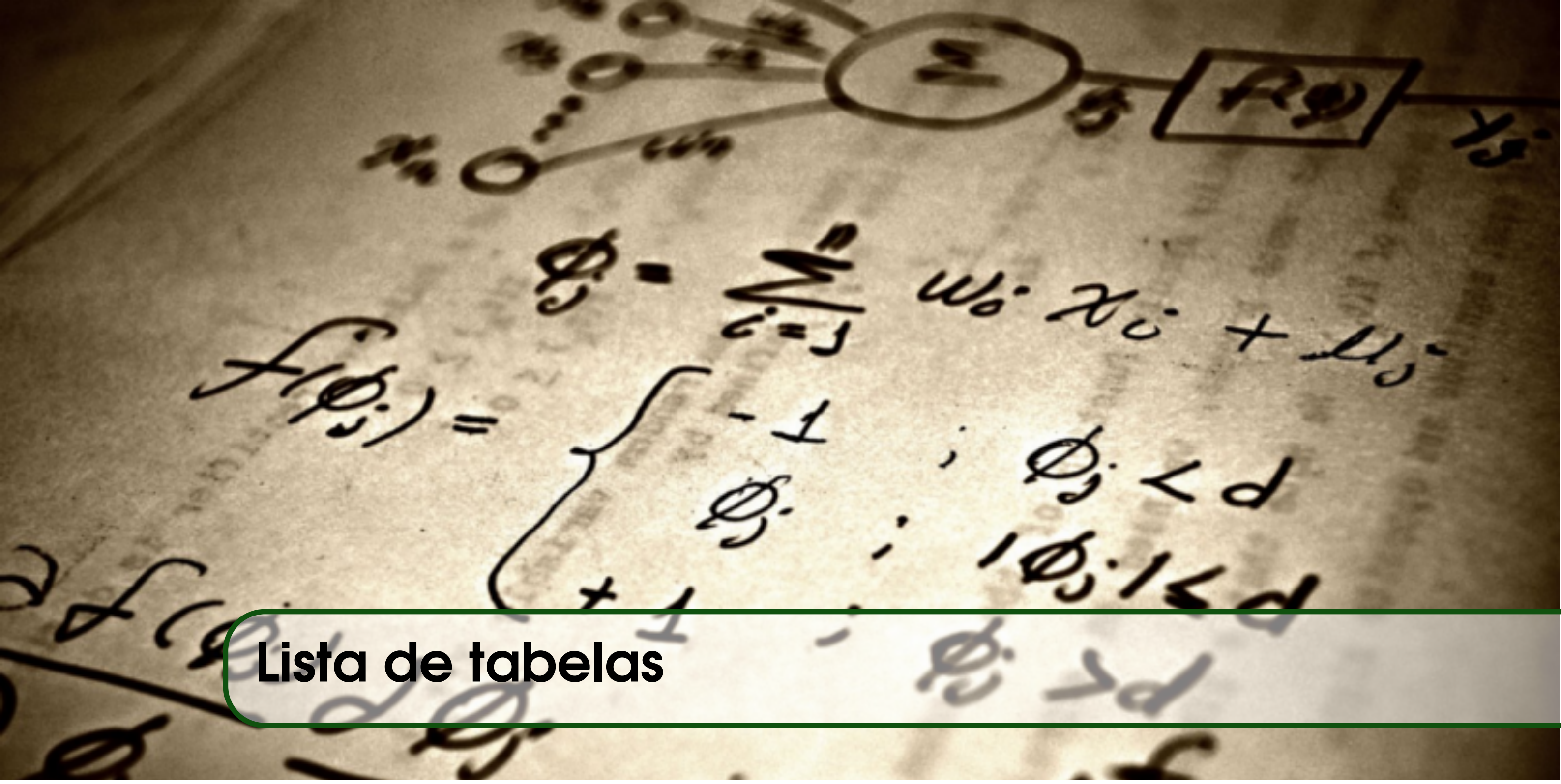
Dou muitas graças a Deus



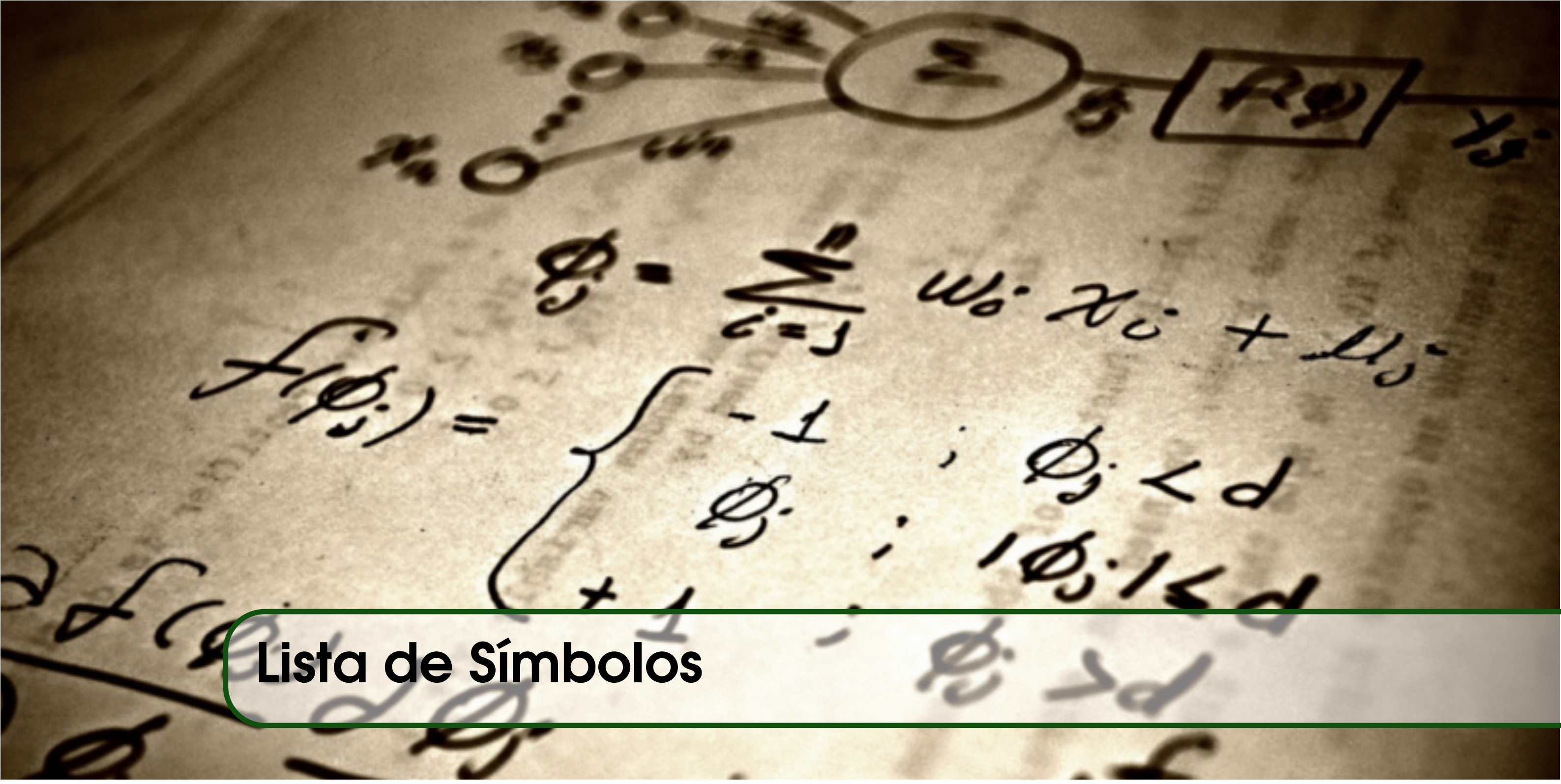
Conteúdo



Lista de figuras



Lista de tabelas



Lista de Símbolos

Conjuntos numéricos

Símbolo	Descrição
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Z}^N$	Espaço em N dimensões dos números inteiros.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{N}^N$	Espaço em N dimensões dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^N$	Espaço em N dimensões dos números reais.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\mathbb{H}$	Conjunto dos quaterniones.

Tipos de Dados

Tipo	Descrição	Formatação
$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ..., $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$	Matriz.	Maiúsculo e negrito
$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$	Vetor (Por falta é asumido que é um vetor coluna) ou conjunto.	Minúsculo e negrito
a, b, ..., x, y, z	Escalar variável.	Minúsculo
A, B, ..., X, Y, Z	Escalar constante.	Maiúsculo
α, β, ..., χ, ψ, ω	Escalar variável ou constante.	Letras gregas e minúsculo

Elementos de matrizes bidimensionais

Tipo	Descrição	Formatação
a_{ij}	Escalar formado pelo elemento da linha i, coluna j da matriz **A**.	Minúsculo
$a_{i:}$	Vetor linha formado pela linha i-essima da matriz **A**.	Minúsculo
$a_{:i}$	Vetor coluna formado pela coluna i-essima da matriz **A**.	Minúsculo

Elementos de vetores ou conjuntos

Tipo	Descrição	Formatação
a_i	Elemento i-essimo do vetor ou conjunto **a**.	Minúsculo

Funções notáveis

Função	Descrição
$card(\mathbf{a})$	Número de elementos, cardinalidade, do vetor ou conjunto **a**.
$card(\mathbf{A})$	Número de elementos, cardinalidade, da matriz **A**.
$dim(\mathbf{a},1)$	Primeira dimensão do vetor **a**, número de linhas.
$dim(\mathbf{a},2)$	Segunda dimensão do vetor **a**, número de colunas.
$dim(\mathbf{A},1)$	Primeira dimensão da matriz **A**, número de linhas.
$dim(\mathbf{A},2)$	Segunda dimensão da matriz **A**, número de colunas.
$dim(\mathbf{A},N)$	Dimensão N da matriz **A**, se não tiver retorna 0.
$inv(\mathbf{A})$	Inversa da matriz **A**, é equivalente a escrever $\mathbf{A}^{-1}$.
$\mathbf{A}^{-1}$	Inversa da matriz **A**, é equivalente a escrever $inv(\mathbf{A})$.
$trans(\mathbf{a})$	Transposta do vetor **a**, é equivalente a escrever $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$.
$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$	Transposta do vetor **a**, é equivalente a escrever $trans(\mathbf{a})$.
$trans(\mathbf{A})$	Transposta da matriz **A**, é equivalente a escrever $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$	Transposta da matriz **A**, é equivalente a escrever $trans(\mathbf{A})$.
$\|\|\mathbf{a}\|\|$	Módulo do vetor **a**, é equivalente a escrever $\sqrt{\sum_i a_i^2}$.
$\|\|\mathbf{a}\|\|^2$	Módulo ao quadrado do vetor **a**, é equivalente a escrever $\sum_i a_i^2$ ou $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$ se **a** é um vetor coluna.
$\|\|\mathbf{a}\|\|_{\mathbf{B}}^2$	Módulo ao quadrado ponderado do vetor **a**, é equivalente a escrever $\sum_i b_{ii} a_i^2$ ou $(\sqrt{\mathbf{B}}\ \mathbf{a})^{\mathrm{T}}\sqrt{\mathbf{B}}\ \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{a}$ se **a** é um vetor coluna. Sendo que **B** é uma matriz diagonal.
$vec(\mathbf{A})$	Vectorização de uma matriz, de modo que esta sofre uma transformação linear que converte à matriz num vetor coluna igual a $[a_{1,1},\ldots,a_{m,1},a_{1,2},\ldots,a_{m,2},\ldots,a_{1,n},\ldots,a_{m,n}]^{\mathrm{T}}$.
$diag(a_1,...,a_M)$	Matriz diagonal com elementos a_m, de modo que $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq M$.
