Cálculo de disparidade entre duas câmeras deslocadas e com um giro de perspectiva

Fernando Pujaico Rivera

23 de março de 2018

Resumo

Aqui descreverei como obter o mapa de disparidade, mediante a informação proveniente de duas câmeras deslocadas nos 3 eixos e com linhas de visão não paralelas.

1 Introdução

Este trabalho visa resolver o problema de determinar o mapa de disparidade desde a informação fornecida por duas imagens, Imagem 1 e Imagem 2, com pontos de coincidência D_{1p} e D_{2p} respetivamente. Assim, para obter o mapa de disparidade, se simplificará o problema a que deseja-se determinar a posição de um ponto P visto desde as perspectivas das bases canônicas de coordenadas da câmera 1 e da câmera 2. A Figura 1 descreve esta situação mais detalhadamente.

Serão considerados dois tipos de bases para os eixos coordenados, teremos a base canônica e a base não canônica, que denominaremos base natural. Ambas câmeras terão bases, canônicas ou naturais, com eixos perpendiculares entre sim, e com o ponto $(0, 0, 0)$ sobre as câmeras, independentemente de se a base é canônica ou natural. Para descrever estas bases, usaremos os elementos $\{+X, +Y, +Z\}$ para denotar a direção dos eixos perpendiculares, sendo que existirá uma triada $\{+X, +Y, +Z\}$ para cada base canônica e natural.

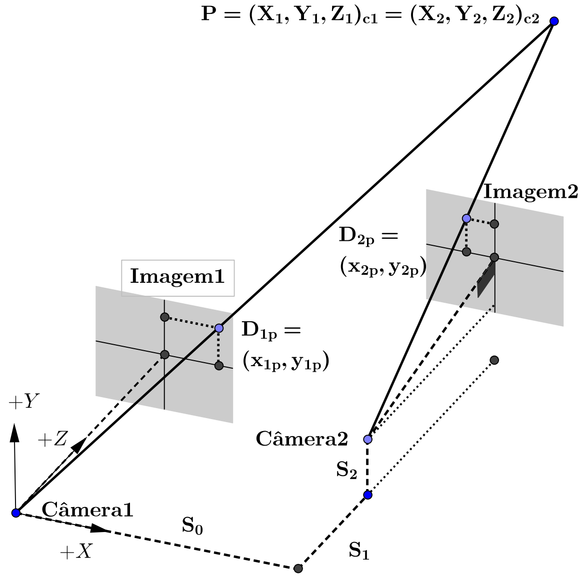

Figura 1: Modelo do sistema com duas câmeras deslocadas e com linhas de visão não paralelas.

Será chamado de base natural da câmera 1, ao eixo $+Z$ apontando perpendicularmente à Imagem 1, o eixo $+X$ apontando a direita da imagem 1 e o eixo $+Y$ apontando para arriba da

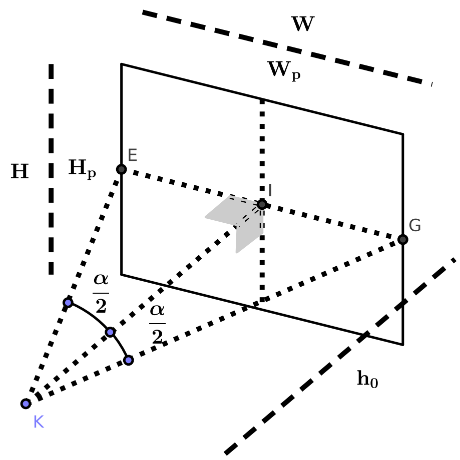

Figura 2: Angulo, α, de visão horizontal da câmera.

mesma imagem; para esta câmera será considerado que a base canônica é a mesma da base natural.

A base natural da câmera 2 terá o eixo $+Z$ apontando perpendicularmente à Imagem 2, o eixo $+X$ apontando a direita da imagem 2 e o eixo $+Y$ apontando para arriba da mesma imagem. Se considerará que a base natural da câmera 2 é distinta da base canônica da mesma câmera, de modo que a base canônica da câmera 2 terá os eixos coordenados paralelos aos eixos da base canônica da câmera 1.

Em todo este trabalho o uso de uma variável com sub-índice p, indicará que o número que representa a variável usa unidades em pixeis. De não ser assim, deve-se considerar que a distancia está em metros.

2 Dados do problema

2.1 Dados da câmera e dos arquivos de imagem

Em todo este trabalho assume-se que ambas câmeras tem a mesma configuração física, como a especificada na Figura 2. Ali pode-se ver que a imagem é gerada a uma distancia h_0 (em metros) da câmera, formando um angulo reto com a sua linha de visão, que coincide com o eixo $+Z$ de sua base natural. O ponto de interseção (I na Figura 2) está no ponto médio, horizontal e vertical, da imagem. Será definido como α ao angulo de visão horizontal das câmeras. Como é mostrado no Teorema 2, o angulo α cumpre que,

$$\frac{W}{h_0} = 2\ tan(\frac{\alpha}{2}), \tag{1}$$

$$\frac{H}{h_0} = 2\ tan(\frac{\alpha}{2})\frac{H_p}{W_p}, \tag{2}$$

onde W é H são o comprimento e a altura da imagem, ambas em metros. A Tabela 1 mostra o único parâmetro físico da câmera que será usado para obter o mapa de disparidade.

Tabela 1: Dados físico-mecânicos da câmera.

Dados da câmera		
variável	Descrição	Unidades
α	Angulo de visão horizontal da câmera.	radianos

W_p é H_p são o comprimento e a altura da imagem em pixeis. Estos dados são extraídos do arquivo de imagem, pelo qual são fáceis de obter. Se considera que a câmera 1 e a câmera 2 geram arquivos de imagem do mesmo comprimento em pixeis. A Tabela 2 mostra os dados do arquivos de imagem que serão usados para obter o mapa de disparidade.

