4c

$$\pi \cdot \int_0^3 \left(\cancel{p}^{\,f}(x)\right)^2 \, dx + \pi \cdot \int_3^{24} \left(f(x) - p(x)\right)^2 \, dx$$

45.1548

$45.154784408472 \cdot 2.5$ 112.887

4c

$f(y) := 0.25 \cdot y + 3$ *Fertig*

$$\pi \cdot \left(\int_0^3 (p(y))^2 \, dy + \int_3^8 (p(y) - f(y))^2 \, dy + \int_8^9 (\ldots \right.$$

4.26087

$px(x) := \frac{21}{64} \cdot x^2 + 3$ *Fertig*

4c

$fx(x) := 4 \cdot x - 12$ *Fertig*

$$\int_0^3 px(x) \, dx + \int_3^8 (px(x) - fx(x)) dx + \int_8^9 (24 - fx(x)) \ldots$$

32

4.2608697352161 · 2.5 10.6522

6

5a

$$\text{solve}\left(\begin{cases}5=c\\53=3\cdot a\cdot 20^2+2\cdot b\cdot 20+c\\0=6\cdot a\cdot 2+2\cdot b\\370=1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d\end{cases},\{a,b,c,d\}\right)$$

$$a=\frac{1}{20} \text{ and } b=\frac{-3}{10} \text{ and } c=5 \text{ and } d=300$$

$$k(x):=\frac{1}{20}\cdot x^3-\frac{3}{10}\cdot x^2+5\cdot x+300 \qquad \textit{Fertig}$$

5b + 5c

$$ka(x):=\frac{d}{dx}(k(x)) \qquad \textit{Fertig}$$

$$kb(x):=\frac{d}{dx}(ka(x)) \qquad \textit{Fertig}$$

$$\text{solve}(kb(x)=0,x) \qquad x=2$$

$$kb(14) \qquad \frac{18}{5}$$

6a

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 0=c \\ 8=1600\cdot a+40\cdot b+c \\ \tan(45)=2\cdot a\cdot 40+b \end{cases},\{a,b,c\}\right)$$

$$a=\frac{1}{50} \text{ and } b=\frac{-3}{5} \text{ and } c=0$$

6b

$l(x):=0.005\cdot x^2-0.25\cdot x$	*Fertig*
$la(x):=\frac{d}{dx}(l(x))$	*Fertig*
$la(x)$	$0.01\cdot x-0.25$
$\text{arcLen}(l(x),x,0,100)$	106.79

7

52. Schulübung, am 23.06.2023

KOMBINATORIK

Permutation: 5 verschiedene Bücher nebeneinander aufstellen

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

$1! = 1$ $\quad$ $0! = 1$

n unterscheidbare Objekte können auf $n!$ Arten angeordnet werden

↳ Permutation ohne Wiederholung

mit Wiederholung:

$n = 30$ aber 3 Bücher sind gleich
und andere 5 Bücher sind gleich

$$\frac{n!}{r! \cdot s!} = \frac{30!}{5! \cdot 3!}$$

n Elemente von denen r, s, t, ... Elemente jeweils gleich sind, werden angeordnet: $\frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t! \cdots}$

7.42)

$9! = 362\ 880$ Möglichkeiten (Permutation ohne Wiederholung)

$9! = 362\,880$ Möglichkeiten (Permutation ohne Wiederholung)

7.46) 6 weiße Kugeln
3 gelbe Kugeln
5 schwarze Kugeln

$$\frac{(6+3+5)!}{6! \cdot 3! \cdot 5!} = 168\,168 \text{ Möglichkeiten}$$

(Permutation mit Wiederholung)

7.51)

a) $6! = 720$ Fotos (P. ohne Wh) → 6 Personen irgendwie

b) $3! = 6$ Fotos (P. ohne Wh) → 3 Paare; größere immer rechts

c) $3! \cdot 2^3 = 48$ Fotos (P. ohne Wh) → 3 Paare; innereinander gemischt

Variation

Bsp.: 4-stellige PIN mit Ziffern 1 bis 9

1: jede Ziffer darf nur 1x vorkommen

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{5!} = 3024$$

2: jede Ziffer darf mehrmals vorkommen

$$9^4 = 6561$$

k verschiedene Elemente aus n verschiedenen Elementen auswählen (mit Berücksichtigung der Anordnung)

Variation ohne Wiederholung: $V = \frac{n!}{(n-k)!}$

Variation mit Wiederholung: $V_W = n^k$

7.56)

Variation ohne WH:

$\frac{10!}{(10-3)!} = 720$ Möglichkeiten

7.60)

$3^{13} = 1\,594\,323$

$n=3$

$k=13$ Variation mit WH

21. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Montag, 11. September 2023 08:50

1. Schulübung, am 11.09.2023

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsexperiment

- alle möglichen Ausgänge (Ergebnisse / Elementarereignisse) sind im Vorhinein bekannt
- Ausgang ist zufällig

Laplace - Experiment

z.B.: Würfelwurf

→ alle möglichen Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich

→ Experiment ist ∞ oft wiederholbar

→ die Chancen für jedes mögl. Ergebnis ändern sich nicht

Ereignis:
Eine Menge an Ergebnissen ist ein Ereignis.

z.B. Würfel:

- Es kommt eine gerade Augenzahl
- Ich würfle 3x eine 6.

$$P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl d. günstigen Fälle}}{\text{Anzahl d. möglichen Fälle}}$$

Würfel: Augenzahl ≥ 2

$$P(\text{Augenzahl} \geq 2) = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}} = \frac{5}{6}$$

$P(\text{Augenzahl} \geq 2) = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}} = \frac{5}{6}$

GEGENWAHRSCHEINLICHKEIT: $1 - \frac{1}{6} = 1 - P(\text{Augenzahl} < 2)$

Augenzahl ≥ 2 ← GEGENEREIGNISSE → Augenzahl < 2

E .... Ereignis
¬E ..... Gegenereignis (nicht E)

$P(\neg E) = 1 - P(E)$

STATISTISCHER WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFF

Prognose (sagt vorher)

Wahrscheinlichkeit → relative Häufigkeit

relative Häufigkeit → Wahrscheinlichkeit

(schätz!)

---

2. Schulübung, am 12.09.2023

8.7) 1. $P(zzK) = \frac{1}{2^3} = 12{,}5\%$

Nur eine von 8 Möglichkeiten

2. $P(2\times z, 1\times K) = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$

Gegenwahrsch.

4. $P(\text{mind. } 1\times z) = 1 - P(KKK) =$
$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87{,}5\%$

8.8) a. $P(\text{Nusspraline}) = \frac{3}{15} = 20\%$

b. $P(\neg\text{Marzipan} \,\&\, \neg\text{Bitterschoko}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

8.11) $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

b. $P(\Sigma\ 17) = \frac{3}{216}$

c. $P(3 \text{ verschiedene Augenzahlen}) =$
$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{9}$

Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse

Schnappsdeck Herz oder Ass ziehen:

20 Karten
5 Herz
4 Ass

$\frac{5}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20}$

für Herzass $\wedge$ abziehen

Additionssatz für ODER-Verknüpfung

$P(A \vee B) = P(A) + P(B)$

nur für einander ausschließende Ereignisse A und B

$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

ODER UND

---

3. Schulübung, am 18.09.2023

8.12) c) $P(\text{rot} \vee \text{grün}) = \frac{7}{25} + \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = 64\%$

$P(\text{blau} \vee \text{klein}) = \frac{9}{25} + \frac{15}{25} - \frac{2}{25} = \frac{22}{25} = 88\%$

$= 1 - P(\text{rot} \wedge \text{groß}) = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}$

Gegenwahrsch.

MULTIPLIKATIONSSATZ für UND-Verknüpfungen

$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$

A, B ... voneinander unabhängige Ereignisse

$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist

A, B ... beliebige Ereignisse

7 blaue, 3 rote Kugeln

P(1. Kugel blau, 2. Kugel blau; ohne Zurücklegen)

= P(1. Kugel blau) · P(2. Kugel blau | 1. Kugel blau) =

$= \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = 46{,}\dot{6}\%$

P(1. Kugel blau, 2. Kugel rot; ohne Zurücklegen) =

$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30} = 23{,}\dot{3}\%$

8.18) P(mindestens 1 Bauteil funktioniert)

= 1 − P(alle Bauteile kaputt)

$= 1 - 0{,}02^3 = \underline{99{,}9992\ \%}$

8.19) F ... ist frisch
G ... Gewicht passt
S ... Schale okay

1) A. $P(F \wedge G \wedge S) = 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}985$

$= 93{,}63\ldots\%$

B. P(mindest 1 Fehler) = $1 - P(F \wedge G \wedge S) =$

$1 - 93{,}63\ldots\% = 6{,}36\ldots\%$

C. $P(\neg G \vee \neg F) = 1 - P(G \wedge F) =$

$= P(\neg G) + P(\neg F) - P(\neg G \wedge \neg F) =$

$= 1 - 0{,}97 \cdot 0{,}98 = \underline{4{,}94\ \%}$

D. $P(\neg G \vee \neg F) - P(\neg G \wedge \neg F) =$

$= P(\neg G) + P(\neg F) - 2 \cdot P(\neg G \wedge \neg F) =$

$= 0{,}03 + 0{,}02 - 2 \cdot (0{,}03 \cdot 0{,}02) =$

$= 4{,}88\%$

---

4. Schulübung, am 19.09.2023

2) A. $1 - 0{,}02 \cdot 0{,}03$?

Ereignis: Das Ei soll frisch sein und Gewicht muss passen.

2) A. [illegible]

Ereignis: Das Ei soll frisch sein und Gewicht muss passen.

B. $0{,}015 + 0{,}03 - 0{,}015 \cdot 0{,}03$

Ereignis: Die Schale ist beschädigt oder Gewicht falsch oder beides

C. $0{,}015 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}98$

Ereignis: Die Schale ist beschädigt, aber das Gewicht des frischen Ei passen.

Baumdiagramme

Dienstag, 19. September 2023 14:07

BAUMDIAGRAMME

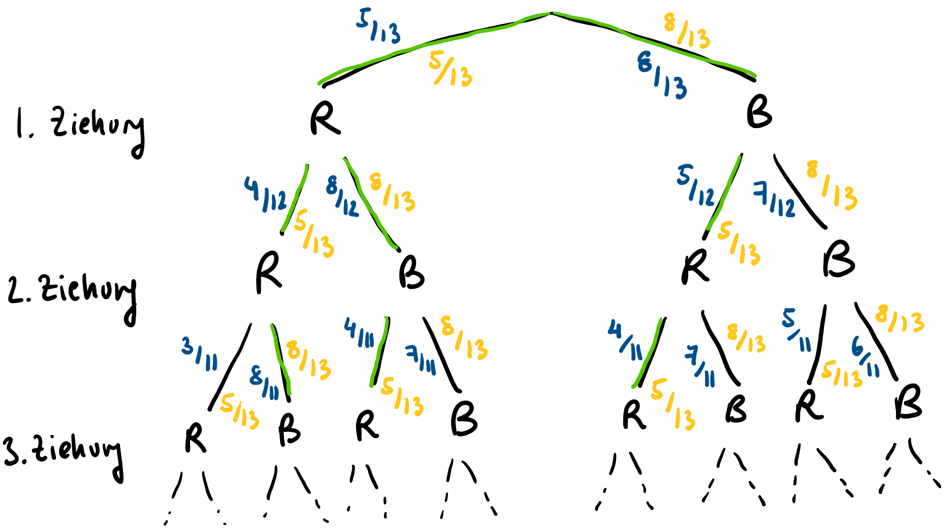
Bedingung:

Die möglichen Versuchsausgänge müssen sich einander in jedem Einzelschritt ausschließen.

Urne: Sackerl, in welches keiner reinsieht (in Theorie 100% zufällig)

Beispiel: 5 rote Kugeln
8 blaue Kugeln

3x ziehen
mit zurücklegen
ohne zurücklegen



$P(2 \text{ rote und } 1 \text{ blaue}) = \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{13} + \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = 27{,}31\,\%$

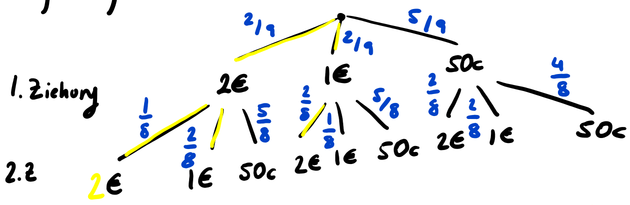
$P(2 \text{ rote und } 1 \text{ blaue}) = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} + \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = 27{,}97\,\%$

1. Pfadregel: UND-Verknüpfung → Multiplikation

2. Pfadregel: ODER-Verknüpfung → Addition

S.199

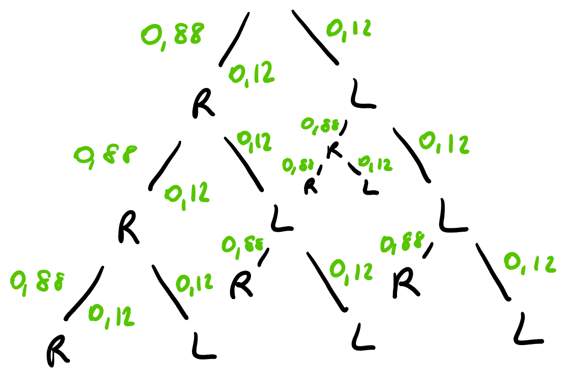
8.33) 2)



2) $P(\text{mindestens } 3€) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{8} = 13,88\,\%$

3) $P(\text{höchstens } 3€) = 1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = 97,2\dot{2}\,\%$

8.39)



1) $P(\text{mindestens } 1\,L) = 1 - 0,88^3 = 31,85\,\%$

2) solve$(1 - 0,88^n = 95, n)$ → 24 Personen

$P(\text{mind. } 1\,L) \geq 0,95$

$1 - P(\text{nur } R) \geq 0,95$

$1 - 0,88^n \geq 0,95 \qquad | -1$

$-0,88^n \geq 0,05 \qquad | \cdot (-1) \rightarrow < 0$

$0,88^n \leq 0,05$

$\ln(0,88^n) \leq \ln(0,05)$

$n \cdot \ln(0,88) \leq \ln(0,05) \qquad | : \ln(0,88)$

$\ln(0,05)$

$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$

$$n \cdot \ln(0{,}88) \leq \ln(0{,}05) \quad | : \ln(0{,}88)$$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}88)}$$

$$n \geq 23{,}434\ldots$$

A: Ab 24 Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Linkshänder ausgewählt wird, größer 95%.

05. Schulübung, am 25.09.2023

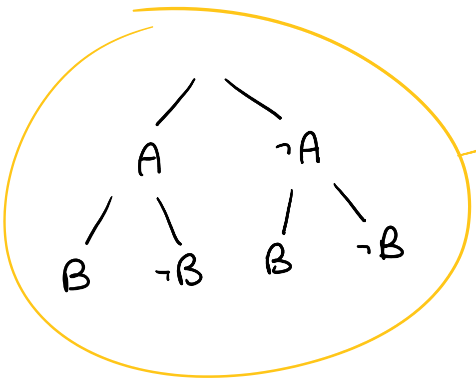
DER SATZ VON BAYES

$$P(A \wedge B) = P(B \wedge A)$$

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad \Big| : P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\neg A) \cdot P(B|\neg A)}$$



8.17)

	Schülerinnen	Schüler	insgesamt
Ski	17	41	58
Board	7	27	34
insgesamt	24	68	92

2) $P(\text{Schülerin} \mid \text{Board}) = \frac{7}{34} = 20{,}6\,\%$

$$\frac{P(\text{Schülerin} \wedge \text{Board})}{P(\text{Board})}$$

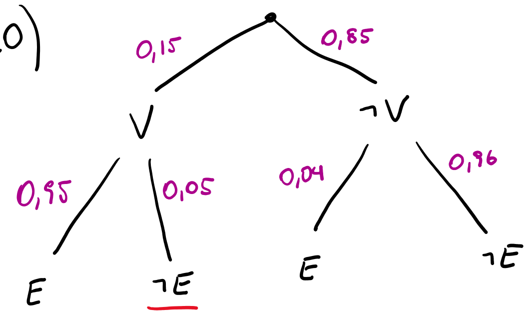
3) $P(\text{Ski} \mid \text{Schülerin}) = \frac{17}{24} = 70{,}8\dot{3}\,\%$

3) $P(\text{Ski} \mid \text{Schülerin}) = \frac{\ }{24} = 10,\ldots$

$$\frac{P(\text{Ski} \wedge \text{Schülerin})}{P(\text{Schülerin})}$$

6. Schulübung, am 26.09.2023

8.20)



↳ schlechter Fall: Virus wurde nicht erkannt

$P(V) = 0,15$

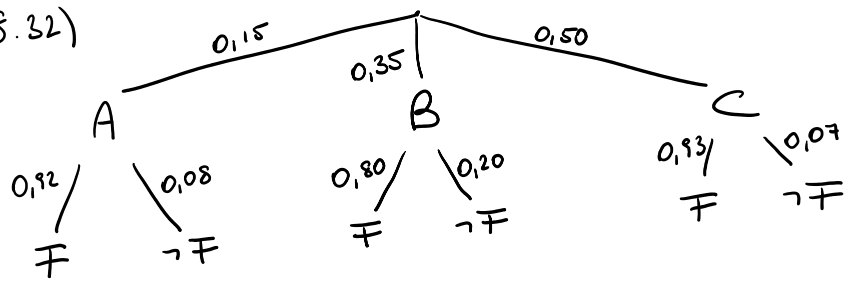
$P(\neg E \mid V) = 0,05$

$P(\neg E) = 0,15 \cdot 0,05 + 0,85 \cdot 0,96 = 0,8235$

$$P(V \mid \neg E) = \frac{P(V) \cdot P(\neg E \mid V)}{P(\neg E)}$$

$$= \frac{0,15 \cdot 0,05}{0,8235} = 0,9107\ldots\ \%$$

8.32)



A) $P(\neg F) = 0,15 \cdot 0,08 + 0,35 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,07 = 11,7\%$

B) $P(F) = 1 - P(\neg F) = 100\% - 11,7\% = 88,3\%$

C) $P(A \wedge \neg F) = 0,15 \cdot 0,08 = 1,2\%$

$\frac{P(A) \cdot P(\neg F \mid A)}{\ } = \frac{0,15 \cdot 0,08}{\ } = 0,1025\ldots = 10,25\%$

C) $P(A \wedge \neg F) = 0{,}15 \cdot 0{,}08 = 1{,}2\%$

D) $P(A \mid \neg F) = \dfrac{P(A) \cdot P(\neg F \mid A)}{P(\neg F)} = \dfrac{0{,}15 \cdot 0{,}08}{0{,}117} = 0{,}1025\ldots = 10{,}25\%$

2) C: Die Menge, aus welcher der Wischer genommen wird, ist die Grundmenge, also alle.

Bei D ist der Pool für die Wahrscheinlichkeit auf alle kaputten Scheibenwischer beschränkt.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Montag, 2. Oktober 2023 14:36

7. Schulübung, am 02.10.2023

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zufallsvariable X:
Ordnet jedem Versuchsausgang eine reelle Zahl zu.