$blkdiag(\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_K)$	Matriz formada colocando diagonalmente, blocos de matrizes $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{M_k \times N_k}$, com $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq K$.
$\overset{\searrow}{\bigcup}_{k=1}^{K} \mathbf{A}_k$	$blkdiag(\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_K)$
$blkhorz(\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_K)$	Matriz formada colocando horizontalmente, blocos de matrizes $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{M \times N_k}$, com $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq K$.
$\overset{\rightarrow}{\bigcup}_{k=1}^{K} \mathbf{A}_k$	$blkhorz(\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_K)$
$blkvert(\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_K)$	Matriz formada colocando verticalmente, blocos de matrizes $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{M_k \times N}$, com $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq K$.
$\overset{\downarrow}{\bigcup}_{k=1}^{K} \mathbf{A}_k$	$blkvert(\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_K)$

Parte 1

1. Derivada de funções com variável vetorial

1.1 Derivada de $e(\mathbf{x})$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

Definição 1.1.1 Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor linha com elementos $x_n \in \mathbb{R}$ de modo que $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq N$, a função $e(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é um escalar, e a função $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ é um vetor coluna, então definimos que:

$$\frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \bigcup_{n=1}^{\rightarrow N} \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_n} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \bigcup_{n=1}^{\rightarrow N} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \bigcup_{n=1}^{\rightarrow N} \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \tag{1.3}$$

Definição 1.1.2 Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna com elementos $x_n \in \mathbb{R}$ de modo que $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq N$, a função $e(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é um escalar, e a função $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ é um vetor coluna, então definimos que:

$$\frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = trans\left(\frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right) = vec\left(\frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right) = \overset{\downarrow}{\bigcup_{n=1}^{N}} \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_n} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = vec\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right) = \overset{\downarrow}{\bigcup_{n=1}^{N}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \overset{\downarrow}{\bigcup_{n=1}^{N}} \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \tag{1.6}$$

1.2 Derivada de $\mathbf{A}\mathbf{x}$

Teorema 1.2.1 Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna com elementos x_n de modo que $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq N$, e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ é uma matriz com elementos a_{mn} de modo que $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq M$, então se cumpre que:

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n} = a_{:n} \tag{1.7}$$

A demostração pode ser vista na Prova 1.1.

