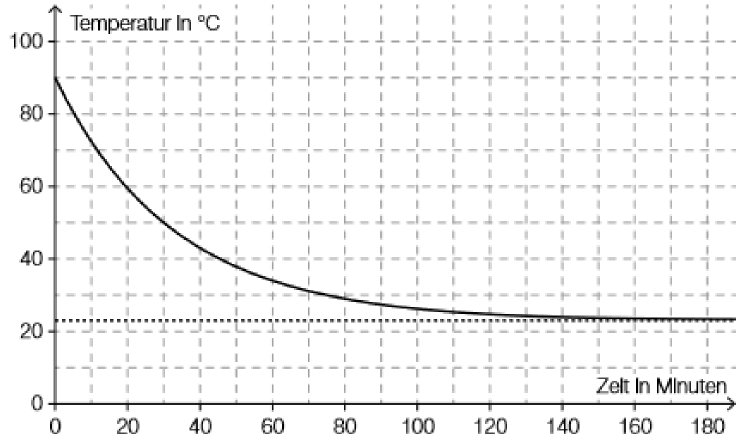
c) Die nachstehende Grafik zeigt den Graphen einer Funktion, die das Abkühlen von heißem Wasser in einer Babyflasche bei einer Raumtemperatur von 23 °C darstellt.



– Kreuzen Sie die richtige Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach 3 Stunden ist die Wassertemperatur unter 23 °C gesunken.	☐
Die Wassertemperatur halbiert sich jede halbe Stunde.	☐
Die Temperaturabnahme wird durch eine quadratische Funktion beschrieben.	☐
Nach ca. 35 Minuten ist die Temperatur des Wassers auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken.	☐
Je mehr Zeit vergeht, desto schneller kühlt das Wasser ab.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $L(w) = \frac{w}{30}$

Die Umkehrfunktion gibt in diesem Fall an, welche Menge Wasser für eine bestimmte Anzahl von Messlöffeln benötigt wird.

b) Hochpunkt der Funktion f: $(2{,}45\ldots \mid 3{,}14\ldots)$
Die y-Koordinate muss verdoppelt werden, um den maximalen Durchmesser zu erhalten.
Der maximale Durchmesser beträgt rund 6,3 cm.

Formel für das Volumen: $V = \pi \cdot \int_0^h (0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596)^2 \, dx$
150 ml = 150 cm³

$\pi \cdot \int_0^h (0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596)^2 \, dx = 150 \quad \Rightarrow \quad h = 5{,}35\ldots$

Die Markierung muss sich in rund 5,4 cm Höhe befinden.

c)

	☐
	☐
	☐
Nach ca. 35 Minuten ist die Temperatur des Wassers auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken.	☒
	☐

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) schwer	b) 3
c) leicht	c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

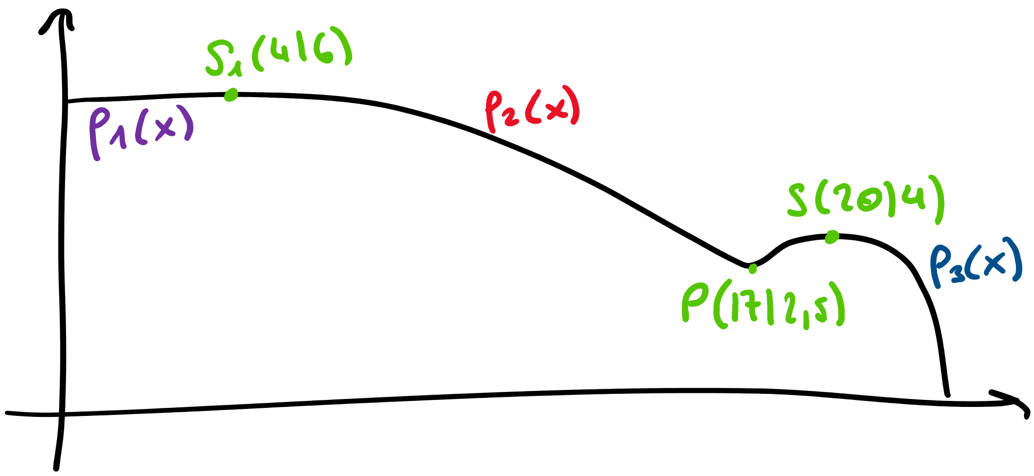
9. Hausübung, am 21.10.2022

Montag, 24. Oktober 2022 11:31

9. Hausübung, am 21.10.22

7.59)

7.59) 1)



$p_1(x) = 6$

$p_2(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

$p_2(x) = a \cdot (x - 4)^2 + 6$

$P(17|2,5)$

$2,5 = a \cdot (17 - 4)^2 + 6$

[TI:] $\underline{a = -0,0207...}$

$p_2(x) = -0,0207... \cdot (x - 4)^2 + 6$

$$p_3(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

$$p_3(x) = a \cdot (x - 20)^2 + 4$$

$$P(17 \mid 2{,}5)$$

$$2{,}5 = a \cdot (17 - 20)^2 + 4$$

[T1:] $\underline{a = -0{,}1\dot{6}}$

$$p_3(x) = -0{,}1\dot{6} \cdot (x - 20)^2 + 4$$

2) $V = \pi \cdot \left[\int_0^4 p_1(x)^2 \cdot dx + \int_4^{17} p_2(x)^2 \cdot dx + \int_{17}^{24} p_3(x)^2 \cdot dx \right] =$

[T1:] $= \underline{1697{,}8563\ldots \text{ cm}^3}$

$$m = V \cdot \rho = 1697{,}856\ldots \cdot 0{,}7 = \underline{1188{,}4994\ldots \text{ g}}$$

3) $V_Q = a \cdot b \cdot c = 24 \text{ cm} \cdot 12^2 \text{ cm}^2 = \underline{3456 \text{ cm}^3}$

$$p = \frac{A}{G} = \frac{V}{V_G} = \frac{1697{,}856\ldots}{3456} = \underline{49{,}127\ldots \%}$$

macht Pin aus

macht 1 in das

$100\% - 49{,}127\ldots\% = [\text{Verschnitt:}]$

$50{,}872\ldots\%$

A: Der Verschnitt beträgt ca. 50,872 Prozent.

10. Hausübung, am 24.10.22

7.53) c)
Wassergefäße) b)
SÜ fertig machen

7.53) c) $y = 2x - 1$; $c = 1$; $d = 3$

umf men auf x

$$\rho^*: \quad x = \frac{y+1}{2}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d \rho^{*2} \cdot dy =$$

$$V_y = \pi \cdot \int_1^3 \left[\frac{y+1}{2}\right]^2 \cdot dy$$

$$\underline{\underline{V_y = 14{,}660\ldots \, E^3}}$$

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Wassergefäße*

Aufgabennummer: B_313

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Zur Beschreibung der Form eines Wassergefäßes kann eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x - b)^4 + c$ verwendet werden.

Man kennt von dieser Funktion folgende Eigenschaften:

Der Funktionsgraph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse und enthält die Punkte (25|60) und (0|0).

– Begründen Sie, warum $c = 0$ ist.
– Begründen Sie, warum $b = 0$ ist.
– Berechnen Sie den Koeffizienten a.

b) Die Form eines Wassergefäßes kann durch Rotation des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung um die y-Achse beschrieben werden:

$y = 0{,}0001421 \cdot x^4$ mit $x \geq 0$

x, y ... Längen in cm

$y(30) = 115{,}101$ cm
(höhe)

Der obere Rand des Gefäßes hat einen Radius von 30 cm.
Das Gefäß wird bis zum oberen Rand gefüllt.

– Berechnen Sie das Volumen in Litern.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

untere Grenz: 0 cm
obere Grenze: 115,101 cm

$x(y) = \sqrt[4]{\dfrac{y}{0{,}0001421}}$

$V_y = \pi \cdot \int_0^{y(30)} \left[\sqrt[4]{\dfrac{y}{0{,}0001421}}\right]^2 \cdot dy =$

$= 216960{,}27 \text{ cm}^3$

[/1000]

$\hat{\approx} \; 216{,}960 \text{ dm}^3 \hat{=} \underline{\underline{216{,}960 \text{ L}}}$

11. Hausübung, am 04.11.2022

Freitag, 4. November 2022 10:31

11. Hausübung, am 04.11.22

Blumentopf a) 1) 2)

7.75) c)

7.79) 1) 2)

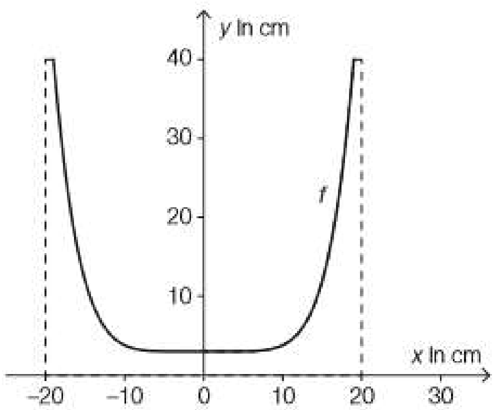
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

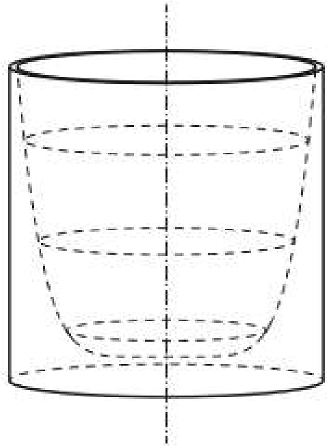
Blumentopf*

Aufgabennummer: B_474

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Unternehmen produziert Blumentöpfe.
Der Außendurchmesser eines solchen Blumentopfs beträgt 40 cm. Auch die Gesamthöhe des Blumentopfs beträgt 40 cm. (Siehe nachstehende Abbildung.)





Für die Funktion f mit $f(x) = y$ gilt:

$$y = \frac{37}{19^6} \cdot x^6 + 3 \quad \text{mit} \quad -19 \leq x \leq 19$$

1) Begründen Sie, warum f eine gerade Funktion ist.

gerade Funktionen haben nur gerade Exponenten in Potenzen mit x

Die Innenwand des Blumentopfs entsteht durch Rotation des oben dargestellten Graphen von f um die y-Achse.

2) Berechnen Sie das Innenvolumen des Blumentopfs.

Umformen: $x = 10{,}408... \cdot (y-3)^{0{,}16}$ [TI]

$V_p = \pi \cdot \int_3^{40} x^2 \cdot dy = \underline{3147{,}69... \text{ cm}^3}$ [TI]

* ehemalige Klausuraufgabe

7.75) c) $y = x^3$; $[-1;3]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot dx$$

$$s = \int_{-1}^{3} \sqrt{1+(3x^2)^2} \cdot dx =$$

$$\underline{\underline{= 29{,}205\ldots E}}$$ ✓

7.79) 1) Scheitelpunktsform:

$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$

$S(0|0)$

$f(x) = a \cdot x^2$

$P(640|150)$

$150 = a \cdot 640^2$

$\underline{a = 0{,}000366\ldots}$

$f(x) = 0{,}000366\ldots \cdot x^2$ ✓

2) $$s = \int_{-640}^{640} \sqrt{1+(0{,}000732\ldots \cdot x)^2} \cdot dx =$$

$= \underline{1325,439\ldots\,m}$ ✓

12. Hausübung, am 07.11.2022

Montag, 7. November 2022 12:16

12. Hausübung, am 07.11.22

SÜ fertig machen

6.5) a)

6.2) im Buch

7.102) 2)

6.5) a) Strecke = Flächeninhalt

$$\frac{3 \cdot 5}{2} = \underline{\underline{7{,}5\,m}}$$ ✓

6.2) $1 \rightarrow C$ ✓

$2 \rightarrow B$ ✓

7.102) 2) $v(t) = 0{,}024\,t^4 - 1{,}2\,t^2 + 15$

[TI:] solve$(v(t) = 0, t)$

$t_1 = -5$; $t_2 = 5$

$$S(t) = \int_0^5 v(t) \cdot dt = \underline{\underline{40m}}$$ ✓

A: Es geht sich in 35m nicht aus. ✓

13. Hausübung, am 18.11.2022

Freitag, 18. November 2022 10:30

13. Hausübung, am 18.11.2022

1.72)
1.75)