Tabela 2: Dados de comprimento e altura em pixeis provenientes do arquivo da imagem.

Dados dos arquivos		
variável	Descrição	Unidades
W_p	Largura da imagem.	pixeis
H_p	Altura da imagem.	pixeis

2.2 Dados da geometria do problema

Dado que se terão duas câmeras deslocadas e rotacionadas no espaço, como mostra a Figura 1, para obter o mapa de disparidade deve-se assumir que se tem informação do deslocamento e do giro da câmera. O deslocamento será medido em referencia da câmera 1, assim um deslocamento de $(S_0, S_2, S_1)_{c1}$ indicará que a câmera 2 está localizada a uma distancia S_0 à direita da imagem 1, a uma distancia S_2 para acima da imagem 1, e a uma distancia S_1 no eixo $+Z$ da base canônica da câmera 1. Por definição se considera que a câmera 1 não tem giro nenhum. O giro da câmera 2 é medido em referencia da base canônica da câmera 2, que é paralela à base canônica da câmera 1. A matriz $M_{N\to C}$ representa a matriz de transformação de um ponto, A, na base natural da câmera 2 a seu equivalente, B, na base canônica da mesma câmera.

$$B = M_{N\to C}\ A \tag{3}$$

A Tabela 3 mostra os dados da geometria que serão usados para obter o mapa de disparidade.

Tabela 3: Dados provenientes do analises da geometria do sistema.

Dados da geometria		
variável	Descrição	Unidades
S_0	Deslocamento da câmera 2 no eixo $+X$ em referencia à câmera 1.	metros
S_1	Deslocamento da câmera 2 no eixo $+Z$ em referencia à câmera 1.	metros
S_2	Deslocamento da câmera 2 no eixo $+Y$ em referencia à câmera 1.	metros
$M_{N\to C}$	Matriz de troca de base de um ponto na base natural (em pixeis ou em metros) à base canônica.	adimensional

2.3 Dados do reconhecimento de pontos de coincidência

Entre os dados mais importantes para a obtenção do mapa de disparidade, estão os pontos de coincidência. Estes consistem em pares de pontos $\{D_{1p}, D_{2p}\}$, que representam um ponto $D_{1p} = (x_{1p}, y_{1p})$ em pixeis na imagem 1 e seu correspondente, $D_{2p} = (x_{2p}, y_{2p})$, visto na imagem 2. Lembrando que a imagem 1 e a imagem 2 tem seus eixos coordenado, bidimensionais, referenciados à base natural das câmeras 1 e 2. A Tabela 4 mostra os dados de pontos de coincidência que serão usados para obter o mapa de disparidade.

3 Solução do problema

Para resolver o problema dividiremos este em duas partes. Na primeira tomaremos em conta só que a imagem está deslocada (Seção 3.1) e não existe giro de câmeras. Na segunda só se analisará o giro da câmera 2, e se corrigirá o ponto D_{2p} na base natural da câmera 2 para que fique expressado

Tabela 4: Dados provenientes do reconhecimento de pontos de coincidentes.

Dados de pontos coincidentes		
variável	Descrição	Unidades
x_{1p}	Distancia no eixo X, medida na imagem da câmera 1.	pixeis
y_{1p}	Distancia no eixo Y, medida na imagem da câmera 1.	pixeis
x_{2p}	Distancia no eixo X, medida na imagem da câmera 2.	pixeis
y_{2p}	Distancia no eixo Y, medida na imagem da câmera 2.	pixeis

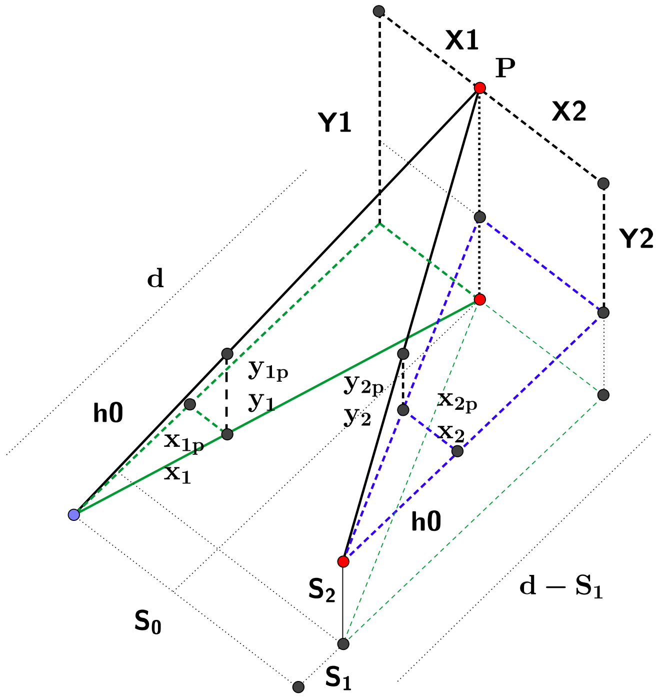

Figura 3: Posição de duas câmeras deslocadas no espaço.

na base canônica da mesma câmera. Logicamente este novo ponto terá que ser projetado a um plano de imagem virtual na base canônica, para mais detalhes ver a Seção 3.2.

