$[4{,}986\ldots ; 5{,}0\ldots]$ kg zu ...

$\alpha = 1\%$

$\rho_u = 4{,}9616\ldots$ kg $\quad \rho_o = 5{,}1243\ldots$ kg

$[4{,}9616\ldots ; 5{,}1243\ldots]$ kg zu 99%

2. Es gibt zwei Faktoren, damit das Konfidenzintervall kleiner wird:

→ mehr Werte im Stichprobenumfang → genauer

→ Werte näher zusammen → S_x kleiner

11.7 Beim Testen eines Schiffsmotors wurde dessen Leistung in Abhängigkeit von der Drehzahl gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte:

Drehzahl in $\frac{1}{\text{min}}$	2 400	2 800	3 100	3 800	4 200
Leistung in kW	18,4	24,8	30,6	38,5	42,4

1) Ermittle die Ausgleichsgerade.
2) Welche Leistung kann man bei einer Drehzahl von 1 200 Umdrehungen pro Minute erwarten?
3) Stelle die Daten und die Ausgleichsgerade in einem Diagramm dar. Ermittle daraus die Drehzahl bei einer Leistung von 35 kW.
4) Interpretiere die Steigung der Ausgleichsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang.

1. d … Drehzahl in $\frac{1}{\text{min}}$

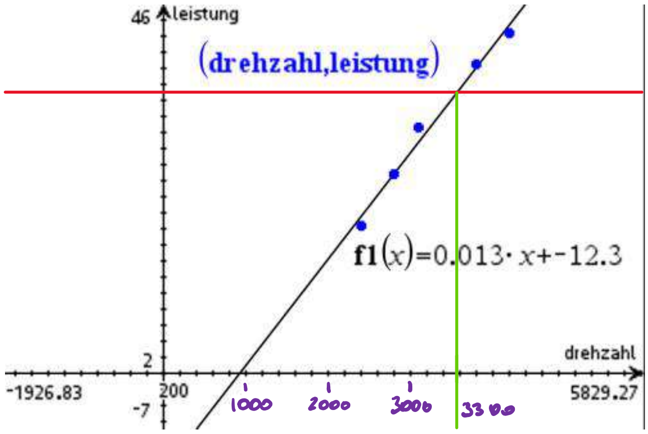
$L(d)$ … Leistung in kW

$L(d) = 0{,}01325\ldots \cdot d - 12{,}2611\ldots$

2. $L(1200) = 3{,}64117\ldots$ kW

A: Bei 1200 Umdrehungen pro Minute kann man ca. 3,6412 kW erwarten.

3.



A: Um 35kW zu produzieren braucht man ca. 3300 Umdrehungen/min.

4. $k = 0{,}013.. \frac{kW}{min}$

A: Wie man an der Einheit schön ablesen kann, bedeutet k im Sachzusammenhang, dass sich pro Umdrehung mehr pro Minute die kW um 0,013.. steigern, ist doch was Gutes!

11.8 Bei einer Verdünnungsreihe wurden folgende Extinktionen E (Absorption des Lichts bei bestimmten Wellenlängen) bei einer Wellenlänge von 440 nm gemessen:

Konzentration	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
Extinktion	0,60	0,32	0,18	0,08	0,04

1) Ermittle die Gleichung der Regressionsgeraden, die die Abhängigkeit der Extinktion von der Konzentration beschreibt.
2) Bestimme den Korrelationskoeffizienten und interpretiere diesen.
3) Bestimme die Konzentration einer Lösung mit E = 0,25 mithilfe der Regressionsgeraden.

1. K ... Konzentration

E ... Extinktion

$E(K) = \underbrace{5{,}3}_{\text{Koeffizient}} \cdot K + 0{,}068$

A konze...	B extinkt...	C	D
			=LinRegM
0.1	0.6	Titel	Lineare ...
0.05	0.32	RegEqn	m*x+b
0.01	0.18	m	5.30387
0.005	0.08	b	0.067911
0.001	0.04	r²	0.975756
		r	0.987803
		Resid	{0.00170..

2. $k = 5{,}3$

1. Wenn K 1 kleiner,

2. $k = 5,3$

A: Wenn K 1 kleiner,

das Licht ums 5,3-fache feiner.

3. $E(K) = 0,25$

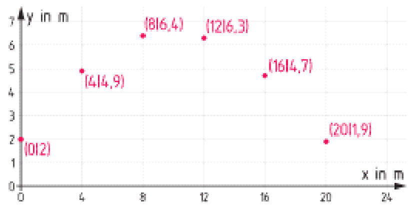
$K = ?$

$0,25 = 5,3 \cdot K + 0,068$

$K = \dfrac{0,25 - 0,068}{5,3}$

$\underline{K = 0,03433...}$

11.13 Nach einem Training beim Kugelstoßen wurde die Flugbahn einer Kugel anhand eines Videos analysiert. Das Diagramm zeigt die Höhe y der Kugel bei einer waagrechten Entfernung x von der Abwurfstelle.



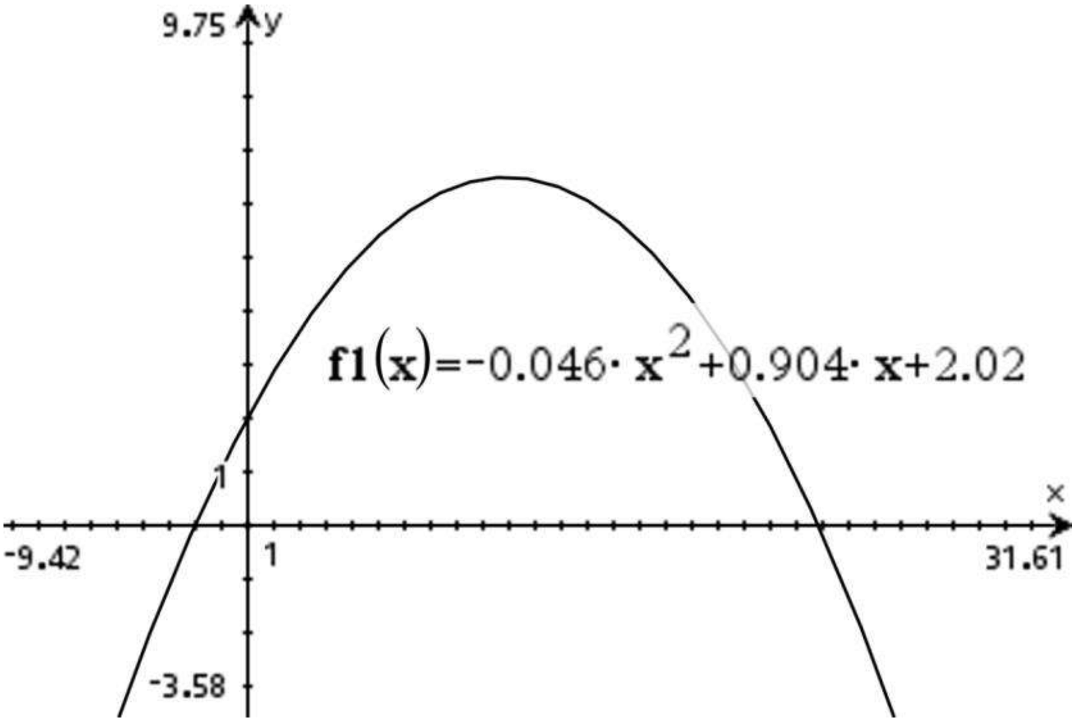
1) Jemand verwendet folgende Ausgleichsfunktion zur Beschreibung der Flugbahn:
$\hat{y}(x) = -0,0086x + 4,4524$
Begründe, warum diese Funktion ungeeignet ist.

2) Erstelle eine quadratische Ausgleichsfunktion zur Beschreibung der Flugbahn der Kugel.

3) Berechne, in welcher Entfernung von der Abwurfstelle die Kugel aufgrund des Modells aus **2)** auf dem Boden auftrifft.

1. Bei einer Flugbahn wird empfohlen,
sich nicht auf linearen Funktionen zu erholen,
denn die Gravitation,
ruft nach einer quadratischen Funktion!

2.

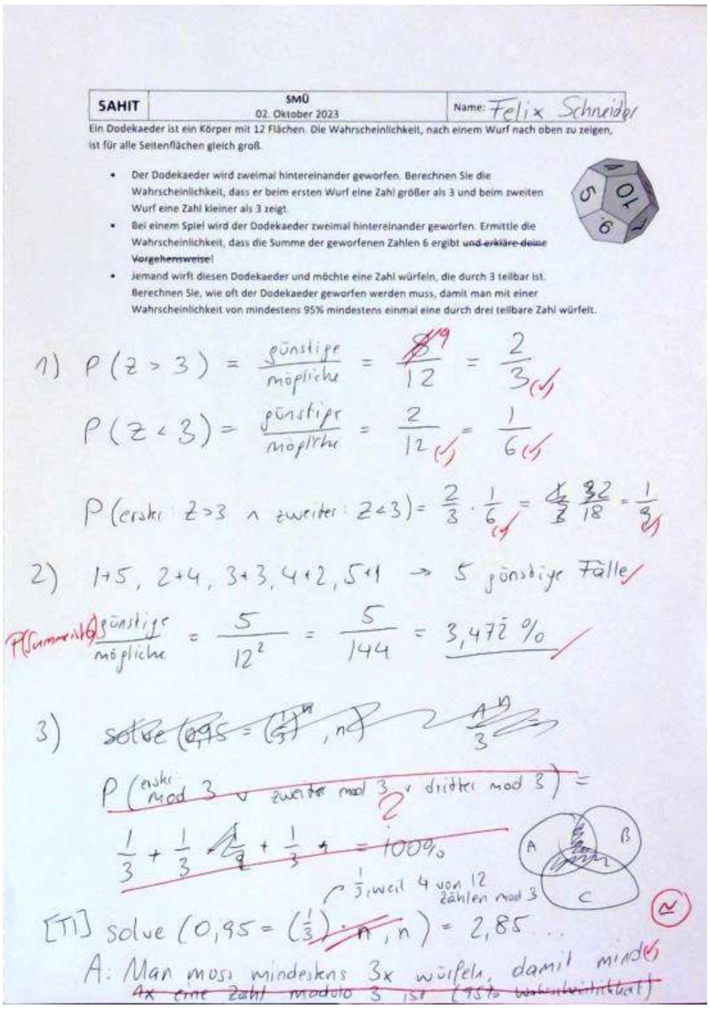


3. $\text{solve}(f1(x)=0,x) \quad x=-2.02437 \text{ or } x=21.8366$

A: Ein letztes Mal für heut ich Antwort schreib,
endlich ist es dafür Zeit,
um nun zur Sache zu kommen:
ein Einschlag wird nach ca. 22m vernommen.

SMÜ, am 02.10.2023

Montag, 28. August 2023 09:59



SAHIT	SMÜ 02. Oktober 2023	Name: Felix Schneider

Ein Dodekaeder ist ein Körper mit 12 Flächen. Die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, ist für alle Seitenflächen gleich groß.

- Der Dodekaeder wird zweimal hintereinander geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er beim ersten Wurf eine Zahl größer als 3 und beim zweiten Wurf eine Zahl kleiner als 3 zeigt.
- Bei einem Spiel wird der Dodekaeder zweimal hintereinander geworfen. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der geworfenen Zahlen 6 ergibt ~~und erkläre deine Vorgehensweise~~!
- Jemand wirft diesen Dodekaeder und möchte eine Zahl würfeln, die durch 3 teilbar ist. Berechnen Sie, wie oft der Dodekaeder geworfen werden muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal eine durch drei teilbare Zahl würfelt.