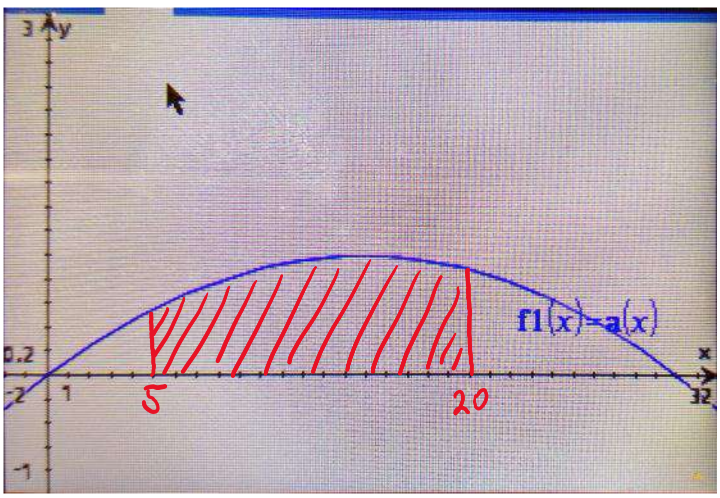
1.72) $v(t) = 10 \cdot e^{-0{,}04t}$

1) $v(0) = 10\,\frac{m}{s} \mathrel{\hat{=}} 36\,\frac{km}{h}$ ✓

2) $s = \int_0^{120} v(t)\,dt$ ✓

3) $\underline{\underline{s = 247{,}94\ldots m}}$ ✓

1.75) 1)



✓

$\int^{20}$

Änderung d. Geschwindigkeit

2) $\int_{5}^{20} a(t) \cdot dt \rightarrow$ Ânderung d. Geschwindigkeit im Intervall $[5;20]$

3) $v(0) = 0$

$v(t) = \int a(t)\, dt$

$v(t) = \dfrac{-t^2 \cdot (t-45)}{675} + 0$

4) A: $a(t)$ ist im Intervall $[0;30]$ immer positiv weshalb die Geschwindigkeit, sprich das Integral, stets zunimmt (bzw. gleich bleibt, wenn $a(t)=0$)

14. Hausübung, am 21.11.2022

Montag, 21. November 2022 12:17

14. Hausübung, am 21.11.2022

4.25) [3. Klasse]

4.25)

4.25 Durch die angegebenen Funktionen werden Bewegungen beschrieben. Es gilt:
t ... Zeit in s; s(t) ... Weg zum Zeitpunkt t in m bzw. h(t) ... Höhe zum Zeitpunkt t in m

1) Berechne die mittlere Geschwindigkeit im angegebenen Intervall.

2) Ermittle die Momentangeschwindigkeit am Anfang des angegebenen Intervalls.

a) $s(t) = 100 + 2t^2$ [0 s; 3 s]

b) $h(t) = -5t^2$ [1,5 s; 3,5 s]

c) $h(t) = -5t^2 + 4t + 3$ [0,25 s; 1,5 s]

d) $s(t) = 2 + 15t + 0{,}5t^2$ [0 s; 5 s]

a) $\frac{s(3)-s(0)}{3-0} = 6\,\frac{m}{s}$ ✓

$v(0) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 0\,\frac{m}{s}$ ✓

b) $\frac{h(3{,}5)-h(1{,}5)}{3{,}5-1{,}5} = -25\,\frac{m}{s}$ ✓

$v(1{,}5) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -15\,\frac{m}{s}$ ✓

c) $\frac{h(1{,}5)-h(0{,}25)}{1{,}5-0{,}25} = -4{,}75\,\frac{m}{s}$ ✓

$$v(0{,}25) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 1{,}5\,\frac{m}{s}$$

d) $$\frac{s(5)-s(0)}{5} = 17{,}5\,\frac{m}{s}$$

$$v(0) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 15\,\frac{m}{s}$$

15. Hausübung, am 28.11.22

4.24)
7.96)

TI, Stückweise definierte Funktion

4.24) 1) $\bar{v}(t) = \frac{6,5-2}{200} = 0,0225 \frac{m}{s^2}$ ✓

mittlere Beschleunigung in [700; 900]

2) [300; 500] ✓

3) A: Dass die mittlere Änderungsrate einen negativen Wert annimmt. ✓

4) $0 \frac{m}{s^2}$ ✓

7.96) 1) Rückwärts fahren / andere Richtung fahren ✓

2) $m = \frac{1}{b-a} \cdot \boxed{\int_a^b v(t) \cdot dt}$

Flächeninhalt

Flächeninhalt einzeln berechnen:

$A_1 = \frac{1}{60} \cdot 60 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ km

$A_2 = \frac{4}{60} \cdot 60 = 4$ km

$A_3 = \frac{1}{2}$ km

$A_3 = \frac{1}{2}\,km$

$A_4 = \frac{1}{60} \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,km$

$A_5 = \frac{1}{60} \cdot 20 = \frac{1}{3}\,km$

$A = \sum_{i=1}^{5} A_i$

$\underline{\underline{A = 5{,}5\,km}}$ ✓

$s = v \cdot t$

$v = \frac{s}{t}$

$v = \frac{5{,}5}{\frac{8}{60}} = \underline{\underline{41{,}25\,\frac{km}{h}}}$ ✓

3) zurückgelegter Weg: 5,5 km ✓

Entfernung zum Startpunkt: $A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5 = 4{,}5\,km$ ✓

17. Hausübung, am 16.12.2022

Freitag, 16. Dezember 2022 10:30

17. Hausübung, am 16.12.22

2.3 / b

$b = 2x - 3y + 5z$ → Addition / Subtraktion

$x = 3 \pm 0{,}1$
$y = 6 \pm 0{,}2$
$z = 8 \pm 0{,}3$

absoluter Fehler:

$$c_{max} = 2 \cdot |\Delta x| + 3 \cdot |\Delta y| + 5 \cdot |\Delta z|$$

$$c_{max} = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}5$$

$$\underline{\underline{c_{max} = 2{,}3}}$$ ✓

relativer Fehler:

$$c_0 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 28$$ ✓

c_0

$$\left|\frac{\Delta c}{c_0}\right| = \left|\frac{2{,}3}{28}\right| = \underline{\underline{8{,}214\ldots\%}} \checkmark$$

18. Hausübung, am 09.01.2023

Monday, January 9, 2023 12:12 PM

18. HÜ, am 9.1.23

2.4) a, b

2.27) b, c händisch

2.28) b

2.4) a) $a = x^2 \cdot y$

$x = 5 \pm 0{,}2$

$y = 6 \pm 0{,}1$

relativer Potenzfehler:

$a = z \cdot y$

$\frac{\Delta z}{z} = n \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = 2 \cdot \left|\frac{0{,}2}{5}\right| = 0{,}08 \cdot \underset{(x_0)}{5^2} = \underline{\underline{2}}$

$\underline{z = 25 \pm 2}$ ✓

neuer relativer Fehler:

$$\frac{\Delta a}{a} = \left|\frac{\Delta z}{z}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \left|\frac{2}{25}\right| + \left|\frac{0{,}1}{6}\right| \mathrel{\hat{=}} 9{,}\dot{6}\,\% \ ✓ \quad \left(\frac{145}{1500}\right)$$

neuen absoluten Fehler:

$$a_0 = 5^2 \cdot 6 = 150$$

$$\underline{a = 150 \pm 14{,}5} \ ✓$$

b) $b = \frac{x}{y}$

$$x = 5 \pm 0{,}2$$
$$y = 6 \pm 0{,}1$$

neuen relativen Fehler:

$$\frac{\Delta b}{b} = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

$$= \left|\frac{0{,}2}{5}\right| + \left|\frac{0{,}1}{6}\right| = 5{,}\dot{6}\,\% \ ✓ \quad \left(\frac{17}{300}\right)$$

neuer absoluter Fehler

5

$$b_0 = \frac{5}{6}$$

$$\Delta b = 5{,}\dot{6}\,\% \cdot \frac{5}{6} = 0{,}047\dot{2} \qquad \left(\frac{85}{1800}\right)$$

$$\underline{b = \frac{5}{6} \pm \frac{85}{1800}}$$

2.27 b) $z = \dfrac{e^{3xy}}{2x+3y}$

$$P_x: \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^{3xy} \cdot 3y \cdot [2x+3y] - e^{3xy} \cdot 2}{[2x+3y]^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3y \cdot e^{3xy} \cdot (2x+3y) - 2e^{3xy}}{(2x+3y)^2}$$

$$P_y: \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{3xy} \cdot 3x \cdot (2x+3y) - 3e^{3xy}}{(2x+3y)^2}$$

c) $z = \sqrt{3x^2y + 2xy^2}$

f_x: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6xy + 2y^2}{2\sqrt{3x^2y + 2xy^2}}$

f_y: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x^2 + 4xy}{2\sqrt{3x^2y + 2xy^2}}$

2.28) b $\quad W(v,\alpha) = \frac{v^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$

f_v: $\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{2v \cdot \sin(2\alpha)}{g}$ ✓

f_α: $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{2v^2 \cdot \cos(2\alpha)}{g}$ ✓

19. Hausübung, am 13.01.23

2.36) b

$$f(x,y) = 7e^{-2y} \cdot \sin(4x^2 + y^2)$$

$$f_x = 7e^{-2y} \cdot \cos(4x^2 + y^2) \cdot 8x$$

$$f_{xx} = 7e^{-2y} \cdot \left[-\sin(4x^2+y^2) \cdot 64x^2 + \cos(4x^2+y^2) \cdot 8 \right]$$

$$f_y : 7e^{-2y} \cdot -2 \cdot \sin(4x^2+y^2) + 7e^{-2y} \cdot \cos(4x^2+y^2) \cdot 2y$$

$$f_{yy} : -2 \cdot \left[7e^{-2y} \cdot -2 \cdot \sin(4x^2+y^2) + \right.$$

$$\left. + 7e^{-2y} \cdot \cos(4x^2+y^2) \cdot 2y \right] +$$

$$+ 7e^{-2y} \cdot -2 \cdot \cos(4x^2+y^2) \cdot 2y -$$

$$- 7e^{-2y} \cdot \sin(4x^2+y^2) \cdot 2y \cdot 2y +$$

$$+ 7e^{-2y} \cdot \cos(4x^2+y^2) \cdot 2$$

20. Hausübung, am 23.01.2023

Monday, January 23, 2023 12:17 PM

20. Hausübung, am 23.01.2023

2.42)

2.42 Eine stetige Funktion z = f(x, y) hat im Punkt P ein Extremum. Ordne den folgenden Behauptungen die richtige Bedingung zu.

1	P ist ein Minimum.	C ✓
2	P ist ein Maximum.	A ✓

A	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ und $f_{xx} < 0$
B	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ und $f_{xx} < 0$
C	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ und $f_{xx} > 0$
D	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ und $f_{xx} > 0$

21. Hausübung, am 27.01.2023

Friday, January 27, 2023 10:29 AM

21. Hausübung, am 27.01.2023

2.43/b)

2.53/b)

2.56)

2.43) b) $z = -6x^2 - 8y^2 + 3xy - 6$

$f_x = -12x + 3y$ $f_y = -16y + 3x$

$f_{xx} = -12$ $f_{yy} = -16$

$f_{xy} = 3$

$\text{I}: -12x + 3y = 0$

$\text{II}: -16y + 3x = 0$

$x = 0 \quad y = 0$ ✓

① $x = 0;\ y = 0$

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = -12 \cdot -16 - 3^2 = 183 > 0$

↳ Extrempunkt

$f_{xx} = -12 < 0 \rightarrow$ Hochpunkt ✓

$H(0,0,-6)$ ✓

2.53) b) $z = 2yx^3 + 6xy^2 + 3x - 4y$

$f_x = 6yx^2 + 6y^2 + 3$

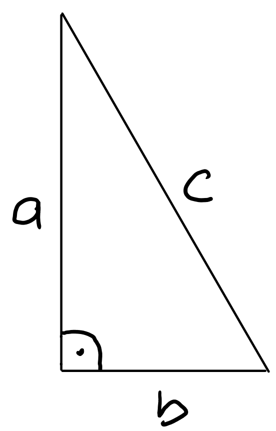
$f_y = 2x^3 + 12xy - 4$

$\Delta z_{max} \mathrel{\hat{=}} dz = [6yx^2 + 6y^2 + 3] \cdot dx + [2x^3 + 12xy - 4] \cdot dy$ ✓

2.56) $a(c,b) = \sqrt{c^2 - b^2}$

$c = 192 \pm 0{,}4$

$a = 120 \pm 0{,}2$



$a_c = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - b^2}}$ ✓

$a_b = \dfrac{-b}{\sqrt{c^2 - b^2}}$ ✓

$\Delta a_{max} = |a_c \cdot \Delta c| + |a_b \cdot \Delta b|$

$\underline{0{,}67 \ldots \text{ cm}}$

$$a_0 = \sqrt{192^2 - 120^2} = \underline{149{,}88\ cm}$$ ✓

$$a = (149{,}88\ldots \pm 0{,}67\ldots)\ cm$$ ✓

22. Hausübung, am 13.02.2023

Monday, February 13, 2023 12:17 PM

22. Hausübung, am 13.02.2023

3.24) a) → Tabelle

3.25)

3.24) a) $f(x) = \tan(x)$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + \frac{17 \cdot x^7}{315} + \dots$$

$$P_4(x) = x + \frac{x^3}{3}$$

rad: $P_5(\frac{\pi}{4}) = 0{,}9488\dots$ / $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

$P_5(-1) = -1{,}33$ / $\tan(-1) = -1{,}557\dots$

deg: $P_5(-1) = -1{,}33$ / $\tan(-1) = -0{,}01745\dots$

→ Polynomfunktionen sind nicht von RAD/DEG abhängig!

