Schnitt von 2 Geraden

Dienstag, 11. Mai 2021 10:57

1. Geraden sind in Normalvektorform gegeben

z.B.: $g: 2x + 3y = 5$ $\qquad g \cap h = ?$

$h: 4x - 2y = 13$

LGS lösen!

2. Geraden sind in Parameterdarstellung gegeben

z.B.: $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad g \cap h = ?$

$h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$4 + s \cdot (-1) = -1 + 3t$

$2 + t = -1 + 2s$

LGS!

(Unbekannte: Parameter s, t)

ein Vielfaches

$i: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$i \parallel g$

$\text{I}: 3t + s = 5 \longrightarrow s = 5 - 3t$

$\text{II}: t - 2s = -3$

in II: $t - 2 \cdot (5 - 3t) = -3$

$t - 10 + 6t = -3$

$-10 + 7t = -3$

$7t = 7$

$t = 1$

in g einsetzen

$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$

Schnittpunkt $S = (2 \mid 3)$

3. 1 Gerade in Parameterdarstellung und 1 Gerade in Normalvektordarstellung gegeben

$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$h: 2x + 3y = 10$

$g \cap h = ?$

$g: \begin{matrix} x = 5 + 2t \\ y = -3 + 3t \end{matrix} \quad \cap h$

$2 \cdot (5 + 2t) + 3 \cdot (-3 + 3t) = 10$

$10 + 4t - 9 + 9t = 10$

$13t = 9$

$\underline{\underline{t = \frac{9}{13}}}$

in g einsetzen

$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{9}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{83}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{S = \left(\frac{83}{13} \,\middle|\, -\frac{12}{13} \right)}}$

8.102) 1) $g\,[A, B]$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 28 \\ 16{,}5 \end{pmatrix}$

$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 16{,}5 \end{pmatrix}$

h: Streckensymmetrale von CD: Normale Gerade durch den Mittelpunkt von $\overrightarrow{CD}$

$\underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\text{Punkt}} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 + 30{,}2 \\ 30 + 35{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}35 \\ 32{,}7 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \vec{n}_{CD}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 30{,}2 - 2{,}5 \\ 35{,}4 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27{,}7 \\ 5{,}4 \end{pmatrix}$

$h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 16{,}35 \\ 32{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5{,}4 \\ -27{,}7 \end{pmatrix}$

2) $g \cap h = \{E\}$

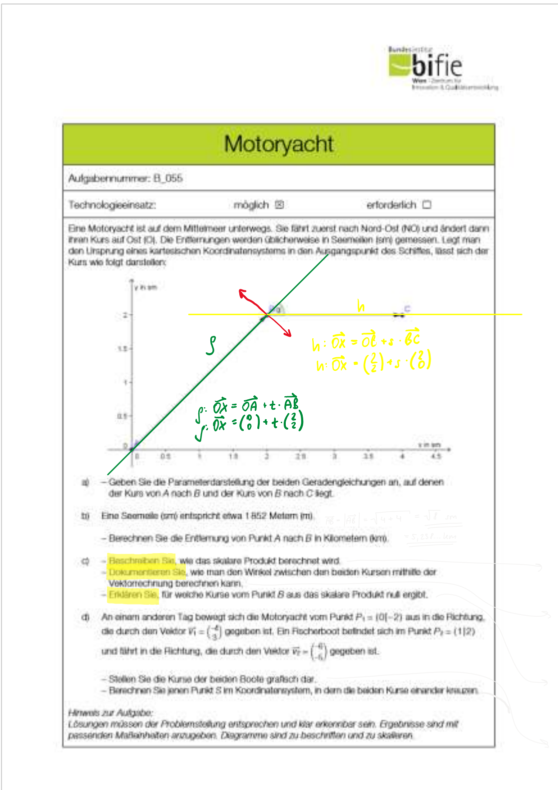
$\mathrm{I}: \quad 16{,}35 + 5{,}4 \cdot s = 28 \cdot t$

$\mathrm{II}: \quad 32{,}7 - 27{,}7 \cdot s = 16{,}5 \cdot t$

TI: $s = 0{,}7468\ldots \; ; \; t = 0{,}7279\ldots$

t in g: $\overrightarrow{OE} = 0{,}7279 \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 16{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20{,}38\ldots \\ 12{,}01\ldots \end{pmatrix}$

$\approx E(20{,}4 \mid 12{,}0)$ m



Bundesinstitut bifie Wien · Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Motoryacht

Aufgabennummer: B_055

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Motoryacht ist auf dem Mittelmeer unterwegs. Sie fährt zuerst nach Nord-Ost (NO) und ändert dann ihren Kurs auf Ost (O). Die Entfernungen werden üblicherweise in Seemeilen (sm) gemessen. Legt man den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems in den Ausgangspunkt des Schiffes, lässt sich der Kurs wie folgt darstellen:

a) – Geben Sie die Parameterdarstellung der beiden Geradengleichungen an, auf denen der Kurs von A nach B und der Kurs von B nach C liegt.

b) Eine Seemeile (sm) entspricht etwa 1 852 Metern (m).

– Berechnen Sie die Entfernung von Punkt A nach B in Kilometern (km).

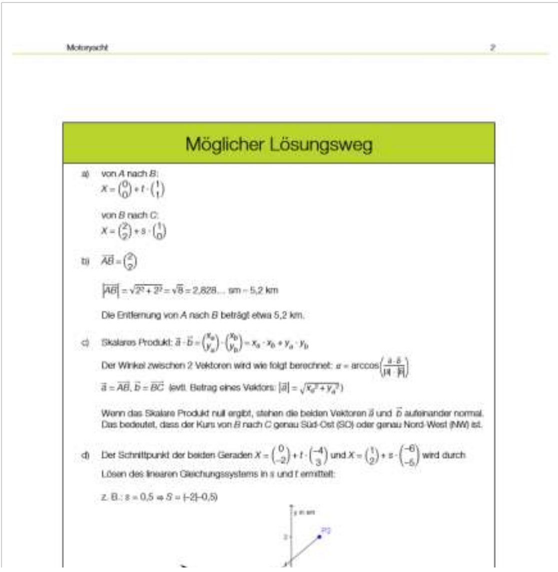
$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ sm $= 5{,}238\ldots$ km

c) – Beschreiben Sie, wie das skalare Produkt berechnet wird.
– Dokumentieren Sie, wie man den Winkel zwischen den beiden Kursen mithilfe der Vektorrechnung berechnen kann.
– Erklären Sie, für welche Kurse vom Punkt B aus das skalare Produkt null ergibt.

d) An einem anderen Tag bewegt sich die Motoryacht vom Punkt $P_1 = (0|-2)$ aus in die Richtung, die durch den Vektor $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Ein Fischerboot befindet sich im Punkt $P_2 = (1|2)$ und fährt in die Richtung, die durch den Vektor $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

– Stellen Sie die Kurse der beiden Boote grafisch dar.
– Berechnen Sie jenen Punkt S im Koordinatensystem, in dem die beiden Kurse einander kreuzen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.



Motoryacht 2

Möglicher Lösungsweg

a) von A nach B:
$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

von B nach C:
$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2{,}828\ldots$ sm $\approx 5{,}2$ km

Die Entfernung von A nach B beträgt etwa 5,2 km.

c) Skalares Produkt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$

Der Winkel zwischen 2 Vektoren wird wie folgt berechnet: $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (evtl. Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$)

Wenn das Skalare Produkt null ergibt, stehen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal. Das bedeutet, dass der Kurs von B nach C genau Süd-Ost (SO) oder genau Nord-West (NW) ist.

d) Der Schnittpunkt der beiden Geraden $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$ wird durch Lösen des linearen Gleichungssystems in s und t ermittelt:

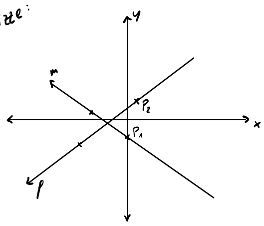
z. B.: $s = 0{,}5 \Rightarrow S = (-2|-0{,}5)$

Man berechnet das Skalarprodukt indem man die x-Komponenten multipliziert und mit dem Produkt der y-Komponenten addiert.

Man nimmt den arccosinus von dem Produkt des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ dividiert durch das Produkt der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$.

Man muss nach Nord-West oder Süd-Ost fahren.

Skizze:



$m: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$p: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$

$m \cap p = \{S\}$

$m: \begin{array}{l} x = -4t \\ y = -2 + 3t \end{array}$

$p: \begin{array}{l} x = 1 - 6s \\ y = 2 - 5s \end{array}$

$\rightarrow$

$\mathrm{I}: -4t = 1 - 6s$

$\mathrm{II}: -2 + 3t = 2 - 5s$

SÜ, am 18.05.2021

$\mathrm{I}: t = -\frac{1}{4} + \frac{6}{4}s$

in II: $-2 + 3\left(-\frac{1}{4} + \frac{6}{4}s\right) = 2 - 5s$

$-2 - \frac{3}{4} + \frac{18}{4}s = 2 - 5s$

$9{,}5s = 4{,}75$

$s = \frac{1}{2}$

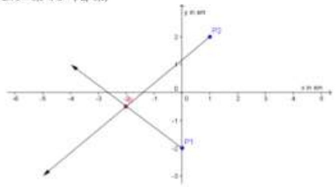
$p: \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

$S = (-2 \mid -0{,}5)$

Lösen des linearen Gleichungssystems in s und t ermittelt:

z. B.: $s = 0{,}5 \Rightarrow S = (-2|-0{,}5)$



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

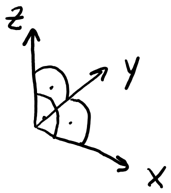
Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 2
c) leicht	c) 3
d) leicht	d) 3

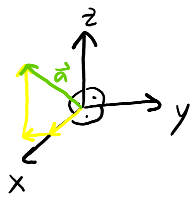
Thema: Verkehr

Quellen: —

8.4 Vektoren in Raum

Dienstag, 18. Mai 2021 11:34





$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \text{z.B.:} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es gelten die gleichen / dieselben Rechenregeln wie im R^2.

Bsp: $A(4|3|2)$

$B(7|-2|-3)$

$C(-1|-2|4)$

$$\text{·)}\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ -2-3 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

$$\text{·)}\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ -2-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

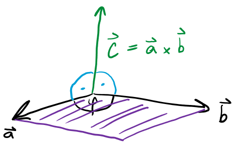
$$\text{·)}\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 2^2} = \underline{\underline{7{,}348\ldots}}$$

$$\text{·)}\ \cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{54}} = \frac{3 \cdot (-5) + (-5) \cdot (-5) + (-5) \cdot 2}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{54}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 90^\circ}}$$

Kreuzprodukt, Vektorprodukt, vektorielles Produkt

Dienstag, 18. Mai 2021 11:53



$\vec a \perp \vec c$; $\vec b \perp \vec c$

$\vec c$ ist Normalvektor auf $\vec a$ und $\vec b$!

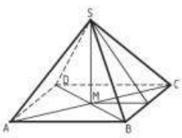
$|\vec a \times \vec b|$: Flächeninhalt des von $\vec a$ und $\vec b$ aufgespaltenen Parallelogramms.

Berechnung:

$$\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_x & b_y \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

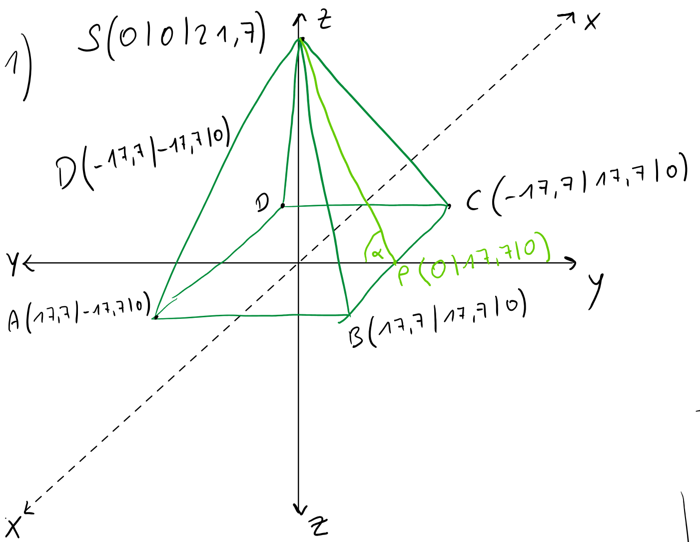
$\longrightarrow$ TI: crossP([□;□;□],[□;□;□])

8.61 Über dem Eingang des Louvre wurde eine quadratische Glaspyramide errichtet. Legt man die xy-Ebene in die Grundfläche und den Ursprung O in den Mittelpunkt M, so hat die linke vordere Ecke die Koordinaten A(17,7|−17,7|0) (Angaben in Meter).
Die Höhe der Pyramide beträgt 21,7 m.



1) Gib die Koordinaten der Punkte B, C, D und S an.
2) Ermittle mithilfe von Vektoren die Oberfläche der Pyramide.
3) Ermittle mithilfe von Vektoren den Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche.

1)



Sü, am 25.05

2) Grundfläche: $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 35,4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -35,4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| =$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35,4^2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 35,4^4} = \underline{1253,16\ m^2}$$

Seitenfläche: $A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{BC} \times \vec{BS}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -35,4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17,7 \\ -17,7 \\ 21,7 \end{pmatrix} \right| =$

Seitenfläche: $A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17,7 \\ 21,7 \end{pmatrix} \right| =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 35,4 \cdot 21,7 \\ 35,4 \cdot 17,7 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(35,4 \cdot 21,7)^2 + (35,4 \cdot 17,7)^2} = \underline{495,657\ldots\ m^2}$$

Oberfläche: $4 \cdot 495,657\ldots + 1253,16 = \underline{3235,79\ldots\ m^2}$

3) $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PS}}{|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{PS}|}$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -17,7 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -17,7 \\ -21,7 \end{pmatrix}}{17,7 \cdot \sqrt{17,7^2 + 21,7^2}} \right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{17,7^{\cancel{2}}}{\cancel{17,7} \cdot \sqrt{\ldots}} \right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{17,7}{\sqrt{17,7^2 + 21,7^2}} \right)$$

$$\underline{\alpha = 50,7\overline{96}°}$$

Matura vom Fr, 21.05 Flughafen

1) $|\vec{v}| = \sqrt{1,2^2 + 0,5^2} = \underline{1,3\ m/s} \ \hat{=}\ \underline{78\ m/min}$

2) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

$\begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ y_w \end{pmatrix} = 0$

$-1,2 + 0,5 y_w = 0 \quad | +1,2$

$0,5 y_w = 1,2 \quad | :0,5$

$\underline{y_w = 2,4}$

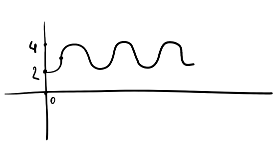
Meerwasser und mehr Wasser

$\rho(t) = a + b \cdot \cos(0,507 \cdot t)$

$2 = a + b \cdot \cos(0,507 \cdot 0)$

$\underline{I}$: $2 = a + b$

$\boxed{\begin{matrix} b = -1 \\ a = 3 \end{matrix}}$



$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{D}{2}}{L}$$

$$\alpha = 2 \cdot \arctan\left(\frac{D}{2L} \right)$$

9. Komplexe Zahlen

Dienstag, 25. Mai 2021 12:06

Problem: $x^2 + 1 = 0 \quad |-1$

$x^2 = -1 \quad |\sqrt{}$

$x = \pm\sqrt{-1}$ .... KEINE LÖSUNG IN $\mathbb{R}$

$\sqrt{-1}$ wird definiert als imaginäre Einheit i, j

$j := \sqrt{-1}$ bzw. $i := \sqrt{-1}$

Die imaginären Zahlen und die reellen Zahlen gemeinsam bilden die sogenannten komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

SÜ, am 31.05.2021

Schreibweise für komplexe Zahlen

→ Komponentenform

$$z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Realteil} \\ a = Re(z)}}{a} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Imaginärteil} \\ b = Im(z)}}{\underbrace{b \cdot j}} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

→ geordnetes Paar

$$z = (a, b)$$

Bsp.: $x^2 - 10x + 74 = 0$

$p = -10$
$q = 74$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 74}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-49}$$

in $\mathbb{R}$: keine Lösung
$L = \{\}$

in $\mathbb{R}$: keine Lösung

$L = \{\}$

in $\mathbb{C}$: $x_{1,2} = 5 \pm \boxed{\sqrt{-1}} \cdot \boxed{\sqrt{49}}$

$x_{1,2} = 5 \pm \boxed{7} \cdot \boxed{j}$

$z_1 = 5 + 7 \cdot j \rightarrow (5, 7)$

$z_2 = 5 - 7 \cdot j \rightarrow (5, -7)$

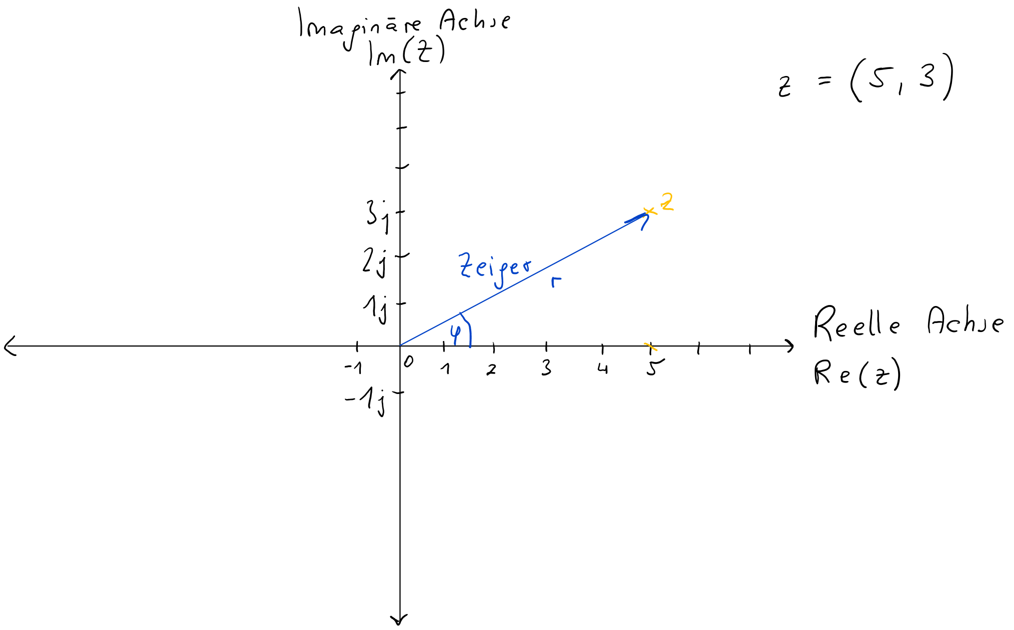
$\downarrow$

Komponentenform

---

grafische Darstellung in $\mathbb{C}$

$z = (5, 3)$



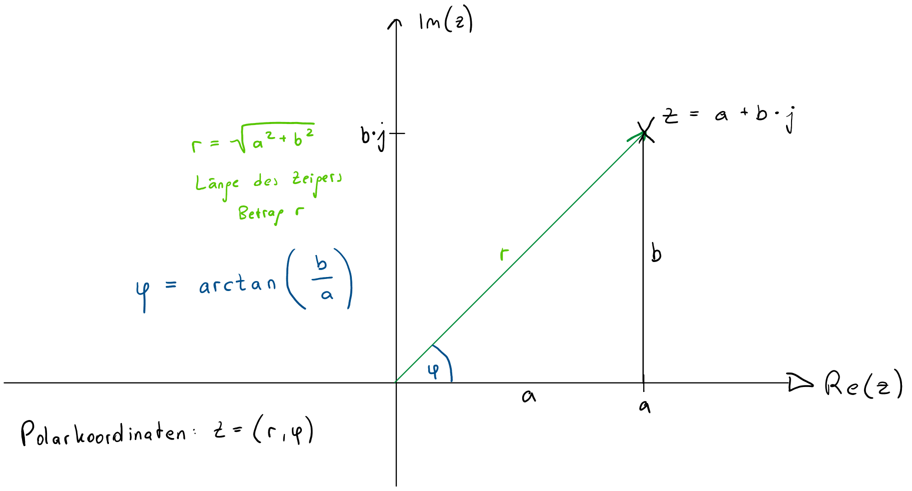
→ Schreibweise in Polarkoordinaten

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Länge des Zeigers

Betrag r

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$



Polarkoordinaten: $z = (r, \varphi)$

Polarkoordinaten: $z = (r, \varphi)$

technische Schreibweise $z = (r; \varphi)$

Bsp.: $z = -2 - 3j$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}$

$\underline{r = 3{,}6055\ldots}$

3.Qu.: $\varphi^* = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$

$\underline{\varphi^* = 56{,}3099\ldots^\circ}$

$\varphi = \varphi^* + 180^\circ$

$\underline{\varphi = 236{,}3099\ldots^\circ}$

$\underline{z = (3{,}6055\ldots, 236{,}3099\ldots^\circ)}$

$\underline{z = (\sqrt{13}, 236{,}3^\circ)}$

SÜ, am 01.06.2021

- $z = r \angle \varphi$

„r Versor φ"

- trigonometrische Schreibweise

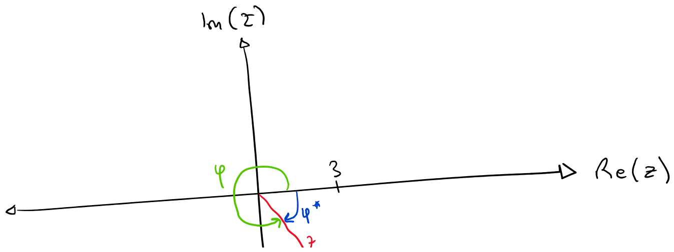
$z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$

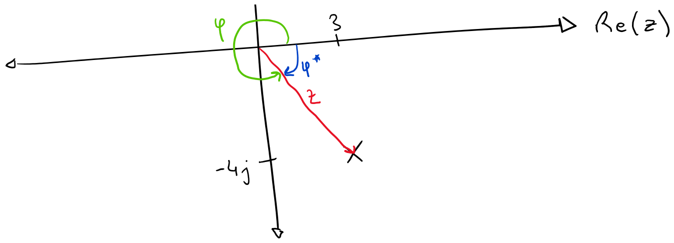
- Euler'sche Form / Exponentialform

$z = r \cdot e^{j\varphi}$ $\quad (e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$

Umrechnung zwischen den Koordinaten

1) $z = 3 - 4j$ ..... Komponentenform → Polarkoordinaten?





