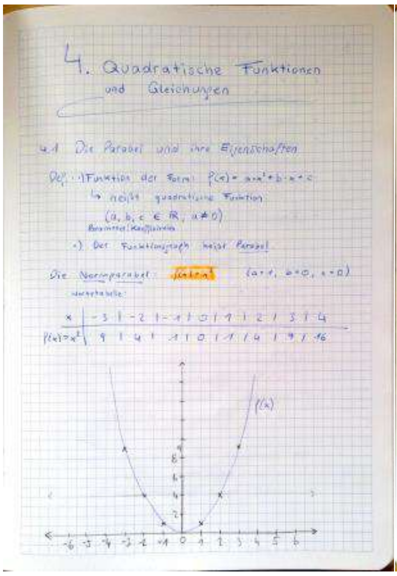
alles vor 22.02.2021

Mittwoch, 24. Februar 2021 08:03



4. Quadratische Funktionen und Gleichungen

4.1 Die Parabel und ihre Eigenschaften

Def.: Funktion der Form $f(x) = a x^2 + b \cdot x + c$ heißt quadratische Funktion ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

Der Funktionsgraph heißt Parabel

Die Normparabel: ($a = 1, b = 0, c = 0$)

Wertetabelle

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16

Eigenschaften

- $D = \mathbb{R}$
- $W = \mathbb{R}^+$
- Ursprung ... Scheitelpunkt ... Tiefpunkt
- gerade Fkt. $f(x) = f(-x)$
- nach oben offen
- Fixpunkt (1\|1) (0\|0)

Auswirkungen der Parameter

$f(x) = a \cdot x^2$

$f(x) = a \cdot x^2 + c$

$f(x) = a \cdot (x+m)^2 + c$ ... Scheitelpunktsform

a: Hat Auswirkungen auf die Öffnung der Parabel

$a > 1$: Parabel wird schmäler

$a < 0$: Spiegelung an x-Achse → Parabel nach unten offen

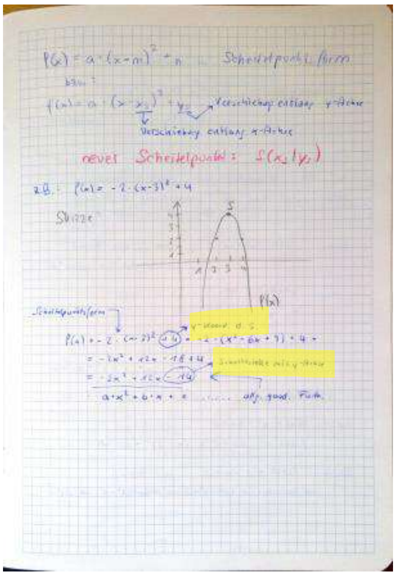
c: Hat Auswirkungen auf die vertikale Verschiebung

$c > 0$ nach oben

$c < 0$ nach unten

quadratische Funktion

... $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$



$f(x) = a \cdot (x-m)^2 + n$ Scheitelpunktsform

neuer Scheitelpunkt: $S(x_s|y_s)$

z.B.: $f(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 4$

Skizze

Scheitelpunktsform

... allg. quad. Fkt.

Scheitelpunktsform:

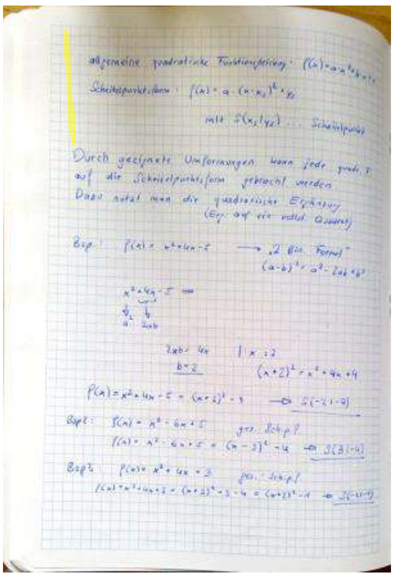
$f(x) = a \cdot (x-m)^2 + n$

m ... Verschiebung x

n ... Verschiebung y

Schei.f. → allg. quad. Gleichung

einfach ausmultiplizieren



allgemeine quadratische Funktionsgleichung: $f(x) = a x^2 + b x + c$

Scheitelpunktsform: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$

Durch geeignete Umformungen kann jede quadr. Fkt. auf die Scheitelpunktsform gebracht werden.

Bsp.: $f(x) = x^2 + 4x - 5$ → 2. Bin. Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$f(x) = x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9$ → $S(-2|-9)$

allg. quad. Glei. → Scheitelpunktsf.

2. binomische Formel finden

$(x + \text{Wasweißich})^2 = x^2 \checkmark + 2x \cdot \text{Wasweißich} \checkmark + \text{Wasweißich}^2$

✓... kommt so in allg. Form schon vor

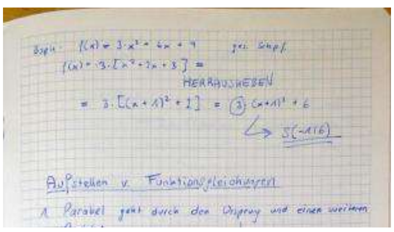
entspricht nicht richtiger Zahl

z.B.: $x^2 + 4x - 5$ → $+4 - ? = -5$

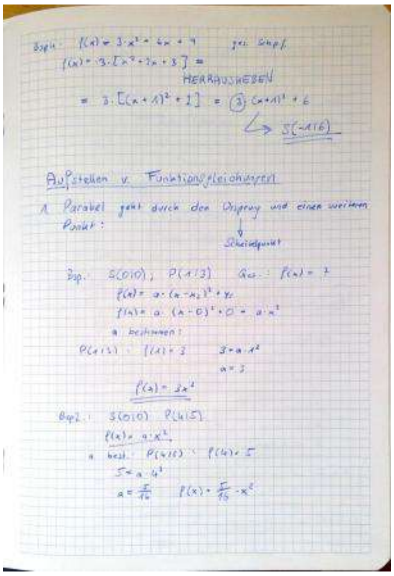
↳ $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

-9

$(x+2)^2 - 9$



Aufstellen v. Funktionsgleichungen


Bsp4: $f(x) = 3\cdot x^2 + 6x + 9$ ges. Schpt.

$f(x) = 3\cdot[x^2 + 2x + 3] =$

HERRAUSHEBEN

$= 3\cdot[(x+1)^2 + 2] = 3\cdot(x+1)^2 + 6$

↳ $S(-1|6)$

Aufstellen v. Funktionsgleichungen

1 Parabel geht durch den Ursprung und einen weiteren Punkt:

Scheitelpunkt

Bsp. $S(0|0)$; $P(1|3)$ Ges.: $f(x) = ?$

$f(x) = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$

$f(x) = a\cdot(x - 0)^2 + 0 = a\cdot x^2$

a bestimmen:

$P(1|3)$: $f(1) = 3$ $3 = a\cdot 1^2$

$a = 3$

$f(x) = 3x^2$

Bsp2: $S(0|0)$ $P(4|5)$

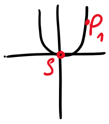
$f(x) = a\cdot x^2$

a best.: $P(4|5)$: $f(4) = 5$

$5 = a\cdot 4^2$

$a = \frac{5}{16}$ $f(x) = \frac{5}{16}\cdot x^2$

$(x+2)^2 - 9$



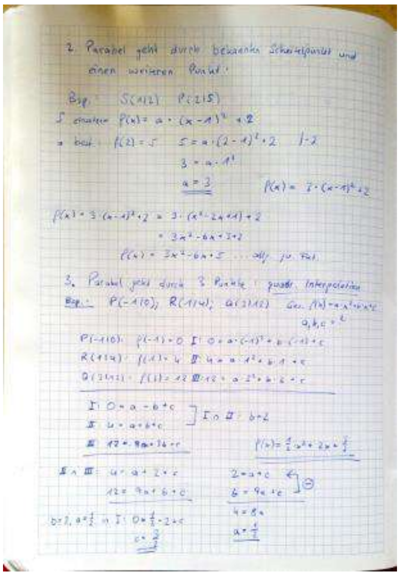
$S \to$ Scheitelpunktsform m, n

$P_1 \to$ einsetzen

a bekommen

fertig

(in allg. Form umwandeln)


2. Parabel geht durch bekannten Scheitelpunkt und einen weiteren Punkt:

Bsp. $S(1|2)$ $P(2|5)$

S einsetzen $f(x) = a\cdot(x-1)^2 + 2$

a best.: $f(2) = 5$ $5 = a\cdot(2-1)^2 + 2$ $|-2$

$3 = a\cdot 1^2$

$a = 3$ $f(x) = 3\cdot(x-1)^2 + 2$

$f(x) = 3\cdot(x-1)^2 + 2 = 3\cdot(x^2 - 2x + 1) + 2$

$= 3x^2 - 6x + 3 + 2$

$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ ... allg. Fkt.

3. Parabel geht durch 3 Punkte: quadr. Interpolation

Bsp.: $P(-1|0)$; $R(1|4)$; $Q(3|12)$ Ges. $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$; $a, b, c = ?$

$P(-1|0)$: $f(-1) = 0$ I: $0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c$

$R(1|4)$: $f(1) = 4$ II: $4 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c$

$Q(3|12)$: $f(3) = 12$ III: $12 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c$

I: $0 = a - b + c$

II: $4 = a + b + c$] I ∩ II: $b = 2$

III: $12 = 9a + 3b + c$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

II ∩ III: $4 = a + 2 + c$ $2 = a + c$

$12 = 9a + 6 + c$ $6 = 9a + c$] ⊖

$4 = 8a$

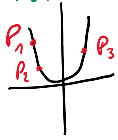
$a = \frac{1}{2}$

$b = 2$, $a = \frac{1}{2}$ in I: $0 = \frac{1}{2} - 2 + c$

$c = \frac{3}{2}$

same wie ↑

nicht wie Angabe



$P_1(d | e)$

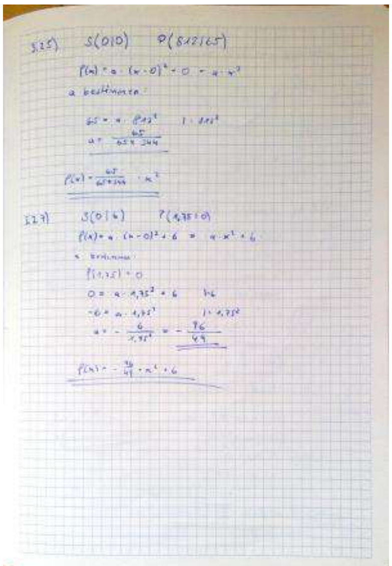
$P_2(f | g)$

$P_3(h | i)$

$\text{I}: e = a\cdot d^2 + b\cdot d + c$

$\text{II}: g = a\cdot f^2 + b\cdot f + c$

$\text{III}: i = a\cdot h^2 + b\cdot h + c$


5.25) $S(0|0)$ $P(812|65)$

$f(x) = a\cdot(x-0)^2 + 0 = a\cdot x^2$

a bestimmen:

$65 = a\cdot 812^2$ $|: 812^2$

$a = \frac{65}{[illegible]}$

$f(x) = \frac{65}{[illegible]}\cdot x^2$

5.27) $S(0|6)$ $P(1{,}75|0)$

$f(x) = a\cdot(x-0)^2 + 6 = a\cdot x^2 + 6$

a bestimmen:

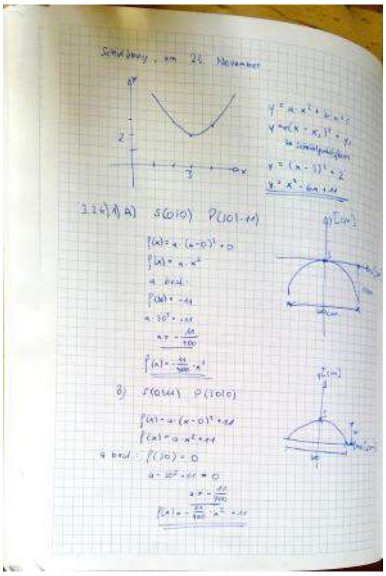
$f(1{,}75) = 0$

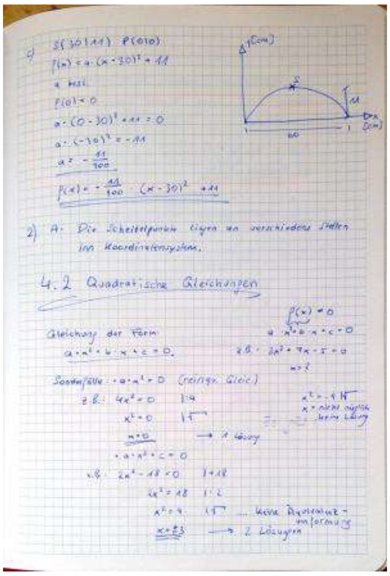
$0 = a\cdot 1{,}75^2 + 6$ $|-6$

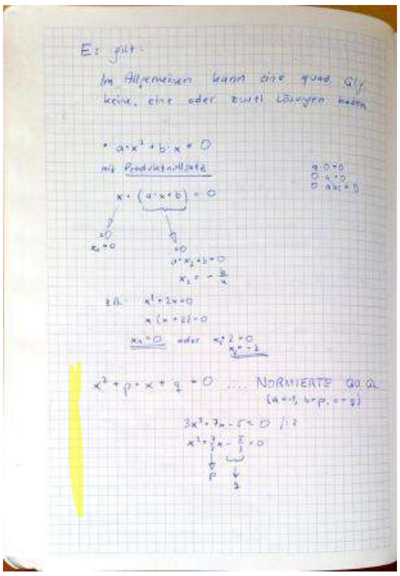
$-6 = a\cdot 1{,}75^2$ $|: 1{,}75^2$

$a = -\frac{6}{1{,}75^2} = -\frac{96}{49}$

$f(x) = -\frac{96}{49}\cdot x^2 + 6$

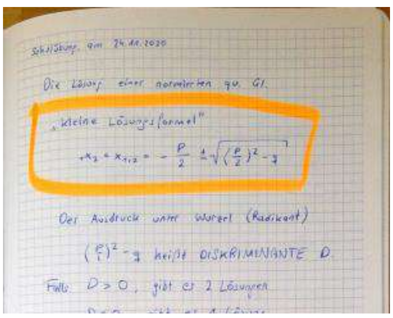






← NICE

WICHTIG!



$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Der Ausdruck unter Wurzel (Radikant)

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ heißt DISKRIMINANTE D

Fälle: $D > 0$, gibt es 2 Lösungen

$D = 0$, gibt es 1 Lösung

$D < 0$, gibt es in $\mathbb{R}$ keine Lösung

Beispiele:

- $x^2 + x - 2 = 0$ $\quad p = 1$, $q = -2$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ $\quad \vee$ (oder) $\quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

$x_1 = 1$ $\quad x_2 = -2$

$L = \{1, -2\}$

- $x^2 - 10x + 25 = 0$ $\quad p = -10$, $q = 25$

$x_{1,2} = +\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 25}$

$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 25}$ $\quad \Rightarrow \underbrace{\exists^1}$ Lösung „es gibt nur 1 Lösung"

$\underline{x = 5}$ $\quad \underline{L = \{5\}}$

- $x^2 + x + 1 = 0$ $\quad p = 1$, $q = 1$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} - 1}_{<0}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$

$\hookrightarrow \nexists$ Lösung

$\underline{L = \{\}}$

- $\frac{2x-8}{x^2-9} + \frac{2x-5}{x^2-3x} = \frac{3x-4}{x^2+3x}$

Nenner	Faktor	EF
x^2-9	$(x-3)(x+3)$	$\cdot x$
x^2-3x	$x(x-3)$	$\cdot(x+3)$
x^2+3x	$x(x+3)$	$\cdot(x-3)$

$HN = kgV(\ldots) = \boxed{x(x-3)(x+3)}$ Nenner! $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 3\}$

$\frac{(2x-8) \cdot x}{HN} + \frac{(2x-5) \cdot (x+3)}{HN} = \frac{(3x-4) \cdot (x-3)}{HN}$ $\quad | \cdot HN$

$2x^2 - 8x + 2x^2 + 6x - 5x - 15 = 3x^2 - 9x - 4x + 12$

$4x^2 - 7x - 15 = 3x^2 - 13x + 12$ $\quad | -3x^2 + 13x - 12$

$x^2 + 6x - 27 = \underline{\underline{0}}$ $\quad$ … norm. qu. Glg.

$p = 6$, $q = -27$

$x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 27} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{9 + 27} =$

$= -3 \pm \sqrt{36} = -3 \pm 6$

$x_1 = -3 + 6$ $\quad \vee \quad$ $x_2 = -3 - 6$

$\underline{x_1 = 3}$ $\quad \underline{x_2 = -9}$

$\underline{L = \{-9\}}$

c) $\frac{2x-14}{x^2-16} + \frac{2x-5}{x^2-4x} = \frac{3x-7}{x^2+4x}$

Nenner	Faktor	EF
x^2-16	$(x-4)(x+4)$	x
x^2-4x	$(x-4)x$	$(x+4)$
x^2+4x	$(x+4)x$	$(x-4)$

$HN = x\cdot(x-4)\cdot(x+4)$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$

$\frac{(2x-14)\cdot x}{HN} + \frac{(2x-5)\cdot(x+4)}{HN} = \frac{(3x-7)(x-4)}{HN} \quad | \cdot HN$

$2x^2 - 14x + 2x^2 + 8x - 5x - 20 = 3x^2 - 12x - 7x + 28$

$4x^2 - 11x - 20 = 3x^2 - 19x + 28 \quad |(-)$

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$p = 8;\ q = -48$

$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 48} = -4 \pm \sqrt{64} =$

$= -4 \pm 8$

$x_1 = -4 + 8 \quad \vee \quad x_2 = -4 - 8$

$x_1 = 4 \notin \mathbb{R} \quad \vee \quad x_2 = -12$

$L = \{-12\}$

Die Lösung der allgemeinen qu. Glg.:

$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$

⊳ Durch Division durch a wird die Gleichung zu einer norm. qu. Glg. → k.L.

⊳ durch „große" Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D = b^2 - 4ac$ Lösungsfälle wie vorher

Beispiel: $2x^2 - 14x + 20 = 0$

$a = 2$
$b = -14$
$c = 20$

$x_{1,2} = \frac{+14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 2\cdot 20}}{2\cdot 2} =$

$= \frac{14 \pm \sqrt{196 - 160}}{4} = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{14 \pm 6}{4}$

$x_1 = \frac{14-6}{4} \quad \vee \quad x_2 = \frac{14+6}{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 5$

$L = \{2; 5\}$

Schulübung, am 30.11.2020

Qu. Glg. bei Formeln

1) $s = v\cdot t + \frac{a}{2}\cdot t^2 \quad ; t = ?$

$\frac{a}{2}\cdot t^2 + v\cdot t - s = 0 \qquad (a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0)$

(gr. Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$)

$a = \frac{a}{2}$
$b = v$
$c = -s$

$\frac{a}{2}\cdot t^2 + v\cdot t - s = 0$

$t_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4\cdot\frac{a}{2}\cdot s}}{a} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 2as}}{a}$

$t_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2as}}{a} \qquad t_2 = \frac{-v - \sqrt{v^2 + 2as}}{a}$

2) $I_3 = \frac{U\cdot R_x}{R\cdot R_3 + R\cdot R_x - R_x^2} \quad |\cdot N \quad R_x = ?$

„1. Teil" $ax^2 + bx + c = 0$

$R\cdot R_3\cdot I_3 + R\cdot R_x\cdot I_3 - R_x^2\cdot I_3 = U\cdot R_x$

$R\cdot R_3\cdot I_3 + RR_x I_3 - R_x^2 I_3 - UR_x = 0$

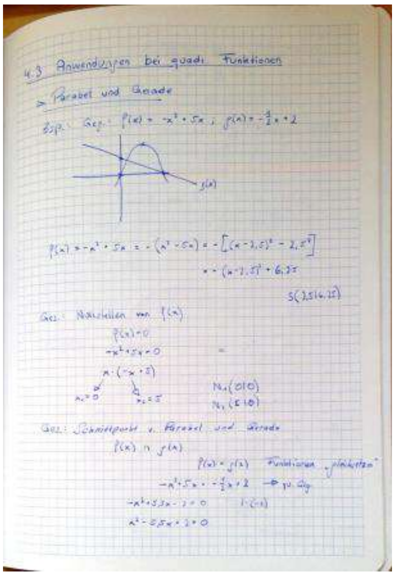
$-I_3 R_x^2 - UR_x + RR_3 I_3 + RR_x I_3 = 0$

$a = -I_3$
$b = -U$
$c = RR_3I_3 + RR_xI_3$

${}_{1,2}R_x = \frac{+U \pm \sqrt{(-U)^2 - 4\cdot(-I_3)\cdot(RR_3I_3 + RR_xI_3)}}{2\cdot(-I_3)}$

${}_{1,2}R_x = \frac{U \pm \sqrt{U^2 + 4I_3^2RR_3 - 4I_3^2RR_x}}{-2I_3}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



4.3 Anwendungen bei quadr. Funktionen

→ Parabel und Gerade

Bsp.: Geg.: $f(x) = -x^2 + 5x$; $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

$f(x) = -x^2 + 5x = -(x^2 - 5x) = -[(x - 2,5)^2 - 2,5^2]$

$= -(x - 2,5)^2 + 6,25$

$S(2,5|6,25)$

Ges.: Nullstellen von $f(x)$

$f(x) = 0$

$-x^2 + 5x = 0$

$x \cdot (-x + 5)$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = 5$

$N_1(0|0)$

$N_2(5|0)$

Ges.: Schnittpunkt v. Parabel und Gerade

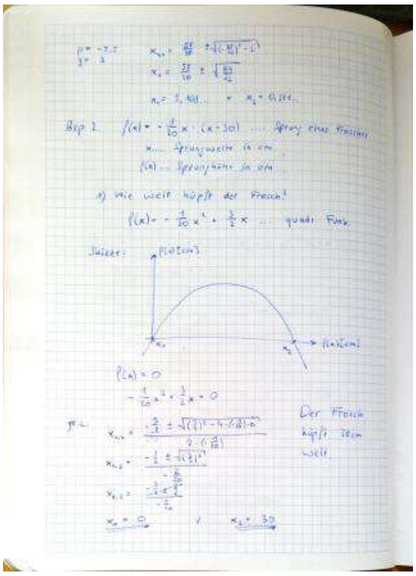
$f(x) \cap g(x)$

$f(x) = g(x)$ Funktionen „gleichsetzen"

$-x^2 + 5x = -\frac{1}{2}x + 2$ → qu. Glg.

$-x^2 + 5,5x - 2 = 0$ $\quad$ $| \cdot (-1)$

$x^2 - 5,5x + 2 = 0$



$p = -5,5$
$q = 2$

$x_{1,2} = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{11}{4}\right)^2 - 2}$

$x_1 = \frac{55}{20} \pm \sqrt{\frac{89}{16}}$

$x_1 = 5,108... \quad \vee \quad x_2 = 0,391...$

Bsp. 2 $\quad$ $f(x) = -\frac{1}{20}x \cdot (x - 30)$ .... Sprung eines Frosches

x.... Sprungweite in cm

f(x)... Sprunghöhe in cm

1) Wie weit hüpft der Frosch?

$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x$ ... quadr. Funk.

Skizze:

$f(x) = 0$

$-\frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x = 0$

gr. L.