3.1 Câmeras deslocadas

Nesta seção se considera que não existe rotação dos eixos das câmeras, pelo qual a base canônica da câmera 2 será a mesma que sua base natural. A Figura 3 mostra a disposição geométrica de duas câmeras deslocadas no espaço, onde o ponto $(S_0, S_2, S_1)_{c1}$ representa o deslocamento da câmera 2 em referencia à base canônica da câmera 1. Também pode-se ver o ponto P, que representa o objeto em estudo ao qual deseja-se obter a sua disparidade, é dizer a sua distancia no eixo $+Z$ referenciado à base canônica das câmeras. Observa-se que este ponto pode ser representado na base canônica da câmera 1 como $(X_1, Y_1, Z_1)_{c1}$ e na base canônica da câmera 2 como $(X_2, Y_2, Z_2)_{c2}$. Pelo Teorema 1 sabemos que,

$$X_1 = 2tan(\frac{\alpha}{2})d\frac{x_{1p}}{W_p}, \tag{4}$$

$$Y_1 = 2tan(\frac{\alpha}{2})d\frac{y_{1p}}{W_p}, \tag{5}$$

$$Z_1 = d, \tag{6}$$

e que,

$$X_2 = 2tan(\frac{\alpha}{2})(d - S1)\frac{x_{2p}}{W_p}, \tag{7}$$

$$Y_2 = 2tan(\frac{\alpha}{2})(d - S1)\frac{y_{2p}}{W_p}, \tag{8}$$

$$Z_2 = d - S_1. \tag{9}$$

Onde d pode ser calculado ate de duas formas distintas. Se $x_{1p} \neq x_{2p}$ então

$$d = d_W \equiv \frac{cot(\frac{\alpha}{2})}{2}\frac{W_p S_0}{(x_{1p} - x_{2p})} - \frac{x_{2p} S_1}{(x_{1p} - x_{2p})}, \tag{10}$$

e se $y_{1p} \neq y_{2p}$ então

$$d = d_H \equiv \frac{cot(\frac{\alpha}{2})}{2}\frac{W_p S_2}{(y_{1p} - y_{2p})} - \frac{y_{2p} S_1}{(y_{1p} - y_{2p})}. \tag{11}$$

Um conjunto valido de pontos $\{D_{1p}, D_{2p}\}$, com $x_{1p} \neq x_{2p}$ e $y_{1p} \neq y_{2p}$, sempre cumprirá ambas equações. De não cumprir-se que $x_{1p} \neq x_{2p}$ ou $y_{1p} \neq y_{2p}$, a sua equação de cálculo de d se descarta e se usa a outra. Na resolução do Teorema 1, está explicado que acontece se $x_{1p} = x_{2p}$ e/ou $y_{1p} = y_{2p}$.

Um dado interessante pode ser obtido mediante o Corolário 1, onde sabe-se que se $x_{1p} \neq x_{2p}$ e $y_{1p} \neq y_{2p}$, então um ponto $\gamma_p = (x_{1p}, x_{2p}, y_{1p}, y_{2p})$ que é válido (proveniente de um "match" certo), cumpre a seguinte equação

$$0 = f(x_{1p}, x_{2p}, y_{1p}, y_{2p}) \equiv (KS_2 - y_{2p})(x_{1p} - x_{2p}) - (KS_0 - x_{2p})(y_{1p} - y_{2p}) \tag{12}$$

com $K \equiv \frac{cot(\alpha/2)}{2}\frac{W_p}{S_1}$.

No caso de tiver um ponto $\hat{\gamma}_p = (\hat{x}_{1p}, \hat{x}_{2p}, \hat{y}_{1p}, \hat{y}_{2p})$ que não cumpre a equação 12, que é equivalente a dizer que $d_H \neq d_W$. Pode-se optar por usar o Corolário 2 para achar um ponto γ_p na superfície de $0 = f(\gamma_p)$ que tenha a mínima distancia com $\hat{\gamma}_p$.

3.2 Câmera 2 girada

Ate agora tem-se obtido o mapa de disparidade para duas câmaras deslocadas, quando os eixos canônicos são os mesmos do seus respectivos eixos naturais.

Nesta seção se analisará o caso quando a câmera 2 tem sua base natural rotacionada em relação a sua base canônica. Para isto temos que imaginar que depois da obtenção dos pontos de coincidência, "match" do ponto P, foram retornados dois pontos, um para imagem 1 e outro para imagem 2. Estes apontam a um mesmo objeto, ponto P, visto de duas perspetivas distintas (câmera 1 e 2). É importante lembrar que as imagens retornadas pelas câmeras sempre estão referenciadas a base natural. Assim, o ponto bidimensional sobre a imagem 2, nesta seção será chamado de D_{2Np}, onde o sub-índice $2Np$ indica que corresponde a câmera 2, está referenciado à base natural e usa unidades em pixeis.

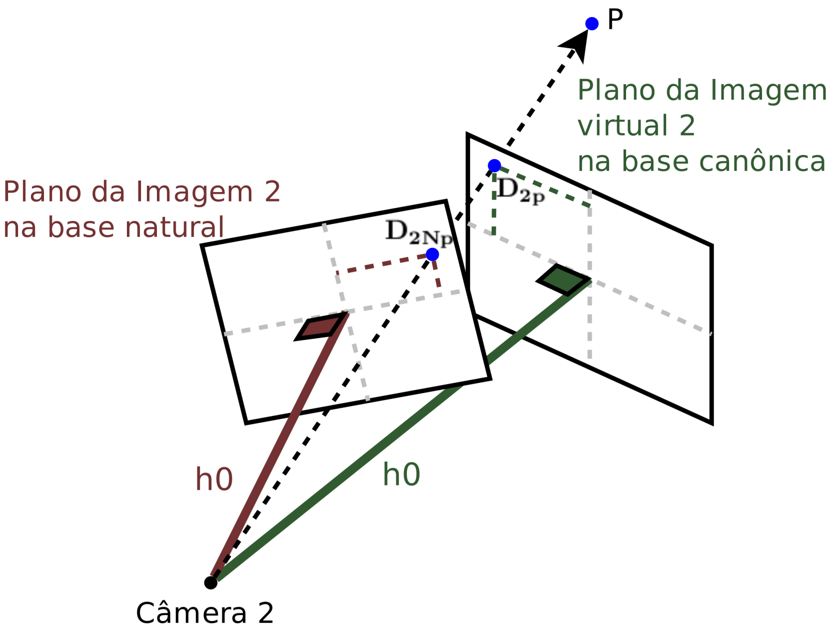

Figura 4: Plano da imagem na base natural versus o plano da imagem virtual na base canônica.