3.25) $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = e^x$

Taylorreihe:

$$P_{5,1}(x) = e^1 + e^1 \cdot (x-1) + \frac{e^1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{e^1}{6} \cdot (x-1)^3 + \frac{e^1}{24} \cdot (x-1)^4 + \frac{e^1}{120} (x-1)^5$$

2,718...

$$P_{5,2{,}7}(x) = e^{2{,}7} + e^{2{,}7} \cdot (x-2{,}7) + \frac{e^{2{,}7}}{2} (x-2{,}7)^2 + \frac{e^{2{,}7}}{6} (x-2{,}7)^3 + \frac{e^{2{,}7}}{24} (x-2{,}7)^4 + \frac{e^{2{,}7}}{120} (x-2{,}7)^5$$

14,8797...

23. Hausübung, am 17.02.2023

3.44) Unterschiede zu $\sin(x)$

a) $y = 3 \cdot \sin(x)$

alle Werte verdreifacht → gestreckt ✓

b) $y = \sin(x) + 2$

2 nach oben verschoben ✓

c) $y = \sin(4x)$

Periode 4x kürzer, weil 4x schneller ✓

d) $y = 5 \cdot \sin(x-2)$

Werte mal 5 und 2 nach rechts ✓

e) $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Periode verdoppelt ✓

f) $y = 0{,}5 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

Sinus "zusammengedrückt" / halbiert Amplitude ✓

um $\frac{\pi}{3}$ nach links verschoben ✓

und 1 nach unten verschoben ✓

24. Hausübung, am 20.02.2023

Monday, February 20, 2023 12:14 PM

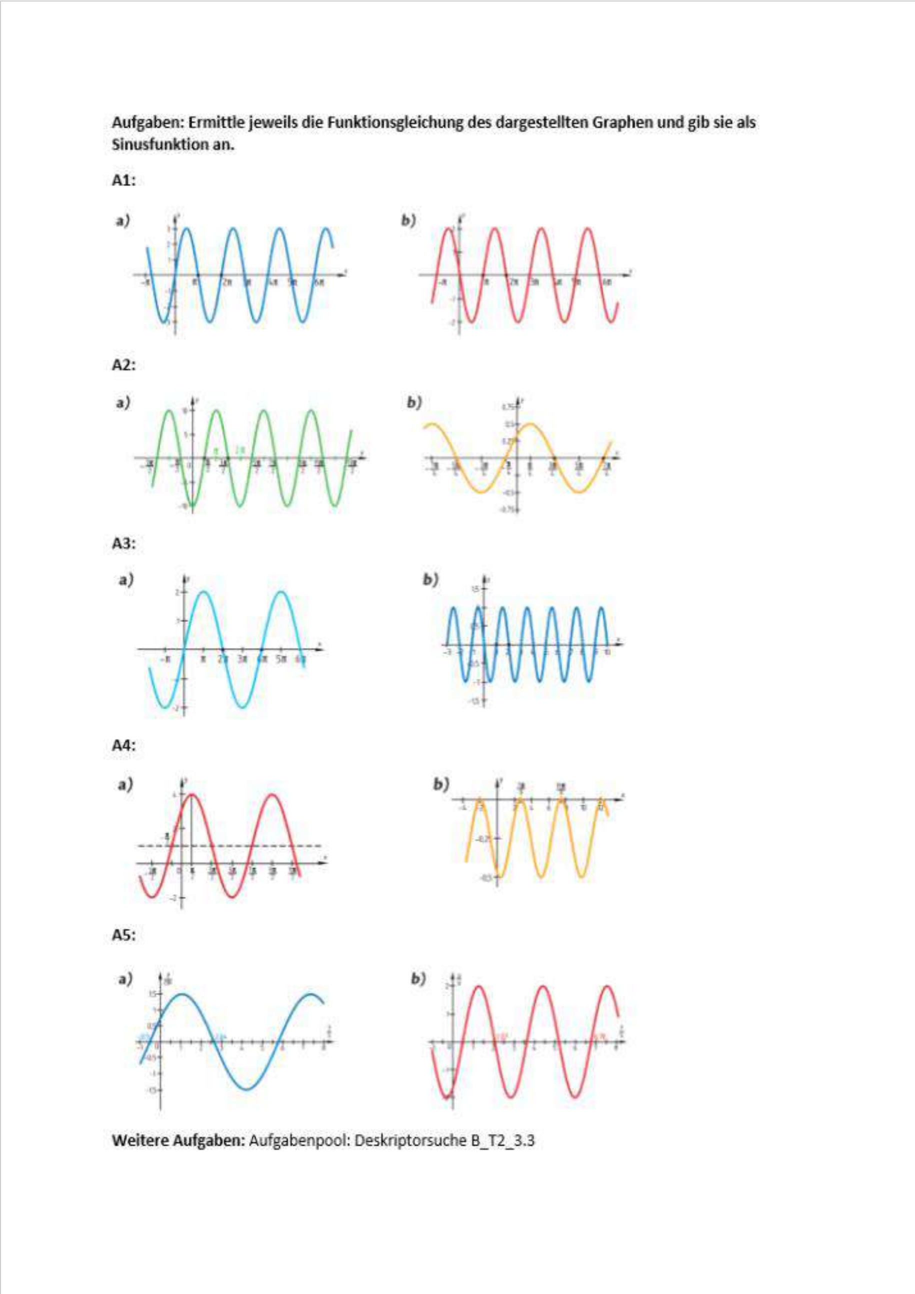
24. Hausübung, am 20.02.2023

A2/b)

A3/b)

Wasserskiwettbewerb b)

3.43) b)



Aufgaben: Ermittle jeweils die Funktionsgleichung des dargestellten Graphen und gib sie als Sinusfunktion an.

A1:

a) b)

A2:

a) b)

A3:

a) b)

A4:

a) b)

A5:

a) b)

Weitere Aufgaben: Aufgabenpool: Deskriptorsuche B_T2_3.3

A2/b) $y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$

$a = 0{,}5$

$b = 1 \quad \left(\frac{2\pi}{2\pi}\right)$

$c = \frac{\pi}{4}$

$d = 0$

$y = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

A3/b) $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$

$a = 1$

$b = \pi \quad \left(\frac{2\pi}{2}\right)$

$d = 0$

$y = \sin(\pi x + c)$

$P(1|0)$

$0 = \sin(\pi + c)$

$c = \pi$

$\underline{y = \sin(\pi x + \pi)}$

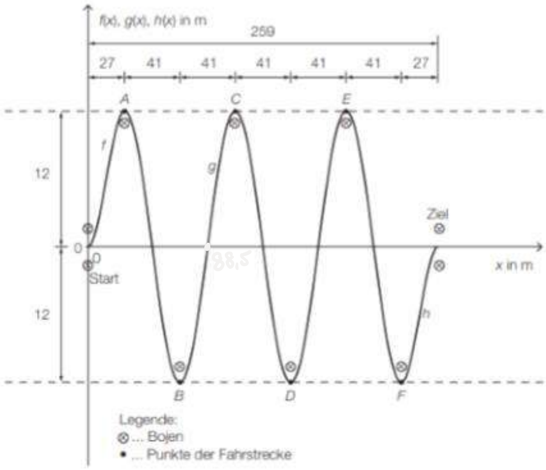
Bsp:

Wasserski-Wettbewerb (2)*

Aufgabennummer: B_471

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Wasserski-Wettbewerb muss ein Slalom um 6 Bojen gefahren werden (siehe nachstehende Abbildung).



In einem vereinfachten Modell kann die Bahn einer Wasserskifahrerin abschnittsweise durch die Graphen dreier Funktionen beschrieben werden:

Funktion f ... vom Start bis zum Punkt A
Funktion g ... vom Punkt A bis zum Punkt F
Funktion h ... vom Punkt F bis ins Ziel
x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m

b) Die Bahn der Wasserskifahrerin zwischen den Punkten A und F kann mithilfe des Graphen der Funktion g beschrieben werden.

Es gilt: $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$

1) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c.

$a = 12$

$b = \frac{2\pi}{82} = 0{,}0766..$

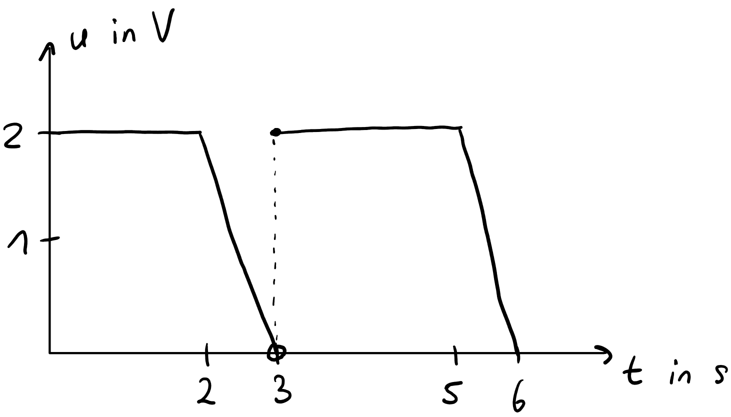
$c = -0{,}498...$

$y = 12\sin\left(\frac{2\pi}{82}x + c\right)$ / $P(88{,}5|0)$

$0 = 12\sin\left(\frac{2\pi}{82} \cdot 88{,}5 + c\right)$

$c = -0{,}498...$

3.43) b)



$T = 3s$

$$v(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le x < 2 \\ -2x+6 & \text{für } 2 \le x < 3 \end{cases}$$

25. Hausübung, am 27.02.23

3.51) c)

$T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -\frac{2}{\pi}x + 4 & \text{für } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} 2 \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\frac{2}{\pi} x + 4\right) dx \right] =$$

$$= 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} 2 \cdot \cos(nx) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\frac{2}{\pi} x + 4\right) \cos(nx) \, dx \right] =$$

$$= \frac{-2 \cdot (\cos(2n\pi) - \cos(n\pi))}{n^2 \pi^2}$$

$a_1 = -\frac{4}{\pi^2}$ $\quad a_2 = 0$ $\quad a_3 = -\frac{4}{9\pi^2}$ $\quad a_4 = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx =$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} 2 \cdot \sin(nx)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\frac{2}{\pi}x + 4\right) \cdot \sin(nx)\, dx \right]$$

$$= \frac{-2 \cdot (\sin(2n\pi) - \sin(n\pi) - n\pi)}{n^2 \pi^2}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \quad b_2 = \frac{1}{\pi} \quad b_3 = \frac{2}{3\pi} \quad b_4 = \frac{1}{2\pi}$$

Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \cos(x) + \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{1}{\pi} \cdot \sin(2x) -$$

$$- \frac{4}{9\pi^2} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{1}{2\pi} \sin(4x) + \ldots$$

26. Hausübung, am 03.03.2023

Friday, March 3, 2023 10:22 AM

26. Hausübung, am 3.3.23

4.6) → Buch

4.10) b)