1) $P(z>3) = \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{\cancel{8}\,9}{12} = \frac{2}{3}$

$P(z<3) = \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P(\text{erster: } z>3 \wedge \text{zweiter: } z<3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \cancel{\frac{1}{3}}\ \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

2) $1+5,\ 2+4,\ 3+3,\ 4+2,\ 5+1 \rightarrow 5$ günstige Fälle

P(Summe 6) $\frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{5}{12^2} = \frac{5}{144} = 3{,}47\dot{2}\,\%$

3) ~~solve$(0{,}95 = (\frac{1}{3})^n, n)$~~ ~~$\frac{1^n}{3}$~~

~~$P(\text{erster mod } 3 \vee \text{zweiter mod } 3 \vee \text{dritter mod } 3) =$~~

~~$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots = 100\%$~~

A B C

$\frac{1}{3}$, weil 4 von 12 Zahlen mod 3

[TI] solve$(0{,}95 = (\frac{1}{3})^{\cancel{n}}, n) = 2{,}85\ldots$

A: Man muss mindestens 3x würfeln, damit mind. ~~1x eine Zahl modulo 3 ist (95% Wahrscheinlichkeit)~~

1) $P(\text{erster} > 3\ \&\ \text{zweiter} < 3) =$

$\frac{9}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 1, 2

2) $6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 1+5$

↳ 5 mögliche Fälle

$P(\text{Summe } 6) = \frac{5}{12^2} = \underline{3{,}47\dot{2}\,\%}$

3) $1 - (\frac{2}{3})^n > 0{,}95$

$\underline{n = 7{,}3883\ldots}$

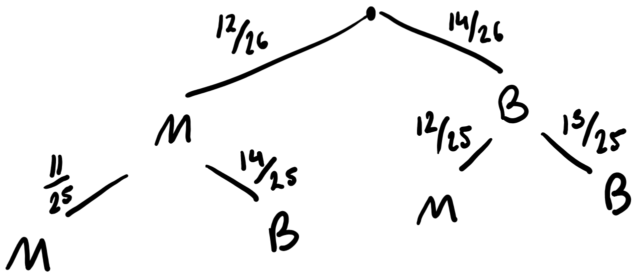
A: Man muss 8x würfeln, damit man zu mehr als 95% mindestens 1x eine Zahl modulo 3 = 0 würfelt.

SA Verbesserung

Montag, 11. Dezember 2023 12:22

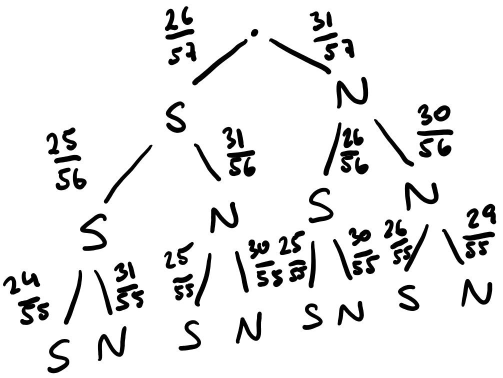
Verbesserung d. 1. SA

1.



$P(\text{mind. 1. Bursche}) = 1 - \frac{11}{25} \cdot \frac{12}{26} = \underline{79{,}692...\%}$

2.



S... Schwarze Schuhe
N... Nicht schwarze Schuhe

$P(\text{mind. } 2\,S) = \frac{26}{57} \cdot \frac{25}{56} + \frac{26}{57} \cdot \frac{31}{56} \cdot \frac{25}{55} + \frac{31}{57} \cdot \frac{26}{56} \cdot \frac{25}{55} \approx \underline{43{,}31...\%}$

x_i	10	-30
$P(X = x_i)$	$1-()$	$\left(\frac{26}{57} \cdot \frac{25}{56} \cdot \frac{24}{55}\right)$

$E(X) = 10 \cdot \left(1 - \frac{26}{57} \cdot \frac{25}{56} \cdot \frac{24}{55}\right) - 30 \cdot \left(\frac{26}{57} \cdot \frac{25}{56} \cdot \frac{24}{55}\right) = \underline{6{,}44...\text{ GE}}$

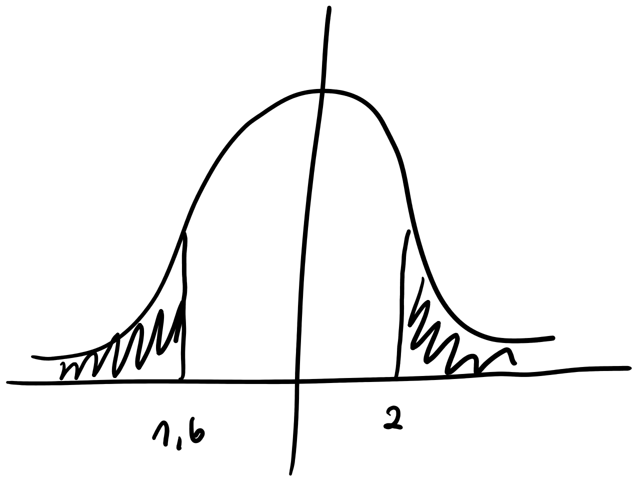
3.

4.

5.

6.

7.



X… Masse in g

$1 - P(1{,}6 \le X \le 2) =$

$1 - \text{normCdf}(1.6, 2, 1.8, 0.1)$

$\approx 4{,}55\%$

8. X… IQ

$P(X > 120) = \text{normCdf}(120, 100, 15) = 9{,}12\%$

$P(X \le x_1) = 0{,}05 \Rightarrow \text{invNorm}(100, 15, 0.05) = 75{,}32\ldots$

$P(X \le x_2) = 0{,}95 \Rightarrow \text{invNorm}(100, 15, 0.95) = 124{,}67\ldots$

Intervall: $[75{,}32\ldots; 124{,}67\ldots]$

$P(X \le x_3) = 0{,}93 \Rightarrow \text{invNorm}(100, 15, 0.93) = 122{,}1\ldots$

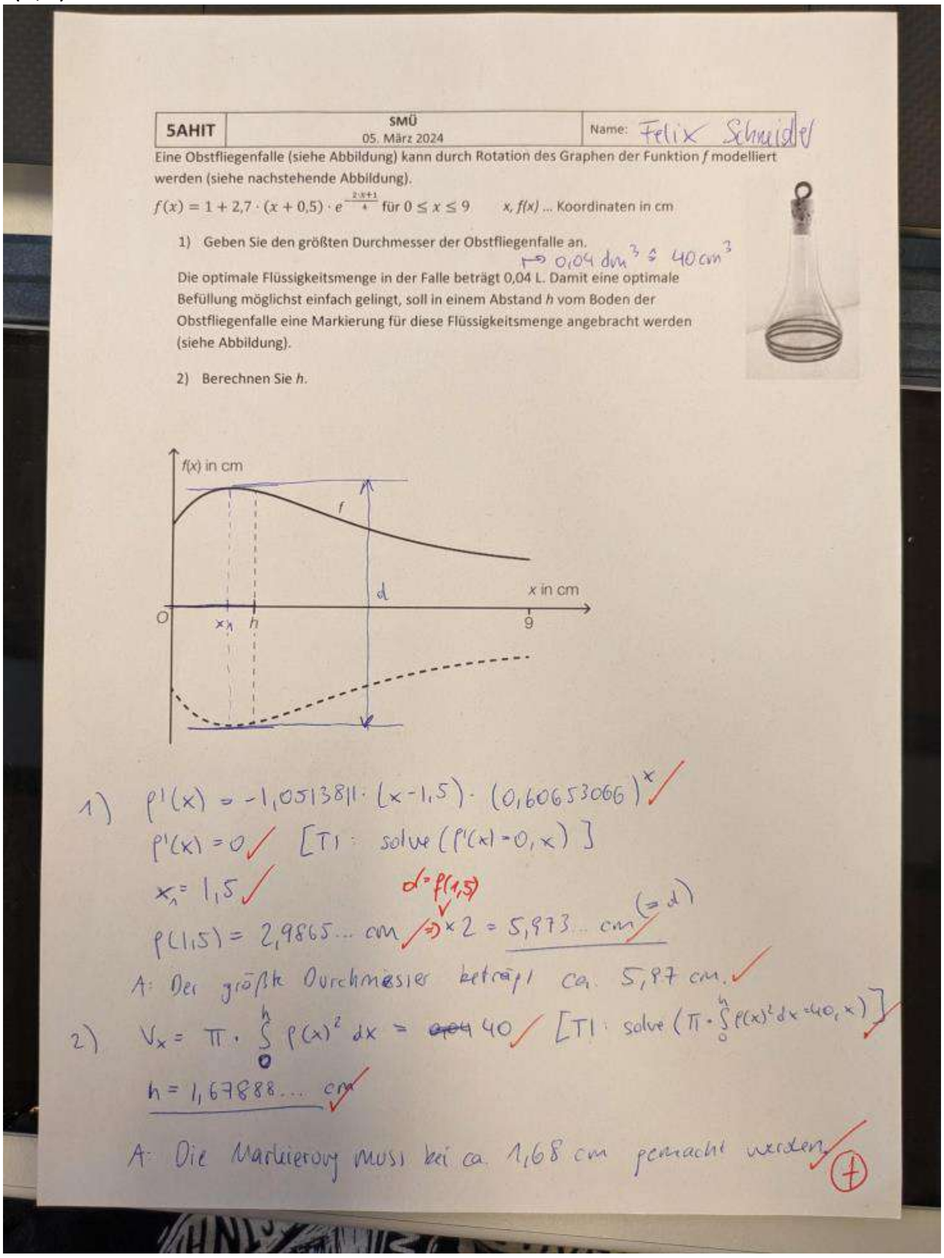
A: Man braucht mind. 123, um zu den Top 7% zu zählen.

SMÜ, am 04.03.2023

Montag, 11. März 2024 14:41

Fa(x) = 0
X = 1,5

f(1,5)*2 = 5.97…cm



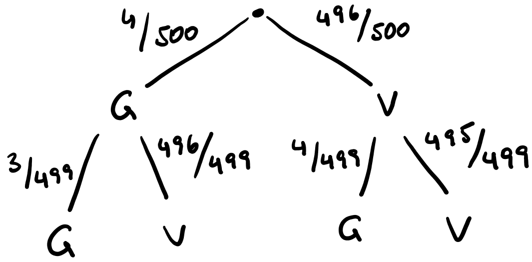
11.10.2023

Mittwoch, 11. Oktober 2023 13:01

Agenda:

- einfache Anfangsbeispiel
- SMÜ verbessern
- Maturabeispiele

8.27 Bei einer Lotterie gibt es 500 Lose, davon sind 4 Gewinnlose. Berechne mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten, beim Kauf von zwei Losen
1) genau ein Gewinnlos zu erhalten.
2) genau zwei Gewinnlose zu erhalten.
3) mindestens ein Gewinnlos zu erhalten.



1) $P(1G) = \frac{4}{500} \cdot \frac{496}{499} + \frac{496}{500} \cdot \frac{4}{499}$

$= 0{,}01590\ldots \approx \underline{1{,}590\ \%}$

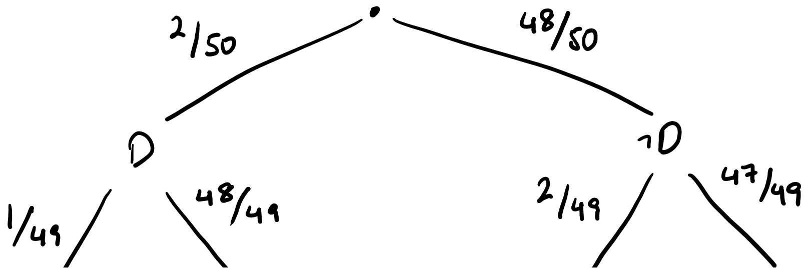
2) $P(2G) = \frac{4}{500} \cdot \frac{3}{499} = 0{,}0000481\ldots \approx \underline{0{,}005\ \%}$

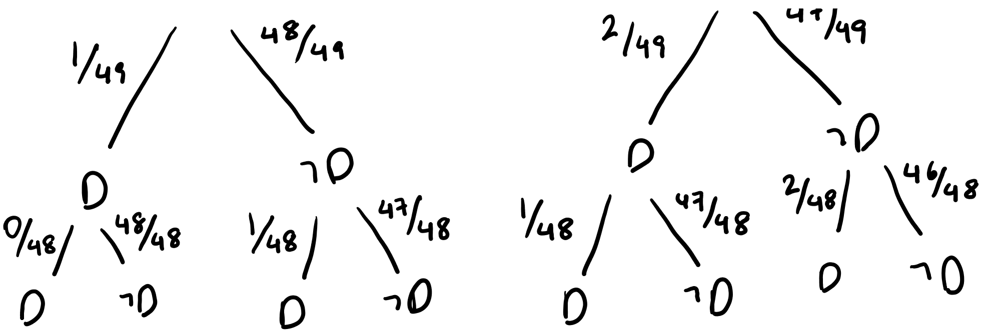
3) $P(\text{mind. } 1G) = \frac{4}{500} + \frac{496}{500} + \frac{4}{499} =$

$= 0{,}01595\ldots \approx \underline{1{,}595\ \%}$

8.28 In einer Schraubenpackung sind 50 Stück, zwei Schrauben davon sind defekt. Man nimmt drei Schrauben hintereinander aus der Packung.
1) Veranschauliche den Sachverhalt mithilfe eines Baumdiagramms.
2) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den drei gezogenen Schrauben die zwei defekten Schrauben befinden.