Corolário 1.2.2 — Derivada de $\mathbf{A}\mathbf{x}$ em relação ao vector $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$. Aplicando a Definição 1.1.1 junto ao Teorema 1.2.1, é fácil deduzir que:

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:N} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \tag{1.8}$$

Corolário 1.2.3 — Derivada de $\mathbf{A}\mathbf{x}$ em relação ao vector $\mathbf{x}$. Aplicando a Definição 1.1.2 junto ao Teorema 1.2.1, é fácil deduzir que:

$$\frac{\partial \mathbf{Ax}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{:1} \\ a_{:2} \\ \vdots \\ a_{:N} \end{bmatrix} = vec(\mathbf{A}) \tag{1.9}$$

Corolário 1.2.4 — Derivada de $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ em relação ao vector $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$. Aplicando a Definição 1.1.1 junto ao Teorema 1.2.1 e sabendo que $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ é um vetor linha, é fácil deduzir que:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \tag{1.10}$$

Corolário 1.2.5 — Derivada de $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ em relação ao vector $\mathbf{x}$. Aplicando a Definição 1.1.2 junto ao Teorema 1.2.1 e sabendo que $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ é um vetor linha, é fácil deduzir que:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} \tag{1.11}$$

1.3 Derivada de $||\mathbf{Ax}||^2$

Teorema 1.3.1 Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna com elementos x_n de modo que $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq N$, e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ é uma matriz com elementos a_{mn} de modo que $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq M$, então se cumpre que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial ||\mathbf{Ax}||^2}{\partial x_n} = \frac{\partial (\mathbf{Ax})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Ax})}{\partial x_n} &= 2\left(\mathbf{Ax}\right)^{\mathrm{T}} a_{:n} \\ &= 2\left(a_{:n}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{Ax} \end{aligned} \tag{1.12}$$

A demostração pode ser vista na Prova 1.2.

Corolário 1.3.2 — Derivada de $||\mathbf{Ax}||^2$ em relação ao vector $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$. Aplicando a Definição 1.1.1 junto ao Teorema 1.3.1, é fácil deduzir que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{Ax}||^2}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial \left(\mathbf{Ax}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{Ax}\right)}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = 2\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}\right)^{\mathrm{T}} \tag{1.13}$$

Corolário 1.3.3 — Derivada de $||\mathbf{Ax}||^2$ em relação ao vector $\mathbf{x}$. Aplicando a Definição 1.1.2 junto ao Teorema 1.3.1, é fácil deduzir que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{Ax}||^2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \left(\mathbf{Ax}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{Ax}\right)}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} \tag{1.14}$$

1.4 Derivada de $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}$

Teorema 1.4.1 Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna com elementos x_n de modo que $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq N$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ é um vetor coluna com elementos b_m de modo que $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq M$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ é uma matriz com elementos a_{mn}, e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ é uma matriz diagonal, então se cumpre que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial ||\mathbf{Ax}-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2}{\partial x_n} &= \frac{\partial (\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})}{\partial x_n} = 2\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}a_{:n} \\ &= 2\left(a_{:n}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right) \end{aligned} \tag{1.15}$$

A demostração pode ser vista na Prova 1.3.

Corolário 1.4.2 — Derivada de $||\mathbf{Ax}-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2$ em relação ao vector $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$. Aplicando a Definição 1.1.1 junto ao Teorema 1.4.1, é fácil deduzir que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{Ax}-\mathbf{b}||^2}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = 2\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{CA} \tag{1.16}$$

Corolário 1.4.3 — Derivada de $||\mathbf{Ax}-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2$ em relação ao vector $\mathbf{x}$. Aplicando a Definição 1.1.2 junto ao Teorema 1.4.1, é fácil deduzir que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{Ax}-\mathbf{b}||^2}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right) \tag{1.17}$$

1.5 Derivada de $||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2$ (Aproximação e exato)

Teorema 1.5.1 — Valor exato. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ é um vetor coluna, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é uma função de valor vectorial, e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ é uma matriz diagonal, então se cumpre que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}\right], \tag{1.18}$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

A demostração pode ser vista na Prova 1.4.

Teorema 1.5.2 — Valor aproximado. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ é um vetor coluna, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é uma função de valor vectorial, e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ é uma matriz diagonal, então se cumpre que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2}{\partial \mathbf{x}} \approx 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left[\mathbf{J}(\mathbf{p})\left(\mathbf{x}-\mathbf{p}\right)-\left(\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{p})\right)\right] \tag{1.19}$$

Onde é considerada a aproximação $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{p})+\mathbf{J}(\mathbf{p})\left(\mathbf{x}-\mathbf{p}\right)$, usando a serie de Taylor para funções multivariáveis. Sendo $\mathbf{p}$ um ponto fixo no domínio de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ao redor do qual é feita aproximação da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, e $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ avaliado no ponto $\mathbf{p}$.

A demostração pode ser vista na Prova 1.5.

1.6 Derivada de segundo ordem de $||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2$ (Aproximação)

Teorema 1.6.1 — Valor exato. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ é um vetor coluna, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ é uma função de valor vectorial, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ é uma matriz diagonal, e definida a função $e(\mathbf{x})$,

$$e(\mathbf{x}) = ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}. \tag{1.20}$$

Então a matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ de $e(\mathbf{x})$ é igual a:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\left(\frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) = 2\mathbf{B}_H(\mathbf{x})\mathbf{B}_D(\mathbf{x}) + 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{J}(\mathbf{x}), \tag{1.21}$$

onde

$$\mathbf{B}_H(\mathbf{x}) = \overset{\rightarrow N}{\bigcup_{n=1}} \left\{\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}}{\partial x_n}\right\}, \tag{1.22}$$

$$\mathbf{B}_D(\mathbf{x}) = \overset{\searrow N}{\bigcup_{n=1}} \left\{\mathbf{C}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}\right)\right\}. \tag{1.23}$$

A demostração pode ser vista na Prova 1.6.

Teorema 1.6.2 — Valor aproximado. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ é um vetor coluna, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ é uma função de valor vectorial, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ é uma matriz diagonal, e definida a função $e(\mathbf{x})$,

$$e(\mathbf{x}) = ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}. \tag{1.24}$$

Então a matriz Hessiana de $e(\mathbf{x})$ é igual a:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\left(\frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) \approx 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{J}(\mathbf{p}) \tag{1.25}$$

Onde é considerada a aproximação $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}(\mathbf{p})\,(\mathbf{x}-\mathbf{p})$, usando a serie de Taylor para funções multivariáveis. Sendo $\mathbf{p}$ um ponto fixo no domínio de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ao redor do qual é feita aproximação da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, e $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ avaliado no ponto $\mathbf{p}$.

A demostração pode ser vista na Prova **??**.