Para poder reusar o procedimento desenvolvido na Seção 3.1 é necessário projetar o ponto D_{2Np} do plano de imagem na base natural a um plano de imagem, "virtual", na base canônica. Esta projeção será chamada de ponto D_{2p}, e também será um ponto bidimensional. A Figura 4 mostra esta distribuição de pontos mais detalhadamente.

Seguindo o Teorema 4 sabe-se que: se a partir de $D_{2Np} = (x_{2Np}, y_{2Np})$ criamos o ponto tridimensional

$$P_{2Np} = \begin{pmatrix} x_{2Np} \\ y_{2Np} \\ \frac{cot(\alpha/2)}{2} W_p \end{pmatrix}, \tag{13}$$

podemos avaliar a seguinte equação

$$D_{2p}^T = \frac{W_p cot(\alpha/2)}{2} \frac{e_{xy} M_{N \to C} \; P_{2Np}}{e_z \; M_{N \to C} \; P_{2Np}}, \tag{14}$$

para obter o ponto $D_{2p} = (x_{2p}, y_{2p})$, onde e_{xy} e e_z são definidos em (70) e (71), respectivamente.

Finalmente o ponto D_{2p} será utilizado para el cálculo del mapa de disparidade como é explicado na Seção 3.1.

4 Anexo

Teorema 1: Cálculo de disparidade

Dadas duas câmeras, câmera 1 e câmera 2 como mostra a Figura 3, que tem eixos de referencia diferentes mas paralelos e estão separados uma distancia $(\triangle X, \triangle Y, \triangle Z)_{c1} = (S_0, S_1, S_2)_{c1}$, referenciado à câmera 1. Estas observam um mesmo ponto P seguindo seus respetivos eixos de referencia, tendo assim observações P_{c1} e P_{c2} respectivamente. Pelo qual, seguindo o eixo de referencia da câmera 1, P_{c1} será igual a:

$$P_{c1} = (X_1, Y_1, Z_1)_{c1} \tag{15}$$

e seguindo o eixo de referencia da câmera 2, P_{c2} será igual a:

$$P_{c2} = (X_2, Y_2, Z_2)_{c2}. \tag{16}$$

Onde

$$X_1 = 2tan(\frac{\alpha}{2})d\frac{x_{1p}}{W_p} \ \wedge \ Y_1 = 2tan(\frac{\alpha}{2})d\frac{y_{1p}}{W_p} \tag{17}$$

$$X_2 = 2tan(\frac{\alpha}{2})(d - S1)\frac{x_{2p}}{W_p} \ \wedge \ Y_2 = 2tan(\frac{\alpha}{2})(d - S1)\frac{y_{2p}}{W_p} \tag{18}$$

$$Z_1 = d \ \wedge \ Z_2 = d - S_1. \tag{19}$$

Sendo que se $x_{1p} \neq x_{2p}$ então

$$d = d_W \equiv \frac{cot(\frac{\alpha}{2})}{2}\frac{W_p S_0}{(x_{1p} - x_{2p})} - \frac{x_{2p} S_1}{(x_{1p} - x_{2p})} \tag{20}$$

e/ou se $y_{1p} \neq y_{2p}$ então

$$d = d_H \equiv \frac{cot(\frac{\alpha}{2})}{2}\frac{W_p S_2}{(y_{1p} - y_{2p})} - \frac{y_{2p} S_1}{(y_{1p} - y_{2p})}. \tag{21}$$

Demonstração. O primeiro que podemos assumir, é que a proporção relativa entre a largura e a altura da imagem, é a mesma em metros que em pixeis.

$$\frac{W}{H} = \frac{W_p}{H_p} \tag{22}$$

Isto é natural porque de não cumprir-se existiria uma distorção na imagem em pixeis ao ser representada de forma visual. A proporcionalidade definida na equação (22) leva a afirmar para o ponto (x_1, y_1) que

$$\frac{x_1}{x_{1p}} = \frac{W}{W_p} \tag{23}$$

$$\frac{y_1}{y_{1p}} = \frac{H}{H_p}, \tag{24}$$

e similarmente para o ponto (x_2, y_2) que

$$\frac{x_2}{x_{2p}} = \frac{W}{W_p} \tag{25}$$

$$\frac{y_2}{y_{2p}} = \frac{H}{H_p}. \tag{26}$$

Usando a Figura 3 e o Teorema 3 pode-se afirmar que

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{d}{h_0} \ \wedge \ \frac{X_2}{x_2} = \frac{d - S_1}{h_0} \tag{27}$$

e

$$\frac{Y_1}{y_1} = \frac{d}{h_0} \ \wedge \ \frac{Y_2}{y_2} = \frac{d - S_1}{h_0} \tag{28}$$

Pela geometria do problema também pode-se afirmar que

$$X_1 - X_2 = S_0, \tag{29}$$

$$Y_1 - Y_2 = S_2. \tag{30}$$

Agora, incluindo a equações (23), e (25) em (27) obtemos

$$X_1 = d\frac{x_{1p}}{W_p}\frac{W}{h_0} \ \wedge \ X_2 = (d - S_1)\frac{x_{2p}}{W_p}\frac{W}{h_0}, \tag{31}$$

e incluindo a equações (24), e (26) em (28) obtemos

$$Y_1 = d\frac{y_{1p}}{H_p}\frac{H}{h_0} \ \wedge \ Y_2 = (d - S_1)\frac{y_{2p}}{H_p}\frac{H}{h_0}. \tag{32}$$