1)





2) $P(2D) = \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{48}{48} + \frac{2}{50} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{1}{48} + \frac{48}{50} \cdot \frac{2}{49} \cdot \frac{1}{48} =$

$= 0{,}00244\ldots \cong \underline{0{,}244\,\%}$

5BHITM	SMÜ 02. Oktober 2023	Name:

Ein Taxifahrer weiß aus Erfahrung, dass 83% seiner Fahrgäste aus privaten Gründen mit dem Taxi fahren. Der Rest nimmt aus beruflichen Gründen das Taxi.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 zufällig ausgewählten Taxifahrten 2 aus beruflichen Gründen stattfinden. Erstellen Sie dazu ein Baumdiagramm.
- Berechnen Sie, wie viele Fahrgäste der Taxifahrer mindestens transportieren muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einen berufsbedingten Fahrgast mitzunehmen.
- Begründen Sie, ob die Ereignisse A und B Gegenereignisse voneinander sind.
  A: „Von drei Fahrgästen ist mindestens eine Person aus beruflichen Gründen unterwegs."
  B: „Von drei Fahrgästen ist mindestens eine Person aus privaten Gründen unterwegs."

$\frac{83}{100}$ $\quad 1-\frac{83}{100}=\frac{17}{100}$

P(2 beruflich) =

$\frac{17}{100}\cdot\frac{17}{100}\cdot\frac{83}{100}\cdot 3 = 0{,}0719... \approx 7{,}2\%$ 3 Möglichkeiten

beruflich: $\frac{17}{100}$ Gegenwahr.: alle Taxi privat

$1-\left(\frac{83}{100}\right)^n \geq 0{,}90 \rightarrow n \geq 12{,}357...$

A: Es müssen mindestens 13 Personen gefahren werden damit zu 90% mindestens einen beruflichen ...

8.34 Mit einem fairen Würfel wird 2-mal gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit.

1) Der 1. Wurf zeigt fünf.
2) Ein beliebiger Würfel zeigt fünf.
3) Die Augensumme ist fünf.
4) Die Augensumme ist mindestens fünf.

1) $\frac{1}{6}$

2) $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{36}=0{,}2\dot{7}... \approx 28\%$

3) $\frac{1}{9}$

9.5 *1)* Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für die angegebene Zufallsvariable X.
2) Stelle die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion grafisch dar.
a) X ... die Augensumme beim Würfeln mit zwei Würfeln
b) X ... die Anzahl von „Zahl" beim viermaligen Münzwurf

9.5) a) X... Augensumme beim Würfeln mit zwei Würfeln

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$E(X) = \sum_{n=2}^{12} n \cdot P(X=n) = 2 \cdot 1/36 + 3 \cdot 2/36 + \ldots + 11 \cdot 2/36 + 12 \cdot 1/36$$

$$= 7$$

$$V(X) = (X_1 \cdot \mu)^2 \cdot P(X = X_1) + (X_2 \cdot \mu)^2 \cdot P(X = X_2) + \ldots$$

$$= \frac{210}{36}$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \underline{2{,}41\ldots}$$

$$E(x) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}02 + 3 \cdot 0{,}04 + 4 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}06 +$$
$$+ 6 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}15 + 8 \cdot 0{,}45 + 9 \cdot 0{,}07 + 10 \cdot 0{,}04$$

$$= \underline{6{,}96}$$

Bei 1000 Athleten werden wahrscheinlich

20 1-Schüsse,
20 2-Schüsse,
40 3-Schüsse,
50 4-Schüsse,
60 5-Schüsse,
100 6-Schüsse,
150 7-Schüsse,
450 8-Schüsse,
70 9-Schüsse,
40 10-Schüsse

geschossen werden.

B_499:

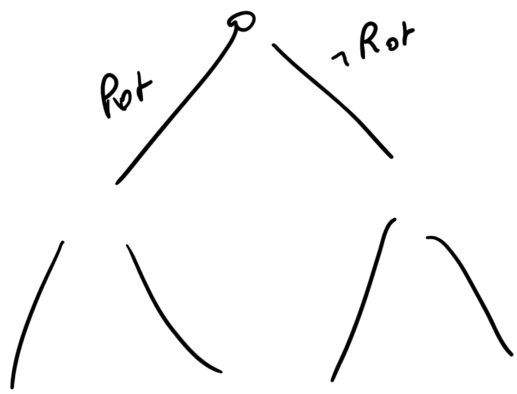
2. Würfelwurf größer

$P(\text{2ter größer}) = \frac{15}{36}$

$P(\text{Summe } 7) = \frac{6}{36}$

B_329:

$P(\text{Gelbphase}) = \frac{3}{57} = \underline{5{,}3\,\%}$



Interpetation:

Wahrscheinlichkeit, dass bei n-Versuchen keine Rotphase erwische.

B_115

$1/16 \quad 2/16 \quad 3/16 \quad \underbrace{4/16 \quad 5/16 \quad 6/16 \quad 5/16} \quad 4/16 \quad 3/16 \quad 2/16 \quad 1/16$

Wahrscheinlichkeit höher als andere Ereignisse.

$(1+2+3)\cdot 2+4 = \frac{16}{36}$

$10+10 = \frac{20}{36}$

06.11.2023

Montag, 6. November 2023 14:58

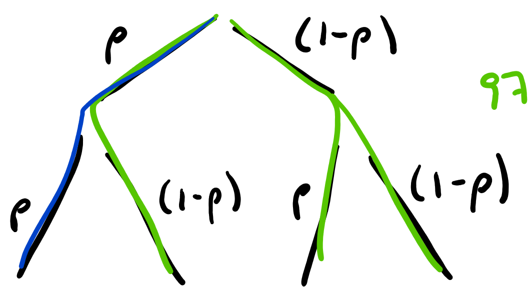
B_511 KINDERLIEDER

ins.	beide	nur Aramsamsam	nur Backe	keines
26	7	6	10	3

1. $P(2 \text{ kennen beide}) = \frac{7}{26} \cdot \frac{6}{25} = \underline{6{,}461\ldots\%}$

2. 2 zufällig ausgewählte, kennen keines

B_506 Flughafen



97,75%

$\sqrt{0{,}0225} = 0{,}15 = \underline{15\%}$

1 A

2 B

A_335 Lern App

1) 5.5

2) 1B
2D

20.11.2023

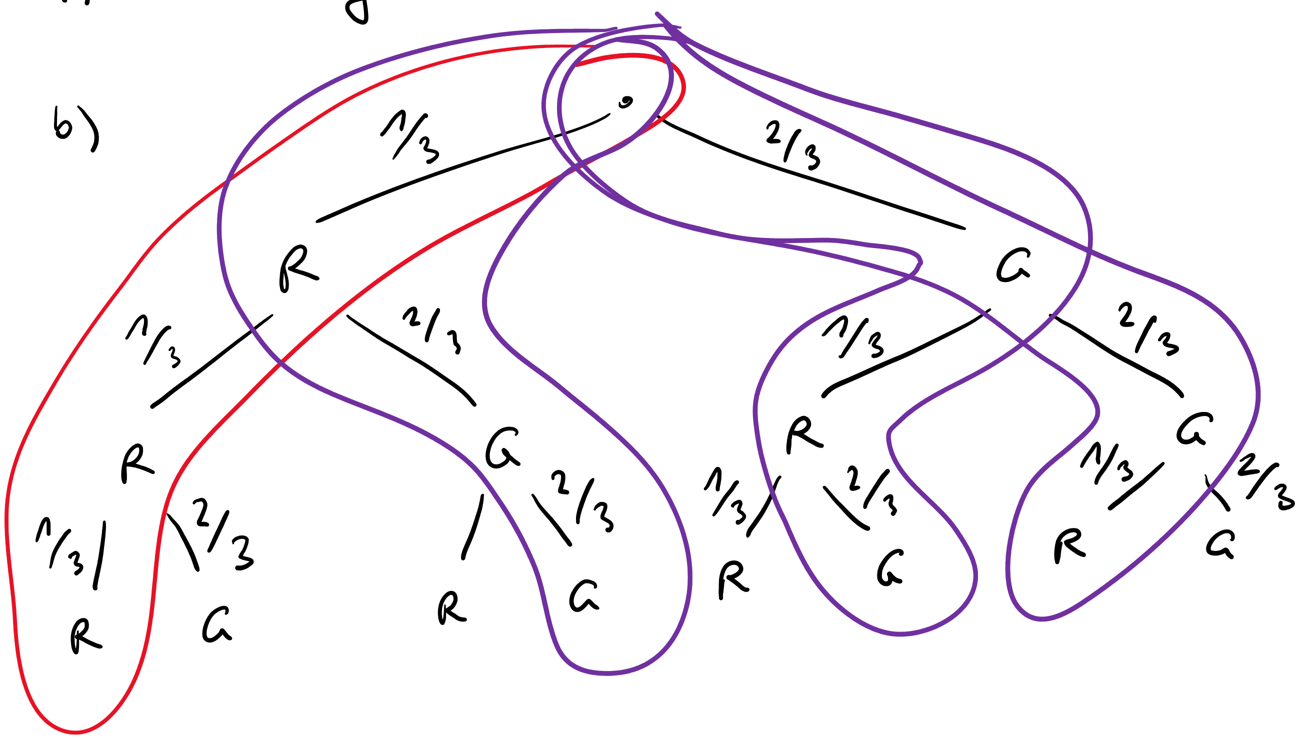
Montag, 20. November 2023 15:01

B_288

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	...

a) Erwartungswert

b)



Man multipliziere die Wahrscheinlichkeiten des Astes mit 3x Rot.

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 3 = \frac{4}{9} = \underline{44{,}4\%}$$

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 3 = \frac{}{9} = \underline{44{,}4\%}$$

1 C

2 D

$\underline{82{,}67\%}$

P(Augensumme 2) · P(2 rote Farben)

$$1/36 \cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = 0{,}0030\ldots$$

$p = 2\% = 0{,}02$

P(1 fällt aus) $= 1 - 0{,}98^{10} = \underline{18{,}2927\%}$

A_239

W', Von 500 Kollisionen entsteht 2x ein bestimmtes Teilchen.

$1000 \cdot 0{,}034 =$ 34 Teilchen

9.34)

$p = \frac{1}{4}$ (Änderung) $N = 500$ $M = 125$

$n = 20$

$x = 9$

X... Anzahl Personen mit neuen Wirkstoff

$P(X=9) =$

$$\frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{125}{9} \cdot \binom{500-125}{20-9}}{\binom{500}{20}}$$

$= \underline{2{,}5542\ldots\,\%}$

Binomial-Annäherung:

$p = \frac{1}{4}$

$n = 20$

$P(X=9) = \underline{2{,}7061\ldots\,\%}$

29.11.2023

Mittwoch, 29. November 2023 13:18

9.109 Das Körpergewicht von Neugeborenen ist normalverteilt mit $\mu = 3\,550$ g und $\sigma = 390$ g.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Neugeborenes
a) mehr als 3 000 g, **b)** weniger als 2 500 g, **c)** zwischen 4 000 g und 5 000 g hat?

2) Ermittle, wie viel ein Neugeborenes wiegen muss, damit es
a) zu den 10 % der schwersten gehört.
b) zu den 15 % der leichtesten Neugeborenen gehört.

3) In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert liegt das Körpergewicht von 80 % der Neugeborenen?