1.7 Derivada de $||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}+\alpha||\mathbf{x}-\mathbf{q}||^2_{\mathbf{D}}$ (Aproximação)

Teorema 1.7.1 Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ é um vetor coluna, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ é uma função de valor vectorial, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ é uma matriz diagonal, e

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz diagonal, então se cumpre que:

$$\frac{\partial \left(||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2 + \alpha ||\mathbf{x} - \mathbf{q}||_{\mathbf{D}}^2 \right)}{\partial \mathbf{x}} \approx 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \left[\mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{x} - \mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{p} - \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{p}) \right] + 2\alpha \mathbf{D} \left(\mathbf{x} - \mathbf{q} \right) \quad (1.26)$$

Onde é considerada a aproximação $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}(\mathbf{p})\,(\mathbf{x} - \mathbf{p})$, usando a serie de Taylor para funções multivariáveis. Sendo $\mathbf{p}$ um ponto fixo no domínio de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ao redor do qual é feita aproximação da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, e $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ avaliado no ponto $\mathbf{p}$.

A demostração pode ser vista na Prova 1.7.

1.8 Provas dos theoremas

Prova 1.1 — Prova do Teorema 1.2.1. Dados, uma matriz $\mathbf{A} = [a_{:1}\ a_{:2}\ \dots\ a_{:n}\ \dots\ a_{:N}]$ e um vetor coluna $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n\ \dots\ x_N]^{\mathrm{T}}$, podemos expressar que:

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_n}\mathbf{x} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_n} = \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_n} \tag{1.27}$$

Sabendo que $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_n}$ é igual a um vetor com um 1 na posição n e 0 em qualquer outra posição, obtemos que

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n} = [a_{:1}\ a_{:2}\ \dots\ a_{:n}\ \dots\ a_{:N}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{:n} \tag{1.28}$$

Prova 1.2 — Prova do Teorema 1.3.1. Dados, uma matriz $\mathbf{A} = [a_{:1}\ a_{:2}\ \dots\ a_{:n}\ \dots\ a_{:N}]$ e um vetor coluna $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n\ \dots\ x_N]^{\mathrm{T}}$, podemos expressar que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{A}\mathbf{x}||^2}{\partial x_n} = \frac{\partial\,(\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{x}) + (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n} \tag{1.29}$$

Pelo visto no Teorema 1.2.1 podemos substituir valores na Eq. (1.29) e obter:

$$\frac{\partial ||\mathbf{A}\mathbf{x}||^2}{\partial x_n} = (a_{:n})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}} a_{:n} \tag{1.30}$$

Como cada um dos somandos da equação anterior é um escalar, podemos aplicar o operador transposta (T) sobre qualquer somando sem alterar o resultado; de modo que temos duas possíveis forma de expressar a solução:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial ||\mathbf{A}\mathbf{x}||^2}{\partial x_n} &= 2\,(\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}} a_{:n} \\ &= 2\,(a_{:n})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Prova 1.3 — Prova do Teorema 1.4.1. Dados, uma matriz $\mathbf{A} = [a_{:1}\ a_{:2}\ \dots\ a_{:n}\ \dots\ a_{:N}]$, uma matriz diagonal $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$, um vetor coluna $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n\ \dots\ x_N]^{\mathrm{T}}$, e um vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, podemos expressar que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}}{\partial x_n} = \frac{\partial\,(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}) + (\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n}\right) \tag{1.32}$$

Pelo visto no Teorema 1.2.1, podemos substituir valores na Eq. (1.32) e obter:

$$\frac{\partial ||\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}}{\partial x_n} = (a_{:n})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}) + (\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}a_{:n} \tag{1.33}$$

Como cada um dos somandos da equação anterior é um escalar, podemos aplicar o operador transposta (T) sobre qualquer somando sem alterar o resultado; de modo que temos duas possíveis forma de expressar a solução:

$$\begin{aligned}\frac{\partial||\mathbf{Ax}-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}}{\partial x_n} &= 2\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}a_{:n}\\ &= 2\left(a_{:n}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right)\end{aligned} \tag{1.34}$$

Prova 1.4 — Prova do Teorema 1.5.1. Dados, uma função $\mathbf{f}:\mathbb{R}^N\rightarrow\mathbb{R}^M$, uma matriz diagonal $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{M\times M}$, um vetor coluna $\mathbf{x}=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\ \ldots\ x_N]^{\mathrm{T}}$, e um vetor coluna $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^M$; podemos expressar que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}}{\partial x_n} &= \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b})}{\partial x_n}\\ &= \left(\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}\right)+\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right).\\ &= 2\left(\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}\right)\end{aligned} \tag{1.35}$$

Assim, usando a Definição 1.1.2 junto com a Eq. (1.35) nos obtemos:

$$\frac{\partial||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}\right) \tag{1.36}$$

Prova 1.5 — Prova do Teorema 1.5.2. Dados, uma função $\mathbf{f}:\mathbb{R}^N\rightarrow\mathbb{R}^M$, uma matriz diagonal $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{M\times M}$, um vetor coluna $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$, um vetor coluna $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^M$, e considerando a aproximação $\mathbf{f}(\mathbf{x})\approx\mathbf{f}(\mathbf{p})+\mathbf{J}(\mathbf{p})\left(\mathbf{x}-\mathbf{p}\right)$, usando a serie de Taylor para funções multivariáveis; podemos expressar que:

$$\frac{\partial||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{x}} \approx \frac{\partial||\mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{x}-[\mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{p}+\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{p})]\,||^2_{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{x}} \tag{1.37}$$

Pelo visto no Corolário 1.4.3, podemos substituir os valores, $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ e $[\mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{p}+\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{p})]$, da Eq. (1.37), nas variáveis $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ do Corolário 1.4.3, respectivamente. Assim obtemos:

$$\frac{\partial||\mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{x}-[\mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{p}+\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{p})]\,||^2_{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{x}-\mathbf{J}(\mathbf{p})\mathbf{p}-\mathbf{b}+\mathbf{f}(\mathbf{p})\right) \tag{1.38}$$

Prova 1.6 — Prova do Teorema 1.6.1. Dados, uma função $\mathbf{f}:\mathbb{R}^N\rightarrow\mathbb{R}^M$, uma matriz diagonal $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{M\times M}$, um vetor coluna $\mathbf{x}=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\ \ldots\ x_N]^{\mathrm{T}}$, e um vetor coluna $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^M$; podemos expressar que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{x}}\right) &= \frac{\partial 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b})}{\partial x_n}\\ &= 2\frac{\partial\mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}}{\partial x_n}\mathbf{C}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}\right)+2\mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b})}{\partial x_n}.\\ &= 2\frac{\partial\mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}}{\partial x_n}\mathbf{C}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}\right)+2\mathbf{J}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n}\end{aligned} \tag{1.39}$$

Assim, usando a Definição 1.1.1 junto com a Eq. (1.39) nos obtemos:

$$XXXXXXXXXXXXXXX \tag{1.40}$$

Prova 1.7 — Prova do Teorema 1.7.1. Dados, uma função $\mathbf{f}:\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, uma matriz diagonal $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$, uma matriz diagonal $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, um vetor coluna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, um vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$,e um vetor coluna $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$, podemos expressar que:

$$\frac{\partial ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2+\alpha||\mathbf{x}-\mathbf{q}||_{\mathbf{D}}^2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2}{\partial \mathbf{x}} + \alpha \frac{\partial ||\mathbf{x}-\mathbf{q}||_{\mathbf{D}}^2}{\partial \mathbf{x}}. \tag{1.41}$$