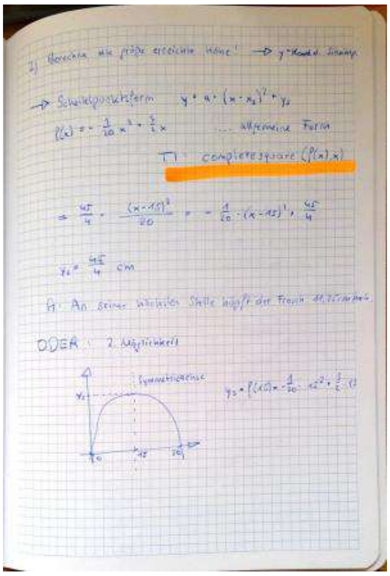
$x_{1,2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) \cdot 0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)}$

$x_{1,2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}{-\frac{2}{20}}$

$x_{1,2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}}{-\frac{2}{20}}$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 30$

Der Frosch hüpft 30cm weit.



2) Berechne die größte erreichte Höhe! → y-Koord. Scheitelp.

→ Scheitelpunktsform $\quad y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$

$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x$ ... allgemeine Form

TI: completesquare(f(x),x)

$= \frac{45}{4} - \frac{(x-15)^2}{20} = -\frac{1}{20} \cdot (x - 15)^2 + \frac{45}{4}$

$y_s = \frac{45}{4}$ cm

A: An seiner höchsten Stelle hüpft der Frosch 11,25 cm hoch.

ODER: 2. Möglichkeit

$y_s = f(15) = -\frac{1}{20} \cdot 15^2 + \frac{3}{2} \cdot 15$

completesquare

wandelt allg. Form → Scheitelpunktsform um

3) Flugbahn der Fliege $g(x) = \frac{6x}{5} + \frac{9}{10}$

Kreuzen sich die Flugbahnen? ⟶ Schnittpunkt der Funkt.

$f(x) = g(x)$

$-\frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{1}x = \frac{6x}{5} + \frac{9}{10}$ | ·20

$\cancel{-\frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{25}x - \frac{9}{10} = 0}$

$\cancel{-\frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{9}{10} = 0}$ | ·10

$-x^2 + 6x - 9 = 0$ | ·(-1)

$x^2 - 6x + 9 = 0$

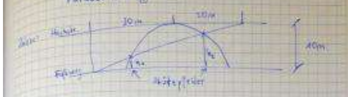
kl. Lf: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9}$

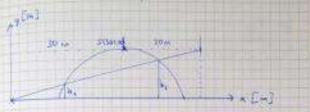
$\underline{\underline{x = 3}}$

A: Ja, nach einer Weite von 3 cm.

Bsp 3: Fahrweg // Hochstraße

Parabel $a = \frac{1}{10}$





h_1, h_2 ... y-Koordinaten d. Schnittpunkte $f(x), g(x)$

$\underline{f(x) = -\frac{1}{10}(x-30)^2 + 10}$ ⟶ $S(30|10)$, $a = -\frac{1}{10}$

$= -\frac{1}{10}(x^2 - 60x + 900) + 10 =$

$= -\frac{1}{10}x^2 + 3x - 45 + 10 = \underline{-\frac{1}{10}x^2 + 3x - 35}$

$\underline{g(x) = \frac{1}{5}x}$ $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $P_1(0|0)$ $P_2(50|10)$

schneiden: $f(x) = g(x)$

$-\frac{1}{10}x^2 + 3x - 35 = \frac{1}{5}x$ | $-\frac{1}{5}x$

$-\frac{1}{10}x^2 + 2\frac{4}{5}x - 35 = 0$ | ·10

$-x^2 + 28x - 350 = 0$

gr. L: $x_{1,2} = \frac{-2{,}8 \pm \sqrt{2{,}8^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{10}) \cdot (-35)}}{2 \cdot (-\frac{1}{10})} \Rightarrow \frac{-2{,}8 \pm \sqrt{\ldots}}{-\frac{2}{10}}$

$x_1 = 18{,}834\ldots$ $x_2 = 37{,}165\ldots$

x_1, x_2 in Formel einsetzen:

$h_1 = g(x_1) = \frac{1}{5} \cdot 18{,}834\ldots = 3{,}766\ldots$ m

$h_2 = g(x_2) = \frac{1}{5} \cdot 37{,}165\ldots = 7{,}433\ldots$ m

A: Die Höhe der Pfeiler muss $\underline{3{,}8\text{ m}}$ und $\underline{7{,}4\text{ m}}$ sein.

▷ Physikalische Anwendungen

3.36) 1) $h(t) = -\frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 14 \cdot t + h_0$

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

h_0 ... Abwurfhöhe zum Zeitpunkt $t = 0$

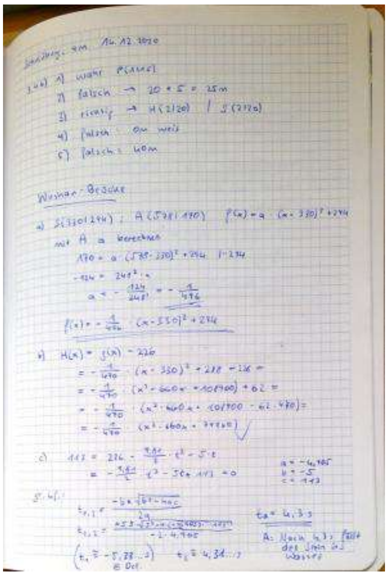
„Anfangshöhe" $h_0 = 1$ m

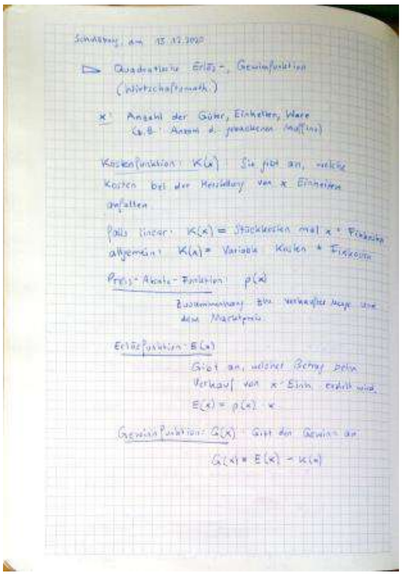
$h(t) = -\frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 14 \cdot t + 1$

2) ... 2. Nullstelle

3) ... Definitionsmenge: $[0; x_2]$

4) ... y-Koordinate d. Scheitelpunkt.





Schulübung am 15.12.2020

Quadratische Erlös-, Gewinnfunktion (Wirtschaftsmath.)

x: Anzahl der Güter, Einheiten, Ware (z.B.: Anzahl d. gebackenen Muffins)

Kostenfunktion: K(x) Sie gibt an, welche Kosten bei der Herstellung von x Einheiten anfallen.

falls linear: K(x) = Stückkosten mal x + Fixkosten

allgemein: K(x) = Variable Kosten + Fixkosten

Preis-Absatz-Funktion: p(x)

Zusammenhang zw. verkaufter Menge und dem Marktpreis

Erlösfunktion: E(x)

Gibt an, welcher Betrag beim Verkauf von x Einh. erzielt wird.

E(x) = p(x) · x

Gewinnfunktion: G(x) Gibt den Gewinn an

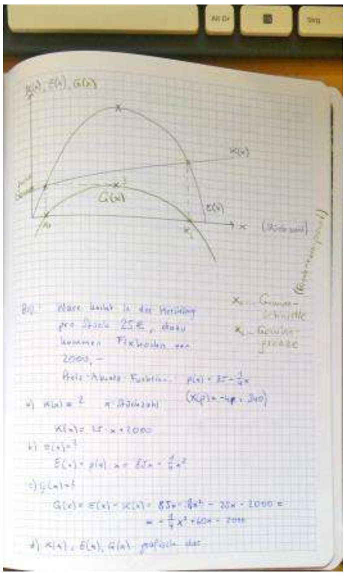
G(x) = E(x) − K(x)

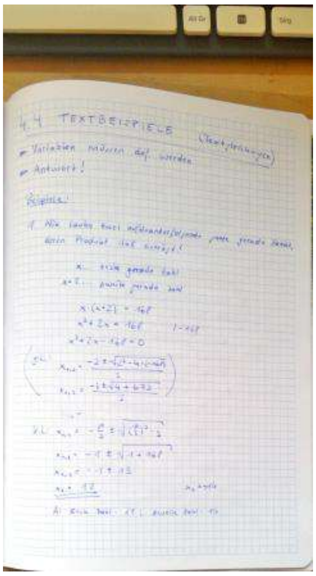
$K(x) =$ variable Kosten + Fixkosten

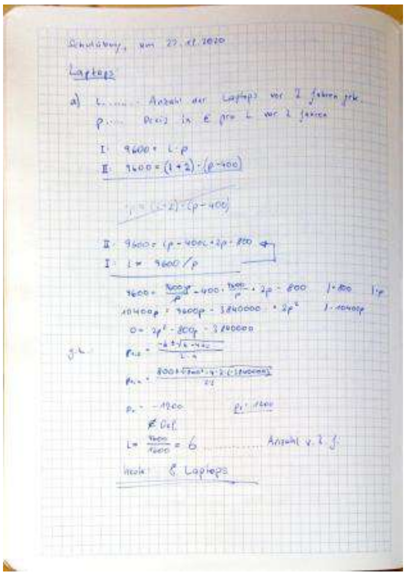
$p(x)$ ... Zusammenhang Verkauf : Preis

$E(x) = p(x) \cdot x$

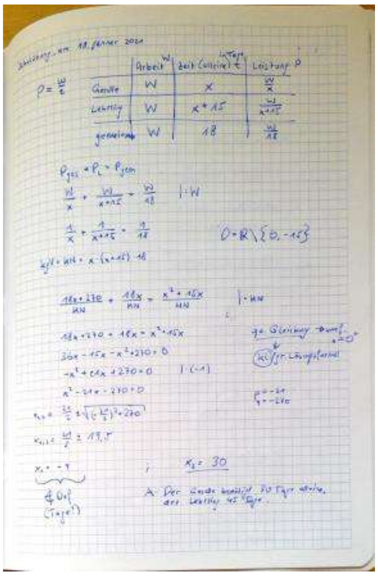
$G(x) = E(x) - K(x)$



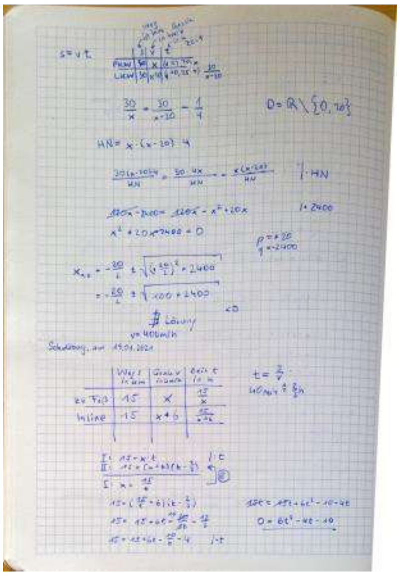




Variablen definieren
+Antwort



→ Tabelle kann helfen


$s = v \cdot t$

$\frac{30}{x} = \frac{30}{x-20} - \frac{1}{4}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 20\}$

$HN = x \cdot (x-20) \cdot 4$

$x^2 + 20x - 2400 = 0$

∄ Lösung

Schulübung am 19.01.2021

	Weg s in km	Geschw. v in km/h	Zeit t in h
zu Fuß	15	x	$\frac{15}{x}$
Inline	15	$x+6$	$\frac{15}{x+6}$

$t = \frac{s}{v}$

$0 = 6t^2 - 4t - 10$


$6t^2 - 4t - 10 = 0$ $a = 6$, $b = -4$, $c = -10$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10)}}{2 \cdot 6}$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 240}}{12}$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{12}$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm 16}{12}$

$t_1 = 1\frac{2}{3}$ $(x_2 = -1)$

$x = \frac{15}{t} = \frac{15}{1\frac{2}{3}} = 9$ km/h $/ +6 = 15$ km/h

$t = 1$ h 40 min $/ -40$ min $= 1$ h

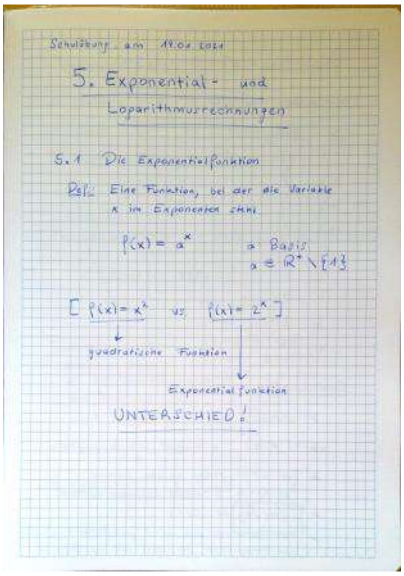
5. Exponential- und Logarithmusrechnungen

5.1 Die Exponentialfunktion

Def.: Eine Funktion, bei der die Variable x im Exponenten steht.

$f(x) = a^x$ a: Basis, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$[\underbrace{f(x) = x^2}_{\text{quadr. F.}} \quad \underbrace{f(x) = 2^x}_{\text{Ex. F.}}]$ UNTERSCHIED!


Schulübung am 19.01.2021

5. Exponential- und Logarithmusrechnungen

5.1 Die Exponentialfunktion

Def.: Eine Funktion, bei der die Variable x im Exponenten steht.

$f(x) = a^x$ a: Basis, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$[\,f(x) = x^2$ vs $f(x) = 2^x\,]$

quadratische Funktion

Exponentialfunktion

UNTERSCHIED!

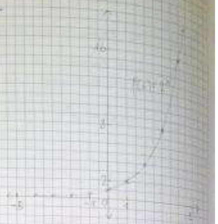
Exponentialfkt.:

$f(x) = 2^x$

Bsp. $f(x) = 2^x$ $[-4; 4]$

Wertetabelle

x	$f(x)$
-4	$\frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16



Eigenschaften

- $D = \mathbb{R}$
- $W = \mathbb{R}^+$, x-Achse ist Asymptote
- für $a > 1$ streng monoton steigend
  für $0 < a < 1$ streng monoton fallend
- fester Punkt $(0 | 1)$
- eine Zunahme von $\Delta x = 1$ (eine Einheit) bewirkt eine Multiplikation des Wertes mit der Basis a

Verschiebung der Exponentialfunktion

- $f(x) = a^x + d$ → Änderung y-Achse
- $f(x) = c \cdot a^x$ → Streckung/Stauchung
- $f(x) = a^{k \cdot x}$, $f(x) = a^{k+x}$

Buch Seite 85 →

← WICHTIG

Exponentialfunktion mit Basis e (Euler'sche Zahl)

$e^1 = 2{,}71828\ 18284\ldots$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$n = 1$: 2
$n = 10$: $2{,}5937\ldots$
$n = 100$: $2{,}70481\ldots$
$n = 10^6$: $2{,}71828\ldots$
$n = 10^{12}$: $2{,}71828\ldots$

math:
Euler'sche Zahl e ist ein Grenzübergang des Ausdrucks $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, wenn n immer größere Werte annimmt:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots = e$$

Zusammenhang: $f(x) = e^{\lambda \cdot x} = a^x$

$$\boxed{e^{\lambda} = a}$$

$$\boxed{e^{\lambda} = a}$$

5.1 Die Exponentialgleichungen

gesucht: Lösung der Gleichung $a^x = b$, wobei x die Variable ist

z.B.: $2^x = 8$ $x = 3$ (Warum? $2^3 = 8$)
$2^x = 5$ $x = ?$

Def.: Die Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$ nennt man den

Logarithmus

von b zur Basis a.

$a^x = b \iff x = \log_a(b)$

a … Basis
b … Numerus

Logarithmieren ist die Umkehrung des Potenzierens.

Logarithmen sind Exponenten!

$$\boxed{\begin{array}{c} a^x = b \\ \log_a(b) = x \end{array}}$$

z.B.: $2^x = 5 \iff x = \log_2(5)$

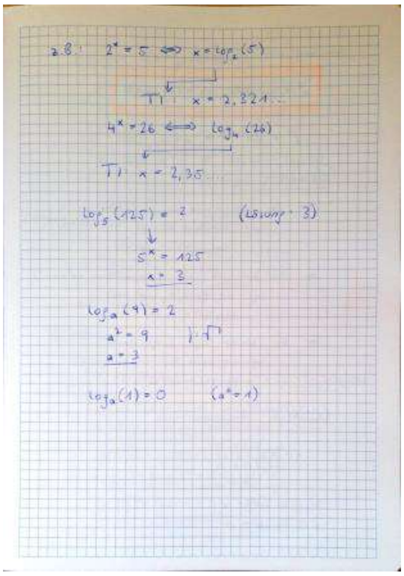
TI: $x = 2{,}321\ldots$

$4^x = 26 \iff \log_4(26)$

TI: $x = 2{,}35\ldots$

$\log_5(125) = ?$ (Lösung: 3)

$5^x = 125$
$\underline{x = 3}$



z.B.: $2^x = 5 \iff x = \log_2(5)$

TI $x = 2{,}321\ldots$

$4^x = 26 \iff \log_4(26)$

TI $x = 2{,}35\ldots$

$\log_5(125) = 2$ (Lösung: 3)

$5^x = 125$

$\underline{x = 3}$

$\log_a(9) = 2$

$a^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{a = 3}$

$\log_a(1) = 0 \quad (a^0 = 1)$

Schulübung, am 25. Jänner 2021

$\boxed{a^x = b \iff x = \log_a(b)}$

$2^x = 64 \longrightarrow x = \log_2(64) = 6$

Besondere Logarithmen

- Der dekadische Log. Log. mit Basis 10 $\log_{10}(b) = \lg(b)$
- Der natürliche Log. („Logarithmus naturalis") Log. mit Basis e (Eul. Zahl) $\log_e(b) = \ln(b)$
- Der binäre Log. („Log. dualis") Log. mit Basis 2 $\log_2(b) = \mathrm{ld}(b)$

Wichtige Zusammenhänge

$\log_a(a) = 1$

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(a^n) = n$

$\ln(e^x) = x$

$\ln(e) = 1$

Wichtig

Rechnen mit Logarithmen

1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
2. $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
3. $\log_a(u^m) = m \cdot \log_a(u)$
4. $\log_a(u+v) \neq \log_a(u) + \log_a(v)$

GILT NICHT

Umrechnen zw. d. Basen

$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$

Beispiele

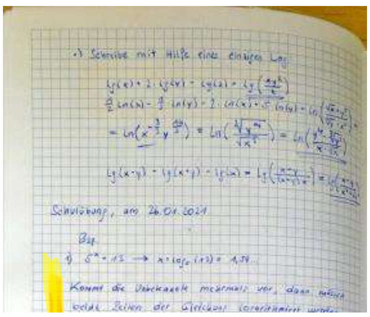
Logarithmenregeln

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log(v)$$

$$\log_a(u^m) = m \cdot \log(u)$$

$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$



Schulübung, am 26.01.2021

Bsp.

Komme die Unbekannte mehrmals vor, dann müssen beide Seiten der Gleichung logarithmiert werden

Bsp.

1) $5^x = 12 \rightarrow x = \log_5(12) = 1{,}54...$

Kommt die Unbekannte mehrmals vor, dann müssen beide Seiten der Gleichung logarithmiert werden.

2) $12 \cdot 3^{x-1} = 5 \cdot 2^x \quad | \ln()$

$\ln(12 \cdot 3^{x-1}) = \ln(5 \cdot 2^x)$

$\ln(12) + \ln(3^{x-1}) = \ln(5) + \ln(2^x)$

$\ln(12) + (x-1)\cdot\ln(3) = \ln(5) + x\cdot\ln(2)$

$\ln(12) + x\cdot\ln(3) - \ln(3) = \ln(5) + x\cdot\ln(2)$

$x\cdot\ln(3) - x\cdot\ln(2) = \ln(5) - \ln(12) + \ln(3)$

$x\cdot(\ln(3) - \ln(2)) = \ln(15/12)$

$x\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{15}{12}\right) \quad | : \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$x = \frac{\ln\left(\frac{15}{12}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = 0{,}5503...$

3) $3\cdot 5^x = 12^{x+1} \quad | \ln()$

$\ln(3\cdot 5^x) = \ln(12^{x+1})$

$\ln(3) + x\cdot\ln(5) = (x+1)\cdot\ln(12)$

$\ln(3) + x\cdot\ln(5) = x\cdot\ln(12) + \ln(12) \quad | -x\cdot\ln(12)$

$x\cdot\ln(5) - x\cdot\ln(12) = \ln(12) - \ln(3)$

$x\cdot(\ln(5) - \ln(12)) = \ln\left(\frac{12}{3}\right)$

$x\cdot\ln\left(\frac{5}{12}\right) = \ln(4) \quad | : \ln\left(\frac{5}{12}\right)$

$x = \frac{\ln(4)}{\ln(5/12)} = -1{,}583...$

Kommt die Variable mehrmals vor, ebenso ein Absolutglied, dann muss vor dem Logarithmieren „gerechnet" herausgehoben werden.