$r = |z|$ $\qquad$ $\varphi^{(*)} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ $\quad \longrightarrow$ auf Quadranten achten

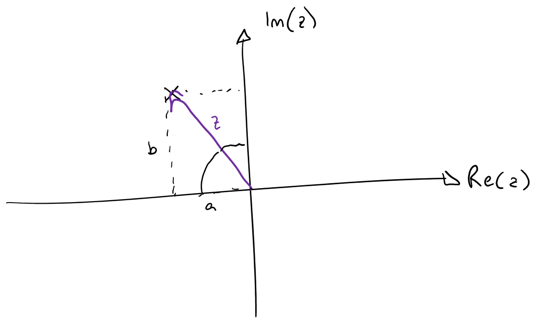
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad$ $\varphi^* = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

$\underline{r = 5}$ $\qquad$ $\varphi = 360° - \varphi^*$

$\underline{\varphi = 306,869\ldots°}$

$$z = (5;\ 307°) = 5 \angle 307° = 5 \cdot (\cos(307°) + j \cdot \sin(307°)) = 5 \cdot e^{307° \cdot j}$$

2) $z = (4;\ 135°)$ ... Polarkoordinaten $\longrightarrow$ Komponentenform



$a = |z| \cdot \cos(135° - 90°)$

$\underline{a = -2,828\ldots}$

$b = |z| \cdot \sin(135° - 90°)$

$\underline{b = 2,828\ldots}$

$z = -2,8 + 2,8j$

Maturaaufgabe:

$z_1 = r \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$

$r = 2$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot rad$

$z_1 = a + bj$

$= 2 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$r^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = 25 - 9$

$z_2 = -3 + 4j$

$z_3 = -3 - 4j$

Die konjugiert komplexe Zahl

$\hookrightarrow z^*, \bar{z}$

$z = a + bj$

$\bar{z} = z^* = a - bj$

vom Imaginärteil Vorzeichen wechseln

$z = 2 + 3j \longrightarrow z^* = 2 - 3j$

$z = -2 - 3j \longrightarrow z^* = -2 + 3j$

a) in Komponentenform

Addition, Subtraktion → Rechnen mit Termen

z.B.: $z_1 = 2+3j$
$z_2 = 4-5j$

$z_1 + z_2 = 2+3j + 4-5j = 6-2j$
$z_1 - z_2 = -2+8j$

Multiplikation → Rechnen mit Termen

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3j)\cdot(4-5j) =$$
$$= 8 - 10j + 12j - 15j^2 =$$
$$= 8 + 2j + 15 = \underline{\underline{23+2j}}$$

$$\boxed{j^2 = -1}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3j}{4-5j} = \frac{(2+3j)\cdot(4+5j)}{(4-5j)\cdot(4+5j)} = \frac{8+22j+15j^2}{16+25} = \frac{-7+22j}{41} = \underline{\underline{\frac{-7}{41} + \frac{22}{41}j}}$$

Sü, am 08.06.2021

7.74 Führe die Berechnungen in Komponentenform durch.
$z_1 = 5 + 12i$, $z_2 = 7 - 13i$, $z_3 = 24i$ und $z_4 = -8 + 5i$
a) $z_2 : z_1 - z_3 : z_4$ **b)** $z_1 \cdot z_4 + z_3 \cdot z_2$ **c)** $z_1 : z_2 - z_3 \cdot z_4$ **d)** $z_4 \cdot z_2 + z_1 : z_3$

a) $$\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_3}{z_4} = \frac{7-13i}{5+12i} - \frac{24i}{-8+5i} = \frac{7-13i}{5+12i}\cdot\frac{5-12i}{5-12i} - \frac{24i}{-8+5i}\cdot\frac{-8-5i}{-8-5i} =$$

$$= \frac{35-141i-156}{25+144} - \frac{-192i+120}{64+25} = \frac{-121-149i}{169} - \frac{120-192i}{89} = \frac{-10769-13261i-(20280-32448i)}{15041} = \frac{-31049+19187i}{15041} = \underline{\underline{-2,064}}$$

b) $$z_1 \cdot z_4 + z_3 \cdot z_2 = (5+12i)\cdot(-8+5i) + 24i\cdot(7-13i) = -40+25i-96i-60+168i+312 = \underline{\underline{212+97i}}$$ ✓

c) $$\frac{z_1}{z_2} - z_3 \cdot z_4 = \frac{5+12i}{7-13i} - 24i\cdot(-8+5i) = \frac{5+12i}{7-13i}\cdot\frac{7+13i}{7+13i} - (-192i-120) = \frac{-121+149i}{49+169} + 192i + 120 = \underline{\underline{119,444... + 192,683...}}$$

d) $$z_4 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_3} = (-8+5i)\cdot(7-13i) + \frac{5+12i}{24i} = 9+139i + \frac{5+12i}{24i}\cdot\frac{i}{i} = 9+139i + \frac{5i-12}{-24} = \underline{\underline{9,5+138,791...i}}$$ ✓

b) in Polarkoordinaten

Addition, Subtraktion → komplexe Zahl muss in Komponentenform umgerechnet werden
↳ dann erst addi./Subt.

$\ldots + 1{,}275\ldots i$ ✓

$\ldots i$ ✓

Multiplikation

graf.: Drehstreckung

$(r_1; \varphi_1) \cdot (r_2; \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$

$z_1 \cdot z_2$

Beträge werden multipliziert, die Winkel addiert

z.B.: $z_1 = (3; 20°)$ $z_2 = (-2; 40°)$ $z_3 = (-2; 340°)$

$z_1 \cdot z_2 = \underline{(-6; 60°)}$

$z_1 \cdot z_3 = \underline{(-6; 0°)} = (-6; 360°)$ → Hauptwert

Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(r_1; \varphi_1)}{(r_2; \varphi_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2\right)$

Beträge werden dividiert, Drehwinkel subtrahiert

z.B.: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3; 20°)}{(-2; 40°)} = \underline{(-1,5; 340°)}$ → Hauptwert

---

SÜ, am 14.06.2021

Potenzieren

$(r; \varphi)^n = (r^n; \varphi \cdot n)$

Der Betrag wird potenziert, der Drehwinkel multipliziert

z.B.: $z = (2; 35°)$

$z^5 = \underline{\underline{(32; 175°)}}$

Wurzelziehen

$\sqrt[n]{(r; \varphi)} = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right)$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$\underline{k=0}$ ↓ Hauptwert

z.B.: $z = (3; 70°)$

$\sqrt[3]{z}$: 1. Lösung $k=0$: $\left(\sqrt[3]{3}; \frac{70° + 0 \cdot 360°}{3}\right) = \underline{(\sqrt[3]{3}; 23,\dot{3}°)}$

2. Lösung $k=1$: $\underline{(\sqrt[3]{3}; 143,\dot{3}°)}$

3. Lösung $k=2$: $\underline{(\sqrt[3]{3}; 263,\dot{3}°)}$

9.3 Lösen von quadratischen Gleichungen in komplexen Zahlen

Monday, June 14, 2021 10:53 AM

→ Sonderfall in $\mathbb{R}$:

Ist Diskriminante negativ

↳ so hat die quadratische Gleichung keine Lösung

in $\mathbb{C}$ schon!

Bsp.: $x^2 + 6x + 13 = 0$ → $p = 6$, $q = 13$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 13}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-4}$$

in $\mathbb{R}$: keine Lösung

$L = \{\}$

in $\mathbb{C}$:

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{4} \cdot j$$

$$x_{1,2} = -3 \pm 2j$$

$\underline{x_1 = -3 + 2j}$ $\underline{x_2 = -3 - 2j}$

$$\underline{\underline{L = \{-3 \pm 2j\}}}$$

10. Beschreibende Statistik

Monday, June 14, 2021 11:03 AM

Statistik: rechnen mit Daten

Es werden Stichproben aus Grundgesamtheit genommen.
Damit erhält man die Urliste und untersucht auf ein bestimmtes Merkmal.

metrische Merkmale: lassen sich addieren & subtrahieren
(quantitative Daten) z.B.: Alter, Schuhgröße, ...

nominale Daten: lassen sich NICHT addieren/subtrahieren
(qualitative D.) z.B.: Augenfarbe, politische Einstellung, Lieblingsessen, ...

ordinale Daten: haben natürliche Rangfolge
(qualitative D.) z.B.: Schulnoten

10.2) 1) Güteklasse v. Äpfeln = ordinal
2) Religionszugehörigkeit v. Personen = nominal
3) Inflationsrate v. Ländern = metrisch
4) erzielte Weite b. Kugelstoßen = metrisch

grafische Darstellungsmöglichkeiten

Bsp.: Umfang: Schuhgröße d. 2AHIT

Urliste: 39/43/43/40/36/40/46/46/37/
39/43/43/42/43/41/38/41/43/44/
44/43/43/44/45/44/46/45/

Stichprobengröße $n = 27$

Wird die Urliste ihrer Größe nach geordnet, nennt man dies eine „geordnete Urliste"

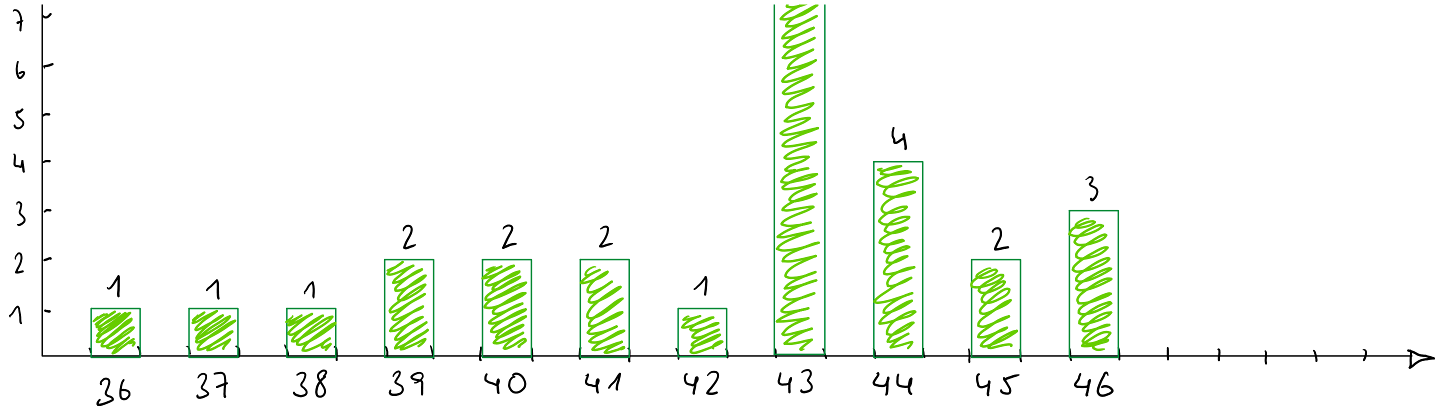
absolute Häufigkeit (abs. H.)
Anzahl des Auftretens eines best. Merkmals

relative Häufigkeit (rel. H.)

Division der abs. H. durch die Stichprobengröße

Schuh-größen	abs. H.	rel. H.	proz. H. (= rel. H. · 100%)
36	| 1	$\frac{1}{27}$	3,7%
37	| 1	$\frac{1}{27}$	3,7%
38	| 1	$\frac{1}{27}$	3,7%
39	|| 2	$\frac{2}{27}$	7,4%
40	|| 2	$\frac{2}{27}$	7,4%
41	|| 2	$\frac{2}{27}$	7,4%
42	| 1	$\frac{1}{27}$	3,7%
43	~~||||~~ ||| 8	$\frac{8}{27}$	29,6%
44	|||| 4	$\frac{4}{27}$	14,8%
45	|| 2	$\frac{2}{27}$	7,4%
46	||| 3	$\frac{1}{9}$	11,1%

Säulendiagramm mit ABSOLUTEN HÄUFIGKEITEN:


7
6
5
4
3
2
1
1
1
1
2
2
2
1
4
2
3
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46

- Arithmetisches Mittel (Durchschnitt), $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$$

- Gewichtetes Arithmetisches Mittel, $\bar{x}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot h_i \qquad h_i: \text{ relative Häufigkeit}$$

Nachteil: Ausreißer (Werte, die sehr klein/groß sind)
↳ passen nicht in Liste

- Median, Zentralwert, $\tilde{x}$ („x Schlange") „x Tilde"

mittlere Wert einer geordneten Liste

Stichprobengröße ungerade (n ungerade)

$$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

Stichprobengröße gerade (n gerade)

$$\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Schuhgröße 2AHIT:

$$\bar{x} = \frac{36 + 37 + 38 + 39 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 41 \cdot 2 + 42 + 43 \cdot 8 + 44 \cdot 4 + 45 \cdot 2 + 46 \cdot 3}{27}$$

$$\bar{x} = 42,\overline{259}\ldots$$

$\tilde{x}$: $n = 27 \rightarrow$ ungerade

$$x_{\frac{27+1}{2}} = x_{\frac{28}{2}} = x_{14}$$

$$\tilde{x} = 43$$

- Modus / Modalwert

—

- Modus / Modalwert

Der am häufigsten vorkommende Wert aus der Liste.

Es kann auch mehrere geben.

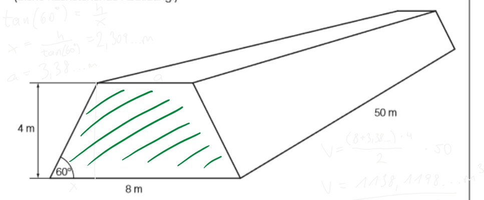
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hochwasserschutz

Aufgabennummer: A_056		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Für den Hochwasserschutz soll an einem Flussufer ein Damm aufgeschüttet werden.

a) Der Dammquerschnitt hat annähernd die Form eines gleichschenkeligen Trapezes mit der Basislänge 8 m und der Höhe 4 m. Der Damm ist 50 m lang.
Der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche des Damms beträgt 60°.
(Siehe nachstehende Abbildung.)



– Berechnen Sie das Volumen des Schüttmaterials, das für die Errichtung dieses Damms benötigt wird.

b) In der ersten Woche sollen a Kubikmeter des Schüttmaterials mit der Dichte ϱ (in Tonnen pro Kubikmeter) mit einem Muldenkipper zur Baustelle gebracht werden. Der Muldenkipper kann bei jeder Fahrt b Tonnen des Schüttmaterials befördern.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl A der Fahrten des Muldenkippers aus a, b und ϱ.

$A =$ ____________________

c) In der folgenden Tabelle sind die maximalen Wasserdurchflüsse eines Flusses an einer bestimmten Stelle für die Jahre 2005 bis 2012 dokumentiert:

Jahr	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
maximaler Wasserdurchfluss in m³/s	31	45	45	28	26	98	102	22

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und den Median $\tilde{x}$ der maximalen Wasserdurchflüsse mithilfe der Daten aus der Tabelle.

– Erklären Sie, welche Eigenschaften die beiden Zentralmaße gegenüber Ausreißern haben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{31+45+45+28+26+98+102+22}{8}$$

$$\bar{x} = 49{,}625\ldots \frac{m^3}{s}$$

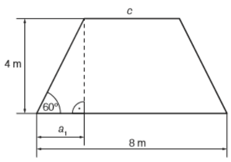
$$\tilde{x}: 22, 26, 28, 31, 45, 45, 98, 102$$

$$\tilde{x} = \frac{31+45}{2} = 38 \frac{m^3}{s}$$

– Der Durchschnitt filtert Ausreißer nicht weg, während der Median Ausreißer wegfiltert, sodass der Median meistens verwendet wird.

Möglicher Lösungsweg

a)



$a_1 = \frac{4}{\tan(60°)} = 2{,}309\ldots$

$c = 8 - 2 \cdot a_1 = 3{,}381\ldots$

$A_{Trapez} = \frac{(8 + 3{,}38\ldots) \cdot 4}{2} = 22{,}762\ldots$

$V = A_{Trapez} \cdot 50 = 1\,138{,}1\ldots$

Das Volumen des benötigten Schüttmaterials beträgt rund 1 138 m³.

b) $A = \frac{a \cdot \varrho}{b}$

c) arithmetisches Mittel

$\bar{x} = \frac{31 + 45 + 45 + 28 + 26 + 98 + 102 + 22}{8}$

$\bar{x} = 49{,}625$ m³/s

Median

$\tilde{x} = \frac{31 + 45}{2}$

$\tilde{x} = 38$ m³/s

Das arithmetische Mittel berücksichtigt allfällige Ausreißer stärker als der Median.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 1 Zahlen und Maße
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

29. HÜ, am 25.05.2021

Dienstag, 25. Mai 2021 12:13

Roboter 2 B_345 a) - c)

8.75) a) 2)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Roboter (2)*

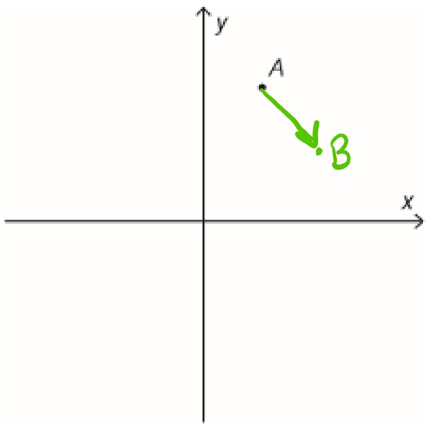
Aufgabennummer: B_345

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Roboterbewegungen werden mithilfe der Vektorrechnung modelliert.

Folgende Anweisung zur Verschiebung eines Punktes ist vorgegeben:
„Der Punkt A wird um einen Vektor $\vec{s}$ mit den Komponenten $s_x > 0$ und $s_y < 0$ in den Punkt B verschoben."

– Veranschaulichen Sie diese Anweisung, indem Sie einen möglichen Vektor $\vec{s}$ und den entsprechenden Punkt B im nachstehenden Koordinatensystem einzeichnen.



b) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

Skalarprodukt ist 0, wenn 90°. $-a_y \cdot a_x + a_x \cdot a_y = \underline{\underline{0}}$

c) Die Spitze eines Roboterarms bewegt sich geradlinig vom Punkt $C = (1|-2|3)$ zum Punkt $D = (5|-3|2)$. Dort ändert sich die Bewegungsrichtung geringfügig und die Spitze bewegt sich geradlinig zum Punkt $E = (10|-4|0)$.

– Berechnen Sie den Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde.

α

$$\alpha = 180° - \arccos\left(\frac{\vec{DC} \cdot \vec{DE}}{|\vec{DC}| \cdot |\vec{DE}|}\right) = 180° - \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{30}}\right) = 180° - \arccos\left(\frac{-23}{\sqrt{540}}\right) =$$

wegen Suplementär

$$= 180° - 171{,}794...° = \underline{8{,}205...°}$$

* ehemalige Klausuraufgabe

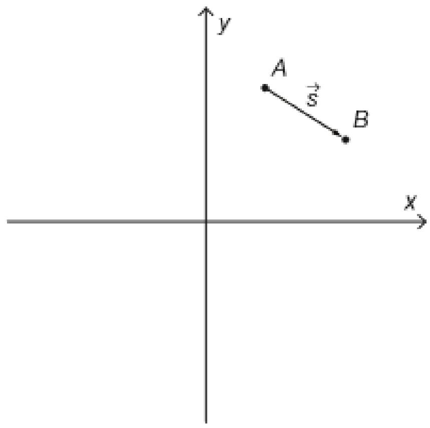
d) Für Schweißroboter werden Schweißelektroden benötigt.
Ein Unternehmen liefert Elektroden, deren Längen annähernd normalverteilt mit
μ = 300 mm und σ = 5 mm sind.
Man entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 20 Schweißelektroden.

– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zum Beispiel:



b) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

c) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{DE}|} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 8{,}205...° \approx 8{,}21°$$

Der Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde, beträgt rund 8,21°.

d) Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$300 \pm u_{0,975} \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}$$

$u_{0,975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [297,81; 302,19].

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für eine richtige Veranschaulichung im Koordinatensystem

b) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels φ

d) 1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Zufallsstreubereich für einen Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung)
1 × B: für das richtige Ermitteln des Zufallsstreubereichs

8.75 Berechne den Flächeninhalt ~~1) des Parallelogramms~~, **2)** des Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ ~~**b)**~~ $\cancel{\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ~~**c)**~~ $\cancel{\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \cdot -6 - 7 \cdot -4 \\ -(1 \cdot -6 - -2 \cdot -4) \\ 1 \cdot 7 - -2 \cdot -3 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 46 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{46^2 + 14^2 + 1^2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2313}$$

$$A = 24{,}046\ldots \text{ LE}^2$$

$$\underline{\underline{A = 24{,}046\ldots LE^2}}$$

28. HÜ, am 18.05.2021

Dienstag, 18. Mai 2021 12:11

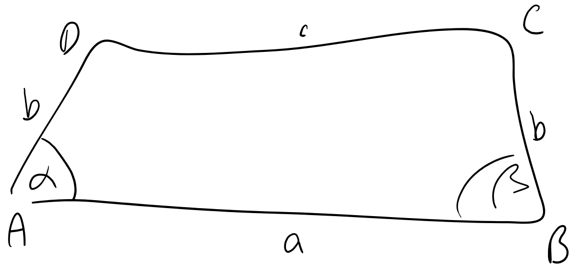
8.32)

8.32 Ein Viereck ist durch die Punkte A(−5|−6), B(7|3), C(0|4) und D(−4|1) bestimmt.
1) Zeige, dass es sich dabei um ein gleichschenkliges Trapez handelt.
2) Berechne den Umfang, die Innenwinkel sowie den Flächeninhalt des Trapezes.

1) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$$\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \rightarrow \frac{\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}{|\overrightarrow{DC}|} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0,8\\0,6\end{pmatrix}}}$$

↳ gleiche Richtung = parallel



$\alpha = \beta$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}}{\sqrt{225} \cdot \cancel{7}\ \sqrt{50}} = \underline{0,707\ldots}$$

$\sqrt{1^2+7^2} = \underline{\underline{\sqrt{50}}}$

$\underline{\alpha = \cancel{44,415\ldots}^\circ}$ $\underline{\underline{45^\circ}}$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right) = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-12\\-9\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{225} \cdot 7}\right) = \underline{44,415\ldots^\circ} \quad \underline{45^\circ}$$

↳ gleiche Winkel = gleichschenkliges Trapez

2) $$U = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{DA}| = \left|\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}\right|$$

$$= \underline{\underline{34,142\ldots \text{LE}}} \checkmark$$

$\gamma = 180^\circ - \alpha = \underline{\underline{135,573\ldots^\circ}}$ 135°

$\delta = 180^\circ - \beta = \underline{\underline{135,573\ldots^\circ}}$ 135°

$$A = \frac{(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|) \cdot h}{2}$$

$h = \sin(\alpha) \cdot |\overrightarrow{DA}|$

$A = \frac{\quad}{2}$

$h = \sin(\alpha) \cdot |\overline{DA}|$

$h = 4{,}948\ldots LE$

$A = 49{,}497\ldots LE^2$

$50\ LE^2$

8.101) b)
8.103)
B_333) Auf d. Baustelle
B_347) Vektorgrafiken a) - c)

8.101 Gib die Gleichungen der Geraden in Parameterdarstellung an und berechne den Schnittpunkt.
a) g_1: A(6|7), B(12|−2), g_2: C(−4|6), D(6|−4) **b)** g_1: A(1,5|−9), B(9,5|−7), g_2: C(5|7), D(−2|4)

g_1: A(1,5 | -9)
B(9,5 | -7)

g_2: C(5 | 7)
D(-2 | 4)

$g_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

g_1: $x = 1,5 + 8t$
$y = -9 + 2t$

g_2: $x = 5 - 7s$
$y = 7 - 3s$

I: $1,5 + 8t = 5 - 7s$
II: $-9 + 2t = 7 - 3s$

I: $8t + 7s = 3,5$
II: $2t + 3s = 16$ $\ominus$

II: $8t + 12s = 64$

$\ominus$ $-5s = -60,5$
$\underline{s = 12,1}$ ✓

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 12,1 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -79,7 \\ -29,3 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{S = (-79,7 | -29,3)}}$ ✓

8.103 Lisa und Sylvia gehen in einer nahegelegenen ebenen Parkanlage laufen. Alle Wege sind geradlinig. Lisa läuft vom Südtor S(995|125) direkt zum Nordtor N(2 795|2 525). Sylvia beginnt ihren Lauf am Westtor W(140|2 317). Ihr direkter Weg zum Osttor hat die Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ (Angaben in Meter).

1) Stelle jeweils eine Parameterdarstellung der Trägergeraden der Laufwege von Lisa und Sylvia auf.
2) Berechne, an welchem Punkt und in welchem Winkel sich die beiden Wege kreuzen.
3) Lisa bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 9 $\frac{km}{h}$. Sylvia legt im Mittel pro Minute eine Strecke von 125 m zurück. Gib an, ob die beiden Freundinnen einander an der Wegkreuzung treffen, wenn sie gleichzeitig starten. Beschreibe deine Vorgehensweise.
4) Sylvia benötigt rund 31 Minuten, um vom Westtor zum Osttor zu gelangen. Ermittle die Koordinaten des Osttors. Runde auf ganze Meter.

1) $g_L: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 995 \\ 125 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1800 \\ 2400 \end{pmatrix}$ ✓

$g_S: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 140 \\ 2317 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ ✓

2) $x_L: 995 + 1800t$
$y_L: 125 + 2400t$
$x_S: 140 + 15s$
$y_S: 2317 - 8s$

I: $995 + 1800t = 140 + 15s$

$\underline{II}: 125 + 2400t = 2317 - 8s$

$I: 1800t - 15s = -855$

$II: 2400t + 8s = 2192 \longrightarrow s = \frac{2192 - 2400t}{8}$

s in I: $1800t - 15 \cdot \left(\frac{2192 - 2400t}{8}\right) = -855$

$1800t - 4110 + 4500t = -855$

$6300t = 3255$

$t = \frac{3255}{6300}$

$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 995 \\ 125 \end{pmatrix} + \frac{3255}{6300} \cdot \begin{pmatrix} 1800 \\ 2400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1925 \\ 1365 \end{pmatrix}$

$S = (1925 \mid 1365)$ ✓

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 1800 \\ 2400 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}}{\sqrt{1800^2 + 2400^2} \cdot \sqrt{15^2 + 8^2}}\right) = 81{,}202\ldots^\circ$ ✓

3) Lisas Weg: $\sqrt{(1925 - 995)^2 + (1365 - 125)^2} = 1550\,m$

Sylvias Weg: $\sqrt{(1925 - 140)^2 + (1365 - 2317)^2} = 2023\,m$

Lisas v: $9\,\frac{km}{h} \mathrel{\hat{=}} 150\,\frac{m}{min}$

Sylvias Weg: $125\,\frac{m}{min}$

$s = v \cdot t$

$t = \frac{s}{v}$

Lisa: $t = \frac{1550}{150} = 10{,}\overline{3}\,min$ ✓

Sylvia: $t = \frac{2023}{125} = 16{,}184\,min$ ✓

A: Nein, sie treffen sich nicht, es sei denn Lisa wartet.

4) $s = v \cdot t = 125 \cdot 31 = 3875\,m$ ✓

$\underline{I}: 3875 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\underline{II}: 15a = -8b \quad | : (-8)$

$3875 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{15a}{-8}\right)^2}$

$$3875 = \sqrt{\frac{289a^2}{64}} \qquad | \; ()^2$$

$$\frac{289a^2}{64} = 3875^2 \qquad | \cdot 64$$

$$289a^2 = 3875^2 \cdot 64$$

$$a^2 = \frac{3875^2 \cdot 64}{289}$$

$$a = \sqrt{\frac{3875^2 \cdot 64}{289}}$$

$$\underline{a = 1823{,}5294\ldots} \approx \underline{\underline{1824\,m}} \quad (-1824\,m)$$

$$b = \frac{15a}{-8}$$

$$\underline{b = -3419{,}1176\ldots} \approx \underline{\underline{-3419\,m}} \quad (3419\,m)$$

$$\vec{OW} = \begin{pmatrix} 140 \\ 2317 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OO} = \vec{OW} + \begin{pmatrix} 3419 \\ -1824 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3559 \\ 493 \end{pmatrix} \qquad \underline{\text{Osttor} = (3559 \mid 4}$$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

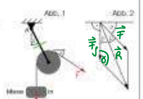
Auf der Baustelle

Aufgabennummer: B_333

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Zur Bewegung von Lasten werden auf einer Baustelle verschiedene Hilfsmittel eingesetzt.

a) Mithilfe einer nahezu reibungsfreien festen Seilrolle soll eine Palette hochgehoben werden (siehe Abb. 1).
Auf das Seil wirkt eine Kraft von $F = 1{,}5$ kN unter einem Winkel $\alpha = 35°$.



– Beschriften Sie in Abb. 2 die Kräfte in der Skizze mit $\vec{F}_G$, $\vec{F}$ und $\vec{R}$, wobei $\vec{R}$ die Resultierende ist, die auf die Seilrolle wirkt.
– Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{R}$.

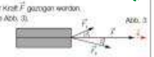
$\beta = \frac{90° - \alpha}{2} = \underline{27{,}5°}$ $\quad \gamma = 180° - 2\beta = \underline{125°}$ $\quad \frac{1500}{\sin(\beta)} = \frac{\vec{R}}{\sin(\gamma)}$

$|\vec{R}| = \frac{1500 \cdot \sin(125°)}{\sin(27{,}5°)}$

$|\vec{R}| = 2661{,}032\ldots\,N$

$\underline{\underline{\hat{=}\, 2{,}7\,kN}}$

b) Ein Wagen soll von 2 Bauarbeitern mit einer Kraft $\vec{F}$ gezogen werden.
$\vec{F}$ ist die Summe der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (siehe Abb. 3).



– Erstellen Sie eine Formel zur Ermittlung des Betrags der Kraft $\vec{F}_1$, wenn man den Betrag der Kraft $\vec{F}$ und die Winkel α und β kennt.

$$|\vec{F}_1| = \frac{\sin(\beta) \cdot |\vec{F}|}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

Beim Ziehen einer Last wird Arbeit W verrichtet.
Die Formel für die Arbeit W lautet: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

– Zeigen Sie, dass es im Fall der gegebenen Situation genügt, nur das Produkt der Beträge von $\vec{F}$ und $\vec{s}$ zu berechnen.

$\cos(0) = 1$
dadurch, dass $\vec{F}$ und $\vec{s}$ in gleiche Richtung, sind die Beträge gleich den Vektoren

Wird die Last nur von einer Person gezogen, schließt die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ N mit dem Weg $\vec{s} = \begin{pmatrix} 100 \\ 130 \end{pmatrix}$ m einen Winkel φ ein.

– Berechnen Sie die zu verrichtende Arbeit W. $\quad 200 \cdot 100 + 130 \cdot 100 = 33000\,N$
– Berechnen Sie den Winkel φ.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 130 \end{pmatrix}}{\sqrt{200^2 + 100^2} + \sqrt{100^2 + 130^2}}\right) = \underline{\underline{25{,}8663\ldots°}}$$

93)

c) 30 kg Schutt werden in einer Schubkarre abtransportiert. Dabei wirkt die Gewichtskraft $\vec{F_1}$ auf die Schubkarre. Zum Entladen muss die Schubkarre gekippt werden. Die Kraft $\vec{F_2}$, mit der man am äußersten Ende der Haltegriffe nach oben drücken muss, kann mithilfe des Hebelgesetzes $F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2$ ermittelt werden. Die Gewichtskraft ist das Produkt aus Masse m und Erdbeschleunigung g.

Abb. 4

– Berechnen Sie den Betrag der Kraft $\vec{F_2}$, wenn $a_1 = 250$ mm und $a_2 = 1500$ mm gilt. (Rechnen Sie mit $g = 9{,}81$ m/s².)

$F_2 = \frac{m \cdot g \cdot a_1}{a_2} = \frac{30 \cdot 9{,}81 \cdot 250}{1500} = \underline{\underline{49{,}05N}}$ ✓

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

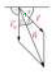
Möglicher Lösungsweg

a) $\beta = \frac{90° - \alpha}{2}$; $\cos(\beta) = \frac{\frac{R}{2}}{F}$

$R = 2 \cdot F \cdot \cos\left(\frac{90° - \alpha}{2}\right)$

$R = 2 \cdot 1{,}5 \cdot \cos(27{,}5°) = 2{,}6610... \approx 2{,}66$

$R = 2{,}66$ kN



b) $\frac{F_1}{\sin(\beta)} = \frac{F}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$

$F_1 = \frac{\sin(\beta) \cdot F}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi)$, φ ist der Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$.

$\varphi = 0°$, da der Körper in Richtung der Kraft $\vec{F}$ gezogen wird.
$\Rightarrow \cos(0°) = 1 \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$

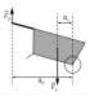
$\vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 130 \end{pmatrix} = 33000$ $W = 33000$ Nm

$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|}\right)$ $\varphi = 25{,}88...° \approx 25{,}9°$

c) $F_2 = F_1 \cdot \frac{a_1}{a_2}$, $F_1 = m \cdot g$

$F_1 = 30 \cdot 9{,}81 = 294{,}3$
$F_1 = 294{,}3$ N

$F_2 = 294{,}3 \cdot (250/1500) = 49{,}05$
$F_2 = 49{,}05$ N



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2

Thema: Physik

Quellen: –

bifie

Vektorgrafiken*

Aufgabennummer: B_347

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Vektorgrafik besteht im Gegensatz zur Pixelgrafik nicht aus einzelnen Bildpunkten (Pixeln), sondern wird durch geometrische Primitive (Linie, Kreis, Polygone, Splines ...) definiert.

a) Rechtecke können in einer Vektorgrafik durch Angabe der Eckpunkte als geschlossene Streckenzüge definiert werden.
Es gibt zwei Rechtecke $ABCD$ mit:

$\vec{BC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{n}_{AB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \end{pmatrix}$

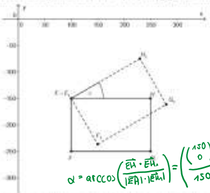
- $A = (50|-100)$ und $B = (250|-250)$ sind zwei benachbarte Eckpunkte.
- Die Seite BC ist halb so lang wie die Seite AB.

$\vec{OC_1} = \vec{OB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 325 \\ -150 \end{pmatrix}$ $C_1 = (325|-150)$

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke.

b) Ein Vorteil von Vektorgrafiken ist, dass geometrische Transformationen sehr einfach und ohne Qualitätsverlust durchgeführt werden können.

Das in der nachstehenden Grafik dargestellte Rechteck $E_1F_1G_1H_1$ entstand aus dem Rechteck $EFGH$ durch Drehung um den Eckpunkt $E = (100|-150)$ gegen den Uhrzeigersinn.



$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{EH} \cdot \vec{EH_1}}{|\vec{EH}| \cdot |\vec{EH_1}|}\right) = \left(\frac{\begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 75 \end{pmatrix}}{150 \cdot \sqrt{130^2 + 75^2}}\right) = 29,9816\ldots^\circ$

– Zeigen Sie rechnerisch unter Verwendung der Punkte $E = (100|-150)$, $H = (250|-150)$ und $H_1 = (230|-75)$, dass der Drehwinkel gerundet 30° beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

normal = Skalarprodukt 0
$\to -a_y \cdot a_x + a_x \cdot a_y = 0$
$\cancel{-a} \cancel{+a} = 0$
$0 = 0$

← Das ist Definition! (nach links)

c) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

d) Splines sind stückweise zusammengesetzte Funktionen, deren Graphen knickfrei ineinander übergehen. Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Ein kubischer Spline, der aus 2 Funktionen 3. Grades zusammengesetzt ist, ist für das Intervall [0; 2] folgendermaßen definiert:

$s_0(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{3} \cdot x$ für $0 \leq x \leq 1$

$s_1(x) = \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1) + 1$ für $1 < x \leq 2$

– Zeigen Sie, dass der Übergang von s_0 auf s_1 knickfrei erfolgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 200 \\ -150 \end{pmatrix}$

Normalvektor zu $\vec{AB}$ mit halber Länge: $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \end{pmatrix}$

$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 325 \\ -150 \end{pmatrix}$

Der Punkt C hat die Koordinaten $(325|-150)$.

Auftragen des Normalvektors in die andere Richtung ist ebenfalls zulässig. Man erhält dann: $C = (175|-350)$.

b) $\vec{EH} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{EH_1} = \begin{pmatrix} 130 \\ 75 \end{pmatrix}$

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{EH} \cdot \vec{EH_1}}{|\vec{EH}| \cdot |\vec{EH_1}|} \Rightarrow \alpha = 29,96\ldots^\circ \approx 30^\circ$

c) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

d) $s_0(1) = s_1(1) = 1$

$s_0'(x) = -2 \cdot x^2 + \frac{5}{3} \Rightarrow s_0'(1) = -\frac{1}{3}$

$s_1'(x) = 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + \frac{23}{3} \Rightarrow s_1'(1) = -\frac{1}{3}$

Die beiden Funktionen haben also an der Stelle $x = 1$ den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung, der Übergang ist also knickfrei.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermitteln des Normalvektors mit halber Länge)
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke

b) 1 × B: für den richtigen rechnerischen Nachweis

c) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

d) 1 × D: für den richtigen Nachweis (Funktionswert und Steigung)

26. HÜ, am 04.05.2021

Dienstag, 4. Mai 2021 12:14

B_321) Segeln

Segeln*

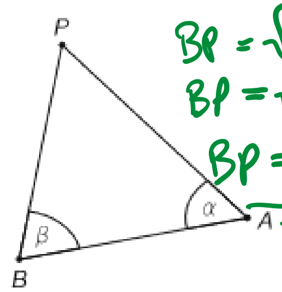
Aufgabennummer: B_321

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Entfernungen werden beim Segeln in nautischen Meilen (NM) angegeben. Die davon abgeleitete Geschwindigkeitseinheit nautische Meilen pro Stunde wird *Knoten* genannt.

a) Ein Segelboot fährt, nachdem es vom Punkt *P* gestartet ist und den Punkt *A* passiert hat, zum Punkt *B*. Von dort fährt es zum Punkt *P* zurück (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

Die folgenden Abmessungen sind bekannt: $\boldsymbol{\alpha} = 63°$, $\overline{PA} = 3{,}3$ NM und $\overline{AB} = 2{,}7$ NM.



$BP = \sqrt{PA^2 + AB^2 - 2 \cdot PA \cdot AB \cdot \cos(\alpha)}$

$BP = \sqrt{3{,}3^2 + 2{,}7^2 - 2 \cdot 3{,}3 \cdot 2{,}7 \cdot \cos(63)}$

$BP = 3{,}176\ldots$ NM

$s = v \cdot t$

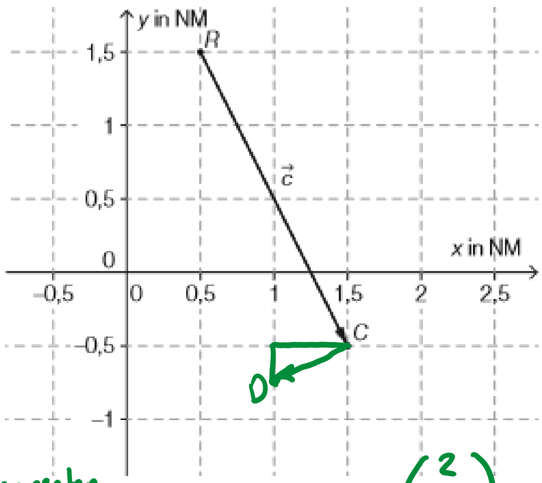
$t = \frac{s}{v} = \frac{9{,}176\ldots}{6{,}8} = 1{,}349\ldots h$

– Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BP}$.
– Berechnen Sie die Dauer dieser Umrundung, wenn das Segelboot mit einer mittleren Geschwindigkeit von 6,8 Knoten fährt. $V = PA + AB + BP = 9{,}176\ldots$ NM
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$ auf, wenn anstatt der Entfernung $\overline{AB}$ der Winkel $\boldsymbol{\beta}$ bekannt wäre.

$\overline{BP} = \frac{\sin(\alpha) \cdot \overline{PA}}{\sin(\beta)}$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Segelboot startet im Punkt R und fährt geradlinig zum Punkt C. Dort findet eine Kursänderung statt, um den Punkt D zu erreichen.



– Lesen Sie die ~~Koordinaten~~ Komponenten des Vektors $\vec{c}$ ab. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

– Zeichnen Sie den Punkt D ein, der ausgehend vom Punkt C mit dem Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ angefahren wird.

– Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{c} \cdot \vec{d}$. $2 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-0{,}5) = 0$

– Interpretieren Sie dieses Skalarprodukt geometrisch. $\vec{c} \perp \vec{d}$

c) Die Vortriebskraft F_V beim Segeln lässt sich mit folgender Formel annähernd berechnen:

$$F_V = \frac{A \cdot \rho \cdot v_W^2}{4}$$

$$A = \frac{F_V \cdot 4}{\rho \cdot v_W^2} = \frac{153 \cdot 4}{1{,}225 \cdot 5^2} = \underline{\underline{19{,}983\ldots \text{ m}^2}}$$

F_V ... Vortriebskraft in Newton (N)
A ... Segelfläche in m²
v_W ... Windgeschwindigkeit am Segel in m/s
ρ ... Dichte der Luft (ρ = 1,225 kg/m³)

– Berechnen Sie, wie groß die Segelfläche sein muss, damit bei einer Windgeschwindigkeit von 5 m/s eine Vortriebskraft von 153 N erreicht wird.

– Geben Sie an, wie sich die Vortriebskraft verändert, wenn sich die Windgeschwindigkeit verdoppelt und die anderen Parameter konstant bleiben. F_V ver-4-facht sich!

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{BP} = \sqrt{3{,}3^2 + 2{,}7^2 - 2 \cdot 3{,}3 \cdot 2{,}7 \cdot \cos(63°)} = 3{,}176... \approx 3{,}18$

Die Entfernung zwischen dem Punkt B und dem Punkt P beträgt rund 3,18 NM.

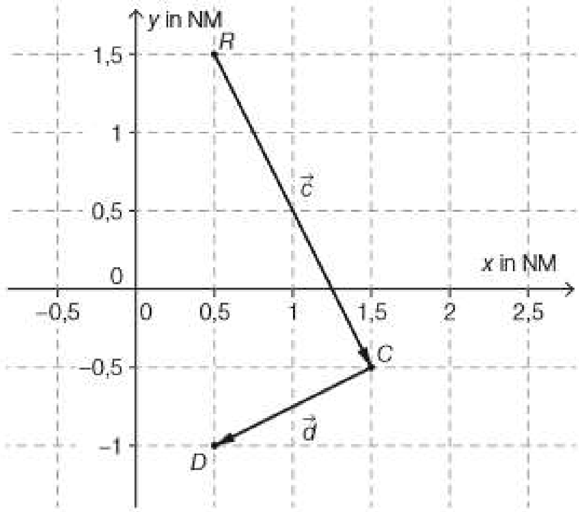
$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = 9{,}176...$

$t = \dfrac{9{,}176...}{6{,}8} = 1{,}349... \approx 1{,}35$

Die Umrundung dauert etwa 1,35 Stunden.