Usando o Corolário 1.4.3 na Eq. (1.41) obtemos:

$$\frac{\partial ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2+\alpha||\mathbf{x}-\mathbf{q}||_{\mathbf{D}}^2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2}{\partial \mathbf{x}} + \alpha 2\mathbf{D}\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right). \tag{1.42}$$

Usando o Teorema 1.5.2 na Eq. (1.42) obtemos:

$$\frac{\partial ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2+\alpha||\mathbf{x}-\mathbf{q}||_{\mathbf{D}}^2}{\partial \mathbf{x}} \approx 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left[\mathbf{J}(\mathbf{p})\left(\mathbf{x}-\mathbf{p}\right)-\left(\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{p})\right)\right]+2\alpha\mathbf{D}\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right). \tag{1.43}$$

2. Minimização de funções com variável vetorial

R Palavras chave: Pseudo-inversa de Moore-Penrose, regularização de Tikhonov, problema inverso, minimização do erro quadrático.

2.1 Minimização de $||\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}$

Teorema 2.1.1 Dados, um vetor coluna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, um vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$, uma matriz diagonal $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$, e definida a Eq. (2.1),

$$e(\mathbf{x}) = ||\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}. \tag{2.1}$$

Se desejamos ter o valor $\hat{\mathbf{x}}$ que minimiza o escalar $e(\hat{\mathbf{x}})$, devemos usar a Eq. (2.2),

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{b}. \tag{2.2}$$

Assim, o mínimo existe só sim $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}$ tem inversa.

A demostração pode ser vista na Prova 2.1.

2.2 Minimização de $||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}$ (solução iterativa)

Teorema 2.2.1 Dados, um vetor coluna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, um vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, uma matriz diagonal $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$, e definida a Eq. (2.3),

$$e(\hat{\mathbf{x}}) = ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2_{\mathbf{C}}. \tag{2.3}$$

Se desejamos ter o valor $\hat{\mathbf{x}}$ que minimiza o escalar $e(\hat{\mathbf{x}})$, este valor pode ser achado usando iterativamente a Eq. (2.4),

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k + \left[\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_k)\right]^{-1}\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left[\mathbf{b}-\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k)\right] \tag{2.4}$$

Onde $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. A busca iterativa é considerada falida quando $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_k)^{\mathrm{T}}$ $\mathbf{C}$ $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_k)$ não tem inversa.

A demostração pode ser vista na Prova 2.2.

2.3 Minimização de $||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2+\alpha||\mathbf{x}||_{\mathbf{D}}^2$ (solução iterativa)

Teorema 2.3.1 Sabendo que, $\mathbf{x}$ é um vetor com N elementos, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{b}$ são vetores coluna de M elementos sendo $\mathbf{b}$ uma constante, $\mathbf{C}$ uma matriz diagonal de $M \times M$ e $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal de $N \times N$: Se desejamos minimizar o valor de E, visto na Eq. (2.3), em relação a $\mathbf{x}$.

$$E = ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2+\alpha||\mathbf{x}||_{\mathbf{D}}^2 \tag{2.5}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{x}_k + \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)+\alpha\mathbf{D}\right]^{-1}\left[\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\right)-\alpha\mathbf{D}\mathbf{x}\right] \tag{2.6}$$

Onde $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

2.4 Minimização de $||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2+\alpha||\mathbf{x}-\mathbf{q}||_{\mathbf{D}}^2$ (solução iterativa)

2.5 Minimização de $\frac{||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||^2}{||\mathbf{b}||^2}+\alpha\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{q}||^2}{||\mathbf{q}||^2}$ (solução iterativa)

Inventado por mi ..., creo.

2.6 Minimização de $||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{b}||_{\mathbf{B}^{-2}}^2+\alpha||\mathbf{x}-\mathbf{q}||_{\mathbf{Q}^{-2}}^2$ (solução iterativa)

Inventado por mi ..., creo Nenhun valor de **b** ou **q** pode ser zero.

2.7 Provas dos teoremas

Prova 2.1 — Prova do Teorema 2.1.1. Dados, um vetor coluna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, um vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$, uma matriz diagonal $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times M}$, e definida a Eq. (2.7),

$$e(\mathbf{x}) = ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2. \tag{2.7}$$

Para achar o valor $\hat{\mathbf{x}}$ que gere o menor valor de $e(\hat{\mathbf{x}})$, é aplicado o critério que um mínimo ou máximo pode ser achado quando $\frac{\partial e(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = [0\ 0\ \ldots\ 0]^{\mathrm{T}}$. Assim, usando o Corolário 1.4.3 podemos rescrever esta igualdade como a Eq. (2.8),

$$2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right) = [0\ 0\ \ldots\ 0]^{\mathrm{T}}, \tag{2.8}$$

de modo que pode ser obtido:

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{b}. \tag{2.9}$$

Dado que a solução é única e a função $e(\mathbf{x})$ é sempre positiva, então o valor de $\hat{\mathbf{x}}$ é um mínimo.

Prova 2.2 — Prova do Teorema 2.2.1. Dados, um vetor coluna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, um vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, uma matriz diagonal $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times M}$, e definida a Eq. (2.10),

$$e(\mathbf{x}) = ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}||_{\mathbf{C}}^2. \tag{2.10}$$

Para achar o valor $\hat{\mathbf{x}}$ que gere o menor valor de $e(\hat{\mathbf{x}})$, é aplicado o critério que um mínimo ou máximo pode ser achado quando $\frac{\partial e(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = [0\ 0\ \ldots\ 0]^{\mathrm{T}}$. Assim, usando o Teorema 1.5.2 podemos rescrever esta igualdade como a Eq. (2.11),

$$2\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left[\mathbf{J}(\mathbf{p})\left(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}\right) - \left(\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{p})\right)\right] \approx \frac{\partial e(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = [0\ 0\ \ldots\ 0]^{\mathrm{T}}, \tag{2.11}$$

de modo que pode ser aproximado $\hat{\mathbf{x}}$ como:

$$\hat{\mathbf{x}} \approx \mathbf{p} + \left[\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{J}(\mathbf{p})\right]^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{p})\right). \tag{2.12}$$

