Fusão e rotação

Fernando Pujaico Rivera

July 5, 2016

Abstract

Este trabalho mostra como achar a matriz de transformação M^{-1} de um vetor de aceleração $\mathbf{A}_n$ numa base nova qualquer, a um vetor $\mathbf{A}_c$ descrito em função da base canônica ($\mathbf{A}_c = M^{-1}\mathbf{A}_n$).

Para achar a matriz M são usados os vetores de gravidade $\mathbf{g}_n$ e $\mathbf{g}_c$ sendo estes referenciados á base nova e a base canônica, respetivamente.

Chapter 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é mostrar como achar a matriz de transformação M^{-1}, para ser usado com qualquer vetor de aceleração $\mathbf{A}_n$, numa base nova qualquer, que deba ser transformado a um vetor $\mathbf{A}_c$, na base canônica; de modo que $\mathbf{A}_c = M^{-1}\mathbf{A}_n$.

Para achar a matriz M debem ser usados os vetores de gravidade $\mathbf{g}_n$ e $\mathbf{g}_c$ sendo estes referenciados á base nova e a base canônica, respetivamente. O vetor de gravidade $\mathbf{g}_c$ foi obtido ao inicio do analises e o vetor $\mathbf{g}_n$ é a gravidade quando os sensores se movimentam. Assim ambos vetores são medidas de um mesmo sensor em diferentes tempos.

1.1 cálculo da gravidade

A gravidade $\mathbf{g}_n$ pode ser obtida diretamente usando os sensores do celular ($\mathbf{g}_{gravity}$). E também pode ser calculada em direção a partir do giroscópio ($\mathbf{g}_{gyroscope}$) dado que o modulo da gravidade não muda para cortas distancias. Assim aplicando fusão de dados podemos afirmar que

$$\mathbf{g}_n = \alpha\ \mathbf{g}_{gravity} + (1-\alpha)\ \mathbf{g}_{gyroscope}. \tag{1.1}$$

Onde α é escolhido entre $0 \leq \alpha \leq 1$ a critério do desenhador.

Chapter 2

Apêndice

2.1 Velocidade de giro sobre um eixo

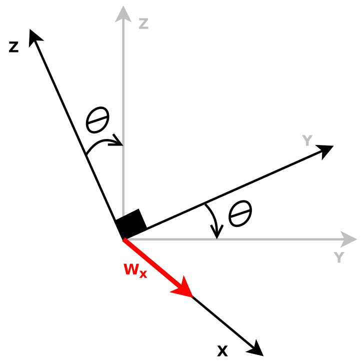


Figure 2.1: Velocidade de giro sobre o eixo $\mathbf{X}$

Acknowledgement 1 *A velocidade de giro sobre o eixo* $\mathbf{X}$ *pode ser representada mediante um vetor. No caso da Fig. 2.1 pode-se ver que que os eixos coordenados* $\{\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ *estão girando de forma horaria um angulo* θ*, tendo como eixo de giro a* $\mathbf{X}$*. Assim define-se a velocidade de giro como o vetor* $\mathbf{w}_x \equiv (w_x, 0, 0)$*, onde*

$$w_x = \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.1}$$

Acknowledgement 2 *Pode-se generalizar o visto no Acknowledgement 1, quando temos um vetor de velocidade de giro* $\mathbf{w} \equiv (w_x, w_y, w_z)$*. Este vetor de velocidade de giro pode-se interpretar como se os eixos coordenados* $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ *estão girando ao redor do vetor* $\mathbf{e}$ *com uma velocidade* $w_{\mathbf{e}}$*. Sendo*

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||} \tag{2.2}$$

$$w_{\mathbf{e}} = ||\mathbf{w}|| \tag{2.3}$$

2.2 Integrando a velocidade de giro

Acknowledgement 3 *Conhecendo que os eixos coordenados giram a uma velocidade* $w_{\mathbf{e}_i}$ *ao redor do vetor* $\mathbf{e}_i$ *em sentido horário, onde*

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{||\mathbf{w}_i||}, \tag{2.4}$$

$$w_{\mathbf{e}_i} = ||\mathbf{w}_i||, \tag{2.5}$$

e $\mathbf{w}_i$ *é o vetor de giro no instante* i.