Sinussatz: $\dfrac{\overline{PA}}{\sin(\beta)} = \dfrac{\overline{BP}}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \overline{BP} = \dfrac{\overline{PA} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



$\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 0$

Die beiden Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ stehen normal aufeinander.

c) $A = \dfrac{4 \cdot F_V}{1{,}225 \cdot v_W^2} = \dfrac{4 \cdot 153}{1{,}225 \cdot 5^2} = 19{,}9... \approx 20$

Die Segelfläche muss dazu rund 20 m² groß sein.

Eine Verdoppelung der Windgeschwindigkeit führt zu einer Vervierfachung der Vortriebskraft.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der Dauer dieser Umrundung
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Koordinaten des Vektors $\vec{c}$
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Punkts D
1 × B: für die richtige Berechnung des Skalarprodukts
1 × C2: für die richtige geometrische Interpretation des Skalarprodukts

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts der Segelfläche
1 × C: für die richtige Beschreibung

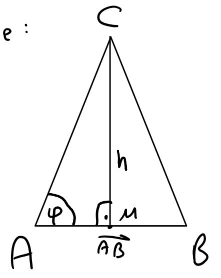
8.31)
8.33)
B_246 Rettungshubschrauber

8.31 Ein gleichschenkliges Dreieck ABC, das in mathematisch positiver Richtung beschriftet ist, hat die Basis AB mit A(−2|−1), B(4|7) sowie die Höhe h = 10 E. Ermittle den fehlenden Eckpunkt C, berechne den Winkel φ, den $\overline{AB}$ mit $\overline{AC}$ einschließt sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.

geg.: A(-2|-1)
B(4|7)
h=10LE

ges.: C, φ, A

Skizze:



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \underline{10}$$

nach links gekippt 90°

$$\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C = (-7 \mid 9)}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right) \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{6 \cdot -5 + 8 \cdot 10}{\sqrt{6^2+8^2} \cdot \sqrt{5^2+10^2}}\right)$$

$$\underline{\underline{\varphi = 63{,}4349...^\circ}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB}_x & \overrightarrow{AC}_x \\ \overrightarrow{AB}_y & \overrightarrow{AC}_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB}_x \cdot \overrightarrow{AC}_y - \overrightarrow{AC}_x \cdot \overrightarrow{AB}_y)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 10 - 8 \cdot (-5)) = 50\ E^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(6 \cdot 10 - 8 \cdot (-5)\right) = \underline{\underline{50\ E^2}}$$

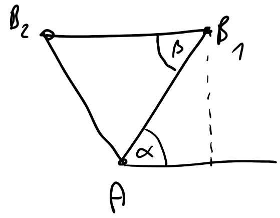
8.33 Bei einem Ruderbewerb müssen auf einem See zwei Bojen an den Positionen $B_1(150|140)$ und $B_2(500|250)$ passiert werden. Danach soll zum Startpunkt zurückgekehrt werden. Ein Ruderteam startet im Punkt $A(120|10)$ (Angaben in Meter).

1) Berechne, in welchem Winkel zur Horizontalen das Team die erste Boje B_1 mindestens ansteuern sollte.

2) Ermittle den Winkel zwischen $\overrightarrow{B_1A}$ und $\overrightarrow{B_1B_2}$.

3) Berechne, welche Wasserfläche durch den Parcours AB_1B_2 eingeschlossen wird.

Skizze:



1) $$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}150-120\\140-10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{17800}}\right) = \underline{\underline{77{,}005\ldots^\circ}}$$

$$|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{30^2 + 130^2} = \sqrt{17800}$$

2) $$\beta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{B_1A} \cdot \overrightarrow{B_1B_2}}{|\overrightarrow{B_1A}| \cdot |\overrightarrow{B_1B_2}|}\right) = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-30\\-130\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}350\\110\end{pmatrix}}{\sqrt{17800} \cdot \sqrt{134600}}\right) = \underline{\underline{120{,}441\ldots^\circ}}$$

3) $$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -30 & 350 \\ -130 & 110 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(-30 \cdot 110 - 350 \cdot (-130)\right) =$$

$$= \underline{\underline{21100\ m^2}}$$

Bundesinstitut bifie Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

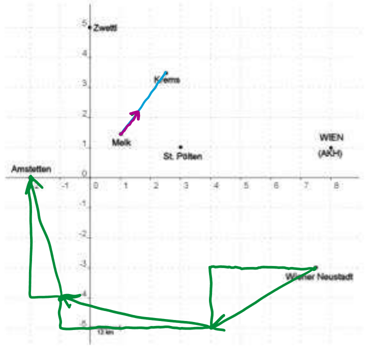
Rettungshubschrauber

Aufgabennummer: B_246

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Einsatz von Hubschraubern ermöglicht schnelle und sichere Krankentransporte.

Im nachstehenden Koordinatensystem sind Krankenhäuser eingezeichnet, die über einen Hubschrauberlandeplatz verfügen. Bei der Darstellung entspricht eine Einheit im Koordinatensystem einer Strecke von 12 km.



a) – Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Koordinaten des Krankenhauses Krems ab. $=(2,5 | 3,5)$
– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Flug eines Hubschraubers vom Krankenhaus Krems zum AKH Wien beschreibt. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 - 2,5 \\ 1 - 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

b) Ein Hubschrauber startet beim Krankenhaus Wiener Neustadt. Der Flug wird durch die folgenden Vektoren beschrieben:

Zuerst $\begin{pmatrix} -3,5 \\ -2 \end{pmatrix}$, dann $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und schließlich $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

– Zeichnen Sie den Hubschrauberflug in der obigen Abbildung ein.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ beschreibt den Hubschrauberflug vom Krankenhaus St. Pölten zum Krankenhaus Zwettl. $\sqrt{(-3)^2+4^2} \cdot 12 = 60km$

– Berechnen Sie die Länge dieses Hubschrauberflugs in Kilometern.

d) Ein Hubschrauber fliegt vom Krankenhaus Melk Richtung Krankenhaus Krems.

– Zeichnen Sie den entsprechenden Einheitsvektor dieser Richtung ausgehend vom Krankenhaus Melk in die obige Abbildung ein.
– Dokumentieren Sie, wie man diesen Einheitsvektor berechnen kann.

Melk - Krems / Vektor

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

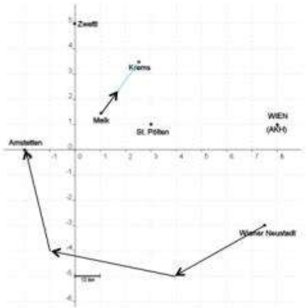
Möglicher Lösungsweg

a) Krems (2,5|3,5) *Ablesetoleranz: ± 0,1 Einheiten*

Krems – Wien: $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

Lösung auch grafisch möglich.

b)



c) St. Pölten – Zwettl = $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Länge (Betrag) = 5 Einheiten, das entspricht einer Entfernung von 60 km Luftlinie.

d) Die Koordinaten des Vektors Melk – Krems werden durch den Betrag dieses Vektors dividiert.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) –
c) –
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 1
d) mittel	d) 2

Thema: Verkehr

Quellen: –

SÜ fertig machen

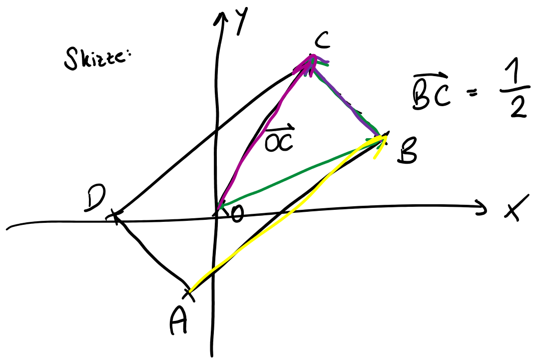
8.8)

<u>Beispiel</u>: $A(-1|-2)$ $B(5|6)$ ... Rechteck ABCD

$\vec{AD}$ ist $\frac{1}{2}\cdot\vec{AB}$

ges.: C, D

Skizze:



$\vec{BC} = \frac{1}{2}\cdot\vec{n}_{\vec{AB},L}$

$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{\vec{AB},L} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{C = (1|9)}}$

bis hier SÜ

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$

$\vec{AD} = \frac{1}{2}\circ\vec{n}_{\vec{AB},L}$

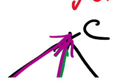
$\vec{AD} = \frac{1}{2}\circ\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

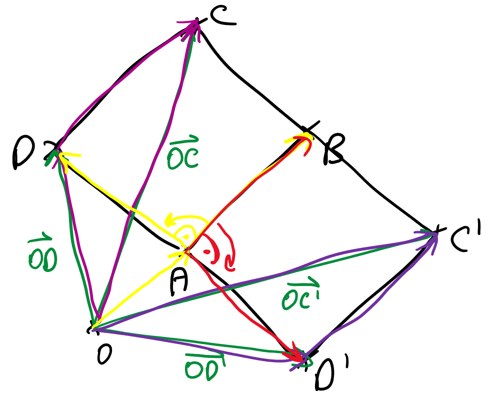
$\vec{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{D = (-5|1)}}$

8.8 Die Strecke AB mit A(3|4) und B(7|6) ist die Seitenkante eines Quadrats. ~~Gib beide Lösungen an.~~ Gib die Koordinaten der Punkte C & D beider Lösungen an!



~~Lösungen an.~~ Gib die Koordinaten der Punkte C & D beider Lösungen an!



$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{\vec{AB},L} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{\vec{AB},R} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$ $\quad (\vec{AD} = \vec{n}_{\vec{AB},L})$

$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{D = (1 | 8)}}$ ✓

$\vec{OD'} = \vec{OA} + \vec{AD'}$ $\quad (\vec{AD'} = \vec{n}_{\vec{AB},R})$

$\vec{OD'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{OD'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{D' = (5 | 0)}}$ ✓

$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC}$ $\quad (\vec{DC} = \vec{AB})$

$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{C = (5 | 10)}}$ ✓

$\vec{OC'} = \vec{OD'} + \vec{D'C'}$ $\quad (\vec{D'C'} = \vec{AB})$

$\vec{OC'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{OC'} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{C' = (9 | 2)}}$ ✓

23.4.21 5

6.51)

6.18)

6.21)

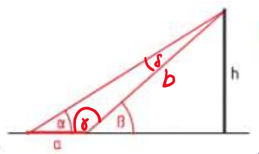
B_259: Flächeninhalt eines Parallelogramms

6.18 Um die Höhe eines Turms zu bestimmen, wird von zwei Punkten einer Ebene mit dem Abstand a voneinander jeweils der Höhenwinkel zur Turmspitze gemessen.

1) Berechne die Turmhöhe für a = 3 m, $\alpha = 32°$, $\beta = 41{,}5°$.

2) Gib eine Formel zur allgemeinen Berechnung der Turmhöhe h an.

3) Zeige allgemein, dass für $\beta = 2\alpha$ gilt: $h = a \cdot \sin(2\alpha)$



ABCD

1) $\gamma = 180° - \beta = \underline{138{,}5°}$ ✓ $(\delta = \beta - \alpha)$

$\delta = 180° - \alpha - \gamma = \underline{9{,}5°}$ ✓

$$\frac{b}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\sin(\delta)}$$

$$b = \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{\sin(\delta)}$$

$\underline{b = 9{,}632\ldots \text{ m}}$ ✓

$$\sin(\beta) = \frac{h}{b}$$

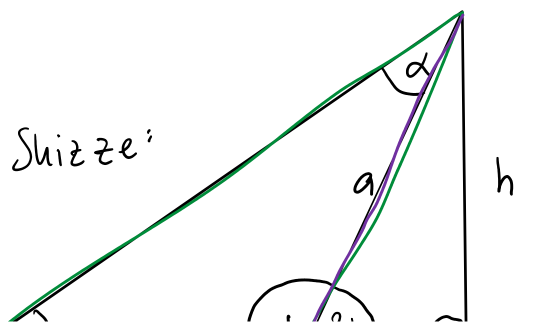
$$h = \sin(\beta) \cdot b$$

$\underline{h = 6{,}382\ldots \text{ m}}$ ✓

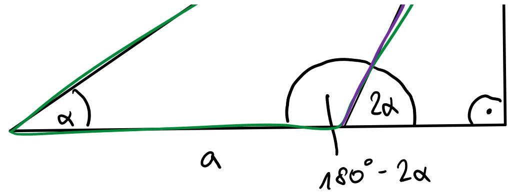
2) $\underline{\underline{h = \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{\sin(\beta - \alpha)}}}$ ✓

3) $\beta = 2\alpha$; $h = a \cdot \sin(2\alpha)$

Skizze:



Das grün markierte Dreieck muss gleichschenklig sein, weil der Supplimentärwinkel von



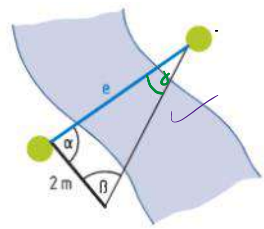
Supplimentärwinkel von $\beta = 180° - 2\alpha$ ist, was bedeuted, dass der dritte Winkel ebenfalls α sein muss, was bedeuted, dass die lila markierte Seite gleich lang wie a sein muss, was bedeuted, dass man einfach Trigonometrie Teil 1 anwenden kann . . .

$$h = \sin(2\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{\sin(2\alpha - \alpha)}$$

$$= \sin(2\alpha) \cdot \cancel{\sin(\alpha)} \cdot \frac{a}{\cancel{\sin(\alpha)}} =$$

$$= \underline{\underline{\sin(2\alpha) \cdot a}}$$

6.21 Johannes und Melanie wollen eine Hängebrücke über einen Bach bauen. Dazu müssen sie ein Seil von einem Baum am Ufer zu einem Baum in gleicher Höhe auf der anderen Seite spannen. Um die benötigte Seillänge zu bestimmen, stecken sie von einem der zwei Bäume aus eine 2 m lange Strecke ab und messen von deren Enden jeweils die Winkel $\alpha = 85{,}2°$ und $\beta = 67{,}1°$ zum anderen Baum.
Berechne, wie lang das Seil mindestens sein muss, wenn man für den Durchhang 10 % der Entfernung e zwischen den Bäumen berücksichtigen muss.



γ: $180° - \alpha - \beta = \underline{27{,}7°}$

e: $$\frac{e}{\sin(\beta)} = \frac{2}{\sin(\gamma)}$$

$$e = \sin(67{,}1°) \cdot \frac{2}{\sin(27{,}7°)}$$

$$\underline{\underline{e = 3{,}963 \ldots m}}$$

$G = 3{,}963$ m $\qquad A = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{3{,}963 \cdot 110}{100} =$

$G = 3{,}963\ldots m$

$p = 110\,\%$

$A = ?$

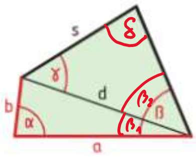
$A = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{3{,}963 \cdot 110}{100} =$

$= 4{,}359\ldots m$

A: Die Mindestlänge für das Seil beträgt 4,36 m.

6.51 Das dargestellte Grundstück soll entlang der Diagonale d in zwei Teile geteilt werden.
1) Berechne die Länge der Diagonale d.
2) Die Kosten pro Quadratmeter betragen 150,00 €. Berechne die Preise der entstandenen Grundstücke.
3) Wie lang ist die Seite s?

a) a = 12,5 m, b = 4,2 m, α = 83,2°, β = 67,1°, γ = 51,0°
b) a = 23,6 m, b = 5,8 m, α = 104,7°, β = 53,2°, γ = 37,4°



a) 1) $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)}$

$d = \sqrt{12{,}5^2 + 4{,}2^2 - 2 \cdot 12{,}5 \cdot 4{,}2 \cdot \cos(83{,}2°)}$

$d = 12{,}706\ldots m$

2)+3) $\frac{\sin(\beta_1)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{d}$

$\beta_1 = \arcsin\left(b \cdot \frac{\sin(\alpha)}{d}\right)$

$\beta_1 = 19{,}1602\ldots°$

$(\beta_1 = 160{,}8397\ldots°)$

$\beta_2 = \beta - \beta_1 = 47{,}939\ldots°$

$(\beta_2 = \beta - \beta_1 = -93{,}739\ldots°)$

$\delta = 180° - \beta_2 - \gamma = 81{,}060\ldots°$

s: $\frac{s}{\sin(\beta_2)} = \frac{d}{\sin(\delta)}$

s: $\frac{s}{\sin(\beta_2)} = \frac{d}{\sin(\delta)}$

$s = \sin(47{,}9) \cdot \frac{12{,}7}{\sin(81{,}1)}$

$\underline{s = 9{,}5498998\ldots\,m}$

$A = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin(\alpha) + \frac{s \cdot d}{2} \cdot \sin(\gamma)$

$\underline{\underline{A = 73{,}217\ldots\,m^2}}$

$p = 73{,}217\,m^2 \cdot 150\,\frac{€}{m^2}$

$\underline{\underline{p = 10982{,}61\,€}}$

A: Der Grundstückspreis beträgt ca. 11 000 €.

b) 1) $\underline{d = 25{,}691\ldots\,m}$

2+3) $\underline{\beta_1 = 12{,}612\ldots^\circ}$ (β_1'' fällt wieder weg)

$\underline{\beta_2 = 40{,}587\ldots^\circ}$

$\underline{\delta = 180^\circ - \beta_2 - \gamma = 102{,}012\ldots^\circ}$

$\underline{s = 17{,}089\ldots\,m}$

$\underline{A = 199{,}536\ldots\,m^2}$

$\cdot 150 =$

$\underline{p = 29930{,}448\ldots\,€}$

A: Der Preis für Grundstück B beträgt ca. 30 000 €.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Flächeninhalt eines Parallelogramms*

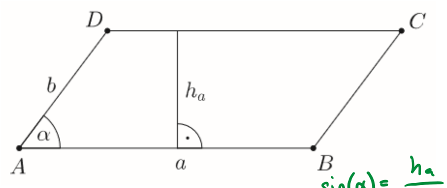
Aufgabennummer: B_259

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Grundstück hat die Gestalt eines Parallelogramms *ABCD*. Zur Berechnung des Flächeninhalts dieses Grundstücks stehen folgende Formeln zur Verfügung:

(1) $A = a \cdot h_a$
(2) $A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$ $\rightarrow a = \frac{A}{b \cdot \sin(\alpha)}$

Entnehmen Sie die Bezeichnungen der nachstehenden, nicht maßstabgetreuen Skizze.



$\sin(\alpha) = \frac{h_a}{b}$

a) – Erklären Sie, warum diese beiden Formeln gleichwertig sind. $h_a = \sin(\alpha) \cdot b$

b) Für das Grundstück werden folgende Maße angegeben: $b = 52{,}7$ m, $\alpha = 53°$, $A = 4\,133$ m².

– Berechnen Sie die Länge der Seite a. $a = 98{,}198\ldots$ m
– Berechnen Sie die Länge der Diagonale BD. Cosinussatz
$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\alpha)} = 78{,}685\ldots$ m

c) Die Länge der Seite a wird verdreifacht und die Länge der zugehörigen Höhe h_a halbiert.

– Ermitteln Sie die Änderung des Flächeninhalts in Prozent. $\frac{3\cancel{a}\cdot\frac{\cancel{h}}{2}}{\cancel{a\cdot h}} = 1{,}5 = 150\%$
+50%

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

14.4.21

Möglicher Lösungsweg

a) Zeichnet man die Höhe h_a im Eckpunkt D ein, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck.
In diesem gilt: $\sin(\alpha) = \frac{h_a}{b}$.
$h_a = b \cdot \sin(\alpha)$
$A = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

b) $a = \frac{A}{b \cdot \sin(\alpha)} = 98{,}19\ldots \Rightarrow a = 98{,}2\text{ m}$

$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)} = 78{,}68\ldots \Rightarrow \overline{BD} = 78{,}7\text{ m}$

c) $A_{neu} = 3 \cdot a \cdot \frac{h_a}{2} = 1{,}5 \cdot a \cdot h_a = 1{,}5 \cdot A_{alt}$

Der neue Flächeninhalt ist um 50 % größer als die alte.