Bsp.: Münze wird 4x geworfen.
Anzahl von „Zahl"

diskrete Zufallsvariable: Wenn X abzählbar viele Werte hat
$X: 0, 1, 2, 3, 4$

stetige Zufallsvariable: kann in einem bestimmten Intervall alle reellen Werte annehmen
(z.B.: Körpergröße)

X ... Anzahl von Zahl bei 4 Münzwürfen

Wahrscheinlichkeitsfunktion

f: $f(0) = P(X=0)$
$f(1) = P(X=1)$
$f(2) = P(X=2)$
$\vdots$

$p(2) = P(X = 2)$

$\vdots$

Jedem Wert der diskreten Zufallsvariable wird seine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

Verteilungsfunktion

$$F: \quad F(x) = P(X \leq x)$$

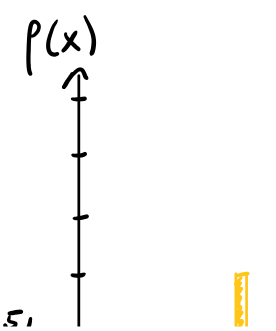
$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

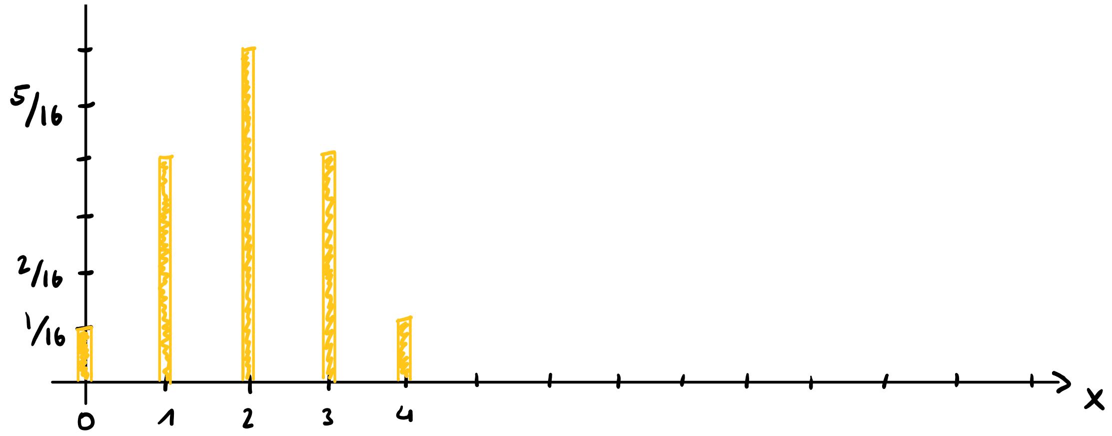
$$F(4) = P(X \leq 4) = 100\%$$

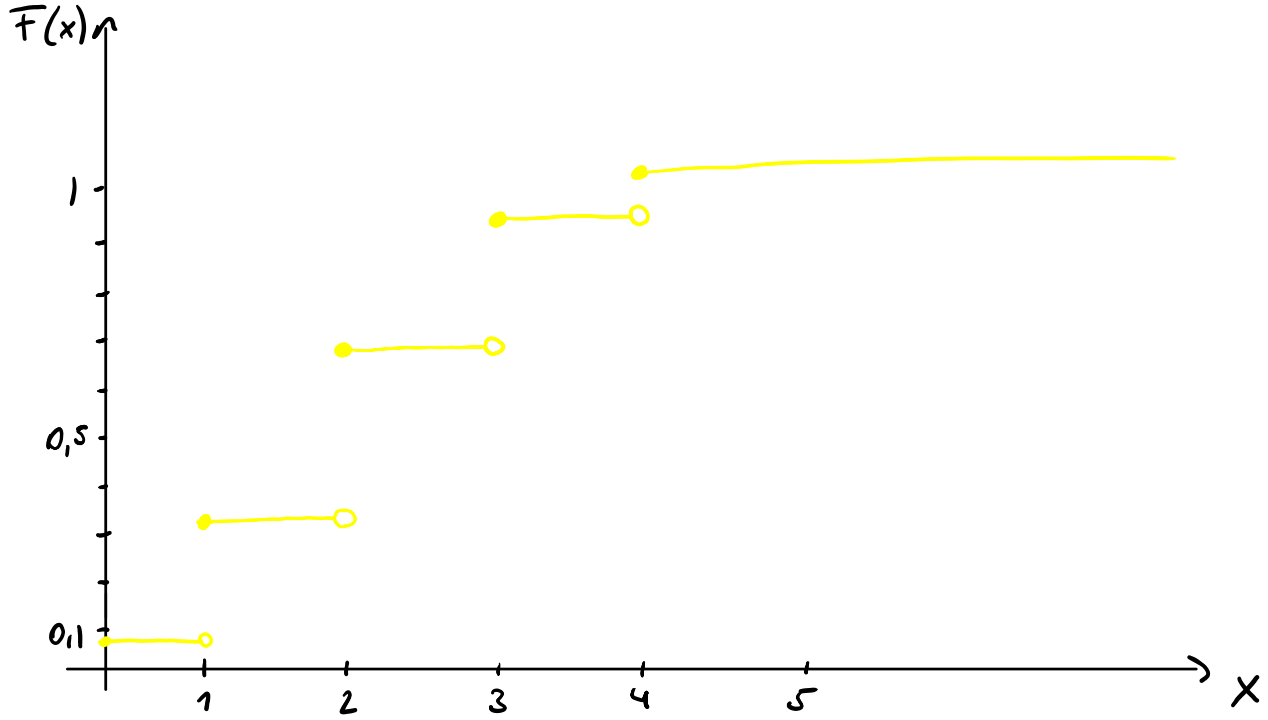
Jedem x wird die Wahrscheinlichkeit zugeordnet, dass die Zufallsvariable höchstens diesen Wert annimmt.

X	0	1	2	3	4
$p(x)$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$
$F(x)$	$1/16$	$5/16$	$11/16$	$15/16$	$16/16$

$\sum = \frac{16}{16} = 100\% = 1$







Erwartungswert einer Zufallsvariable

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz und Standardabweichung

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot P(x_i)) - \mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Münzbeispiel:

$$\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

$\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$

Bedeutung: Bei 4 Münzwürfen erwartet man sich 2x Zahl.

$V(X) = (0-2)^2 \cdot \frac{1}{16} + (1-2)^2 \cdot \frac{4}{16} + (2-2)^2 \cdot \frac{6}{16} + (3-2)^2 \cdot \frac{4}{16} + (4-2)^2 \cdot \frac{1}{16} = 1$

$\sigma(X) = \sqrt{1} = 1$

9.6) X … Anzahl d. Kugeln, die nicht weiß sind

4 grüne, 5 weiße, 6 orange

$P(X=0) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$

$P(X=1) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot 2$ [2 Wege] $= \frac{10}{21}$

$P(X=2) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$

$E(X) = \mu = 0 \cdot \frac{2}{21} + 1 \cdot \frac{10}{21} + 2 \cdot \frac{3}{7} = 1,\dot{3}$

$V(X) = 0 \cdot \frac{2}{21} + 1^2 \cdot \frac{10}{21} + 2^2 \cdot \frac{9}{21} - \frac{4}{3}^2 = \frac{26}{63} = 0,412\ldots$

$\sigma(X) = 0,642\ldots$

8. Schulübung, am 09.10.2023

9.7 Bei einem Gewinnspiel darf jemand aus 12 Schachteln eine auswählen. In 4 Schachteln befindet sich je ein Gutschein in einer Höhe von 500 Euro, in 3 Schachteln je ein Gutschein über 200 Euro und in den restlichen Schachteln befindet sich je ein Gutschein über 50 Euro. Berechne den Erwartungswert für den Gewinn.

9.7) X … Höhe d. Gewinns

$P(X=50) = 5/12$

$P(X=200) = 3/12$

$P(X=500) = 4/12$

$P(X=-50)$

$P(X=100)$

$P(X=400)$

$E(X) = 50 \cdot P(X=50) + 200 \cdot P(X=200) + 500 \cdot P(X=500) =$

$= 50 \cdot \frac{5}{12} + 200 \cdot \frac{3}{12} + 500 \cdot \frac{4}{12} = \underline{237,50\ €}$

9.10)

9.10 Beim französischen Roulette gibt es 37 Felder. Dabei steht die Ziffer null auf einem grünen Feld und die übrigen Zahlen stehen jeweils zur Hälfte auf roten und schwarzen Feldern. Man kann auf rot bzw. schwarz setzen. Nur wenn die gesetzte Farbe mit der Gewinnfarbe übereinstimmt, bekommt man den Einsatz zurück und erhält zusätzlich einen Gewinn in der Höhe des Einsatzes, sonst verliert man den Einsatz. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für den Gewinn bei einem Einsatz von 20,00 €, wenn man immer auf schwarz setzt.

X… Höhe d. Gewinns in €

$P(X=-20) = 19/37$

$P(X=20) = 18/37$

$E(X) = -20 \cdot 19/37 + 20 \cdot 18/37 = -0{,}540\ldots$ €

A: Man erwartet, pro Spiel ca. 54c zu verlieren.

$V(X) = (-20+0{,}54\ldots)^2 \cdot \frac{19}{37} + (20+0{,}54\ldots)^2 \cdot \frac{18}{37} =$

$= 399{,}707$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{399{,}707} = \underline{19{,}99\ldots \text{ €}}$

Binomialverteilung

Montag, 9. Oktober 2023 14:27

Binomialkoeffizient

Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Lotto-Schein auszufüllen?

6 aus 45 (keine Zahl doppelt)

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{45!}{(45-6)! \cdot 6!} = 8\,145\,060$$

Binomialkoeffizient:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

„n über k"

Anzahl an Möglichkeiten aus n verschiedenen Elementen k verschiedene auszuwählen (Reihenfolge unbedeutend)

Binomialverteilung

Bernoulli - Experiment

→ immer exakt 2 Versuchsausgäng

→ Wahrscheinlichkeiten dürfen sich nicht verändern

→ unendlich oft durchführbar (Wiederholungen sind unabhängig)

9. Schulübung, am 10.10.2023

Beispiel Bernoulli-Experiment

X... Anzahl d. weißen Eier

$\binom{4}{4} \cdot 0{,}85^4 \cdot 0{,}15^0$

$\binom{4}{3} \cdot 0{,}85^3 \cdot 0{,}15^1$

$\binom{4}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^2$

$\binom{4}{1} \cdot 0{,}85^1 \cdot 0{,}15^3$

$\binom{4}{1} \cdot 0{,}85^1 \cdot 0{,}15^3$

$\binom{4}{0} \cdot 0{,}85^0 \cdot 0{,}15^4$

Wahrscheinlichkeitsfunktion
der Binomialverteilung

Anzahl Versuche

$$p(x) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Erfolgswahrscheinlichkeit

Anzahl Erfolge

Verteilungsfunktion
der Binomialverteilung

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Erwartungswert:

$0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4)$

$\mu = E(x) = n \cdot p$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

9.14) 1) X ... Anzahl d. grünen Kugeln

$p = \frac{30}{100}$

c) $P(X=1) = \binom{5}{1} \; 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^4$
$\cong 36\%$

d) $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{5-k} = \underline{83{,}69\%}$

2) A: Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 grüne Kugeln gezogen werden.

2) A: Wahrscheinlichkeit, dass genau ... gezogen werden.

9.15) • 2 Möglichkeiten: True/False
• unendlich oft
• W' ändert sich nicht

2) X... Anzahl der true Antworten

$P(X) = P(X=10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^{0} = \underline{0{,}000095\%}$

[TI] = binomPdf(n, p, x)

binomPdf(10, 0.25, 10)

4) W' bei mind. 2 Anworten richtig?

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

$= 1 - P(X \leq 1)$

= binomCdf(10, 0.25, 2, 10) = 76%

binomCdf(x, p, Untergrenze, Obergrenze)

10. Schulübung, am 16.10.2023

9.17) X... Anzahl der freien Tische

1) a) $P(X=0) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}08^{0} \cdot 0{,}92^{20} = \underline{18{,}9\%}$

A: Zu 18,9% sind alle Tische besetzt.

b) $P(X<2) = \sum_{k=0}^{1} \binom{20}{k} \cdot 0{,}08^{k} \cdot 0{,}92^{(20-k)}$

... CdP(20, 0.08, 0, 1) =

$\overline{k=0}$

$= \text{binomCdf}(20, 0.08, 0, 1) =$

$0{,}5168\ldots \triangleq \underline{51{,}7\%}$

c) $P(X<5) = \text{binomCdf}(20, 0.08, 0, 4)$

$\underline{\triangleq 98{,}2\%}$

d) $P(X \geq 3) = \text{binomCdf}(20, 0.08, 3, 20)$

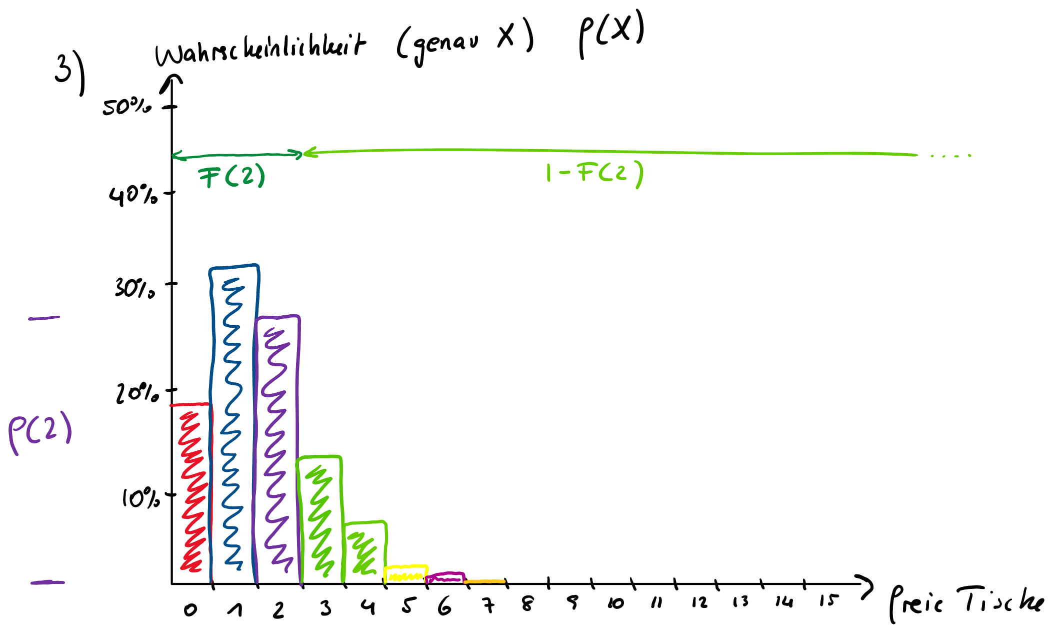
$\underline{\triangleq 21{,}2\%}$

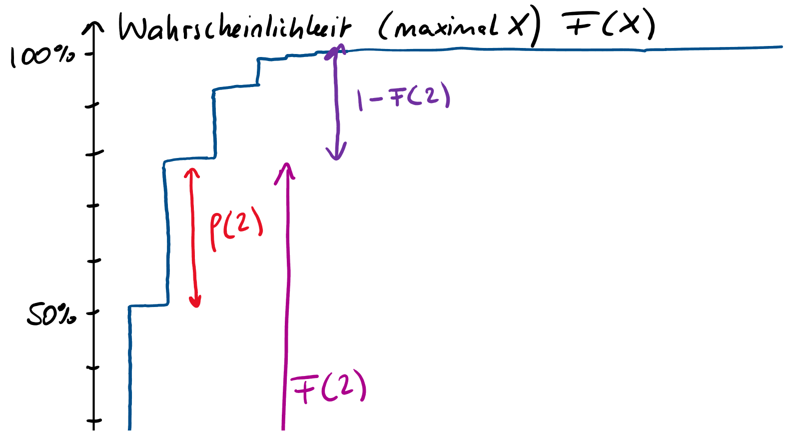
2) A) maximal 2 Tische sind frei

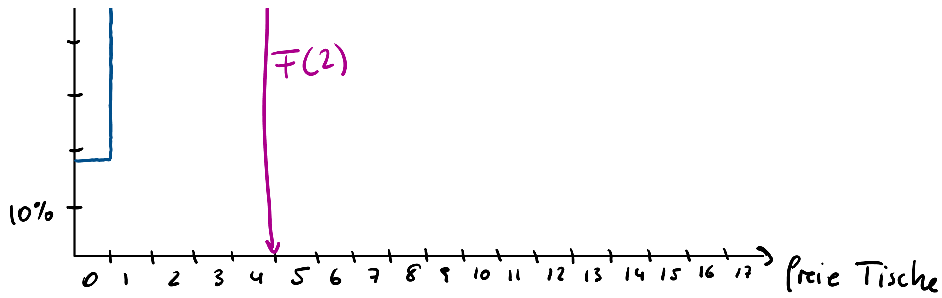
B) genau 2 Tische sind frei

C) mindestens 3 Tische sind frei

3)







11. Schulübung, am 17.10.2023

9.20) 1) · Wir können davon ausgehen, dass sich die Wahrscheinlichkeiten nicht verändern.

· 2 Möglichkeiten

· ∞ oft wiederholbar (unabhängig)

SA Beispiel

2) X... Anzahl grüne Gummibärchen

$p = 0{,}13$

a) $P(3) = \text{binomPdf}(10, 0.13, 3) =$

$= 0{,}099 \approx \underline{9{,}9\,\%}$

b) $1 - F(0) = 1 - \text{binomCdf}(10, 0.13, 0, 0) =$

$= 0{,}7515\ldots \approx \underline{75{,}2\,\%}$

c) $F(3) = \text{binomCdf}(10, 0.13, 0, 3) =$

$= 0{,}9686\ldots \approx \underline{96{,}9\,\%}$

3) $E(x) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}13 = \underline{2{,}6}$

4) $P(X \geq 1) > 0{,}95$

$1 - P(X = 0) > 0{,}95$

$1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}13^0 \cdot 0{,}87^n > 0{,}95$

$1 - 0{,}87^n > 0{,}95$

TI

$n = 21{,}5115\ldots$

$\text{solve}\left(1-\text{nCr}(n,0)\cdot(0.13)^0\cdot(0.87)^n>0.95,n\right)$ $\quad n>21.5115$

$\text{solve}\left(1-(0.87)^n>0.95,n\right)$ $\quad n>21.5115$

$\text{nCr}(n,0)$ $\quad 1$

A: Es müssen mindestens 22 Gummibärchen gezogen werden

5) $n = 10$

$p = ?$

$P(X \geq 1) \geq 0{,}90$

$1 - P(X=0) \geq 0{,}90$

$1 - \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} \geq 0{,}90$

$1 - (1-p)^{10} \geq 0{,}90$

$0{,}2056... \leq p \leq \boxed{1{,}79...} > 1$ → kann nicht sein

$p \geq 21\,\%$

A: Anteil muss ca. mind. 21% sein

9.22) a) $p = 0{,}08$ X... Anzahl an leidenden Männern

$P(X \leq 1) = \underline{29{,}6\,\%}$

b) $p = 0{,}005$ X... Anzahl an leidenden Frauen

$$P(X \geq x) = \sum_{n=x}^{F} \binom{F}{n} \cdot 0{,}005^n \cdot (1-0{,}005)^{F-n}$$

12. Schulübung am 23.10.2023

9.23) 2) X ... Anzahl, wie oft gewünschte Zahl gedreht wird (13 in diesem Fall)

$P(X \geq 3) = \text{binomCdf}(12, 1/16, 3, 12)$

$= \underline{3{,}5075\,\%}$

3) X... Anzahl, dass Primzahl kommt

$P(8 \leq X \leq 10) = \underline{3{,}883...\,\%}$

9.24) 1) X... Anzahl, Kugel Q1

$P(X \geq 80) = \underline{99{,}98\,\%}$

2) X ... Anzahl, Kugel Q2

$P(X \geq 1) > 0{,}95$

$1 - P(X=0) > 0{,}95$

$1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}09^0 \cdot 0{,}91^n > 0{,}95$

solve $(1-0,91^{n} \quad > 0,95, n)$

$n \geq 31,764...$

A: Mindestens 32 Kugeln müssen gezogen werden.