1) a) X … Körpergewicht eines Neugeborenen in g

$P(X > 3000) = 92{,}076\ldots\%$ ✓

normCdf(3000,∞,3550,390) 0.920768

b) $P(X < 2500) = 0{,}354\ldots\%$ ✓

normCdf(-∞,2500,3550,390) 0.003548

c) $P(4000 < X < 5000) = 12{,}418\ldots\%$

normCdf(4000,5000,3550,390) 0.124181

2) a) $P(X \geq x_1) = 0{,}1$ invNorm (0.9, 3550, 390) = 4049,81 g ✓

b) $P(X \leq x_1) = 0{,}15$ invNorm (0.15, 3550, 390) = 3145,79 g ✓

3) invNorm (0.1, 3550, 390) = 3050,19 g ✓

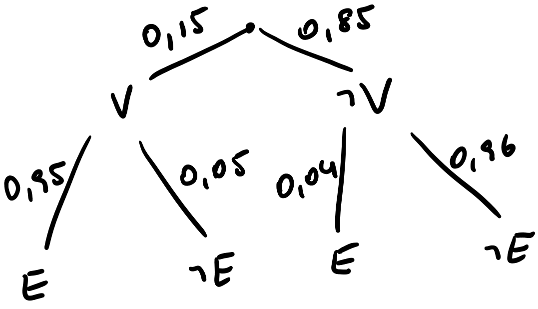
untere Grenze

obere Grenze

3550 + (3550 − 3050,19) = 4049,81 g ✓

A: 80% Neugeboren zwischen 3050,19 g und 4049,81 g. ✓

8.20 Ein neuer Virenscanner erkennt einen Virus im Anhang einer Email mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %. Aus Erfahrung weiß man, dass 15 % der Emails tatsächlich einen Virus im Anhang enthalten. Im Testlauf meldete der Virenscanner auch bei 4 % der einwandfreien Emails einen Virus. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Anhang einen Virus enthält, obwohl der Virenscanner keinen Virus gemeldet hat.



E... erkannt

V... Virus (tatsächlich)

$$P(V \mid \neg E) = \frac{P(\neg E \mid V) \cdot P(V)}{P(\neg E)} =$$

$$= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}15}{0{,}15 \cdot 0{,}05 + 0{,}85 \cdot 0{,}96} = \underline{0{,}9107\ldots \%}$$

B_574) a) b)

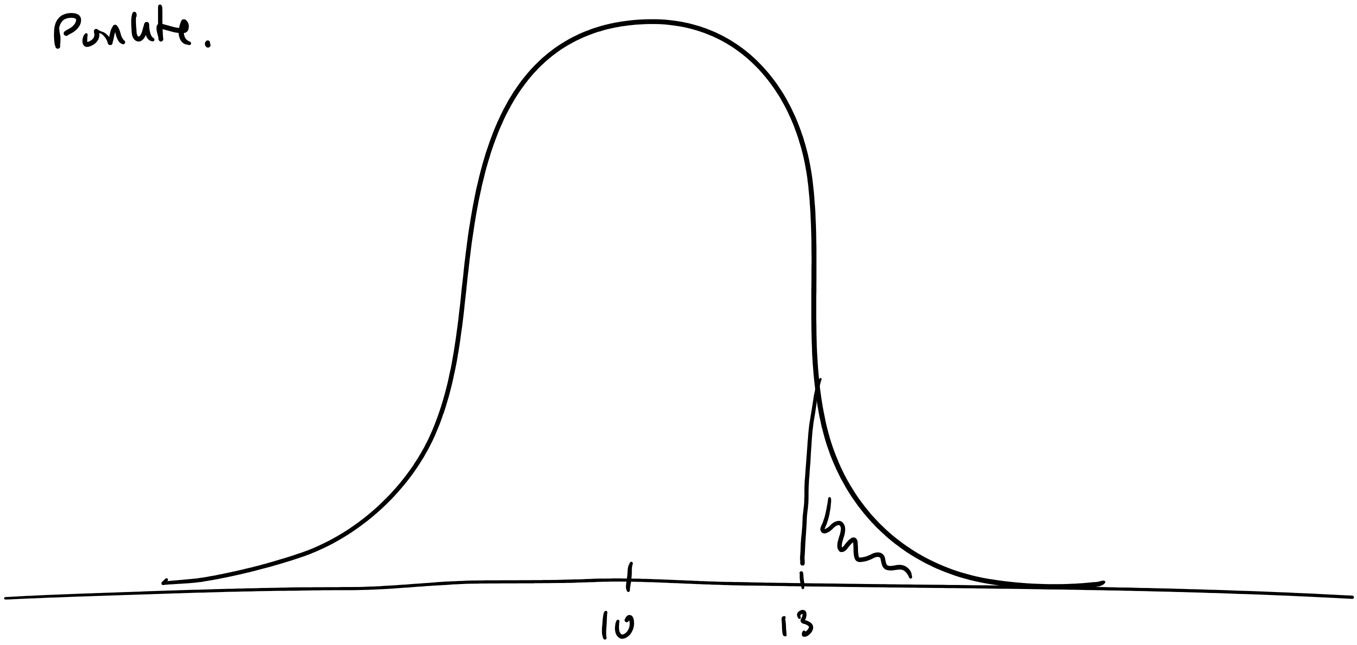
1)

Sektor	A	B	C	D	E
x_i	10	16	20	25	-31
$P(X=x_i)$	$^{30}/_{360}$	$^{40}/_{360}$	$^{80}/_{360}$	$^{100}/_{360}$	$^{110}/_{360}$

2) $E(X) = 10 \cdot {}^{30}/_{360} + 16 \cdot {}^{40}/_{360} + \ldots - 31 \cdot {}^{110}/_{360} = \underline{4{,}5277\ldots}$

3) Im Durchschnitt bekommt man pro Drehung 4,5277.. Punkte.

Punkte.



c) 1) $a_2 = 6 \quad a_3 = 9$

2) $a_n = n \cdot 3$

3) 30

10.01.2024

Mittwoch, 10. Januar 2024 13:13

9.75)

Erwartungswert dafür benötigt wird.

9.75 Bei einem Fahrscheinautomaten ist nach dem Knopfdruck die Ausgabezeit für das Ticket normalverteilt mit $\mu = 2{,}0$ Sekunden und $\sigma = 0{,}3$ Sekunden.

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt für ein Ticket die Ausgabezeit nach dem Knopfdruck nicht im Toleranzbereich von $\mu \pm 1{,}0$ Sekunden?

2) Auf welchen Wert muss der Erwartungswert verändert werden, damit bei unveränderter Standardabweichung nur bei 0,5 % der Tickets die Ausgabezeit länger als 2,5 Sekunden dauert?

1) $\mu = 2s$ X... Ausgabezeit für Ticket in Sekunden

$\sigma = 0{,}3s$

$P(1 < X < 3) = \underline{99{,}9142...\%}$

$1 - P(1 < X < 3) = \underline{0{,}0858...\%}$

A: 0,0858... % liegen außerhalb des symmetrischen 2s Intervalls.

2) $\mu = ?$

$\sigma = 0{,}3s$

$P(X > 2{,}5) = 0{,}005$

$P(Z < z) = 0{,}995$

$P(Z < z) = 0{,}995$

$z_{0{,}995} = 2{,}575\ldots$

$z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$2{,}575\ldots = \frac{2{,}5-\mu}{0{,}3} \rightarrow \underline{\mu = 1{,}72725\ldots}$

A: Der Erwartungswert muss bei 1,72725... liegen.

3. Ab welcher Dauer gehört eine Ausgabezeit zu den längsten 3%.

$\mu = 2\,s$

$\sigma = 0{,}3\,s$

$P(X > x) = 0{,}03$

invNorm $(0.97, 2, 0.3) = \underline{2{,}56424\ldots s}$

4) Welches symmetrische Intervall sind 97% der Ausgabezeiten?

im Intervall $[1{,}34897 ; 2{,}65103]$ liegen 97% aller Ausgabezeiten.

9.110) $\mu = ?$ X... Autolackdicke in μm

9.110) $\mu = ?$ $X \ldots$ Autolackdicke in µm

$\sigma = 5\,\mu m$

$P(X > 32) = 0{,}1$

nSolve(normCdf(32, ∞, x, 5) = 0.1, x, 20, 30)

$\underline{\mu = 25{,}5922\ldots\ \mu m}$

2) $\mu = 35\,\mu m$

$\sigma = ?$

$P(X < 30) = 0{,}05$

$\underline{\sigma = 3{,}03978\ \mu m}$

9.111) $X \ldots$ Aluminiumdicke in mm

I: $P(X < 1{,}9) = 0{,}12$

II: $P(X > 2{,}05) = 0{,}20$

$z_{0,12} = -1{,}17499\ldots$

$z_{0,80} = 0{,}841621\ldots$

$$\underline{\text{I}}: \quad -1{,}17499 = \frac{1{,}9-\mu}{\sigma}$$

$$\underline{\text{II}}: \quad 0{,}841621 = \frac{2{,}05-\mu}{\sigma}$$

$\underline{\mu = 1{,}9874\ldots}$ $\quad \underline{\sigma = 0{,}074382\ldots}$

9.113)

1) $\mu = 55\,cm$

$\sigma = 3{,}5\,cm$

X... Baumstamm-durchmesser in cm

$P(X < 30) + P(X > 60) =$

$\underline{7{,}656\ldots\ \%}$

2) $p = 84\%$ $\quad n = 50$

$P(X = 25) =$

binomPdf(50, 1-0.84, 25) =

$\underline{0{,}000002\ \%}$

15.01.24

Montag, 15. Januar 2024 14:59

B_577) a)

1) 1. B
2. A

2) $\mu = \frac{590+430}{2} = 510\,mg/L$

$\sigma = ?$ X... Koffeingehalt in mg/L

$P(X < 590) = 0{,}85$

$z_{0{,}85} = 1{,}03643...$

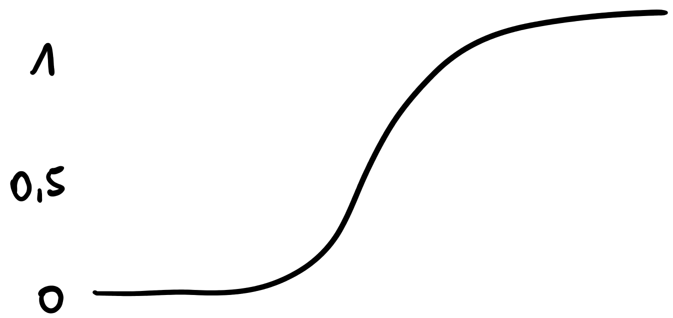
$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$1{,}0364... = \frac{590-510}{\sigma} \rightarrow \underline{\sigma = 77{,}1878...\,mg/L}$

B_563 b)

1) $]\mu-\sigma ; \mu+\sigma[$

2)



3) $\mu = 92$ min X... Ladedauer in min

$\sigma = ?$

$P(X < 86) = 0{,}12$

nSolve (normCdf(-∞, 86, 92, x)=0.12, x, 0.01, 100)

$\underline{\sigma = x = 5{,}10644}$ min

$\mu_X = 80$ N/cm

$\mu_X = \frac{3}{\sqrt{8}}$ N/cm

Matura Wiederholung

Montag, 12. Februar 2024 14:57

Umwandeln

$1 \frac{kg}{dm^3} \hat{=} 10^{-3} \frac{kg}{cm^3}$

Gleitkommadarstellung

$1 \leq a \leq 10$ normiert

$23,9 \cdot 10^{10} = 2,39 \cdot 10^{11}$

$0,0279 \cdot 10^{-17} = 2,79 \cdot 10^{-19}$

$235,73 = 2,3573 \cdot 10^{2}$

S. 305 / 3) $\frac{2,4 \cdot 10^{24}}{4} = 0,6 \cdot 10^{24} = \underline{6 \cdot 10^{23}}$

4) $a \cdot 10^{k} = 0,01 \cdot a \cdot 10^{k+2}$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$a^r : a^s = a^{r-s}$

$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

$a \cdot 10^{k} = a \cdot 10^{k+2} \cdot 10^{-2}$

$10^{-2} = 0,01$

=) $10^{-29} = c \cdot 10^{94} \quad | : 10^{94}$

5) $10^{-29} = r \cdot 10^{94} \quad | : 10^{94}$

$r = \frac{10^{-29}}{10^{94}}$

$r = 10^{-29} \cdot 10^{-94}$

$r = 10^{-29-94}$

$r = 10^{-123}$

A_287) 7300 Tonnen $= 7{,}3 \cdot 10^6$ kg

$m = \rho \cdot V$

$7{,}3 \cdot 10^6 = 7800 \frac{kg}{m^3} \cdot V \quad | : V$

$\underline{V = 935{,}897 \ m^3}$

$A = 125^2 = 15625 \ m^2$

$h = \frac{V}{A} = 0{,}0598 \, m \mathrel{\hat{=}} \underline{5{,}98 \, cm}$

B_543) c)