4) $4\cdot 3^{2-x} + 2\cdot 3^{1-x} = 7$ $\qquad 3^{2-x} = \frac{3^2}{3^x}$

$4\cdot\frac{3^2}{3^x} + 2\cdot\frac{3}{3^x} = 7$

$2\cdot\frac{3}{3^x}(2\cdot 3 + 1) = 7$

$\frac{6}{3^x}\cdot(7) = 7 \quad | \cdot 3^x$

$42 = 7\cdot 3^x \quad | : 7$

$6 = 3^x \rightarrow x = \log_3(6) = 1{,}6309... \quad \left(= \frac{\ln(6)}{\ln(3)}\right)$

5) $2^{x+2} + 2^x = 40$ $\qquad 2^{x+2} = 2^x\cdot 2^2$

$2^x(4+1) = 40$

$2^x\cdot 5 = 40 \quad | : 5$

$2^x = 8$

$x = 3$

Formeln

$p_1\cdot V_1^n = p_2\cdot V_2^n \quad | \ln() \qquad n = ?$

$\ln(p_1) + \ln(V_1^n) = \ln(p_2) + \ln(V_2^n)$

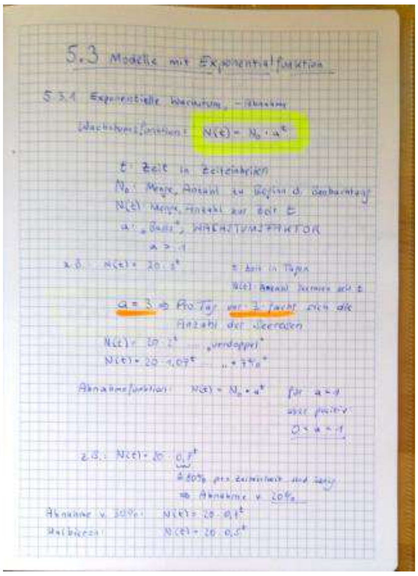
$\ln(p_1) + n\cdot\ln(V_1) = \ln(p_2) + n\cdot\ln(V_2)$

$n\cdot\ln(V_1) - n\cdot\ln(V_2) = \ln(p_2) - \ln(p_1)$

$n\cdot(\ln(V_1) - \ln(V_2)) = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$

$n\cdot\left(\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\right) = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad | : ()$

$n = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}$



5.3 Modelle mit Exponentialfunktion

5.3.1 Exponentielle Wachstum, -abnahme

Wachstumsfunktion: $N(t) = N_0 \cdot a^t$

t: Zeit in Zeiteinheiten
N_0: Menge, Anzahl zu Beginn d. Beobachtung
N(t): Menge, Anzahl zur Zeit t
a: „Basis", WACHSTUMSFAKTOR
$a > 1$

z.B. $N(t) = 20 \cdot 3^t$ — t Zeit in Tagen; N(t) Anzahl … zur Zeit t

$a = 3$ ⇒ Pro Tag ver-3-facht sich die Anzahl der …

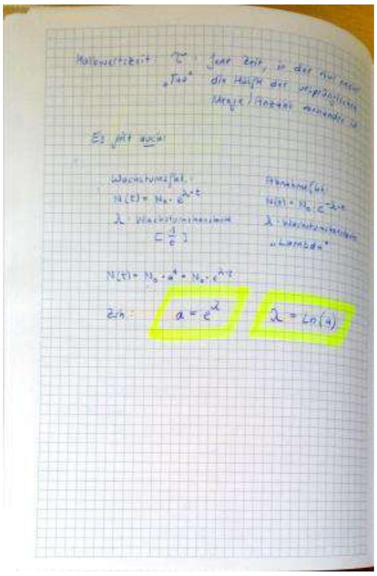
$N(t) = 20 \cdot 2^t$ „verdoppelt"
$N(t) = 20 \cdot 1{,}07^t$ „+7%"

Abnahmefunktion: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ für $a < 1$ aber positiv $0 < a < 1$

z.B.: $N(t) = 20 \cdot 0{,}8^t$ ≙ 80% pro Zeiteinheit sind übrig ⇒ Abnahme v. 20%

Abnahme v. 90%: $N(t) = 20 \cdot 0{,}1^t$
Halbieren: $N(t) = 20 \cdot 0{,}5^t$

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$
$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$



Halbwertszeit: τ „Tau": jene Zeit, in der nur noch die Hälfte der ursprünglichen Menge/Anzahl vorhanden ist

Es gilt auch:

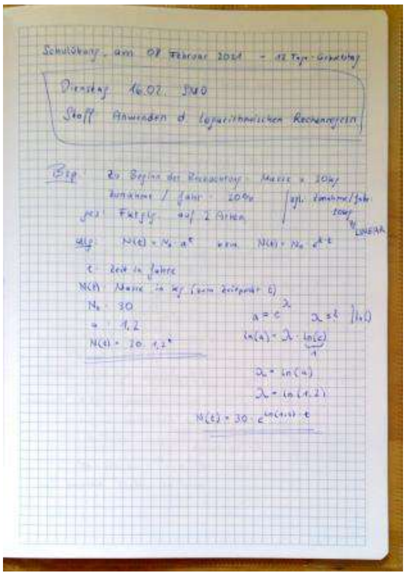
Wachstumsfkt.: $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
λ: Wachstumskonstante $[\frac{1}{t}]$

Abnahmefkt.: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
λ: Wachstumskonstante „Lambda"

$N(t) = N_0 \cdot a^t = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Zsh.: $a = e^{\lambda}$ $\lambda = \ln(a)$

$$\boxed{\lambda = \ln(a)}$$



Schulübung am 08 Februar 2021 – 12 Tage [illegible]

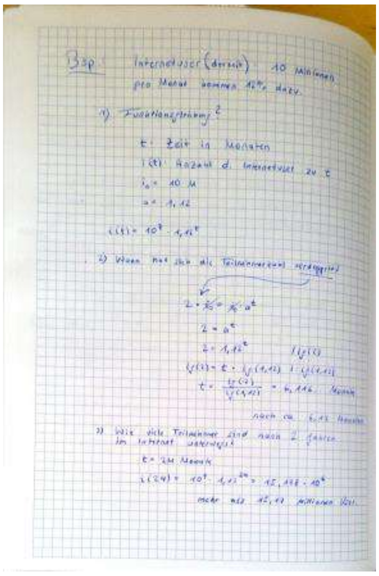
Dienstag 16.02. [illegible]
Stoff: Anwenden d. logarithmischen Rechenregeln

Bsp: Zu Beginn der Beobachtung: Masse = 30kg
Zunahme / Jahr: 20% | vgl. Zunahme/Jahr … LINEAR
ges.: Fktgl. auf 2 Arten

Mög.: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ bzw. $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

t: Zeit in Jahre
N(t): Masse in kg (zum Zeitpunkt t)
N_0: 30
a: 1,2
$N(t) = 30 \cdot 1{,}2^t$

$a = e^{\lambda}$ | ln()
$\ln(a) = \lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1}$
$\lambda = \ln(a)$
$\lambda = \ln(1{,}2)$
$N(t) = 30 \cdot e^{\ln(1{,}2) \cdot t}$



Bsp: Internetuser (derzeit) 10 Millionen
pro Monat kommen 12% dazu.

1) Funktionsgleichung?

t: Zeit in Monaten
i(t): Anzahl d. Internetuser zu t
$i_0 = 10$ M
$a = 1,12$

$i(t) = 10^7 \cdot 1,12^t$

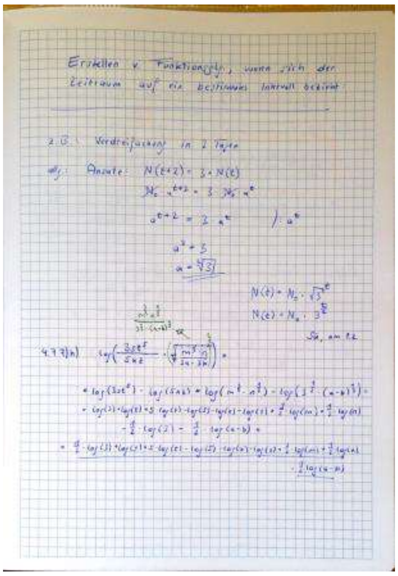
2) Wann hat sich die Teilnehmerzahl verdoppelt?

$2 \cdot \cancel{i_0} = \cancel{i_0} \cdot a^t$
$2 = a^t$
$2 = 1,12^t \quad | \lg()$
$\lg(2) = t \cdot \lg(1,12) \quad | : \lg(1,12)$
$t = \frac{\lg(2)}{\lg(1,12)} = 6,116$ Monate

nach ca. 6,12 Monaten

3) Wie viele Teilnehmer sind nach 2 Jahren im Internet unterwegs?

t = 24 Monate
$i(24) = 10^7 \cdot 1,12^{24} = 15,178 \cdot 10^6$
mehr als 15,17 Millionen User



Erstellen v. Funktionsglg., wenn sich der Zeitraum auf ein bestimmtes Intervall bezieht

z.B.: Verdreifachung in 2 Tagen

allg.: Ansatz: $N(t+2) = 3 \cdot N(t)$
$\cancel{N_0} \cdot a^{t+2} = 3 \cdot \cancel{N_0} \cdot a^t$
$a^{t+2} = 3 \cdot a^t \quad | : a^t$
$a^2 = 3$
$a = \sqrt{3}$

$N(t) = N_0 \cdot \sqrt{3}^t$
$N(t) = N_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$

4.77)h) $\lg\left(\frac{3xt^5}{5xz} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{m^3 \cdot n^?}{3a - 3b}}\right)\right) =$

$= \lg(3xt^5) - \lg(5xz) + \lg(m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{?}{4}}) - \lg(3^{\frac{1}{4}} \cdot (a-b)^{\frac{1}{4}}) =$
$= \lg(3) + \lg(x) + 5 \lg(t) - \lg(5) - \lg(x) - \lg(z) + \frac{3}{4} \lg(m) + \frac{?}{4} \lg(n) - \frac{1}{4} \lg(3) - \frac{1}{4} \lg(a-b) =$
$= \frac{3}{4} \lg(3) + \lg(x) + 5 \lg(t) - \lg(5) - \lg(x) - \lg(z) + \frac{3}{4} \lg(m) + \frac{?}{4} \lg(n) - \frac{1}{4} \lg(a-b)$

4.81)l) $\frac{1}{3}(\lg(a+b) + 2 \cdot \lg(a-b)) - \frac{1}{4} \cdot (2 + \lg(a) - \lg(b)) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \lg((a+b) \cdot (a-b)^2) - \frac{1}{4} \cdot (\lg(100) + \lg(a) - \lg(b)) =$
$= \lg(\sqrt[3]{(a+b) \cdot (a-b)^2}) - \frac{1}{4} \cdot \lg\left(\frac{100 \cdot a}{b}\right) =$
$= \lg(\sqrt[3]{(a+b)(a-b)^2}) - \lg\left(\sqrt[4]{100 \cdot \frac{a}{b}}\right) =$
$= \lg\left(\frac{\sqrt[3]{(a+b)(a-b)^2}}{\sqrt[4]{100 \cdot \frac{a}{b}}}\right) = \lg\left(\frac{\sqrt[3]{(a+b)(a-b)^2} \cdot \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{100a}}\right)$

Bsp: Seerosen zu Beginn 20 Seerosen
$\frac{1}{3}$ Seerosen weniger alle 5 Tage

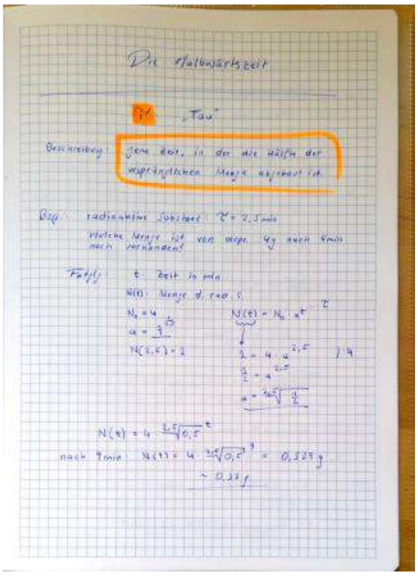
Funktionsgleichung: $N(t) = N_0 \cdot a^t$

t: Zeit in Tagen $\quad N_0 = 20$
N(t): Anzahl Seerosen $\quad a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

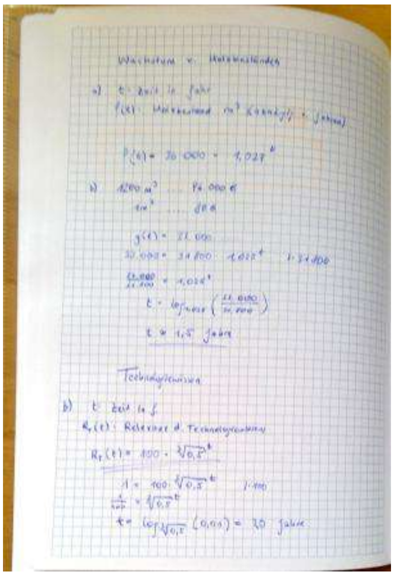
$N(t) = 20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{5}} = 20 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^t}$

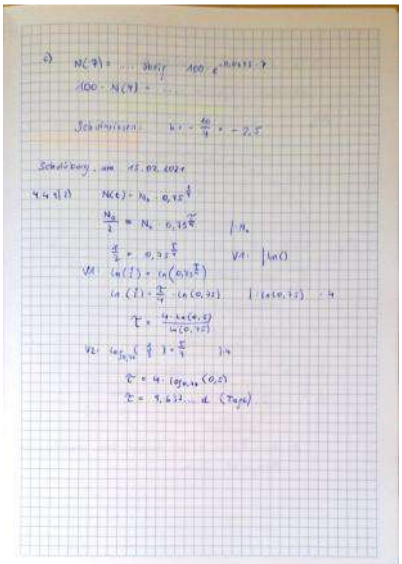
Ver-4-Fachung in 7 Jahren:

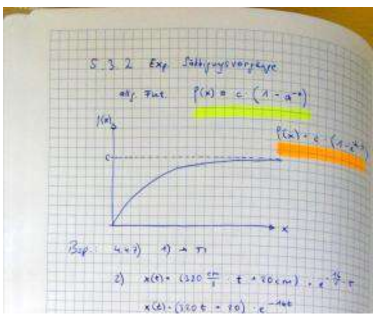
$a = \sqrt[7]{4} = 4^{\frac{1}{7}}$



$\leftarrow$ τ „Tau"



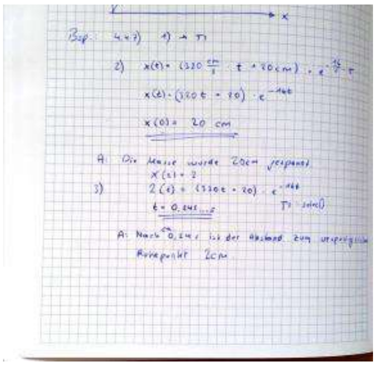


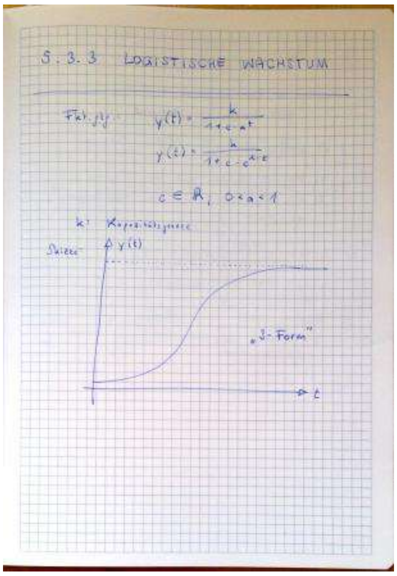


Sättigung:

$$f(x) = c \cdot (1 - a^{-x})$$

$$f(x) = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot x})$$





$$f(x) = c \cdot (1 - a^{x})$$

$$f(x) = c \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot x}\right)$$

logistisches Wachstum:

$$y(t) = \frac{k}{1 + c \cdot a^{t}}$$

$$y(t) = \frac{k}{1 + c \cdot e^{\lambda \cdot t}}$$

„S-Form"

$c \in \mathbb{R}$

$0 < a < 1$

5.4 LOGARITHMUSGLEICHUNGEN & MODELLE

$lg(x) = 2$ ... log_{10} Def. Log!

$log_{10}(x) = 2 \Leftrightarrow 10^2 = \underline{x = 100}$

Bsp: $S_2 - S_1 = c_V \cdot ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad | : c_V \quad T_2 = ?$

$\frac{S_2 - S_1}{c_V} = ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

$= log_e\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

$e^{\frac{S_2 - S_1}{c_V}} = \frac{T_2}{T_1} \quad | \cdot T_1$

$\underline{T_1 \cdot e^{\frac{S_2 - S_1}{c_V}} = T_2}$

Erdbeben: a) $E(M+2) = 63 \cdot 10^{1,5 \cdot (M+2)} =$

$= 63^{1,5M + 3} =$

$= 63 \cdot 10^{1,5M} \cdot \underline{\underline{10^3}}$

5 Exponential- & Logarithmusfunktionen

Montag, 8. März 2021 07:59

Sü, am 15.02.2021

$\lg(x) = 2$ log. Glg. Def. d. Log.!

$\log_{10}(x) = 2 \iff x = 10^2 = 100$

Bsp.: $S_2 - S_1 = c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$ $T_2 = ?$ $| : c_v$

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \log_e\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$e^{\frac{S_2 - S_1}{c_v}} = \frac{T_2}{T_1} \qquad | \cdot T_1$$

$$\underline{\underline{T_1 \cdot e^{\frac{S_2 - S_1}{c_1}} = T_2}}$$

A027 Erdbeben

a) $E(M+2) = 63 \cdot 10^{1,5 \cdot (M+2)} =$

$= 63 \cdot 10^{1,5M + 3} =$

$= 63 \cdot 10^{1,5M} \underline{\cdot 10^3}$

Sü, am 22.02.2021

b) $W(M) = 89\,125$ Tonnen

$89\,125 = \frac{1}{1000} \cdot 10^{1,5 \cdot M}$ $| \cdot 1000$

$89\,125\,000 = 10^{1,5 \cdot M}$ $| \lg()$

$\lg(89\,125\,000) = 1,5 \cdot M$ $| : 1,5$

$\lg(89\,125\,000) = 1{,}5 \cdot M \quad |:1{,}5$

$M = \dfrac{\lg(89\,125\,000)}{1{,}5}$

$M = 5{,}299... \approx 5{,}3$

Stärke: 5,3

c)

1. Beben: $A(d)$ Mag. 1. B.: $M_1 = \lg\left(\frac{A}{A_0}\right)$

2. Beben: $10 \times A(d)$ Mag. 2. B.: $M_2 = \lg\left(\frac{10 \times A}{A_0}\right) =$

$$\boxed{= \underbrace{\lg(10)}_{1} + \underbrace{\lg\left(\frac{A}{A_0}\right)}_{M_1}}$$

$M_2 = 1 + M_1$

A: Verzehnfachung d. Ausschlags entspricht einer Erhöhung der Magnitude um 1.

$\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$

pH-Wert

Montag, 8. März 2021 07:49

Sü, am 22.02.2021

pH-Wert: Konzentration der H^+-Ionen in einer Lösung

$$pH := -\lg(H^+)$$

Bsp.: pH-Wert: 8,5

Wasserstoffionenkonzentration: ?

$$8{,}5 = -\lg(H^+)$$

$$-8{,}5 = \lg(H^+)$$

$$H^+ = 10^{-8,5} = 3{,}16 \cdot 10^{-9} \ \frac{mol}{L}$$

Bsp.: H^+-Ionen: $5 \cdot 10^{-3} \ \frac{mol}{L}$

p-Wert: ?

$$pH = -\lg(5 \cdot 10^{-3}) = 2{,}3$$ (Säure)

SÜ, am 22.02.2021

Schallpegel (Schalldruckpegel), L:

Einheit [L]: 1 dB Bell
↓
„dezibel"

$$L = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

p … Schalldruck [Pa]
p_0 … Bezugsschalldruck [Pa]
$p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa
(Hörschwelle)

Bsp.: $L = 65$ dB

$$65 = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad | :20$$

$$\frac{65}{20} = \lg\left(\frac{p}{2 \cdot 10^{-5}}\right)$$

$$10^{3,25} = \frac{p}{2 \cdot 10^{-5}} \quad | \circ (\ldots)$$

$$p = 10^{3,25} \cdot 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\underline{p = 0,035566\ldots} = \underline{3,6 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}}$$

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

I: Schallintensität $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
I_0: Bezugsschallintensität
$I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}$

I_0: Bezugsschallintensität

$I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \ \frac{W}{m^2}$

Die Addition von Schallquellen mit gleichem Schallpegel gilt:

$$L(n) = L(1) + 10 \cdot \lg(n)$$

n: Anzahl der Schallquellen

Sü, am 22.02.2021

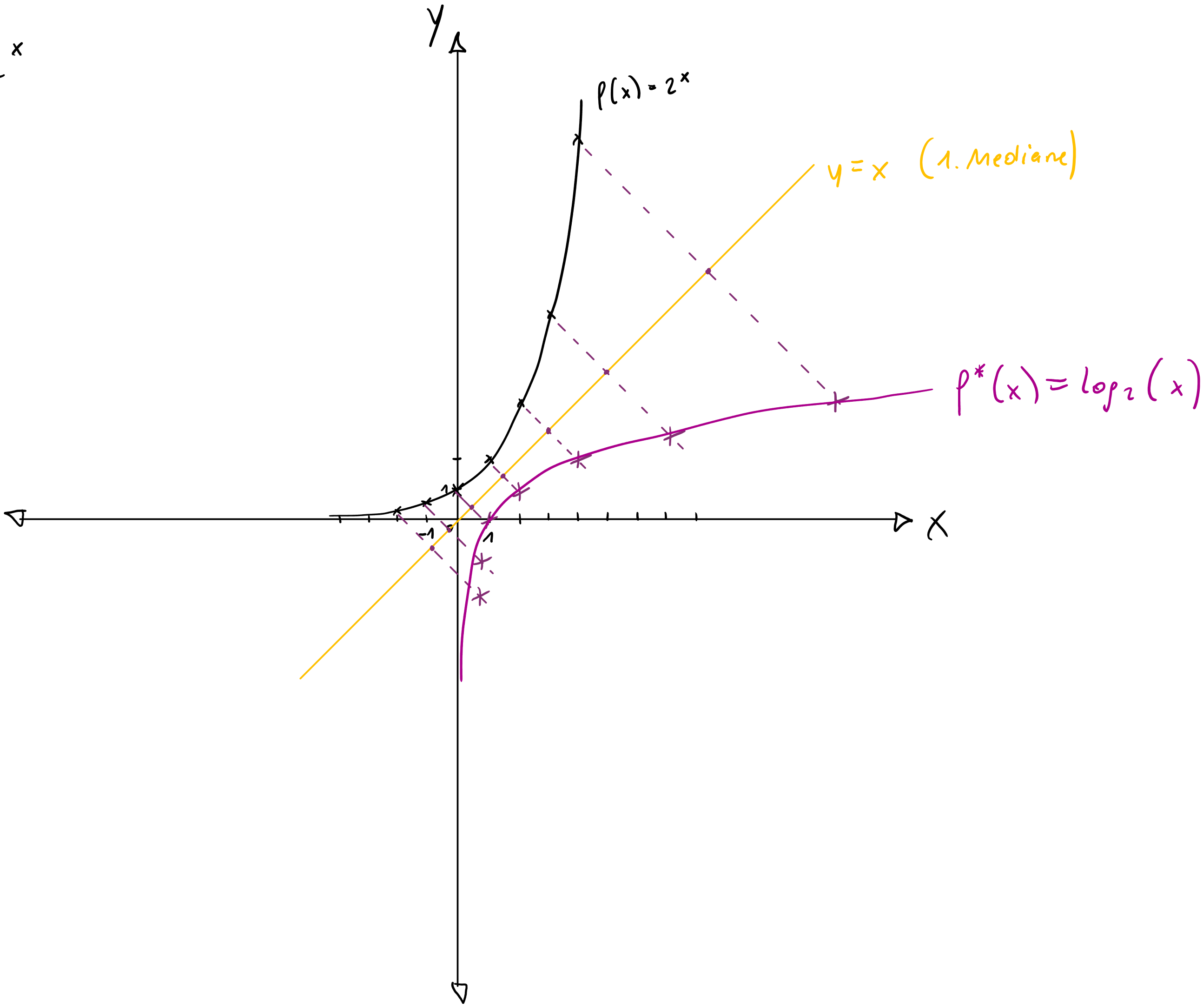
$f(x) = \log_a(x) \qquad a > 0$

Log.fkt. ist die Umkehrfunktion der Exp.fkt.

Sü, am 23.02.2021

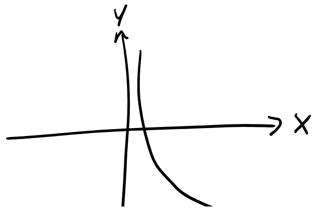
$f(x) = 2^x$

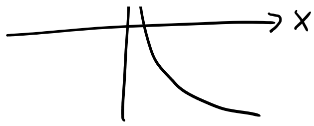
x	$f(x)$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128



Eigenschaften:

a) für $a > 1$: streng monoton steigend
für $0 < a < 1$: streng monoton fallend





- Nullpunkt N(1|0)
- W = ℝ
- y-Achse = Asyptote

Sü, am 23.02.2021

Hyperbelfkt.:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{x} - e^{-x}) = \sinh(x)$$

„Hyperbelsinus"

$$f(x) = \frac{1}{2} (e^{x} + e^{-x}) = \cosh(x)$$ → „Kettenlinie"

„Hyperbelcosinus"

$$f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \tanh(x)$$

„Hyperbeltangens"

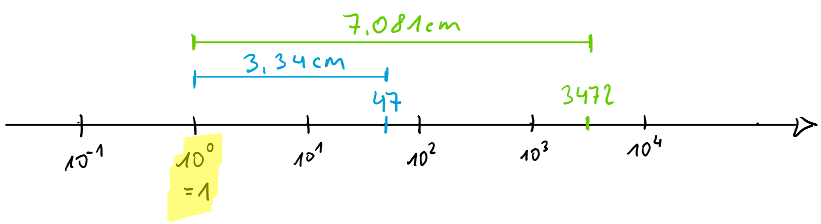
SÜ, am 23.02.2021

gleiche Abstände auf d. Achse (im Koordinatensystem) entsprechen gleichen Faktoren !