9.25) X ... Anzahl der belegten SP

$P(X \geq 556) = \binom{600}{556} \cdot 0,1^{556} \cdot 0,9^{44}$

$= \underline{1,46\%}$

X ... Anzahl d. stornierten SP

$P(X < 45)$

13. Schulübung, am 24.10.2023

9.26) X ... Anzahl Männer nicht angegurtet

1) $P(X > 3) = \underline{17,94...\%}$

2) $P(X \geq 1) \geq 0,9$

$1 - P(X=0) \geq 0,9$

$1 - \binom{10}{0} \cdot n^{0} \cdot (1-n)^{10} \geq 0,9$

solve $(1 - (1-n)^{10} \geq 0,9, n)$

$\underline{n \geq 20,567\,\%}$ $(n \leq 1,79...)$

A: Es müssten mind. 20,57 % Anteil nicht angeschnallt sein.

Hypergeometrische Verteilung

Dienstag, 24. Oktober 2023 14:16

HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG

(weitere diskrete Verteilungen)

Ziehen MIT zurücklegen => BINOMIALVERTEILUNG

Ziehen OHNE zurücklegen => HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG

Bsp. URNE: $\underbrace{\overbrace{5 \text{ grüne}}^{M}, 13 \text{ nicht grüne Kugeln}}_{N}$ $\overbrace{6x \text{ ziehen}}^{n}$

W' genau $\underbrace{2x \text{ grüne Kugel}}_{x}$ ziehen

X… Anzahl grüne Kugeln

M… Elemente mit Merkmal

N… Grundmenge

n… Stichprobe

x … Anzahl Elemente mit besl. Merkmal in Stichprobe

MIT Zurücklegen: $P(X=2) = \underline{31{,}48\,\%}$

OHNE Zurücklegen:

$$P(X=2) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} =$$

BINOMIAL-KOEFFIZIENT

$$= \frac{\text{2 aus 5 grünenen und 4 aus 13 nicht-grünen}}{\text{6 aus 18 Kugeln}}$$

$$= \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{13}{4}}{\binom{18}{6}} = \underline{38{,}515\,\%}$$

$$\boxed{\frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG

9.32) $N = 30$ X… Anzahl der leeren Batterien

$M = 6$

$n = 12$

$x = 2$

$$P(X=2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{24}{10}}{\binom{30}{12}} = \underline{34{,}0129\ldots\%}$$

14. Schulübung, am 06.11.2023

HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG

Buch 213

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Annäherung

Wenn Stichprobenumfang n im Verhältnis zur Grundgesamtheit N sehr klein ist, dann kann die Hypergeometrische Verteilung durch Binomialverteilung angewandt werden.

sinnvoll: $n < \frac{N}{10}$

9.34) a) genau 10 Personen

$M = 250$
$N = 500$
$n = 20$
$x = 10$

X... Anzahl der Personen mit neuem Wirkstoff

$$P(X=10) = \frac{\binom{250}{10} \cdot \binom{250}{10}}{\binom{500}{20}} = \underline{17{,}98\ldots\ \%}$$

$$= \text{binomPdf}\left(10, \tfrac{1}{2}, 20\right) = \underline{17{,}619\ldots\%}$$

Näherung sinnvoll, da $20 < \frac{500}{10}$ → gute Näherung

Poisson-Verteilung

Montag, 6. November 2023 14:40

15. Schulübung, am 07.11.2023

Poisson - Verteilung

Bsp: Handy läutet pro Tag Ø 6x

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen 9x läutet?

Man kennt die durchschnittliche Anzahl von „Erfolgen" pro Einheit und diese ist konstant.

$$P(X=x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \qquad x \in \mathbb{N}$$

$$\mu = E(X) = V(X)$$

Annäherung bei Binomialverteilung

Wenn $n > 50$ und $p \leq 0{,}05$ (Binomialverteilung), kann die Piosson-Verteilung als Näherung angewandt werden.

9.39) $\mu = 5$ X... Anzahl Tornados pro Jahr

1) $P(X=6) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} = \frac{5^6}{6!} \cdot e^{-5} = \underline{14{,}62\ \%}$

2) $P(4 \leq X \leq 6) =$

poCdf(5, 4, 6)

poissCdf(5,4,6)

$= 49{,}715...\%$

9.40) $\mu = 23{,}6$ X... Anzahl vermietete Autos pro Tag

a) $P(X=20) = \underline{6{,}649...\%}$

b) $P(23 \leq X < 27) = \underline{36{,}935...\%}$

9.43) $\left.\begin{array}{l} 3000 > 50 \\ 0{,}021 \leq 0{,}05 \end{array}\right\}$ Annäherung durch Poisson-Verteilung

$3000 \cdot 0{,}021 = 63$ Unfälle pro Jahr (Erwartungswert)

X... Anzahl Unfälle pro Jahr

$P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) =$

1 − poissCdf(63,50) =

$\underline{94{,}6297...\%}$

16. Schulübung, am 13.11.2023

9.44) 1) $\mu = 5$ X... Anzahl fehlerhafte Klammern pro Packung

$P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} \text{poissPdf}(5,x) = \text{poissCdf}(5,0,3)$

$= \underline{26{,}5026...\%}$

2) $\mu_{3P} = 15$ X... Anzahl fehlerhafte Klammern in 3 Packungen

$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = \underline{53{,}4346...\%}$

$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = \underline{53,4346...\,\%}$

poissCdf(15,15,∞)

3) A: Wahrscheinlichkeit, mind. 4 fehlerhafte Klammern in einer Packung

Normalverteilung

Ursprünglich erfunden, um große Werte und Umkehraufgaben, wo die Binomialverteilung unhandlich ist, zu „umgehen". Die Normalverteilung nähert deswegen mittels Integralen Flächen von Funktionen aus, welche ziemlich nahe der tatsächlichen Berechnungen liegen. Dadurch müssen Zufallszahlen nicht mehr diskrete, sondern können stetig sein, beispielsweise Körpergrößen, Mengen, Pegel, ...

Bsp.: Länge von Bolzen Solllänge
Ist-Länge: X ist eine Zufallsvariable

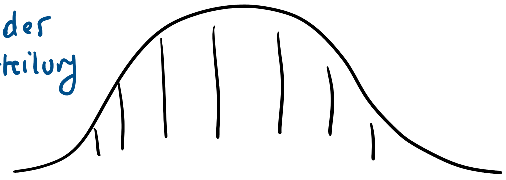
X kann nicht nur diskrete Werte annehmen, sondern jede reelle Zahl im Intervall $[a;b]$ → stetige Zufallsvariable

Für stetige Zufallsvariablen X gilt $P(X=x)=0$
(nicht unmöglich aber extrem unwahrscheinlich)

Wahrscheinlichkeitsfunktion ist hier bedeutungslos.
Bei stetigen ZV betrachtet man niemals „punktuelle Ereignisse", sondern immer nur „Intervallereignisse"
$(x_1 \leq X \leq x_2,\ X \geq x_3)$

17. Schulübung, am 14.11.2023

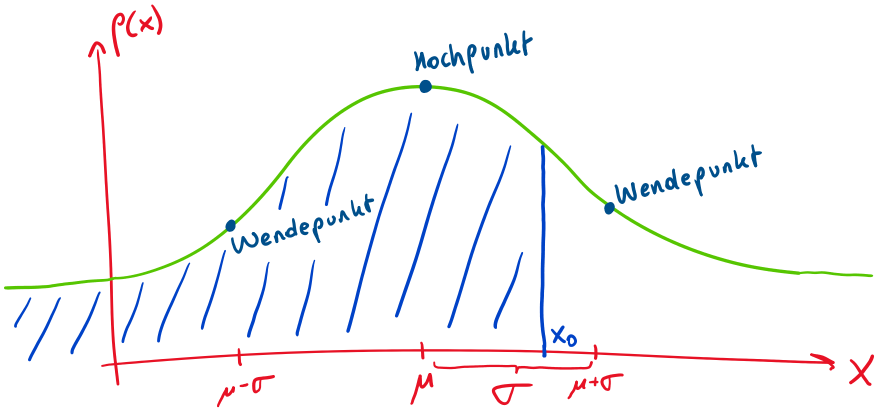
Dichtefunktion der Normalverteilung



Die Funktion f

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

heißt GAUß'SCHE GLOCKENKURVE
mit den Parametern μ und σ.



blaue Fläche:

$F(x_0) = P(X \le x_0)$

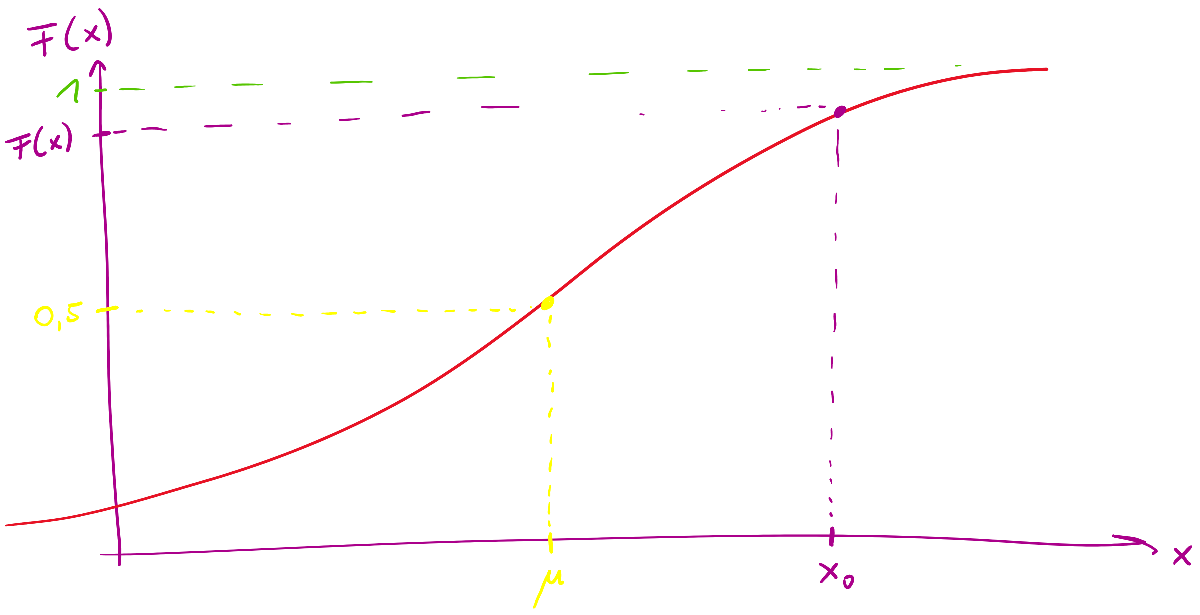
↳ Verteilungsfunktion

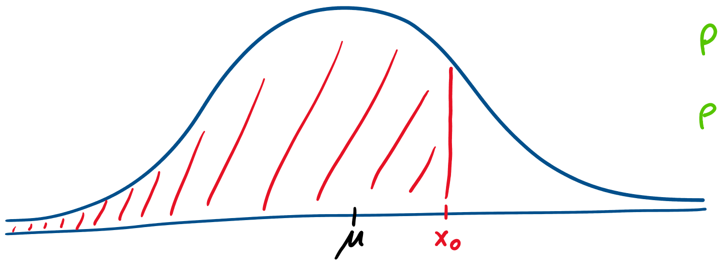
Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion hat immer den Wert 1.

Verteilungsfunktion:

$$F(x_0) = P(X \le x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x)\,dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

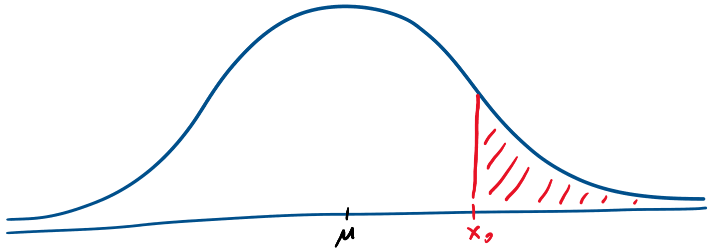
Diese Funktion beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass Zufallsvariable höchstens x_0 annimmt. Flächeninhalt unter der Glockenkurve von $-\infty$ bis x_0.



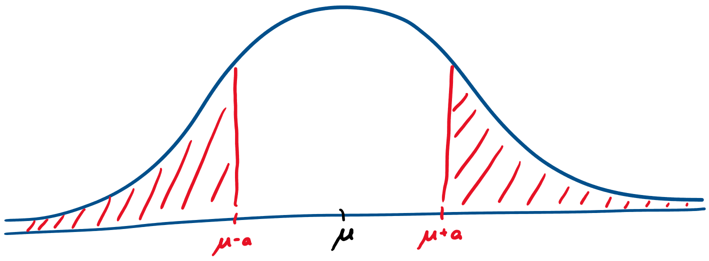


$P(X \leq x_0) = F(x_0)$

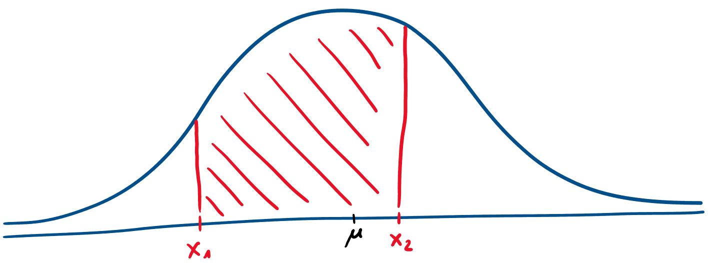
$P(X < x_0)$ ← gleich



$P(X \geq x_0) = 1 - F(x_0)$



$F(\mu - a) = 1 - F(\mu + a)$



$P(x_1 \leq X \leq x_2) =$

$F(x_2) - F(x_1)$

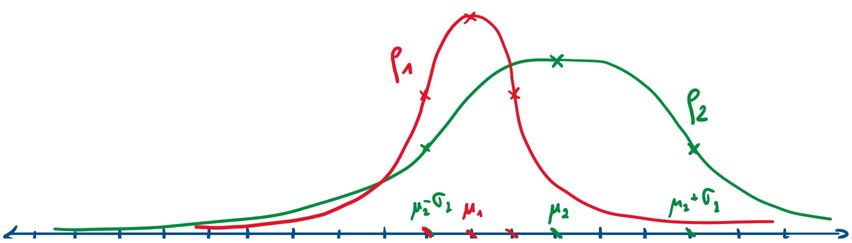
Das μ gibt also die höchste Stelle an und σ die Stauchung der Kurve.

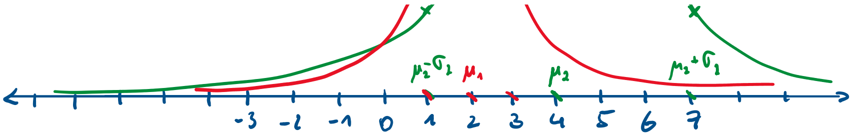
18. Schulübung, am 20.11.2023

Normalverteilung

ρ_1: $\mu = 2$ $\sigma = 1$

ρ_2: $\mu = 4$ $\sigma = 3$





σ gibt an, wie breit die Glockenkurve ist

die Fläche der Kurve muss jedoch immer 1 sein

Dadurch ist die Kurve entweder

- breit und flach (σ klein)

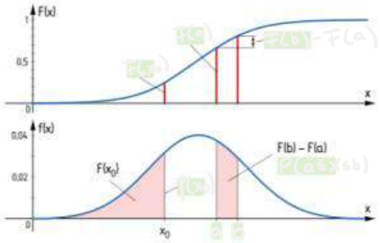
oder

- schmal und hoch (σ groß).

9.47 In der Grafik sind die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Größe dargestellt.

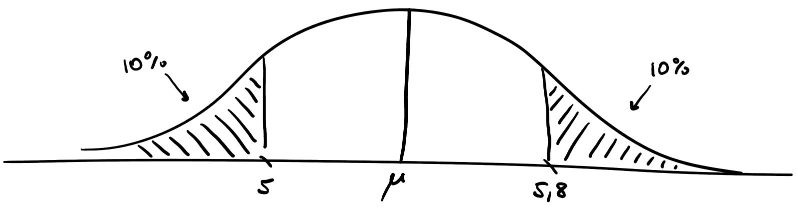
1) Erkläre den mathematischen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen.

2) Schreibe die folgenden Ausdrücke jeweils in das entsprechende Feld:
a, b, $f(x_0)$, $F(x_0)$, $F(a)$, $F(b) - F(a)$, $P(a \leq X \leq b)$

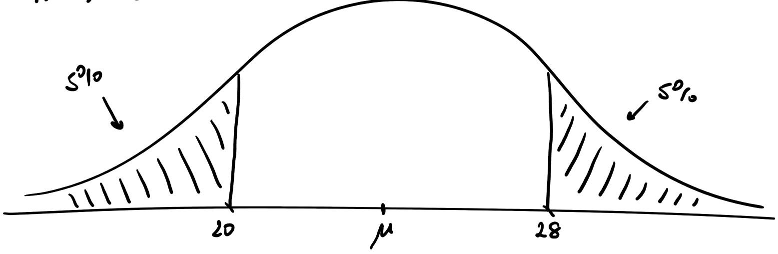


1) $F(x) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx$

9.49) $E(x) = 5,4$ aufgrund der Symmetrie d. Glockenkurve



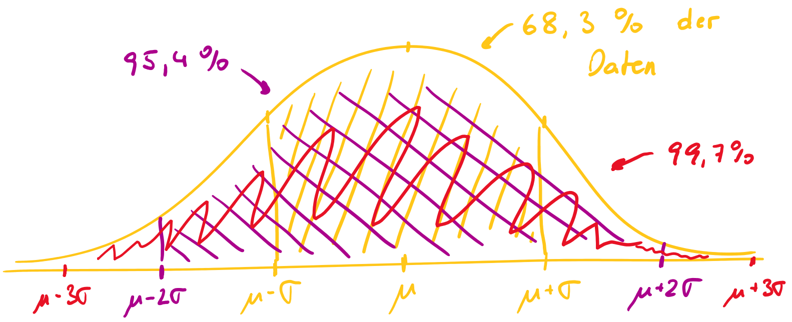
9.50) 28 aufgrund der Symmetrie d. Glockenkurve



$P(X \leq 20) = P(X \geq 28)$

95,4 %.

68,3 % der Daten



zwischen $\mu-\sigma$ und $\mu+\sigma$ liegen 68,3 % der Daten

zwischen $\mu-2\sigma$ und $\mu+2\sigma$ liegen 95,4 % der Daten

zwischen $\mu-3\sigma$ und $\mu+3\sigma$ liegen 99,7 % der Daten

Buch Seite 224: Berechnungen mithilfe der Normalverteilung

9.60) $\mu = 0{,}75\ L$ X... Füllmenge in Liter

$\sigma = 0{,}045\ L$

1) $P(X \leq 0{,}7) =$

normCdf$(-\infty, 0.7, 0.75, 0.045) =$

$0{,}13326 = \underline{13{,}326\ \%}$

Wahrscheinlichkeit, dass Füllmenge höchstens 0,7 L beträgt

2) $P(X \geq 0{,}7) = \underline{86{,}674\ \%}$

Wahrscheinlichkeit, dass Füllmenge mindestens 0,7L beträgt

3) $P(0{,}7 \leq X \leq 0{,}85) = \underline{85{,}36\ \%}$

Wahrscheinlichkeit, dass Füllmenge zwischen 0,7 und 0,85 liegt.