$d = 2mm \qquad m = \rho \cdot V \qquad 1 \frac{kg}{m^3} \mathrel{\hat{=}} 1000 \frac{g}{m^3} \mathrel{\hat{=}} 1 \frac{g}{dm^3} \mathrel{\hat{=}} 10^{-6} \frac{g}{mm^3}$

$\rho = 2650 \ kg/m^3 \mathrel{\hat{=}} 2650 \cdot 10^{-6} \frac{g}{mm^3}$

$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \qquad r = 1mm$

$V = \frac{4\pi}{3} \ mm^3$

$\underline{m = 0{,}0111 \ g}$

B_531) a) $l_3 = 1{,}1 \cdot l_2$

B_531)a) [illegible]

$l_6 = 14{,}4946 \quad (l_1 = 9)$

A_290) $p = \frac{A}{G}$ $\qquad p = 1{,}0504$

$A = 834$ Mio €

$A = p \cdot G$

$G = \frac{A}{p} = 793{,}983\ldots$ Mio. €

A_316) a) $V_{A4} = 210 \cdot 297$ mm

$V_{A4} = 62370\,mm^2$

$g = 80\,\frac{g}{m^2} = 80 \cdot 10^{-6}\,\frac{g}{mm^2}$

$x = 62370 \cdot 80 \cdot 10^{-6}$

$\underline{x = 4{,}9896\,g}$

$20 > 3x + 4g$

$20 > \underline{18{,}9688\,g}$

A: 3 Blätter + Umschlag geht sich aus.

b) $\frac{225}{412} = 0{,}54611\ldots \cdot 100\,\% = \underline{54{,}611\,\%}$

$22 \cdot 10^6 \cdot 10^3\,kg \cdot 2{,}5$ kWh $= 55 \cdot 10^9$ kWh

$\hat{=}\ 55 \cdot 10^{12}$ Wh $\hat{=}\ \underline{55 \cdot 10^3 \text{ GWh}}$

A_319)c) 1) Es kann sich die gesamte Anzahl an Menschen gesteigert haben.

Lineare Funktionen

$\tan(\alpha) = k$ / $\arctan(k) = \alpha$

k ... Steigung

α ... Steigungswinkel

A_287) b) $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3594000 - 1027000}{1980 - 1950} = \underline{85566{,}7}$

$\underline{b(t) = 85566{,}7... \cdot t + 1027000}$

$b(1993 - 1950) = 4706370$

A_290) a) 1) E

2) $\arctan(k) = 21{,}8014$

$\sin(\alpha) \cdot 180 = \underline{66{,}8503\ m}$

Wiederholung

Lineare Funktionen

A_301

1. $h_1(t) = 12000 - 90 \cdot t$

t ... Flugzeit in min

$h_1(t)$ ... Flughöhe

2. $h_2(t) = k \cdot t + 12000$

$$\left.\begin{array}{l} P_1(0 \mid 12000) \\ P_2(4 \mid 11500) \end{array}\right\} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11500 - 12000}{4 - 0} = -125 = k$$

$h_2(t) = -125 \cdot t + 12000$

A: Das zweite Flugzeug sinkt schnälle.

A_316) $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,39 - 2,93}{2000 - 1990} = 0,146 \frac{\text{Tonnen}}{\text{Jahr}}$

$k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5,00 - 4,39}{2012 - 2000} = 0,050833 \frac{\text{Tonnen}}{\text{Jahr}}$

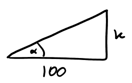
$k_1 \neq k_2$, somit kann keine lineare Funktion alle 3 Punkte einschließen

A_334) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{GK}{HY} = \frac{a}{b}$

$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\left(\frac{a}{b}\right)$

$\underline{\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{b}\right) \cdot 2}$

2. $\underline{\alpha = 11,905^\circ}$



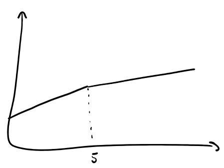
$\tan(\alpha) = \frac{k}{100}$

$k = \tan(\alpha) \cdot 100$

$\underline{k = 21,082... \%}$

A_332 $G = 4$ €

$p = 2$ € / km



Quadratische F

Scheitelpunktform: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Potenzfunktionen

$f(x) = c \cdot x^n$

B_478) c) $g(T) = a - b \cdot (T - 4)^2$

$S = (4 \mid a)$

A: Da der Koeffizient $-b$ negativ ist, ist die quadratische Funktion eine Glockenform

A: Da der Koeffizient $-b$ negativ ist, ist die quadratische Funktion eine Glockenform
↳ dadurch HP

3) $\varrho(T) = -0{,}007 \cdot (T-4)^2 + 999{,}972$

$f(T) = 0{,}028 \cdot T + d$

$\varrho'(T_1) = 0{,}028$ ← Punkt, wo schneiden

$T_1 = 2$ $P(2|y_1)$

$\varrho(2) = 999{,}944$ $P(2|999{,}944)$

$999{,}944 = 0{,}028 \cdot 2 + d$

$\underline{d = 999{,}888 \ kg/m^3}$

4) $\varrho(10) = 999{,}72 \ kg/m^3$

$|\varrho(10) - 999{,}700| = 0{,}02$

absoluter Fehler: $\underline{0{,}02 \ kg/m^3}$

B_578) b) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

I: $f(4) = 0{,}5$

II: $f(27) = 0{,}5$

III: $f(15{,}5) = 5$

K = f'(4) = 18/23

Alpha = arctan(k) = arctan(18/23)

Exponential F

$f(x) = a^x$ → steigt, wenn $a > 1$

$f(x) = c \cdot a^x$ → c an Ordinatenabschnitt

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}995^t$

↑ Anfangswert ↖ pro Jahr um 0,5% weniger

Logarithmus

$4^x = 16384$

$x \cdot \ln(4) = \ln(16384)$ $x = \frac{\ln(16384)}{\ln(4)} = \underline{7}$

Logarithmische F

↳ Umkehrfunktion von Exponential F
(spiegeln 1. Mediane)

A 315) c)

$f(x) = c \cdot a^x$

$P(0|100)$ → $c = 100$

$P(1000|20)$

$20 = 100 \cdot a^{1000}$

$a = -0{,}9983...$

$f(x) = 100 \cdot 0{,}9983...^x$

$10 = 100 \cdot 0{,}9983..^x$

$\underline{\underline{x = 1430{,}8}}$

A: Nach 1431 Fahrzeugen

$P(600|50)$ $P(0|100)$ $P(1200|25)$

A_331) b)

$N(t) = 0{,}95 \cdot N_0$

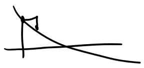
$0{,}95 \cdot \cancel{N_0} = \cancel{N_0} \cdot 0{,}995^t$

$0{,}95 = 0{,}995^t$

$\underline{t = 10{,}233}\ y$

$\ln(0{,}95) = t \cdot \ln(0{,}995)$

$t = \frac{\ln(0{,}95)}{\ln(0{,}995)}$



B_478) a)

$T_f(x) = a + b \cdot e^{c \cdot x}$

$T_f(0) = 10$

$T_f(x) = 4 + 6 \cdot e^{c \cdot x}$

$P(6|7)$:

$7 = 4 + 6 \cdot e^{c \cdot 6}$

ii) $x_1 = 6$

Winkelfunktion

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

B_578) $a = 9{,}5$

$\underline{d = 10}$

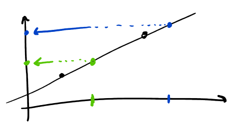
$T = 30$

$\omega = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$

$b = \frac{\pi}{15}$

$0 = -\frac{\varphi}{\pi/15} \rightarrow \varphi = 0 = \underline{c}$

B_576)



Lineare Interpolation

Extrapolation

$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + y)$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

$A = 10$

$\omega = 1$

$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

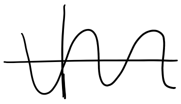
$\frac{\pi}{2} = -\frac{\varphi}{1}$

$\varphi = -\pi/2$

$y(t) = 10 \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

$A = 2$
$\omega = \frac{1}{2}$ $\quad y(t) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2} t)$

$t_0 = 0$
$\varphi = 0$



Logarithmische Skalierung

B_379)

$P(80|4) \rightarrow 96\%$ verloren gegangen

40km lang sein

$I(x) = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

$\lambda = 0{,}0401...$

Kosten- und Preistheorie

$K(x)$ ... Kosten

$K'(x)$ ... Grenzkosten

$\overline{K(x)} = \frac{K(x)}{x}$ ... Stückkosten

$E(x)$ ... Erlös $\approx x \cdot p(x)$

$G(x) = E(x) - K(x)$

Differenzial- & Integralrechnung

$f(x) = -0{,}0008x^3 + 0{,}0174x^2 + 0{,}2406x + 0{,}6025$

1) $f(0) = 0{,}6025$ ...m

2) $\frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \ldots \frac{m}{m}$

3) $\frac{f(24) - f(2)}{f(2)} = \ldots \cdot 100\%$

4) $f(4) = \ldots$ m

5) $f(x) = 0$

6) $f'(x) = 0$
$f''(x) < 0 \rightarrow$ Maximum

7) $f''(x) = 0$
Wendepunkt

$f''(x) = 0$
$x = 7{,}25\ldots$ $\quad f'''(7{,}25\ldots) \neq 0$
$f'(7{,}25\ldots) = 36{,}\ldots\%$

8) $\tan(\alpha) = 0{,}36\ldots$
$\alpha = 20{,}1405\ldots°$

9) $f(x) = 0$
$x = \ldots$

10) $f(x) = 0{,}9$
$x \ldots$

11) Funktion: Grad n
maximal n Nullstellen
maximal $n-1$ Extremstellen
maximal $n-2$ Wendestellen
1 Wendestelle beim Beispiel

maximal $n-1$ Extremstellen

maximal $n-2$ Wendestellen

max. 1 Wendestelle kein Beispiel

12) $t: y = kx + d$

$W(7{,}25\ldots | 2{,}95\ldots)$

$f'(7{,}25) = k = 0{,}36\ldots$

$y = 0{,}36\ldots \cdot x + d$

$2{,}95\ldots = 0{,}36\ldots \cdot 7{,}25\ldots + d$

$d = 0{,}34\ldots$

$t: y = 0{,}36\ldots x + 0{,}74\ldots$

13) $f'(x) = \ldots$

$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx =$

$= \int_0^{24} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

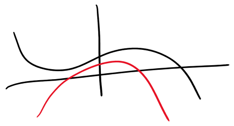
[TI: arclen (f(x), a, b)]

14) $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

$m = \frac{1}{24} \cdot \int_0^{24} f(x)\, dx$

$m = \approx 4{,}065\ldots$ m

15)



B_497

I: $g(4) = 3$

II: $g(16) = 2$

III: $\tan(42) = g'(16)$

IV: $g'(4) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 16^3 & 16^2 & 16 & 1 \\ 3\cdot 16^2 & 32 & 1 & 0 \\ 3\cdot 4^2 & 2\cdot 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \tan(42) \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2\, dy$

$c = 3 \qquad f(0) = 3$

$d = 40$

$y = \frac{37}{19^6} \cdot x^6 + 3$

$y - 3 = \frac{37}{19^6}\, x^6$

$\frac{19^6}{37} \cdot (y-3) = x^6$

$x^2 = \sqrt[3]{\frac{19^6}{37} \cdot (y-3)}$

$=$

B_508)

$a(t) = v_B'(t)$

$a(1) = \ldots \frac{m}{s^2}$

Interpretation: Mittlere Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ im Intervall [5, 8]

...

$a(1) = \ \ldots \ \frac{m}{s^2}$

Interpretation: Mittlere Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ im Intervall [5, 8]

$- \quad 100 - \int_0^{9{,}69} v_T(t) \cdot dt$

Schulübung, am 04.03.2024

B_213) - [0,55; 2,1]

↳ farbiger Strich x-Achse

- die Flächeninhalte oberhalb und unterhalb der x-Achse sind nicht gleich groß...

DIFFERENTIALGLEICHUNG

B_487 $\quad \frac{dE}{dx} = -k \cdot E(x)$

2) $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E(x) + S(x)$

↳ Inhomogene Diff.gl.