Lösungsschlüssel

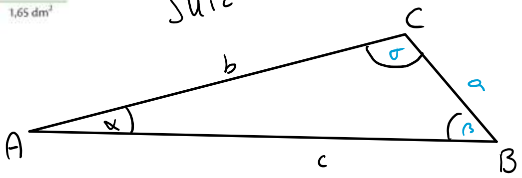
a) 1 × D: für die richtige Erklärung zur Gleichwertigkeit der Formeln
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der Seite a
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Diagonale $\overline{BD}$
c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Änderung in Prozent

6.9) c)
6.15) c)
6.16) a)

6.9 Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks (Längen in Zentimeter).

	a	b	c	α	β	γ	A
a)	110	85		70°			
b)	4,5	6	3,2				
c)	40	~31	~21	98°	50°	32°	~328cm²
d)		8		40°			1 286 mm²
e)		52	75		25°		
f)		23	42				1,65 dm²

Skizze:



$\alpha: \; 180° - \beta - \gamma = \underline{\underline{98°}}$

$b: \; \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} \quad | \cdot \sin(\beta)$

$b = \sin(50) \cdot \dfrac{40}{\sin(98)}$

$\underline{\underline{b = 30{,}942 \ldots \text{cm}}}$

$c: \; \dfrac{c}{\sin(\gamma)} = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} \quad | \cdot \sin(\gamma)$

$c = \sin(32) \cdot \dfrac{40}{\sin(98)}$

$\underline{\underline{c = 21{,}405 \ldots \text{cm}}}$

$A: \; A = \dfrac{a \cdot b}{2} \cdot \sin(\gamma)$

$A = \dfrac{40 \cdot 31}{2} \cdot \sin(32)$

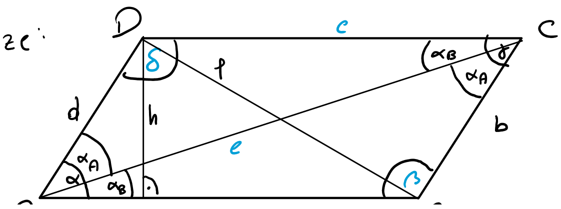
$\underline{\underline{A = 327{,}944 \ldots \text{cm}^2}}$

6.15 Berechne die fehlenden Größen des Parallelogramms (Längen in Millimeter).

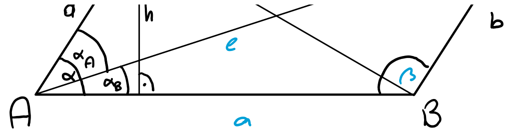
	a	b	e	f	α	β	A
a)	32	57		80			
b)		145			72°		8 825,8 mm²
c)	276	255	250	467	124°	56°	584 cm²
d)		90	84	120			

$\alpha: \; \dfrac{360° - 2 \cdot \beta}{2} = \underline{\underline{124°}}$

Skizze:



2

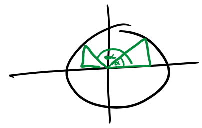


α_A: $\dfrac{\sin(\alpha_A)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{e}$

$\alpha_A = \arcsin\left(a \cdot \dfrac{\sin(\beta)}{e}\right)$

$\underline{\underline{\alpha_A = 66{,}242\ldots^\circ}}$

$\underline{\underline{\alpha_{A_2} = 113{,}757^\circ}}$



#2 Lösung -

α_B: $\alpha - \alpha_A = \underline{\underline{57{,}757\ldots^\circ}}$

α

b: $\dfrac{b}{\sin(\alpha_B)} = \dfrac{e}{\sin(\beta)}$

$b = \sin(\alpha_B) \cdot \dfrac{e}{\sin(\beta)}$

$\underline{\underline{b = 255{,}0545\ldots \text{ mm}}}$

h: $\dfrac{h}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(90^\circ)}$

$h = \sin(124^\circ) \cdot \dfrac{255}{\sin(90^\circ)}$

$\underline{\underline{h = 211{,}449\ldots \text{ mm}}}$

A: $A = a \cdot h$

$A = 276 \cdot 211{,}450$

$\underline{\underline{A = 58\,360{,}155\ldots \text{ mm}^2}} \approx \underline{\underline{584 \text{ cm}^2}}$

f: $\cancel{A = \dfrac{e \cdot f}{2}}$

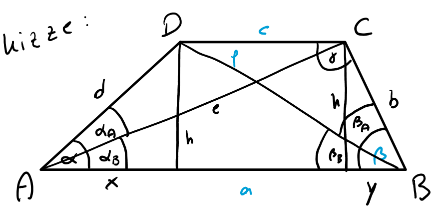
$f = \dfrac{2A}{e}$

$\underline{\underline{f = 466{,}8812\ldots \text{ mm}}}$

6.16 Berechne die fehlenden Größen des Trapezes (Längen in Millimeter).

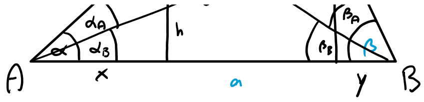
	a	b	c	d	e	f	α	β	h	A
a)	110	60	41	37	49,3	97	60°	32°	32	2391 mm²
b)	49	22			38		40°			
c)		24	15	37			35°			
d)	145		78				65°	35°		

Skizze:



γ: $180^\circ - \beta = \underline{\underline{148^\circ}}$

β_A: $\dfrac{\sin(\beta_A)}{c} = \dfrac{\sin(\gamma)}{f} \quad | \cdot c$



β_A: $\quad \dfrac{\sin(\beta_A)}{c} = \dfrac{\sin(\gamma)}{f} \quad | \cdot c$

$\sin(\beta_A) = 41 \cdot \dfrac{\sin(148^\circ)}{97}$

$\sin(\beta_A) = 0{,}2239\ldots$

$\underline{\underline{\beta_A = 12{,}943\ldots^\circ}}$

β_B: $\quad \beta - \beta_A = \underline{19{,}05\ldots^\circ}$

h: $\quad \sin(\beta_B) = \dfrac{h}{f} \quad | : f$

$h = f \cdot \sin(\beta_B)$

$\underline{\underline{h = 31{,}6708\ldots \text{ mm}}}$

b: $\quad \sin(\beta) = \dfrac{h}{b} \quad | \cdot b \quad | : \sin(\beta)$

$b = \dfrac{h}{\sin(\beta)}$

$b = \dfrac{31{,}670}{\sin(32)}$

$\underline{\underline{b = 59{,}765\ldots \text{mm}}}$

A: $\quad A = \dfrac{(a+c)\cdot h}{2}$

$A = \dfrac{(110+41)\cdot 31{,}670}{2}$

$\underline{\underline{A = 2391{,}1512\ldots \text{ mm}^2}}$

e: $\quad \cancel{A = \dfrac{e \cdot f}{2}}$

$e = \dfrac{2A}{f}$

$e = \dfrac{2 \cdot 2391{,}151}{97}$

$\underline{\underline{e = 49{,}30208\ldots \text{ mm}}}$

y: $\quad \tan(\beta) = \dfrac{h}{y}$

$y = \dfrac{31}{\tan(32^\circ)}$

$\underline{\underline{y = 50{,}683\ldots \text{ mm}}}$

x: $\quad a - c - y = \underline{\underline{18{,}3160\ldots \text{mm}}}$

α: $\quad \tan(\alpha) = \dfrac{h}{x}$

$\alpha = \arctan\left(\dfrac{31}{18}\right)$

$\underline{\underline{\alpha = 59{,}958\ldots^\circ}}$

d:

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$d = \sqrt{18^2 + 31^2}$$

$$\underline{\underline{d = 36{,}5857\ldots\ mm}}$$

21b. HÜ, am 23.03.2021

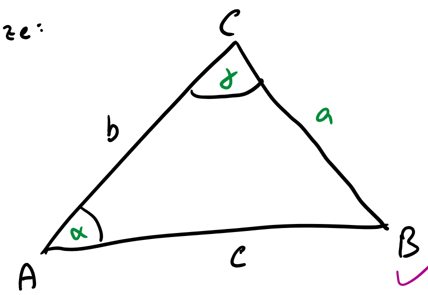
Dienstag, 23. März 2021 11:23

6.10) b) S. 174)

Bsp.: geg.: $a = 9\,cm$; $\alpha = 94°$; $\gamma = 63°$

SWW-Satz

Skizze:



ges.: β, b, c

c: $$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \quad | \cdot \sin(\gamma)$$

$$c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

$$\underline{c = 8{,}038\ldots\ cm}$$

β: $180° - \alpha - \gamma = 23°$

b: $$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \quad | \cdot \sin(\beta)$$

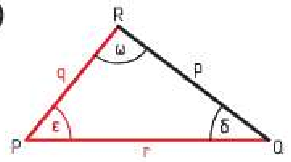
$$b = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

$$\underline{b = 3{,}525\ldots\ cm}$$

$b = 3{,}525\ldots\ cm$

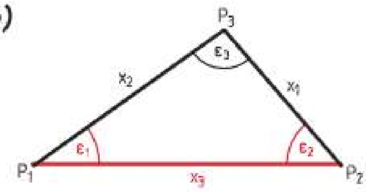
6.10 Berechne die gesuchten Größen des Dreiecks.

a)



r = 95,0 m
q = 57,2 m
$\varepsilon = 51°$
ges.: p, δ, ω

b)



$x_3 = 3{,}21$ dm
$\varepsilon_1 = 35{,}4°$
$\varepsilon_2 = 49{,}1°$
ges.: x_1, x_2, ε_3

SWW-Satz

6.10) b) ε_3: $180° - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \underline{95{,}5°}$

x_1: $\dfrac{x_1}{\sin(\varepsilon_1)} = \dfrac{x_3}{\sin(\varepsilon_3)} \quad | \cdot \sin(\varepsilon_1)$

$$x_1 = \frac{x_3 \cdot \sin(\varepsilon_1)}{\sin(\varepsilon_3)}$$

$$\underline{x_1 = 1{,}868\ldots\ dm}$$

x_2: $\dfrac{x_2}{\sin(\varepsilon_2)} = \dfrac{x_3}{\sin(\varepsilon_3)} \quad | \cdot \sin(\varepsilon_2)$

$$x_2 = \frac{x_3 \cdot \sin(\varepsilon_2)}{\sin(\varepsilon_3)}$$

$$\underline{x_2 = 2{,}4375\ldots\ dm}$$

23.3.

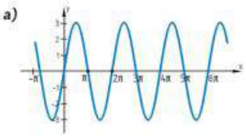
21. HÜ, am 16.03.2021

Dienstag, 16. März 2021 12:15

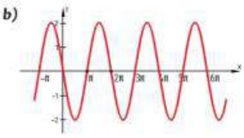
5.72)
5.73)
5.77)

Aufgaben 5.72 – 5.74: Ermittle jeweils die Funktionsgleichung des dargestellten Graphen und gib sie als Sinusfunktion an. Beschreibe mit eigenen Worten, wodurch sich der Funktionsgraph von der Sinuskurve unterscheidet.

5.72 a)



b)



a) $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ ✓

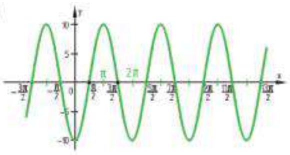
↳ auf y-Achse gedehnt ✓

b) $f(x) = 2 \cdot \sin(x \cancel{+ \frac{\pi}{2}})$ f $\qquad f(x) = -2 \cdot \sin(x)$

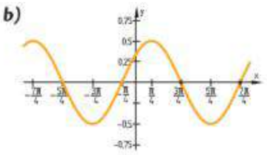
↳ auf y-Achse um Faktor 2 gedehnt $\qquad$ ↳ 2 gedehnt

↳ x-Achse Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ ↳ auf x-Achse gespiegelt

5.73 a)



b)



a) $f(x) = 10 \cdot \sin(x - \frac{3\pi}{2})$ $\qquad f(x) = -10 \cdot \sin(x - \frac{3\pi}{2})$

↳ Dehnung auf y-Achse

↳ Verschiebung auf x-Achse

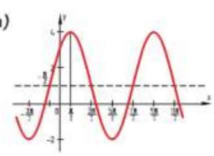
b) $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x \cancel{-} \frac{\pi}{4})$ f $\qquad f(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4})$

↳ negative Dehnung auf y-Achse

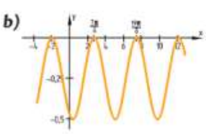
↳ Verschiebung auf x-Achse

Aufgaben 5.77 – 5.78: Ermittle jeweils die Funktionsgleichung des dargestellten Graphen und gib sie als Sinusfunktion an.

5.77 a)



b)



f

a) $f(x) = 3 \cdot \sin\left(0{,}5x - \cancel{\frac{\pi}{2}}\right) + 1$ f $\qquad f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

b) $f(x) = 0{,}25 \cdot \sin\left(\frac{4}{3}x - \cancel{\frac{\pi}{8}}\right) - 0{,}25$ f

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{4}{3}x - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}$

20. HÜ, am 09.03.2021

Dienstag, 9. März 2021 12:05

SA - Verbessern

5.10)

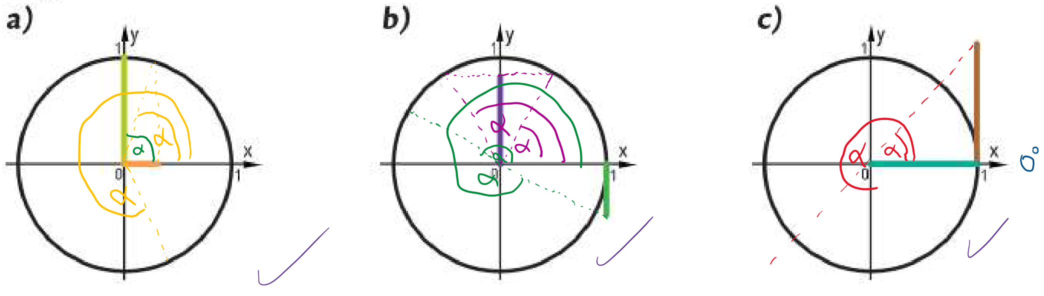
5.11)

B_379 Lichtwellenleiter b) c)

5.10 In der Abbildung sind Winkelfunktionswerte im Einheitskreis farbig auf den Achsen eingezeichnet.

1) Gib an, welche Winkelfunktion in welcher Farbe dargestellt ist.

2) Zeichne jeweils alle Winkel mit der zugehörigen Farbe in den Einheitskreis ein, die den gleichen Funktionswert haben.



a) sin(α)

cos(α)

b) sin(α)

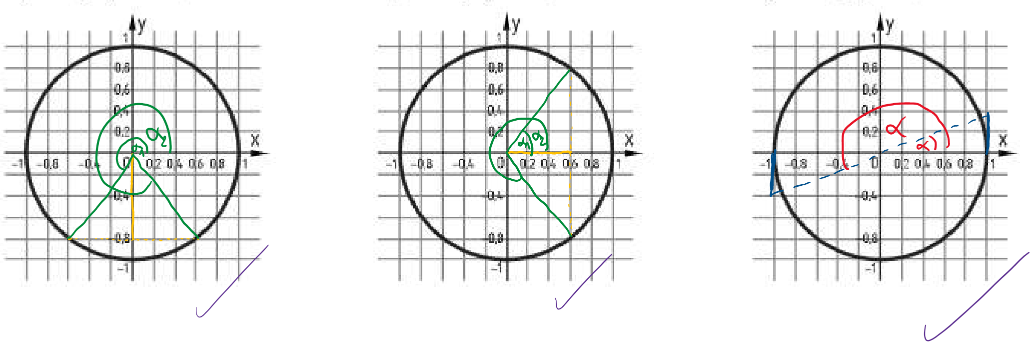
tan(α)

c) cos(α)

tan(α)

5.11 Trage jeweils alle Winkel ein, die die angegebene Gleichung erfüllen.

1) $\sin(\alpha) = -0{,}8$ **2)** $\cos(\beta) = 0{,}6$ **3)** $\tan(\gamma) = 0{,}4$



$\alpha^* = \arcsin(0{,}8) = 53{,}13°$

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lichtwellenleiter*

Aufgabennummer: B_379

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität des Lichts mit der Entfernung vom Anfangspunkt exponentiell ab. Dieser Zusammenhang kann durch die Funktion I beschrieben werden:

$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

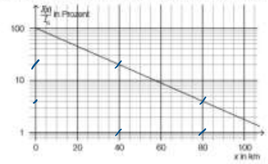
x ... Entfernung entlang des Kabels vom Anfangspunkt des Kabels
$I(x)$ ... Lichtintensität in der Entfernung x
I_0 ... Lichtintensität am Anfangspunkt des Kabels
λ ... positive Konstante

a) Dabei wird angenommen, dass die lokale Änderungsrate der Lichtintensität in Abhängigkeit von der Entfernung proportional zur jeweils vorhandenen Lichtintensität ist.

– Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-\lambda$ ($\lambda > 0$).
– Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Lösung dieser Differenzialgleichung mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ durch $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegeben ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Lichtintensität (in Prozent von I_0) in einem Glasfaserkabel in Abhängigkeit von x wird in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem folgendermaßen dargestellt:



– Ermitteln Sie, wie viel Prozent an Intensität das Licht nach 80 Kilometern (km) verloren hat. $P(80|4) \rightarrow 100-4 = 96\%$ Licht verloren

Um Signale zu übertragen, muss die Lichtintensität noch mindestens 20 % der Lichtintensität I_0 betragen.

– Lesen Sie die maximale Länge eines Lichtwellenleiters ab, der diese Bedingung erfüllt. 40km
– Ermitteln Sie den Wert des Parameters λ mithilfe der in der obigen Abbildung dargestellten Exponentialfunktion.

$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

$P_1(80|4)$ II: $4 = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot 80}$ $\quad | :100$

$e^{-\lambda \cdot 80} = \frac{4}{100}$

$-\lambda \cdot 80 = \ln\left(\frac{4}{100}\right)$ $\quad | :80$

$-\lambda = \frac{\ln(4:100)}{80}$ $\quad | \cdot(-1)$

$\lambda = -\frac{\ln(4:100)}{80}$

$\underline{\lambda = 0{,}040235...}$

c) Um den Intensitätsverlust in einem Lichtwellenleiter zu bestimmen, wird die nach 1 km noch vorhandene Intensität gemessen.
Die Größe zur Beschreibung des Intensitätsverlusts ist die Dämpfung D, die in Dezibel angegeben wird:

$D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$ in Dezibel (dB)

I_0 ... Anfangsintensität
I ... noch vorhandene Intensität nach 1 km

Ein modernes Glasfaserkabel weist nach 1 km noch eine Intensität von 95,5 % des Anfangswertes I_0 auf.

– Berechnen Sie, welcher Dämpfung dies entspricht. $10 \cdot \lg\left(\frac{100}{95,5}\right) = 0,199966...$

Bei älteren Glasfaserkabeln stellte man pro Kilometer Kabellänge eine Dämpfung von 20 dB fest.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität I_0 nach 1 km noch vorhanden waren.

$20 = 10 \cdot \lg\left(\frac{100}{I}\right) \quad | : 10$

$2 = \lg\left(\frac{100}{I}\right)$

$\frac{100}{I} = 10^2 \quad | \cdot I$

$100 = I \cdot 10^2 \quad | : 10^2$

$I = \frac{100}{100}$

$I = 1\,\%$

Für die Dämpfung wird oft auch die Formel $D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ angegeben.

– Zeigen Sie mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen: $D_1 = -D$.

$\lg\left(\frac{1}{3}\right) = -(\lg(3))$

$-0,477... \qquad 0,477...$

$- + - = +$

$\boxed{10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)} = \; D_1$

$= 10 \cdot \lg(I) - \lg(I_0) =$

$= -10 \cdot (-\lg(I) + \lg(I_0)) =$

$= -\boxed{10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)} \; D$

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dI}{dx} = -\lambda \cdot I$

$\frac{dI}{I} = -\lambda \cdot dx$ (oder: $\frac{I'}{I} = -\lambda$)

$\int \frac{dI}{I} = -\lambda \int dx$ (oder: $\int \frac{I'(x)}{I(x)} dx = -\lambda \int dx$)

$\ln|I| = -\lambda \cdot x + C_1$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = C \cdot e^{-\lambda \cdot x}$
Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$:
$I_0 = C$
spezielle Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

b) An der Stelle $x = 80$ gilt: $\frac{I(80)}{I_0} = 4\,\%$.
Daher hat das Licht 96 % an Intensität verloren.

An der Stelle $x = 40$ gilt: $\frac{I(40)}{I_0} = 20\,\%$.
Die maximale Länge des Lichtleiters beträgt also 40 km.

$0,2 = e^{-\lambda \cdot 40}$
$\lambda = \frac{\ln(5)}{40} = 0,04023...$

c) $D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{0,955 \cdot I_0}\right) = 0,19...$
Die Dämpfung beträgt rund 0,2 dB.

$20 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$
$I = I_0 \cdot 10^{-2}$

Nach 1 km war noch 1 % der Anfangsintensität vorhanden.

$D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$
$D_1 = 10 \cdot (\lg(I) - \lg(I_0))$
Durch Herausheben von –1 erhält man:
$D_1 = -10 \cdot (\lg(I_0) - \lg(I))$
$D_1 = -10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$
$\Rightarrow D_1 = -D$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
1 × B: für das richtige Anwenden der Methode *Trennen der Variablen* zur Ermittlung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung
1 × D: für den richtigen Nachweis zur speziellen Lösung der Differenzialgleichung

b) 1 × C1: für das richtige Ermitteln des Intensitätsverlusts
1 × C2: für das richtige Ablesen der maximalen Länge
1 × A: für das richtige Ermitteln des Parameters λ

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Dämpfung
1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
1 × D: für den richtigen Nachweis mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen

SA, am 02.03.2021 Di

Freitag, 5. März 2021 18:28

2. Schularbeit

Jede Berechnung ist mit einem nachvollziehbaren Rechenansatz durchzuführen!

Selbst gewählte Variablen sind zu erklären und gegebenenfalls mit Einheiten zu benennen.

Die Verwendung des TI ist zu belegen. (ausdrucken!)

Wird eine Aufgabe mehrfach gerechnet, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen!

1.

a) Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200km. Nach der Sanierung der Gleise kann ein Zug mit einer um 10km/h höheren konstanten Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Berechnen Sie die Fahrzeit t des Zugs vor der Sanierung in Stunden auf eine Nachkommastelle genau.

b) Die Geschwindigkeitsfunktion eines Autos kann mithilfe einer quadratischen Funktion beschrieben werden. Die Geschwindigkeit erreicht nach 25 s ihr Maximum von 15 m/s und nach einer Fahrzeit von 50 s ist sie gleich Null.
Stellen Sie diejenige Funktion auf, die diesen Sachverhalt beschreibt.

2. Die Kosten für die Produktion eines Produkts lassen sich durch die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}05x^2 + 3x + 155$ angeben, wobei $K(x)$ die Kosten in Euro bei einer produzierten Menge x in Stück darstellen. Das Produkt wird zu einem fixen Preis von 9€ pro Stück verkauft.
   1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
   2) **Ohne spezielle Befehle am TI:** Berechnen Sie die Gewinnzone.
   3) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
   4) Stellen Sie die Gewinnfunktion in einem skalierten und beschrifteten Koordinatensystem dar und ermitteln Sie grafisch den maximalen Gewinn.