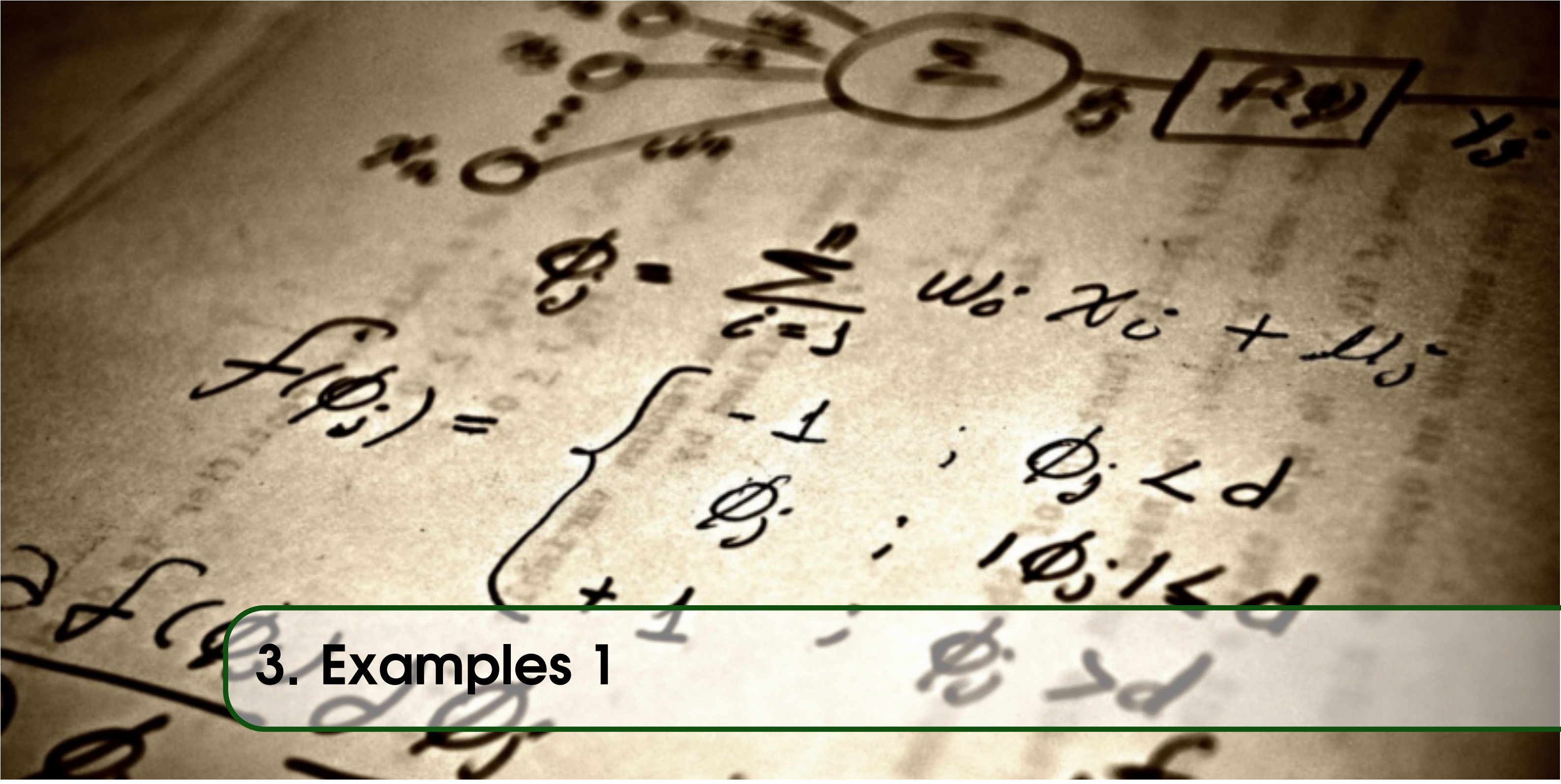
Assim, quanto mais próximo seja a $\hat{\mathbf{x}}$ o valor escolhido $\mathbf{p}$, a Eq. (2.12) fica mais próximo a uma igualdade. Por outro lado, a equação nos indica que dado um ponto $\mathbf{p}$ qualquer, $\left[\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{J}(\mathbf{p})\right]^{-1}$ $\mathbf{J}(\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$ $\left(\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{p})\right)$ é um ponto próximo de $\mathbf{p}$ na direção de um mínimo ou máximo de $e(\mathbf{x})$. Assim, um bom critério para procurar um mínimo ou máximo é seguir a seguinte equação iterativa,

$$\mathbf{p}_{k+1} \leftarrow \mathbf{p}_k + \left[\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)\right]^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\left(\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_k)\right), \tag{2.13}$$

iniciando desde um $\mathbf{p}_0$ qualquer, ate que $\mathbf{p}_k$ seja muito próximo a $\mathbf{p}_{k+1}$.

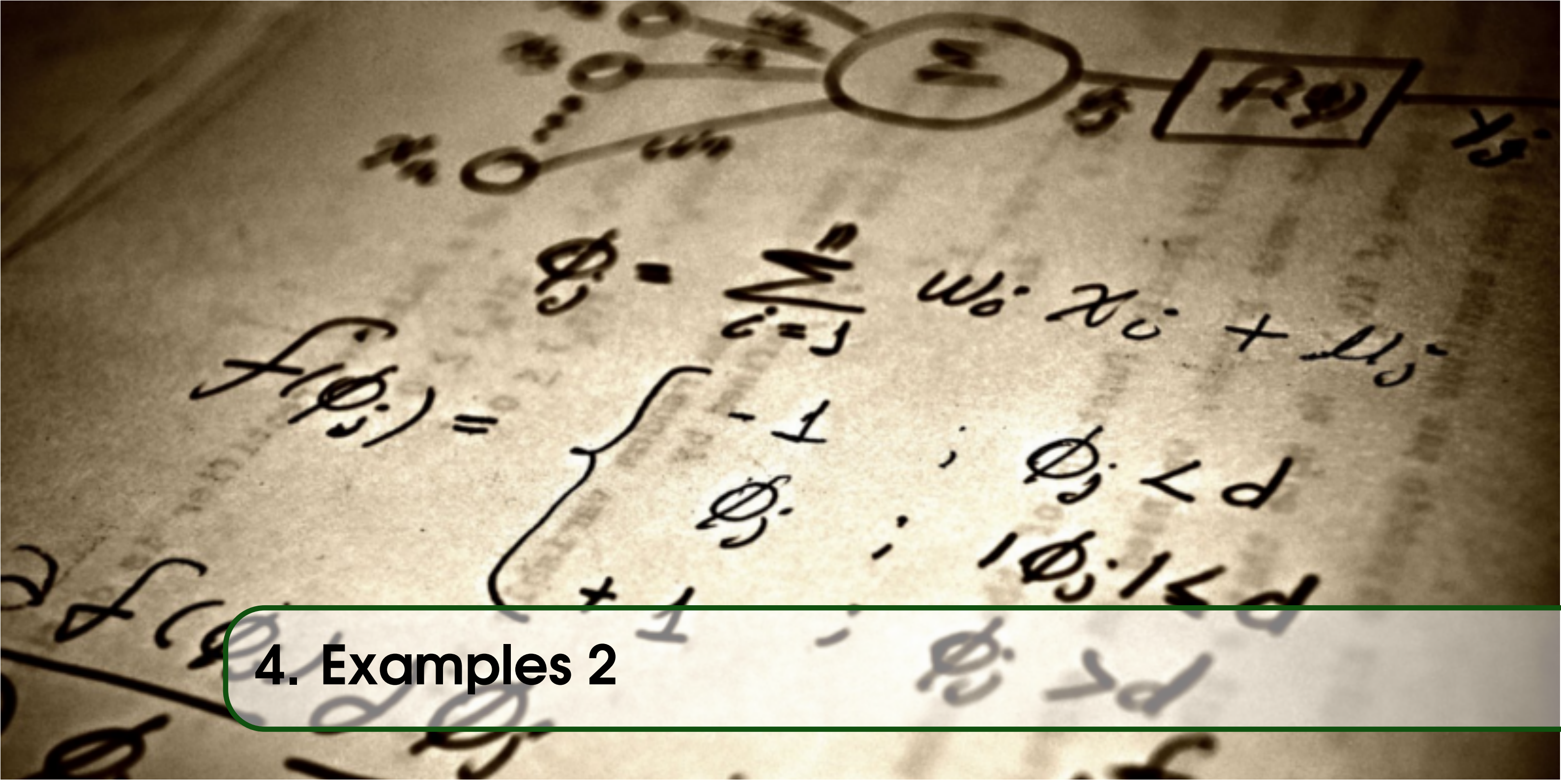
Dado que a solução é única e a função $e(\mathbf{x})$ é sempre positiva, então o valor de $\hat{\mathbf{x}}$ é um mínimo.