$-S \rightarrow$ homogene Diff.gl.

$\frac{dE}{dx} = (-k \cdot E + S) \cdot 1$

$\frac{dE}{-kE + S} = dx$

$\int \frac{dE}{-kE+S} = \int dx$ $\quad$ Trennen der Variablen

$\frac{\ln|-kE+S|}{-k} = x + C_1 \quad | \cdot (-k)$

$\ln|-kE+S| = -k \cdot x + C_2$

$-kE + S = e^{-kx} \cdot C_3$

$-kE = e^{-kx} \cdot C_3 - S$

$E(x) = C_4 \cdot e^{-k \cdot x} + \frac{S}{k}$

↳ allgemeine Lösung der inhomogenen Diff.gl.

→ Spezielle Lösung: nach Einsetzen einer Anfangsbedingung in allgemeine Lsg

B_566: $\quad \frac{df}{dt} = k \cdot (G - f(t))$

$f(0) = 1000 - 900 \cdot e^{-k \cdot 0}$

$f(0) = 100$

Wenn t nach ∞ geht, geht e^{-t} gegen 0, weswegen $900 \cdot e^{-t}$ immer kleiner wird, somit nähern wir uns 1000.

B_509 $\quad$ Solange V größer 350 ist

$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\text{1. Ableitung}} = 0{,}001 \cdot \underbrace{\overbrace{(350 - V)}^{>0}}_{V < 350}$

Schulübung, am 05.03.2024

B_603 $\quad$ Pilzkultur

$\frac{dm}{dt} = a - \lambda \cdot m$

1) $\frac{dm}{dt} = -\lambda \cdot m$

2) $m'(t) = \underbrace{a \cdot e^{-\lambda \cdot t}}_{m(t)} \cdot (-\lambda)$

$m'(t) = -\lambda \cdot m \neq +a$ ← positiv $\neq 0$

Falsche Behauptung

3) Anfangsbedingung: $m(0) = 2$

$m'(t) = -\lambda \cdot m$ T +a

Falsche Behauptung

3) Anfangsbedingung: $m(0) = 2$

4) A: mittlere Masse im Intervall $[t_1; t_2]$ entspricht 400 µg.

B_531 1) $\frac{b}{\sin(\varepsilon)} = \frac{s}{\sin(180-\varepsilon-\varphi)}$

$s = \frac{b}{\sin(\varepsilon)} \cdot \sin(180° - \varepsilon - \varphi)$

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$a^2 = s^2 + b^2 - 2 \cdot s \cdot b \cdot \cos(\varphi) \quad | -s^2 - b^2$

$a^2 - s^2 - b^2 = -2sb \cdot \cos(\varphi) \quad | : (-2sb)$

$\cos(\varphi) = \frac{a^2 - s^2 - b^2}{-2sb}$

$\varphi = \arccos\left(\frac{a^2 - s^2 - b^2}{-2sb}\right)$

3) → 4 ist falsch

B_575 b)

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

SRDP

Sitzgelegenheiten

a) Ein Teil des nebenstehend abgebildeten Sessels kann modellhaft durch die Graphen der Funktionen p, f und g beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

Für die Funktionen p und f gilt:

$p(x) = -0{,}44 \cdot x^3 + 1{,}9 \cdot x^2 - 3{,}6 \cdot x + 7{,}9$ mit $0 \leq x \leq 2{,}4$

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 - 148 \cdot x^2 + 275 \cdot x - 183$ mit $2{,}4 \leq x \leq 3{,}1$

x, $p(x)$, $f(x)$ ... Koordinaten in dm

Im Punkt A haben die Funktionen p und f den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b der Funktion f. [0/1 P.]

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b. [0/1 P.]

Die Gerade g ist Tangente an f im Punkt B.

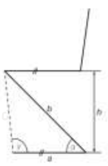
3) Stellen Sie eine Gleichung der Tangente g auf. [0/1 P.]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

SRDP

b) Der *Zickzack-Stuhl* (siehe nebenstehende Abbildung) wurde 1932 vom niederländischen Designer Gerrit Thomas Rietveld entworfen.

Eine Tischlermeisterin baut einen Zickzack-Stuhl entsprechend der nachstehenden Abbildung nach.



Es gilt: $a = 39$ cm, $b = 61{,}5$ cm, $\alpha = 45°$

1) Berechnen Sie den stumpfen Winkel γ. [0/1 P.]

Die Sitzhöhe des Originals beträgt 43 cm.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Sitzhöhe h des nachgebauten Stuhls von der Sitzhöhe des Originals abweicht. [0/1 P.]

$\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$

$h = \sin(45) \cdot 61{,}5 = 43{,}4871\ldots$ cm

$\frac{43{,}4871}{43} = 1{,}13\ldots\%$ mehr

1) Cosinussatz

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\alpha)$

$c = \sqrt{39^2 + 61{,}5^2 - 2 \cdot 39 \cdot 61{,}5 \cdot \cos(45°)}$

$c = 43{,}7179\ldots$ cm

$\frac{b}{\sin(\gamma)} = \frac{c}{\sin(\alpha)}$

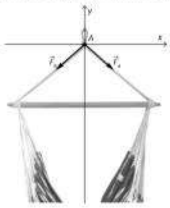
$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{b}{\frac{c}{\sin(\alpha)}}\right) = \arcsin\left(\frac{61{,}5}{\frac{43{,}7179\ldots}{\sin(45)}}\right)$

$\gamma_1 = 84{,}109\ldots°$

$\gamma = 180° - \gamma_1 = \underline{95{,}891\ldots°}$

SINUSSATZ GIBT NUR SPITZE WINKEL AN!

c) Ein Hängesessel wird im Punkt A befestigt (siehe nachstehende Abbildung).



Quelle: BMBWF

Die im Punkt A wirkende Gewichtskraft $\vec{G}$ wird in die zwei Kräfte $\vec{F}_a$ und $\vec{F}_b$ zerlegt.
Es gilt: $|\vec{F}_a| = |\vec{F}_b|$

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung das entsprechende Kräfteparallelogramm und die Gewichtskraft $\vec{G}$. *[0/1 P.]*

Für den Vektor $\vec{F}_a$ (in Newton) gilt: $|\vec{F}_a| = 25$ und $\vec{F}_a = \begin{pmatrix} 20 \\ a_y \end{pmatrix}$ mit $a_y < 0$

2) Berechnen Sie a_y. *[0/1 P.]*

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel α ein, für den gilt:
$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 20 \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{25}$ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 - 296 \cdot x + 275$
$p'(x) = -1{,}32 \cdot x^2 + 3{,}8 \cdot x - 3{,}6$

I: $f(2{,}4) = p(2{,}4)$
II: $f'(2{,}4) = p'(2{,}4)$

oder:

I: $a \cdot 2{,}4^4 + b \cdot 2{,}4^3 - 148 \cdot 2{,}4^2 + 275 \cdot 2{,}4 - 183 = 4{,}12...$
II: $4 \cdot a \cdot 2{,}4^3 + 3 \cdot b \cdot 2{,}4^2 - 296 \cdot 2{,}4 + 275 = -2{,}08...$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{41\,185}{13\,824} = -2{,}97...$
$b = \frac{747\,571}{21\,600} = 34{,}60...$

a3) $g(x) = k \cdot x + d$

$k = f'(3{,}1) = 0{,}1815...$
$d = f(3{,}1) - 3{,}1 \cdot k = 3{,}140... - 3{,}1 \cdot 0{,}1815... = 2{,}577...$

$g(x) = 0{,}1815... \cdot x + 2{,}577...$

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a und b.
a3) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Tangente.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

SRDP
Standardisierte Reife- und Diplomprüfung

b1) Berechnen der dritten Seite x des Dreiecks (strichliert eingezeichnet):

$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)} = \sqrt{39^2 + 61{,}5^2 - 2 \cdot 39 \cdot 61{,}5 \cdot \cos(45°)} = 43{,}71...$

$\frac{b}{\sin(\gamma_1)} = \frac{x}{\sin(\alpha)}$

$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\alpha)}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{61{,}5 \cdot \sin(45°)}{43{,}71...}\right) = 84{,}10...°$

$\gamma = 180° - \gamma_1 = 95{,}89...°$

b2) $h = b \cdot \sin(\alpha) = 61{,}5 \cdot \sin(45°) = 43{,}48...$

$\frac{43{,}48... - 43}{43} = 0{,}0113...$

Die Sitzhöhe h des nachgebauten Stuhls weicht um rund 1,1 % von der Sitzhöhe des Originals ab.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des stumpfen Winkels γ.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der prozentuellen Abweichung.

c1 und c3)

c2) $20^2 + a_y^2 = 25^2$

$a_y = -15$

c1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a_y.
c3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Winkels α.

Sitzgelegenheiten / Haupttermin 2023 / B_575 S. 5/5

VEKTOREN

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 9 \cdot 2 + 1 \cdot 7 = 25$

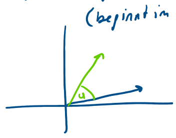
Orthogonalitätskriterium:
normal, wenn Skalarprodukt 0

parallel:

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor:
(beginnt im Ursprung)



$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}$

$\cos(\varphi) = \frac{25}{\sqrt{9^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+7^2}}$

B_552) $\vec{F}_L = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

A_317) b)

$p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

I: $p(25) = 200$

II: $p(70) = 60$

III: $p'(25) = 0$

IIII: $p'(70) = 0$

a b c d

$$
\begin{array}{c}
\\ \underline{I} \\ \underline{II} \\ \underline{III} \\ \underline{IV}
\end{array}
\begin{array}{cccc}
a & b & c & d \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} \underline{I} \\ \underline{II} \\ \underline{III} \\ \underline{IV} \end{array}
\begin{pmatrix} 25^3 & 25^2 & 25 & 1 \\ 70^3 & 70^2 & 70 & 1 \\ 3\cdot 25^2 & 2\cdot 25 & 1 & 0 \\ 3\cdot 70^2 & 2\cdot 70 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$\text{Solve}\left(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}, \{a, b, c, d\} \right)$$

Sü, am 11.03.2024

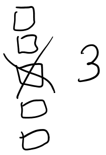
A_315) a)

A_318) b)

$$\tan(\alpha) = \frac{H-h}{a}$$

$$H - h = \tan(\alpha) \cdot a$$

$$H = h + \tan(\alpha) \cdot a$$



B_601) a) $\alpha = 180° - \delta = \underline{132{,}3°}$

dann über Sinussatz auf 1 Seite, c z

B_564) b) $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$

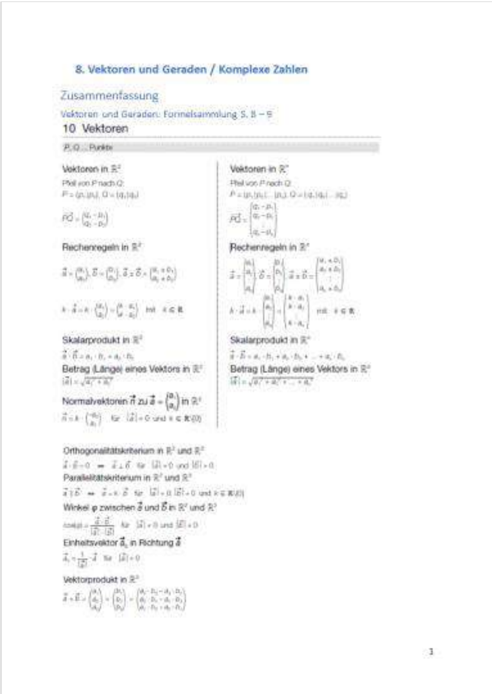
$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\beta) + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(\delta)$$

Cosinussatz → e

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\beta)}$$

$$\text{solve}\left(e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(\delta), \delta\right)$$

Sü, am 12.03.2024



8. Vektoren und Geraden / Komplexe Zahlen

Zusammenfassung

Vektoren und Geraden: Formelsammlung S. 8 – 9

10 Vektoren

P, Q ... Punkte

Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Pfeil von P nach Q:
$P = (p_1|p_2),\ Q = (q_1|q_2)$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$

Rechenregeln in $\mathbb{R}^2$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$

$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Betrag (Länge) eines Vektors in $\mathbb{R}^2$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Normalvektoren $\vec{n}$ zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