4.6) Änderung d. Luftdrucks p abhängig von Höhe h direkt proportional zum Luftdruck in jeweiliger Höhe

$$C: \quad \frac{dp}{dh} = k \cdot p$$ ✓

4.10) b) $$\frac{dd}{dt} = d(t) \cdot k$$ ✓

27. Hausübung, am 06.03.2023

Monday, March 6, 2023 11:21 AM

27. Hausübung, am 6.3.23

4.13) b)

4.17) b)

4.13) b)

$$y' = 4x^2 - 3x + \frac{1}{x}$$

$$\underline{y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C}$$ ✓

4.17) b)

$$y'' = 2\sqrt{x} + 4x^3 - 1$$

$$y(0) = 4$$

$$y'(1) = -\frac{1}{3}$$

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^4 - x + C_1$$

$$\underline{y = \frac{8}{15}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2}$$ ✓

allgemein Lösung

$C_2 = 4$

$C_1 = -\frac{5}{3}$

$$y = \frac{8}{15} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{3} x + 4$$

spezielle Lösung

28. Hausübung, am 10.03.2023

Friday, March 10, 2023 10:31 AM

28. Hausübung, am 10.03.2023

4.27) a)
4.28) b)
4.29) b)
4.31) b)
4.32) a)

4.27) a) $$-5 \cdot \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$-5 \cdot \frac{dy}{dx} = -4y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{5}$$

$$\frac{1}{4y}\, dy = \frac{1}{5}\, dx$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{5}\, dx$$

$$\frac{1}{4} \cdot \ln|y| + C_1 = \frac{1}{5} x + C_2$$

$$\frac{1}{4} \cdot \ln|y| + C_1 = \frac{1}{5}x + C_2$$

$$\frac{1}{4}\ln|y| = \frac{1}{5}x + \tilde{C}$$

$$\ln|y| = \frac{4}{5}x + \tilde{\tilde{C}}$$

$$|y| = e^{\frac{4}{5}x} \cdot C$$

$$\underline{y(x) = e^{\frac{4}{5}x} \cdot C}$$

allgemeine Lösung

4.28)b) $2y' - 3x^2 \cdot y = 0$

$$2y' = 3x^2 y$$

$$y' = \frac{3x^2 y}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 y}{2} \qquad \Big| \cdot dx \quad : y$$

$$\frac{1}{y}\, dy = \frac{3x^2}{2}\, dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{3x^2}{2}\, dx$$

$$\ln|y| + C_1 = \frac{x^3}{2} + C_2$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{2} + \tilde{C} \qquad \Big| e^{\wedge}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2} \cdot x^3} \cdot C$$

$$\underline{y(x) = e^{\frac{1}{2}x^3} \cdot C}$$

allgemeine Lösung

4.29) b) $y' + 3y \cdot \cos(x) = 0$

$$y' = -3y \cdot \cos(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -3y \cdot \cos(x)$$

$$\frac{1}{y}\, dy = -3 \cdot \cos(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -3 \int \cos(x)\, dx$$

$$\ln|y| + C_1 = -3\sin(x) + C_2$$

$$\ln|y| = -3\sin(x) + \tilde{C} \qquad | \, e^1$$

$$|y| = e^{-3\sin(x)} \cdot C$$

$$\underline{y(x) = e^{-3\sin(x)} \cdot C} \checkmark$$

allgemeine Lösung

4.31) b) $y' = y + 2$

$$\frac{dy}{dx} = y + 2$$

$$\frac{1}{y+2}\, dy = dx$$

$$\int \frac{1}{y+2}\, dy = \int dx$$

$$\ln|y+2| + C_1 = x + C_2$$

$$\ln|y+2| + C_1 = x + C_2$$

$$\ln|y+2| = x + \tilde{C}$$

$$|y+2| = e^x \cdot C$$

$$y+2 = e^x \cdot C \qquad | -2$$

$$\underline{y(x) = C e^x - 2}$$ ✓

allgemeine Lösung

4.32) a) $e^x \cdot y' + y = 0$

$$e^x \cdot y' = -y$$

$$y' = -\frac{y}{e^x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{e^x}$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{e^x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{1}{e^x}\,dx \qquad \int -e^{-x}\,dx$$

$$-(-e^{-x})$$

$$\ln|y| + C_1 = e^{-x} + C_2$$

$$\ln|y| = e^{-x} + \tilde{C}$$

$$|y| = e^{e^{-x}} \cdot C$$

$$\underline{y(x) = e^{e^{-x}} \cdot C}$$

allgemeine Lösung

29. Hausübung, am 17.03.2023

Friday, March 17, 2023 10:33 AM

29. Hausübung, am 17.03.2023

4.31) a)

4.36)

4.38)

4.31) a) $y' = 2 \cdot (5-y)$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot (5-y) \qquad | :(5-y) \quad | \cdot dx$$

$$\frac{dy}{5-y} = 2\,dx$$

$$\int \frac{dy}{5-y} = \int 2\,dx$$

$$-\ln|5-y| = 2x + \tilde{C} \qquad | \cdot (-1)$$

$$\ln|5-y| = -2x - \tilde{C}$$

$$5-y = e^{-2x} \cdot C \qquad | -5$$

$$-y = e^{-2x} \cdot C - 5 \qquad | \cdot (-1)$$

$$y = 5 - e^{-2x} \cdot C$$

$$\underline{y(x) = 5 - e^{-2x} \cdot C}$$

4.36) 1) $N'(t) = -k \cdot N(t)$ beschreibt eine exponentielle Abnahme, da die Ableitung von $N(t)$ zu jedem Zeitpunkt t negativ sein muss, solange $N(t)$ nur positive Werte beinhaltet. Das Minus vor der Konstanten k sorgt für dieses abnehmende Verhalten.

2) $$N' = -k \cdot N$$

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N \qquad | \cdot N \quad | \cdot dt$$

$$\frac{1}{N} dN = -k \cdot dt \qquad | \int$$

$$\int \frac{1}{N} dN = -k \cdot \int dt$$

$$\ln|N| = -k \cdot t + \tilde{C} \qquad | e^{\wedge}$$

$$|N| = e^{-k \cdot t} \cdot C$$

$$\underline{N(t) = e^{-k \cdot t} \cdot C}$$

allgemeine Lösung

Anfangsbedingung: $N(0) = N_0$

$N_0 = e^0 \cdot C$ $\qquad$ $e^0 = 1$

$\underline{C = N_0}$

$\underline{N(t) = e^{-k \cdot t} \cdot N_0}$

spezifische Lösung

4.38) $y'(t) = 0{,}008 \cdot (60 - y(t))$

1) Es handelt sich um ein beschränktes Wachstum, da k positiv, K der Minuend und $y(t)$ der Subtrahend sind.

2) $y'(t) = 0{,}008 \cdot (60 - y(t))$

$y' = 0{,}008 \cdot (60 - y)$

$\frac{dy}{dt} = 0{,}008 \cdot (60-y) \qquad | : (60-y) \quad | \cdot dt$

$\frac{1}{60-y} \, dy = 0{,}008 \, dt \qquad | \int$

$$\int \frac{1}{60-y}\,dy = 0{,}008 \int dt$$

$$-\ln|60-y| = 0{,}008\,t + \tilde{C} \quad | \cdot(-1)$$

$$\ln|60-y| = -0{,}008t - \tilde{C}$$

$$|60-y| = e^{-0{,}008t} \cdot C$$

$$60-y = e^{-0{,}008t} \cdot C \quad | -60$$

$$-y = e^{-0{,}008t} \cdot C - 60 \quad | \cdot(-1)$$

$$\underline{y(x) = 60 - e^{-0{,}008t} \cdot C}$$

allgemeine Lösung

$$y(0) = 15 m^3$$

$$15 = 60 - e^0 \cdot C \qquad e^0 = 1$$

$$C = 60 - 15$$

$$\underline{C = 45}$$

$$\underline{y(t) = 60 - e^{-0{,}008t} \cdot 45}$$

spezifische Lösung

spezifische Lösung

3) Langfristig kann mit $60 m^3$ Wasser gerechnet werden, da $e^{-0,008t}$ nach 0 geht, wenn t nach ∞ geht.

30. Hausübung, am 24.03.2023

Friday, March 24, 2023 10:29 AM

30. Hausübung, am 24.03.2023

4.41) $F_R = 30 \frac{kg}{s} \cdot v$

$m = 54 kg$

$v(0) = 36 \frac{km}{h}$

1) $ma = F_A - bv$

$F_R = bv$

$\underline{b = 30 \frac{kg}{s}}$ ✓

$$m \frac{dv}{dt} = -bv$$

$$\underline{v(t) = e^{-\frac{b}{m}t} \cdot C}$$

$$\underline{v(t) = e^{-\frac{30}{54}t} \cdot C}$$ ✓

allgemeine Lösung

2) $v(0) = 36 \frac{km}{h} \hat{=} 10 \frac{m}{s}$

$\underline{C = 10}$

$v(t) = 10 e^{-\frac{30}{54}t}$ ✓

$$v(t) = 10\,e^{-\frac{[illegible]}{54}t}$$

spezifische Lösung

4) $$s = \int_0^{\infty} v(t)\,dt = \underline{\underline{18\,m}}$$

Weg 15m bei:

$$15 = \int_0^{t} v(t)\,dt$$

$$t = \underline{3{,}2255}$$

31. Hausübung, am 27.03.2023

Monday, March 27, 2023 12:14 PM

31. Hausübung, am 27.03.2023

4.43) im Buch
4.44)
4.45)

4.43) 1) $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T(t) - 24)$

$T(0) = 6°C$

↳ Abkühlung

2) $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T(t) - 24)$

$T(0) = 40°C$

↳ Abkühlung

3) $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (24 - T(t))$

$T(0) = 40°C$

↳ Erwärmung

4) $\frac{dT}{dt} = k \cdot (24 - T(t))$

$T(0) = 6°C$

↳ Erwärmung

4.44) $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - 20)$

$T(t) = C \cdot e^{kt} + 20$

allgemeine Lösung

$T(0) = 160°C$

$T(5) = 100°C$

$160 = C + 20 \rightarrow C = 140$

$100 = 140 \cdot e^{5k} + 20$

$k = -0{,}1119...$ → TI: solve()

$T(t) = 140 \cdot e^{-0{,}1119... t} + 20$

spezifische Lösung

2) $T(t) = 30$

$t = 23{,}579...$ min

A: After about 23 and a half minute, the thing is cooled down to 30 degree.

4.45) 1)

Erwärmung

$$\underbrace{\frac{dT}{dt}}_{>0} = \underbrace{k}_{>0} \cdot \underbrace{(T_U \overset{>}{-} T)}_{>0}$$

$\Rightarrow$ Erwärmung

$$\int \frac{1}{T_U - T}\, dT = k \int dt$$

$$-\ln|T_U - T| = kt + \tilde{C}$$

$$-(T_U - T) = e^{kt} \cdot C$$

$$T_U - T = -C \cdot e^{kt}$$

$$-T = -C \cdot e^{kt} + T_U$$

$$T(t) = \underline{C \cdot e^{kt} - T_U}$$

$$T(t) = T_U - C \cdot e^{-kt}$$

allgemeine Lösung

ist gleich, wenn Differenzialgleichung so lauten würde:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_U)$$

2) Bedingung: $T(0) = T_0$

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= T_U - C \\ C &= T_U - T_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T(t) = T_U - e^{-kt} \cdot (T_U - T_0)$$

spezifische Lösung

$C = T_U - T_0$

spezifische Lösung

32. Hausübung, am 31.03.2023

4.49)

Kondensator
Elektromagnetische Strahlung

4.49) Insgesamt: $64 m^3 \hat{=} 64\,000\, L$

Salzgehalt t_0: 1%

Zufluss: $10 \frac{L}{min} \cdot 0\%$ ✓

Abfluss: $10 \frac{L}{min} \cdot \frac{m(t)}{64\,000}$ ✓

1) da reines Wasser zufließt, erhält man:

$$\frac{dm}{dt} = -10 \cdot \frac{m}{64\,000}$$

m(t) ist Salzmenge in dm^3

die Salzmenge nimmt nämlich nur ab ✓

1.5) Differenzialgleichung lösen:

$$\frac{dm}{dt} = -10 \cdot \frac{m}{64\,000}$$

$$\int \frac{1}{m}\,dm = -\frac{1}{6400}\int dt$$

$$\ln|m| = -\frac{t}{6400} + \tilde{C}$$

$$m(t) = e^{-t/6400}\cdot C$$

allgemeine Lösung

2) $m(0) = 64000 \cdot 0{,}01 = \underline{640\ kg}$

↳ $C = 640$

$$m(t) = 640e^{-t/6400}$$

spezielle Lösung

3) $m(t) = 64000 \cdot 0{,}006 = 384\ kg$

TI: solve(…, t)

↳ $t = 3269{,}284\ldots\ min \mathrel{\hat{\approx}} 54h$

$m(3269{,}284\ldots) = 384\ kg$

A: Es müssen ca. 32693 L Wasser nachgefüllt werden, damit nach 54h nur mehr 0,6 % Salz im Pool sind.