4) $P(X \leq 0{,}7) + P(X \geq 0{,}85) = \underline{14{,}639\ \%}$

Wahrscheinlichkeit, dass Füllmenge kleiner als 0,7 oder größer als 0,85 ist.

19. Schulübung, am 21.11.2023

9.63) L... Schallpegel in dB

$\mu = 71\ dB$

$\sigma = 1{,}60\ dB$

$m = \mu - a$

$P(L \leq m) = 0{,}08$

$m - \mu -$

$P(L \leq m) = 0{,}08$

[TI]: solve (normCdf$(-\infty, m, 71, 1.6) = 0{,}08$)

$\rightarrow m = 68{,}7519...$

$a = 71 - 68{,}7519...$

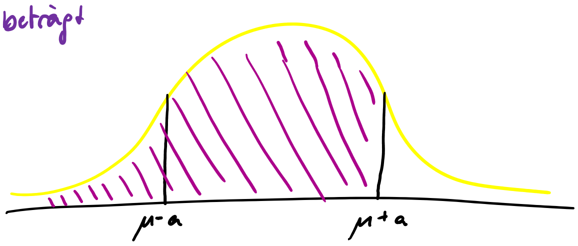
$a = 2{,}24812...$

oder [TI]:

invNorm (0.08, 71, 1.6) = 68.7519...

2) Wahrscheinlichkeit dass Schallpegel höchstens 8% beträgt

3)



4) Aufgrund der Symmetrie und der Tatsache, dass $|71-60| = |71-82|$ ist, müssen die Wahrscheinlichkeiten außerhalb der gegebenen Grenzen gleich groß sein. Flächen sind gleich groß.

9.65) $\mu = 35cm$ X... Länge eines Holzes
$\sigma = 2cm$ in cm

1) $P(X \geq 40) = \underline{0{,}621\ \%}$

2) $P(X < m) = 0{,}2$

invNorm (0.2, 35, 2)

$m = 33{,}316...\ cm$

20% unterschreiten 33,2 cm.

x) Welche Länge überschreiten 30%?

$1 - P(X \leq m_2) = 0{,}3$ $\quad P(X \leq m_2) = 0{,}7$

invNorm (0.7, 35, 2)

$m_2 = 36{,}0488...\ cm$

30% der Hölzer überschreiten 36,04 cm.

3)

30% der Hölzer überschreiten 36,04 cm.

3)

$P(X \leq x_1) = 0{,}05 \rightarrow \underline{31{,}7103\ldots cm}$

$x_2 = 35 + (35 - x_1) = \underline{38{,}2897\ldots cm}$

$P(X \leq x_2) = 0{,}95 \rightarrow \underline{38{,}2897\ldots cm}$

Im Intervall 31,71 cm und 38,29 cm liegen 90% der Hölzer.

4) $F(36) = P(X \leq 36)$

A: Zu x% liegen die Längen der Hölzer zwischen 34 und 36 cm. $P(34 \leq X \leq 36)$.

Standardnormalverteilung

Dienstag, 26. Dezember 2023 10:07

20. Schulübung, am 05.12.2023

Standardnormalverteilung

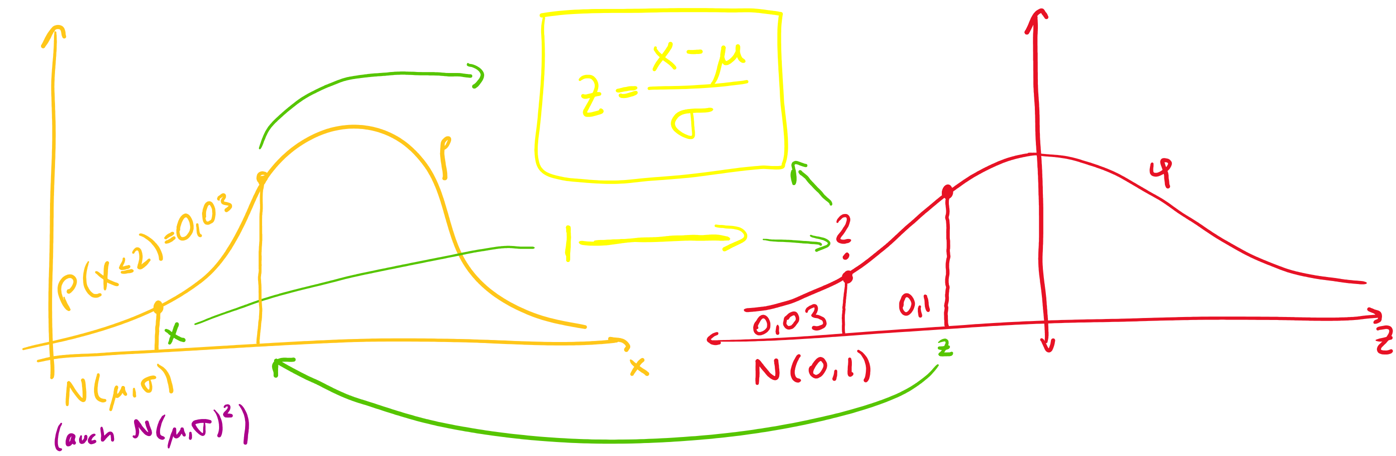
$\mu = 0$
$\sigma = 1$

Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

Wird für Umkehraufgaben verwendet (Berechnung von μ oder σ)

Bezeichnungen
Zufallsvariable: z
Dichtefunktion: $\varphi(z)$
Verteilungsfunktion: $\Phi(z)$

Koordinatentransformation



DICHTEFUNKTION: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$

VERTEILUNGSFUNKTION: $\Phi(z) = P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz$

Beispiel: Ermittlung des Erwartungswertes μ bzw. der Standardabweichung σ

Buch S. 226 / 9.59 / 3 im Buch

9.68) Spezialfall

$\mu = \frac{2,5+4}{2} = 3,25\ \mu m$

$\sigma = ?$

$P(X \leq 4) = 0,95$

$z = \text{invNorm}(0.95, 0, 1) = \underline{1,64485...}$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$\text{solve}\left(1.64485... = \frac{4-3.25}{\sigma}, \sigma\right)$

$\hookrightarrow \underline{\sigma = 0,4559...\ \mu m}$

A: Die Korngröße ist normalverteilt mit $\mu = 3.25\ \mu m$ und $\sigma = 0,4559...\ \mu m$.

$\text{invNorm}(0.95,0,1)$	1.64485
$\text{solve}\left(1.6448536259066=\frac{4-3.25}{x},x\right)$	$x=0.455968$
$\text{invNorm}(0.05,0,1)$	-1.64485
$\text{solve}\left(-1.6448536259066=\frac{2.5-3.25}{x},x\right)$	$x=0.455968$

22. Schulübung, am 12.12.2023

9.70) $\mu = 6000\ L$ X... Sauerstoffmenge in L

$\sigma = 10 L$

1) $P(X \geq 5990) = \text{normCdf}(5990, \infty, 6000, 10)$

$= \underline{84,1345...\ \%}$

A: Die Aussage stimmt nicht.

2) a) $\mu = ?$ X... Sauerstoffmenge in L

$\sigma = \boxed{10 L}$

$\sigma = \boxed{10L}$

$P(X \geq \boxed{5990}) = 0{,}95$

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

z berechnen:

$P(Z \geq z) = 0{,}95$ $\mu = 0$

$z = -1{,}644...$ $\sigma = 1$

umrechnen:

$-1{,}644... = \frac{5990 - \mu}{10} \rightarrow \underline{\mu = 6006{,}45...\ L}$

$-1{,}644 = \frac{5990 - 6000}{\sigma} \rightarrow \underline{\sigma = 6{,}079...\ L}$

A: Damit die Behauptung stimmt, müsse die Sauerstoffmenge normalverteilt mit $\mu = 6006{,}45...L$ und $\sigma = 10L$ sein oder $\mu = 6000L$ und $\sigma = 6{,}079...\ L$.

9.72) $\mu = 120\text{mm}$ X... Durchmesser der DVD in mm

$\sigma = 0{,}1\text{mm}$

1) $1 - P(119{,}7 \leq X \leq 120{,}3) = \underline{0{,}27\ \%}$

2) $\mu = 120\text{mm}$

$\sigma = ?$

$1 - P(119{,}7 \leq X \leq 120{,}3) = 0{,}01$

$N(0,1) \rightarrow \underline{z = -2{,}5758...}$

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$-2{,}57... = \frac{119{,}7 - 120}{\sigma} \rightarrow \underline{\sigma = 0{,}11646...\ \text{mm}}$

A: Damit 1% außerhalb liegen, muss Sigma 0,116... mm sein.

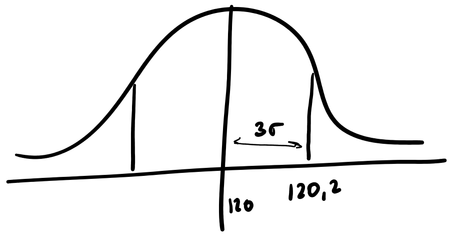
Sigma $0{,}116\ldots$ mm

3) $\mu = 120$ mm

$\mu + 3\sigma = 120{,}2$ mm

$120{,}2 - 120 = 0{,}2$

$\mu = \frac{0{,}2}{3} = 0{,}0\dot{6}$



23. Schulübung, am 09.01.2024

nsolve (equation, var, lower_bound, upper_bound)

9.76)

$\mu = 1{,}07$ kg X... Verpackungsgewicht in kg

$\sigma = 0{,}05$ kg

1. $P(X < 1\text{ kg}) = \text{normCdf}(-\infty, 1, 1.07, 0.05)$

$= \underline{8{,}07\ldots\,\%}$

2. I: $P(X < 1{,}02\text{ kg}) = 0{,}04$

II: $P(X > 1{,}10\text{ kg}) = 0{,}05$

II: $P(X < 1{,}10\text{ kg}) = 0{,}95$

$z_{0.04} = -1{,}75069$

$z_{0.95} = 1{,}64485$

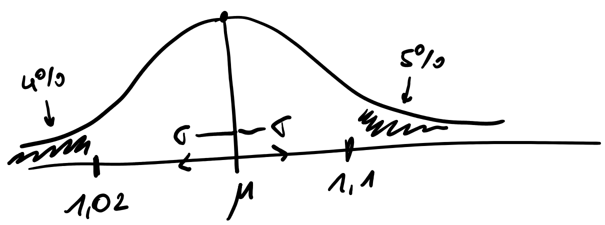
$z_{0.95} = 1{,}64485$

$$\text{I}: \quad -1{,}75\ldots = \frac{-1{,}02\ldots-\mu}{\sigma}$$

$$\text{II}: \quad 1{,}644\ldots = \frac{1{,}1-\mu}{\sigma}$$

$\mu = 1{,}06125\ldots$ kg

$\sigma = 0{,}02356\ldots$ kg



Stichprobe und Stichprobenmittelwerte

Dienstag, 9. Januar 2024 14:20

Stichprobe und Stichprobenmittelwerte

GRUNDGESAMTHEIT

Erwartungswert: μ

Standardabweichung: σ

STICHPROBE

↳ werden mehrere Stichproben (Umfang n) entnommen, dann können Stichprobenmittelwerte $\overline{X_i}$ gebildet werden. Diese sind (annähernd) normalverteilt.

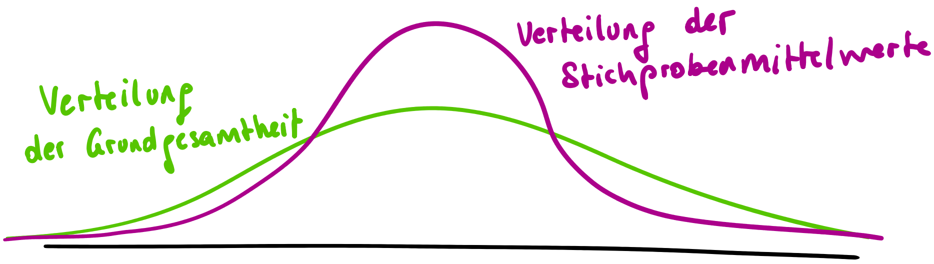
Die Grundgesamtheit und die Stichprobenmittelwerte streuen um den gleichen Erwartungswert, jedoch ist die Standardabweichung verschieden

Erwartungswert: $\mu_{\bar{x}} = \mu$

Standardabweichung: $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

↓

kleiner als bei Grundgesamtheit

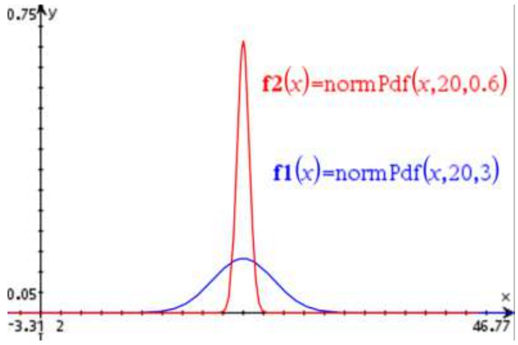


9.84) → Buch

9.85) A: Durchschnittliches Gewicht einer Person

9.86) $\mu = 20$ $\quad n = 25$
$\sigma = 3$

$$\boxed{\mu = 20 \qquad \sigma = \frac{3}{5}}$$

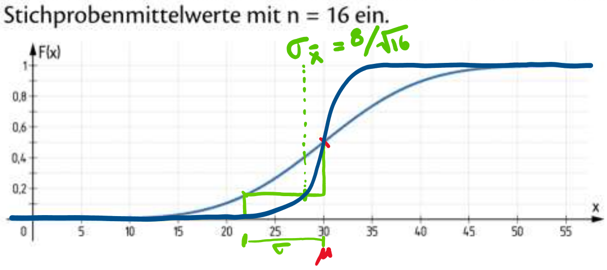


24. Schulübung, am 15.01.2024

9.88) A: Die Aussage ist richtig, da bei einer Verringerung von n aufgrund der Formel $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ die Glockenkurve schmäler wird.

Stichprobenumfang größer
↳ Glockenkurve schmäler

9.89 In der nachstehenden Abbildung ist die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Grundgesamtheit dargestellt. Zeichne in dieser Abbildung die Verteilungsfunktion der Stichprobenmittelwerte mit n = 16 ein.



$\mu = 30$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 68{,}3\,\%$

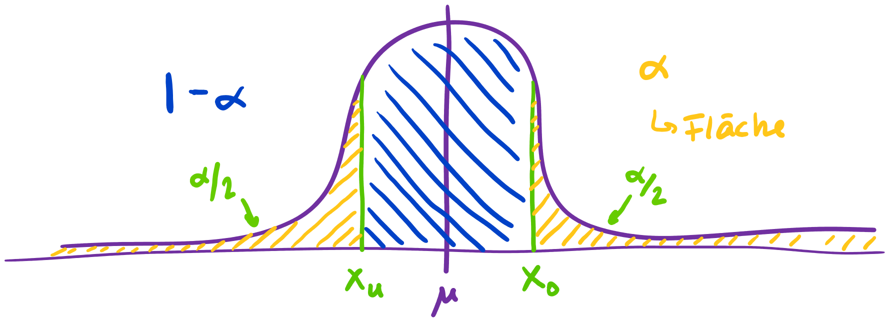
Zufallsstreubereiche der Normalverteilung

Dienstag, 16. Januar 2024 14:46

25. Schulübung, am 16.01.2024

Zufallsstreubereiche der Normalverteilung

- zweiseitig begrenzter Zufallsstreubereich



α … Irrtumswahrscheinlichkeit / Signifikantsniveau

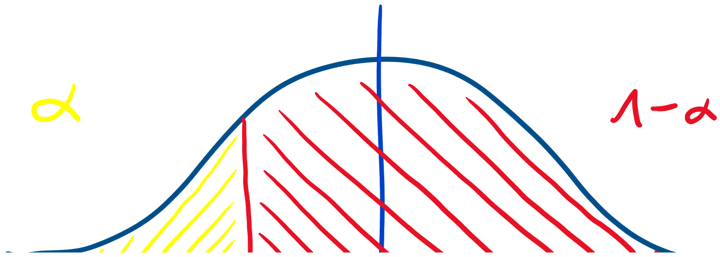
1-α … Vertrauensbereich

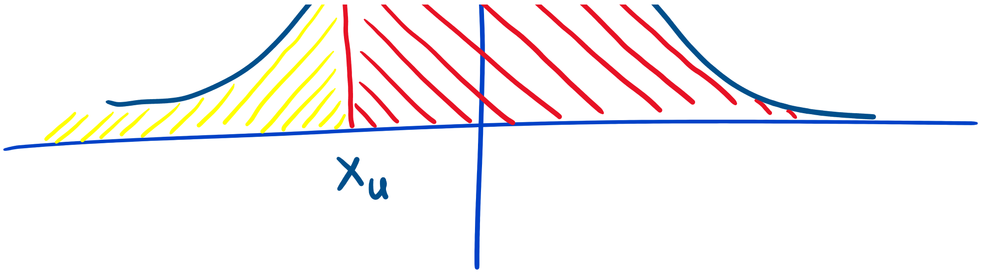
$$x = \mu + z \cdot \sigma$$

$$x_u = \mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$$

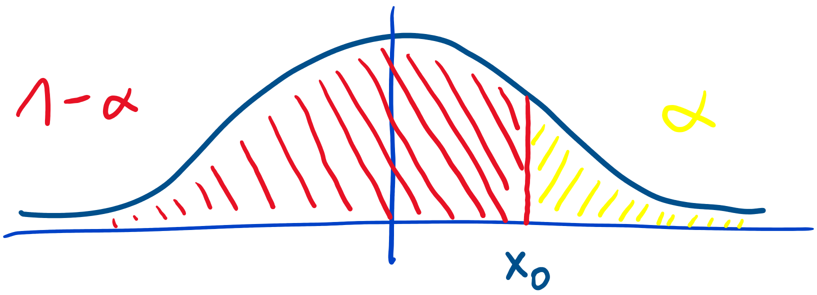
$$x_o = \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$$

- einseitig begrenzter Zufallsstreubereich





$$x_u = \mu - z_{1-\alpha} \cdot \sigma$$



$$x_o = \mu + z_{1-\alpha} \cdot \sigma$$

($1-\alpha$)-Zufallsstreubereich für Stichprobenmittelwerte

α … Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)

Einseitig begrenzter Zufallsstreubereich

nach unten: $\bar{x}_u = \mu - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

nach oben: $\bar{x}_o = \mu + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Zweiseitig begrenzter Zufallsstreubereich

$\bar{x}_{o,u} = \mu \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

26. Schulübung, am 22.01.2024

9.97) X… Nietenlänge in mm

$\mu = 50$ mm

$\sigma = 0,5$ mm

1) $\alpha = 5\%$ (100% - 95%)

1) $\alpha = 5\%$ $(100\% - 95\%)$

$x_{o,u} = 50 \pm \text{invNorm}(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1) \cdot 0{,}5$

$x_u = 49{,}02$ mm

$x_o = 50{,}98$ mm $\quad [49{,}02\text{mm}; 50{,}98\text{mm}]$

2) $n = 25$

$\alpha = 1\%$

$\bar{x}_o = 50 + \text{invNorm}(1 - 0.01, 0, 1) \cdot \frac{0.5}{\sqrt{25}}$

$\underline{\bar{x}_o = 50{,}2326 \text{ mm}}$ $\quad]-\infty; 50{,}2326 \text{ mm}]$

9.99) X ... Druckdauer in s

$\mu = 5{,}5$ s

$\sigma = 0{,}2$ s

$n = 30$

1) $\mu_{\bar{x}} = 5{,}5$ s $\quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}2}{\sqrt{30}}$

2) $\alpha = 0{,}05$

$\bar{X}_{u,o} = \mu \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\underline{\bar{x}_u = 5{,}4284\ldots \text{ s}}$ $\quad \underline{\bar{x}_o = 5{,}5715\ldots \text{ s}}$ $\quad 5{,}2\text{s} \notin [5{,}428\ldots; 5{,}571\ldots]$ s

A: 5,2 s ist außerhalb des 95% Zufallsstreubereich.