Vorgehensweise:

Zahlengerade, Ausgangspunkt festlegen, von diesem werden die Logarithmischen Werte aufgetragen (Zeicheneinheit selbst wählen)

Bsp.: ZE = 2cm



47 $\longrightarrow$ $\lg(47) \cdot 2cm = 3{,}34cm$ (cm vom „Ursprungspunkt" entfernt)

3472 $\longrightarrow$ $\lg(3472) \cdot 2cm = 7{,}08cm$

$x \longrightarrow \lg(x) \cdot ZE$

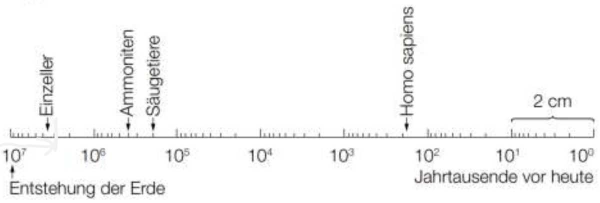
B_371 Ammoniten b)

Logarithmisch skaliert = lg()

b) Wichtige erdgeschichtliche Entwicklungen werden mit dem erstmaligen Auftreten von Tierarten festgehalten. Einige sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Ereignis	Jahrtausende vor heute
Einzeller	3,8 Millionen
Eukaryoten	1,5 Millionen
Ammoniten	400 000
Säugetiere	200 000
Homo sapiens	190

Diese Entwicklungen seit Entstehung der Erde sind auf einer logarithmisch skalierten Zeitachse dargestellt. Die logarithmische Achse hat eine Gesamtlänge von 14 cm.
Auf dieser Achse ist der Zeitraum von der Entstehung der Erde (vor 10^7 Jahrtausenden) dargestellt.



Man schätzt, dass die Photosynthese erstmals vor 2 400 Millionen Jahren auftrat. → $2400 \cdot 10^3$

$\hookrightarrow \lg(2400 \cdot 10^3) \cdot 2\,cm \mathrel{\hat=} 12{,}8\,cm$

– Markieren Sie das erstmalige Auftreten der Photosynthese auf der obigen Zeitachse.

Die Markierung für das erstmalige Auftreten von Affen würde sich auf der obigen Zeitachse 9,2 cm von 10^0 entfernt befinden.

– Ermitteln Sie, vor wie vielen Jahren das erste Mal Affen aufgetreten sind. Geben Sie das Ergebnis auf Millionen Jahre gerundet an.

↓

9,2 cm von 10^0 entfernt

$9{,}2\,cm = \lg(x) \cdot 2\,cm \quad |:2\,cm$

$4{,}6\,cm = \lg(x)$

$10^{4{,}6} = x$

$x = 39\,810{,}71$ Jahre

$\mathrel{\hat=}$ 39,81 Millionen Jahre

$\mathrel{\hat=}$ 40 Millionen Jahre

4.143 Stelle die Einwohnerzahl (Stand: 2015) der folgenden Orte auf einer geeigneten logarithmischen Skala dar:
I: Gramais (Tirol): 67 Einw. II: Neusiedl am See: 7 820 Einw. III: Graz: 266 000 Einw.
IV: Wien: 1,79 Mio. Einw. VI: Mexico City: 8,84 Mio. Einw. VII: Shanghai: 23 Mio. Einw.
V: Die Markierung für Los Angeles liegt auf der Skala genau auf halber Strecke zwischen Wien und Mexico City. Ermittle die Einwohnerzahl.

I: $67 \cdot 10^0$ EW $\mathrel{\hat=} \lg(67) \cdot 2 = 3{,}65\,cm$

II: $7\,820$ EW $\mathrel{\hat=} \lg(7820) \cdot 2 = 7{,}786\,cm$

III: $2{,}66 \cdot 10^5$ EW $\mathrel{\hat=} \lg(2{,}66 \cdot 10^5) \cdot 2 = 11{,}2\,cm$

IV: $1{,}79 \cdot 10^6$ EW $\mathrel{\hat=} \lg(1{,}79 \cdot 10^6) \cdot 2 = 12{,}5\,cm$

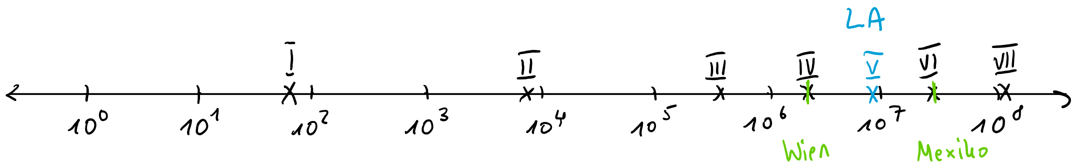
V: in Mitte von ↑ und ↓: 13,2 cm

VI: $8{,}84 \cdot 10^6$ EW $\mathrel{\hat=} \lg(8{,}84 \cdot 10^6) \cdot 2 = 13{,}9\,cm$

VII: $2{,}3 \cdot 10^7$ EW $\mathrel{\hat=} \lg(2{,}3 \cdot 10^7) \cdot 2 = 14{,}7\,cm$

7 gleiche Teile → 7 E: 2 cm

7 gleiche Teile $\rightarrow$ ZE: 2cm



V: $13{,}2\,cm = \lg(x) \cdot 2\,cm \quad | :2\,cm$

$6{,}6\,cm = \lg(x)$

$x = 10^{6{,}6}$

$x = 3{,}98 \cdot 10^6$ Einwohner

Darstellung von Funktionen in einem logarithmischen Koordinatensystem

Montag, 8. März 2021 08:06

SÜ, am 23.02.2021

- x-Achse log. skaliert:

  Funktion ist Gerade

  $f(x) = \log_a(x) + c$

- y-Achse log. skaliert:

  Funktion ist Gerade

  $f(x) = c \cdot a^x$

- x- und y-Achse log. skaliert:

  Funktion ist Gerade

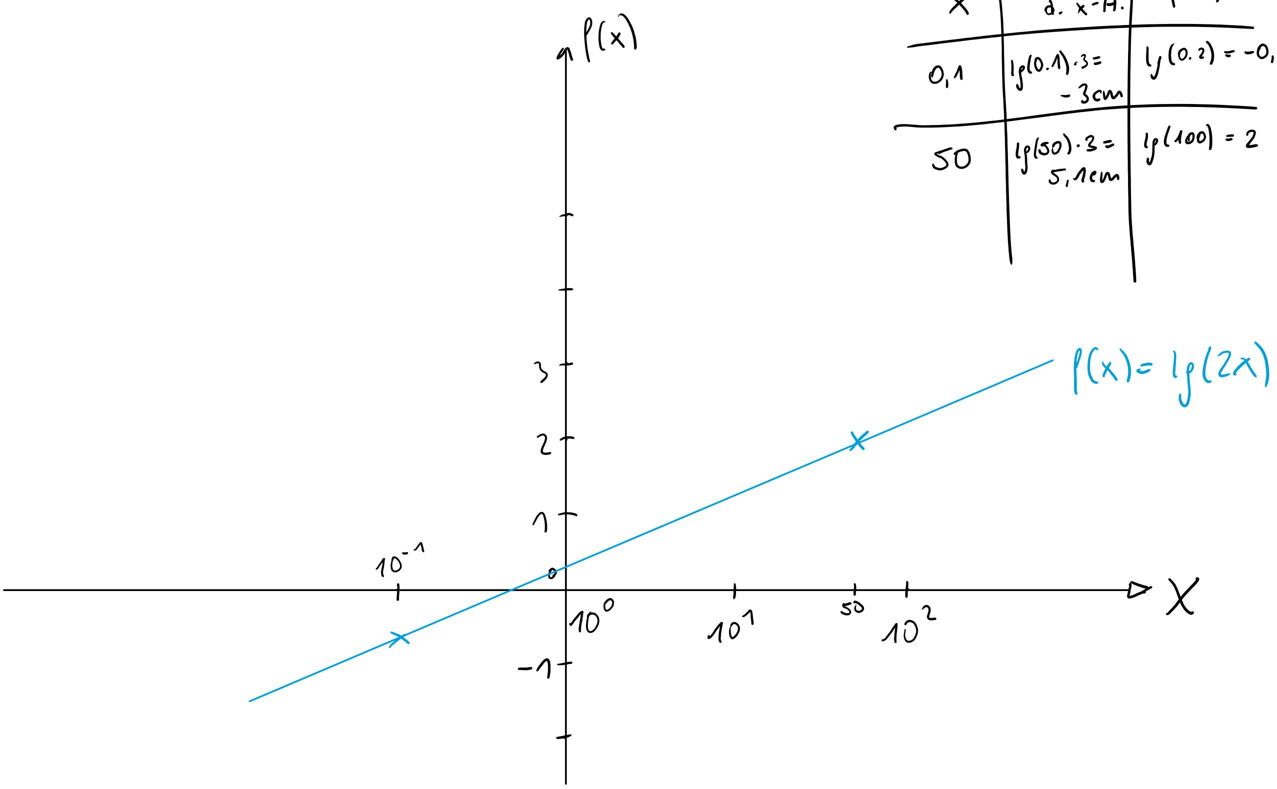
  $f(x) = c \cdot x^n$

Bsp.: $f(x) = \lg(2x)$ für $[\overset{10^{-1}}{0{,}1};\ \overset{10^{2}}{100}]$ auf log. Skalierung

x-Achse muss log. skaliert werden.

ZE: 3cm

x	log. Sk. d. x-A.	f(x)
0,1	$\lg(0.1) \cdot 3 = -3cm$	$\lg(0.2) = -0{,}7$
50	$\lg(50) \cdot 3 = 5{,}1cm$	$\lg(100) = 2$



SÜ, am 02.03.2021

B. 370 Computer)

a) - 17,5 Jahre

- Rest HÜ

SÜ, am 08.03.2021

Der Schall

Aufgabennummer: B_067

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

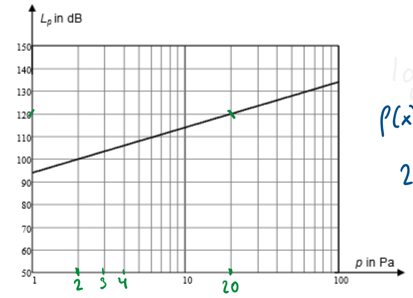
Als Schalldruck p werden die Druckschwankungen eines kompressiblen Schallübertragungsmediums (üblicherweise Luft) bezeichnet, die bei der Ausbreitung von Schall auftreten. Eine für das Hörempfinden relevante Größe ist der Schalldruckpegel L_p.

$$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

L_p ... Schalldruckpegel in Dezibel (dB)
p ... Schalldruck in Pascal (Pa)
p_0 ... Bezugswert für Luftschall ($p_0 = 20\ \mu\text{Pa}$)

a) – Stellen Sie den Schalldruckpegel L_p in Abhängigkeit vom Schalldruck p für das Intervall $[p_0; 0{,}1\ \text{Pa}]$ grafisch dar.
– Zeigen Sie mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen und der angegebenen Formel, dass eine Verdoppelung des Schalldrucks p eine Erhöhung des Schalldruckpegels L_p um etwa 6 dB bewirkt.

b) Das nachstehende Diagramm zeigt die Abhängigkeit des Schalldruckpegels vom Schalldruck nach obiger Formel. Ab einem Schalldruck p von etwa 20 Pa können bereits bei kurzfristiger Einwirkung Gehörschäden auftreten.



log.-Fkt.

$P(x) = \log_a(x) + c$

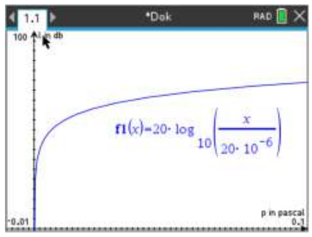
2 Punkte: $P_1(20|120)$:
$120 = \log_a(20) + c$
$P_2(2|100)$:
$100 = \log_a(2) + c$

TI: solve(..., a, c)

– Ermitteln Sie aus der Grafik den Schalldruckpegel L_p für diesen Schalldruck.

120dB

a) -



Regel: $\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$

- $L_{neu} = 20 \cdot \lg\left(\frac{2p}{p_0}\right)$

$= 20 \cdot \left[\lg(2) + \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)\right]$

$L_{neu} = 20 \cdot \lg(2) + \underbrace{20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)}_{L_p}$

$L_{neu} = L_p + \underline{6{,}0206}$

A: Verdoppelt sich p, so wird der Pegel um ca. 6dB größer.

In der Grafik ist der Abstand zwischen 1 Pa und 10 Pa auf der horizontalen Achse 5 cm.

– Berechnen Sie den Abstand zwischen 10 Pa und 50 Pa in cm auf der logarithmisch skalierten horizontalen Achse.

c) Ein einzelner Ton kann durch eine Sinusschwingung dargestellt werden. Die Hörbarkeit eines Tones für den Menschen hängt von der Lautstärke (Amplitude A) und von der Tonhöhe (Frequenz f) ab. Je größer die Amplitude ist, desto lauter ist der Ton. Je höher die Frequenz ist, desto höher ist der Ton.

Die folgende Funktion gibt die Schwingung einer Schallwelle für den Kammerton a mit einer Frequenz $f = 440$ Hz wieder:

$y(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot 440\,t)$

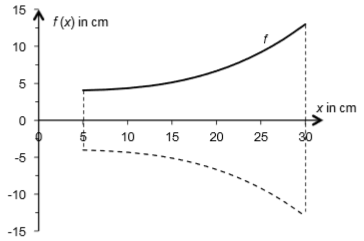
$y(t)$ … Auslenkung in Längeneinheiten zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Sekunden (s)
A … Amplitude in Längeneinheiten

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für den Kammerton a mit doppelter Lautstärke auf.

Als *Hörgrenze* bezeichnet man diejenige Frequenz, bei der ein Ton einer bestimmten Lautstärke gerade noch hörbar ist. Die Hörgrenze bei einem Menschen im Alter von 35 Jahren beträgt etwa 15 kHz.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für diese Frequenz auf.

d) Ein Megafon ist ein trichterförmiges Gerät, das die Ausbreitung von Schall beeinflusst und die Verständlichkeit und Reichweite von Sprache verbessert.
Die nachstehende Abbildung stellt näherungsweise den inneren Querschnitt eines Megafons dar.



ZE = 5 cm

10 Pa: $\lg(10) \cdot 5\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$

50 Pa: $\lg(50) \cdot 5\,\text{cm} = 8{,}494\ldots\,\text{cm}$

Abstand $\Delta l = 3{,}5\,\text{cm}$

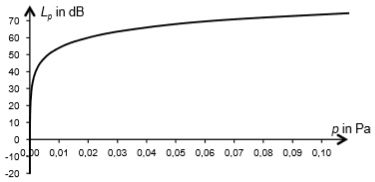
Die Begrenzungslinie der Querschnittsfläche wird im relevanten Intervall durch die Funktion f beschrieben: $f(x) = \frac{x^3}{3\,000} + 4$.

– Berechnen Sie das Innenvolumen des Megafons.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$L_{p,2} = 20 \cdot \lg\left(\frac{2p}{p_0}\right) = 20 \cdot \lg(2) + 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \approx 6{,}02\ \mathrm{dB} + L_p$

b) Ablesen von L_p bei $p = 20$ Pa: $L_p \approx 120$ dB

Berechnen des Abstands: $\lg(50) \cdot 5\ \mathrm{cm} - \lg(10) \cdot 5\ \mathrm{cm} \approx 3{,}495\ \mathrm{cm}$

c) $y(t) = 2A \cdot \sin(2\pi \cdot 440\,t)$
$y(t) = \sin(30\,000\pi \cdot t)$

Schwingungen mit anderer Amplitude sind ebenfalls korrekt.

d) $V_x = \pi \cdot \int_5^{30} f^2(x)\mathrm{d}x$
$V_x = \pi \cdot \int_5^{30} \left(\frac{x^3}{3\,000} + 4\right)^2 \mathrm{d}x$
$V_x = 4\,042\ \mathrm{cm}^3$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 3
c) leicht	c) 2
d) leicht	d) 2

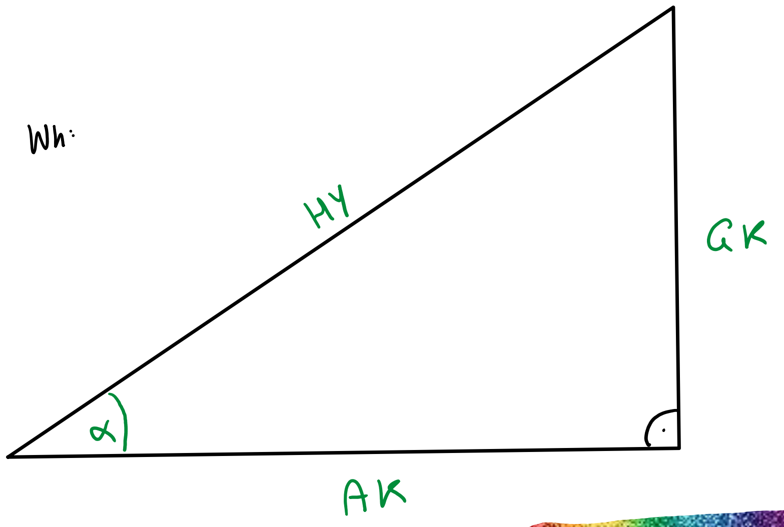
Thema: Physik

Quellen: —

6 Kreisfunktionen (Winkelfunktionen) Trigonometrie Teil1

Montag, 8. März 2021 11:06

Wh:



$$\sin(\alpha) = \frac{GK}{HY}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AK}{HY}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$$

NEU:

Zu jedem Winkel ist genau ein Sinus-, Cosinus- und Tangenswert definiert.

$$\alpha \longmapsto \sin(\alpha)$$

unabhängige Variable

abhängige Variable

Ausweitung auf Winkel >90°

Montag, 8. März 2021 11:28

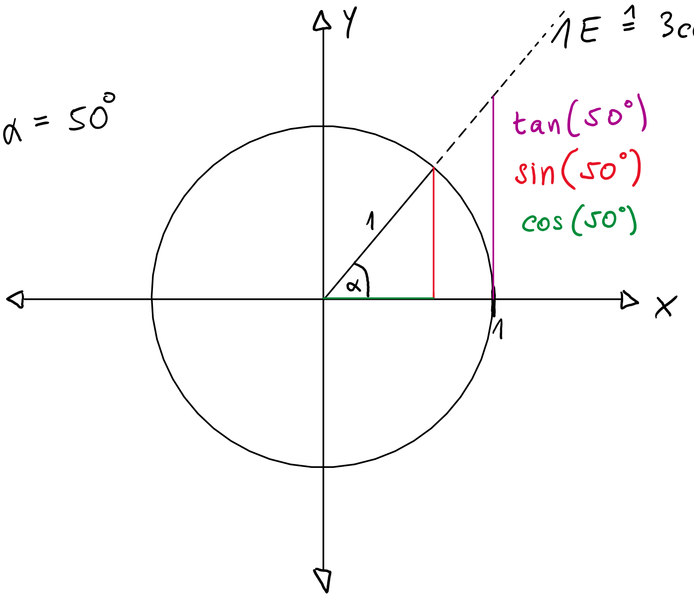
Sü, am 08.03.2021

Einheitskreis: Kreis mit Radius 1

Sü, am 09.03.2021

$1E \triangleq 3cm$

$\alpha = 50°$



α im
1. Quadrant

zeichn.:

$\sin(50) = \frac{2,2}{3cm} =$

$= 0,7\dot{3}...$

rechn.: $\sin(50) = 0,766044...$

zeichn.:

$\tan(50) = \frac{3,5}{3cm} =$

$= 1,1\dot{6}$

rechn.: $\tan(50) = 1,1975...$

zeichn.:

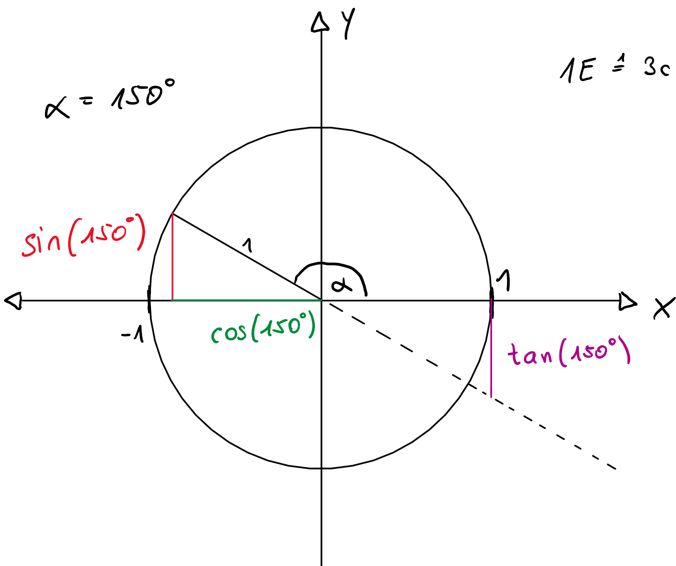
$\cos(50) = \frac{2,1}{3cm} =$

$= 0,7$

rechn.: $\cos(50) =$

$1E \triangleq 3cm$

$\alpha = 150°$



α im
2. Quadrant

zeichn.:

$\sin(150°) = 0,5$

$\cos(150°) = -0,8\dot{6}$

$\tan(150°) = -0,6$

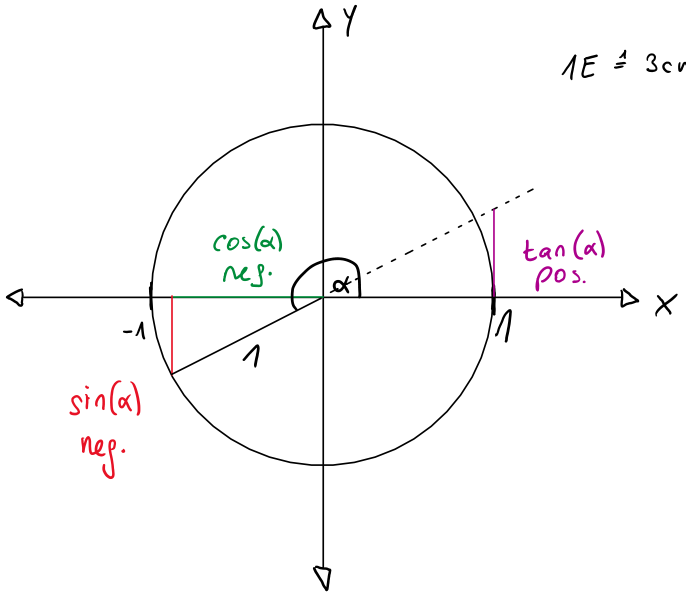
rechn.:

$\sin(150°) = 0,5$

$\cos(150°) = -0,866...$

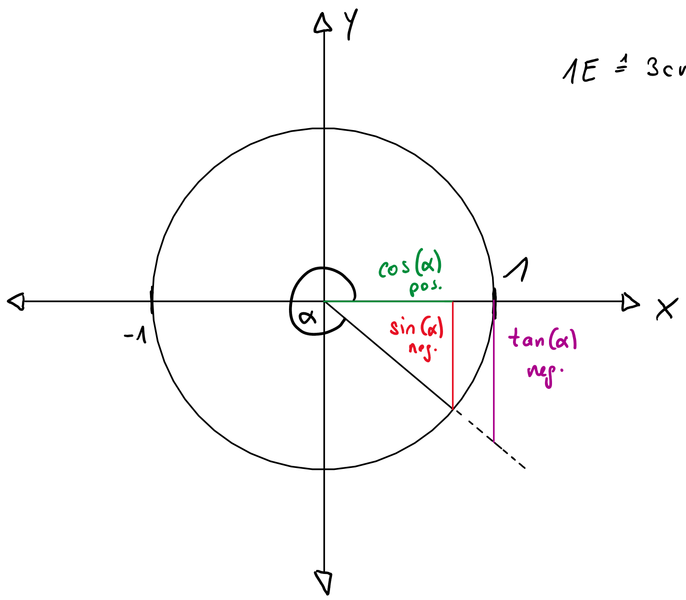
$\tan(150°) = -0,577$

$\sin(150°) = 0,5$
$\cos(150°) = -0,866...$
$\tan(150°) = -0,577...$



$1E \mathrel{\hat=} 3cm$

α im
3. Quadrant



$1E \mathrel{\hat=} 3cm$

α im
4. Quadrant

Vorzeichenverhalten der Winkelfunktionswerte:

SINUS(α)

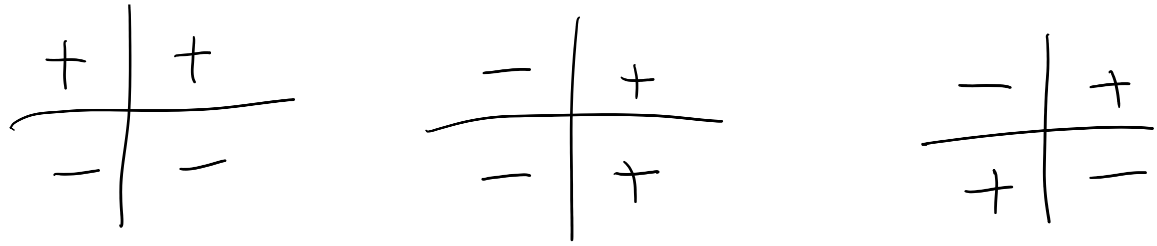
+	+
−	−

COSINUS(α)

−	+
−	+

TANGENS(α)

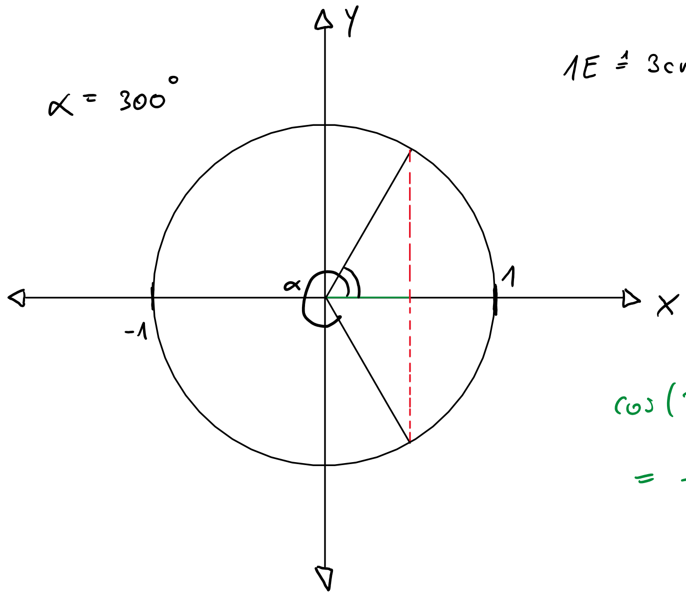
−	+
+	−



Bsp.: $\cos(300°)$, $\cos(60°)$

$\alpha = 300°$

$1E \mathrel{\hat{=}} 3cm$



$\cos(300°) = \cos(60°)$!

$= \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\cos(\alpha) = 0{,}5$

$\alpha = \arccos(0{,}5)$

$\underline{\alpha = 60°}$ $\underline{\alpha_2 = 300°}$ ↯

→ Umkehrfunktion (Arcusfunktion) bilden

ABER: Die Umkehrung ist <u>nicht eindeutig</u>!

Es gibt 2 LÖSUNGEN!

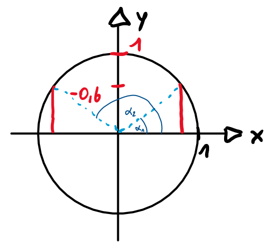
(TI gibt nur das Ergebnis aus, das 0° am nächsten liegt!)

und: Einheit beachten! DEG / RAD

Bsp.: $\sin(\alpha) = 0{,}6$

$\alpha_1 =$ 1. Quadr.

$\alpha_2 =$ 2. Quadr.



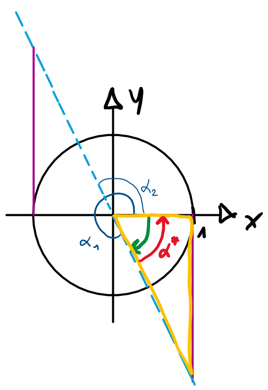
$\alpha_1 = \arcsin(0{,}6) = 36{,}869...°$

$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 143{,}13...°$

Bsp.: $\tan(\alpha) = -2$

$\alpha_1 =$ 4. Quadr.

$\alpha_2 =$ 2. Quadr.



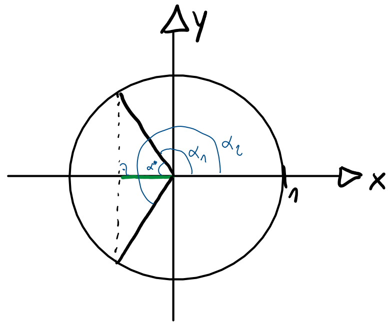
$\arctan(-2) = -63{,}43...°$

$\alpha^* = \arctan(+2) = 63{,}43...°$

$\alpha_1 = 360° - \alpha^*$

$\alpha_1 = 180° - \alpha^*$

Bsp.: $\cos(\alpha) = -0{,}5$



$\alpha^* = \arccos(+0{,}5)$

α_1 im 2. Quadr.

$\alpha_1 = 180° - \alpha^*$

α_2 im 3. Quadr.

α_2 im 3. Quadr.

$\alpha_2 = 180^\circ + \alpha^*$

Eigenschaften d. Winkelfunktionen

Dienstag, 9. März 2021 12:02

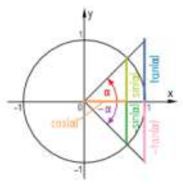
Trigonometrie – Teil 1

Mithilfe des Einheitskreises lassen sich wichtige Zusammenhänge erkennen.

- **Negative Winkel:**

  Ein mathematisch negativer Winkel beschreibt eine Drehung im Uhrzeigersinn. Der Winkel $(-\alpha)$ liegt an derselben Stelle wie $(360° - \alpha)$. Es gilt:

  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\quad\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\quad\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$



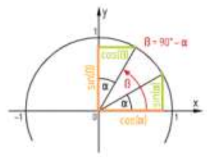
- **Komplementärwinkel:**

  Zwei Winkel α und β heißen komplementär, wenn sie einander auf 90° ergänzen, also $\beta = 90° - \alpha$ ist. Es gilt:

  $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$ bzw. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

  $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$ bzw. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

ZB $\sin(60°) = \sin(90° - 30°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



- **Supplementärwinkel:**

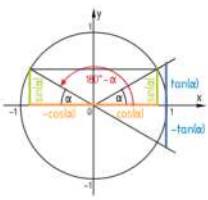
  Zwei Winkel α und β heißen supplementär, wenn sie einander auf 180° ergänzen, also $\beta = 180° - \alpha$ ist. Es gilt:

  $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$ bzw. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

  $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ bzw. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

  $\tan(180° - \alpha) = -\tan(\alpha)$ bzw. $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

ZB $\tan(135°) = \tan(180° - 45°) = -\tan(45°) = -1$



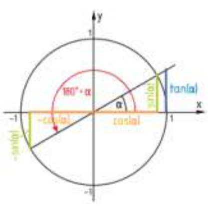
- **Winkel, die sich um 180° bzw. π unterscheiden:**

  $\sin(\alpha + 180°) = -\sin(\alpha)$ bzw. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

  $\cos(\alpha + 180°) = -\cos(\alpha)$ bzw. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

  $\tan(\alpha + 180°) = \tan(\alpha)$ bzw. $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

ZB $\cos(240°) = \cos(60° + 180°) = -\cos(60°) = -0{,}5$



- **Winkel, die sich um 360° bzw. 2π unterscheiden:**

  Addiert man 360° bzw. 2π zum Winkel α, so erhält man dieselben Winkelfunktionswerte wie für den ursprünglichen Winkel α. Dies kann beliebig oft und in beide Richtungen durchgeführt werden.

  $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$ $\quad\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$ $\quad\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 360°)$

  $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ $\quad\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ $\quad\tan(x) = \tan(x + 2k\pi)$ $\quad$ mit $k \in \mathbb{Z}$

5.1.2 Die Graphen der Winkelfunktionen und Arcusfunktionen

Da jedem Winkel eindeutig ein Sinus-, Cosinus- und Tangenswert zugeordnet werden kann, handelt es sich bei diesen Zuordnungen um Funktionen.

Die Funktionswerte der Sinus- und Cosinusfunktion sind nach jeder vollen Umdrehung des Winkels wieder gleich, das heißt, es handelt sich um periodische Funktionen mit einer Periode von 360° bzw. 2π. Die Tangensfunktion ist für die Winkel 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ und 270° bzw. $\frac{3\pi}{2}$ nicht definiert. Für die Tangensfunktion ergibt sich eine Periode von 180° bzw. π.

Im Folgenden werden die Winkelfunktionen grafisch dargestellt, wobei auf der waagrechten Achse der Winkel x im Bogenmaß aufgetragen wird. Die Maßzahl des Winkels im Bogenmaß entspricht der zugehörigen Bogenlänge am Einheitskreis.

Graph der Sinusfunktion – Sinuskurve

Stellt man sich vor, dass ein Punkt P am Einheitskreis „entlang läuft", so entspricht dessen y-Koordinate jeweils dem Sinuswert des zugehörigen Drehwinkels. Die Sinuswerte können somit direkt abgelesen und übertragen werden. Der zurückgelegte Weg des Punkts P entspricht der Größe des Winkels im Bogenmaß.

Wir zeichnen einen Einheitskreis mit selbst gewählter Einheit, zB 1 E $\triangleq$ 2 cm. Daneben zeichnen wir ein Koordinatensystem und tragen auf der x-Achse die Bogenlänge der wichtigsten Winkel auf. Bei der Skalierung der x-Achse muss beachtet werden, dass der Winkel $\frac{\pi}{2}$ dann einer Länge von $\frac{\pi}{2} \cdot 2$ cm $\approx$ 3,14 cm entspricht, der Winkel π einer Länge von $\pi \cdot 2$ cm $\approx$ 6,28 cm usw.

Die Punkte des Funktionsgraphen können nun wie folgt konstruiert werden:
ZB: Der Punkt P zum Winkel $\frac{\pi}{6}$ ($\triangleq$ 30°) wird am Einheitskreis markiert. Die y-Koordinate des Punkts P ist der Sinuswert des Winkels (hier 0,5) und wird als Funktionswert von $\frac{\pi}{6}$ eingezeichnet.

Wird diese Konstruktion für ausreichend viele Punkte durchgeführt, ergibt sich eine Kurve, der **Graph der Sinusfunktion**.

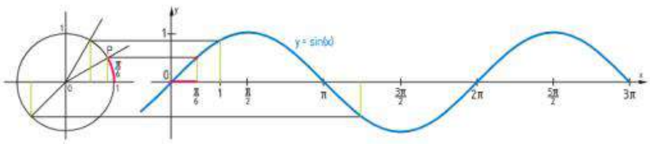


Abb. 5.1

sin (0) = 0

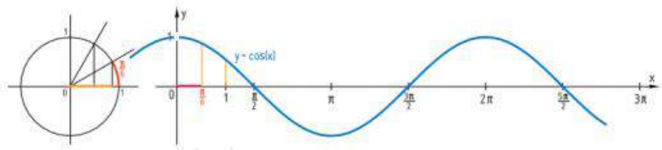
Eigenschaften der Funktion y = sin(x) im Bogenmaß !!

- Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$, Wertebereich $W_f = [-1; 1]$
- Da $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ gilt, ist die Sinusfunktion eine **periodische Funktion**.
- Der Graph der Funktion $y = \sin(x)$ ist **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**, somit ist $y = \sin(x)$ eine **ungerade Funktion**: $\sin(x) = -\sin(-x)$
- Nullstellen: $x = 0; \pi; 2\pi; ...$ Allgemein: $N(k\pi|0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ k = 0

Trigonometrie – Teil 1

Graph der Cosinusfunktion – Cosinuskurve

Die Cosinusfunktion kann analog zur Sinusfunktion konstruiert werden. Der **Graph der Cosinusfunktion** entspricht dem um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobenen Graphen der Sinusfunktion.



cos(0) = 1

Abb. 5.2

Eigenschaften der Funktion y = cos(x)

- Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$, Wertebereich $W_f = [-1; 1]$
- Da $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ gilt, ist die Cosinusfunktion eine **periodische Funktion**.
- Der Graph der Funktion $y = \cos(x)$ ist **symmetrisch zur y-Achse**, somit ist $y = \cos(x)$ eine **gerade Funktion**: $\cos(x) = \cos(-x)$
- Nullstellen: $x = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \ldots$ Allgemein: $N\left(\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2}\middle|0\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ k: 1 ; $\frac{3}{2}\pi$

Graph der Tangensfunktion – Tangenskurve

Bei den Winkeln $\frac{\pi}{2}$ (90°), $\frac{3\pi}{2}$ (270°), ... ist der Tangens nicht definiert. Die Tangenswerte werden in deren Nähe „unendlich groß" und „springen" von „+∞" auf „−∞". Die Tangensfunktion hat somit Polstellen bei $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \ldots$, der **Graph der Tangensfunktion** hat an diesen Stellen senkrechte Asymptoten.

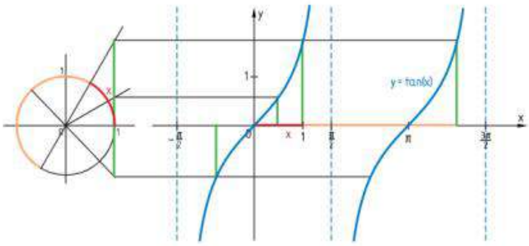


Abb. 5.3

Eigenschaften der Funktion y = tan(x)

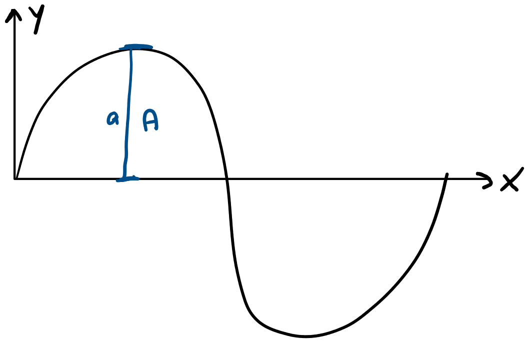
- Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, Wertebereich $W_f = \mathbb{R}$
- Da $\tan(x) = \tan(x + \pi)$ gilt, ist die Tangensfunktion eine **periodische Funktion**.
- Der Graph der Funktion $y = \tan(x)$ ist **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**, somit ist $y = \tan(x)$ eine **ungerade Funktion**: $\tan(x) = -\tan(-x)$
- Nullstellen: $x = 0; \pi; 2\pi; \ldots$ Allgemein: $N(k\pi|0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

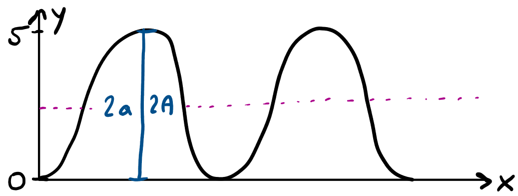
Sü, am 16.03.2021

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$$

→ Buch Seite 151, 152

-physikalisch: a: A (Amplitude)
maximale Auslenkung aus der Ruhelage der Sinusschwingung





A = 2,5 $\frac{5-0}{2} = 2{,}5$

b: ω Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit

$\omega = 2\pi f$ f... Frequenz

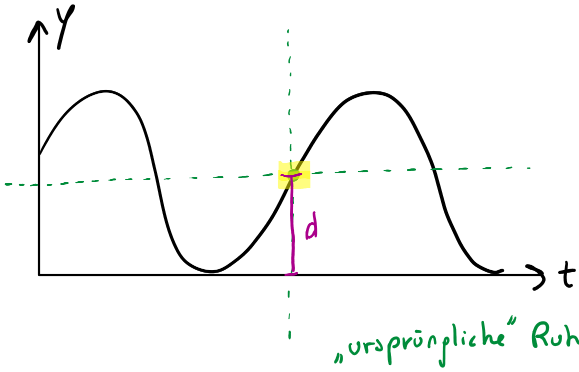
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ T... Periodendauer
Schwingungsdauer

c: φ .... Phasenverschiebung

$t_0 = \frac{-\varphi}{\omega}$ $\boxed{\varphi = -t_0 \cdot \omega}$

$t_0 = \frac{-\varphi}{\omega}$ $\boxed{\varphi = -t_0 \cdot \omega}$

d: Ordinatenabschnitt (vertikale Verschiebung)



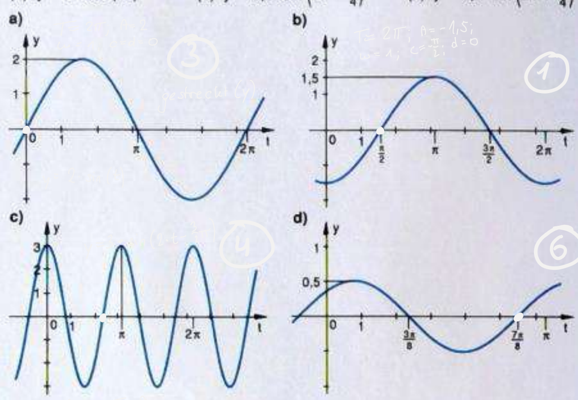
„ursprüngliche" Ruhelage (Nullpunkt) $= t_0$

1.

Vier von den sechs folgenden Funktionsgleichungen beschreiben die grafisch dargestellten Funktionen. Ordne sie zu und begründe die Entscheidung.

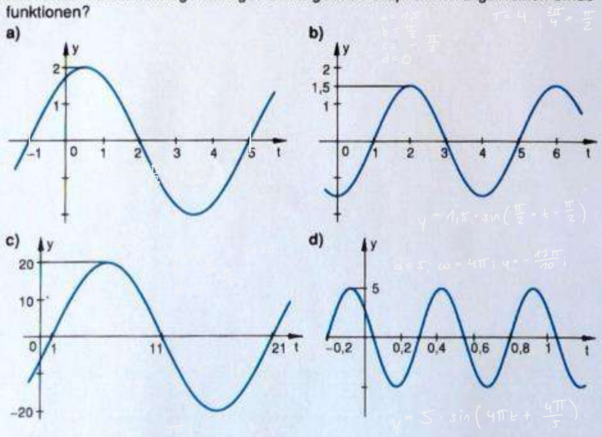
(1) $y = -1{,}5 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ (2) $y = 2 \cdot \sin(t - 1)$ (3) $y = 2 \cdot \sin t$

(4) $y = 3 \cdot \cos(2t)$ (5) $y = 0{,}5 \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$ (6) $y = 0{,}5 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$



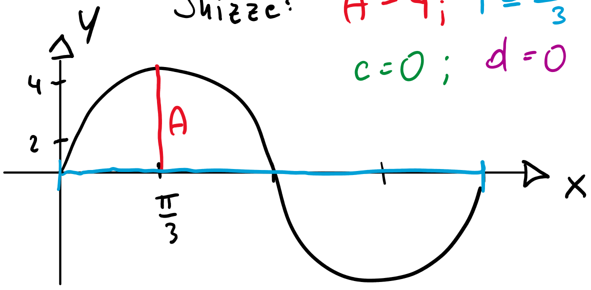
2.

Wie lauten die Funktionsgleichungen der folgenden Graphen von allgemeinen Sinusfunktionen?



Skizze: $A = 4$; $T = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2}$

$c = 0$; $d = 0$



$f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sinusfunktion*

Aufgabennummer: B_437

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Glimmlampe beginnt zu leuchten, sobald die angelegte Spannung eine Zündspannung U_Z übersteigt. Sie erlischt wieder, sobald die angelegte Spannung die Löschspannung U_L unterschreitet. Für eine bestimmte Glimmlampe gilt:

$U_Z = 150$ V
$U_L = 100$ V

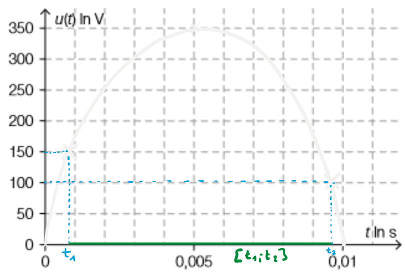
Die angelegte Spannung kann näherungsweise durch die Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = 325 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$

Amplitute $A = 325$
$\omega = 100\pi$
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\cancel{\pi}}{100\cancel{\pi}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt (V)

1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Funktionsgraphen von u und kennzeichnen Sie dasjenige Zeitintervall $[t_1; t_2]$, in dem die Glimmlampe leuchtet.



2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Zeit die Glimmlampe im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet.

$u(t_1) = 150 = 0{,}00152...$ $\frac{t_2 - t_1}{0{,}01} \cdot 100\%$
$u(t_2) = 100 = 0{,}00900...$

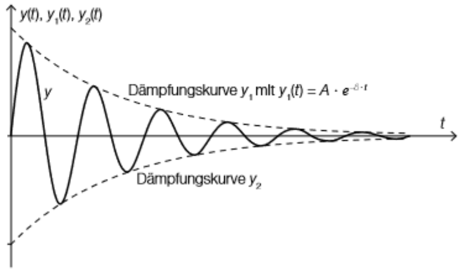
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte gedämpfte Schwingung wird durch die Funktion y beschrieben:

$y(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

t ... Zeit

$y(t)$ ... Auslenkung zur Zeit t



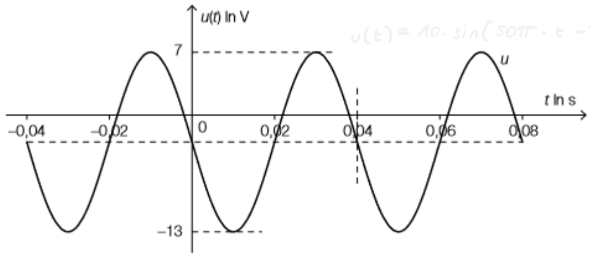
1) Erstellen Sie eine Gleichung der zu y_1 symmetrischen Dämpfungskurve y_2 (siehe obige Abbildung).