Caso quando $\mathbf{x_{1p} \neq x_{2p}}$:
Assim, se assumimos que $x_{1p} \neq x_{2p}$ e incluímos a equação (31) em (29) obtemos que

$$\frac{d}{W_p}\frac{W}{h_0}(x_{1p} - x_{2p}) = S_0 - S_1\frac{x_{2p}}{W_p}\frac{W}{h_0} \tag{33}$$

e

$$d = \frac{h_0}{W}\frac{W_p S_0}{(x_{1p} - x_{2p})} - \frac{x_{2p} S_1}{(x_{1p} - x_{2p})}. \tag{34}$$

Caso quando $\mathbf{x_{1p} = x_{2p}} = x_p$:
No caso contrario, se assumimos que $x_{1p} = x_{2p} = x_p$ e incluímos a equação (31) em (29) obtemos a seguinte restrição para x_p

$$S_0 = S_1\frac{x_p}{W_p}\frac{W}{h_0}, \tag{35}$$

e nenhuma para a variável d.

Caso quando $\mathbf{y_{1p} \neq y_{2p}}$:
Por outro lado se assumimos que $y_{1p} \neq y_{2p}$ e incluímos a equação (32) em (30) obtemos que

$$\frac{d}{H_p}\frac{H}{h_0}(y_{1p} - y_{2p}) = S_2 - S_1\frac{y_{2p}}{H_p}\frac{H}{h_0} \tag{36}$$

e

$$d = \frac{h_0}{H}\frac{H_p S_2}{(y_{1p} - y_{2p})} - \frac{y_{2p} S_1}{(y_{1p} - y_{2p})}. \tag{37}$$

Caso quando $\mathbf{y_{1p} = y_{2p}} = y_p$:
No caso contrario, se assumimos que $y_{1p} = y_{2p} = y_p$ e incluímos a equação (32) em (30) obtemos a seguinte restrição para y_p

$$S_2 = S_1\frac{y_p}{H_p}\frac{H}{h_0}, \tag{38}$$

e nenhuma para a variável d.

É fácil de ver que o único caso onde $x_{1p} = x_{2p}$ e $y_{1p} = y_{2p}$ será quando as duas câmeras estejam na mesma posição e com suas bases naturais em eixos paralelos. Para os demais casos, pelo menos uma de estas igualdades não será cumprida, e variavel d poderá ser calculada.

Agora, tendo o valor da variável d em (34) e/ou (37), e usando o Teorema 2 para substituir h_0/W e h_0/H, pode-se afirmar que as equações (20) e (21) são verdadeiras. Da mesma forma pode ser substituído o valor h_0/W e h_0/H nas equações (31) e (32), obtendo-se as equações (17) e (18). □

Corolário 1: Superfície 4-dimensional de pontos válidos

Seguindo o Teorema 1, sobre um sistema onde as bases naturais das câmeras são paralelas entre sim, como na Figura 3, sabe-se que se os pontos $D_{1p} = (x_{1p}, y_{1p})$ e $D_{2p} = (x_{2p}, y_{2p})$ cumprem que $x_{1p} \neq x_{2p}$ e $y_{1p} \neq y_{2p}$, então eles pertencem à superfície

$$0 = f(x_{1p}, x_{2p}, y_{1p}, y_{2p}) \equiv f(\gamma_p), \tag{39}$$

onde

$$f(x_{1p}, x_{2p}, y_{1p}, y_{2p}) \equiv (KS_2 - y_{2p})(x_{1p} - x_{2p}) - (KS_0 - x_{2p})(y_{1p} - y_{2p}) \tag{40}$$

e

$$K \equiv \frac{cot(\frac{\alpha}{2})}{2} \frac{W_p}{S_1} \tag{41}$$

Demonstração. Igualando as equações (20) e (21)

$$\frac{W_p cot(\frac{\alpha}{2})}{2} \left(\frac{S_2}{(y_{1p} - y_{2p})} - \frac{S_0}{(x_{1p} - x_{2p})} \right) = S_1 \left(\frac{y_{2p}}{(y_{1p} - y_{2p})} - \frac{x_{2p}}{(x_{1p} - x_{2p})} \right). \tag{42}$$

Usando a definição (41) obtemos

$$K \left(\frac{S_2}{(y_{1p} - y_{2p})} - \frac{S_0}{(x_{1p} - x_{2p})} \right) = \left(\frac{y_{2p}}{(y_{1p} - y_{2p})} - \frac{x_{2p}}{(x_{1p} - x_{2p})} \right). \tag{43}$$

Reordenando a equação anterior, temos

$$K \left(S_2(x_{1p} - x_{2p}) - S_0(y_{1p} - y_{2p}) \right) = \left(y_{2p}(x_{1p} - x_{2p}) - x_{2p}(y_{1p} - y_{2p}) \right), \tag{44}$$

e finalmente

$$(KS_2 - y_{2p})(x_{1p} - x_{2p}) - (KS_0 - x_{2p})(y_{1p} - y_{2p}) = 0. \tag{45}$$

□

Corolário 2: Ponto na superfície $0 = f(\gamma_p)$ com a menor distancia a $\hat{\gamma}_p$

Seguindo o Teorema 1 e o Corolário 1, sobre um sistema onde as bases naturais das câmeras são paralelas entre sim, como na Figura 3. Sim se tem um ponto $\hat{\gamma}_p = (\hat{x}_{1p}, \hat{x}_{2p}, \hat{y}_{1p}, \hat{y}_{2p})$ que não pertence à superfície $0 = f(\gamma_p) \equiv (KS_2 - y_{2p})(x_{1p} - x_{2p}) - (KS_0 - x_{2p})(y_{1p} - y_{2p})$ com $K = \frac{cot(\frac{\alpha}{2})}{2} \frac{W_p}{S_1}$.
Então o ponto γ_p mais próximo a $\hat{\gamma}_p$ na superfície $0 = f(\gamma_p)$, pode ser achado com a seguinte equação iterativa de $\beta = (x_{1p}, x_{2p}, y_{1p}, y_{2p}, \lambda)^T$.