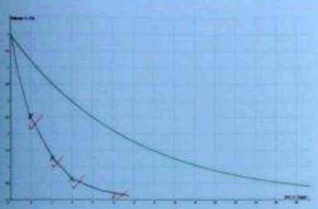
3. Die folgenden Beispiele sind **OHNE spezielle Befehle am TI** zu lösen:
   a) Zerlegen Sie den Term so weit wie möglich: $\lg\left(\frac{(x-y)^3}{[illegible]} \cdot \sqrt[4]{x^3}\right) =$
   b) Berechnen Sie die Lösungsmenge: $3^{2x-1} + 3^{2x-3} = 1000$

4.

a) Die Anzahl der Seerosen nimmt durch die schlechte Witterung alle zwei Tage um 6% ab. Berechnen Sie den Abnahmefaktor pro Tag auf 4 Nachkommastellen genau.

b) Die Intensität eines Lichtstrahls kann durch die Funktionsgleichung $I(x) = I_0 \cdot e^{-[illegible] \cdot x}$ dargestellt werden, wobei $I(x)$ die Intensität in $\frac{W}{m^2}$ und x die Eindringtiefe in m beschreibt. I_0 ist die Intensität des Lichtstrahls an der Wasseroberfläche.
   1) Der Zusammenhang lässt sich ebenfalls durch die Funktion $I(x) = I_0 \cdot b^x$ darstellen. Geben Sie den Parameter b an.
   2) Berechnen Sie wie viel Prozent von I_0 in einer Eindringtiefe von 1,5m noch vorhanden sind.
   3) **Ohne spezielle Befehle am TI:** Berechnen Sie, in welcher Eindringtiefe 99% der Intensität des Lichtstrahls abgebaut sind (ohne spezielle Befehle am TI).

c) In der nachstehenden Abbildung ist der exponentielle Zerfall eines radioaktiven Materials dargestellt.
Zeichnen Sie in die Abbildung im Intervall [0,10] denjenigen Graphen eines anderen radioaktiven Materials, das nur ein Viertel der Halbwertszeit des radioaktiven Materials hat, das dargestellt ist. Die Menge zu Beginn ist bei beiden Materialien gleich.



5. Eine Tierpopulation in einem bestimmten Gebiet besteht zu Beginn aus 10 Tieren. Drei Jahre später waren es 77 Tiere. Man nimmt an, dass in diesem Gebiet nicht mehr als 1 000 Tiere dieser Art leben können.
Es sei N(t) die Anzahl der Tiere nach t Jahren.
   1) Stellen Sie, unter der Annahme, dass logistisches Wachstum der Form $N(t) = \frac{K}{1+c \cdot e^{-k \cdot t}}$ vorliegt, die Funktionsgleichung für N(t) auf. (TI möglich)
   2) Berechnen Sie, nach wie viel Monaten zum ersten Mal mehr als 800 Tiere in diesem Gebiet leben (ohne spezielle Befehle am TI).

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	7	4
2	8	7
3	8	6
4	8	7
5	3	2
Gesamt	32	26

Note: Gut

Notenschlüssel

Sehr gut: 32 – 30 Gut: 29 – 26 Befriedigend: 25 – 21 Genügend: 20 – 16 Nicht genügend: 15 – 0

3AHIT 2. Schularbeit 02.03.2021

Falk Schneider

1

1)a)

	s[km]	t[h]	v[km/h]
Vor S.	200	x	$\frac{200}{x}$
Nach	200	$x+10$	$\frac{200}{x+10} \pm 0{,}5$

$t = \frac{s}{v}$

$\frac{200}{x} = \frac{200}{x+10} \pm 0{,}5 \quad | \cdot x \cdot (x+10)$

$200(x+10) = 200x - 0{,}5x(x+10)$

$\cancel{200x} + 2000 = \cancel{200x} - 0{,}5x^2 - 5x \quad | +0{,}5x^2 + 5x$

$0{,}5x^2 + 5x + 2000 = 0$

TI s. ①

x keine Lösung

b) $f(x) = a \cdot (x-25)^2 + 15$

$S(25|15) \quad P(50|0)$

$0 = a \cdot (50-25)^2 + 15$

$0 = a \cdot 625 + 15$

$0 = a \cdot 640 \quad | : 640$

$\cancel{a = 0}$ DF

$f(x) = 0 \cdot \cancel{(x-25)^2} + 15$

Umformung f

Verbesserung

$$\frac{200}{x} = \frac{200}{x+10} + 0{,}5$$

$$200(x+10) = 200x + 0{,}5x(x+10)$$

$$\cancel{200x} + 2000 = \cancel{200x} + 0{,}5x^2 + 5x$$

$$0{,}5x^2 + 5x - 2000 = 0$$

TI: solve(…, x)

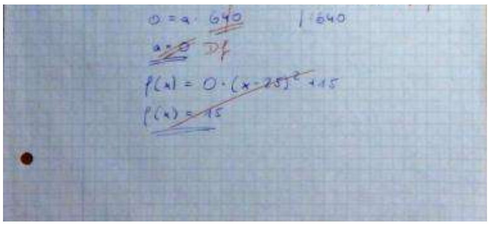
1.1 *Dok RAD

solve$(0.5 \cdot x^2+5 \cdot x-2000=0,x)$

$x=-68.442888$ or $x=58.442888$

$x_1 = -68{,}442\ldots$

$x_2 = 58{,}442\ldots \ \frac{km}{h}$



$0 = a \cdot 640 \quad | :640$

$a = 0$ Df

$f(x) = 0 \cdot (x-25)^2 + 15$

$f(x) = 15$

$x_2 = 58{,}442\ldots \frac{km}{h}$

$t = \frac{200}{x} = \underline{3{,}422\ldots h}$

A: Der „alte Zug" fuhr ca. 3,4 h.

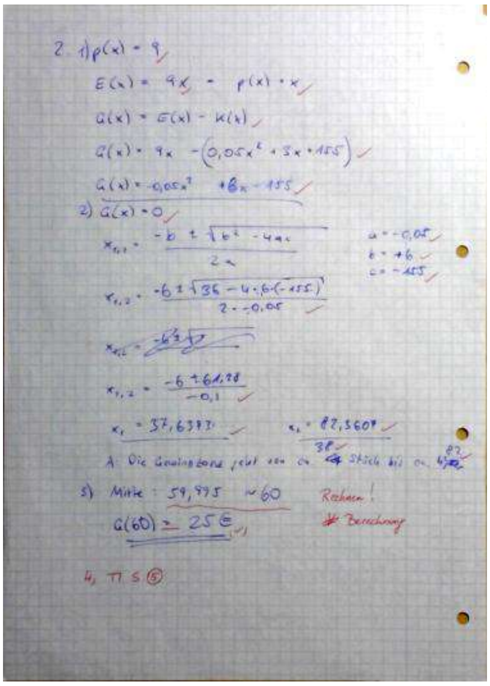
x=-68.442888 or x=58.442888

$0 = 625a + 15 \quad | -15$

$-15 = 625a \quad | :625$

$a = -\frac{3}{125}$

$f(x) = -\frac{3}{125} \cdot (x-25)^2 + 15$



2. 1) $p(x) = 9$

$E(x) = 9x = p(x) \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 9x - (0{,}05x^2 + 3x + 155)$

$G(x) = -0{,}05x^2 + 6x - 155$

2) $G(x) = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $a = -0{,}05$, $b = +6$, $c = -155$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 6 \cdot (-155)}}{2 \cdot -0{,}05}$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 61{,}78}{-0{,}1}$

$x_1 = 37{,}6393$ $x_2 = 82{,}3607$

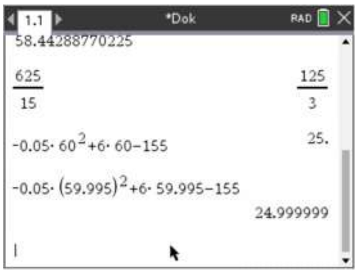
A: Die Gewinnzone geht von ca. 38 Stück bis ca. 82

3) Mitte: 59,995 ≈ 60 Rechnen!

$G(60) = 25$ € # Berechnung

4, TI S. 5

$G(59{,}995) = -0{,}05 \cdot 59{,}995^2 + 6 \cdot 59{,}995 - 155$

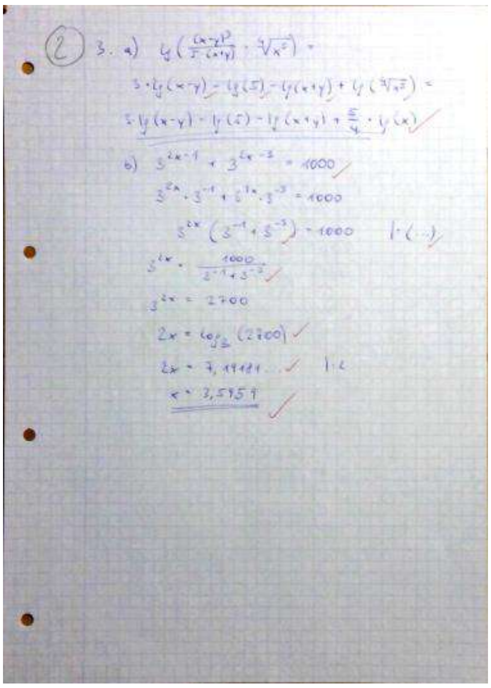


58.44288770225	
$\frac{625}{15}$	$\frac{125}{3}$
$-0.05 \cdot 60^2+6 \cdot 60-155$	25.
$-0.05 \cdot (59.995)^2+6 \cdot 59.995-155$	24.999999

$\underline{G(59{,}995) = 24{,}\dot{9}\ €}$

59,995 ist ein gerundeter Wert, da x_1 und x_2 schon nicht genau berechnet sind

→ besser: max. Gewinn aus Scheitelpunktsform ablesen!



(2) 3. a) $\lg\left(\frac{(x-y)^3}{5(x+y)} \cdot \sqrt[4]{x^5}\right) =$

$3 \cdot \lg(x-y) - \lg(5) - \lg(x+y) + \lg(\sqrt[4]{x^5}) =$

$3 \cdot \lg(x-y) - \lg(5) - \lg(x+y) + \frac{5}{4} \cdot \lg(x)$

b) $3^{2x-1} + 3^{2x-3} = 1000$

$3^{2x} \cdot 3^{-1} + 3^{2x} \cdot 3^{-3} = 1000$

$3^{2x}(3^{-1} + 3^{-3}) = 1000 \quad | :(\ldots)$

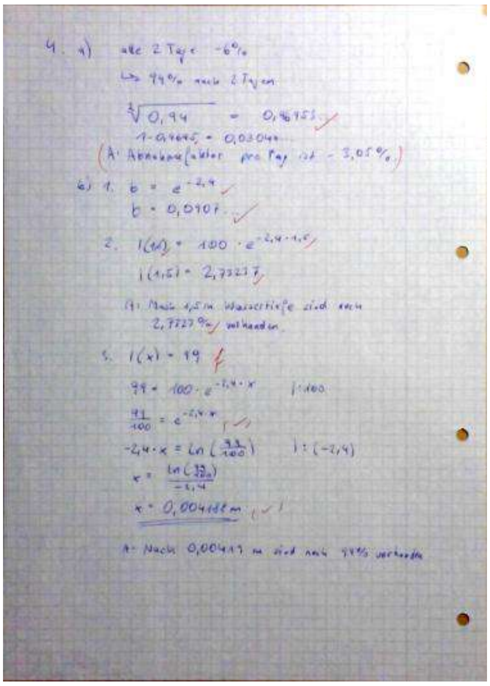
$3^{2x} = \frac{1000}{3^{-1} + 3^{-3}}$

$3^{2x} = 2700$

$2x = \log_3(2700)$

$2x = 7{,}19181\ldots \quad | :2$

$x = 3{,}5959$


4. a) alle 2 Tage -6%

↳ 94% nach 2 Tagen

$\sqrt[2]{0{,}94} = 0{,}96953$

$1 - 0{,}9695 = 0{,}03047$

(A: Abnahmefaktor pro Tag ist $-3{,}05\%$.)

b) 1. $b = e^{-2{,}4}$

$b = 0{,}0907$

2. $I(1{,}5) = 100 \cdot e^{-2{,}4 \cdot 1{,}5}$

$I(1{,}5) = 2{,}73237$

A: Nach 1,5 m Wassertiefe sind noch 2,7327 % vorhanden.

5. $I(x) = 99$

$99 = 100 \cdot e^{-2{,}4 \cdot x} \quad | :100$

$\frac{99}{100} = e^{-2{,}4 \cdot x}$

$-2{,}4 \cdot x = \ln\left(\frac{99}{100}\right) \quad | :(-2{,}4)$

$x = \frac{\ln\left(\frac{99}{100}\right)}{-2{,}4}$

$x = 0{,}004188\,m$

A: Nach 0,00419 m sind noch 99% vorhanden

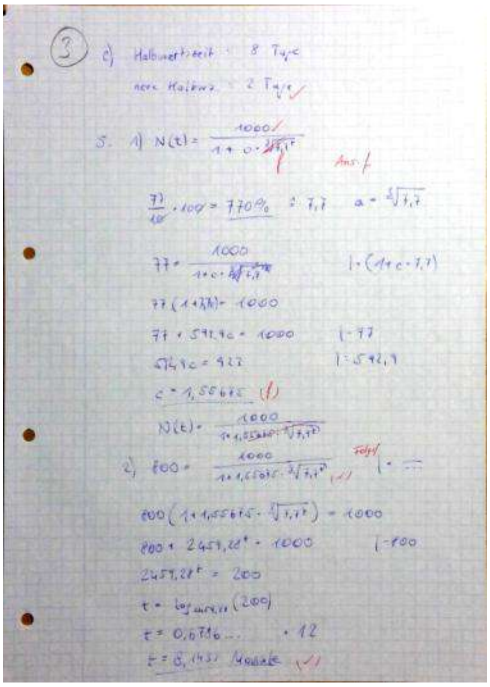
$I(x) = 1$

$1 = 100 \cdot e^{-2{,}4x} \quad | :100$

$0{,}01 = e^{-2{,}4x} \quad | \ln()$

$\ln(0{,}01) = -2{,}4x$

$\underline{x = 1{,}918 \ldots m}$


3 c) Halbwertszeit: 8 Tage

neue Halbwz.: 2 Tage

5. 1) $N(t) = \frac{1000}{1 + c \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^{t}}$ Ans. f

$\frac{77}{10} \cdot 100 = 770\% \quad : 7{,}7 \quad a = \sqrt[3]{7{,}7}$

$77 = \frac{1000}{1 + c \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^{3}} \quad | \cdot (1 + c \cdot 7{,}7)$

$77(1 + 7{,}7c) = 1000$

$77 + 592{,}9c = 1000 \quad | -77$

$592{,}9c = 923 \quad | :592{,}9$

$c = 1{,}55675$ (f)

$N(t) = \frac{1000}{1 + 1{,}55675 \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^{t}}$

2) $800 = \frac{1000}{1 + 1{,}55675 \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^{t}}$ Folgef. $| \cdot \ldots$

$800(1 + 1{,}55675 \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^{t}) = 1000$

$800 + 2457{,}28^{t} = 1000 \quad | -800$

$2457{,}28^{t} = 200$

$t = \log_{2457{,}28}(200)$

$t = 0{,}6796 \ldots \quad \cdot 12$

$t = 8{,}1457$ Monate

$N(0) = 10$

$N(3) = 77$

$K = 1000$

$$N(t) = \frac{1000}{1 + c \cdot e^{\lambda t}}$$

$$\mathrm{I}: \quad 10 = \frac{1000}{1 + c \cdot e^{\lambda \cdot 0}} = \frac{1000}{1 + c} \quad | \cdot (1 + c)$$

$10 + 10c = 1000 \quad | -10$

$10c = 990 \quad | :10$

$\underline{\underline{c = 99}}$

$$\mathrm{II}: \quad 77 = \frac{1000}{1 + 99 \cdot e^{\lambda \cdot 3}} \rightarrow \underline{\lambda = -0{,}7376 \ldots}$$

$N(t) = 800$

$$800 = \frac{1000}{1 + 99 \cdot e^{-0{,}7376 \cdot t}}$$

$\underline{t = 8{,}5 \text{ J.} = 102 \text{ Monate}}$

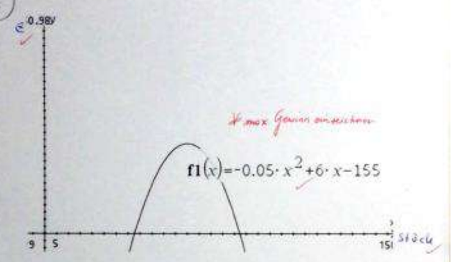
4

02.03.2021 Felix Schneider 2AHIT

14) $\text{solve}(0.5\cdot x^2+5\cdot x+2000=0,x)$	false
$(-3)^2-4\cdot 8.95\cdot -155$	5558.
$\sqrt{5558.}$	74.552
$2\cdot 8.95$	17.9
$\frac{3+74.551995278463}{17.9}$	4.33251
$\frac{3-74.551995278463}{17.9}$	-3.99732
$\sqrt{36+4\cdot 6\cdot 155}$	$2\cdot\sqrt{939}$
$77\cdot 7.7$	592.9
$1000-77$	923
$\frac{923}{592.9}$	1.55675

5

02.03.2021 Felix Schneider 2AHIT



19. HÜ, am 02.03.2021

Dienstag, 2. März 2021 12:14

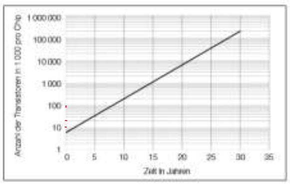
BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Computer

Aufgabennummer: B_370

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das Moore'sche Gesetz beschreibt die Zunahme der Anzahl an Transistoren pro Chip in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren (siehe nachstehende Grafik). Für das Jahr 1974 wird die Zeit $t = 0$ Jahre festgelegt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Transistoren pro Chip erstmals 3 000 000 erreicht hat.

Für die Gleichung der in der Grafik veranschaulichten Funktion gilt:

$y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$y(t)$ ... Anzahl der Transistoren in 1 000 Stück pro Chip

– Ermitteln Sie die Parameter y_0 und λ mithilfe der Grafik.

b) – Zeigen Sie, dass auf einer logarithmisch skalierten Achse der Abstand zwischen 10 und 20 größer dargestellt wird als der Abstand zwischen 80 und 90. → rot eingezeichnet
– Weisen Sie nach, dass eine Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot b^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer Skalierung der y-Achse als Gerade dargestellt wird.

a) – 17,5 Jahre

– $y_0 = 6$

λ: $f(x) = 6 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ $P(30 \mid 200000)$

$2 \cdot 10^5 = 6 \cdot e^{30}$ $\mid :6$

$e^{30\lambda} = \frac{200000}{6}$

$30\lambda = \ln\left(\frac{200000}{6}\right)$ $\mid :30$

$\lambda = \frac{\ln\left(\frac{200000}{6}\right)}{30}$

$\lambda = 0{,}347...$

Für mich nicht sichtbar

b) – rot eingezeichnet

$\lg(20) - \lg(10) > \lg(90) - \lg(80)$

0,301 cm ; 0,0512 cm

– $y = a \cdot b^x$ → steigt exponentiell $\mid \lg()$

$\lg(y) = \lg(a) + x \cdot \lg(b)$ → steigt linear

c) Ein Unternehmen produziert Bauteile für Computer. Die Gesamtkosten pro Tag für x produzierte ME können durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... pro Tag produzierte Bauteile in ME
$K(x)$ ... Gesamtkosten pro Tag bei x produzierten ME in Euro

Folgende Wertepaare sind bekannt:

x in ME	0	40	60
$K(x)$ in GE	12 000	27 520	30 720

Weiters ist bekannt, dass die Grenzkosten $K'(x)$ bei einer Produktion von 50 ME 157 GE/ME betragen.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d auf.
– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c und d.
– Berechnen Sie die Stelle des Minimums der Grenzkostenfunktion.
– Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Die Lebensdauer einer Sorte Akkus ist annähernd normalverteilt. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 80$ weist eine mittlere Lebensdauer von $\bar{x} = 1000$ Ladezyklen mit einer Standardabweichung von $s = 50$ Ladezyklen auf.

– Ermitteln Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\ \%$.
– Kreuzen Sie die richtige Behauptung an. *[1 aus 5]*

Die Breite des $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalls ist vom Stichprobenumfang n unabhängig.	☐
Das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ wird schmäler, wenn $\bar{x}$ kleiner wird.	☐
Das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ wird breiter, wenn α verkleinert wird.	☐
Die Breite des $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalls für μ ist von s unabhängig.	☐
Wenn σ bekannt ist, ist das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ breiter als bei unbekanntem σ.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

c) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

→ von Lösung abgeschrieben, weil ich nicht wusste was Grenzkosten sind und nicht weiterrechnen hätte können

– I: $12000 = d$ → $\cdot 0 = 0$
II: $27520 = a \cdot 40^3 + b \cdot 40^2 + c \cdot 40 + d$
III: $30720 = a \cdot 60^3 + b \cdot 60^2 + c \cdot 60 + d$
IV: $157 = 3a \cdot 50^2 + 2b \cdot 50 + c$

– V: $15520 = a \cdot 40^3 + b \cdot 40^2 + c \cdot 40$
VI: $18720 = a \cdot 60^3 + b \cdot 60^2 + c \cdot 60$ $\mid \cdot \frac{2}{3}$ ⊖

VI: $12480 = 144000a + 2400b + 40c$

VII: $3040 = -80000a - 800b + \cancel{0}$

IV: $6280 = 120a \cdot 50^2 + 80b \cdot 50 + 40c$
V: $15520 = a \cdot 40^3 + b \cdot 40^2 + 40c$ ⊖

VIII: $-9240 = 236000a + 2400b + \cancel{0}$
VII: $9120 = -240000a - 2400b$ ⊕

IX: $-120 = -4000a + \cancel{0}$ $\mid :(-4000)$

$a = \frac{3}{100}$

$a = \frac{3}{100}$ in VII: $9120 = -240000 \cdot \frac{3}{100} - 2400b$ $\mid +7200$

$16320 = -2400b$ $\mid :(-2400)$

$b = -\frac{34}{5}$

$a = \frac{3}{100}$ & $b = -\frac{34}{5}$ in VI: $12480 = 144000 \cdot \frac{3}{100} + 2400 \cdot \left(-\frac{34}{5}\right) + 40c$ $\mid +12000$

$24480 = 40c$ $\mid :40$

$c = 612$

$a = \frac{3}{100}$; $b = -\frac{34}{5}$; $c = 612$; $d = 12000$

– $K'(x) = 3 \cdot \frac{3}{100} \cdot x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{34}{5}\right) \cdot x + 612$

Möglicher Lösungsweg

a) Nach etwa 18 Jahren ist die Anzahl an Transistoren pro Chip auf 3 000 000 angewachsen. Das entspricht dem Jahr 1992.