2) Zeigen Sie, dass an den Stellen t_k, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 berührt, gilt:

$t_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, ...$

c) Der zeitliche Verlauf einer Spannung kann durch eine Funktion u mit $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + d$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $A > 0$.

$u(t) = 10 \cdot \sin(50\pi \cdot t - \pi) - 3$



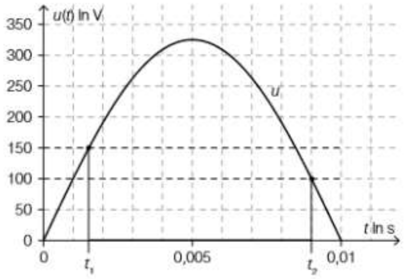
1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und d ab. $A = 10$; $d = -3$

2) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω. $T = 0{,}04$ $\omega = 50\pi$

3) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ. $\varphi = -t_0 \cdot \omega = -\pi$

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $u(t_1) = 150 \Rightarrow t_1 = 0{,}00152...$
$u(t_2) = 100 \Rightarrow t_2 = 0{,}00900...$
$\frac{t_2 - t_1}{0{,}01} = 0{,}7477...$

Im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet die Glimmlampe rund 74,8 % der Zeit.

b1) $y_2(t) = -A \cdot e^{-\delta \cdot t}$

b2) Die Stellen, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 schneidet, erhält man als Lösungen der Gleichung $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$.

$A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t} \Rightarrow \sin(\omega \cdot t) = \pm 1$

$\omega \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{N} \Rightarrow t_k = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$

c1) $A = 10$
$d = -3$

c2) Die Periodendauer T ist 0,04, daher ergibt sich:
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}04} = 50 \cdot \pi$

c3) $t_0 = -0{,}02$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:
$\varphi = 0{,}02 \cdot 50 \cdot \pi = \pi$
(Jeder Wert $\varphi = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige grafische Veranschaulichen des Zeitintervalls
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung von y_2
b2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (Gleichung zur Berechnung der Schnittpunkte)
1 x D: für den richtigen Nachweis

c1) 1 × C: für das richtige Ablesen von A und d
c2) 1 x B1: für das richtige Bestimmen von ω
c3) 1 x B2: für das richtige Bestimmen von φ

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Federpendel*

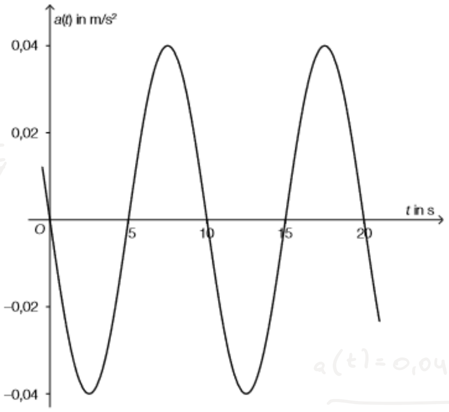
Aufgabennummer: B_431

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein an einer Feder befestigter Körper bewegt sich unter dem Einfluss der Federkraft.

a) Das nachstehende Beschleunigung-Zeit-Diagramm zeigt den sinusförmigen Verlauf der Beschleunigung eines Körpers durch die Federkraft. Es gilt: $a(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ mit $A > 0$.

$A = 0{,}04$
$T = 10$
$\omega = \frac{\pi}{5}$
$\varphi = -8 \cdot \frac{\pi}{8}$
$\varphi = -\pi$



$a(t) = 0{,}04 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} t - \pi\right)$

– Bestimmen Sie A, ω und φ mithilfe des obigen Diagramms.
– Markieren Sie im obigen Diagramm alle Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist.

b) Die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit kann durch eine Funktion v mit $v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden (A, $\omega > 0$).

– Vervollständigen Sie die nachstehende Aussage mit $t_2 \neq t_1$ so, dass sie richtig ist.

Für $t_2 = t_1 + \frac{\boxed{} \cdot \pi}{\boxed{}}$ ist $\int_{t_1}^{t_2} A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\,dt = 0$.

– Zeigen Sie, dass $A \cdot \omega$ die maximale Steigung der Funktion v ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss einer Federkraft wird durch Reibung gedämpft. Für die Auslenkung aus der Ruhelage (Startposition) gilt:

$f(t) = e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$f(t)$ ... Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit t in m

– Bestimmen Sie diejenigen Intervalle, in denen der Betrag der Auslenkung aus der Ruhelage größer als 0,2 m ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 0{,}04$

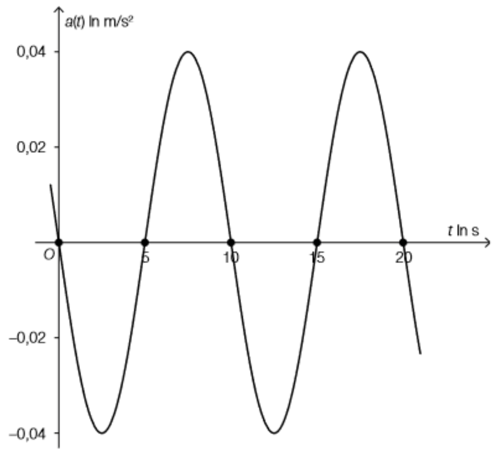
Die Periodendauer T ist 10, daher ergibt sich:

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$t_0 = 5$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$\varphi = -5 \cdot \frac{\pi}{5} = -\pi$

(Jeder Wert $\varphi = -\pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)



b) $t_2 = t_1 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$

Auch ein Vielfaches der Periodendauer ist als richtig zu werten.

$v'(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Da der maximale Wert von $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ gleich 1 ist, ergibt sich als maximale Steigung von v genau $A \cdot \omega$.

c) Lösen der Gleichungen $f(t) = \pm 0{,}2$ mittels Technologieeinsatz:

$]0{,}07...; 0{,}87...[$ und $]1{,}33...; 1{,}60...[$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen von A
1 × B1: für das richtige Bestimmen von ω
1 × B2: für das richtige Bestimmen von φ
1 × C2: für das richtige Markieren aller Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist

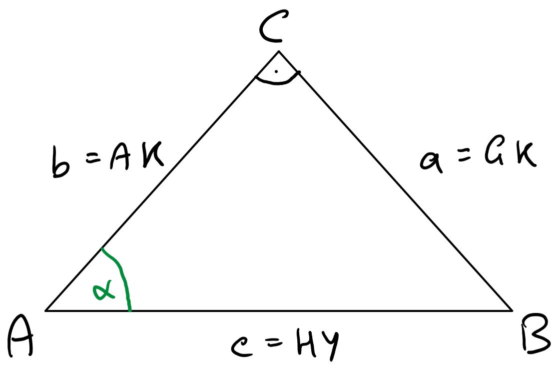
b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Aussage
1 × D: für den richtigen Nachweis

c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Intervalle

7 Trigonometrie im allgemeinen Dreieck Teil 2

Dienstag, 23. März 2021 10:58

Wh: Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck



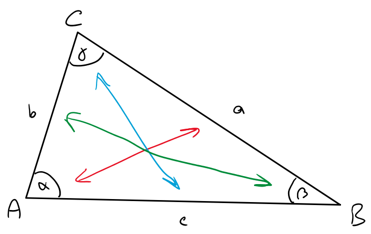
Funktio

$$\underbrace{\sin}_{}(\alpha) = \frac{GK}{HY}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AK}{HY}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$$

$$\left(\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)$$



Konstruktionssätze:

- SWW-Satz
- SWS-Satz
- SSW-Satz (W muss länger als gegenüberliegenden Seite)
- SSS-Satz

} SINUSSATZ anwendbar

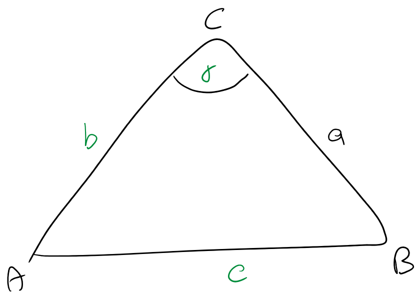
Der Sinussatz

Im allgemeinen Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinuswerte ihrer gegenüberliegenden Winkel.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Bsp.: geg.: $b = 4cm$; $c = 7{,}5cm$; $\gamma = 108°$

Skizze:



SSW-Satz!
(eindeutig)

β: $\dfrac{c}{\sin(\gamma)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$ | Kehrwert

$\dfrac{\sin(\gamma)}{c} = \dfrac{\sin(\beta)}{b}$ | ·b

$\dfrac{b \cdot \sin(\gamma)}{c} = \sin(\beta)$

pos. Wert

$\beta = \arcsin\left(\dfrac{b \cdot \sin(\gamma)}{c}\right)$

DEGREE!

$\beta_1 = 30{,}479...°$ $\beta_2 = 180° - \beta_1 = 149{,}520...°$
↳ nicht möglich

α: $180° - \beta - \gamma = 41{,}520...°$

a: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$ | · $\sin(\alpha)$

$a = \dfrac{c \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$

$\sin(\gamma)$

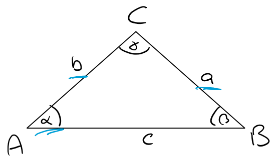
$a = 5{,}2275\ldots\ cm$

6.4.21

Bsp.: Dreieck: $a = 4{,}5\,cm$

$b = 6{,}0\,cm$

$\alpha = 46°$



SSW-Satz

Winkel α liegt d. kürzeren Seite gegenüber:

- ▷ keine Lösung
- ▷ eindeutig
- ▷ zwei Lösungen

β berechnen: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$

$\dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b} \quad | \cdot b$ DEG

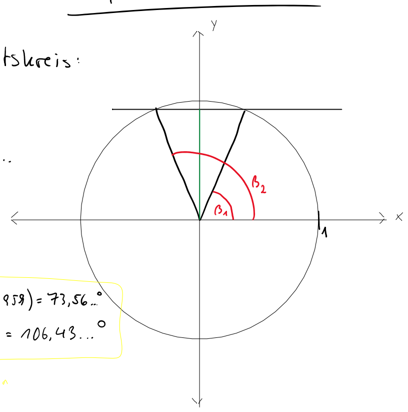
$\sin(\beta) = b \cdot \dfrac{\sin(\alpha)}{a}$

$\sin(\beta) = 0{,}959119\ldots$

Einheitskreis:

β?

$\sin(\beta) = 0{,}959\ldots$



$\beta_1 = \arcsin(0{,}958) = 73{,}56\ldots°$

$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 106{,}43\ldots°$

2 Lösungen

2 Lösungsfälle

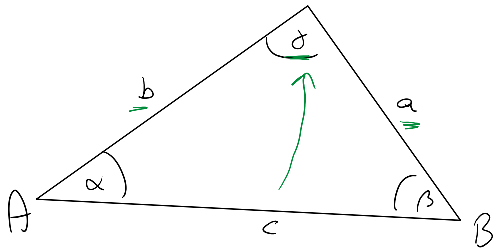
$\beta_1 = 73{,}56\ldots°$	$\beta_2 = 106{,}43\ldots°$
γ_1, c_1 berechnen	γ_2, c_2 berechnen
$\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 = 60{,}43\ldots°$	$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 = 27{,}56\ldots°$
$\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{c_1}{\sin(\gamma_1)} \quad | \cdot \sin(\gamma_1)$	$\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{c_2}{\sin(\gamma_2)} \quad | \cdot \sin(\gamma_2)$
$c_1 = \sin(\gamma_1) \cdot \dfrac{a}{\sin(\alpha)}$	$c_2 = \sin(\gamma_2) \cdot \dfrac{a}{\sin(\alpha)}$
$c_1 = 5{,}44\ldots\ cm$	$c_2 = 2{,}89\ldots\ cm$

Der Cosinussatz

C

SSS - Satz

SWS - Satz



$$\boxed{\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}}$$

Bsp.: geg: Δ: $a = 12\,cm$

$b = 9\,cm$

$c = 4\,cm$

ges.: α, β, γ, A

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \qquad | -b^2 - c^2$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos(\alpha) \qquad | :(-2bc)$$

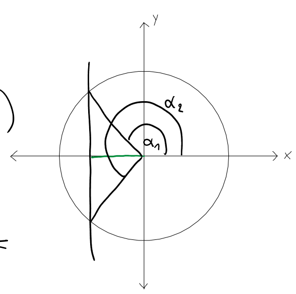
$$\frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{(-2bc)} = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{12^2 - 9^2 - 4^2}{-2 \cdot 9 \cdot 4}$$

$$\cos(\alpha) = -0,6527$$

$\alpha_1 = 130,751...^\circ$

($\notin$ Def.: $\alpha_2 = 229,248...^\circ$)



$\underline{\underline{\alpha = 130,751...^\circ}}$

β: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \qquad | \cdot b$

$\sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a}$

$\sin(\beta) = 0,568...^\circ$

$\beta_1 = 34{,}622\ldots°$;

α ist so groß, dass β_2 keinen Sinn macht!

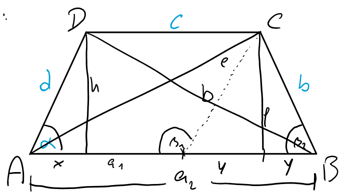
γ: $180° - \alpha - \beta = 14{,}626\ldots°$

$A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha) = 13{,}635\ldots\ cm^2$

6.16 Berechne die fehlenden Größen des Trapezes (Längen in Millimeter). A B

	a	b	c	d	e	f	α	β	h	A
a)	110		41			97		32°		
b)	49	22			38		40°			
c)	56,51	24	15	37	50,0	33,7	35°	62,16°	21,22	
d)	145		78				65°	35°		

Skizze:



2 Lösungen!

h: $\sin(\alpha) = \frac{h}{d}$; $h = d \cdot \sin(\alpha) = 21{,}22\ldots\ mm$

x: $x = \sqrt{d^2 - h^2} = 30{,}30\ldots\ mm$

y: $y = \sqrt{b^2 - h^2} = 11{,}20\ldots\ mm$

a_2: $a_2 = c + x + y = 56{,}51\ldots\ mm$

a_1: $a_1 = c - y + x = 34{,}1\ldots\ mm$

β_2: $\sin(\beta_2) = \frac{h}{b}$; $\beta_2 = 62{,}16\ldots°$

β_1: $\beta_1 = 117{,}84°$

e: Cosinussatz:

$e^2 = a_2^2 + b^2 - 2 \cdot a_2 \cdot b \cdot \cos(\beta_2)$

$e = \sqrt{56{,}51^2 + 24^2 - 2 \cdot 56{,}51 \cdot 24 \cdot \cos(62{,}16)}$

$e = 50{,}0337\ldots\ mm$

f_1: $f_1^2 = d^2 + a_1^2 - 2 \cdot d \cdot a_1 \cdot \cos(\alpha)$

$f_1 = \sqrt{37^2 + 34{,}1^2 - 2 \cdot 37 \cdot 34{,}1 \cdot \cos(35°)}$

$f_1 = 21{,}5\ldots\ mm$

f_2: $f_2^2 = d^2 + a_2^2 - 2 \cdot d \cdot a_2 \cdot \cos(\alpha)$

$f_2 = \sqrt{37^2 + 56{,}51^2 - 2 \cdot 37 \cdot 56{,}51 \cdot \cos(35°)}$

$f_2 = 33{,}71\ldots\ mm$

A_1: $A_1 = \frac{(a_1 + c) \cdot h}{2}$

$A = 520{,}951\ldots\ mm^2$

A_1: $A_1 = \frac{(a_1 + c) \cdot h}{2}$

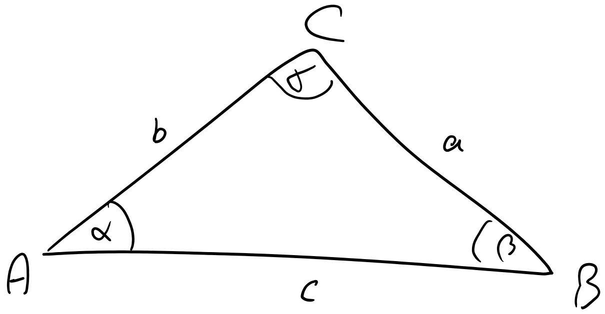
$\underline{\underline{A_1 = 520{,}951 \ldots \, mm^2}}$

A_2: $A_2 = \frac{(a_2 + c) \cdot h}{2}$

$\underline{\underline{A_2 = 758{,}721 \ldots \, mm^2}}$

Die Trigonometrische Flächeninhaltsformel

Dienstag, 6. April 2021 11:04



2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel

$$\left(A = \frac{a \cdot h_a}{2} \right)$$

$$\boxed{A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)}$$

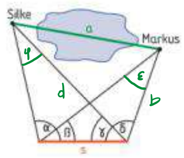
$$A = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin(\beta)$$

$$A = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin(\gamma)$$

Sü, am 12. 04. '21

- Skizze zeichnen
- Dreiecke „erkennen" und damit den verwendeten Satz

6.22 Zwischen den Häusern von Silke und Markus liegt ein Teich. Sie wollen Funkgeräte mit einer Reichweite von 50 m kaufen. Um herauszufinden, ob dies für die Entfernung zwischen ihren Häusern ausreicht, wählen sie eine Strecke s = 6 m, von der aus sie beide Häuser sehen können, und messen die Winkel $\alpha = 119°$, $\beta = 19°$, $\gamma = 44°$ und $\delta = 153°$.
Ermittle, ob die Funkgeräte die nötige Reichweite haben.



ges.: a

1) alle Winkel, die über die ∡ Σ berechnet werden können.

$\varepsilon = 180° - \beta - \delta = \underline{\underline{8°}}$

$\varphi = 180° - \alpha - \gamma = \underline{\underline{17°}}$

2) b: $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{s}{\sin(\varepsilon)} \quad | \cdot \sin(\beta)$

$b = \sin(19°) \cdot \frac{6}{\sin(8°)}$

$\underline{\underline{b = 14{,}035\ldots\,m}}$

f: $\frac{f}{\sin(\alpha)} = \frac{s}{\sin(\varphi)} \quad | \cdot \sin(\alpha)$

$f = \sin(119°) \cdot \frac{6}{\sin(17°)}$

$\underline{\underline{f = 17{,}948\ldots\,m}}$

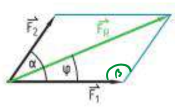
a: $a^2 = b^2 + f^2 - 2 \cdot b \cdot f \cdot \cos(\delta - \gamma)$

$a = \sqrt{14^2 + 18^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos(153 - 44)}$

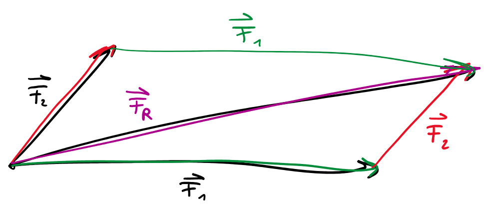
$a = 26{,}138\ldots\,m < 50m$

A: Ja, die Funkgeräte reichen aus.

6.26 Zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$, die in einem Punkt angreifen, schließen den Winkel α ein. Berechne den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F_R}$ und den Winkel φ, den diese mit $\vec{F_1}$ einschließt. Überprüfe deine Ergebnisse mithilfe einer maßstabsgetreuen Zeichnung.
a) $F_1 = 450$ N, $F_2 = 320$ N, $\alpha = 55°$ ~~**b)** $F_1 = 370$ N, $F_2 = 0{,}8$ kN, $\alpha = 78°$~~



A B D



Kräfteparallelogramm

$\beta: 180° - \alpha = \underline{\underline{125°}}$

$\vec{F_R} = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\beta)}$

$\vec{F_R} = 685{,}631\ldots\,N$

$$\vec{F}_R = 685{,}631\ldots \, N$$

$$\varphi: \quad \frac{\sin(\varphi)}{F_2} = \frac{\sin(\beta)}{F_R}$$

$$\varphi = \arcsin\left(F_2 \cdot \frac{\sin(\beta)}{F_R}\right)$$

$$\varphi = 22{,}4773\ldots^\circ \approx \underline{\underline{22{,}5^\circ}}$$

Bundesinstitut bifie

Fernsehturm

Aufgabennummer: B_250

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Turm steht senkrecht auf einem horizontalen Platz.

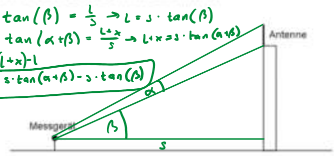
a) Auf diesem Turm befindet sich eine senkrechte Antenne, deren Höhe gemessen werden soll. Von einem Messgerät, das sich auf dem horizontalen Platz s Meter (m) vom Turm entfernt befindet, erscheint die Antenne unter einem Sehwinkel α. Der Fußpunkt der Antenne erscheint unter einem Höhenwinkel β.

$L: \tan(\beta) = \frac{L}{s} \rightarrow L = s \cdot \tan(\beta)$

$L+x: \tan(\alpha+\beta) = \frac{L+x}{s} \rightarrow L+x = s \cdot \tan(\alpha+\beta)$

$x = (L+x) - L$

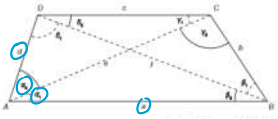
$\boxed{x = s \cdot \tan(\alpha+\beta) - s \cdot \tan(\beta)}$



– Zeichnen Sie die angegebenen Größen in die obige Skizze ein.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Antennenhöhe, abhängig von den Größen s, α und β, auf.

SÜ. am 13.04.2021

b) Der Platz, auf dem der Turm steht, hat die Form eines Trapezes. Die nachstehende Grafik zeigt den Platz im Maßstab 1 : 600 und die Seitenlängen sind in cm gezeichnet.



$a = 9\,cm \ldots$ gemessen $\cdot 600 = 54\,m$

– Bestimmen Sie mithilfe der Darstellung die Länge der Seite a in Metern (m).
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge der Diagonale f bei gegebener Seitenlänge d und a und den Winkeln α_1 und α_2.

$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$

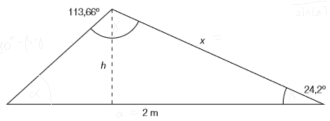
– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$\frac{\sin(\delta_1)}{e} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_2)}{a} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\beta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_1)}{d} = \frac{\sin(\delta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☒

c) Für Konzerte wird der Platz vor dem Turm in Sektoren aufgeteilt. Die nachstehende Skizze veranschaulicht die Fläche eines bestimmten Sektors, wobei die Seitenlängen in Metern (m) angegeben sind.

$\frac{x}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\sin(\gamma)}$

1) $\alpha = 180° - \beta - \gamma$



– Berechnen Sie die Seitenlänge x aus den gegebenen Größen.
– Begründen Sie mathematisch, warum die Berechnung der Länge x mit $x = \sin(24{,}2°) \cdot h$ falsch ist.
– Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

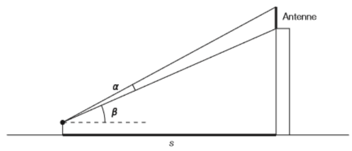
2) $\sin(\beta) = \frac{h}{x}$, $x = \frac{h}{\sin(\beta)}$

3) $A = \frac{x \cdot a}{2} \cdot \sin(\beta)$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Höhe der Antenne = $\tan(\alpha + \beta) \cdot s - \tan(\beta) \cdot s$

b) $a = 9$ cm entspricht 54 m   Messtoleranz: ± 0,4 cm

Abhängig von den Druckeinstellungen kann die Länge der Seite a auf dem Ausdruck geringfügig abweichen.