Se integramos $w_{\mathbf{e}_i}$, *obtemos um angulo* θ_i *de giro horário dos eixos ao redor do vetor* $\mathbf{e}_i \equiv (e_{w_x}, e_{w_y}, e_{w_z})$. *Conhecendo o Theo. 2 sabemos que um vetor* $\mathbf{v}_i$ *na base original se veria como o vetor* $\mathbf{v}_{i+1}$ *na base nova*

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{R}_i \mathbf{v}_i, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i + e_{w_x}^2 (1 - \cos\theta_i) & e_{w_x} e_{w_y} (1 - \cos\theta_i) - e_{w_z} \sin\theta_i & e_{w_x} e_{w_z} (1 - \cos\theta_i) + e_{w_y} \sin\theta_i \\ e_{w_y} e_{w_x} (1 - \cos\theta_i) + e_{w_z} \sin\theta_i & \cos\theta_i + e_{w_y}^2 (1 - \cos\theta_i) & e_{w_y} e_{w_z} (1 - \cos\theta_i) - e_{w_x} \sin\theta_i \\ e_{w_z} e_{w_x} (1 - \cos\theta_i) - e_{w_y} \sin\theta_i & e_{w_z} e_{w_y} (1 - \cos\theta_i) + e_{w_x} \sin\theta_i & \cos\theta_i + e_{w_z}^2 (1 - \cos\theta_i) \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

2.3 Rotação de um vetor ao redor dum eixo

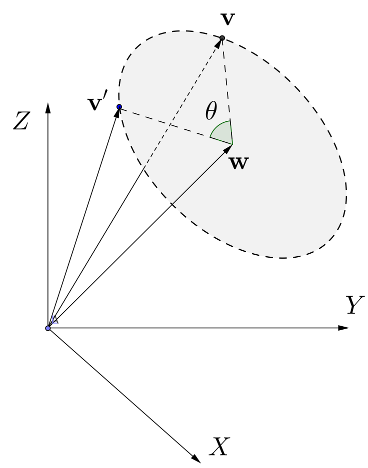


Figure 2.2: Rotação um angulo θ.

Acknowledgement 4 *A rotação* $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)^T$ *de um vetor* $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ *um angulo* θ, *em sentido anti-horário, ao redor de um vetor unitário* $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$, *ver Fig. 2.2, pode ser compactamente representada através de quaterniões.*

$$V' = QVQ^{-1}, \tag{2.8}$$

onde Q *e* W *são quatérnios de módulo 1*

$$Q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} W, \tag{2.9}$$

$$W = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k} \tag{2.10}$$

e

$$V = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \tag{2.11}$$

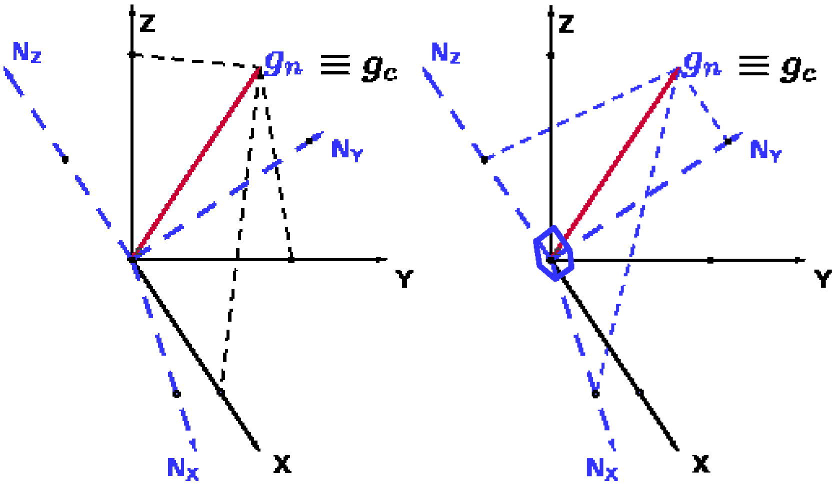
Acknowledgement 5 *A rotação* $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)^T$ *de um vetor* $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ *um angulo* θ, *em sentido anti-horário, ao redor de um vetor unitário* $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$, *ver Fig. 2.2, pode ser compactamente representada através de uma matriz.*