$$\beta_{i+1} := \beta_i - \left[\mathbf{J}^T(\beta_i)\mathbf{J}(\beta_i) \right]^{-1} \mathbf{J}^T(\beta_i)\mathbf{G}(\beta_i), \tag{46}$$

onde

$$\mathbf{G}(\beta) = \begin{pmatrix} 2(x_{1p} - \hat{x}_{1p}) + \lambda(KS_2 - y_{2p}) \\ 2(x_{2p} - \hat{x}_{2p}) + \lambda(y_{1p} - KS_2) \\ 2(y_{1p} - \hat{y}_{1p}) + \lambda(x_{2p} - KS_0) \\ 2(y_{2p} - \hat{y}_{2p}) + \lambda(KS_0 - x_{1p}) \\ (KS_2 - y_{2p})(x_{1p} - x_{2p}) - (KS_0 - x_{2p})(y_{1p} - y_{2p}) \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$\mathbf{J}(\beta) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda & (KS_2 - y_{2p}) \\ 0 & 2 & \lambda & 0 & (y_{1p} - KS_2) \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & (x_{2p} - KS_0) \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 & (KS_0 - x_{1p} \\ (KS_2 - y_{2p}) & (y_{1p} - KS_2) & (x_{2p} - KS_0) & (KS_0 - x_{1p}) & 0 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

é sugerido que o valor inicial de β_0 seja

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1p} \\ \hat{x}_{2p} \\ \hat{y}_{1p} \\ \hat{y}_{2p} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

dado que considera-se que o ponto $(\hat{x}_{1p}, \hat{x}_{2p}, \hat{y}_{1p}, \hat{y}_{2p})$ já está próximo à superfície.

Nota: Deve-se tomar cuidado que os valores iniciais e as soluções cumpram que $x_{1p} \neq x_{2p}$ e $y_{1p} \neq y_{2p}$. De não cumprir-se alguma destas equações, deve-se tomar em conta as equações (35) e (38), e agregar valores aleatórios ao vetor γ_p para evitar cair em mínimos locais.

Demonstração. Para obter o ponto γ_p com a distancia mínima, do ponto $\hat{\gamma}_p$ à superfície $0 = f(\gamma_p)$, usa-se a formulação de Lagrange,

$$L(\gamma_p, \lambda) = ||\gamma_p - \hat{\gamma}_p||^2 + \lambda f(\gamma_p), \tag{50}$$

$$L(\gamma_p, \lambda) = (x_{1p} - \hat{x}_{1p})^2 + (x_{2p} - \hat{x}_{2p})^2 + (y_{1p} - \hat{y}_{1p})^2 + (y_{2p} - \hat{y}_{2p})^2 + \lambda f(x_{1p}, x_{2p}, y_{1p}, y_{2p}) \tag{51}$$

de modo que

$$\frac{\partial L(\gamma_p, \lambda)}{\partial x_{1p}} = 2(x_{1p} - \hat{x}_{1p}) + \lambda(KS_2 - y_{2p}) = 0 \tag{52}$$

$$\frac{\partial L(\gamma_p, \lambda)}{\partial x_{2p}} = 2(x_{2p} - \hat{x}_{2p}) + \lambda(y_{1p} - KS_2) = 0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial L(\gamma_p, \lambda)}{\partial y_{1p}} = 2(y_{1p} - \hat{y}_{1p}) + \lambda(x_{2p} - KS_0) = 0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial L(\gamma_p, \lambda)}{\partial y_{2p}} = 2(y_{2p} - \hat{y}_{2p}) + \lambda(KS_0 - x_{1p}) = 0 \tag{55}$$

$$\frac{\partial L(\gamma_p, \lambda)}{\partial \lambda} = (KS_2 - y_{2p})(x_{1p} - x_{2p}) - (KS_0 - x_{2p})(y_{1p} - y_{2p}) = 0 \tag{56}$$

As equações anteriores podem ser reordenadas como uma função vetorial $\mathbf{G}(\beta) : \Re^5 \to \Re^5$, com vetor de entrada $\beta = (x_{1p}, x_{2p}, y_{1p}, y_{2p}, \lambda)$,

$$0 = \left(\frac{\partial L(\beta)}{\partial x_{1p}}, \frac{\partial L(\beta)}{\partial x_{2p}}, \frac{\partial L(\beta)}{\partial y_{1p}}, \frac{\partial L(\beta)}{\partial y_{2p}}, \frac{\partial L(\beta)}{\partial \lambda}, \right) = \nabla L(\gamma_p, \lambda) \equiv \mathbf{G}^T(\beta) \tag{57}$$

Para achar o vetor β que cumpre a equação anterior, usaremos a regularização de Tikhonov [2, 1, 3]. Esta regularização resolve o problema anterior como a tentativa de achar o valor de β que minimiza e^2 em

$$e^2 = ||\mathbf{G}(\beta)||^2, \tag{58}$$

sendo a solução de Tikhonov a seguinte equação iterativa.

$$\beta_{i+1} := \beta_i - \left[\mathbf{J}^T(\beta_i)\mathbf{J}(\beta_i)\right]^{-1} \mathbf{J}^T(\beta_i)\mathbf{G}(\beta_i) \tag{59}$$

com $\mathbf{J}(\beta)$ igual ao Jacobiano de $\mathbf{G}(\beta)$,

$$\mathbf{J}(\beta) \equiv \frac{\partial \mathbf{G}(\beta)}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda & (KS_2 - y_{2p}) \\ 0 & 2 & \lambda & 0 & (y_{1p} - KS_2) \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & (x_{2p} - KS_0) \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 & (KS_0 - x_{1p} \\ (KS_2 - y_{2p}) & (y_{1p} - KS_2) & (x_{2p} - KS_0) & (KS_0 - x_{1p}) & 0 \end{pmatrix} \tag{60}$$