Die Länge der Diagonale f kann mit dem Cosinussatz berechnet werden:

$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$

$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☒

c) $x = \frac{2}{\sin(113{,}66°)} \cdot \sin(180° - 113{,}66° - 24{,}2°) = 1{,}465\ldots$

Die Seitenlänge x beträgt rund 1,47 m.

Der Sinus von dem Winkel 24,2° entspricht dem Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse. Wenn man $x = \sin(24{,}2°) \cdot h$ umformt auf $\sin(24{,}2°) = \frac{x}{h}$, erkennt man, dass die Seiten im Verhältnis vertauscht sind.

$A = \frac{2 \cdot 1{,}47 \cdot \sin(24{,}2°)}{2} = 0{,}600\ldots$

Der Flächeninhalt beträgt rund 0,60 m².

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

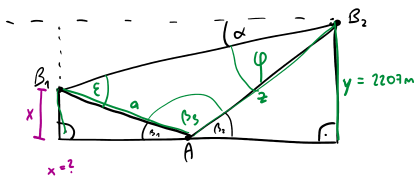
Vermessung

Aufgabennummer: B_008

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Zwischen zwei Berggipfeln B_1 und B_2 liegt im Tal in derselben Vertikalebene der einsehbare Punkt A.
B_2 liegt auf einer Meereshöhe von 3 007 m.
A liegt auf einer Meereshöhe von 800 m.
Vom Punkt A wird zum Berggipfel B_1 der Höhenwinkel $\beta_1 = 14°\,26'$ und zum Berggipfel B_2 der Höhenwinkel $\beta_2 = 17°\,23'$ gemessen.
Vom Berggipfel B_2 wird zum Berggipfel B_1 der Tiefenwinkel $\alpha = 2°\,46'$ gemessen.

– Erstellen Sie eine geeignete Skizze.
– Berechnen Sie die Meereshöhe vom Berggipfel B_1.



x = ?

$$z = \frac{y}{\sin(\beta_2)}$$

$z = 7387{,}12 \ldots$ m

$\varphi = \beta_2 - \alpha$

$\varphi =$

$\beta_3 = 180° - \beta_1 - \beta_2$

$\beta_3 = 148{,}183°$

$\varepsilon = 180° - \varphi \cdot \beta_3$

$\varepsilon =$

a: $\dfrac{a}{\sin(\varphi)} = \dfrac{z}{\sin(\varepsilon)}$

$a =$

$\sin(\beta_1) = \dfrac{x}{a}$

$x = a \cdot \sin(\beta_1)$

b) Bei der Landvermessung wurde von einer horizontalen Standlinie AB vom Punkt A der Höhenwinkel $\alpha = 35°$ zu einem Punkt C gemessen.
Die Strecke AC beträgt 61,48 km und die Strecke BC beträgt 40,72 km.
Der Winkel β des in Abbildung 1 maßstabgetreu dargestellten Dreiecks wurde wie folgt mit einem CAS berechnet:

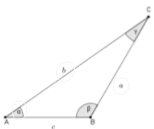


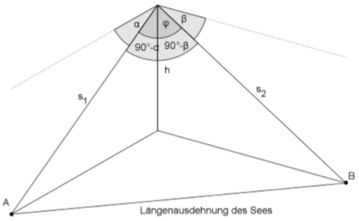
Abbildung 1

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \beta = \arcsin\frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \begin{cases} \beta_1 \approx 60° \\ \beta_2 \approx 120° \end{cases}$$

α liegt kürzerer Seite gegenüber

– Erklären Sie, warum es im CAS zwei Lösungen für dieses Dreieck gibt.
– Begründen Sie, warum nur eine der beiden Lösungen der Problemstellung richtig ist.
– Interpretieren Sie die richtige Lösung für diesen Sachzusammenhang.

c) Von einer auf der Höhe h befindlichen Berghütte aus sieht man einen See.
Dieser erstreckt sich zwischen den zwei Geländepunkten A und B.
Der mit einem Winkelmesser ausgerüstete Vermesser möchte den Abstand zwischen A und B bestimmen.



h … vertikale Distanz zur Seeoberfläche in m
A, B … Geländepunkte an den beiden Enden des Sees
s_1, s_2 … Länge der Sehstrahlen zu den Punkten A und B in m
α … Tiefenwinkel zum Geländepunkt A in °
β … Tiefenwinkel zum Geländepunkt B in °
φ … Winkel zwischen den Sehstrahlen in °
$\overline{AB}$ … Längenausdehnung des Sees

– Dokumentieren Sie anhand der oben stehenden Skizze einen Lösungsweg für die Berechnung der Strecke AB.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

$\mathrm{sin}(\beta_1) = \frac{x}{a}$

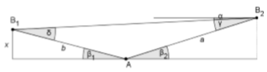
$x = a \cdot \mathrm{sin}(\beta_1)$

$x =$

$B_1 : x + 800\,m$

Möglicher Lösungsweg

a) $\beta_1 = 14°\ 26'$
$\beta_2 = 17°\ 23'$
$\alpha = 2°\ 46'$



3 007 m – 800 m = 2 207 m
$a = \frac{2\,207}{\sin\beta_2} \Rightarrow a = 7\,387{,}121...\ \text{m}$

$\gamma = \beta_2 - \alpha$ $\qquad \delta = \beta_1 + \alpha$ $\qquad \frac{a}{\sin\delta} = \frac{b}{\sin\gamma}$ $\qquad x = \sin\beta_1 \cdot b$

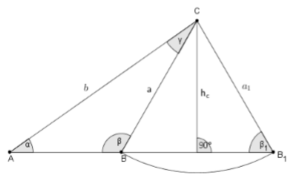
$\gamma = 14{,}616°$ $\qquad \delta = 17{,}2°$ $\qquad b = 6\,304{,}009...\ \text{m}$ $\qquad x = 1\,571{,}295...\ \text{m}$

1 571,295… m + 800 m = 2 371,3 m

Die Meereshöhe vom Berggipfel B_1 beträgt 2 371,3 m.

Auch andere zielführende Rechenwege sind als richtig zu werten.

b) Sind von einem Dreieck zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, dann besitzt das Dreieck genau zwei Lösungen für $\sin\alpha \cdot b < a$.

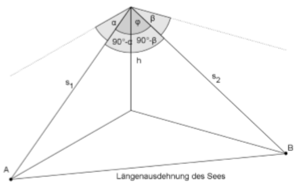


Weitere Winkel können mit $\sin\beta = \sin(180° - \beta)$ berechnet werden.

In diesem Sachzusammenhang muss β ein stumpfer Winkel sein, deshalb ist $\beta_2 = 120°$ die richtige Lösung.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

c)



Es gelten folgende Beziehungen:

$$\cos(90-\alpha) = \frac{h}{s_1} \qquad \cos(90-\beta) = \frac{h}{s_2}$$

$$s_1 = \frac{h}{\cos(90-\alpha)} \qquad s_2 = \frac{h}{\cos(90-\beta)}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos\varphi}$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Sü, am 19.04.2021

DI 04.05.2021 → SMÜ

Trigonometrie in Vierecken
(Parallelogramm, Trapez, Raute, ...)

8 Vektoren

Dienstag, 13. April 2021 11:43

physikalische Größe, die

- 1 Angriffspunkt
- 1 Länge und
- 1 Richtung

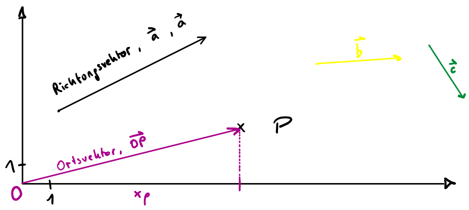
hat.

in der Ebene: $\mathbb{R}^2$ ... $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

$\downarrow$ Aussprache: „R2" $\downarrow$ „R kreuz R"

Ein Vektor kann aufgefasst werden als

- Punkt im Koordinatensystem (= Ortsvektor) $\longrightarrow$ GROSSBUCHSTABE
- Pfeil im Koordinatensystem (= Richtungsvektor) $\longrightarrow$ kleinbuchstabe



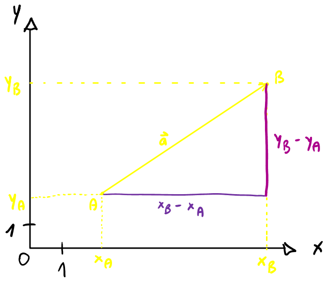
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: Richtungsvektoren

O → O wie Oma
0 → 0 wie 1+0=1
Aussprache wie Krankenhaus OP

Schreibweise:
- Punkt: $P(x_P, y_P)$ .... x_P, y_P: Koordinaten
- Ortsvektor: $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ ... x_P, y_P: Komponenten

Richtungsvektoren: Vektor zwischen 2 Punkten

$A(x_A | y_A)$
$B(x_B | y_B)$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

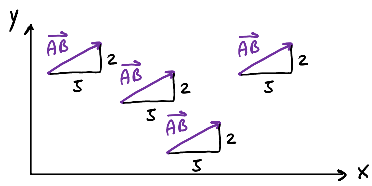
Merkhilfe: $\vec{a} = \vec{AB}$ = „Endpunkt minus Anfangspunkt"

z.B.: geg.: $A(2|4)$
$B(7|6)$

ges: $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor!



Sü, am 19.04.2021

DI 04.05.2021 → SMÜ

Trigonometrie in Vierecken
(Parallelgramm, Trapez, Raute, ...)

Betrag eines Vektors

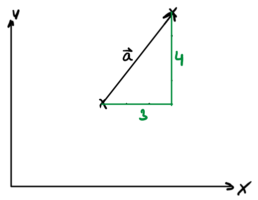
↳ Länge d. Pfeils

z.B.: $\vec{a}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2} =$
$= 5E$

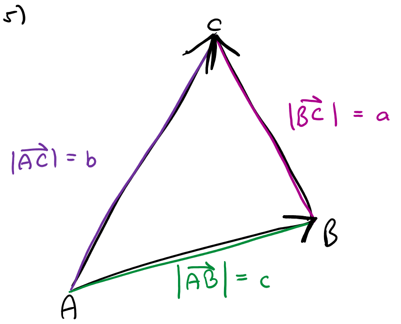
allgemein:
$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix}d_x\\d_y\end{pmatrix}\right|$

$|\vec{a}| = \sqrt{d_x^2+d_y^2}$



Bsp.: Δ: A(−4|−2)
B(2|−1)
C(1|5)

Umfang?



$$\vec{c} = \overrightarrow{\underset{\text{Anf.}}{A}\underset{\text{End.}}{B}} = \begin{pmatrix}2+4\\-1+2\end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{6^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{37}\ \text{LE}}}$$ (Längeneinheiten)

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1-2\\5+1\end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2+6^2} = \underline{\underline{\sqrt{37}\ \text{LE}}}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1+4\\5+2\end{pmatrix}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \underline{\underline{\sqrt{74}\ LE}}$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = \sqrt{37} + \sqrt{37} + \sqrt{74} = \underline{\underline{20{,}767\ldots}}\ LE$$

SÜ, am 20.04.2021

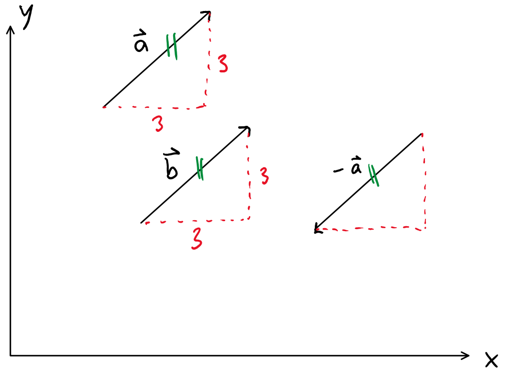
Gleichheit von Vektoren

Vektoren heißen gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen (koordinatenweise gleich).

Gegenvektor / inverser Vektor

entgegengesetzt gerichtet

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{inv. V.} \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$$

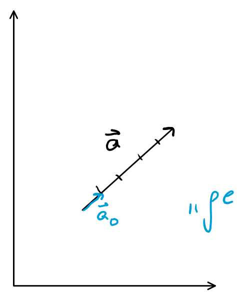


Einheitsvektor

Vektor mit der „Länge" 1

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

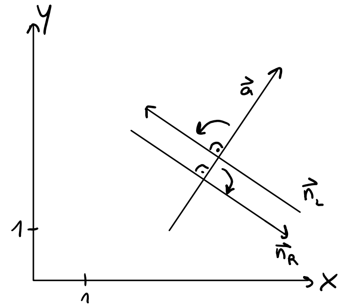


„gestaucht" auf die „Länge" 1

Normalvektor

Ein Vektor, der die gleiche Länge hat und durch Drehung von 90° entsteht.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$



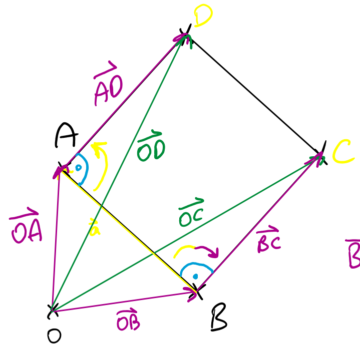
Linksdrehung: $\vec{n}_L = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$

Rechtsdrehung: $\vec{n}_R = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$

Beispiel: A(2|3); B(8|-11) bilden Quadrat

Koordinaten der Eckpunkte C, D

Skizze:



$\vec{BC} = n_{\vec{BA},R}$

$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OB} + n_{\vec{BA},R}$

$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -5 \end{pmatrix}$

$C = (22|-5)$

$\vec{BA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2-8 \\ 3+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{\vec{BA},R} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + n_{\vec{AB},L}$

$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = -\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{\vec{AB},L} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$

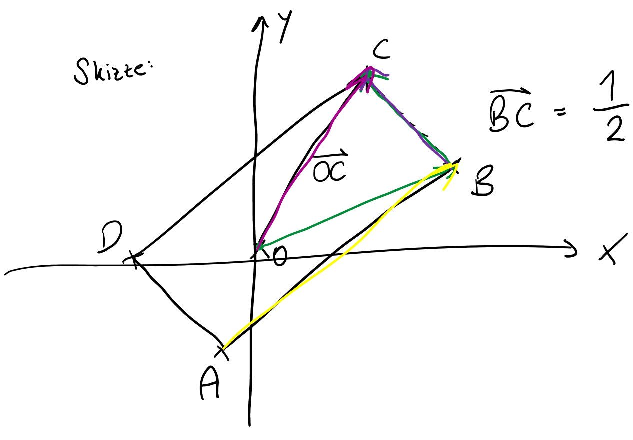
$D = (16|9)$

Beispiel: A(-1|-2) B(5|6) ... Rechteck ABCD

$\vec{AD}$ ist $\frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$

ges.: C, D

Skizze:



$\vec{BC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{n}_{\vec{AB},L}$

$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{\vec{AB},L} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C = (1 \mid 9)}}$$

Skalarprodukt (Vektorprodukt, inneres Produkt)

= Multiplikation zweier Vektoren

↓

Ergebnis ist ein Skalar (Zahl)

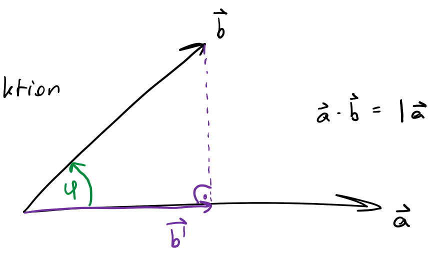
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

z.B.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 = -6 + 8 = \underline{\underline{2}}$$

„grafisch":

Normalprojektion



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}_{|\vec{b'}|}$$

$\cos(0°) = 1$

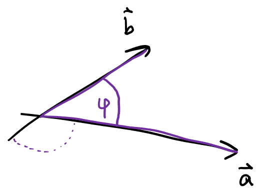
$\cos(90°) = 0$

Stehen 2 Vektoren <u>normal</u> aufeinander, so ist das Skalarprodukt NULL!

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

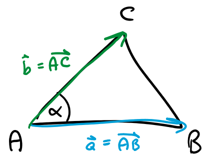
Winkel zwischen 2 Vektoren

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



Bsp.: geg.: Δ $A(1|1)$
$B(6|2)$
$C(-1|4)$

Skizze:



ges.: α

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

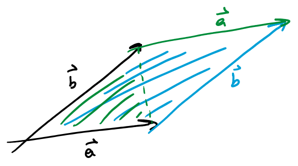
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5 \cdot (-2) + 1 \cdot 3}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = -0{,}38\ldots$$

$$\alpha = \arccos(-0{,}38\ldots) = \underline{\underline{112{,}38°}}$$

✏ Flächeninhalt vom Parallelogramm & Dreieck



$$A_{▱} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x)$$

Bsp.: Maturaaufgabe: Brieftauben B_355

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}}}$

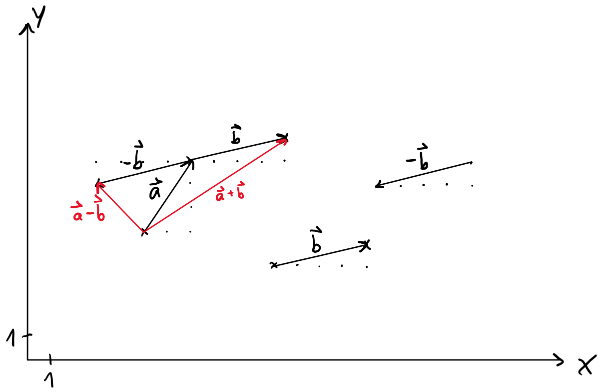
b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} =$ Freistadt

$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

Sü, am 20.04.2021

→ Addition, Subtraktion

z.B.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

komponentenweise !

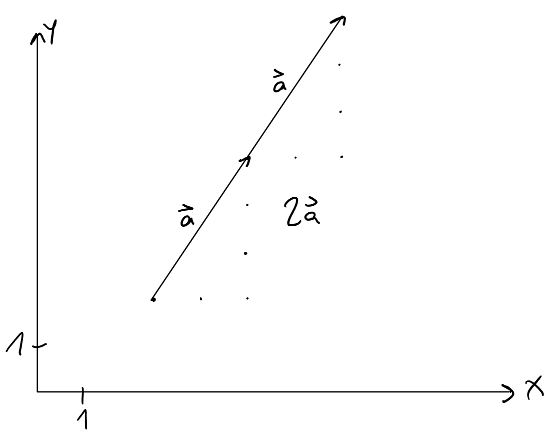
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_y \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

→ Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (Skalar)

z.B.: $2 \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$



$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

→ Division

Multiplikation mit Skalar < 1

z.B.: $\frac{\vec{a}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot a_x \\ \frac{1}{2} \cdot a_y \end{pmatrix}$

→ Berechnung des Mittelpunkts einer Strecke (Mittelpunkt)

$A(a_x | a_y) \quad B(b_x | b_y)$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} \frac{a_x + b_x}{2} \\ \frac{a_y + b_y}{2} \end{pmatrix}$$

Bsp.: Maturaaufgabe: Brieftauben B_355

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}}}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ = Freistadt

$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

SÜ, am 27.04

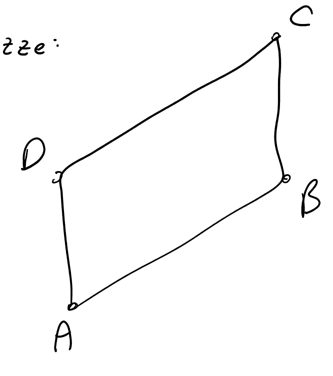
1. Stunde morgen:

8.27 Ermittle die fehlenden Koordinaten sowie den Flächeninhalt des angegebenen Parallelogramms mithilfe der Vektorrechnung.
a) $A(10|5)$, $B(2|3)$, $C(x_C|y_C)$, $D(13|5)$ **b)** $A(x_A|y_A)$, $B(-5|-7)$, $C(-2|5)$, $D(-11|9)$

8.27) a) geg.: $A(10|5)$, $B(2|3)$, $D(13|5)$ } Parallelogramm

ges.: C, α, Fläche

Skizze:



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{C = (5 | 3)}}$$

$$A = \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB}_x & \overrightarrow{AD}_x \\ \overrightarrow{AB}_y & \overrightarrow{AD}_y \end{vmatrix} = \overrightarrow{AB}_x \cdot \overrightarrow{AD}_y - \overrightarrow{AD}_x \cdot \overrightarrow{AB}_y$$

$$A = (-8) \cdot 0 - 3 \cdot (-2) = \underline{\underline{6 LE}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{68}$$

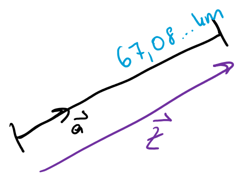
$$|\vec{AD}| = \sqrt{3^2} = 3$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-8 \cdot 3 + -2 \cdot 0}{\sqrt{68} \cdot 3}\right) = \underline{\underline{165,963\ldots^\circ}}$$

Taube:

c) Linz $L(6|4)$ $\vec{OL} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Einheitsvektor $\vec{a_0}$
(Vektor mit Länge 1)



$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = \vec{a_0} \cdot 67,08 = \frac{6,708}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6,708}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2 \cdot 6,708}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

8.28)

1) $A(1|2)$, $B(8|1)$, $C(11|10)$, $D(3|10)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 11-8 \\ 10-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} 3-11 \\ 10-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DA} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

2) zz.: $S \in \overline{BC}$; $S(9|4)$

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 9-8 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BS} \cdot 3 = \overrightarrow{BC}$$

3) $L = |\overrightarrow{MS}|$? $\alpha = \sphericalangle DMS$

M: Mittelpunkt der Strecke AD:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$L = |\overrightarrow{MS}| = \left|\begin{pmatrix} 9-2 \\ 4-6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+4} = \underline{\underline{\sqrt{53}\ LE}} \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{728{,}0\ldots m}}$$

Sü, am 3.5.2021

α: $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MS}| \cdot |\overrightarrow{MD}|} = \frac{7 \cdot 1 + (-2) \cdot 4}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{17}}$$

$\underline{\underline{\alpha = 91{,}909\ldots^\circ}} \approx \underline{92^\circ}$

4) $\overrightarrow{AV} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}}}$

$\underline{\underline{V(8{,}5|8)}}$

5) $\rightarrow$ Buch

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

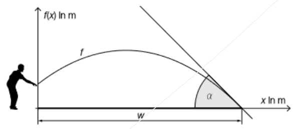
Boule*

Aufgabennummer: B_444

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Boule ist eine Sportart, bei der Kugeln geworfen werden. Ziel ist es, mit den eigenen Kugeln möglichst nah an eine Zielkugel zu gelangen.

a) Peter wirft eine Kugel. Die Flugbahn dieser Kugel kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

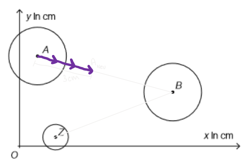
1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,1 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang.
2) Berechnen Sie die Wurfweite w.

Peter möchte, dass der Aufprallwinkel α der Kugel im Intervall [42°; 44°] liegt.

3) Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob der Aufprallwinkel α in diesem Intervall liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für eine genauere Analyse eines Boule-Spiels wird mithilfe einer Drohne ein Luftbild aufgenommen.