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v}, \tag{2.12}$$

Onde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta + w_x^2 (1 - \cos\theta) & w_x w_y (1 - \cos\theta) - w_z \sin\theta & w_x w_z (1 - \cos\theta) + w_y \sin\theta \\ w_y w_x (1 - \cos\theta) + w_z \sin\theta & \cos\theta + w_y^2 (1 - \cos\theta) & w_y w_z (1 - \cos\theta) - w_x \sin\theta \\ w_z w_x (1 - \cos\theta) - w_y \sin\theta & w_z w_y (1 - \cos\theta) + w_x \sin\theta & \cos\theta + w_z^2 (1 - \cos\theta) \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

2.4 Matriz de transformação entre bases



(a) Vetor de gravidade $\mathbf{g}_c$ na base canônica $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$. (b) Vetor de gravidade $\mathbf{g}_n$ na base nova $\{\mathbf{N}_X, \mathbf{N}_Y, \mathbf{N}_Z\}$.

Figure 2.3: Gravidade referenciado aos eixos canônicos e aos eixos novos.

Theorem 1 *Dado um vetor* $\mathbf{g}_n = (g_{n_x}, g_{n_y}, g_{n_z})$ *em uma base nova qualquer,* $\{\mathbf{N}_X, \mathbf{N}_Y, \mathbf{N}_Z\}$*, e um vetor* $\mathbf{g}_c = (g_{c_x}, g_{c_y}, g_{c_z})$ *na base canônica* $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$*, como na Fig. 2.3, A matriz de transformação* M*, onde* $M\mathbf{g}_c = \mathbf{g}_n$*, é definida como*

$$M \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{N}_X \\ \mathbf{N}_Y \\ \mathbf{N}_X \times \mathbf{N}_Y \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

onde $\mathbf{N}_X \equiv (n_1\ n_2\ n_3)$ *e* $\mathbf{N}_Y \equiv (n_4\ n_5\ n_6)$*.*

Para achar estes valores, debe ser definido $\mathbf{n}_i \equiv (n_1\ n_2\ n_3\ n_4\ n_5\ n_6)^T$*, de modo que resolvendo a seguinte equação iterativa.*

$$\mathbf{n}_0 = (100010)^T, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{n}_{i+1} = \mathbf{n}_i - \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{n}_i)\mathbf{J}(\mathbf{n}_i)\right)^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{n}_i)\mathbf{F}(\mathbf{n}_i), \tag{2.16}$$

obtemos o ultimo valor de $\mathbf{n}_i$*, onde todos estes convergem. Este valor representará a melhor aproximação para* M*. Os valores das funções matriciais* $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ *e* $\mathbf{J}(\mathbf{n})$ *podem ser calculados seguindo a equações (2.22) e (2.23)*

Proof. Pode ser achada a matriz de transformação do vetor $\mathbf{g}_c$, da base canônica $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ (Fig. 2.3b), ao vetor $\mathbf{g}_n$ na base nova $\{\mathbf{N}_X, \mathbf{N}_Y, \mathbf{N}_Z\}$ (Fig. 2.3a) usando a seguinte equação,

$$M\mathbf{g}_c = \mathbf{g}_n \tag{2.17}$$

Se assumimos que $\{\mathbf{N}_X, \mathbf{N}_Y, \mathbf{N}_Z\}$ são três vetores unitários, descritos em função da base canônica $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$, então podemos definir a equação anterior como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_X \\ \mathbf{N}_Y \\ \mathbf{N}_X \times \mathbf{N}_Y \end{pmatrix} \mathbf{g}_c = \mathbf{g}_n, \tag{2.18}$$

sendo que $\times$ é o produto crus vetorial.