Kondensator:

Kondensator * (B_496)

Ein Kondensator ist ein elektronisches Bauelement, das mithilfe einer Batterie aufgeladen werden kann. Ist der Kondensator bei einem Aufladevorgang zu Beginn ungeladen, so kann der Verlauf der Kondensatorspannung durch die Funktion u beschrieben werden.

$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Kondensatorspannung zur Zeit t in Volt (V)
U_0 ... Spannung der Batterie (konstant) in V
τ ... Zeitkonstante in s

a) Die zugehörige Differenzialgleichung für die Kondensatorspannung u lautet:

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = U_0$$

1) Berechnen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differenzialgleichung für die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ der oben angegebenen Funktion u entspricht.

Lösung ausblenden

Lösung: Kondensator * (B_496)

a1) $\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = U_0$

$$\int \frac{u'}{U_0 - u} dt = \int \frac{1}{\tau} dt \quad \left(oder: \int \frac{du}{U_0 - u} = \int \frac{1}{\tau} dt\right)$$

$$-\ln|U_0 - u(t)| = \frac{t}{\tau} + C_1$$

$$U_0 - u(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(t) = U_0 - C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

a2) $u(0) = 0$ *oder* $U_0 - C \cdot e^0 = 0 \Rightarrow C = U_0$

$$u(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

a) 1) $\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = U_0 \qquad | -u$

$\tau \cdot \frac{du}{dt} = U_0 - u \qquad | : (U_0 - u)$

$\frac{1}{U_0 - u} \cdot \tau \cdot \frac{du}{dt} = 0 \qquad | : \tau \quad : dt$

$\frac{1}{U_0 - u} \cdot du = \frac{1}{\tau} dt$ ✓

$\int \frac{1}{U_0 - u} du = \frac{1}{\tau} \int dt$

$-\ln|U_0 - u| = \frac{t}{\tau} + \tilde{C}$ ✓

$\ln|U_0 - u| = \tilde{C} - \frac{t}{\tau}$

$U_0 - u = C \cdot e^{-t/\tau}$

$-u = C \cdot e^{-t/\tau} - U_0$

$u(t) = U_0 - C \cdot e^{-t/\tau}$ ✓

allgemeine Lösung

$u(0) = 0$

$0 = U_0 - C$

$C = U_0$ ✓

$u(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-t/\tau}$

$u(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$ ✓

spezielle Lösung

Elektromagnetische Strahlung * (B_487)

a) Beim Eindringen von elektromagnetischer Strahlung in ein Medium nimmt die Intensität mit der Eindringtiefe ab. Die Funktion E beschreibt die Intensität der Strahlung in Abhängigkeit von der Eindringtiefe.

x ... Eindringtiefe in m
$E(x)$ ... Intensität bei der Eindringtiefe x in Watt pro Quadratmeter (W/m²)

Die 1. Ableitung der Funktion E nach der Eindringtiefe x ist proportional zur Funktion E.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Differenzialgleichung. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-k$ ($k > 0$).

$\frac{dE}{dx} = -k \cdot E$ ✓

Beim Durchgang von Strahlung durch ein Medium treten Störeinflüsse auf. Diese Störeinflüsse werden durch Addition einer Konstanten S auf der rechten Seite der Differenzialgleichung berücksichtigt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

Lösung ausblenden

Lösung: Elektromagnetische Strahlung * (B_487)

a1) $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E$

a2) Differenzialgleichung mit Störfunktion S: $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E + S$

Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*:

$$\frac{dE}{-k \cdot E + S} = dx \quad \left(\text{oder: } \frac{E'}{-k \cdot E + S} = 1\right)$$

$$\int \frac{dE}{-k \cdot E + S} = \int dx \quad \left(\text{oder: } \int \frac{E'(x)}{-k \cdot E(x) + S}\,dx = \int 1\,dx\right)$$

$$\frac{\ln|-k \cdot E(x) + S|}{-k} = x + C_1$$

$$-k \cdot E(x) + S = C_2 \cdot e^{-k \cdot x}$$

$$E(x) = C \cdot e^{-k \cdot x} + \frac{S}{k}$$

2) $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E + S \quad \Big| : (-kE + S) \quad \Big| \cdot dx$

2) $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E + S \qquad \Big| : (-kE+S) \quad \Big| \cdot dx$

$$\frac{1}{-kE+S}\, dE = dx$$

$$\int \frac{1}{-kE+S}\, dE = \int dx$$

$$\frac{\ln|-kE+S|}{-k} = x + \tilde{C}$$

$$\frac{d(\ln|-kE+S|)}{dE} = \frac{1}{-kE+S} \cdot -k$$

$$\ln|-kE+S| = -kx + \tilde{\tilde{C}}$$

C schluckt

$$-kE+S = e^{-kx} \cdot C_1$$

$$-kE = e^{-kx} \cdot C_1 - S$$

C schluckt

$$E(x) = e^{-kx} \cdot C + \frac{S}{k}$$

✓

allgemeine Lösung

33. Hausübung, am 14.04.2023

Friday, April 14, 2023 10:30 AM

33. Hausübung, am 14.04.23

4.53) b) + Probe

4.53) b) $3y' + 9y = 0 \quad | :3$

$y' + 3y = 0$ => homogen

$y(x) = C \cdot e^{-3x}$ ✓

Probe: $y'(x) = C \cdot e^{-3x} \cdot (-3)$

$3 \cdot C \cdot e^{-3x} \cdot (-3) + 9 \cdot C \cdot e^{-3x} = 0$

$-9 \cdot C \cdot e^{-3x} + 9 \cdot C \cdot e^{-3x} = 0$

$0 = 0$ ✓✓

34. Hausübung, am 21.04.2023

4.55) c)
4.57) e)

4.55) c) $y' + 0{,}5y = 2e^{-2t}$

homogene Lösung y_h:

$$y(t) = C \cdot e^{-0{,}5x}$$

partikuläre Lösung y_p:

$$s(t) = 2e^{-2t}$$

$$y_p = A \cdot e^{bx}$$

$$y_p = A \cdot e^{-2t}$$

$$y_p' = A \cdot e^{-2t} \cdot -2$$

$$A \cdot e^{-2t} \cdot -2 + 0{,}5 \cdot A \cdot e^{-2t} = 2e^{-2t} \qquad | : e^{-2t}$$

$$-2A + 0{,}5A = 2$$

$$-1{,}5A = 2$$

$$A = -\frac{20}{15} = -\frac{4}{3}$$

$$y_p = -\frac{4}{3} e^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C \cdot e^{-0{,}5t} - \frac{4}{3} e^{-2t}$$

4.57) e) $y' - 2y = 3\sin(t)$ $\qquad y_0 = 0$

homogene Teil:

$$y(t) = C \cdot e^{2t}$$

partikuläre Teil:

$$s(t) = 3\sin(t)$$

$$y_p = A \cdot \sin(t) + B \cdot \cos(t)$$

$$y_p' = A \cdot \cos(t) - B \cdot \sin(t)$$

$$A \cdot \cos(t) - B \cdot \sin(t) - 2 \cdot [A \cdot \sin(t) + B \cdot \cos(t)] = 3\sin(t)$$

$$A \cdot \cos(t) - B \cdot \sin(t) - 2A\sin(t) - 2B\cos(t) = 3\sin(t)$$

$$\underbrace{-B\sin(t) - 2A\sin(t)} + \underbrace{A\cos(t) - 2B\cos(t)} = \underbrace{3\sin(t)} + \underbrace{0\cos(t)}$$

$$-B - 2A = 3$$
$$A - 2B = 0$$

TI: Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= -\frac{6}{5} \\ B &= -\frac{3}{5} \end{aligned}}$$

$$y_p = -\frac{6}{5}\sin(t) - \frac{3}{5}\cos(t)$$

$$y(t) = C \cdot e^{2t} - \frac{6}{5}\sin(t) - \frac{3}{5}\cos(t) \qquad y(0) = 0$$

$$0 = C -$$

$$C = \frac{3}{5}$$

$$y(t) = \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{6}{5}\sin(t) - \frac{3}{5}\cos(t)$$

spezielle Lösung für $y(0) = 0$

35. Hausübung, am 24.04.2023

Thursday, April 27, 2023 5:38 PM

35. Hausübung, am 24.04.2023

4.59)

Differentialgleichung in der Technik B_426

4.59) a) $y' + 3y = 6x - 1; \quad y(0) = 3$

1) homogener Teil:

$$\underline{y_h(t) = C \cdot e^{-3t}}$$ ✓

partikulärer Teil:

$$s(t) = 6t - 1$$

$$y_p = At + B$$

$$y_p' = A$$

$$A + 3At + 3B = 6t - 1$$

$$\underline{3At} + \underline{A + 3B} = \underline{6t} \underline{-1}$$

$$3A = 6$$

$$A + 3B = -1$$

$$\boxed{A = 2 \quad B = -1}$$ ✓

$$y_p = 2t - 1$$

$$y(t) = C \cdot e^{-3t} + 2t - 1$$ ✓

$y(t) = C \cdot e^{-3t} + 2t - 1$

allgemeine Lsg.

$y(0) = 3$

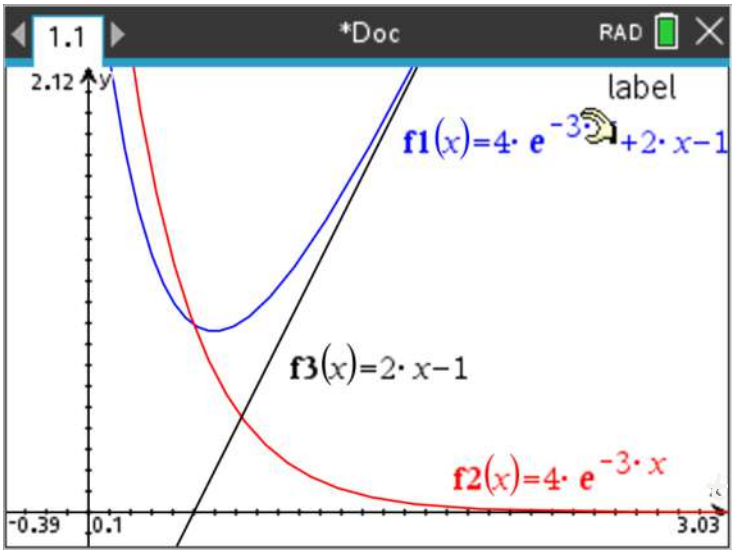
$3 = C - 1$

$C = 4$

$y(t) = 4e^{-3t} + 2t - 1$

spezielle Lsg.