Ablesen von 2 Funktionswerten, z. B. $y(0) = 6$, $y(30) = 200000$
$y_0 = 6$
$200000 = 6 \cdot e^{30 \cdot \lambda}$
$\ln\left(\frac{200000}{6}\right) = 30 \cdot \lambda$
$\lambda = 0{,}347...$
$y(t) = 6 \cdot e^{0{,}347... \cdot t}$

b) Da $\lg(20) - \lg(10) = 0{,}301...$ ist und $\lg(90) - \lg(80) = 0{,}051...$ ist, ist der Abstand auf der logarithmisch skalierten Achse zwischen 10 und 20 größer als zwischen 80 und 90.

$y = a \cdot b^x$
$\lg(y) = \lg(a) + x \cdot \lg(b)$
Diese Form entspricht einer Geraden, wenn die y-Achse logarithmisch skaliert ist.

c) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $K(0) = 12000 \Rightarrow 12000 = d$
II: $K(40) = 27520 \Rightarrow 40^3 \cdot a + 40^2 \cdot b + 40 \cdot c + d = 27520$
III: $K(60) = 30720 \Rightarrow 60^3 \cdot a + 60^2 \cdot b + 60 \cdot c + d = 30720$
IV: $K'(50) = 157 \Rightarrow 3 \cdot 50^2 \cdot a + 2 \cdot 50 \cdot b + c = 157$

$K(x) = 0{,}03 \cdot x^3 - 6{,}8 \cdot x^2 + 612 \cdot x + 12000$

I: $K(0) = 12000 \Rightarrow 12000 = d$
II: $K(40) = 27520 \Rightarrow 40^3 \cdot a + 40^2 \cdot b + 40 \cdot c + d = 27520$
III: $K(60) = 30720 \Rightarrow 60^3 \cdot a + 60^2 \cdot b + 60 \cdot c + d = 30720$
IV: $K'(50) = 157 \Rightarrow 3 \cdot 50^2 \cdot a + 2 \cdot 50 \cdot b + c = 157$

$K(x) = 0{,}03 \cdot x^3 - 6{,}8 \cdot x^2 + 612 \cdot x + 12000$

Berechnung der Minimumstelle:
$K'(x) = 0{,}09 \cdot x^2 - 13{,}6 \cdot x + 612$
$K''(x) = 0{,}18 \cdot x - 13{,}6$
$0{,}18 \cdot x - 13{,}6 = 0$
$x = 75{,}555...$

Bei rund 75,56 produzierten ME ist der Kostenanstieg bei einer zusätzlich produzierten ME am geringsten.

- $K'(x) = 3 \cdot \frac{3}{100} \cdot x^2 + 2 \cdot (-\frac{34}{5}) \cdot x + 612$

TI: completeSquare():

$$K'(x) = \frac{9 \cdot (x - 75{,}\dot{5})^2}{100} + \underline{98{,}\dot{2}}$$

A: Das Minimum liegt bei $98{,}\dot{2}$.

- A: Bei ca. 98 produzierten Stücken, sind die Kosten am geringsten.

Hab jetzt nochmal nachgesehen, was HÜ ist ...

Tja, wer LESEN kann ist klar im Vorteil
(Beispiel c war nicht auf).

d) Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Teilung bestimmen:

$1000 \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{50}{\sqrt{80}}$
$n = 80 \Rightarrow f = 79$
$t_{79;0{,}995} = 2{,}639...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ:
[985,24; 1014,76] (Intervallgrenzen gerundet)

Das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ wird breiter, wenn α verkleinert wird.	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	**Punkteanzahl:**
a) schwer	a) 3
b) schwer	b) 2
c) mittel	c) 4
d) mittel	d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: www.computerbild.de/artikel/cb-Ratgeber-Kurse-Wissen-Prozessor-CPU-2999823.html

18. HÜ, am 23.02.2021

Dienstag, 23. Februar 2021 10:40

3.148b) ✓
3.173)
4.127) ✓
4.131) ✓
~~B_165 Fischwachstum~~
A_125 Helligkeit ✓

3.148 Eine Parabel verläuft durch die drei gegebenen Punkte.
1) Stelle das Gleichungssystem auf, das zur Berechnung der Koeffizienten der Funktionsgleichung der Parabel benötigt wird.
2) Löse das Gleichungssystem und gib die Funktionsgleichung an.
a) P(0|7), Q(2|11), R(−1|14) **b)** P(2|0), Q$\left(-3\middle|-\frac{5}{4}\right)$, R(−6|4)

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$a, b, c = ?$

1) $P(2|0)$: $f(2) = 0$ I: $0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

$Q(-3|-\frac{5}{4})$: $f(-3) = -\frac{5}{4}$ II: $-\frac{5}{4} = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c$

$R(-6|4)$: $f(-6) = 4$ III: $4 = a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + c$

2) TI: solve: $\cancel{a = -0{,}298}$
$\cancel{b = -0{,}048}$
$\cancel{c = 1{,}289}$

f

Rf

correction:

$\boxed{a = \frac{1}{4};\ b = \frac{1}{2};\ c = -2}$

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$

3.173 Annas Schulweg ist 3 km lang. Drei Fünftel ihres Schulwegs kann sie auf einer waagrechten Straße recht schnell mit ihrem Rad fahren. Die restliche Strecke geht bergauf, sodass die Fahrgeschwindigkeit im Mittel um $\frac{10}{3}\,\frac{m}{min}$ geringer ist als vorher. Für den ganzen Weg benötigt Anna 15 Minuten. Berechne die Geschwindigkeiten und die Fahrzeiten für beide Teilstrecken.

$\frac{3}{5}$ 3km $\frac{2}{5}$

v $v - \frac{10}{3}$

15min

v … Geschwindigkeit in $\frac{m}{min}$ Gerade

t … Zeit in min

s … Weg in m

$s = v \cdot t$

I: $3000 \cdot \frac{3}{5} = v \cdot t$

II: $3000 \cdot \frac{2}{5} = \left(v - \frac{10}{3}\right) \cdot (15 - t)$

I: $t = \frac{1800}{v}$

II: $1200 = \left(v - \frac{10}{3}\right) \cdot \left(15 - \frac{1800}{v}\right)$

$1200 = 15v - 1800 - 50 + \frac{6000}{v} \quad | \cdot v$ $\frac{3}{3}v - \frac{10}{3}v = -\frac{7}{3}v$

$1200v = 15v^2 - 1850v + 6000 \quad | -1200v$

$0 = 15v^2 - 3050v + 6000$

$v = 1{,}9866\ldots \frac{m}{s}\ /\ 201{,}346\ldots \frac{m}{s}$ ← realistisch? (ca.: 56 km/h)

4.127 Eine Maschine erzeugt einen Schalldruck von 1,5 Pascal.
1) Berechne den Schalldruckpegel (siehe Aufgabe 4.126).
2) Durch den Einbau einer zusätzlichen Dämpfung sinkt der Schalldruck um 10 %. Um wie viel verringert sich dadurch der Schalldruckpegel?
3) Um wie viel Prozent müsste der Schalldruck reduziert werden, um den Schalldruckpegel um 10 dB zu senken?

4.126 Das Gesetz von Weber-Fechner besagt, dass Sinneseindrücke mit dem Logarithmus der Reizstärke wachsen. Wird die Reizstärke also mit einem konstanten Faktor mehrmals multipliziert, so erhöht sich die Sinnesempfindung jeweils um die gleiche additive Größe.
Den Effektivwert (Mittelwert) der Druckschwankungen, die in der Luft bei der Ausbreitung von Schall entstehen, nennt man Schalldruck p. Er wird in Pascal gemessen. Die Hörschwelle liegt bei $p_0 = 20\,\mu Pa$. Bei der praktischen Schallmessung wird der Schalldruckpegel L_p verwendet:
$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$ dB (dB … Dezibel)

p	L_p in dB	Beispiel
$p_0 = 20\,\mu Pa$	0	Hörschwelle
–	10	Blätterrauschen
$10 \cdot p_0$	–	Flüstern
$20 \cdot p_0$	–	Normales Gespräch
–	80	Verkehrslärm, 5 m vom Straßenrand
$10^5 \cdot p_0$	–	Disco, 1 m Entfernung vom Lautsprecher
–	130	Schmerzschwelle

1) Ermittle die fehlenden Tabellenwerte.
2) Gib an, um wie viel der Schalldruckpegel zunimmt, wenn der Schalldruck verdoppelt wird.

1) $L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$ $p_0 \hat{=} 20\,\mu Pa$

$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{1{,}5}{20\mu}\right)$

$L_p = 97{,}501$ dB ✓

2) 90 % von 1,5 $\hat{=}$ $0{,}9 \times 1{,}5 = 1{,}35$ Pa

0 · 100 96 · 100

L_p ...

2) 90% von $1{,}5 \mathrel{\hat=} 0.9 \times 1{,}5 = 1{,}35\ Pa$

$L_p = 20 \times \lg\left(\frac{1{,}35}{20\mu}\right)$

$L_p = 96{,}586\ldots\ dB$

correction: $p = \frac{A \cdot 100}{G} = \frac{96 \cdot 100}{97} = 98{,}06\ \%$

A: Der Sdp verändert sich um $-0{,}938\%$.

3) $L_p = 87{,}501\ dB$

$87{,}501 = 20 \times \lg\left(\frac{p}{20\mu}\right) \quad | :20$

TI solve

$p = 0{,}4743$

$G = 1{,}5$

$A = 1{,}5 - 0{,}4743 = 1{,}025$

$p = ?$

$p = \frac{A \cdot 100}{G} = \frac{1{,}025 \cdot 100}{1{,}5} = 68{,}377\%$

4.131 Die Entfernung eines Sterns von der Erde kann mit dem Entfernungsmodul, der Differenz zwischen der scheinbaren Helligkeit m (in Magnituden) und der absoluten Helligkeit M (in Magnituden) berechnet werden. Für einen Stern in einer Entfernung von r Parsec (pc, 1 pc = $30{,}856 \cdot 10^{12}$ km) gilt:

$$m - M = 5 \cdot \lg(r) - 5$$

Für den Stern Sirius gilt m = –1,46 und M = 1,43.
Berechne seine Entfernung von der Erde in km.

$-1{,}46 - 1{,}43 = 5 \cdot \lg(r) - 5 \quad | +5$

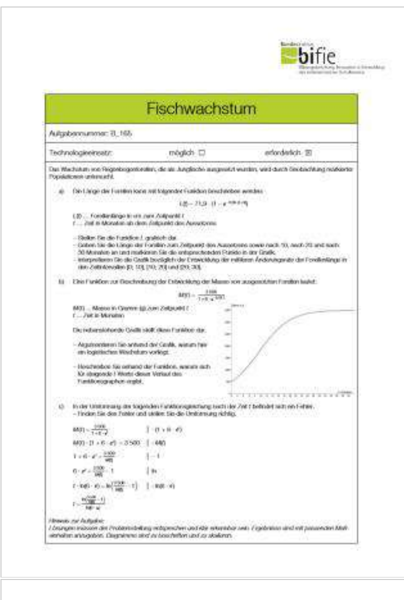
$2{,}11 = 5 \cdot \lg(r) \quad | :5$

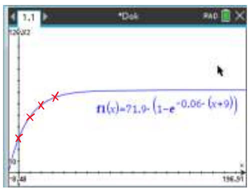
$0{,}422 = \lg(r)$

$r = 10^{0{,}422}$

$r = 2{,}642\ pc$

$\mathrel{\hat=} 81{,}534 \cdot 10^{12}\ km$





a) $Lt(0) \mathrel{\hat=} 30cm$ TI: $f1(0)$ enter

$Lt(10) \mathrel{\hat=} 49cm$

$Lt(20) \mathrel{\hat=} 59cm$

$Lt(30) \mathrel{\hat=} 65cm$

$[0;10] \to$ schneller Wachstum

$[10;20] \to$ mittlerer Wachstum

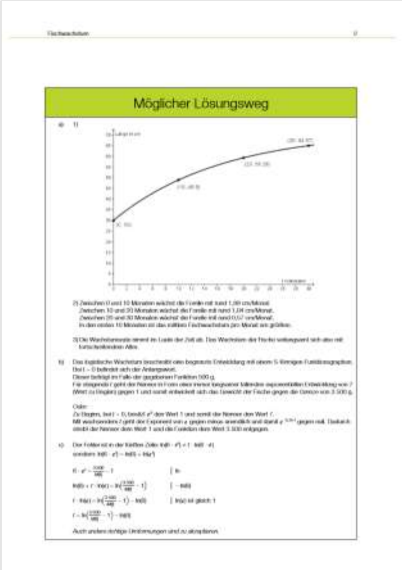
$[20;30] \to$ Langsamer Wachstum

b) Kennzeichen logistischer Wachstumsfunktionen ist die S-Form d. Graphen bei t=0 hat die Forelle 500g, dies steigt mit den Monaten langsam bis immer schneller bis wieder langsam an. Schlussendlich erreicht die Forelle ein Maximalgewicht von 3500g.

c) Fehler beim logarithmieren

$6 \cdot e^t \to \ln(6) + t \cdot \ln(e)$

$\not\to t \cdot \ln(6 \cdot e)$

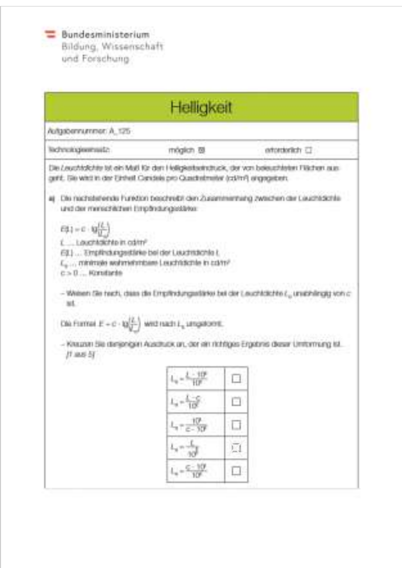


$\cancel{\nearrow}$ $t \cdot \ln(6 \cdot e)$

$$\ln(6) + t \cdot \ln(e) = \ln\left(\frac{3500}{M(t)} - 1\right) \quad \Big| -\ln(6)$$

$$t \cdot \ln(e) = \ln\left(\frac{3500}{M(t)} - 1\right) - \ln(6) \quad \Big| : \ln(e) = 1$$

$$t = \ln\left(\frac{3500}{M(t)} - 1\right) - \ln(6)$$



a) 1) $E(L) = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$

$E(L) = c \cdot \lg\left(\frac{L_0}{L_0}\right)$

$E(L) = c \cdot \lg(1)$ $\quad \lg(1) = 0$

$E(L) = c \cdot 0$ $\quad x \cdot 0 = 0$

Wenn $c \notin \mathbb{R}$,
dann $E(L) = 0$!

2) $E = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$ $\quad | : c$

$\frac{E}{c} = \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$

$\frac{L}{L_0} = 10^{\frac{E}{c}}$ $\quad | \cdot L_0$ $\quad | : 10^{\frac{E}{c}}$

$L_0 = \frac{L}{10^{E/c}}$

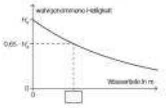
b) Das menschliche Auge kann eine Leuchtdichte im Bereich von $2 \cdot 10^{-5}$ cd/m² bis 10^6 cd/m² wahrnehmen.
Ein Unterschied der Helligkeit wird vom Menschen nur dann wahrgenommen, wenn sich die Leuchtdichte um mindestens 5 % verändert. Der wahrnehmbare Helligkeitsbereich kann daher in Helligkeitsstufen unterteilt werden. Die Leuchtdichte muss jeweils um 5 % steigen, damit die nächsthöhere Helligkeitsstufe erreicht wird.
Sebastian schätzt ab, wie viele dieser Helligkeitsstufen es gibt:

- $2 \cdot 10^{-5}$ ist fast null.
- 5 % von 10^6 sind 50 000.
- 50 000 geht 20-mal in 10^6, also muss es etwa 20 Helligkeitsstufen geben.

– Erklären Sie, warum diese Überlegung falsch ist.

– Weisen Sie nach, dass es mehr als 500 dieser Helligkeitsstufen gibt.

c) Unter bestimmten Bedingungen nimmt die wahrgenommene Helligkeit unter Wasser pro Meter Tiefe um 7 % des vorherigen Wertes ab. Die wahrgenommene Helligkeit an der Wasseroberfläche ist H_0.
In der nachstehenden Abbildung ist diese Abnahme dargestellt.



*

– Tragen Sie den fehlenden Wert in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $E(I_0) = c \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = c \cdot \lg(1) = c \cdot 0 = 0$

Die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte I_0 hat den Wert 0 und ist daher unabhängig von c.

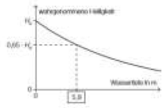
[...]	
[...]	
[...]	
$I_0 = \frac{I}{10^{\frac{E}{c}}}$	☒
[...]	

b) Sebastian hat mit einem linearen Modell gerechnet. Er hat von Stufe zu Stufe einen konstanten Zuwachs von 50 000 cd/m² angenommen. Das lineare Modell ist nicht geeignet, weil der Prozentsatz von 5 % sich jeweils auf den vorhergehenden Wert bezieht.

Die 1. Helligkeitsstufe beginnt bei einer Lichtdichte von $2 \cdot 10^{-5}$ cd/m². Jede Erhöhung um 5 % entspricht einer Multiplikation mit 1,05. Für die Untergrenze der 501. Helligkeitsstufe ergibt sich daher:
$2 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}05^{500} = 786465,...$

786 465,... cd/m² < 10^6 cd/m²
Daher gibt es mehr als 500 dieser Helligkeitsstufen.

c)



(Wert gerundet)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 1 Zahlen und Maße
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad: **Punkteanzahl:**

a) mittel a) 2
b) schwer b) 2
c) mittel c) 1

Thema: Physik

Quelle: http://www.solstice.de/cms/upload/pdf/Veroeffentlichungen/Weber-Fechner-PHuB-1984.pdf

---

b) - Die Überlegung ist falsch, weil Sebastian nicht bedacht hat, dass der Zahlenstrahl log. skaliert ist.

- $2 \cdot 10^{-5}$ 10^{-3} 10^{0} 10^{2} 10^{4} 10^{6}

von $2 \cdot 10^{-5}$ bis 10^{-4} gibt es ca. 80 Stufen

$2 \cdot 10^{-5}$ $\xrightarrow{+5\%}$ $2{,}1 \cdot 10^{-5}$ → $\sim 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ → ⋮

→ immer von einer Zehnerpotenz auf die nächste gibt es ca. 80 Stufen

$\underbrace{2 \cdot 10^{-5} \text{ bis } 10^{6}}_{\text{Anzahl: } 11}$

↓

$80 \cdot 11$

↓

ca. 880 Helligkeitsstufen

* Abnahmefunktion:

$$H(m) = 1 \times 0{,}93^{m}$$

$$H(m) = 65\%$$

$$0{,}65 = 0{,}93^{m}$$

$$m = \log_{0{,}93}(0{,}65)$$

$$m = 5{,}936\ldots \text{ Meter}$$

17. HÜ, am 16.02.2021

Mittwoch, 17. Februar 2021 15:09

Die Bilder sind leider in der umgekehrten Reihenfolge!

Epidemie

a) $N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$

Ein Virus kann sich nicht ewig exponentiell verbreiten, da es nicht unendlich viele Menschen gibt und nicht alle Menschen zu schnell neue Menschen anstecken können.

b) $I(t) = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1733 \cdot t}}$

$1200 = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1733 \cdot 41}}$

$$\left(1200 = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-7{,}1299}} \quad | \cdot \ldots \right)$$

$$\left(1200 (1 + b \cdot e^{-7{,}1299}) = 30\,000 \right)$$

TI: $b = 29970{,}05$

$17\,000 = \frac{30\,000}{1 + 29970{,}05 \cdot e^{-0{,}1733 \cdot t}}$

TI: $t = 60{,}817\ldots$ Tage

c) Nach 45 Tagen sind ca. 2000 Menschen infiziert.

$t = 60$ Tage

aufgegeben?

Impfen und Auffrischen

a) 1) t … Zeit in Jahren

$A(t)$ … Antikörperwert in IE/L von Anna

$A(t) = 110 \cdot 0{,}8^{t}$

2) $A(t) = 10$

$t = ?$

$10 = 110 \cdot 0{,}8^{t} \quad |:110$

$0{,}8^{t} = \frac{10}{110}$

$t = \log_{0{,}8}\left(\frac{10}{110}\right)$

$t = 10{,}745\ldots$ Jahre

A: Nach ca. 10 Jahren und 8 Monaten ist der Impfstoff nicht mehr wirksam.

b) 1) $T_{\frac{1}{2}} = 2{,}5$ Jahre

2) $S(t) = 80 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{2{,}5}}$

Zeichnung → TI

$M(t)$ …. Aktivität d. Isotops

$M(0)$ …. Anfangsaktivität d. Isotops

$M(t) = M(0) \cdot 0{,}5^{\frac{t}{6}}$

2) $M(24) = M(0) \cdot 0{,}5^{\frac{24}{6}}$

↓

$6{,}25\,\%$

3) $M(t) = M(0) \cdot 0{,}03$

$0{,}5^{\frac{t}{6}} = 0{,}03$

$\frac{t}{6} = \log_{0{,}5}(0{,}03) \quad | \cdot 6$

$t = 6 \cdot \log_{0{,}5}(0{,}03)$

$t = 30{,}353$ Stunden

bei dem Beispiel

Verbesserung

$t = 6 \cdot \log_{0,5}(0,03)$

$t = 30,353$ Stunden

4.1(4) 1) $T(t) = (45 - \cancel{20}) \cdot \cancel{1,0166}$

2) Körpertemperatur $36°C$

$T(t) = \cancel{25 \cdot 1,0166^{t}}$

$36 = 25 \cdot 1,0166^{t}$

$\frac{36}{25} = 1,0166^{t}$

$t = \log_{1,0166}\left(\frac{36}{25}\right)$

$t = 22,11315...$ Minuten

$41 = 25 \cdot a^{30} \quad | : 25$

$\frac{41}{25} = a^{30} \quad | \sqrt[30]{\ }$

$\frac{1}{a} = 1,0166$

bei dem Beispiel bin ich mir nicht sicher, ob das richtig ist !?!