$A = (2|10)$ ... Auflagepunkt der ersten Kugel
$B = (17|6)$ ... Auflagepunkt der zweiten Kugel
$Z = (4|1)$ ... Auflagepunkt der Zielkugel

$\vec{BZ} = \begin{pmatrix} 4-17 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -5 \end{pmatrix}$

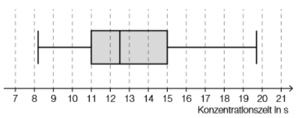
$|\vec{BZ}| = \sqrt{13^2 + 5^2} = 13{,}928...$ cm

1) Berechnen Sie die Länge der Strecke BZ.

Während des Spiels bewegt sich die erste Kugel entlang der Strecke AB 3 cm in Richtung B.

2) Berechnen Sie die Koordinaten der neuen Position des Auflagepunkts der ersten Kugel.

c) Die Zeit, die benötigt wird, um sich vor einem Wurf zu konzentrieren, nennt man Konzentrationszeit.
Im nachstehenden Boxplot sind die Konzentrationszeiten von Emma bei mehreren Würfen zusammengefasst.



1) Lesen Sie aus dem Boxplot den Interquartilsabstand der Konzentrationszeiten von Emma ab.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Abwurfhöhe beträgt 1,1 m.

a2) $f(x) = 0$ *oder* $-0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -1{,}241...)$
$x_2 = 9{,}239...$

Die Wurfweite w beträgt rund 9,24 m.

a3) $\alpha = |\arctan(f'(9{,}239...))| = 45{,}1...°$

Der Aufprallwinkel α liegt also nicht im gegebenen Intervall.

b1) $\overline{BZ} = \sqrt{13^2 + 5^2} = 13{,}92...$

Die Länge der Strecke BZ beträgt rund 13,9 cm.

b2) Ansatz: $A_{neu} = A + 3 \cdot \overrightarrow{AB}_0$ *oder* $\overrightarrow{OA}_{neu} = \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{AB}_0$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$

$\overrightarrow{AB}_0 = \frac{1}{\sqrt{241}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$A_{neu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{241}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}89... \\ 9{,}22... \end{pmatrix}$

Der neue Auflagepunkt der ersten Kugel hat gerundet die Koordinaten (4,9|9,2).

c1) Interquartilsabstand: 4 s

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl 1,1 im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wurfweite w
a3) 1 × D: für die richtige Überprüfung mithilfe der Differenzialrechnung
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der Strecke BZ
b2) 1 × A: für den richtigen Ansatz mithilfe des Einheitsvektors
1 × B2: für die richtige Berechnung der Koordinaten
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen des Interquartilsabstands

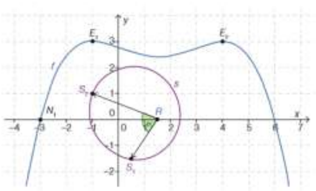
Armageddon

Aufgabennummer: B_295

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zur Programmierung eines Weltraum-Computerspiels werden einige geometrische Überlegungen benötigt.

Die nachstehende Abbildung zeigt die Flugbahn s zweier Patrouillenschiffe S_1 und S_2 um eine Raumstation R. Die Flugbahn eines feindlichen Raumschiffs wird durch den Graphen der Funktion f beschrieben. (In der Abbildung sind die Nullstelle N_1 sowie die Extrempunkte E_1 und E_2 des Funktionsgraphen von f eingezeichnet.)



a) – Erklären Sie, warum die Flugbahn s kein Graph einer Funktion ist.

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion vierten Grades mit $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion f ermittelt werden können.

b) Für die Funktion f gilt:

$f(x) = -\frac{3}{196}x^4 + \frac{9}{98}x^3 - \frac{3}{196}x^2 - \frac{18}{49}x + \frac{135}{49}$

Während des Spielverlaufs schießt das feindliche Raumschiff am Wendepunkt der Funktion f in der Nähe von E_2 einen Laserstrahl tangential in Richtung S_2.

– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Tangente, die den Laserstrahl beschreibt.
– Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Raumschiff S_2 vom Laserstrahl getroffen wird.

SÜ, am 04.05.2021

c) Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat die Raumstation die Koordinaten $R = (1{,}5\,|\,0)$ und das erste Patrouillenschiff die Koordinaten $S_1 = (0{,}5\,|\,y > 0)$.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der fehlenden y-Koordinate des Patrouillenschiffs, wenn der Abstand vom Patrouillenschiff S_1 zur Raumstation R genau d Einheiten beträgt.

$|\overrightarrow{S_1R}| = d = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0-y \end{pmatrix}\right|$ $\sqrt{1^2 + (0-y)^2} = d \quad |^2$

$1 + y^2 = d^2$

$y = \sqrt{d^2 - 1}$

$y =$ $\sqrt{d^2 - 1}$

– Ermitteln Sie den Winkel α, den die beiden Vektoren $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RS_2} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ einschließen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Bei der Flugbahn s handelt es sich um keinen Graphen einer Funktion, weil es x-Werte gibt, denen mehr als ein y-Wert zugeordnet wird.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Nullstelle: $N_1 = (-3|0)$
Extrempunkte: $E_1 = (-1|3)$ $E_2 = (4|3)$

$f(-3) = 0$: I: $81a - 27b + 9c - 3d + e = 0$
$f(-1) = 3$: II: $a - b + c - d + e = 3$
$f'(-1) = 0$: III: $-4a + 3b - 2c + d = 0$
$f(4) = 3$: IV: $256a + 64b + 16c + 4d + e = 3$
$f'(4) = 0$: V: $256a + 48b + 8c + d = 0$

b) Berechnung des Wendepunktes:
$f''(x) = -\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98}$
$-\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98} = 0$
$x_1 = 2{,}943\ldots \approx 2{,}94$
$(x_2 = 0{,}056\ldots)$
$f(2{,}943\ldots) = 2{,}734\ldots$
$W = (2{,}94\,|\,2{,}73)$

Aufstellen der Funktionsgleichung der Tangente:
$y = kx + d$
$k = f'(2{,}943\ldots) = 0{,}36820\ldots$, $d = y - kx = 1{,}65049\ldots$
$y = 0{,}3682x + 1{,}6505$

Einsetzen der Koordinaten von S_2 in die Tangentengleichung:
$1 = 0{,}3682 \cdot (-1) + 1{,}6505$
$1 = 1{,}2822$
Der Laserstrahl trifft nicht das Raumschiff S_2.

c) $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \end{pmatrix}$

$(-1)^2 + y^2 = d^2$

$y = \sqrt{d^2 - 1}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (-1{,}5)^2} \cdot \sqrt{(-2{,}5)^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3{,}25} \cdot \sqrt{7{,}25}}$$

$\alpha \approx 78{,}11°$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2

Thema: Informatik

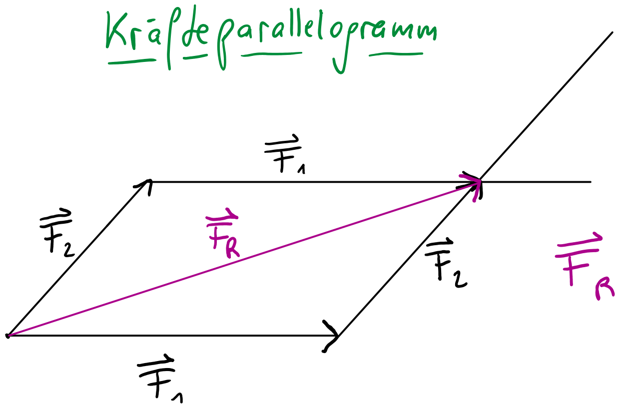
Quellen: —

Anwendungen: Kräfte

Kraft: Vektor, weil

- Angriffspunkt
- Richtung
- Größe / Länge / Betrag

Kräfteparallelogramm



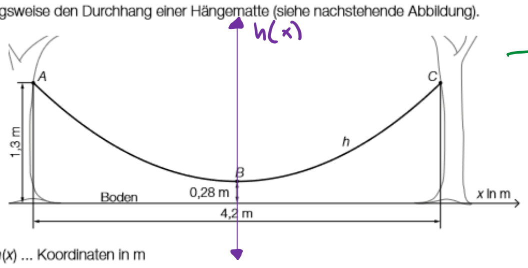
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$$

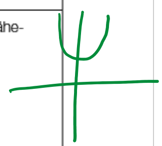
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hängematten*

Aufgabennummer: B_445		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Der Graph der quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschreibt näherungsweise den Durchhang einer Hängematte (siehe nachstehende Abbildung).





x, $h(x)$ ... Koordinaten in m

Der Graph der Funktion h verläuft durch die Befestigungspunkte A und C. Der Scheitelpunkt von h wird mit B bezeichnet. Die Punkte A und C liegen auf gleicher Höhe über dem Boden.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende senkrechte Koordinatenachse so ein, dass für den Koeffizienten b gilt: $b = 0$

2) Berechnen Sie den Koeffizienten a.

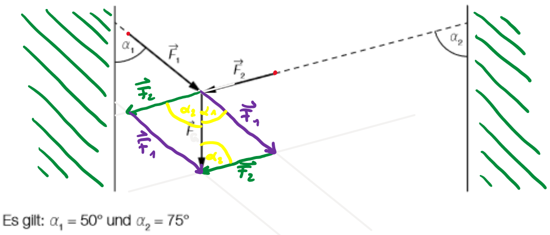
$h(x) = a \cdot x^2 + 0{,}28$ $A(-2{,}1 \mid 1{,}3)$ $C(2{,}1 \mid 1{,}3)$

mit C: $1{,}3 = a \cdot 2{,}1^2 + 0{,}28$

$$a = \frac{1{,}3 - 0{,}28}{2{,}1^2}$$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Hängematte wird an zwei senkrechten Stangen befestigt.
In der nachstehenden Abbildung ist die belastete Hängematte modellhaft dargestellt. Es wirkt eine Kraft $\vec{F}$ mit $|\vec{F}| = 800$ Newton (N) senkrecht nach unten. Die Kraft $\vec{F}$ wird in die Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zerlegt.



Es gilt: $\alpha_1 = 50°$ und $\alpha_2 = 75°$

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Kräftezerlegung mithilfe eines Kräfteparallelogramms. ✓

2) Berechnen Sie $|\vec{F}_1|$.

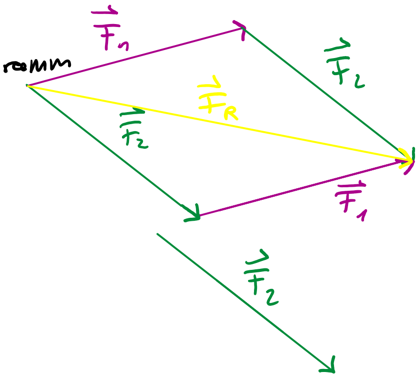
$\alpha_3 = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 = \underline{\underline{55°}}$

$$\frac{\vec{F}_1}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\vec{F}_a}{\sin(\alpha_3)}$$

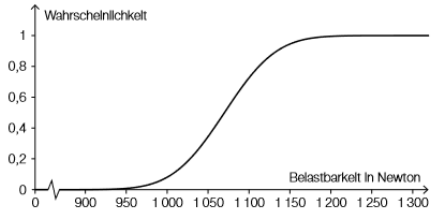
$$\vec{F}_1 = \frac{\vec{F}_a \cdot \sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_3)}$$

$\underline{\underline{\vec{F}_1 = 943{,}342\ldots \text{ N}}}$

Irgendein Kräfteparallelogramm



c) Die Belastbarkeit von Seilen eines bestimmten Herstellers kann näherungsweise als normalverteilt angenommen werden. Das nachstehende Diagramm zeigt den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.



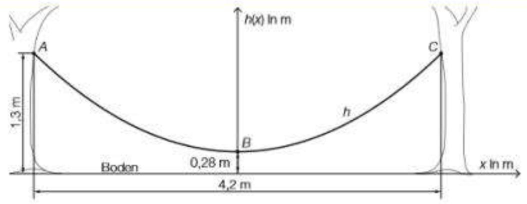
1) Veranschaulichen Sie im obigen Diagramm die Wahrscheinlichkeit, dass die Belastbarkeit eines zufällig ausgewählten Seiles mindestens 1 050 Newton (N) beträgt.

Die Maschine zur Herstellung der Seile soll bei gleichbleibender Standardabweichung $\sigma = 50$ N auf einen neuen Erwartungswert μ_{neu} eingestellt werden, sodass nur bei 1 Promille der Seile die Belastbarkeit weniger als 1 000 N beträgt.

2) Berechnen Sie, auf welchen Erwartungswert μ_{neu} die Maschine eingestellt werden muss.

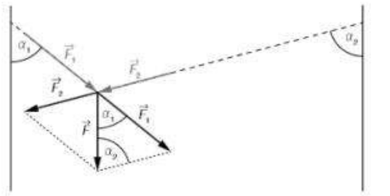
Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $h(2{,}1) = 1{,}3$ *oder* $a \cdot 2{,}1^2 + 0{,}28 = 1{,}3 \Rightarrow a = 0{,}23129...$

b1)

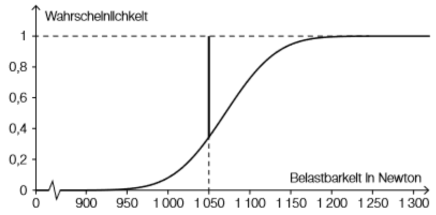


b2) $\dfrac{|\vec{F}|}{\sin(180° - \alpha_1 - \alpha_2)} = \dfrac{|\vec{F_1}|}{\sin(\alpha_2)}$

$|\vec{F_1}| = \dfrac{800 \cdot \sin(75°)}{\sin(55°)} = 943{,}3...$

$|\vec{F_1}|$ beträgt rund 943 Newton.

c1)



c2) X ... Belastbarkeit in N

$P(X < 1000) = 0{,}001$

Berechnung von μ_{neu} mittels Technologieeinsatz:
$\mu_{neu} = 1\,154{,}51... \text{ N} \approx 1\,154{,}5 \text{ N}$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der senkrechten Koordinatenachse
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a
b1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Kräftezerlegung mithilfe eines Kräfteparallelogramms
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung von $|\vec{F_1}|$
c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit im Diagramm
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts μ_{neu}

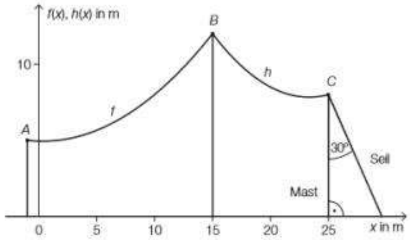
Sü, am 10.05.2021

Stromversorgung einer Baustelle*

Aufgabennummer: B_308

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Stromleitung zur Versorgung einer Baustelle soll, wie in der nachstehenden Skizze dargestellt, durch die 3 Punkte A, B und C führen. Die zwischen den einzelnen Masten liegenden Teile der Stromleitung können näherungsweise durch Graphen von Polynomfunktionen 2. Grades durch die Punkte A und B bzw. B und C beschrieben werden. Alle Längen sind in Metern angegeben.



a) Der erste Teil der Leitung verläuft zwischen den Punkten $A = (-1|5)$ und $B = (15|12)$.

Eine Gleichung der Tangente im Punkt A an den Graphen der Polynomfunktion f lautet:

$y = 4{,}913 - 0{,}0875 \cdot x$

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion 2. Grades auf.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Zwischen den Punkten B und C kann die Stromleitung durch den Graphen der folgenden Funktion h beschrieben werden:

$h(x) = \frac{3}{50} \cdot x^2 - \frac{14}{5} \cdot x + \frac{81}{2}$ mit $15 \leq x \leq 25$

Die Stromleitung soll in diesem Bereich in einer Höhe von mindestens 7 m verlaufen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Bedingung erfüllt ist.
– Berechnen Sie die Länge desjenigen Seils, das vom Punkt C zum Boden gespannt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Wie in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Skizze dargestellt, ist im Punkt C ein Seil unter einem Winkel von 30° zum Mast gespannt.
Auf der anderen Seite wirkt durch die Stromleitung auf den Befestigungspunkt C eine Kraft $\vec{F}$ von 1 000 Newton unter einem Winkel von 11,3° zur Waagrechten. Diese Kraft kann in zwei Kräfte aufgeteilt werden, eine in Seilrichtung und eine in Mastrichtung.

$\alpha = 11{,}3°$

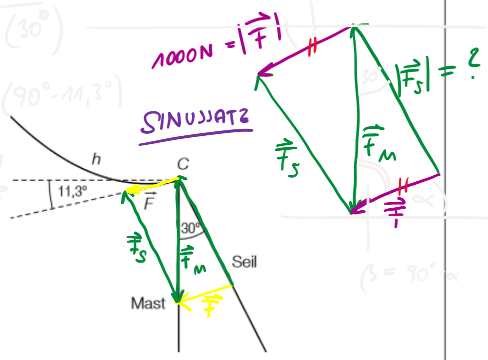
$$\frac{|\vec{F}_S|}{\sin(\beta)} = \frac{|\vec{F}|}{\sin(30°)}$$

$1000\,N = |\vec{F}|$ $\qquad |\vec{F}_S| = ?$

SINUSSATZ

$$|\vec{F}_S| = \frac{1000\,N}{\sin(30°)} \cdot \sin(90° - 11{,}3°)$$

$$|\vec{F}_S| = 1961{,}23\,N$$



$\beta = 90° - \alpha$

– Berechnen Sie den Betrag derjenigen Kraft, die in Seilrichtung wirkt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten:
Punkt A: $5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$
Punkt B: $12 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c$
Tangentensteigung im Punkt A: $-0{,}0875 = 2 \cdot a \cdot (-1) + b$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{21}{640} \approx 0{,}0328$

$b = -\frac{7}{320} \approx -0{,}0219$

$c = \frac{633}{128} \approx 4{,}95$

b) Berechnen des lokalen Minimums von h:

$h'(x) = \frac{3}{25} \cdot x - \frac{14}{5}$

$0 = \frac{3}{25} \cdot x - \frac{14}{5} \Rightarrow x_{\text{min}} = \frac{70}{3}$ (nach oben offene Parabel)

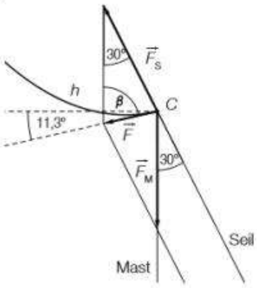
$h(x_{\text{min}}) = \frac{47}{6} \approx 7{,}83\ldots$

Die minimale Höhe ist größer als 7 m, damit ist die Bedingung erfüllt.

s ... Länge des Seils in m
$h(25) = 8$

$\cos(30°) = \frac{8}{s}$
$s = 9{,}237\ldots \text{ m} \approx 9{,}24 \text{ m}$

c) $\beta = 90° - 11{,}3° = 78{,}7°$



$|\vec{F}_S| = \dfrac{1000 \cdot \sin(78{,}7°)}{\sin(30°)} = 1961{,}2\ldots$

$|\vec{F}_S| \approx 1961$ N

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B*
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung unter Berücksichtigung der Tangentensteigung
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

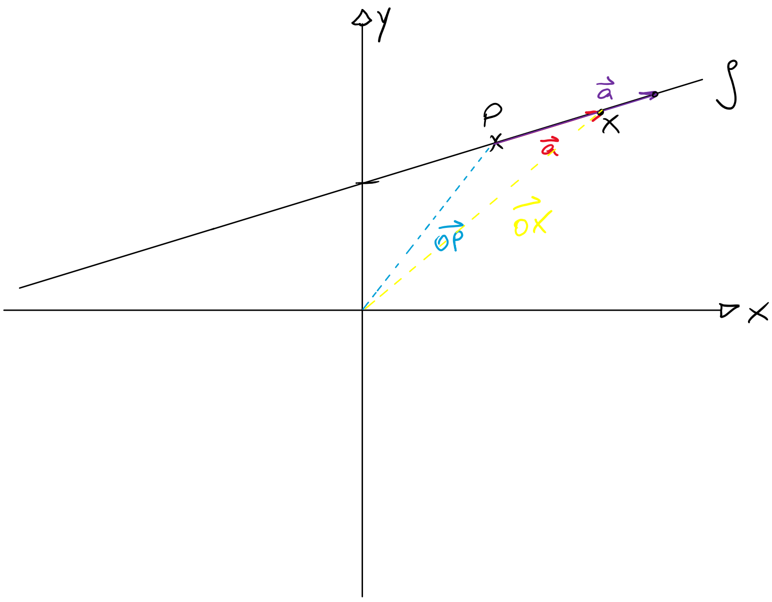
b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
1 × B: für die richtige Berechnung der Länge des Seils

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Zerlegung der Kraft in die beiden Richtungen Mast und Seil (Kraftdreieck oder Kräfteparallelogramm)
1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags der Kraft, die in Seilrichtung wirkt

Gerade: $f(x) = k \cdot x + d$ ..... lineare Funktion

mithilfe von Vektoren

- Möglichkeit 1:



Die Lage der Geraden ist eindeutig festgelegt durch

- einen Punkt (Ortsvektor)
- Richtungsvektor

$g: \vec{OX} = \vec{OP} + t \cdot \vec{a}$ .... Parameterdarstellung

Parameter $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

.... $x = x_P + t \cdot a_x$
.... $y = y_P + t \cdot a_y$

Zusammenhang Param.d. mit lin. Fkt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}; \quad k = \frac{a_y}{a_x}$$

Bsp.: g durch A(2|6); B(10|8)

Gerade ?

Lin. Fkt: $y = k \cdot x + d$

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-6}{10-2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

mit A: $d = y - k \cdot x$

$d = 6 - \frac{1}{4} \cdot 2$

$d = 5{,}5$

$g: \; y = \frac{1}{4} \cdot x + 5{,}5$

<u>Parameterdarst.:</u>

$\vec{OX} = \underbrace{\vec{OP}}_{\in g} + t \cdot \vec{a}$

darf man „kürzen", weil Richtungsv.

$\vec{a} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 10-2 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{:4}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ → $k = \frac{1}{4}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{g: \; \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

• Möglichkeit 2:

Normalvektordarstellung

$g: \; \vec{n} \cdot \vec{OX} = \vec{n} \cdot \vec{OP}$

$\vec{n}$: Normalvektor der Geraden

$\vec{OP}$: Ortsvektor $\in g$

Man benötigt: · Normalvektor von g
· Punkt $\in g$

Bsp von oben: A, B

$\vec{a} = AB = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$g: \; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{\text{irgenein Punkt X} \\ (x|y)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{bekannter Punkt} \\ (A \text{ oder } B)}}$

$g: \; x - 4y = 2 - 24$

$\underline{\underline{g: \; x - 4y = -22}}$ .... Normalvektordarst.

$y = \frac{1}{4} \cdot x + 5{,}5 \quad | \cdot 4$

$4y = x + 22 \quad | -22 \; -4y$

$x - 4y = -22$ .... implizite Darstellung einer lin. Fkt (allg. Form)

SÜ, am 11.05.2021

Bsp.: $g: \; \vec{OX} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{P(2|-1)} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ... Parameterdarstellung

↳ Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Steigung $k = -5$

g in Normalvektorform:

$g: \; \vec{n} \cdot \vec{OX} = \vec{n} \cdot \vec{OP}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

g in Normalvektorform:

$g: \vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ +1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$5x + y = 10 - 1$$

$$g: \quad 5x + y = 9$$

$$y = -5x + 9$$

<u>Bsp 2.:</u> $\quad g: \quad 2x + 3y = 5$

ges.: $h \parallel g$ durch $P(2|-1)$

$$h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{a}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$