□

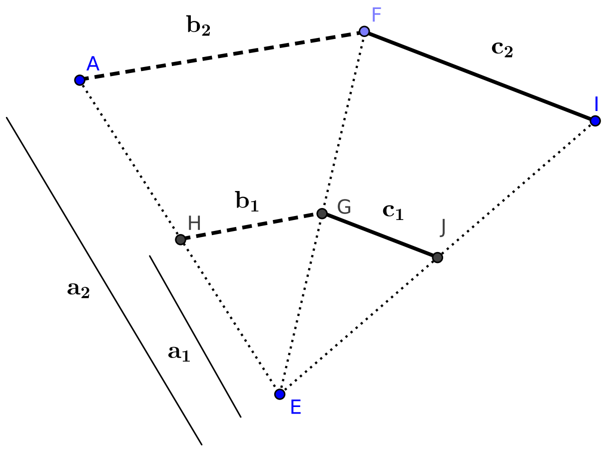

Figura 5: Regra das proporções em linhas paralelas.

Teorema 2: Equivalência do angulo α

Dada uma câmera com um angulo de visão horizontal α como mostra a Figura 2, então é verdade que

$$\frac{W}{h_0} = 2\ tan(\frac{\alpha}{2}) \tag{61}$$

$$\frac{H}{h_0} = 2\ tan(\frac{\alpha}{2})\frac{H_p}{W_p} \tag{62}$$

$$h_{0p} = W_p\frac{cot(\frac{\alpha}{2})}{2} \tag{63}$$

Demonstração. Na Figura 2 no triangulo retângulo EIK formado pelo ponto médio de $\overline{EG}$ e os ponto E e K, pode-se deduzir que

$$\frac{W/2}{h_0} = tan(\frac{\alpha}{2}). \tag{64}$$

Reordenando a anterior equação obtemos (61). Por outro lado é evidente que existe uma proporção comum entre a distancia em pixeis e em metros. De modo que

$$\frac{W}{W_p} = \frac{H}{H_p} = \frac{h_0}{h_{0p}}. \tag{65}$$

Usando esta equação em (64) obtemos as equações (62) e (63). □

Teorema 3: Proporcionalidade entre lados

Conhecidos dois triângulos AFE e FIE (ver Figura 5), que são cortados por as linhas $\overline{HG} = b_1$ e $\overline{GJ} = c_1$ paralelas a $\overline{AF} = b_2$ e $\overline{FI} = c_2$ respetivamente, se cumpre a seguinte relação com $\overline{AE} = a_2$ e $\overline{HE} = a_1$:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \tag{66}$$

Demonstração. Devido a que os triângulos são cortados por linhas paralelas, podemos afirmar que o triangulo HGE e o triangulo AFE são semelhantes. Da mesmo forma pode-se afirmar que o triangulo GJE é semelhante ao triângulo FIE. Pelo qual existirá uma proporcionalidade entre seus lados, de modo que

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{HE}} \quad \wedge \quad \frac{\overline{FI}}{\overline{GJ}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{GE}}. \tag{67}$$

Pelo teorema de Tales sobre o triangulo AFE, sabemos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{GE}}. \tag{68}$$

Das equações (67) e (68) pode-se deduzir que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{FI}}{\overline{GJ}}. \tag{69}$$

e consequentemente a equação (66) é verdadeira. □

Teorema 4: Método para achar o ponto de coincidência D_{2p} no plano de imagem virtual 2 na base canônica

Nosso objetivo aqui será trasladar a informação proveniente de um ponto $D_{2Np} = (x_{2Np}, y_{2Np})$, no plano de imagem na base natural da câmera 2 a seu correspondente ponto $D_{2p} = (x_{2p}, y_{2p})$ na imagem virtual na base canônica, como mostra a Figura 4.
Para isto, definimos as seguintes variáveis

$$e_{xy} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$e_z \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{71}$$

De modo que para obter o ponto $D_{2p} = (x_{2p}, y_{2p})$, avaliaremos as equações (72), (73) e (74), usando como entrada de dados o ponto $D_{2Np} = (x_{2Np}, y_{2Np})$ e a matriz de troca de base $M_{N\to C}$.

$$P_{2Np} = \begin{pmatrix} x_{2Np} \\ y_{2Np} \\ \frac{cot(\alpha/2)}{2} W_p \end{pmatrix}, \tag{72}$$

$$\mu = \frac{2tan(\alpha/2)}{W_p} e_z \; M_{N\to C} \; P_{2Np}, \tag{73}$$

$$D_{2p}^T = \frac{e_{xy} M_{N\to C} \; P_{2Np}}{\mu}. \tag{74}$$

Demonstração. Primeiro redefinimos o ponto bidimensional, D_{2Np}, como um ponto tridimensional

$$P_{2Np} = (x_{2Np}, y_{2Np}, h_{0p})^T_{2Np}, \tag{75}$$

localizado a uma distancia h_{0p} (em pixeis) no eixo $+Z$ na base natural da câmera 2. Seu correspondente equivalente

$$P_{2Cp} = (x_{2Cp}, y_{2Cp}, h_{zp})^T_{2Cp}, \tag{76}$$

na base canônica, pode ser achado usando a matriz de troca de base, $M_{N\to C}$, que leva um ponto da base natural à base canônica. Como mostra a seguinte equação

$$P_{2Cp} = M_{N\to C} \; P_{2Np}. \tag{77}$$

A Figura 6 mostra esta distribuição de pontos. Um método para achar a matriz de troca de base pode ser visto em [4].