3) A: Damit $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{2}$ bei

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\ }}$, muss

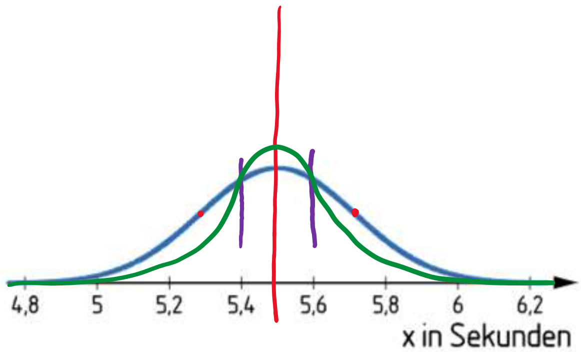
3)

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, muss

$2 = \sqrt{n} \Rightarrow n = 4$.

Sprich, Stichprobenumfang muss quadriert werden.

4)



Beurteilende Statistik

Dienstag, 23. Januar 2024 13:59

27. Schulübung, am 23.01.2024

Beurteilende Statistik

Vertrauensbereiche - Konfidenzintervalle

Dienstag, 23. Januar 2024 14:14

Vertrauensbereiche

– Konfidenzintervalle

geg: Stichprobe

ges: Parameter der Grundgesamtheit

Schätzwert für $\mu = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\sigma^2 = s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Vertrauensbereich / Konfidenzintervall:

Ermittlung eines Bereiches in dem ein Parameter der Grundgesamtheit mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit liegt.

geg: Stichprobe, n, $\bar{x}$
(manchmal: Grundgesamtheit: σ)

ges: Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit mit Vertrauensniveau $1-\alpha$

Vertrauensbereich | Konfidenzintervall für μ

bekannten σ

Vertrauensbere...

bei bekannten σ

$$\mu_{u,o} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

zweiseitiger $(1-\alpha)$ Vertrauensbereich

α ... Irrtumswahrscheinlichkeit

→ Beispiel 10.1 im Buch

Vertrauensbereich für μ bei unbekanntem σ

Parameter μ der Grundgesamtheit muss durch die Standardabweichung s der Stichprobe geschätzt werden

↳ Vertrauensbereich wird breiter

benötigt: t-Verteilung

Freiheitsgrad: $f = n-1$

$$\mu_{u,o} = \bar{x} \pm t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

→ Beispiel 10.2 im Buch

10.4 Ordne den angegebenen Parametern einer normalverteilten Größe jeweils die richtige Formel zur Berechnung der Grenzen des $(1-\alpha)$-Vertrauensbereichs für μ zu.

1	$n = 36; \bar{x} = 2; \sigma = 0{,}6; \alpha = 5\,\%$	D
2	$n = 36; \bar{x} = 2; s = 0{,}6; \alpha = 5\,\%$	B

A	$\mu_{o,u} = 2 \pm z_{0,975} \cdot 0{,}6$
B	$\mu_{o,u} = 2 \pm t_{35;0,975} \cdot 0{,}1$
C	$\mu_{o,u} = 2 \pm t_{36;0,975} \cdot 0{,}1$
D	$\mu_{o,u} = 2 \pm z_{0,975} \cdot 0{,}1$

28. Schulübung, am 12.02.2024

10.11) $\mu = 22 \frac{mg}{L}$ (nur Vergleichswert)

$\sigma = 1{,}12 \frac{mg}{L}$

X... Zinkgehalt in $\frac{mg}{L}$

$n = 15$

$\alpha = 5\%$

$\bar{x} = 20{,}9 \frac{mg}{L}$

$\mu_{u,o} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\mu_{u,o} = \bar{x} \pm t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$$\mu_{u,o} = 20{,}9 \pm z_{0,975} \cdot \frac{1{,}12}{\sqrt{15}}$$

$$\mu_u = 20{,}333\ldots \frac{mg}{L}$$

$$\mu_o = 21{,}466\ldots \frac{mg}{L}$$

95%iger Vertrauensbereich: $[20{,}333\ldots; 21{,}466\ldots]$

A: Unser μ hat sich mit einer 5%igen Irrtumswahrscheinlichkeit verändert.

10.12) 2)

$\bar{x} = 200{,}333$

$n = 9$

$f = n-1 = 8$

$s = 5{,}315...$

$\alpha = 5\%$

TI: L:= { ... }

Menu → Statistik → 1 → 1

X... Kaffeemenge in ml

$$\mu_{u,o} = \bar{x} \pm t_{8,0.975} \cdot \frac{5{,}315...}{\sqrt{9}}$$

↳ TI: W' → Vert. → Invers t

$$\mu_{u,o} = \bar{x} \pm 2{,}306... \cdot \frac{5{,}315}{\sqrt{9}}$$

$\mu_u = 196{,}247...$ ml

$\mu_o = 204{,}418...$ ml

Konfidenzintervall für $\mu = [196{,}247...; 204{,}418...]$

A: Der Wert d. Herstellers wird eingeschlossen.

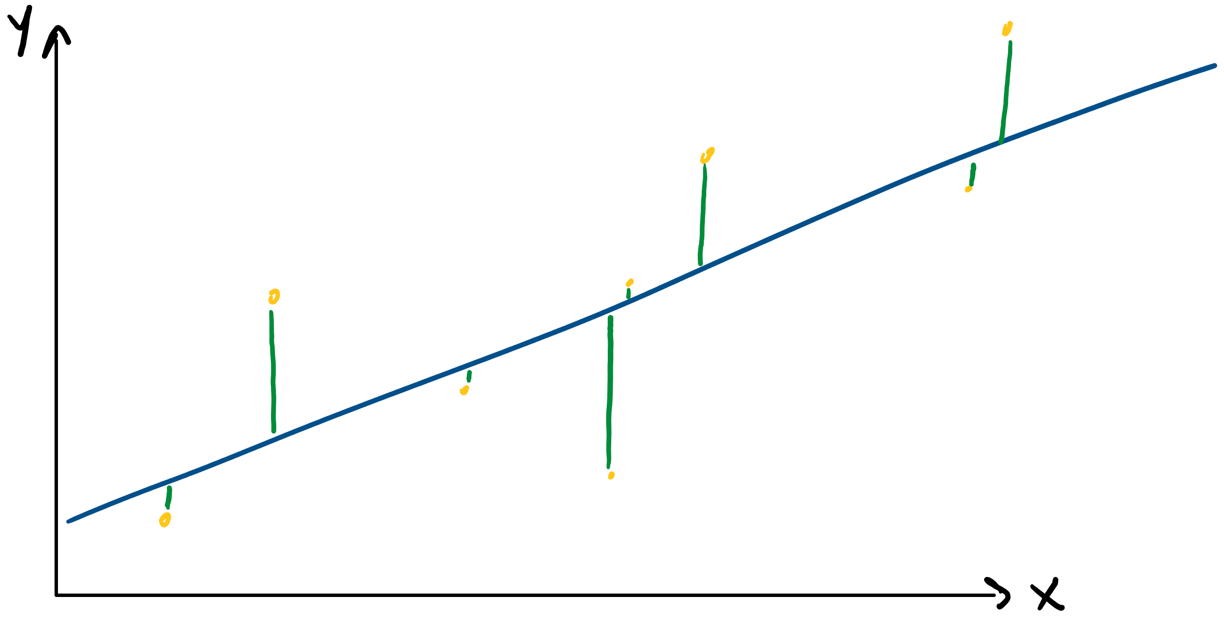
3) $\mu_{u,o} = \bar{x} \pm \boxed{t_{8,0.975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

↳ der Vertrauensbereich wird schmäler

ACHTUNG: Freiheitsgrad ändert sich auch!

AUSGLEICHSSTATISTIK

S. 266 / 269 im Buch



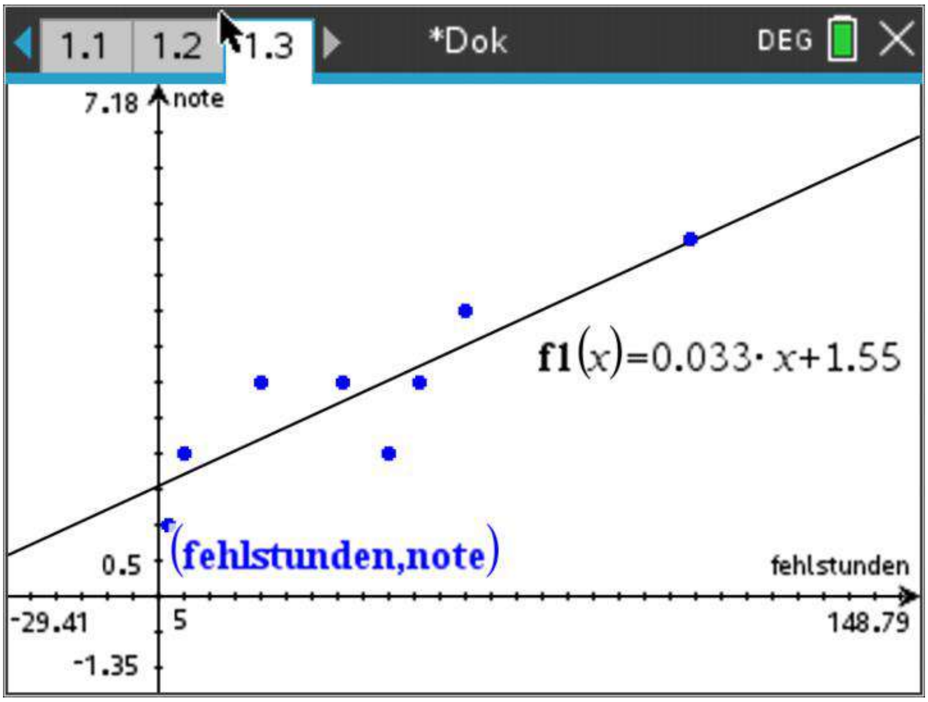
Die Summe der Abstandsquadrate vom Funktions zu den gegebenen Punkten wird minimiert.

29. Schulübung, am 13.02.2024

11.5) x … Fehlstunden

$p(x)$ … Note

$p(x) = 0{,}032925\ldots \cdot x + 1{,}54565\ldots$



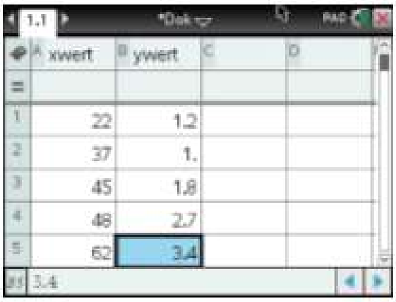
A: Der Graph der linearen Ausgleichsfunktion ist eine Gerade mit positiver Steigung, wenn $k > 0$ gilt, muss auch $r > 0$ gelten.

Sidlo – Puhm – Steinmair – Camilo – Drs – Pollack-Drs – Wymlatil
Mathematik mit technischen Anwendungen 4 – neu nach Lehrplan 2015
Zu Abschnitt „Ausgleichsrechnung“, Seite 270

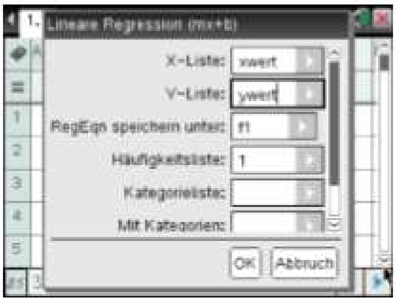
Technologieeinsatz: Lineare Regression und Korrelation
TI-Nspire

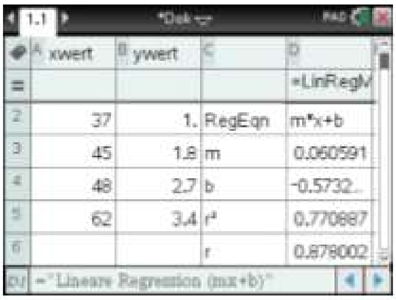
ZB: Regressionsgerade und Korrelationskoeffizient für die Werte:

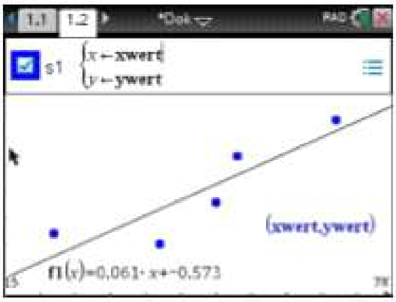
Alter in Jahren	22	37	45	48	62
Gesundheitszustand	1,2	1,0	1,8	2,7	3,4



- Die Messpunkte werden in der Applikation **Lists & Spreadsheet** eingegeben.
- In die nun erscheinende Tabelle werden in der Spalte **A** die x-Werte und bei **B** die y-Werte der Punkte eingegeben. Um die Werte anschließend in einem Streudiagramm grafisch darstellen zu können, müssen die Spalten Namen erhalten.







- Die Berechnung der Regressionsgerade erfolgt über Menü **4: Statistik**, **1: Statistische Berechnungen**, **3: Lineare Regression (mx+b)…** oder **4: Lineare Regression (a+bx)….**
  Bei **X-Liste:** wird der Name der Spalte mit den x-Werten, bei **Y-Liste:** jener der y-Werte eingegeben. Unter **RegEqn speichern unter:** kann die entstehende Gerade gespeichert werden.
- Nach Bestätigen mit **OK** werden in der Tabelle die berechneten Werte ausgegeben. Für die Gleichung der Regressionsgeraden sind die Werte **m** und **b** relevant. Weiters werden das Bestimmtheitsmaß r^2 und der Korrelationskoeffizient **r** ausgegeben.
- Wechselt man anschließend in die Applikation **Graphs**, so kann nach Aufruf der Funktion **f1** die Regressionsgerade dargestellt werden. Um die Messpunkte anzuzeigen, muss unter Menü **3: Graph-Eingabe/Bearbeitung**, **6: Streudiagramm** ausgewählt werden. In die Eingabezeile werden die Spaltennamen der Liste eingegeben.

$\hat{y} = 0{,}06 \cdot x - 0{,}57$
Korrelationskoeffizient: $r = 0{,}878$

© Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH 2018

11.6) a)

A alter	B sehr	C	D	E
				=LinRegM
1	67.8		Titel	Lineare ...
2	47.2		RegEqn	m*x+b
3	28.3		m	-18.
4	14.1		b	84.35
			r²	0.993444
			r	-0.9967...
			Resid	{1.45,-1...

$r = -0{,}9969$

A: Sehr nahe an -1 → sehr hohe negative Korrelation

I: Je älter desto weniger häufig ist Gesundheit SEHR GUT.

c) $r = 0{,}990\ldots$ → sehr hohe positive Korrelation

I: Je älter desto schlechter ist die Gesundheit.
/ häufiger „mittelmäßig"

11.9) $v(h) = 1{,}03906\ldots \cdot h + 51{,}5113\ldots$

11.9) $v(h) = 1{,}03906... \cdot h + 51{,}5113...$

$r = 0{,}865004...$

3. $\underline{v(15) = 67{,}097... \ \mathrm{km/h}}$

4. $|67{,}097... - 55| = 12{,}09... \ \mathrm{km/h}$

$$\frac{67{,}097... - 55}{55} = 21{,}99\,\%$$

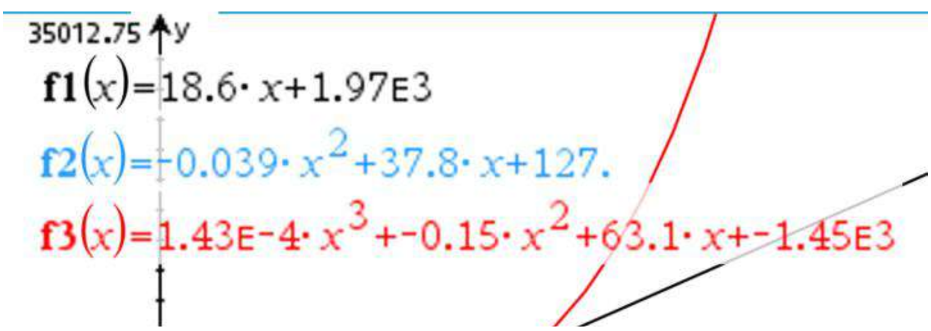
immer wahre / tatsächliche Wert

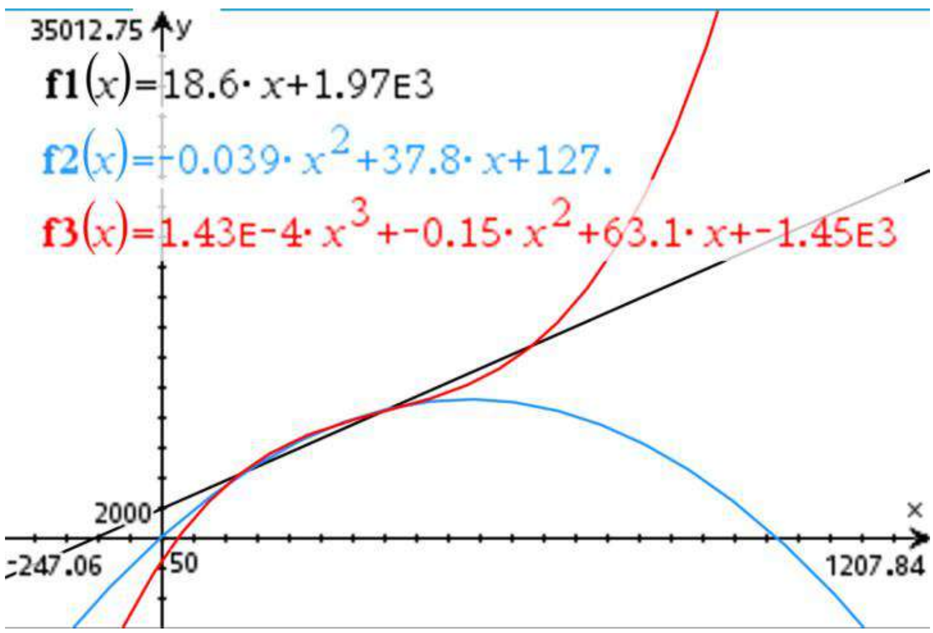
30. Schulübung, am

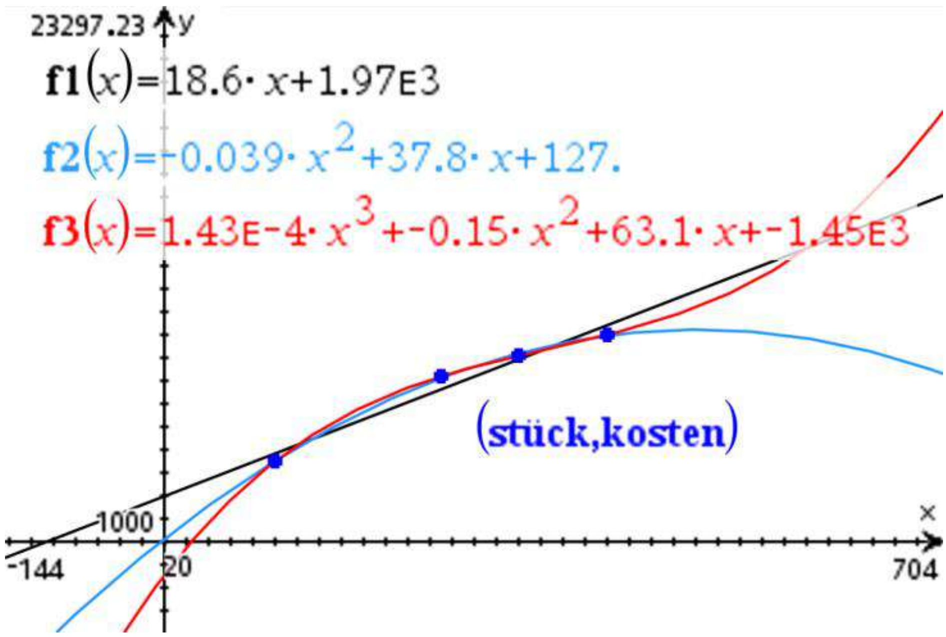
NICHT LINEARE AUSGLEICHSFUNKTIONEN

11.12) A: Die kubische Funktion nähert die Werte am besten an.