2)



Summe der y-Wert der Graphen f3(x) und f2(x)

3) $\lim_{t \to \infty} 4e^{-3t} + 2t - 1 = 2t - 1$

$\lim_{t \to -\infty} 4e^{-3t} + 2t - 1 =$ undefind [eher ∞ - graphisch]

$[\infty - \infty =$ undef$]$

↳ exponentielle Unendlichkeit größer als lineare ∞

b) $y' - 6y = 3x + 11{,}5 \, ; \quad y(0) = 2{,}5$

1) homogene Fkt:

$$y_h(x) = C \cdot e^{6x}$$

partikuläre Fkt:

$$s(x) = 3x + 11{,}5$$

$$y_p = Ax + B$$

$$y_p' = A$$

$$A - 6Ax - 6B = 3x + 11{,}5$$

I: $-6A = 3$
II: $A - 6B = 11{,}5$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = -0{,}5 \\ B = -2 \end{array}}$$

$$y_p = -0{,}5x - 2$$

$$y(t) = Ce^{6x} - 0{,}5x - 2$$

allgemeine Lsg

$$y(0) = 2{,}5$$

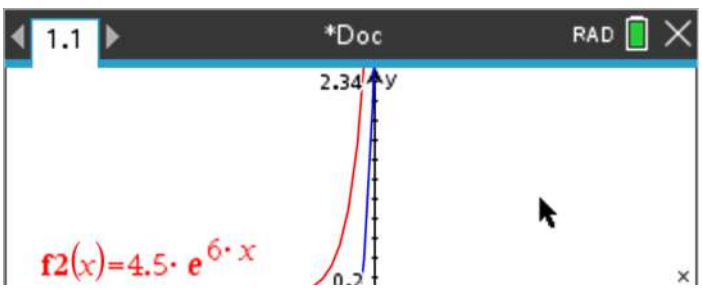
$$2{,}5 = C - 2$$

$$C = 4{,}5$$

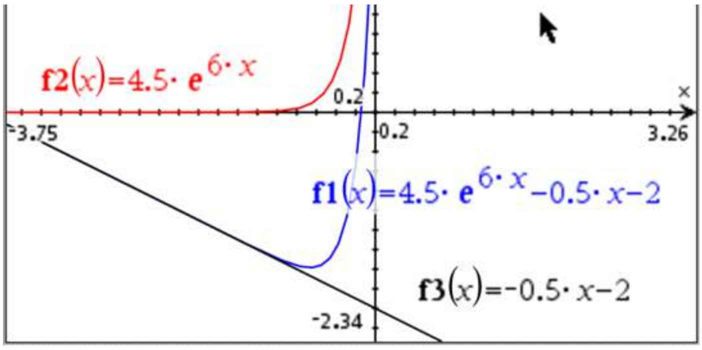
$$y(t) = 4{,}5e^{6x} - 0{,}5x - 2$$

spezielle Lsg

2)



y(t) ist im II. & III. Quadrant eher der Funktion



Quadrant eher
der Funktion
$y_h(t)$ angenähert,
wärend in QI
deutlich $y_p(t)$
die Vormacht hat.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} 4{,}5e^{6x} - 0{,}5x - 2 = \text{undefind}$ [eher ∞ - graphisch]

↳ exponentielle Unendlichkeit größer als lineare ∞

$[\infty - \infty = \text{undef}]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 4{,}5e^{6x} - 0{,}5x - 2 = \infty$

$[0 - A \cdot -\infty - 2 = \infty]$

Differenzialgleichungen in der Technik (B_426)

a) Für die Geschwindigkeit eines bestimmten Körpers in einer Flüssigkeit gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
a, b … Konstanten

1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an. $\dot{v} - bv = 0$ ✓

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung lautet:
$v(t) = C \cdot e^{-2 \cdot t}$
C … Konstante

e wird negiert — vor b — vor 2

2) Ermitteln Sie die Konstante b. $-(-(-2)) = -2$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet für eine bestimmte Anfangsbedingung:
$v(t) = \underline{5} - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}$

$v' - bv = a$ $\quad v'(t) = 8e^{-2t}$
$\cancel{5}$ $\quad v' + 2v = a$ $\quad 8e^{-2t} + 2 \cdot (5 - 4e^{-2t}) = a = 10 \frac{m}{s^2}$

3) Ermitteln Sie die Konstante a.
4) Ermitteln Sie die zugehörige Anfangsbedingung für $t = 0$. $v(0) = 5 - 4 = 1$

Lösung ausblenden

Lösung: Differenzialgleichungen in der Technik (B_426)

a1) homogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = b \cdot v$

a2) Einsetzen in die homogene Differenzialgleichung:
$-2 \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} = b \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad b = -2\,s^{-1}$
↳ Ableitung von $v(t)$ = bv

a3) Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$
$8 \cdot e^{-2 \cdot t} = a - 2 \cdot (5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}) \quad \Rightarrow \quad a = 10\text{ m/s}^2$

a4) $v(0) = 1$ m/s

Differenzialgleichungen in der Technik (B_426)

b) Bei einer bestimmten chemischen Reaktion ändern sich die vorhandenen Massen der beteiligten Stoffe mit der Zeit. Für die Masse eines beteiligten Stoffes gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dm}{dt} = 8 - 2 \cdot m$$

t … Zeit ab Beginn der Beobachtung in s
$m(t)$ … Masse dieses Stoffes zur Zeit t in mg

4

$s(t) = 8$
$y_p = A$
$y_p' = 0$
$2A = 8$
$A = 4$

$m' = 8 - 2m$
$m' + 2m = 0$
$m_h = Ce^{-2t}$
$t \to \infty \to 0$

Eine spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung wurde unter Verwendung einer Anfangsbedingung ermittelt.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D zu, sodass zutreffende Aussagen entstehen.

Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung …	
Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph dieser speziellen Lösung der Differenzialgleichung …	C

A	… asymptotisch der t-Achse.
B	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 8.
C	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 4.
D	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt –2.

Lösung ausblenden

Lösung: Differenzialgleichungen in der Technik (B_426)

b1)

Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung …	A
Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph dieser speziellen Lösung der Differenzial-	C

A	… asymptotisch der t-Achse.
B	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 8.
C	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 4.
D	… asymptotisch der waagrechten

Differenzialgleichungen in der Technik (B_426)

c) Die Temperatur eines Werkstücks bei einer bestimmten Wärmebehandlung kann in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden. Dabei kann es sich um einen Abkühlungsvorgang oder einen Erwärmungsvorgang handeln. Für den Zusammenhang gilt die folgende Differenzialgleichung:

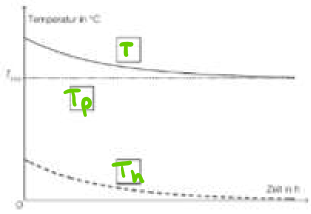
$$\frac{dT}{dt} + b \cdot T = a$$

t … Zeit ab Beginn der Beobachtung in h
$T(t)$ … Temperatur des Werkstücks zur Zeit t in °C
a, b … Konstanten

Die Lösung dieser Differenzialgleichung kann mithilfe des Ansatzes $T(t) = T_h(t) + T_p(t)$ und einer Anfangsbedingung bestimmt werden, wobei gilt:

$T(t)$ … Lösung der Differenzialgleichung
$T_h(t)$ … Lösung des homogenen Teils der Differenzialgleichung
$T_p(t)$ … (eine beliebige) partikuläre Lösung der Differenzialgleichung

Die nebenstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Abkühlungsvorgang die Graphen von T, T_h und T_p.

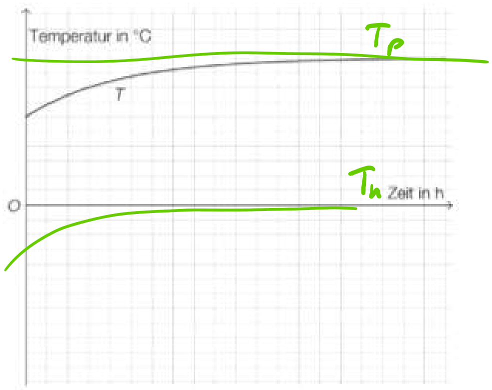


1) Geben Sie mithilfe von a und b eine Formel zur Ermittlung von T_{End} an.

T_{End} = a / b ✓

2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die richtige Bezeichnung der Graphen in die Kästchen ein (T, T_p bzw. T_h).

Die nachstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Erwärmungsvorgang den Graphen von T.



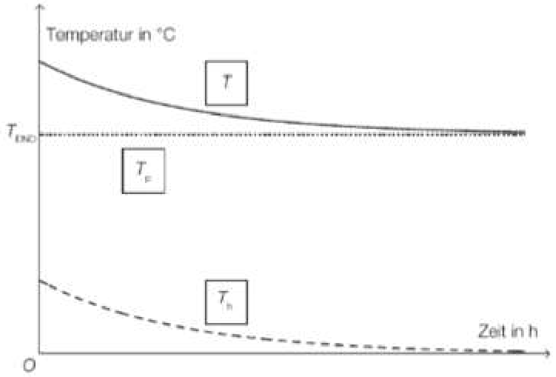
3) Skizzieren Sie in der obigen Abbildung die Graphen von T_p und T_h.

Lösung ausblenden

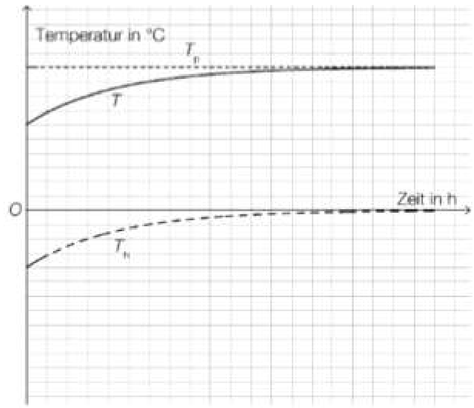
Lösung: Differenzialgleichungen in der Technik (B_426)

c1) $T_{END} = \frac{a}{b}$

c2)



c3)



36. Hausübung, am 05.05.2023

Friday, May 5, 2023 10:32 AM

36. Hausübung, am 5.5.2023

4.63)

1) $m = 90kg$

$F_a = 300N$

$F_R = 60 \cdot v$

$F = m \cdot a$ $a = \frac{dv}{dt}$ $F = F_a - F_R$

$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_a - F_R$

$m \frac{dv}{dt} = F_a - bv$

Die Änderung d. Geschwindigkeit ist die vorantreibende Kraft minus der Widerstandskraft. Da F_R die Geschw. mal den Faktor 60 (b) ist, entsteht obrige Formel.

2) [TI: → 4 → D Differentialgleichungslöser]

$90 \cdot v' = 300 - 60v$ $v(0) = 0$

$\underline{v(t) = 5 - 5 \cdot 0{,}5134\ldots^{t}}$ ✓

3) $v(600) = \underline{5 \frac{m}{s}}$ ✓

A: Nach 10min hat d. Schlitten $18 \frac{km}{h}$ ✓

36.5 Hausübung, am 24.05.2023

Freitag, 26. Mai 2023 07:24

36.5 Hausübung, am 24.05.2023

Verbesserung der Schularbeit

6b. $y' + 10y = 52 \cdot \sin(2t)$

homogene Lösung:

$y_h(t) = C \cdot e^{-10t}$

partikuläre Lösung:

$s(t) = 52 \cdot \sin(2t)$

$y_p(t) = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t)$

$y_p'(t) = 2A \cdot \cos(2t) - 2B \cdot \sin(2t)$

$$\underline{2A \cdot \cos(2t)} \underline{- 2B \cdot \sin(2t) + 10A \cdot \sin(2t)} + \underline{10B \cdot \cos(2t)} = \underline{52 \cdot \sin(2t)} + \underline{0 \cdot \cos(2t)}$$

$2A + 10B = 0$

$-2B + 10A = 52$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 5 \\ B = -1 \end{array}}$$

$y_p(t) = 5\sin(2t) - \cos(2t)$

$$\underline{y(t) = C \cdot e^{-10t} + 5\sin(2t) - \cos(2t)}$$

37. Hausübung, am 02.06.2023

Freitag, 2. Juni 2023 10:30

37. Hausübung, am 02.06.2023

5.8) a)
5.9)

5.8) a) $-6 \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix} \right]$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 23 & -24 \end{pmatrix}$ ✓

5.9)

1) $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 1,5 & 2,4 & 3,5 \\ 1,5 & 0,9 & 3,5 & 2,4 \\ 2,4 & 3,5 & 0,9 & 1,5 \\ 3,5 & 2,4 & 1,5 & 0,9 \end{pmatrix}$ ✓

2) $K = A \cdot 0,2$ ✓

3) $F = A \cdot (2 + 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,2)$ ✓

38. Hausübung, am 12.06.2023

Montag, 12. Juni 2023 12:15

38. Hausübung, am 12.06.2023

5.34) b)

$$P \circ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

39. Hausübung, am 16.06.2023

5.43) b)

$$\text{I}: \quad 1a + 1b + 0c + 0d + 0e = -8$$
$$\text{II}: \quad 0a + 1b + 1c + 0d + 0e = 22$$
$$\text{III}: \quad 0a + 0b + 1c + 1d + 0e = -6$$
$$\text{IV}: \quad 0a + 0b + 0c + 1d + 1e = 8$$
$$\text{V}: \quad 1a + 0b + 0c + 0d + 1e = -2$$

Matrizenrechnung:

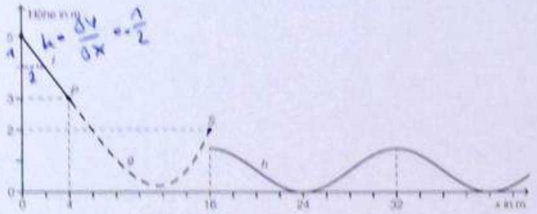
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 22 \\ -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

SMÜ, am 28.09.22

Montag, 5. September 2022 12:39

4AHIT	SMÜ_A 28. September 2022	Name: Felix Schneider

Für den Bau einer BMX-Bahn wird ein Plan erstellt. In der nachstehenden Abbildung ist die Profillinie einer geplanten Teilstrecke dargestellt.