$\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ für $|\vec{a}| \neq 0$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Vektoren in $\mathbb{R}^n$

Pfeil von P nach Q:
$P = (p_1|p_2|\dots|p_n),\ Q = (q_1|q_2|\dots|q_n)$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$

Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$

$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$

Betrag (Länge) eines Vektors in $\mathbb{R}^n$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Orthogonalitätskriterium in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ für $|\vec{a}| \neq 0$ und $|\vec{b}| \neq 0$

Parallelitätskriterium in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$ für $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ für $|\vec{a}| \neq 0$ und $|\vec{b}| \neq 0$

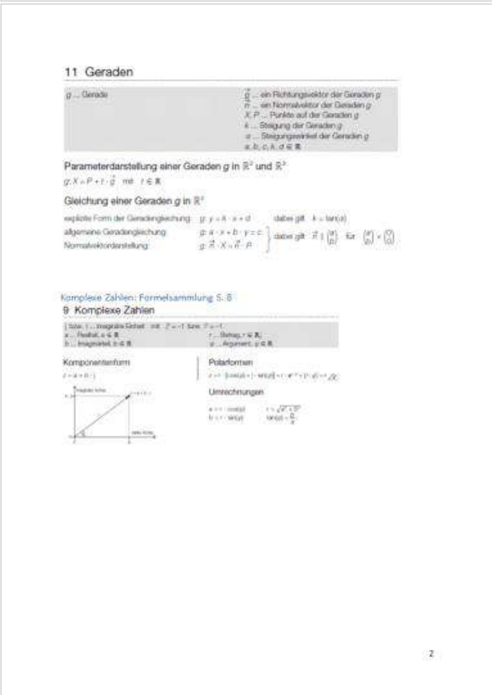
Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung $\vec{a}$

$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ für $|\vec{a}| \neq 0$

Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

1



11 Geraden

g ... Gerade

$\vec{g}$ ... ein Richtungsvektor der Geraden g
$\vec{n}$ ... ein Normalvektor der Geraden g
X, P ... Punkte auf der Geraden g
k ... Steigung der Geraden g
α ... Steigungswinkel der Geraden g
$a, b, c, k, d \in \mathbb{R}$

Parameterdarstellung einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$g: X = P + t \cdot \vec{g}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Gleichung einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$

explizite Form der Geradengleichung: $g: y = k \cdot x + d$ dabei gilt: $k = \tan(\alpha)$

allgemeine Geradengleichung: $g: a \cdot x + b \cdot y = c$
Normalvektordarstellung: $g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$
dabei gilt: $\vec{n} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Komplexe Zahlen: Formelsammlung S. 8

9 Komplexe Zahlen

i bzw. j ... imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ bzw. $j^2 = -1$
a ... Realteil, $a \in \mathbb{R}$
b ... Imaginärteil, $b \in \mathbb{R}$
r ... Betrag, $r \in \mathbb{R}_0^+$
φ ... Argument, $\varphi \in \mathbb{R}$

Komponentenform

$z = a + b \cdot i$

Polarformen

$z = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = (r; \varphi) = r\angle\varphi$

Umrechnungen

$a = r \cdot \cos(\varphi)$ $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b = r \cdot \sin(\varphi)$ $\quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}$

2

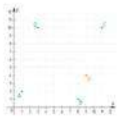
$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgaben zu Vektoren

Schulbuch Mathematik 2

8.28 Ein viereckiges Maisfeld ist durch die Punkte A, B, C und D begrenzt. Im Punkt S befindet sich der Geräteschuppen des Bauern (siehe Grafik, Angaben in 100 m).



1) Gib jeweils die Vektoren der Begrenzungslinien AB, BC, CD und DA an und berechne den Flächeninhalt des Maisfelds.
2) Zeige, dass der Schuppen S auf der Strecke BC liegt.
3) Es soll ein Verbindungsweg zwischen dem Schuppen und dem Mittelpunkt der Strecke AD errichtet werden. Ermittle die Länge des Wegs und den Winkel, den er mit der Strecke AD einschließt.
4) Um die Ernte zu schützen, stellt der Bauer eine Vogelscheuche V auf. Deren Standort teilt die Strecke AC im Verhältnis 3 : 1. Ermittle die Koordinaten von V und zeichne die Position der Vogelscheuche in das Koordinatensystem ein.
5) Eine Krähe ist auf der Suche nach einem Nistplatz. Sie fliegt vom Punkt D weg. Ihre Nistplatzsuche wird durch folgende Vektoren beschrieben:
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$
Zeichne diese Vektoren in das Koordinatensystem ein und gib den Endpunkt an.

Die Strecke AC mit A(−6|5) und C(3|−7) ist die Diagonale e einer Raute.
a) Die Diagonale f ist doppelt so lang wie die Diagonale e.
b) Die Länge der Diagonale f ist ein Drittel der Länge der Diagonale e.

Berechne die Größen der Innenwinkel des Dreiecks mit den angegebenen Eckpunkten.
a) G(−4|2), H(−6|−4), I(4|−6) **b)** K(0|−3), L(3|5), M(−9|1)

Der Winkel φ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben. Berechne die fehlende Koordinate. Wie viele Lösungen sind möglich? Begründe deine Antwort mithilfe einer Zeichnung.
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ b_y \end{pmatrix}, \varphi = 60°$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \varphi = 30{,}51°$

3

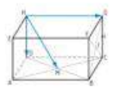
a) Überprüfe, ob die Punkte A(1|2), B(5|5), C(2|9) und D(−2|6) ein Quadrat bilden.
b) Überprüfe, ob die Punkte A(−1|−2), B(1|−3) und C(4|2) ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Ermittle die fehlenden Koordinaten des angegebenen Parallelogramms mithilfe der Vektorrechnung.
a) A(10|5), B(2|3), $C(x_C|y_C)$, D(13|5) **b)** $A(x_A|y_A)$, B(−5|−7), C(−2|5), D(−11|9)

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
a) … **b)** … **c)** …

Berechne die fehlende Koordinate, sodass die beiden Vektoren orthogonal sind.
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ b_y \\ 5 \end{pmatrix}$

Gib die folgenden Vektoren als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HM}$ und $\overrightarrow{HG}$ an.
1) $\overrightarrow{AB}$ **2)** $\overrightarrow{AM}$ **3)** $\overrightarrow{BI}$ **4)** $\overrightarrow{MI}$



Berechne die fehlenden Koordinaten des Parallelogramms ABCD.
a) A(11|3|−10), B(−4|5|−4), C(−1|14|5), D **b)** A(2|−7|13), B(12|−5|3), C, D(7|−1|−17)

1) Ermittle das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$.
2) Berechne den Betrag des Vektorprodukts.
a) A(−1|3|2), B(−4|3|9), C(4|28|24) **c)** A(6|−3|−4), B(−2|10|12), C(2|23|10)
b) A(2|4|−4), B(12|−2|7), C(12|−15|15) **d)** A(5|6|5), B(9|0|−3), C(−2|−13|14)

4

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$

$\varphi = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{68}}\right) = \underline{84{,}0939...°}$

dotP([7, −1], [2, 8])

$g: X = P + t \cdot \vec{g}$

Gerade durch B & C

$g: X = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$S \overset{?}{\in} g$

$\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$9 = 8 + t \cdot 3 \rightarrow t = \frac{1}{3}$
$4 = 1 + t \cdot 9 \rightarrow t = \frac{1}{3}$ gleich

S liegt auf der Geraden

$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$

$M = \frac{1}{2} \cdot (A + D) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{MS}|$

$V = A + \overrightarrow{AC} \cdot \frac{3}{4}$

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{4}$

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$A = (-6|5)$
$C = (3|-7)$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$M = \frac{1}{2} \cdot (A + C) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC_L} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC_R} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \end{pmatrix}$

$D = M + \overrightarrow{AC_L} = \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$C = M + \overrightarrow{AC_R} = \begin{pmatrix} -13{,}5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \arccos\left(\frac{\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b})}{\text{norm}(\vec{a}) \cdot \text{norm}(\vec{b})}\right) = \underline{100{,}385...°}$

$\rightarrow b_x = -3$

$D = A + \overrightarrow{BC} = C + \overrightarrow{BA}$
$= C + (-\overrightarrow{AB})$

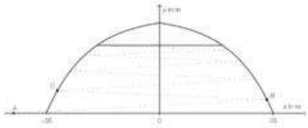
B_477/c

Bitterfelder Bogen * (B_477)

Der *Bitterfelder Bogen* ist eine Stahlkonstruktion, die aus mehreren Bögen besteht. Ein aus Rampen bestehender Fußweg führt innerhalb der Bögen zu einer Aussichtsplattform.

Bildquelle: JestJ87 (GFDL + CC BY 3.0), from Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bitterfelder_Bogen_03.jpg
[23.11.2018]

c) Der Fußweg zur Aussichtsplattform besteht aus einzelnen Rampen (siehe strichlierte Geradenstücke in der nachstehenden modellhaften Abbildung).



Es gilt: $A = (-45|0)$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 78 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$

1) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B.

$A + \overrightarrow{AB}$

Die Neigungswinkel der Rampen sind jeweils gleich groß.

Es soll eine Parameterdarstellung der Geraden g durch die Punkte B und C erstellt werden.

2) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$g: X = \begin{pmatrix} 33 \\ 4{,}2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ [illegible] \end{pmatrix}$

B_508

Olympische Sommerspiele 2008 in Peking * (B_508)

b) Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Tomasz Majewski im Kugelstoß-Finale der Männer. Die Flugbahn der Kugel kann modellhaft durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

x, $h(x)$ ... Koordinaten der Flugbahn in m

An der Stelle $x = 0$ kann die Geschwindigkeit der Kugel durch den Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{v_0}$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

1) Tragen Sie die fehlenden Ausdrücke in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Verwenden Sie dabei den Winkel α.

$\overrightarrow{v_0} = |\overrightarrow{v_0}| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

2) Weisen Sie nach, dass gilt: $\tan(\alpha) = b$.

$h'(x) = 2ax + b$
$h'(0) = b = \tan(\alpha)$

B_506

Flughafen * (B_506)

c) In der nachstehenden Abbildung ist modellhaft ein Koffer auf einem Gepäckförderband dargestellt. Der Koffer bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ m/s vom Punkt A zum Punkt B.

1) Berechnen Sie $|\vec{v}|$ in m/min.

Anschließend bewegt sich der Koffer mit der Geschwindigkeit $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ y_w \end{pmatrix}$ m/s vom Punkt B zum Punkt C. Die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen normal aufeinander.

2) Ermitteln Sie y_w.

B_507(?)

Pferdesport * (B_578)

Beim Dressurreiten müssen vorgeschriebene Übungen auf dem rechteckigen Dressurplatz absolviert werden.

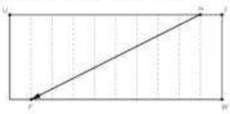
a) Bei der Übung *In der Ecke kehrt* muss, ausgehend vom Punkt B, die strichliert dargestellte Figur geritten werden. (Siehe nachstehende Abbildung in der Ansicht von oben.)

Am Beginn der Figur bewegt sich das Pferd geradlinig in Richtung des Vektors $\vec{b}$, am Ende der Figur geradlinig in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

1) Stellen Sie mithilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

α = ____________________

Bei der Übung *Durch die ganze Bahn wechseln* wird vom Punkt H zum Punkt F geritten. Die Strecke UT wird durch die strichliert eingezeichneten Markierungen in 10 gleich große Teile geteilt. (Siehe nachstehende Abbildung in der Ansicht von oben.)



2) Stellen Sie mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{TU}$ und $\overrightarrow{WT}$ eine Formel zur Berechnung des Vektors $\overrightarrow{HF}$ auf.

B_500

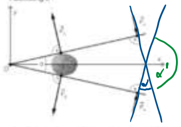
Walnüsse * (B_500)

a) Nussknacker sind Werkzeuge zum Öffnen von Nüssen (siehe Abbildung 1). Ein Nussknacker ist in Abbildung 2 modellhaft dargestellt.

Abbildung 1

Bildquelle: Francesco Scott Kirkland, public domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=[illegible]

Abbildung 2



1) Stellen Sie mithilfe der Vektoren $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

$\alpha =$ $180 - \arccos\left(\frac{\vec{F}_A \cdot \vec{F}_B}{|\vec{F}_A| \cdot |\vec{F}_B|}\right)$

Für die Kraft $\vec{F}_A$ (in Newton) gilt: $\vec{F}_A = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix}$

Der Einheitsvektor von $\vec{F}_A$ wird mit $\vec{e}_A$ bezeichnet.

2) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{e}_A = \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/13 \end{pmatrix}$

Für die Kraft $\vec{F}_C$ gilt: $|\vec{F}_C| = 65$ N

3) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} -25 \\ 60 \end{pmatrix}$

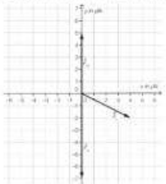
B_552/8

Distelsamen * (B_552)

Im Rahmen eines Projekts zum Thema Verbreitung von Löwenzahnsamen untersucht eine Gruppe von Schülerinnen das Fallverhalten von Distelsamen.

d) Beim Herabfallen wirken auf einen Distelsamen zu einem bestimmten Zeitpunkt die drei Kräfte $\vec{F}_G$, $\vec{F}_W$ und $\vec{F}_L$.

Die nachstehende Abbildung veranschaulicht diese drei Kräfte in einem Koordinatensystem.



1) Geben Sie die Koordinaten von $\vec{F}_L$ an.

$\vec{F}_L = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

Für die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ gilt:
$\vec{F}_R = \vec{F}_G + \vec{F}_W + \vec{F}_L$

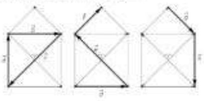
2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ ausgehend vom Koordinatenursprung ein.

3) Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$.

B_551

Kinderrätsel * (B_551)

a) Das Haus vom Nikolaus ist ein Zeichenrätsel für Kinder. Ziel ist es, ein „Haus", das aus einem Quadrat, seinen Diagonalen und einem aufgesetzten Dreieck besteht, ohne Absetzen nachzuzeichnen.
In den nachstehenden Abbildungen ist eine Lösung durch das Zeichnen der Vektoren von $\vec{a}$ (beginnend links unten) bis $\vec{h}$ (endet rechts unten) dargestellt.



1) Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	☐
$\vec{f} + \vec{g} = \vec{h}$	☐
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h} = \vec{d}$	☐
$\vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	☐
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{h} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	☐

2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausdruck zur Berechnung der Länge von $\vec{c}$ durch Eintragen der richtigen Zahl.

$|\vec{c}| =$ ________ $\cdot |\vec{a}|$

3) Begründen Sie, warum die nachstehende Gleichung gilt.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

In einem bestimmten Koordinatensystem gilt: $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

4) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{e} = \begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}$

B_487

Elektromagnetische Strahlung * (B_487)

a) Der sogenannte Poynting-Vektor $\vec{S}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^3$, der bei Berechnungen mit elektromagnetischen Wellen verwendet wird.

Dabei gilt:

$\vec{S} = k \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$
$\vec{E}, \vec{B}$ ... Vektoren in $\mathbb{R}^3$ zur Beschreibung von elektromagnetischen Wellen
k ... Konstante, $k > 0$

1) Geben Sie an, wie groß der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{S}$ und $\vec{E}$ ist.
2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der zu $\vec{S} = k \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$ äquivalent ist. *[1 aus 5]*

$k = \frac{\vec{S}}{\vec{B} \times \vec{E}}$	☐
$k \cdot \vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$	☐
$-\vec{S} = k \cdot (\vec{B} \times \vec{E})$	☐
$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\vec{S}} = k$	☐
$\vec{S} = -k \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$	☐

Aufgaben zu Geraden

Schulbuch Mathematik 2

8.113

8.113 Gib die Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B in Parameterdarstellung an.
a) g: A(7|1|−3), B(−7|0|−9) **b)** g: A(−4|10|2), B(3|−4|−8) **c)** g: A(9|−2|5), B(8|11|−6)

8.114

8.114 Der Punkt P liegt auf der Geraden durch A und B. Ermittle die fehlenden Koordinaten.
a) g: A(−7|6|11), B(4|3|25); P(4|y_A|z_A) **b)** g: A(15|0,5|−11), B(6|−15,5|7); P(x_A|3,5|z_A)

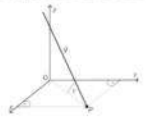
B_544/a

Landung eines Flugzeugs * (B_544)

a) Ein Flugzeug steuert beim Landeanflug den Punkt $P = (13\,200|23\,100|0)$ an. Die Flugbahn des Flugzeugs wird näherungsweise durch die Gerade g mit dem Parameter λ beschrieben. (Alle Angaben in Metern.)

$g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1500 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{b}$

Die nachstehende Abbildung zeigt schematisch den Verlauf dieses Landeanflugs.



1) Berechnen Sie einen Richtungsvektor $\vec{b}$.
2) Berechnen Sie den spitzen Winkel γ.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13\,200 \\ 23\,100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13\,200 \\ -23\,100 \\ 1500 \end{pmatrix}$

auch: $\begin{pmatrix} 13\,200 \\ 23\,100 \\ -1500 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -13\,200 \\ -23\,100 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \underline{3{,}22689...^\circ}$

13

B_591

Nähmaschine * (B_591)

a) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft eine Nähmaschine. Die gepunktete Linie stellt den Verlauf des Fadens von der Spule im Punkt A bis zur Nadel im Punkt G dar.

Es gilt:
$A = (-4|35|25)$, $B = (x_B|y_B|20)$, $D = (1|3|10)$, $E = (2|1|18)$, $F = (1|0|8)$
(Alle Koordinaten sind in Zentimetern angegeben.)

Der Faden läuft vom Punkt A entlang der Geraden g mit $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Punkt B.

1) Ermitteln Sie die fehlenden Koordinaten des Punktes B.
2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung geometrisch.
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Der Faden läuft geradlinig vom Punkt D zum Punkt E und geradlinig weiter zum Punkt F.

3) Berechnen Sie die Länge des Fadens vom Punkt D bis zum Punkt F.

14

1) $\begin{pmatrix} -4 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix} + -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 20 \end{pmatrix}$ $\boxed{25-5=20}$

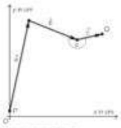
$B = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 35-32 \\ 25-5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix}}}$

2) Die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CD}$ stehen normal zueinander.

B_588

Schreibtischlampen * (B_588)

a) Eine bestimmte Schreibtischlampe besteht aus 3 beweglichen, geraden Armen (siehe nachstehende Abbildungen).



Bildquelle: https://www.lampenwelt.at/ [illegible]

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt P ein.

2) Stellen Sie mithilfe von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

α = ______________________

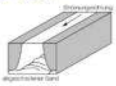
Es gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 47 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 25 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$.

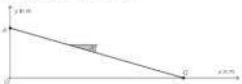
B_555/b

Sandfang einer Kläranlage * (B_555)

In einer Kläranlage strömt das Abwasser langsam durch den sogenannten *Sandfang*. Dabei sinken Sand und kleine Steine auf den Boden und können somit abgeschieden werden (siehe nebenstehende Abbildung).



b) Das Abwasser durchströmt den Sandfang. Dabei sinken die im Abwasser enthaltenen Sandkörner zu Boden. In der nachstehenden Abbildung ist ein stark vereinfachtes Modell dieses Vorgangs für ein bestimmtes Sandkorn dargestellt.



Das Sandkorn bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zum Punkt Q.
Die Position X des Sandkorns zur Zeit t in Sekunden wird beschrieben durch:
$X = A + t \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ v_y \end{pmatrix}$

v_y ist die senkrechte Komponente des Geschwindigkeitsvektors dieses Sandkorns (in m/s).

1) Stellen Sie mithilfe von v_y eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

α = arctan $\left(\frac{v_y}{0,3}\right)$

Es gilt: $A = (0|4)$ und $Q = (15|0)$

2) Berechnen Sie v_y.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t = 50$

$v_y = -0,08$

Aufgaben zu Komplexen Zahlen

Schulbuch Mathematik 2

7.18 Gib die komplexe Zahl z in Komponentenform an, runde auf zwei Dezimalstellen.

a) $z = (6{,}6; 245°)$ **b)** $z = 3{,}5\angle\frac{\pi}{2}$

Lösung:

a) $a = r \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow a = 6{,}6 \cdot \cos(245°) = -2{,}789...$
$b = r \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow b = 6{,}6 \cdot \sin(245°) = -5{,}981...$ $\Big\}\ z = (6{,}6; 245°) \approx -2{,}79 - 5{,}98i$

b) $a = 3{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$b = 3{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3{,}5$ $\Big\}\ z = 3{,}5i$

7.19 Erkläre, in welchem Quadranten bzw. auf welcher Achse die komplexe Zahl liegt und gib den Bereich an, in dem der Winkel φ liegt. Ermittle anschließend die Polarkoordinaten.

1) $z_1 = 1 + 3i$ **2)** $z_2 = 1{,}5 - 2i$ **3)** $z_3 = -4i$

Lösung:

1) z_1 liegt im 1. Quadranten, weil der Realteil und der Imaginärteil positiv sind.
Für den Winkel gilt daher: $0° < \varphi < 90°$
$\tan(\varphi_1) = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow \varphi_1 = 71{,}565...° \approx 71{,}6°$
$r_1 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 3{,}162...$
$z_1 = 1 + 3i \approx (3{,}2; 71{,}6°)$

2) z_2 liegt im 4. Quadranten, weil der Realteil positiv und der Imaginärteil negativ ist.
Für den Winkel gilt daher: $270° < \varphi < 360°$
$\tan(\varphi_2) = \frac{-2}{1{,}5} = -1{,}\dot{3} \Rightarrow \varphi_2 = -53{,}130...° \mathrel{\hat{=}} 306{,}869...°$
$r_2 = \sqrt{1{,}5^2 + (-2)^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$
$z_2 = 1{,}5 - 2i \approx (2{,}5; 306{,}9°)$

3) z_3 liegt auf der negativen imaginären Achse. Der Winkel φ beträgt daher 270°.
$r_3 = 4$
$z_3 = -4i = (4; 270°)$

17

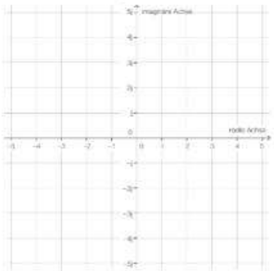
B_510

Zahlen können auch komplex sein * (B_510)

Viele Vorgänge in der Elektrotechnik können modellhaft mithilfe von komplexen Zahlen beschrieben werden. Dabei wird die imaginäre Einheit mit j bezeichnet.

a) 1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die komplexe Zahl $z_1 = 2 \cdot e^{...}$ ein.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die beiden komplexen Zahlen z_2 und z_3 ein, die den Realteil −3 und den Betrag 5 haben.



B_510

Zahlen können auch komplex sein * (B_510)

Viele Vorgänge in der Elektrotechnik können modellhaft mithilfe von komplexen Zahlen beschrieben werden. Dabei wird die imaginäre Einheit mit j bezeichnet.

b) Zu jeder komplexen Zahl $z = a + b \cdot j$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es die konjugiert komplexe Zahl $z^* = a - b \cdot j$.

1) Zeigen Sie allgemein, dass $z \cdot z^*$ eine reelle Zahl ist.

18

B_426

1) $\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$

$\frac{dv}{dt} = b \cdot v$

2) $b = -2$ $v(t) = C \cdot e^{b \cdot t}$

ODER: $v(t) = C \cdot e^{-2t}$
$v'(t) = C \cdot (-2) \cdot e^{-2t}$

$\cancel{C} \cdot (-2) \cdot \cancel{e^{-2t}} = b \cdot \cancel{C} \cdot \cancel{e^{-2t}}$ $\quad | : Ce^{-2t}$
$b = -2$

3) $v(t) = 5 - 4e^{-2t}$
$v'(t) = -4 \cdot (-2) \cdot e^{-2t}$

$\frac{dv}{dt} = a - 2v$
$8e^{-2t} = a - 2 \cdot (5 - 4e^{-2t})$
$8\cancel{e^{-2t}} = a - 10 + \cancel{8e^{-2t}}$

$$\frac{dv}{dt} = a - 2v$$

$$8e^{-2t} = a - 2 \cdot (5 - 4e^{-2t})$$

$$\cancel{8e^{-2t}} = a - 10 + \cancel{8e^{-2t}}$$

$$\underline{\underline{a = 10}}$$