	A stück	B kosten	C	D	E	F	G	H
=				=LinRegM		=QuadRe		=CubicRe
1	100	3500	Titel	Lineare ...	Titel	Quadrat...	Titel	Kubische..
2	250	7200	RegEqn	m*x+b	RegEqn	a*x^2+b...	RegEqn	a*x^3+b...
3	320	8100	m	18.603	a	-0.0391...	a	0.000143
4	400	9000	b	1973.7	b	37.7737	b	-0.1496...
5			r²	0.963122	c	127.172	c	63.0754
6			r	0.981388	R²	0.99898	d	-1454.4
7			Resid	{-334.00...	Resid	{-12.586...	R²	1.
8							Resid	{-4.2E-1...







11.14)

$$p(t) = 42{,}7432\ldots \cdot 10^7 \cdot 0{,}90674^t$$

t … Zeit in h

$p(t)$ … Aktivität in Bq

$$\frac{p(0)}{2} = p(0) \cdot 0{,}90674^t \quad / p(0)$$

$$0{,}5 = 0{,}90674^{t}$$

$$\ln(0{,}5) = t \cdot \ln(0{,}90674) \quad | : \ln(\ldots)$$

$$t = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}90674)}$$

$$\underline{t = 7{,}08\ldots \text{ h}}$$

A: Die Aktivität nimmt nach 7,08... h um die Hälfte ab.

01. Hausübung, am 12.09.2023

Monday, April 18, 2022 12:29 PM

1. Hausübung, am 12.09.2023

8.6)
8.9)
8.10)

8.6 In einer Klasse sind 12 Schülerinnen und 15 Schüler. Es wird per Los entschieden, wer die Klassenkasse übernehmen muss. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sie ***1)*** von einer Schülerin, ***2)*** von einem Schüler übernommen werden muss?

1) $\frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{12}{27} = 44,\dot{4}\%$ ✓

2) $\frac{15}{27} = 55,\dot{5}\%$ ✓

8.9 In einer Straßenbahn fahren 28 Fahrgäste. 12 Fahrgäste haben eine Jahreskarte, die Hälfte von ihnen sind Senioren. Ein Sechstel der Jahreskartenbesitzer sind Studenten. Ein Fahrgast F wird zufällig ausgewählt. Ordne der gegebenen Wahrscheinlichkeit das passende Ereignis zu.

1	$P(E) = \frac{1}{7}$	C ✓
2	$P(E) = \frac{3}{7}$	B ✓

A	F ist Senior mit Jahreskarte.	3/14	21,4%
B	F hat eine Jahreskarte.	3/7	42,8%
C	F hat eine Jahreskarte, ist aber weder Student noch Senior.	1/7	14,3
D	F ist Student mit Jahreskarte.	1/14	7,14%

8.10 Preferencekarten bestehen aus 32 Karten in 4 Farben (Eichel, Blatt, Schellen, Herz) und den Werten 7, 8, 9, 10, Unter, Ober, König und Ass (Sau). Es wird eine Karte gezogen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Karte

1) keinen Mann (Unter, Ober, König) zeigt.

2) eine Zahl zeigt.

3) eine Herzkarte ohne Zahl ist.

4) eine Blatt- oder Herzkarte ist.

b) Gib ein Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang an, dessen Wahrscheinlichkeit durch folgenden Ausdruck berechnet werden kann: $P(E) = 1 - \frac{4}{32}$

a) 1) $5/8 = 62{,}5\%$

2) $1/2 = 50\%$

3) $1/4 \cdot 1/2 = 12{,}5\%$

4) $1/2 = 50\%$

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Schellenkarte mit Zahl gezogen wird?

02. Hausübung, am 19.09.2023

Dienstag, 19. September 2023 14:46

2. Hausübung, am 19.09.2023

8.16)
8.22)
8.25)
8.26)
8.29)
8.35)

8.16 In einer Lieferung von Neonröhren haben 2 % den Defekt A und 3 % den davon unabhängigen Defekt B.
1) Erkläre mithilfe des Multiplikationssatzes, wie viel Prozent nur den Defekt A haben.
2) Berechne, wie viel Prozent der Neonröhren keinen Defekt haben.
3) Berechne, wie viel Prozent der Neonröhren genau einen der beiden Defekte haben.

1) $P(\text{nur } A) = P(A \wedge \neg B) = 0{,}02 \cdot 0{,}97 = 1{,}94\%$ ✓

2) $P(\neg A \wedge \neg B) = 0{,}98 \cdot 0{,}97 = 95{,}06\%$ ✓

3) $P(A \vee B) - P(A \wedge B) =$

$0{,}02 + 0{,}03 - 2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}03 = 4{,}88\%$ ✓

8.22 In die Signalanlage einer Eisenbahnkreuzung werden Lampen eingebaut, die im Wartungszeitraum eine Ausfallsicherheit von 97 % haben.
1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Signal funktioniert, wenn man fünf Lampen eingebaut hat, von denen mindestens eine funktionieren muss?
2) Wie viele Lampen muss man einbauen, um eine 99,9%ige Ausfallssicherheit zu erhalten?

Stochastik

1) $P(\text{mind. 1 Lampe}) = 1 - P(\text{keine Lampe}) =$

$1 - 0{,}03^5 = 0{,}9999999757\ \%$ ✓

2) $1-0{,}03^n = 0{,}999 \quad |-1$

$-0{,}03^n = -0{,}001 \quad |\cdot(-1)$

$0{,}03^n = 0{,}001$

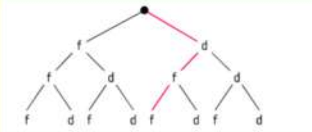
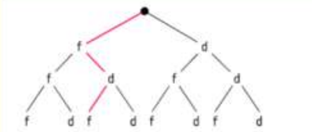
$\log_{0{,}03}(0{,}001) = n$

$n = 1{,}96995\ldots$

$\boxed{a^n = b \iff \log_a(b) = n}$

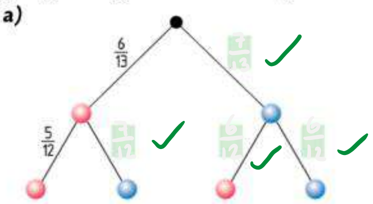
A: Man braucht mind. 2 Lampen, um 99,9%ige Ausfallsicherheit zu erreichen.

8.25 Aus einer Produktion mit fehlerfreien (f) und defekten (d) Produkten werden drei Stück zufällig ausgewählt. Ordne jeweils dem im Baumdiagramm färbig markierten Pfad die zutreffende Aussage zu.

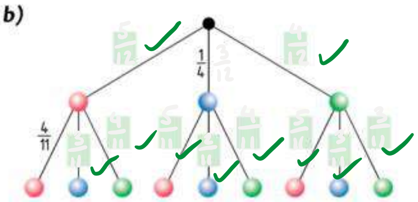
1		B	**A**	Nur das dritte Stück ist defekt.
			B	Nur das erste Stück ist defekt.
2		D	**C**	Das zweite und das dritte Stück sind defekt.
			D	Das erste und das dritte Stück sind fehlerfrei.

8.26 In einer Urne sind verschiedenfärbige Kugeln. Es wird 2-mal eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Trage in das Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.

a)



b)



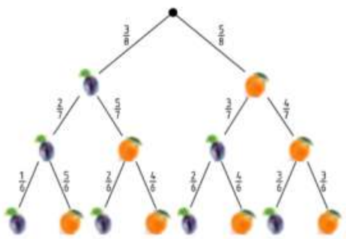
8.29 In einer Obstschale sind Zwetschken und Orangen.

1) Erkläre, ob das nebenstehende Baumdiagramm „Ziehen mit Zurücklegen" oder „Ziehen ohne Zurücklegen" darstellt.

2) Gib jeweils ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet wird.

A) $P(E_1) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$

B) $P(E_2) = 1 - \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$



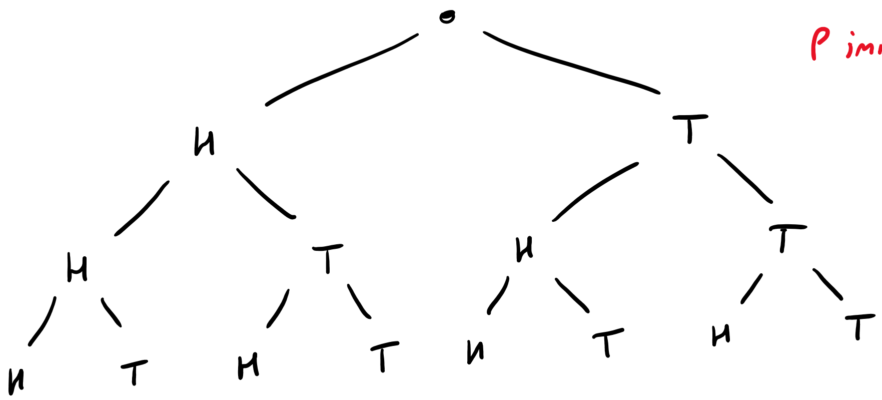
1) Es handelt sich um "Ziehen ohne Zurücklegen", da beim zweiten Mal ziehen nur mehr 7 im Nenner stehen

2) A. ziehe eine Zwetschke und 2 Orangen!

B. Ziehe mind. 1 Orange!

8.35 Thomas wirft eine Münze dreimal. Veranschauliche den Sachverhalt mithilfe eines Baumdiagramms und gib die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis an.

a) dreimal Kopf ***b)*** höchstens zweimal Kopf ***c)*** kein Kopf



P immer $\frac{1}{2}$ jeweils

a) $P(3\times H) = {}^1\!/_2{}^3 = {}^1\!/_8$ ✓

b) $P(\max 2\times H) = 1 - P(3\times H) = {}^7\!/_8$ ✓

c) $P(\text{kein } H) = {}^1\!/_2{}^3 = {}^1\!/_8$ ✓

04. Hausübung, am 26.09.2023

Dienstag, 26. September 2023 14:45

4. Hausübung, am 26.09.2023

8.17) 1) 3)

8.31)

Wissenscheck S.203

8.17 Eine Gruppe von 92 Schülerinnen und Schülern möchte auf Schikurs fahren. Von den 24 Schülerinnen möchten 17 Schi fahren, der Rest Snowboarden. Unter den Schülern entscheiden sich 27 für Snowboarden, der Rest für Schi fahren. Eine Person S aus dieser Gruppe wird zufällig ausgewählt. Ermittle folgende Wahrscheinlichkeiten:

1) P(S ist ein Schüler | fährt Schi) **3)** P(S fährt Schi | ist Schülerin)

2) P(S ist eine Schülerin | fährt Snowboard) **4)** P(S fährt Snowboard | ist Schüler)

	Schülerinnen ♀	Schüler ♂	total Σ
Ski ⫽	17	41	58
Snowboard	7	27	34
Σ total	24	68	92

1) $P(♂ \mid ⫽) = \frac{41}{58} = 70{,}689...\,\%$ ✓

3) $P(⫽ \mid ♀) = \frac{17}{24} = 70{,}8\dot{3}\,\%$ ✓

8.31 Mikrocontroller werden von zwei Firmen bezogen, wobei 35 % vom Hersteller AMIC und 65 % von BMIC stammen. Der Anteil der fehlerhaften Controller von AMIC beträgt 5 %, jener von BMIC 4 %.

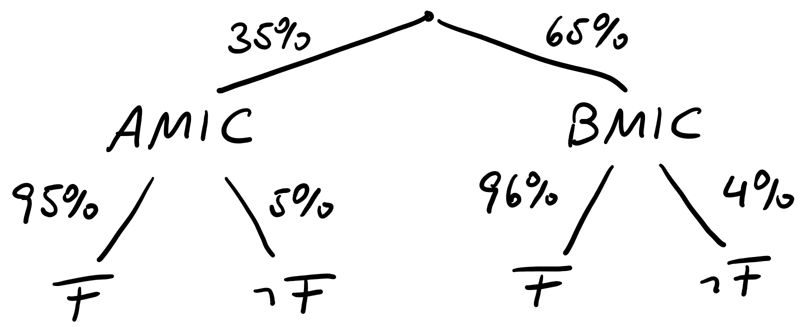
ABC

1) Stelle diesen Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.

2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mikrocontroller von AMIC stammt und fehlerfrei ist.

3) Beschreibe, welche Wahrscheinlichkeit durch P(AMIC | fehlerhafter Controller) angegeben wird und berechne diese Wahrscheinlichkeit.

1)



F … funktioniert

2) $P(AMIC \wedge F) = 0{,}35 \cdot 0{,}95 = 33{,}25\%$

3) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Controller von AMIC ist, wenn dieser nicht funktioniert?

$$P(AMIC \mid \neg F) = \frac{P(AMIC) \cdot P(\neg F \mid AMIC)}{P(\neg F)} =$$

$$= \frac{0{,}35 \cdot 0{,}05}{0{,}35 \cdot 0{,}05 + 0{,}65 \cdot 0{,}04} = 40{,}229885\ldots\ \%$$

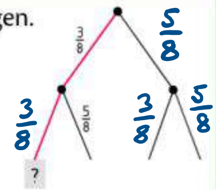
Wissens-Check

		gelöst
1	Ein Würfel wird geworfen. Ordne dem Ereignis die passende Wahrscheinlichkeit zu:	✓
2	Aus einer Urne mit 3 roten und 5 blauen Kugeln wird gezogen. A) Wird „Ziehen mit Zurücklegen“ oder „Ziehen ~~ohne~~ Zurücklegen“ dargestellt? B) Ergänze das Baumdiagramm. C) Gib an, welche Wahrscheinlichkeit am Ende des markierten Pfads berechnet wird. $\frac{9}{64} = 14{,}0625\,\%$	✓
3	Auf einer Anzeigetafel sind 5 grüne und 4 rote Kontrolllampen angebracht. Bei einem Test leuchten hintereinander drei zufällig ausgewählte Lampen auf. Kreuze an, welcher Ausdruck die Wahrscheinlichkeit angibt, dass höchstens 2-mal eine grüne Lampe geleuchtet hat. Begründe deine Auswahl.	✓

Aufgabe 1:

1	E … Augenzahl 8	A	A	$P(E) = 0$	
			B	$P(E) = \frac{1}{6}$	
2	E … Augenzahl nicht 6	C	C	$P(E) = 1 - \frac{1}{6}$	
			D	$P(E) = 1$	

Aufgabe 2:



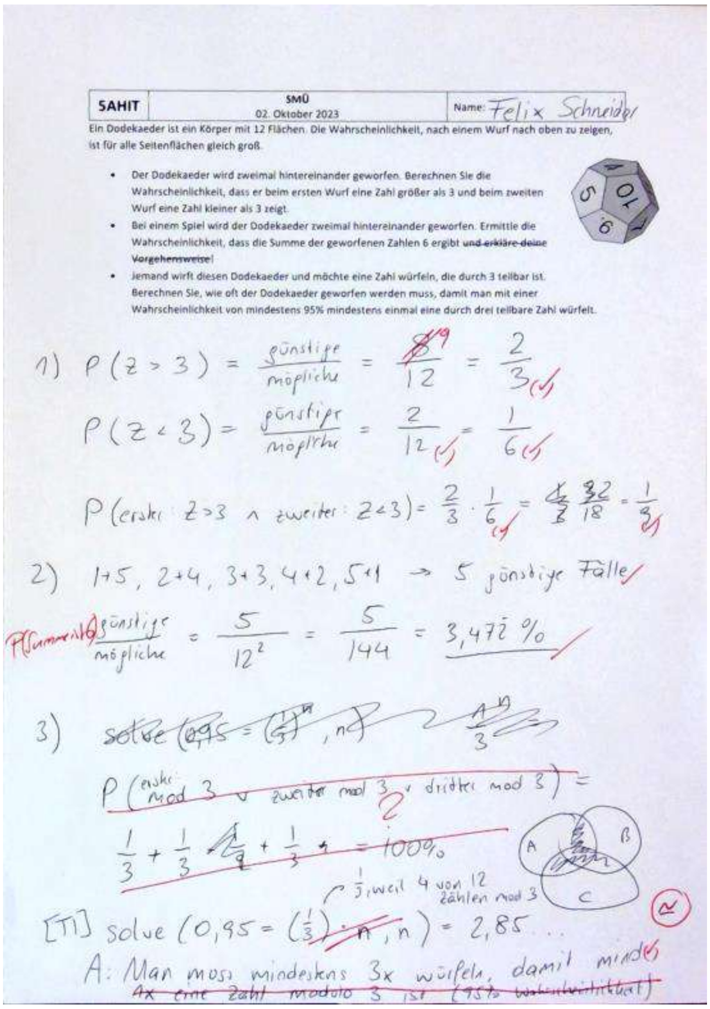
Aufgabe 3:

$\left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \frac{4}{9}$	A
$3 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9}$	B
$3 \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2$	C
$1 - \left(\frac{5}{9}\right)^3$	☒ D
$1 - \left(\frac{4}{9}\right)^3$	E

05. Hausübung, am 10.10.2023

SMÜ verbessern

- 9.8)
- 9.9)
- 9.14) a)b)
- 9.15) 3)
- 9.16)



SAHIT	SMÜ 02. Oktober 2023	Name: Felix Schneider

Ein Dodekaeder ist ein Körper mit 12 Flächen. Die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, ist für alle Seitenflächen gleich groß.

- Der Dodekaeder wird zweimal hintereinander geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er beim ersten Wurf eine Zahl größer als 3 und beim zweiten Wurf eine Zahl kleiner als 3 zeigt.
- Bei einem Spiel wird der Dodekaeder zweimal hintereinander geworfen. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der geworfenen Zahlen 6 ergibt ~~und erkläre deine Vorgehensweise~~!
- Jemand wirft diesen Dodekaeder und möchte eine Zahl würfeln, die durch 3 teilbar ist. Berechnen Sie, wie oft der Dodekaeder geworfen werden muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal eine durch drei teilbare Zahl würfelt.

1) $P(z>3) = \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{\cancel{8}9}{12} = \frac{2}{3}$

$P(z<3) = \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P(\text{erster: } z>3 \wedge \text{zweiter: } z<3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\cancel{2}}{3}\frac{\cancel{3}2}{18} = \frac{1}{9}$

2) 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1 → 5 günstige Fälle

$P(\text{Summe ist } 6) \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{5}{12^2} = \frac{5}{144} = \underline{3{,}47\dot{2}\,\%}$

3) ~~solve$(0{,}95 = (\frac{1}{3})^n, n)$~~ ~~$\frac{1}{3}$~~

~~$P(\text{erster mod } 3 \vee \text{zweiter mod } 3 \vee \text{dritter mod } 3) =$~~ ?