Die Profillinie wird bis zum Punkt P näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben.
Die Profillinie zwischen den Punkten P und S wird näherungsweise durch die Polynomfunktion g mit dem Grad 3 beschrieben.
Im Punkt P hat die Polynomfunktion g die gleiche Steigung wie die lineare Funktion f. Im Punkt S beträgt ihr Steigungswinkel 42°. $\rightarrow k = \tan(42°) = \cancel{2{,}2917}..\ 0{,}9004...\ \frac{m}{m}$

Berechnen Sie den Funktionsterm von g, runden Sie gegebenenfalls die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen genau und bestimmen Sie den tiefsten Punkt von g im dargestellten Abschnitt.

$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$g'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$g''(x) = 6a \cdot x + 2b$ ✓

I: $P(4|3)$: $g(4) = 3$ ✓ : $3 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d$ ✓
II: $k_4 = -\frac{1}{2}$: $g'(4) = -\frac{1}{2}$ ✓ : $-\frac{1}{2} = 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c$ → RF? $(-\frac{1}{2})$ falsch
III: $P(16|2)$: $g(16) = 2$ ✓ : $2 = a \cdot 16^3 + b \cdot 16^2 + c \cdot 16 + d$
IV: $k_{16} = 0{,}9...$: $g'(16) = 0{,}9$ ✓ : $0{,}9... = 3a \cdot 16^2 + 2b \cdot 16 + c$ ✓

TI: Gleichungssystem lösen ?

$g(x) = \cancel{0{,}8266}..\ x^3 - \cancel{24{,}7441}x^2 - \cancel{153{,}7512}x + \cancel{-283{,}5450}$. (+)

TP: $g'(x) = 0$ ✓
TI: solve$(\cdots, x)$ ✓
$(x_1 = -0{,}514... \quad x_2 = 15{,}977...)$
$g''(15) = 34{,}208 > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt ✓ $(g(15) = -1262{,}038...)$

Folgefehler
$T(15{,}977...|-1262{,}038)$ ✓
↓
kann nicht sein (Rechenfehler) ✓

SA, am 05.12.2022

Montag, 12. Dezember 2022 17:23

4+7

1. Schularbeit der 4AHIT, am 05. Dezember 2022

Name: Felix Schneider

- Berechnungen sind mit einem **nachvollziehbaren Rechenansatz** und einer **nachvollziehbaren Dokumentation** durchzuführen. (Technologiebefehle und Variablen/Parameter müssen angegeben bzw. ausgedruckt werden)
- Wird ein Koordinatensystem angefertigt, müssen die **Achsen beschriftet** und **skaliert** sein.
- Wird eine Aufgabe **mehrfach gerechnet**, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen.
- Ergebnisse müssen durch einen Antwortsatz und mit entsprechenden Einheiten angegeben werden.

Punkteschlüssel:

Note	Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend
Punkte	32 – 29	28 – 25	24 – 20	19 – 16	15 – 0

Erreichte Punkte:

Summe: 27 von 32 Note: Gut

Unterschrift: ____________________

Viel Glück!

Beispiel 1 Punkte: 1+2+3+2+1 9

Sobald die Hinterräder eines Flugzeugs bei der Landung Bodenkontakt haben, wird es in einem ersten Bremsvorgang durch aerodynamische Hilfsmittel abgebremst, dann erst werden die Radbremsen eingesetzt.
Für diesen ersten Bremsvorgang, der etwa 12 Sekunden dauert, kann in guter Näherung der Verlauf der Geschwindigkeit des Flugzeuges in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion v modelliert werden, für die gilt: $v(t) = \frac{1}{27}t^3 - \frac{2}{3}t^2 + 60$ für $0 \leq t \leq 12$ (v in m/s, t in s)

a) Bestimmen Sie, um wieviel Prozent das Flugzeug in diesem ersten Bremsvorgang nach 10 s abgebremst ist!

b) Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks $\frac{v(10)-v(0)}{10}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext! (achten Sie auf die korrekten Einheiten)

c) Ermitteln Sie die Bremsbeschleunigung, die auf das Flugzeug zum Zeitpunkt t=10 wirkt. Berechnen Sie die maximale Bremsbeschleunigung auf das Flugzeug im betrachteten Zeitintervall $0 \leq t \leq 12$.

d) Berechnen und interpretieren Sie das bestimmte Integral $\frac{1}{10}\int_0^{10} v(t)\,dt$ im Kontext. (achten Sie auf die korrekte Einheit)

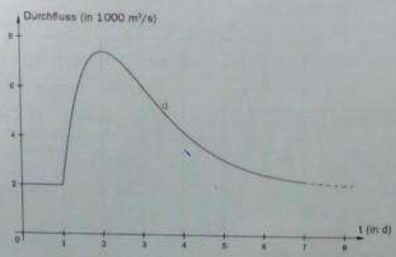
e) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis das Flugzeug einen Bremsweg von 0,5 km zurückgelegt hat.

1

Beispiel 2	Punkte: 2+1+2 1+1+1	3

Ein Fluss weist bei Normalwasserführung eine durchschnittliche Durchflussmenge von 2000 m^3/s auf. Liegt der Wasserstand für mehrere Tage deutlich über dem normalen Pegelstand (Normalwasserführung) spricht man von Hochwasser.

Das folgende Diagramm zeigt in einem Modell, wie die normale Durchflussmenge bei Hochwasser überschritten wird und auf einen Maximalwert ansteigt. Erst im Verlauf von mehreren Tagen wird der Normalwert wieder erreicht.



Der Verlauf der Durchflussmenge d (in 1000 m^3/s) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen, 1d=86400s) wird in diesem Modell durch die Funktion d modelliert, für die gilt:

$$d(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 2 \cdot (t-1) \cdot e^{3-t} + 2 & \text{für } 1 \leq t \leq 7 \end{cases}$$

a) Berechnen Sie, wann bei Hochwasserführung die maximale Durchflussmenge erreicht wird und wie groß diese an diesem Tag ist.

b) Nach Erreichen einer maximalen Durchflussmenge nimmt diese wieder ab. Berechnen Sie jenen Zeitpunkt, an dem die Durchflussmenge am stärksten abnimmt.

c) Berechnen Sie die mittlere Durchflussmenge pro Tag während der ersten 6 Hochwassertage.

Beispiel 3	Punkte: 2	2

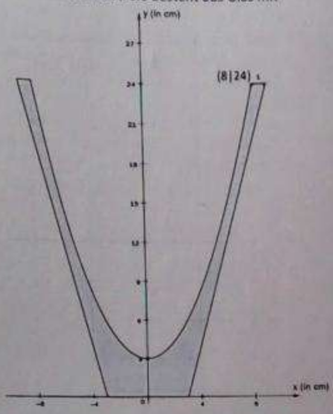
Die Kraft F zum Dehnen einer Feder ist nach dem Hook´schen Gesetz proportional zur gedehnten Strecke s.

Für eine bestimmte Feder gilt: $F(s) = 1{,}5 \cdot s$ (F in N, s in cm)

Berechnen Sie $\int_{3,5}^{6} F(s)\,ds$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Kontext.

Beispiel 4 Punkte: 2+2+3 2+2+1 | 5

Die Abbildung zeigt den Querschnitt einer Vase, die ca. 2 L Wasser fasst. Sie besteht aus Glas mit einer Dichte von 2,5 g/cm^3.



Die Form der Vase entsteht durch Rotation einer linearen Funktion f mit $f(x) = 4x - 12$ und einer Parabel p mit der Gleichung $p(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ um die y-Achse.

a) Geben Sie die Gleichung der Parabel an. 1 cm

b) Das Wasser in der Vase steht bis 10 mm unter dem Rand. Geben Sie einen Term für das Volumen V dieser Wassermenge an und berechnen Sie diese Wassermenge.

c) Berechnen Sie die Masse m der leeren Vase.

Beispiel 5 Punkte: 2+1+1 1+1+1 | 4

Von einer kubischen Kostenfunktion K(x) sind folgende Daten bekannt:

Die Grenzkosten liegen bei Produktionsstillstand (also bei x = 0) bei 5 GE pro ME. Bei der Produktion von 20 ME beträgt die lokale Änderungsrate 53 GE pro ME. Die Kostenkehre liegt bei 2 ME. Bei der Produktion von 10 ME betragen die Gesamtkosten 370 GE.

a) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, das zur Berechnung der Koeffizienten der Kostenfunktion benötigt wird.
Geben Sie die Funktionsgleichung der Kostenfunktion K(x) an.

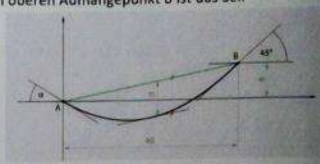
b) Geben Sie an, bei welcher Mengeneinheit der Kostenzuwachs am geringsten ist.

c) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Kosten bei 14 ~~Stück~~ ME im progressiven oder im degressiven Bereich liegen.

Beispiel 6 Punkte: 2+2 | 4

2+2

a) Das Drahtseil einer Materialseilbahn (siehe Abb. 1) überbrückt einen Graben von 40m Breite bei einem Höhenunterschied von 8m. Die Form des Seils kann näherungsweise durch die Polynomfunktion h vom Grad 2 beschrieben werden. Im oberen Aufhängepunkt B ist das Seil unter 45° geneigt.



Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Polynomfunktion h berechnet werden können.
Lösen Sie das Gleichungssystem und geben Sie den Funktionsterm an.

Abb. 1

b) Das Drahtseil einer anderen Seilbahn (siehe Abb. 2) überbrückt einen Graben von 100m Breite bei einem Höhenunterschied von 25m . Seine Form kann näherungsweise durch die Funktion l mit $l(x) = 0{,}005x^2 - 0{,}25x$ beschrieben werden.

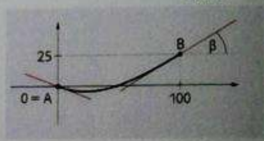


Abb. 2

(1) Stellen Sie eine Formel auf, mit der die Länge des Seils berechnet werden kann.
Berechnen Sie die Länge des Seils.

M-SA

Felix Schneider

1

1.a) $v(0) = 60 \frac{m}{s}$

$v(10) = 30{,}3704\ldots \frac{m}{s}$

$p = \frac{A}{G} = \frac{30{,}3704\ldots}{60} = \underline{50{,}617\ldots\,\%}$

$100\,\% - 50{,}617\ldots\,\% = \underline{49{,}382\ldots\,\%}$

A: Das Flugzeug hat nach 10s um ca. 49,38 % abgebremst.

b) $\frac{v(10) - v(0)}{10\,(-0)} = \underline{-2{,}962\ldots \frac{m}{s^2}}$

A: In den ersten 10s bremst das Flugzeug mit einer mittleren ~~negativen~~ Beschleunigung von $-2{,}962\ldots \frac{m}{s^2}$. ~~(relative Änderung)~~

Die mittlere Beschl. beträgt $-2{,}962\ldots \frac{m}{s^2}$

c) momentane Beschleunigung

1) $a(t) = v'(t)$

$a(t) = \frac{t^2}{9} - \frac{4t}{3}$

$\underline{a(10) = -\frac{20}{9} \frac{m}{s^2}}$

A: Zum Zeitpunkt 10s bremst das FZ mit $-\frac{20}{9} \frac{m}{s^2}$.

2) Extremstelle

$a''(t) = ✗$

$a'(t) = 0$ [T1: solve(a'(t)=0,t)]

$\underline{t = 6s}$

$a(6) = -4 \frac{m}{s^2}$

$a''(6) = \frac{2}{9}$ → Minimum (aber richtig, weil ? negativ...)