Verbesserung unten.

Angabe: $T(t) = (45-20) \cdot e^{-k \cdot t} + 20$!

$T(30) = 41$ einsetzen:

$41 = 25 \cdot e^{-k \cdot 30} + 20$

:

k berechnen

4.108) 1) t ... Zeit in Tagen

$N(t)$ ... Anzahl Hasen

$N(t) = 20 \cdot 2,8^{\frac{t}{60}}$

$a = \sqrt[60]{2,8}$

2) $N(t) = 420$

$420 = 20 \cdot 2,8^{\frac{t}{60}} \quad | : 20$

$21 = 2,8^{\frac{t}{60}}$

$\frac{t}{60} = \log_{2,8}(21) \quad | \cdot 60$

$t = 60 \cdot \log_{2,8}(21)$

$t = 177,416...$ Tage

3) $\cancel{N_0} \cdot 4 = \cancel{N_0} \cdot 2,8^{\frac{t}{60}}$

$\frac{t}{60} = \log_{2,8}(4)$

$t = 60 \cdot \log_{2,8}(4)$

$t = 80,784...$ Tage

100mg

Hausübung am 16.02.2021

4.106)

4.107)

4.101)

4.114)

A_265: Impfen und Auffrischen

A_255: Epidemie a) b)

4.106) 1) t ... Zeit in Wochen

$N(0)$ ... Gewicht zu Beginn

$\rightarrow = 95$ kg

$a = 0,99$

$N(t) = 95 \cdot 0,99^{t}$

2) $N(8) = 95 \cdot 0,99^{8}$

$N(8) = 87,6607...$ kg

A: 87,66 kg nach 8 Wochen.

3) TI: $t = 11,066$ Wochen

$N(t) = 85$

$85 = 95 \cdot 0,99^{t} \quad | : 95$

$\frac{85}{95} = 0,99^{t}$

$t = \log_{0,99}\left(\frac{85}{95}\right)$

$t = 11,066$ Wochen

#Zeichnungen

20.2.

#teichnung— —

20.2.

4.184) $T_0 = 45°C$

$T_U = 20°C$

$$T(t) = (45-20) \times e^{-kt} + 20$$

$$T(30) = 41°C$$

$$41 = 25 \times e^{-k \cdot 30} + 20$$

16. HÜ, am 09.02.2021

Dienstag, 9. Februar 2021 13:12

Hausübung, am 9.2

$\left.\begin{array}{l} 4.37) \\ 4.44) \\ 4.49) \\ 4.52) \end{array}\right\} \longrightarrow$ alles rechnerisch

4.37) t: Zeit in Jahren

$N(t)$: Umsatz in €

N_0: Startgeld in €

a) $N(t) = N_0 \cdot \sqrt[5]{2}^{\,t}$

b) $N(t) = N_0 \cdot \sqrt[10]{3}^{\,t}$

4.49) 1) $N(t) = 5 \cdot 0{,}75^{\frac{t}{4}}$

2) $\cancel{a = \sqrt[4]{0{,}75}}$

$\cancel{0{,}75 = a^4}$

$0{,}5 = \sqrt[4]{0{,}75}^{\,t}$

$t = \log_{\sqrt[4]{0{,}75}}(0{,}5) = \cancel{0{,}930...}\ 9{,}63$ d (Tage)

3) $N(t) = N_0 \cdot \sqrt[4]{0,75}^{\,t}$ $N_0 = 100 mg$

$N(8) = 100 \cdot \sqrt[4]{0,75^8}$

$N(8) = 56,52$

A. 56,52 % sind nach 8 Tagen da.

4.52) 1) t: Zeit in Jahren

N(t): Masse (g) von Cäsium

$\underline{N(t) = 100 \cdot 0,977^t}$

2) $\underline{N(30) = 49,755 \text{ g}}$ Cäsium

3) $N(20) = 62,790$ g Cäsium

$\hat{=}$ 37,2 % zerfall in 20 Jahren

4) $50 = 100 \cdot 0,977^t \quad | :100$

$0,5 = 0,977^t$

$t = \log_{0,977}(0,5)$

$t = 29,788$ Jahre

A: Nach ca. 30 Jahren ist die Hälfte weg.

15. HÜ, am 26.01.2021

Dienstag, 26. Januar 2021 14:14

Hausübung, am 26.01.2021

4.33)
4.67)
4.77) e) f) g) h)
4.81) e) f) g) h)
4.94)

4.67) a) $\log_7(49) = 2 \rightarrow 7^2 = 49$

b) $\log_8(0{,}125) = -1 \rightarrow 8^{-1} = \frac{1}{8}$

c) $\log_{0{,}5}\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

d) $\log_{0{,}2}(0{,}04) = 2 \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

e) $\log_{11}(\sqrt{11}) = \frac{1}{2} \rightarrow 11^{\frac{1}{2}} = \sqrt{11}$

4.77) e) $\ln\left(\sqrt[3]{a^2 \cdot b}\right) = \ln\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}\right) =$

$\ln\left(a^{\frac{2}{3}}\right) + \ln\left(b^{\frac{1}{3}}\right) =$

$\frac{2 \cdot \ln(a) + \ln(b)}{3}$

f) $\log\left(\sqrt[5]{x^4} \cdot \frac{a^2}{4b^3 \cdot c^5}\right) = \log\left(\sqrt[5]{x^4}\right) + \log\left(\frac{a^2}{4b^3 \cdot c^5}\right) =$

$= \frac{4}{5} \cdot \log(x) + 2 \cdot \log(a) - 3 \cdot \log(4b) - 5 \cdot \log(c)$

g) $\log\left(\frac{x^3 \cdot z}{y^2}\right) = 3 \cdot \log(x) + \log(z) - 2 \cdot \log(y)$

h) $\log\left(\frac{3s \cdot t^5}{5xz} \cdot \sqrt{\frac{m^3 \cdot n}{3a - 3b}}\right) =$

$= \log(3) + \log(s) + 5 \cdot \log(t) - \log(5) - \log(x) - \log(z) +$

$+ \frac{3}{2} \cdot \log(m) + \frac{1}{2} \cdot \log(n) - \frac{1}{2} \cdot \log(3a - 3b)$

4.81) e) $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log(x - 1)$

$\cancel{f) \frac{1}{3}\left[\lg(a+b) + 2 \cdot \lg(a-b)\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[\lg((a+b) \cdot (a-b)^2)\right] =}$

4.81) f) $\frac{1}{3} \cdot (\lg(a+b) + 2 \cdot \lg(a-b)) - \frac{1}{4} \cdot (2 + \lg(a) - \lg(b)) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \lg((a+b) \cdot (a-b)^2) - \frac{1}{4} \cdot (2 + \lg(a) - \lg(b)) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \lg((a+b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)) - \frac{1}{4} \cdot (2 + \lg(a) - \lg(b)) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \lg(a^3 - 2a^2b + ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3) - \frac{1}{4} \cdot (2 + \lg(a:b)) =$

$= \lg\left(\sqrt[3]{a^3 - 2a^2b + ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3}\right) - \frac{1}{2} - \lg\left(\sqrt[4]{a:b}\right) =$

g) $\ln(2) + \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{2x}{y}\right)$

h) $\lg(x^2 + 5x + 6) - 2 \cdot \lg(x + 2) =$

$= \lg\left(\frac{x^2 + 5x + 6}{(x+2)^2}\right) = \lg\left(\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4}\right) =$

3)

h) $lg(x^2+5x+6) - 2 \cdot lg(x+2) =$

$= lg\left(\frac{x^2+5x+6}{(x+2)^2}\right) = lg\left(\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}\right) =$

4.94) 1) $2^{x+3} = 4^4$

$2^{x+3} = 256 \quad | \, ld()$

$ld(2^{x+3}) = ld(256)$

$(x+3) \cdot ld(2) = ld(256)$

$x \cdot ld(2) + 3 \cdot ld(2) = ld(256)$

$x \cdot ld(2) = ld(256) - 3 \cdot ld(2)$

$x = \frac{ld(256) - 3 \cdot ld(2)}{ld(2)} = 5$

2) $3^{2x+1} = 3^{-1} \cdot 5^{2x+2} \quad | \, ln()$

$ln(3^{2x+1}) = ln(3^{-1} \cdot 5^{2x+2})$

$(2x+1) \cdot ln(3) = ln(3^{-1}) + ln(5^{2x+2})$

$2x \cdot ln(3) + ln(3) = -1 \cdot ln(3) + (2x+2) \cdot ln(5)$

$2x \cdot ln(3) - 2x \cdot ln(5) = -1 \cdot ln(3) - ln(3) + 2 \cdot ln(5)$

$2x(ln(3) - ln(5)) = -1 \cdot ln(3) - ln(3) + 2 \cdot ln(5)$

$x = \frac{-1 \cdot ln(3) - ln(3) + 2 \cdot ln(5)}{2 \cdot (ln(3) - ln(5))} = -1$

3) $4^{3x+1} = 6 \cdot 2^{x-1} \quad | \ln()$

$$(3x+1) \cdot \ln(4) = \ln(6) + (x-2) \cdot \ln(2)$$

$$3x \cdot \ln(4) + \ln(4) = \ln(6) + x \cdot \ln(2) - 2 \cdot \ln(2)$$

$$3x \cdot \ln(4) - x \cdot \ln(2) = \ln(6) - 2 \cdot \ln(2) - \ln(4)$$

$$x(3 \cdot \ln(4) - \ln(2)) = \ln(6) - 2 \cdot \ln(2) - \ln(4)$$

$$x = \frac{\ln(6) - 2 \cdot \ln(2) - \ln(4)}{3 \cdot \ln(4) - \ln(2)} = \frac{\ln(\frac{3}{8})}{5 \cdot \ln(2)} = -0,283...$$

28.1.

14. HÜ, am 18.01.2021

Dienstag, 19. Januar 2021 14:55

3.118)
3.119)
3.122)
3.123)
3.126)

3.118)

	Weg s in km	Ges. v in km/h	Zeit t in h
alt	160	x	$\frac{160}{x}$
neu	160	$x+20$	$\frac{160}{x+20}$

$$\frac{160}{x} = \frac{160}{x+20} + \frac{2}{5}$$

HN: $x \cdot (x+20) \cdot 5$

$$\frac{800x + \overset{16000}{\cancel{49200}}}{HN} = \frac{800x}{HN} + \frac{2x^2+40x}{HN} \quad | \cdot HN$$

$$\cancel{800x} + \overset{16000}{\cancel{49200}} = \cancel{800x} + 2x^2 + 40x \quad | - 16000$$

$$+2x^2 + 40x - 16000 = 0$$

$a = 2$
$b = 40$
$c = -16000$

$$x_{1,2} = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16000)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-40 \pm 360}{4}$$

$x_1 = 80$ $\quad (x_2 = -100)$

$t = \frac{160}{x} = 1{,}6\,h$ A: Die neue Fahrzeit ist 1,6 h.

3.11 a)

	Weg s in km	Geschw. v in km/h	Zeit t in h
PKW	80	v	$\frac{80}{v}$
LKW	40	$v-20$	$\frac{40}{v-20}$

$$\frac{80}{v} = \frac{40}{v-20} + \frac{1}{3}$$

HN: $v \cdot (v-20) \cdot 3$

$$\frac{80 \cdot 3 \cdot (v-20)}{HN} = \frac{40v \cdot 3}{HN} + \frac{v \cdot (v-20)}{HN} \quad | \cdot HN$$

$$240v - 4800 = 120v + v^2 - 20v \quad | +4800 \; -240v$$

$$v^2 - 140v + 4800 = 0$$

$a = 1$
$b = -140$
$c = 4800$

$$v_{1,2} = \frac{140 \pm \sqrt{(-140)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4800}}{2 \cdot 1}$$

$$v_{1,2} = \frac{140 \pm 20}{2}$$

$v_1 = 80$ km/h $v_2 = 60$ km/h

A: Entweder fährt der PKW 80km/h und der LKW 60km/h oder der PKW fährt 60km/h und der LKW fährt 40km/h. Im Falle A braucht der PKW 1h / der LKW 40min, im Falle B fährt der PKW 1h 20min / der LKW 1h.

3.122) 1) x = Pumpe B (Zeit von B) in min

2)

	Arbeit	Zeit (allein) t min	Leistung P
Pumpe A	W	x	$\frac{W}{x}$
Pumpe B	W	$x-2$	$\frac{W}{x-2}$
zusam.	W	6	$\frac{W}{6}$

$P = \frac{W}{t}$

$$\frac{W}{x} + \frac{W}{x-2} = \frac{W}{6} \quad | : W$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{6}$$

HN: $x \cdot (x-2) \cdot 6$

$$\frac{6x - 12}{HN} + \frac{6x}{HN} = \frac{x^2 - 2x}{HN} \quad | \cdot HN$$

$$12x - 12 = x^2 - 2x \quad | -(12x - 12)$$

3.123)

$$12x - 12 = x^2 - 2x \quad | -(12x-12)$$

$$x^2 - 14x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{14}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2 - 12}$$

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 - 12}$$

$$x_{1,2} = 7 \pm 6{,}082...$$

$$x_1 = 13{,}082...\ min \qquad \left(x_2 = 0{,}917...\ min\right)$$

A: Pumpe A benötigt 13 min,
Pumpe B 11 min.

3.123)

	Arbeit	Zeit	Leistung
Zufluss A	W	x	$\frac{W}{x}$
Zufluss B	W	$x + 10min$	$\frac{W}{x+10}$
gms.	W	14 min	$\frac{W}{14}$

$$P = \frac{W}{t}$$

$$\frac{W}{x} + \frac{W}{x+10} = \frac{W}{14} \quad | :W$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{14}$$

HN: $x \cdot (x+10) \cdot 14$

$$\frac{14x + 140}{HN} + \frac{14x}{HN} = \frac{x^2 + 10x}{HN} \quad | \cdot HN$$

$$140 + 28x = x^2 + 10x \quad | -(140 + 28x)$$

$$x^2 - 18x - 140 = 0$$

$p = -18$
$q = -140$

$$x_{1,2} = \frac{18}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{18}{2}\right)^2 + 140}$$

$$x_{1,2} = 9 \pm 14{,}866...$$

$$x_1 = 23{,}866...\ min \qquad x_2 = -5{,}866...\ min$$

A: Zufluss A benötig ca. 24 min,
Zufluss B 34 min.

3.116) I: $462 = x \cdot y \quad | :y$ x... Schüleranzahl

3.11 b) I: $462 = x \cdot y \quad | : y$

x.... Schüler anzahl
y.... Kosten pro S
} urspr.

II: $462 = (x+7)(y-0{,}5)$ €

I: $x = \frac{462}{y}$

$$462 = \left(\frac{462}{y} + 7\right)(y - 0{,}5)$$

$$462 = 462 + 7y - \frac{231}{y} - 3{,}5 \quad | \cdot y$$

$$\cancel{462y} = \cancel{462y} + 7y^2 - 231 - 3{,}5y$$

$$7y^2 - 3{,}5y - 231 = 0$$

$a = 7$
$b = -3{,}5$
$c = -231$

$$y_{1,2} = \frac{3{,}5 \pm \sqrt{(-3{,}5)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-231)}}{2 \cdot 7}$$

$$y_{1,2} = \frac{3{,}5 \pm \cancel{80{,}1}\ 80{,}5}{14}$$

$$\underline{y_1 = 6\ €/S} \qquad \left(y_2 = -5{,}5\ € \ (?)\right)$$

$$x = \frac{462}{6} = \underline{77 \text{ Schüler}}$$

A: Ursprünglich waren 77 Schüler im Kino.

Tab. 84

20.1.

13. HÜ, am 15.12.2020

Mittwoch, 16. Dezember 2020 14:14

Hausübung, am 15.11.2020

3.47)
3.48)
3.49)
3.172)
3.52)
3.114) → hochladen → Montag

3.47) 1) $D = [0; 16{,}3...]$ s

2) $0 = 80t - 4{,}905t^2$

$a = -4{,}905$
$b = 80$
$c = 0$

g.L.: $t_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 0}}{2 \cdot (-4{,}905)} =$

$= \frac{-80 \pm 80}{-9{,}81}$

$t_1 = 0$ $t_2 = 16{,}309...$ s

A: Die Rakete trifft nach ca. 16,3 s am Boden auf.

3) Das bedeutet, dass die Höhe der Rakete zur Zeit t 20 m beträgt.

4) Scheitelpunktsform:

$f(x) = -4{,}905 \cdot (x - 8{,}15494)^2 + 326{,}198$

A: Die Rakete steigt 8,15 s. Man berechnet die x-Koordinate vom Scheitelpunkt.

5) Annahme: $t_2 = 15{,}309...$ s bis Aufschlag

$f_1(x) = a \cdot (x - 7{,}65...)^2 + 326{,}198$

a best.: mit $P(15{,}3|0)$

$0 = a \cdot (15{,}3 - 7{,}65...)^2 + 326{,}198$ | $-326{,}$

$58{,}59... a = -326{,}198$ | $:58{,}59$

$a = 5{,}56...$

$f_1(x) = 5{,}56 \cdot (x - 7{,}65...)^2 - 326{,}198$

5) $0 = b \cdot 15{,}3... - 4{,}905 \cdot 15{,}3...^2$

$0 = 15{,}3b - 1149{,}7$ | $+1149{,}7$

$15{,}3b = 1149{,}7$ | $:15{,}3$

$b = 75{,}095$ m/s

3.48) $K(45) = 0{,}0003 \cdot 45^2 + 0{,}008 \cdot 45 + 3{,}5$

$K(45) = 4{,}4675 \frac{L}{100km}$

$100 : 4{,}4675 = 8{,}4 : x$

$100x = 37{,}527$ | $:100$

$x = 0{,}37527$ L

$100x = 37{,}527 \quad | :100$

$x = \underline{\underline{0{,}37527\ L}}$

$7 : 0{,}37527 = 18{,}65\ldots$

A: Ute, die Gute, schafft 9 ganze Fahrten zum Fitness-Studio und zurück.

3.49) 1) $8 = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 7{,}55 \quad | -8 \quad D = \mathbb{R}^+$

$0{,}002v^2 - 0{,}18v - 0{,}45 = 0 \quad$ g.L.:

$$v_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$v_{1,2} = \frac{0{,}18 \pm \sqrt{0{,}0324 - 4 \cdot (0{,}002) \cdot (-0{,}45)}}{2 \cdot 0{,}002}$$

$$v_{1,2} = \frac{0{,}18 \pm \sqrt{0{,}036}}{0{,}004}$$

$$v_{1,2} = \frac{0{,}18 \pm 0{,}189\ldots}{0{,}004}$$

$$\underline{\underline{v_1 = 92{,}4342\ \frac{km}{h}}} \qquad \left(\underline{\underline{v_2 = -2{,}43416\ \frac{km}{h}}}\right)$$

A: Bei einer Geschwindigkeit von rund 92,4 km/h beträgt der Verbrauch 8L/100km.

2) Scheitelpunktsform:

$$0{,}002 \cdot (v - \underbrace{45}_{\text{x-Koordinate}})^2 + 3{,}5$$

A: Dadurch, dass Scheitelpunkt bei der x-Koordinate liegt, wissen wir, dass die am nutzbarsten Geschwindigkeit 45km/h beträgt, weil man da nur 3,5 L / 100km verbraucht.

3.52) 1) $K(x) = 110x + 1300$

$p(x) = -5x + 500$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$= -5x^2 + 500x - (110x + 1300) =$

$= -5x^2 + 390x - 1300$

2) → TI

3) Gewinnschwelle: 3,49 Stück
Gewinngrenze: 74,5 Stück

Auf GANZE Stück runden!

max. Gewinn: bei 39 Stück, ≠ Gewinnhöhe

3.114) x .... äußere Länge in m
$\frac{3x}{4}$ .... äußere Breite in m

$\text{I}: 5 \cdot 40 \cdot 30 = x \cdot \frac{3x}{4} - (40 \cdot 30)$

$6000 = \frac{3x^2}{4} - 1200 \qquad | -6000$

$\frac{3x^2}{4} - 7200 = 0$

g.L.: $x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4 \cdot \frac{3}{4} \cdot (-7200)}}{2 \cdot \frac{3}{4}}$

$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{21600}}{1{,}5}$

3.17 2) 1) 25 000 €

2) $0 = 20\,000 - 1000p \qquad | -20\,000$

$1000p = -20\,000 \qquad | : (-1000)$

$\underline{\underline{p = 20 \text{ GE}}}$

3) $p(x) = 20 - \frac{1}{1000}x$ (Kehrwert)

4) $E(x) = 20x - \frac{x^2}{1000}$

$G(x) = E(x) - K(x) =$

$= 20x - \frac{x^2}{1000} - (25\,000 + 5x) =$

$= \underline{-\frac{x^2}{1000} + 15x - 25\,000}$

5) Gewinngrenze: + Schwelle.

$0 = -\frac{x^2}{1000} + 15x - 25\,000$

g.L.: $x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 4 \cdot (-\frac{1}{1000}) \cdot (-25\,000)}}{2 \cdot (-\frac{1}{1000})}$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{125}}{-\frac{2}{1000}}$

$\underline{x_1 = 1909{,}83...} \qquad \underline{x_2 = 13090{,}2...}$

Gewinngrenze: 13090,2... Stk

$\frac{\quad}{1000}$

$\underline{x_1 = 1909{,}83\ldots}$ $\underline{x_2 = 13090{,}2\ldots}$

Gewinngrenze: $13090{,}2\ldots$ Stk

Gewinnschwelle: $1909{,}83\ldots$ Stk

Runden!

max. Gewinn:

Scheitelpunktsform:

completesquare(...) =

$$f(x) = -\frac{(x-7500)^2}{1000} + 31250$$

A: Der maximale Gewinn beträgt 31 250 GE.

6) → TI