~~$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 100\%$~~

A B C

$\frac{1}{3}$, weil 4 von 12 Zahlen mod 3

[TI] solve$(0{,}95 = (\frac{1}{3})\cancel{\cdot n}, n) = 2{,}85\ldots$

A: Man muss mindestens 3x würfeln, damit mind. ~~4x eine Zahl modulo 3 ist (95% Wahrscheinlichkeit)~~

1) $P(\text{erster} > 3 \;\&\; \text{zweiter} < 3) =$

$\frac{9}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 — 1, 2

2) $6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 1+5$

↳ 5 mögliche Fälle

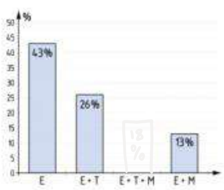
$P(\text{Summe } 6) = \frac{5}{12^2} = \underline{3{,}47\dot{2}\,\%}$

3) $1 - (\frac{2}{3})^n > 0{,}95$

$\underline{n = 7{,}3883\ldots}$

A: Man muss 8x würfeln, damit man zu mehr als 95% mindestens 1x eine Zahl modulo 3 = 0 würfelt.

9.8 Beim Besuch einer Sehenswürdigkeit kann man aus folgenden Angeboten wählen:
Eintritt (E): 15,00 €
Eintritt und Turmbesichtigung (E + T): 21,00 €
Eintritt und Museum (E + M): 19,00 €
Eintritt mit Turm und Museum (E + T + M): 24,00 €
Die Grafik zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich ein Besucher für eine der vier Möglichkeiten entscheidet.
1) Ergänze den fehlenden Balken in der Grafik.
2) Gib eine Formel für die zu erwartenden Einnahmen bei n Besuchern an.



100 − 43 − 26 − 13 = 18

2) $E(n) = 15 \cdot 0{,}43n + 21 \cdot 0{,}26n + 19 \cdot 0{,}18n + 24 \cdot 0{,}13n$

9.9 Ein Eisverkäufer rechnet an sonnigen Tagen mit Einnahmen in einer Höhe von 1 200,00 € pro Tag und an regnerischen Tagen mit Einnahmen in einer Höhe von 530,00 € pro Tag. Im Wetterbericht wird für den nächsten Tag eine Regenwahrscheinlichkeit von 32 % vorhergesagt. Interpretiere die Bedeutung des Ausdrucks $1\,200 \cdot 0{,}68 + 530 \cdot 0{,}32$ im gegebenen Sachzusammenhang.

A: Der Ausdruck $1200 \cdot 0{,}68 + 530 \cdot 0{,}32$ beschreibt die wahrscheinlichen Einnahmen des nächsten Tages unter Berücksichtigung der Regenwahrscheinlichkeit.

9.14 In einer Dose mit 100 Kugeln befinden sich 30 grüne Kugeln. Jemand zieht 5-mal hintereinander eine Kugel, wobei jede Kugel nach dem Ziehen wieder zurückgelegt wird.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von den gezogenen Kugeln

a) alle fünf Kugeln grün sind.

b) mindestens eine Kugel grün ist.

c) genau eine Kugel grün ist.

d) höchstens zwei Kugeln grün sind.

2) Gib an, welche Wahrscheinlichkeit mit dem Ausdruck $\binom{5}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2$ berechnet wird.

9.14) 1) a) $0{,}3^5 = 0{,}00243 \approx \underline{0{,}24\,\%}$

b) $1 - 0{,}7^5 = 0{,}8319\ldots \approx \underline{83{,}2\,\%}$

2) A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 der 5 gezogenen Kugeln grün sind.

9.15 Bei einem Single-Choice-Test gibt es zu zehn Fragen jeweils vier mögliche Antworten, von denen nur eine richtig ist. Jemand kreuzt bei allen Fragen die Antworten zufällig an.

1) Erkläre, warum die Binomialverteilung als Modell zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit verwendet werden kann.

2) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, bei jeder Frage die richtige Antwort anzukreuzen.

3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei mindestens sieben Fragen die richtige Antwort anzukreuzen.

9.15) 3) $\binom{10}{7} \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75^3 =$ binomPdf(10, 0.25, 7)

$= 0{,}00309 \approx \underline{0{,}31\,\%}$

9.16 75 % der Baumwollfasern einer bestimmten Sorte sind kürzer als 45 mm.

1) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig entnommenen Fasern genau 3 Fasern kürzer als 45 mm sind.

2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, unter 5 Fasern mindestens 2 aber höchstens 4 Fasern zu erhalten, die kürzer als 45 mm sind.

3) Wie viele Fasern, die kürzer als 45 mm sind, kann man erwarten, wenn 10 Fasern entnommen werden?

4) Interpretiere den Ausdruck im Sachzusammenhang: $\sum_{x=9}^{10} \binom{12}{x} \cdot 0{,}75^x \cdot 0{,}25^{12-x}$

9.16) 1) binomPdf(5, 0.75, 3) = $0{,}2636\ldots \approx \underline{26{,}4\,\%}$

2) binomCdf(5, 0.75, 2, 4) = $0{,}747\ldots \approx \underline{74{,}7\,\%}$

3) $10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5$ Fasern

4) Wahrscheinlichkeit, unter 12 Fasern mindestens 9 aber höchstens 10 zu erhalten, die kürzer als 45mm sind.

06. Hausübung, am 17.10.2023

Dienstag, 17. Oktober 2023 14:44

06. Hausübung, am 17.10.2023

9.18)
9.19)
9.21)

SMÜ:
B_354
A_338 a/b
A_332 a/b
A_329 c
A_302 d
B_372
A_191 d
A_133 b
A_117 a
A_082 a/b/c

9.18 Benjamin isst am liebsten Walnusseis. Bei seinem bevorzugten Eissalon beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem beliebigen Tag im Sortiment ist, 25 %. Benjamin geht einmal täglich zu diesem Eissalon.

1) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass das Walnusseis innerhalb von sieben Tagen mindestens zweimal angeboten wird.

2) Stelle eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit auf, dass das Walnusseis in 10 Tagen höchstens viermal angeboten wird.

3) Berechne, an wie vielen Tagen Benjamin in den Eissalon gehen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal Walnusseis zu bekommen, mindestens 95 % beträgt.

1) X ... Anzahl Tagen Walnusseis ✓

$P(X \geq 2) = \text{binomCdf}(7, 0.25, 2, 7)$

$= \underline{55{,}51\,\%}$ ✓

2) $P(X \leq 4) = \sum_{n=0}^{4} \binom{10}{n} \cdot 0{,}25^{n} \cdot 0{,}75^{10-n}$ ✓

3) $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$

$1 - P(X = 0) \geq 0{,}95$

$1 - P(X=0) \geq 0{,}95$

$1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^n = 1 - 0{,}75^n \geq 0{,}95$

$n \geq 10{,}413...$ ✓

A: Benjamin muss mind. an 11 Tagen vorbeischauen. ✓

9.19 Für eine Werbeaktion wurde ein Achtel aller Kinokarten mit einer Markierung versehen, die zum kostenlosen Besuch eines weiteren Films berechtigt. Eine Gruppe von 25 Personen kauft 25 Kinokarten.

1) Erkläre, warum man die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Personen dieser Gruppe eine markierte Karte erhalten, mithilfe der Binomialverteilung berechnen kann.

2) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als fünf Personen markierte Karten erhalten. Stelle die Verteilungsfunktion grafisch dar und veranschauliche diese Wahrscheinlichkeit.

3) Gib ein Ereignis im Sachzusammenhang an, dessen Wahrscheinlichkeit mit folgendem Ausdruck berechnet wird: $1 - \left[\binom{25}{0} \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}875^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}125^1 \cdot 0{,}875^{24}\right]$

4) Ab welcher Anzahl von Karten ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Karte markiert ist, größer als 50 %?

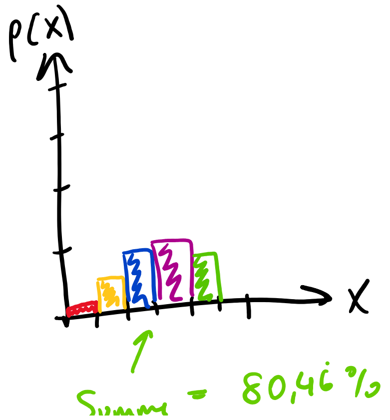
1) · ∞ oft wiederholen (unabhängig) ✓

· W' gleich ✓

· 2 Möglichkeiten ✓

2) X ... Anzahl markierte Karten

$P(X<5) = \underline{80{,}46\,\%}$ ✓



↑
Summe = 80,46 %

3) $P(X>1) \rightarrow$ mehr als 1 Person bekommt eine markierte Karte

4) $P(X \geq 1) > 0{,}5$ ✓

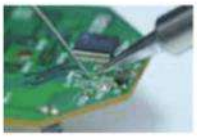
$1 - P(X=0) > 0{,}5$

$1 - (1-0{,}125)^n > 0{,}5$

$n > 5{,}190\ldots$ ✓

A: Ab 6 Karten beträgt die W' mehr als 50%. ✓

9.21 Die Lötstellen einer Leiterplatte werden stichprobenartig getestet. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lötstelle defekt ist, beträgt 2 %.



1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, unter 500 getesteten Lötstellen höchstens 4 defekte Lötstellen zu finden.
2) Erkläre im gegebenen Sachzusammenhang den Unterschied zwischen f(2) und F(2), wenn die untersuchte Zufallsvariable die Anzahl der defekten Leitstellen angibt.
3) Es werden 20 Leiterplatten mit jeweils n Lötstellen getestet. Gib an, was mit dem Ausdruck $20 \cdot n \cdot 0{,}98$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

1) X... Anzahl defekte Lötstellen ✓

$p = 0{,}02$

$P(X \leq 4) = \underline{2{,}8\%}$ ✓

2) Während $f(2)$ die W' für genau 2 defekte Lötstellen berechnet, berechnet $F(2)$ die W' für max. 2 defekte Lötstellen. ✓

3) Es wird berechnet, bei wie vielen Lötstellen man erwarten kann, dass diese funktionieren. ✓

07. Hausübung, am 24.10.2023

Dienstag, 24. Oktober 2023 14:22

7. Hausübung, am 24.10.2023

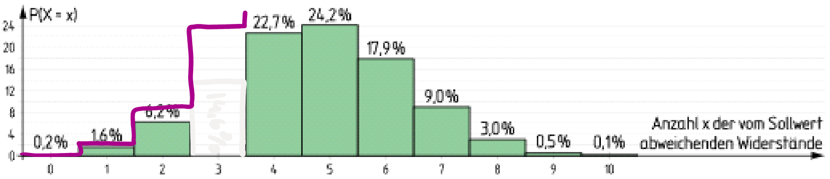
9.27)

9.106)

9.107)

9.33)

9.27 In einem Schullabor befinden sich in einer Kiste Widerstände, von denen ein bestimmter Prozentsatz defekt ist. Es werden 10 Stück zufällig entnommen. Die folgende Grafik zeigt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion.



✓

1) Ergänze den fehlenden Balken.

2) Stelle die zugehörige Verteilungsfunktion grafisch dar. ez

3) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass
a) mehr als 6 **b)** höchstens 3 **c)** weniger als 5 **d)** mindestens 9
Widerstände defekt sind.

1) $100\% - 0{,}2\% - 1{,}6\% - \cdots - 0{,}1\% =$

[TI] $= 14{,}6\%$ ✓

3) $P(X > 6) = 12{,}6\%$ ✓

$P(X \leq 3) = 22{,}6\%$ ✓

$P(X < 5) = 45{,}3\%$ ✓

$P(X \geq 9) = 0{,}6\%$ ✓

9.106 Eine Impfung ruft bei 8 % der Geimpften Nebenwirkungen hervor.

1) Gib eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass unter 30 geimpften Personen mindestens 4 an Nebenwirkungen leiden.

2) Für weitere Untersuchungen werden Personen nach der Impfung zufällig ausgewählt. Berechne, wie viele Personen man auswählen muss, damit sich darunter mit mindestens 95%iger Sicherheit mindestens 1 Person befindet, die unter Nebenwirkungen leidet.

3) Es werden 100 Personen geimpft. Erkläre die Bedeutung des Ausdrucks $100 \cdot 0{,}08$ im gegebenen Sachzusammenhang.

1) $P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{30} \binom{30}{x} \cdot 0{,}08^x \cdot 0{,}92^{30-x}$ X... Anzahl Menschen mit Nebenwirkungen

2) $1 - P(X=0) > 0{,}95$

$1 - (1-0{,}08)^n > 0{,}95$

$n = 35{,}928...$ ✓

A: Mind 36 People

3) Erwartungswert

(So viele Betroffene (8) People erwartet man) ✓

9.107 Im Testbetrieb einer neuen Fertigungsanlage für Alufelgen betrug der Ausschussanteil der gefertigten Felgen 3 %.

1) Gib ein Ereignis E an, dessen Wahrscheinlichkeit mithilfe des folgenden Ausdrucks berechnet wird:

$$P(E) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} \cdot 0{,}97^{10-x} \cdot 0{,}03^x$$

2) Es werden 40 gefertigte Alufelgen zufällig entnommen. Berechne, wie viel Ausschuss dabei zu erwarten ist.

1) Von 10 zufälligen Felgen sind mehr als 3 kaputt.

2) $40 \cdot 0{,}03 = 1{,}2$ Ausschüsse werden erwartet

9.33 Auf einem großen Bauernmarkt gibt es 250 Marktstände, davon verkaufen 15 Blumen. Das Marktamt prüft zehn zufällig ausgewählte Stände. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fünftel der geprüften Stände Blumen verkauft?

1) Rechne genau mit der hypergeometrischen Verteilung.

2) Rechne näherungsweise mit der Binomialverteilung.

3) Vergleiche die Ergebnisse aus **1)** und **2)**.

1) N ... 250 Stände

1) N … 250 Stände
M … 15 Stände
n … 10 Stände
x … 2 Stände

$$\frac{\binom{15}{2} \cdot \binom{235}{8}}{\binom{250}{10}} = \underline{9{,}805 \ldots \%}$$

2) X … Anzahl Blumenstände

$P(X=2) = \underline{9{,}875 \ldots \%}$

3) <u>bissl größer</u> → Warum?

Aufgrund der Nicht-„Entfernung" bereits gewählter Blumen- und sonstigen Stände ist die W' 2x Blumen zu wählen höher $\left(\frac{15}{250} > \frac{14}{249}\right)$

08. Hausübung, am 07.11.2023

Montag, 13. November 2023 10:51

8. Hausübung, am 07.11.2023

9.31) 3)

9.34) b)

9.42) 1)

9.45)

9.31 In eine Schulklasse gehen 15 Burschen und 4 Mädchen. Es werden 3 Personen zufällig ausgewählt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ausgewählten Personen

1) mindestens ein Bursch ist.
2) mehr Burschen als Mädchen sind.
3) genau 2 Mädchen sind.
4) nur Mädchen sind.

3) Hypergeometrische Verteilung

X... Anzahl Mädchen

$N = 19$
$n = 3$
$M = 4$
$x = 2$

$$p(x) = P(X=2) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{15}{1}}{\binom{19}{3}}$$

$$= \underline{9{,}2879...\,\%}$$ ✓

9.34 Eine Firma, die klinische Studien durchführt, testet ein neues Medikament an 500 Personen. Die Hälfte davon erhält ein Präparat mit dem neuen Wirkstoff, die andere Hälfte ein Medikament mit dem bewährten Wirkstoff. Nach drei Wochen wird eine Kontrolluntersuchung an 20 zufällig ausgewählten Personen vorgenommen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit des unten angegebenen Ereignisses genau mit der hypergeometrischen Verteilung und näherungsweise mit der Binomialverteilung.
a) Genau 10 Personen testen den neuen Wirkstoff.
b) Mindestens 2 Personen testen den neuen Wirkstoff.
c) Höchstens 5 Personen nehmen das bewährte Medikament ein.

b) Hypergeometrische Verteilung:

$N = 500$
$M = 250$
$n = 20$
$x = 2 - 20$

$$P(x) = \sum_{x=2}^{20} \frac{\binom{250}{x} \cdot \binom{250}{20-x}}{\binom{500}{20}} = \underline{99{,}9985\ldots\%}$$

Binomialverteilung

$p = \frac{1}{2}$
$n = 20$

$P(X \geq 2) = \text{binomCdf}(20, \frac{1}{2}, 2, 20) = \underline{99{,}9979\ldots\%}$

9.42 In einer Telefonzentrale gehen im Mittel sechs Anrufe in zehn Minuten ein. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 11:30 Uhr und 11:40 Uhr

1) genau neun Anrufe eingehen.
2) mindestens vier Anrufe eingehen.
3) mehr als vier Anrufe eingehen.
4) neun bis zwölf Anrufe eingehen.

1) <u>mathematisch</u>

1) mathematisch

POISSON VERTEILUNG

$\mu = 6$ X... Anrufe in zehn Minuten im Mittel

$P(X=9) = \frac{6^9}{9!} \cdot e^{-6} = \underline{6{,}8838...\%}$ ✓

realistisch

So kurz vor der Mittagspause ruft man nicht mehr an!

9.45 Bei einem Job-Vermittlungsbüro gehen im Mittel 8 Anfragen pro Stunde ein.

1) Schätze, welches Ereignis wahrscheinlicher ist:
8 Anrufe in der Stunde oder 64 Anrufe an einem 8-Stunden-Tag.

2) Berechne die Wahrscheinlichkeiten aus ***1)*** und interpretiere das Ergebnis.

1) aufgrund der erhöhten Möglichkeiten diskreter Abweichungen bei höheren Zahlen, ist das Ereignis der 8 Anrufe innerhalb einer Stunde wahrscheinlicher als 64 Anrufe in 8 Stunden.

2) $\mu = 8$ X... Anzahl Anrufe pro Stunde

$P(X=8) = \frac{8^8}{8!} \cdot e^{-8} = \underline{13{,}9587...\%}$ ✓

$\mu = 64$ X... Anzahl Anrufe in 8 Stunden

$P(X=64) = \text{poissPdf}(64, 64) = \underline{4{,}9803...\%}$ ✓

09. Hausübung, am 21.11.2023

Dienstag, 21. November 2023 14:46

9. Hausübung, am 21.11.2023

9.48) ✓

9.51) ✓

9.61) ✓

9.62) ✓

9.64) 3) 4) ✓

9.67) ✓

9.108) ✓

9.48 Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Wird der Parameter σ einer Normalverteilung ____①____, so ____②____ .

①	
verdoppelt	A
halbiert	☒ B ✓
vervierfacht	C

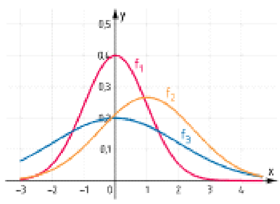
②	
verdoppelt sich der Flächeninhalt unter der Kurve.	A
halbiert sich der Erwartungswert.	B
wird die Glockenkurve schmäler.	☒ C ✓

9.51 In nebenstehender Grafik sind Normalverteilungen mit unterschiedlichen Parametern dargestellt.

1) Lies den jeweiligen Wert für μ ab.

2) Ordne den Kurven jeweils den richtigen Wert des Parameters σ zu.

A) $\sigma = 2$ **B)** $\sigma = 1$ **C)** $\sigma = 1{,}5$



$f_1: \mu = 0$ ✓ $f_2: \mu = 1$ ✓ $f_3: \mu = 0$ ✓

B) $\sigma = 1$ ✓ C) $\sigma = 1{,}5$ ✓ A) $\sigma = 2$ ✓

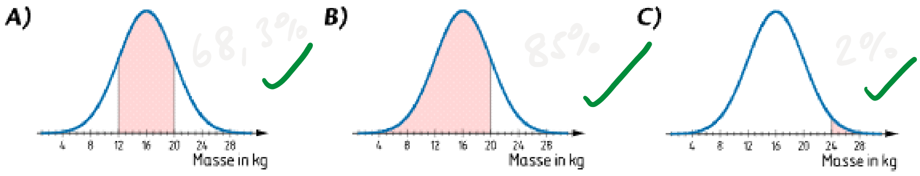
9.61 Ergänze die Textlücken in folgendem Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer normalverteilten Größe im Bereich ___①___ liegt, beträgt rund ___②___ .