Parte 2



3. Examples 1

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.



4. Examples 2

This is an example of examples.

■ **Example 4.1 — Example name.** Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

$$f(x) \tag{4.1}$$

■

Exercise 4.1 Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. ■

Problema 4.1 Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. ■

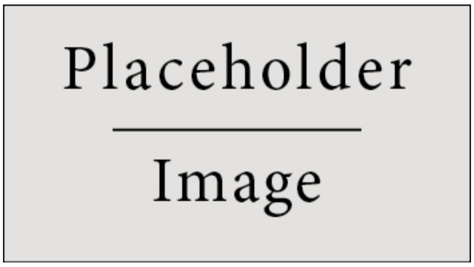
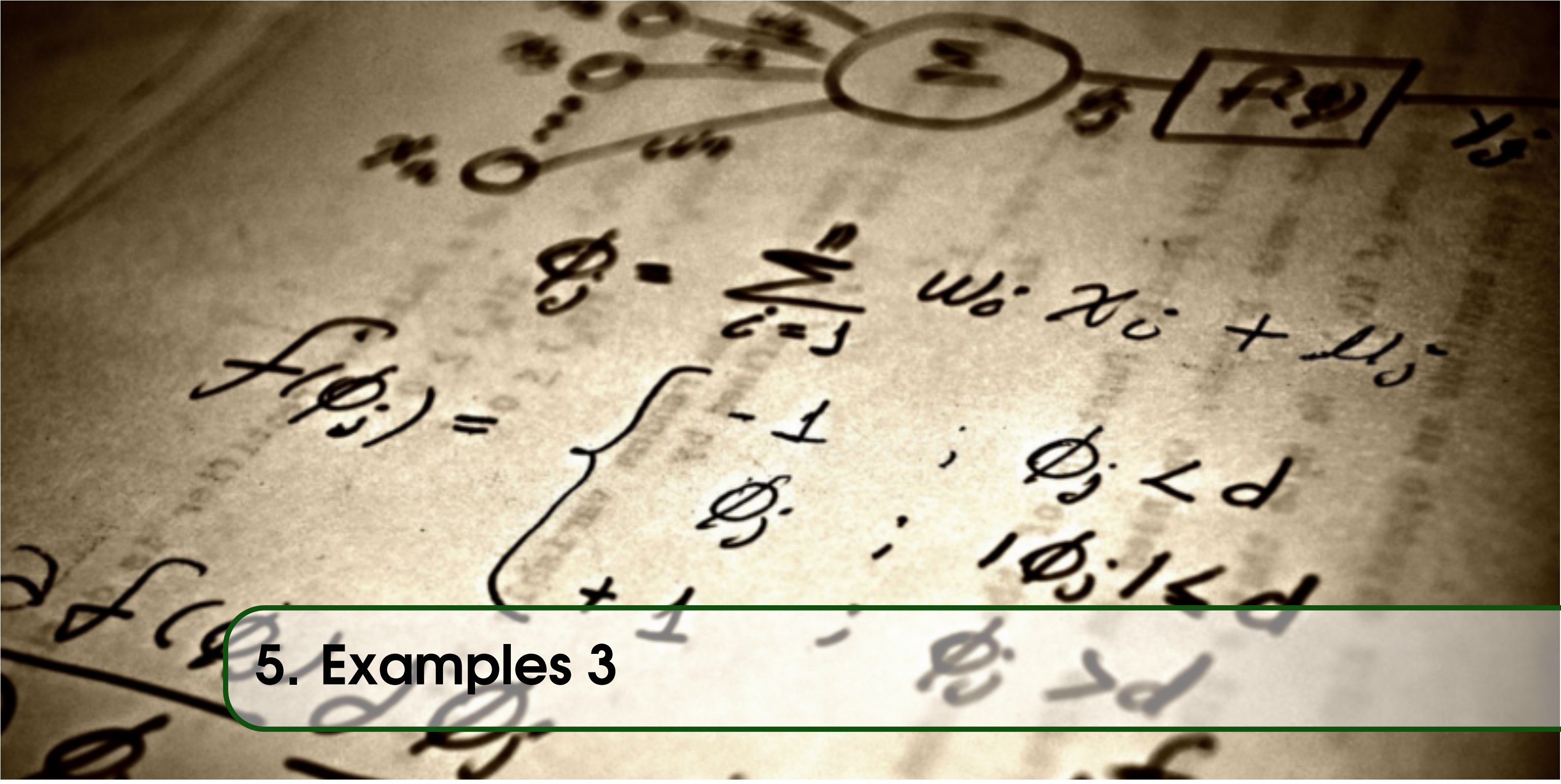


Figure 4.1: Figure caption



5. Examples 3

Teorema 5.0.1 — Name of the theorem. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