Assim, também podemos dizer que

$$\mathbf{g}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_X \\ \mathbf{N}_Y \\ \mathbf{N}_X \times \mathbf{N}_Y \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{g}_n = M^{-1}\mathbf{g}_n \tag{2.19}$$

e consequentemente podemos afirmar que um vetor qualquer $\mathbf{A}_n$, na base nova, pode ser transformado em $\mathbf{A}_c$, na base canônica usando

$$\mathbf{A}_c = M^{-1}\mathbf{A}_n \tag{2.20}$$

Sabemos pela equação (2.17) e as propriedades dos vetores unitários $\{\mathbf{N}_X, \mathbf{N}_Y, \mathbf{N}_Z\}$ que:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_X.\mathbf{g}_c - g_{n_x} \\ \mathbf{N}_Y.\mathbf{g}_c - g_{n_y} \\ (\mathbf{N}_X \times \mathbf{N}_Y).\mathbf{g}_c - g_{n_z} \\ \mathbf{N}_X.\mathbf{N}_Y \\ \mathbf{N}_X.\mathbf{N}_X - 1 \\ \mathbf{N}_Y.\mathbf{N}_Y - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{2.21}$$

Se definimos $\mathbf{N}_X \equiv (n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{N}_Y \equiv (n_4, n_5, n_6)$ e $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ e usamos a equação (2.21) então é verdade que

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} n_1 g_{c_x} + n_2 g_{c_y} + n_3 g_{c_z} - g_{n_x} \\ n_4 g_{c_x} + n_5 g_{c_y} + n_6 g_{c_z} - g_{n_y} \\ (n_2 n_6 - n_3 n_5) g_{c_x} + (n_3 n_4 - n_1 n_6) g_{c_y} + (n_1 n_5 - n_2 n_4) g_{c_z} - g_{n_z} \\ n_1 n_4 + n_2 n_5 + n_3 n_6 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 \\ n_4^2 + n_5^2 + n_6^2 - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.22}$$

e o jacobiando de $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ é

$$\mathbf{J}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} g_{c_x} & g_{c_y} & g_{c_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{c_x} & g_{c_y} & g_{c_z} \\ -g_{c_y} n_6 + g_{c_z} n_5 & g_{c_x} n_6 - g_{c_z} n_4 & -g_{c_x} n_5 + g_{c_y} n_4 & g_{c_y} n_3 - g_{c_z} n_2 & -g_{c_x} n_3 + g_{c_z} n_1 & g_{c_x} n_2 - g_{c_y} n_1 \\ n_4 & n_5 & n_6 & n_1 & n_2 & n_3 \\ 2n_1 & 2n_2 & 2n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2n_4 & 2n_5 & 2n_6 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Utilizando a regularização de Tikhonov, para o caso não lineal, sobre $\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \mathbf{0}$, o valor de $\mathbf{n}$ que minimize $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ pode ser achado usando a seguinte equação iterativa

$$\mathbf{n}_{i+1} = \mathbf{n}_i - \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{n}_i)\mathbf{J}(\mathbf{n}_i)\right)^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{n}_i)\mathbf{F}(\mathbf{n}_i), \tag{2.24}$$

Onde o simbolo T significa transposta e $\mathbf{n}_0$ poderia ser, por exemplo, $(1, 0, 0, 0, 1, 0)$. ■

2.5 Rotação de eixos versus rotação de pontos

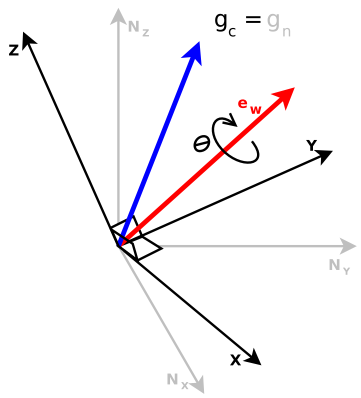


Figure 2.4: Giro dos eixos cordeados um angulo θ.