①		②	
$\mu \pm \sigma$	A	50 %	A
$\mu \pm 2\sigma$	B ☒ ✓	33 %	B
$\mu \pm 3\sigma$	C	95 %	C ☒ ✓

9.62 Am Gepäckannahmeschalter eines Flughafens werden Gepäckstücke gewogen. Die Masse der Gepäckstücke ist annähernd normalverteilt mit μ = 16 kg und σ = 4 kg.

1) Schätze, welcher Prozentsatz der Gepäckstücke in den angegebenen Grafiken durch die färbig eingezeichneten Flächen veranschaulicht ist.



2) Kreuze die wahre Aussage an.

Rund 99 % der Gepäckstücke wiegen höchstens 16 kg.	A
Rund 5 % der Gepäckstücke wiegen zwischen 24 kg und 28 kg.	B
Rund zwei Drittel der Gepäckstücke wiegen weniger als 24 kg.	C
Rund 99,7 % der Gepäckstücke wiegen zwischen 4 kg und 28 kg.	D ☒ ✓
Rund ein Drittel der Gepäckstücke wiegen mehr als 20 kg.	E

9.64 Der Inhalt von Honiggläsern ist annähernd normalverteilt mit μ = 460 g und σ = 4 g. Ein Honigglas wird zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Fälle. Das Honigglas enthält

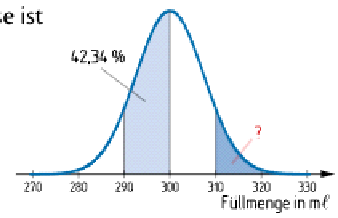
1) weniger als 450 g. **3)** 475 g oder mehr. **5)** 470 g oder weniger.
2) mehr als 454 g. **4)** zwischen 440 g und 480 g. **6)** mindestens 460 g.

X… Inhalt Honigglas in g

3) $P(X \geq 475) = \underline{0{,}0088\,\%}$ ✓

4) $P(440 < X < 480) = \underline{99{,}99994257\,\%}$ ✓

9.67 Die Füllmenge von Tuben einer speziellen Dichtungsmasse ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 300 mℓ und der Standardabweichung σ = 7 mℓ.
Ermittle anhand der Grafik, wie viel Prozent der Tuben eine Füllmenge von mehr als 310 mℓ haben.

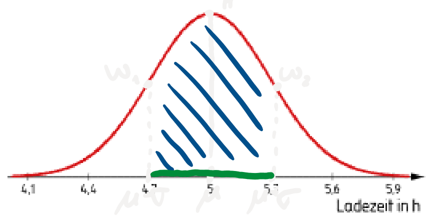


9.68 Die Korngröße von Feinstaub ist normalverteilt. In

$$\frac{1 - 0{,}4234 \cdot 2}{2} = 0{,}0766 = \underline{7{,}66\,\%}$$ ✓

9.108 Die Ladezeit für ein Elektroauto eines bestimmten Typs ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 5{,}0$ h und $\sigma = 0{,}3$ h.

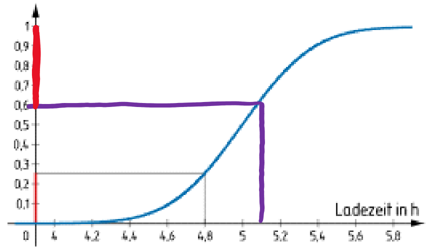
a) Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion der Ladezeiten.



1) Veranschauliche den Erwartungswert und die Standardabweichung in der Grafik.

2) Veranschauliche jenen Bereich, in dem rund 68 % aller Ladezeiten symmetrisch um den Erwartungswert liegen.

b) Die Abbildung zeigt den Graphen der Verteilungsfunktion der Ladezeiten.



1) Erkläre die Bedeutung des markierten Funktionswerts im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Veranschauliche jenen Anteil der Ladezeiten, die länger als 5,1 h dauern, in der Grafik.

b) 1) Ca. 25% der Ladezeiten dauern unter 4h 48min.

10. Hausübung, am 12.12.2023

Dienstag, 12. Dezember 2023 14:46

10. Hausübung, am 12.12.2023

9.69)

9.71)

9.69 Die Reißfestigkeit von Fäden ist normalverteilt mit $\sigma = 40\,\frac{N}{mm^2}$.

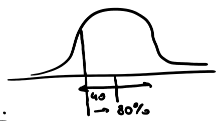
1) Wie groß ist der Erwartungswert, wenn 80 % der Fäden eine Reißfestigkeit von mehr als $200\,\frac{N}{mm^2}$ haben?

2) Gib die symmetrisch um μ gelegenen Grenzen an, innerhalb derer die Reißfestigkeit von 95 % aller Fäden liegt.

1) $\sigma = 40$ X… Reißfestigkeit in $\frac{N}{mm^2}$

$\mu = ?$

$P(X > 200) = 0{,}8$



$N(0,1) \rightarrow z = -0{,}8416\ldots$

$z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$-0{,}8416\ldots = \frac{200-\mu}{40} \rightarrow \mu = 233{,}665$ ✓

A: Der Erwartungswert ist ca. $233{,}67\,\frac{N}{mm^2}$.

nSolve (normCdf (200, ∞, m, 40) = 0.8, m, 0, 1000) = $233{,}665\,\frac{N}{mm^2}$

Intervall

2) invNorm (0.025, 233.67, 40) = $155{,}266\,\frac{N}{mm^2}$ ✓

invNorm (0.975, 233.67, 40) = $312{,}063\,\frac{N}{mm^2}$ ✓

A: Zwischen [155.266; 312.063] liegen 95%.

9.71 Die Masse der Hühnereier eines Betriebs ist normalverteilt. Im symmetrisch um μ gelegenen Intervall von 63 g bis 73 g liegt die Masse von 80 % aller Hühnereier. Liegt die Masse eines Hühnereis unter 53 g, so gehört es zur Gewichtsklasse S.
Berechne, wie viel Prozent der Hühnereier in diese Gewichtsklasse fallen.

X… Masse von Ei in g

$\mu = \frac{63+73}{2} = 68\,g$ ✓

$\sigma = ?$

$P(63 < X < 73) = 0{,}8$

$N(0,1) \rightarrow z = -1{,}2815\ldots\,g$ ✓

$z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow \sigma = 3{,}90152\ldots\,g$ ✓

nsolve

↳ braucht Intervall / Bereich

↳ muss groß genug sein

$P(X < 53) = 0{,}00006 = 0{,}006\%$ ✓

A: Nur ca. 0,006 % fallen in die Gewichtsklasse S.

11. Hausübung, am 09.01.2024

Dienstag, 9. Januar 2024 14:47

11. Hausübung, am 09.01.2024

9.73)

9.74)

9.90)

μ ± 3σ nicht größer als der Toleranzbereich ist.

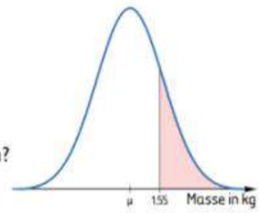
9.73 Die Masse von 1,5-kg-Hanteln ist normalverteilt mit μ = 1,50 kg und σ = 2 dag.

1) Bei wie viel Prozent der Hanteln weicht die Masse um mehr als 4 dag von μ ab?

2) Bei einer Produktionsserie sollen (bei gleicher Standardabweichung) höchstens 1 % der Hanteln weniger als 1,47 kg haben. Bestimme den Erwartungswert dieser Produktionsserie.

3) Auf welchen Wert müsste man σ ändern, damit bei μ = 1,50 kg nur 1 % der Hanteln weniger als 1,47 kg wiegen?

4) Erkläre die Bedeutung der färbig markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.



1) $\mu = 150$ dag   X… Hantelgewicht in dag

$\sigma = 2$ dag

$1 - P(146 < X < 154) = \underline{4{,}55\ldots\%}$ ✓

2) $\mu = ?$

$\sigma = 2$ dag

$P(X < 147) = 0{,}01$

$P(Z < z) = 0{,}01$

$z_{0,01} = -2{,}32635\ldots$

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$-2{,}32635\ldots = \frac{147 - \mu}{2} \Rightarrow \underline{\mu = 151{,}653 \text{ dag}}$ ✓

A: Bei der Produktionsreihe müsste der Erwartungswert bei 151,653 dag liegen (1,517 kg).

ungswert bei 151,655 dag ... .

3) $\mu = 150$ dag
$\sigma = ?$

$P(X < 147) = 0{,}01$

$P(Z < z) = 0{,}01$

$z_{0,01} = -2{,}32635...$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma = 1{,}28957...\text{ dag}}$

A: Die Standardabweichung müsste ca. 1,2896 dag sein.

4) A: Prozentanteil des Gewichts der Manteln, dessen Gewicht größer 1,55 kg ist.

9.74 Der Erwartungswert für die Spannung in einem eingeschalteten Spotlight für eine Wandbeleuchtung beträgt 230 V und die Standardabweichung beträgt 8 V.

1) Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass die Spannung in einem eingeschalteten Spotlight außerhalb des Toleranzbereichs von $\mu \pm 3\sigma$ liegt.

2) Es wäre wünschenswert, wenn nur in 0,01 % der Messungen eine Spannung von mehr als 255 V vorliegt. Gib die Standardabweichung an, die bei gleich bleibendem Erwartungswert dafür benötigt wird.

1) $\mu = 230\,V$ X... Spannung LED in V
$\sigma = 8\,V$

$1 - P(206 < X < 254) \approx \underline{0{,}27\,\%}$

2) $\mu = 230\,V$
$\sigma = ?$

$P(X > 255) = 0{,}0001$

$P(X > 255) = 0{,}0001$

nSolve(normCdf(255, ∞, 230, x) = 0.0001, x, 0.1, 10)

$\sigma = 6{,}72207\ V$ ✓

9.90 Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Bei einem Stichprobenumfang von ____①____ beträgt die Standardabweichung ____②____ der Standardabweichung der ursprünglichen Verteilung.

①	
n = 4	☒ A
n = 2	B
n = 8	C

②	
ein Viertel	A
ein Achtel	B
die Hälfte	☒ C

$\sqrt{4} = 2$ ✓

12. Hausübung, am 23.01.2024

Dienstag, 23. Januar 2024   14:41

12. Hausübung, am 23.01.2024

9.100)

9.112) 1)

10.5 im Buch

9.100 Die Durchmesser von Stahlstäben einer Produktion sind normalverteilt mit $\mu = 2{,}4$ cm und $\sigma = 2$ mm.

1) Berechne den zum Erwartungswert symmetrischen 99%igen Zufallsstreubereich für die Stabdurchmesser.

2) Welchen Durchmesser haben 95 % der Stahlstäbe höchstens?

3) Die Durchmesser von verschiedenen Stahlstäben werden anhand von Stichproben vom Umfang n = 20 gemessen. Gib an, wie groß der zugehörige Stichprobenmittelwert bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1$ % mindestens bzw. höchstens ist.

4) Erkläre, wie sich die Breite des Zufallsstreubereichs verändert, wenn bei gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1$ % der Stichprobenumfang erhöht wird.

1) $\mu = 2{,}4\,cm$ X… Durchmesser von Stahlstäben in cm

$\sigma = 0{,}2\,cm$

$\alpha = 1\%$

$x_{u,o} = \mu \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$

$\underline{x_u = 1{,}8848\ldots\,cm}$ ✓

$\underline{x_o = 2{,}9151\ldots\,cm}$ ✓

A: Der Streubereich liegt in $[1{,}8848\ldots\,cm;\ 2{,}9151\ldots\,cm]$.

2) $\alpha = 5\%$

$x_o = \mu + z_{1-\alpha} \cdot \sigma$

$\underline{x_o = 2{,}7289\ldots\,cm}$ ✓

3) $\mu = 2{,}4\,cm$

$\sigma = \frac{0{,}2}{\sqrt{20}}\,cm$

$\alpha = 1\%$

$x_u = 2{,}2848\ldots\,cm$ ✓

$x_o = 2{,}5151\ldots\,cm$ ✓

4) Wenn n größer wird, bewirkt dies eine

… durch eine größe Wurzel, weswegen

4) Wenn n größer wird, bewirkt dies eine Division durch eine größere Wurzel, weswegen ein kleinerer Zufallsstreubereich zustande kommt.

9.112 Maschinenöl wird in Kanistern abgefüllt. Die Ölmenge in einem Kanister ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 9{,}950$ L und $\sigma = 0{,}008$ L. Die Kanister werden vom Großhändler in Paletten zu 36 Stück verkauft.

1) Ermittle den zweiseitigen 90%igen Zufallsstreubereich für die mittlere Ölmenge eines Kanisters in einer Palette.

2) Ermittle den zweiseitigen 90%igen Zufallsstreubereich für die Ölmenge in einer ganzen Palette.

3) Berechne, um wieviel Prozent sich die Breite des Zufallsstreubereichs aus ***1)*** von der Breite des Zufallsstreubereichs aus ***2)*** unterscheidet.

X… Ölmenge pro Kanister in L

1) $\mu = 9{,}950$ L

$\sigma = 0{,}008$ L

$\alpha = 10\%$

mit Stichprobe rechnen

$\underline{x_u = 9{,}948\ldots \text{ L}}$

$\underline{x_o = 9{,}952\ldots \text{ L}}$

A: 90%-Zufallsstreubereich für 1 Kanister beträgt

$[9{,}948\ldots \text{ L}; 9{,}952\ldots \text{ L}]$

2) $\mu = 9{,}950$ L

$\sigma = \frac{0{,}008}{6}$ L

$\alpha = 10\%$

$\underline{x_u = 9{,}9478\ldots \text{ L}}$

$\underline{x_o = 9{,}9521\ldots \text{ L}}$

A: Bei einer Palette (36 Kanister) beträgt der 90%-Zufallss.

$[9{,}9478\ldots \text{ L}; 9{,}9521\ldots \text{ L}]$

3) $\left| \frac{9{,}9368\ldots - 9{,}9631\ldots}{9{,}9478\ldots - 9{,}9521\ldots} \right| \cdot 100\% = \underline{\underline{600\%}}$

A: Bei einem Kanister ist der Streubereich 600% vom Streubereich bei 36 Kanistern ($\sqrt{n}$ …).

10.5 Ergänze die Textlücken in folgendem Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Eine ______①______ des Stichprobenumfangs führt zu einer ______②______ der Breite des Konfidenzintervalls für den Erwartungswert.

①	
Verdopplung	☐
Vervierfachung	☒ ✓
Halbierung	☐

②	
Verdopplung	☐
Vervierfachung	☐
Halbierung	☒ ✓

13. Hausübung, am 13.02.2024

Dienstag, 13. Februar 2024 14:45

13. Hausübung, am 13.02.2024

10.8)

10.9)

10.40) 1. 2.

10.43)

11.7)

11.8)

11.13)

10.8 Der Durchmesser von Drehteilen ist normalverteilt mit $\sigma = 0{,}02$ cm. Es wird eine Stichprobe vom Umfang n = 15 entnommen und ein Stichprobenmittelwert von $\bar{x} = 1{,}10$ cm bestimmt. Ermittle den 90-%-Vertrauensbereich für μ.

$\sigma = 0{,}02\,cm$

$n = 15$

$\bar{x} = 1{,}10\,cm$

$\alpha = 10\%$

$$\mu_{u,o} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\mu_u = 1{,}0915...\,cm$

$\mu_o = 1{,}1084...\,cm$

$[1{,}0915... ; 1{,}1084...]\,cm$

$[1{,}0915\ldots;\ 1{,}1084\ldots]$ cm

10.9 Einer Lieferung von Zwirnen wird eine Stichprobe von 16 Stück entnommen und eine mittlere Drehung von $\bar{x} = 120$ Touren pro Meter ermittelt. Die Standardabweichung beträgt $\sigma = 7{,}4$ Touren pro Meter. Ermittle das 95-%-Konfidenzintervall für μ.

$n = 16$ [tpm]... Touren pro Meter

$\bar{x} = 120$ tpm

$\sigma = 7{,}4$ tpm

$\alpha = 5\%$

$$\mu_{u,o} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\mu_u = 116{,}374\ldots$ tpm

$\mu_o = 123{,}626\ldots$ tpm

$[116{,}374\ldots;\ 123{,}626\ldots]$ tpm

10.40 Einer Lieferung von Notebook-Akkus wird eine Stichprobe von 12 Stück entnommen. Für die Laufzeiten nach dem erstmaligen Aufladen wurden folgende Werte in Stunden ermittelt:

6,3 6,8 6,6 7,2 6,7 6,8 6,9 7,0 6,4 6,6 7,1 6,8

Die Standardabweichung aller Laufzeiten beträgt $\sigma = 0{,}5$ Stunden. Der Hersteller garantiert eine mittlere Laufzeit von 6,5 Stunden.

1) Ermittle das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für μ.

2) Überprüfe nachweislich, ob das 95-%- Konfidenzintervall für μ den angegebenen Wert des Herstellers einschließt.

3) Ermittle den linksseitigen Vertrauensbereich für μ mit $\alpha = 1\,\%$.

1. $\sigma = 0{,}5\,h$

$\bar{x} = 6{,}7\dot{6}\,h$

$\alpha = 5\%$

$n = 12$

$\rho_{u,o} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\rho_u = 6{,}483...\,h \quad \rho_o = 7{,}049...\,h$

A stunden	B	C
=		=OneVar(
1	6.3 Titel	Statistik ...
2	6.8 $\bar{x}$	6.76667
3	6.6 Σx	81.2
4	7.2 Σx^2	550.24
5	6.7 sx := s_{n-}...	0.267423
6	6.8 σx := σ_n...	0.256038
7	6.9 n	12.
8	7. MinX	6.3
9	6.4 Q_1X	6.6
10	6.6 MedianX...	6.8
11	7.1 Q_3X	6.95
12	6.8 MaxX	7.2
13	SSX := Σ..	0.786667

2. $6{,}5\,h \in [6{,}483...;\ 7{,}049...]\,h$

A: Hersteller hat Recht.

10.43 Die Füllmenge von Grillkohlesäcken ist normalverteilt mit $\mu = 5{,}10$ kg. Aufgrund durchgeführter Wartungsarbeiten kann nicht ausgeschlossen werden, dass sich die mittlere Füllmenge μ verändert hat. Zur Überprüfung wird eine Stichprobe von 10 Säcken entnommen (Werte in kg):

5,08 4,99 5,02 5,05 4,95 5,00 5,01 4,98 5,20 5,15

1) Berechne sowohl den 95-%- als auch den 99-%-Vertrauensbereich für μ. Interpretiere die Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Gib an, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit die Breite des Konfidenzintervalls kleiner wird.

A kg	B	C
		=OneVar(
5.08	Titel	Statistik ...
4.99	$\bar{x}$	5.043
5.02	Σx	50.43
5.05	Σx^2	254.375
4.95	sx := s_{n-}...	0.079169
5.	σx := σ_n...	0.075107
5.01	n	10.
4.98	MinX	4.95
5.2	Q_1X	4.99
5.15	MedianX...	5.015
	Q_3X	5.08
	MaxX	5.2
	SSX := Σ..	0.05641

1. $n = 10$

$f = 9$

$s_x = 0{,}0791...\,kg$

$\bar{x} = 5{,}043\,kg$

$\alpha = 5\%$

$\rho_{u,o} = \bar{x} \pm t_{f,\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$\rho_u = 4{,}986...\,kg \quad \rho_o = 5{,}09963...\,kg$

$[4{,}986...;\ 5{,}09963...]\,kg$ zu 95%