A: Maximal bremst das FZ mit $-4 \frac{m}{s^2}$

d) $m = \frac{1}{10} \int_0^{10} v(t)\,dt = 47{,}037\ldots \frac{m}{s}$

A: Mittlere Geschwindigkeit im Intervall [0; 10]

e) $s(t) = \int v(t)\,dt$ ✓

$P(0|0) \rightarrow$ weil anfangs noch kein Weg zurückgelegt ✓

$s(t) = \frac{t^4}{108} - \frac{2t^3}{9} + 60t + C$ ✓ $C = 0$, weil $P(0|0)$ ✓

$s(t) = \frac{t^4}{108} - \frac{2t^3}{9} + 60t$ ✓

$s(t) = 500$ ✓ [0,5km ≙ 500m]

[TI: solve(..., t)]

$t_1 = 11{,}0074...\ s$ ✓

[$t_2 = -15,...\ s$]

A: Es dauert ca. 11s bis 0,5km Bremsweg erreicht worden. ✓

$\int_0^z v(t)\cdot dt = 500$ $z = 11{,}0074...s$ ✓

M-SA

Felix Schneider

2

2) a) Extremstelle:

$d'(t) = 0$ ≠ $d'(t) =$ ≠

$t = 2$ ≠ $d''(t) =$ ≠

A: Nach 1 Tag Hochwasser ist die Durchflussmenge mit ca. $7436 \frac{m^3}{s}$ am höchsten.

$d(2) = 7{,}436\ldots \triangleq 7436 \frac{m^3}{s}$

$d''(2) = -5{,}436\ldots \rightarrow$ Maximum

b) Wendestelle:

$d''(t) = 0$ ≠ $d''(t) = \ldots$

$t = 3$

A: Am 2ten ~~Tag~~ Hochwassertag nimmt die Durchflussmenge am stärksten ab.

$d(3) = 6 \triangleq 6000 \frac{m^3}{s}$

$d'''(3) = 2 \neq 0 \rightarrow$ Wendestelle

am 2ten HWT nimmt DFM am stärksten ab.

c) Mittelwert:

$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b d(t) \cdot dt$

$a = 1 \rightarrow$ Beginn Hochwasser

$b = 7 \rightarrow 1+6$ Hochwassertage

$m = \frac{1}{6} \cdot \int_1^7 (2 \cdot (t-1) \cdot e^{3-t} + 2) \cdot dt$

$m = 4{,}420\ldots \triangleq 4420 \frac{m^3}{s}$ ≠ pro Tag DF

A: Die Durchflussmenge ist im durchschnitt ca. $4420 \frac{m^3}{s}$ ~~pro Tag~~.

3) $\int_{3,5}^{6} 1{,}5s \; ds = \underline{17{,}8125 \frac{N}{cm}} \hat{=}$

A: Man benötigt ca. 17.8125 DF $\cancel{\frac{N}{cm}}$ Arbeit um die Feder von einer Strecke von 3,5cm zu 6cm zu ~~bewegen~~ dehnen. ✓

* 4(c)

OF

$$V_y = \pi \cdot \int_0^3 f^*(y)^2 \, dy + \pi \int_3^{24} \left[f^*(y) - f(y) \right]^2 dy$$ ✓

$= 45{,}154 \ldots \, cm^3$ (✓) · Eingabef.

Masse:

$45{,}154 \cdot 2{,}5$ ((✓))

$= \underline{\underline{112{,}887}}$ g ((✓))

M-SA

Felix Schneider

3

4) a) $p(x) = a \cdot x^2 + b$

$b = 3 \rightarrow$ ~~K~~Ordinatenabstand $= 3$

$P(8|24)$

$p(x) = a \cdot x^2 + 3$

$24 = a \cdot 8^2 + 3$

$\underline{\underline{a = \frac{21}{64}}}$

$\underline{\underline{p(x) = \frac{21}{64} \cdot x^2 + 3}}$

b) $y = \frac{21}{64} \cdot x^2 + 3$

$x = \frac{8 \cdot \sqrt{21 \cdot (y-3)}}{21}$) auf x umformen

$\left(x = \frac{-8 \cdot \sqrt{21 \cdot (y-3)}}{21} \right) \rightarrow$ negative Werte

$V_y = \pi \cdot \int_{p(a)}^{p(b)} p(y)^2 \cdot dy$

$V_y = \pi \cdot \int_{3}^{23} \left(\frac{-8 \cdot \sqrt{21 \cdot (y-3)}}{21} \right)^2 \cdot dy = \underline{\underline{1914{,}81\ldots \text{ cm}^3}}$

A: Die Wassermenge beträgt ca. 1915 mL.
Das sind ca. 2 L.

c) Nullstelle berechnen:

$f(x) = 4x - 12$

$f(x) = 0$ $\qquad$ $f(x) = 24$

$\underline{x = 3cm}$ $\qquad$ $\underline{x = 9cm}$

Funktionen:

$p(y) = \frac{8 \cdot \sqrt{21-(y \cdot 3)}}{21}$

$f(y) = 0,25 \cdot y + 3$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^3 p(y)^2 \cdot dy + \pi \cdot \int_3^8 [p(y) - f(y)]^2 \cdot dy + \pi \cdot \int_8^9 [24 - f(y)]^2 \cdot dy$$

$V_y = 4,260 \ldots cm^3$

2. Methode: Fläche berechnen:

$$A = \int_0^3 p(x) \cdot dx + \int_3^8 [p(x) - f(x)] \cdot dx + \int_8^9 [24 - f(x)] \cdot dx$$

$\underline{A = 32 cm^2}$

Masse berechnen:

$m = \rho \cdot V$

$m = 2,5 \cdot 4,260 \ldots cm^3$

$\underline{m = 10,652 \ldots g}$

A: Die Masse der leeren Vase beträgt ca. ~~10,65~~ 12,887 g.

M-SA

Felix Schneider

4

5) a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$K''(x) = 6a \cdot x + 2b$
$K'''(x) = 6a$

I: $K'(0) = 5$ — $5 = c$
II: $K'(20) = 53$ — $53 = 3a \cdot 20^2 + 2b \cdot 20 + c$
III: $K''(2) = 0$ — $0 = 6a \cdot 2 + 2b$
IV: $K(10) = 370$ — $370 = 1000a + 100b + 10c + d$

$a = \frac{1}{20}$ $b = -\frac{3}{10}$ $c = 5$ $d = 300$

$K(x) = \frac{1}{20} \cdot x^3 - \frac{3}{10} \cdot x^2 + 5x + 300$

b) $K''(x) = 0$

$x = 2$

A: Bei 2 ME ist der Kostenzuwachs am geringsten. (= Kostenkehre)

c) A: Da die Kostenkehre bei 2 ME liegt, sind 14 ME im Bereich des progressiven Bereichs, da die 2te Ableitung d. Kostenfunktion größer 0 ist.

$K''(14) = \frac{18}{5}$ → links gekrümmt → progressiver Kostenverlauf

6) a) $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$h'(x) = 2a \cdot x + b$

$h''(x) = 2a$

$\underline{I}$: $P(0|0)$: $h(0) = 0 \rightarrow 0 = c$

$\underline{II}$: $P(40|8)$: $h(40) = 8 \rightarrow 8 = 1600a + 40b + c$

$\underline{III}$: $k_{40} = \tan(45°)$: $h'(40) = \tan(45°) \rightarrow \tan(45°) = 2a \cdot 40 + b$

$a = \frac{1}{50}$; $b = -\frac{3}{5}$; $c = 0$

$h(x) = \frac{1}{50} x^2 - \frac{3}{5} x$

b) $s = \int_a^b \sqrt{1 + (l'(x))^2}\, dx$

$l'(x) = 0{,}01x - 0{,}25$

$s = \int_0^{100} \sqrt{1 + (0{,}01x - 0{,}25)^2}\, dx$

$s = 106{,}79\,m$ [TI: arclen(l(x), x, 0, 100)]

A: Das Seil ist ca. 107 m lang.

Felix Schneider M-SA 05.11.2022

1a

1.1 1.2 *Dok RAD

$v(t):=\frac{1}{27}\cdot t^3-\frac{2}{3}\cdot t^2+60$	*Fertig*
$v(0)$	60
$v(10)$	$\frac{820}{27}$
$v(10)$	30.3704
$\frac{30.37037037037}{60}$	0.506173

1a + 1b

$\frac{30.37037037037}{60}$	0.506173
$100-0.50617283950617$	99.4938
$1-0.50617283950617$	0.493827
$\frac{v(10)-v(0)}{10}$	-2.96296
$a(t):=\frac{d}{dt}(v(t))$	*Fertig*

1

1c

$$\frac{v(10)-v(0)}{10} \quad -2.96296$$

$a(t):=\frac{d}{dt}(v(t))$ Fertig

$a(t)$ $\frac{t^2}{9}-\frac{4\cdot t}{3}$

$a(10)$ $\frac{-20}{9}$

1c

$aa(t):=\frac{d}{dt}(a(t))$ Fertig

solve$(aa(t)=0,t)$ $t=6$

$a(6)$ -4

$ab(t):=\frac{d}{dt}(aa(t))$ Fertig

$ab(6)$ 2

Felix Schneider

1d

1d

dt

$ab(6)$ $\frac{2}{9}$

$\frac{1}{10} \cdot \int_{0}^{10} v(t)\ dt$ 47.037

$s(t) = \int v(t)\ dt$

$s(t) = 0.009259 \cdot t^4 - 0.222222 \cdot t^3 + 60. \cdot t$

1e

$s(t) = \int v(t)\ dt$ $s(t) = \frac{t^4}{108} - \frac{2 \cdot t^3}{9} + 60 \cdot t$

⚠ $\text{solve}(s(t)=500,t)$ $s(t)=500$

⚠ $\text{solve}(s(t)=500,t)$ $s(t)=500$

2

1e

$s(11.0074)$	$s(11.0074)$
$s(t):=\int v(t)\,dt$	*Fertig*
$s(11.0074)$	499.999
$\text{solve}(s(t)=500,t)$	$t=-15.778$ or $t=11.0074$

2a

$d(t):=2\cdot (t-1)\cdot e^{3-t}+2$	*Fertig*
$da(t):=\frac{d}{dt}(d(t))$	*Fertig*
$\text{solve}(da(t)=0,t)$	$t=2$
$d(2)$	$2\cdot e+2$
$d(2)$	7.43656
	Fertig

2a + 2b

$db(t):=\frac{d}{dt}(da(t))$	*Fertig*
$db(2)$	$-2\cdot e$
$db(2)$	-5.43656
$\text{solve}(db(t)=0,t)$	$t=3$
$d(3)$	6.

3

2c

$dc(t) := \frac{d}{dt}(db(t))$ Fertig

$dc(3)$ 2

$\frac{1}{6} \cdot \int_1^7 d(t)\, dt$ 4.42028

(✓)

3

$$\int_{3.5}^{6} (1.5\cdot s)\,ds$$

17.8125

4a + 4b

$\text{solve}\left(24=a\cdot 8^2+3,a\right)$

$a=\frac{21}{64}$

$\text{solve}\left(y=\frac{21}{64}\cdot x^2+3,x\right)$

$x=\frac{8\cdot\sqrt{21\cdot(y-3)}}{21}$ and $y-3\geq 0$ or $x=\frac{-8\cdot\sqrt{21\cdot(}}{21}$

327.027

$\pi\cdot\int^{23} \frac{8\cdot\sqrt{21\cdot(y-3)}}{} \,dy$

4

Felix Schneider M-SA 05.11.20xx

4b + 4c

$$\pi\cdot\int_3^{23}\frac{8\cdot\sqrt{21\cdot(y-3)}}{21}\,dy \qquad 327.027$$

solve$(4\cdot x-12=0,x)$ $x=3$

$$\pi\cdot\int_3^{23}\left(\frac{8\cdot\sqrt{21\cdot(y-3)}}{21}\right)^2 dy \qquad 1914.88$$

4c

solve$(4\cdot x-12=24,x)$ $x=9.$

solve$(y=4\cdot x-12,x)$ $x=0.25\cdot y+3.$

$p(y)=\frac{8\cdot\sqrt{21\cdot(y-3)}}{21}$ $p(y)=\frac{8\cdot\sqrt{21\cdot(y-3)}}{21}$

$p(y):=\frac{8\cdot\sqrt{21\cdot(y-3)}}{21}$ *Fertig*

$f(y):=0.25\cdot y+3$ *Fertig*