Theorem 2 *Dizer que os eixos giram um angulo θ em sentido horário ao redor de um vetor $\mathbf{e}_w$, como na Fig. 2.4, é o mesmo que dizer que um ponto gira um angulo θ em sentido anti-horário ao redor de um vetor unitário $\mathbf{e}_w = (e_{w_x}, e_{w_y}, e_{w_z})$.*

Assim, conhecendo o Acknow. 5, podemos dizer que um vetor $\mathbf{v}$ sofre uma transformação em $\mathbf{v}'$ quando os eixos giram em sentido horário ao redor de um vetor $\mathbf{e}_w$,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v}, \tag{2.25}$$

Onde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta + e_{w_x}^2(1-\cos\theta) & e_{w_x}e_{w_y}(1-\cos\theta) - e_{w_z}\sin\theta & e_{w_x}e_{w_z}(1-\cos\theta) + e_{w_y}\sin\theta \\ e_{w_y}e_{w_x}(1-\cos\theta) + e_{w_z}\sin\theta & \cos\theta + e_{w_y}^2(1-\cos\theta) & e_{w_y}e_{w_z}(1-\cos\theta) - e_{w_x}\sin\theta \\ e_{w_z}e_{w_x}(1-\cos\theta) - e_{w_y}\sin\theta & e_{w_z}e_{w_y}(1-\cos\theta) + e_{w_x}\sin\theta & \cos\theta + e_{w_z}^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Proof. É fácil de perceber quando analisamos o giro num eixo coordenado como na Fig. 2.5a.

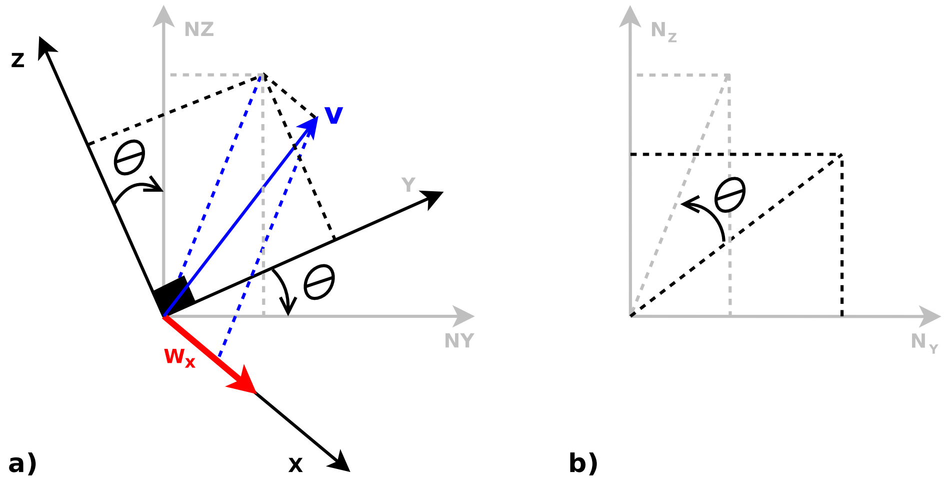


Figure 2.5: comparação da perceptiva de giro.

Esta figura mostra como os eixos coordenados $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ giram ao redor do eixo $\mathbf{X}$ um angulo θ no sentido horário. Para efeitos de exemplo, se presenta também o vetor $\mathbf{v}$ e suas distintas projeções no eixo canônico é o eixo girado, como pode ser visto na Fig. 2.5b. Assim, é fácil de ver que desde o ponto de vista do vetor, este gira um angulo θ em sentido anti-horário. ■