$$f(x) \tag{5.1}$$

Teorema 5.0.2 Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

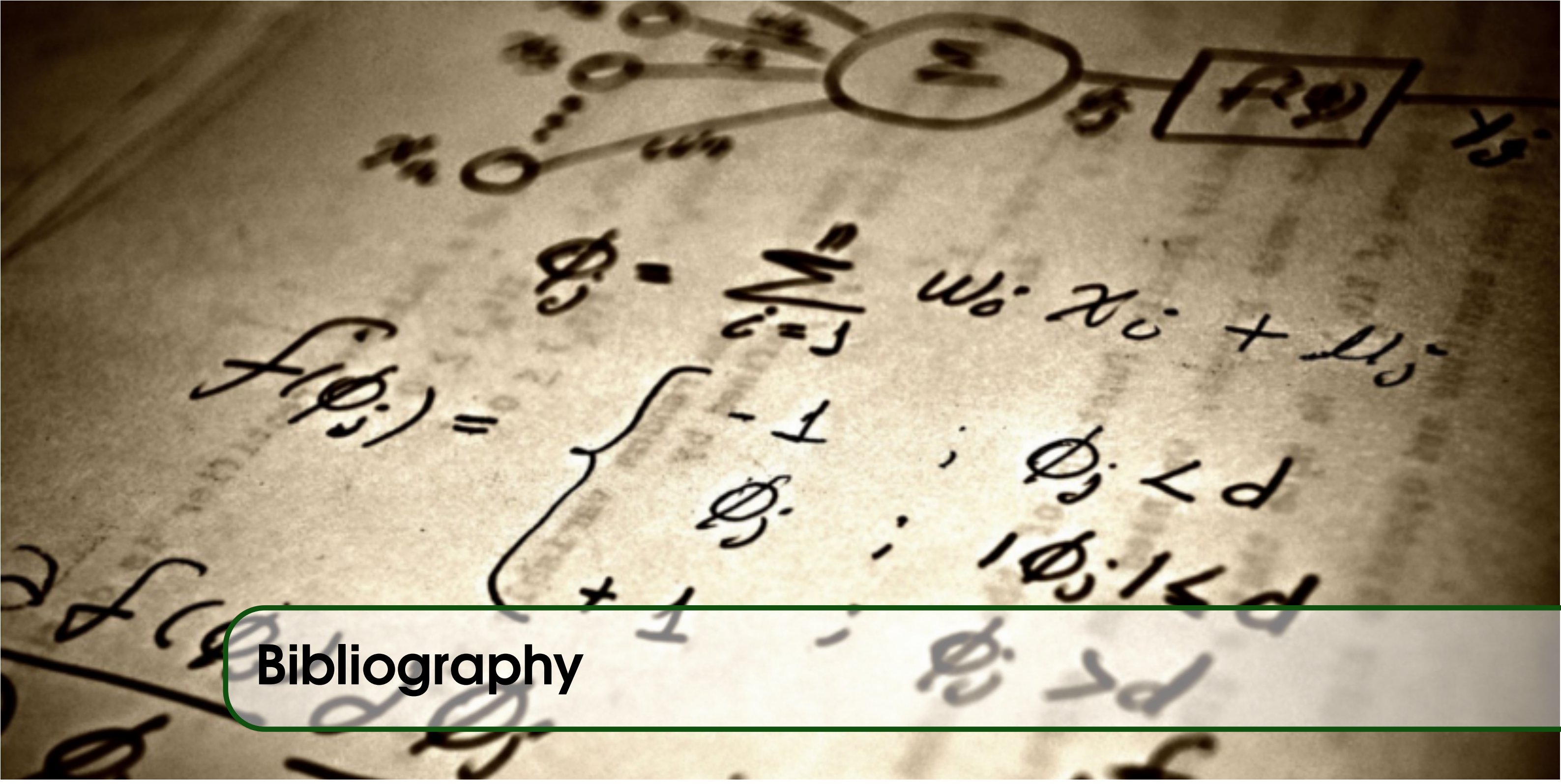
Definição 5.0.1 — Definition name. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Corolário 5.0.3 — Corollary name. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Proposition 5.0.4 — Proposition name. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

$$f(x) \tag{5.2}$$

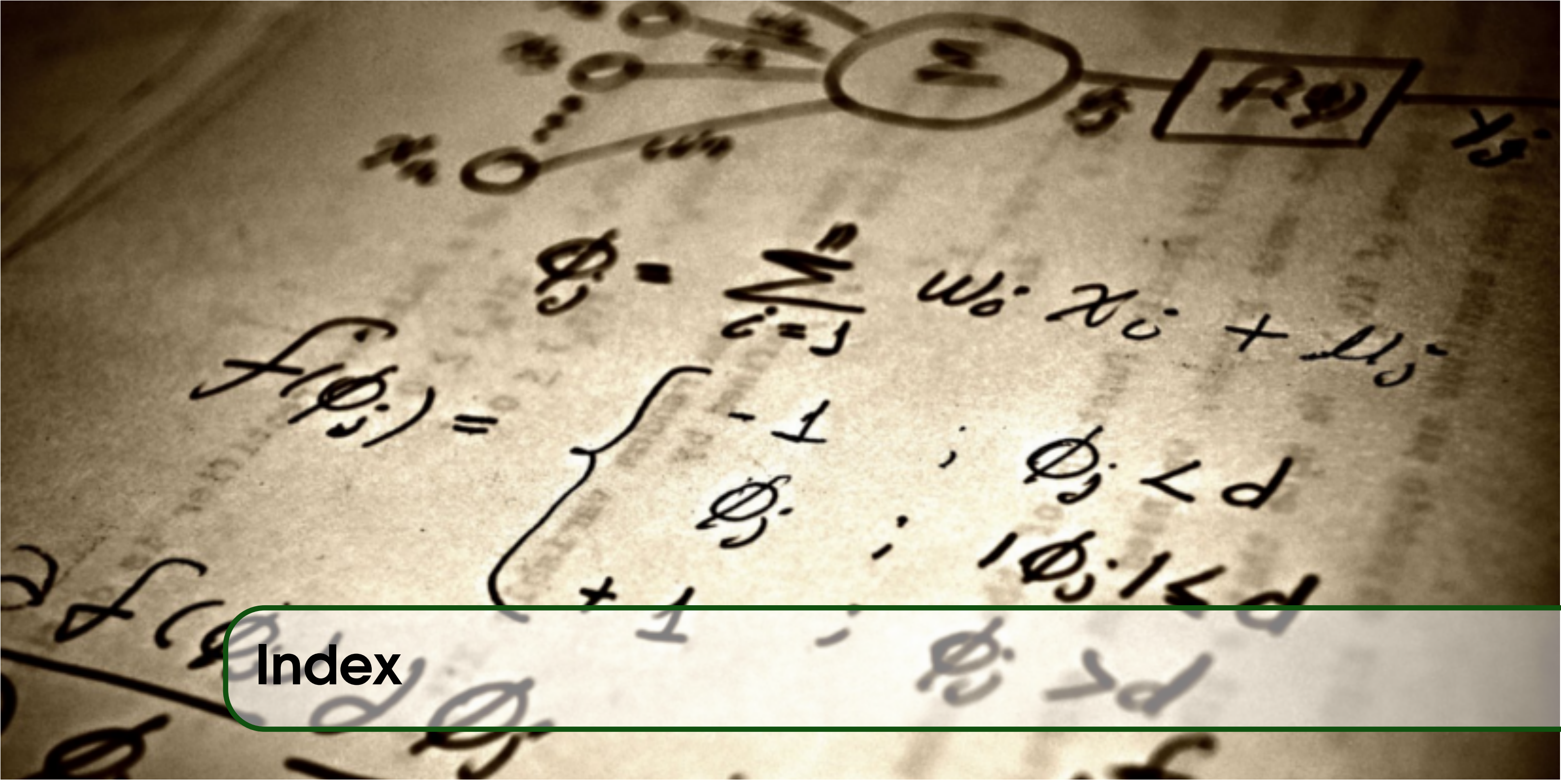
Proposition 5.0.5 Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.



Bibliography

Books

Articles



Index