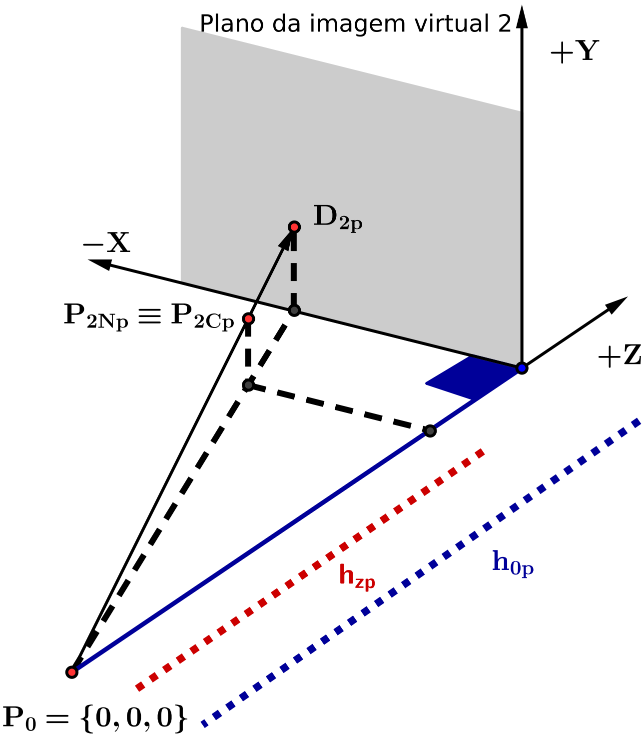

Figura 6: Projeção D_{2p} no plano da imagem virtual na base canônica da câmera 2, proveniente de um ponto P_{2Cp}.

Se redefinimos o ponto bidimensional, D_{2p}, como o ponto tridimensional

$$P_{2p} = (x_{2p}, y_{2p}, h_{0p})^T_{2Cp}, \tag{78}$$

localizado a uma distancia h_{0p} (em pixeis) no eixo $+Z$ da base canônica, é fácil de ver que P_{2Cp} é proporcional a P_{2p}

$$P_{2p} = \frac{P_{2Cp}}{\mu} \tag{79}$$

Usando O Teorema 3 sabe-se que

$$\mu = \frac{h_{zp}}{h_{0p}}, \tag{80}$$

e usando o resultado do Teorema 2

$$h_{0p} = \frac{cot(\alpha/2)}{2} W_p, \tag{81}$$

de modo que

$$\mu = \frac{2tan(\alpha/2)}{W_p} h_{zp}, \tag{82}$$

Se introduzimos a equação (77) e a definição (71) na equação anterior obtemos

$$\mu = \frac{2tan(\alpha/2)}{W_p} e_z \ M_{N \to C} \ P_{2Np}. \tag{83}$$

Finalmente usando a definição da equação (70) temos que

$$D^T_{2p} = e_{xy} P_{2p} \tag{84}$$

□

Teorema 5: Analises de erro no cálculo da disparidade quando temos erros no reconhecimento nos pontos de coincidência

Se consideramos que só o ponto $D_{2p} = (x_{2p}, y_{2p})$ está sujeito a erro, dado que o ponto $D_{1p} = (x_{1p}, y_{1p})$ é escolhido e o ponto D_{2p} é reconhecido. Então

$$\partial d_W \equiv \frac{h_{0p}S_0 - x_{1p}S_1}{(x_{1p} - x_{2p})^2}\, \partial x_{2p} \tag{85}$$

$$\partial d_H \equiv \frac{h_{0p}S_2 - y_{1p}S_1}{(y_{1p} - y_{2p})^2}\, \partial y_{2p} \tag{86}$$

De ambas é fácil de ver que o erro cresce assintoticamente quando $x_{1p} - x_{2p}$ ou $y_{1p} - y_{2p}$ tendem a zero.

Demonstração. Usando o Teorema 2 e a equação (20), soubemos que

$$d_W \equiv \frac{h_{0p}S_0}{(x_{1p} - x_{2p})} - \frac{x_{2p}S_1}{(x_{1p} - x_{2p})}. \tag{87}$$

Se consideramos que só o ponto $D_{2p} = (x_{2p}, y_{2p})$ está sujeito a erro, dado que o ponto $D_{1p} = (x_{1p}, y_{1p})$ é escolhido e o ponto D_{2p} é reconhecido. Então o erro ao calcular d_W pode ser obtido aplicando a derivada parcial em referencia a x_{2p}

$$\partial d_W \equiv \frac{h_{0p}S_0}{(x_{1p} - x_{2p})^2}\partial x_{2p} - \frac{(x_{1p} - x_{2p})S_1}{(x_{1p} - x_{2p})^2}\partial x_{2p} - \frac{x_{2p}S_1}{(x_{1p} - x_{2p})^2}\partial x_{2p}. \tag{88}$$

Simplificando a equação anterior podemos obter a equação (85). Seguindo o mesmo procedimento a equação (86) pode ser obtida. □

Referências

[1] A. Doicu, F. Schreier, and M. Hess. Iteratively regularized gauss–newton method for atmospheric remote sensing. *Computer physics communications*, 148(2):214–226, 2002.

[2] M. E. Shobha and S. George. Newton type iteration for tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems in hilbert scales. *Journal of Mathematics*, 2014, 2014.

[3] A. Tichonov and A. Leonov. *Ill-posed Problems in Natural Sciences: Proceedings of the International Conference Held in Moscow, August 19-25, 1991.* VSP, 1992.

[4] X. X. X. X. X. X. X. X. XXX. . `https://www.youtube.com/watch?v=wGl-E5LRvac`.