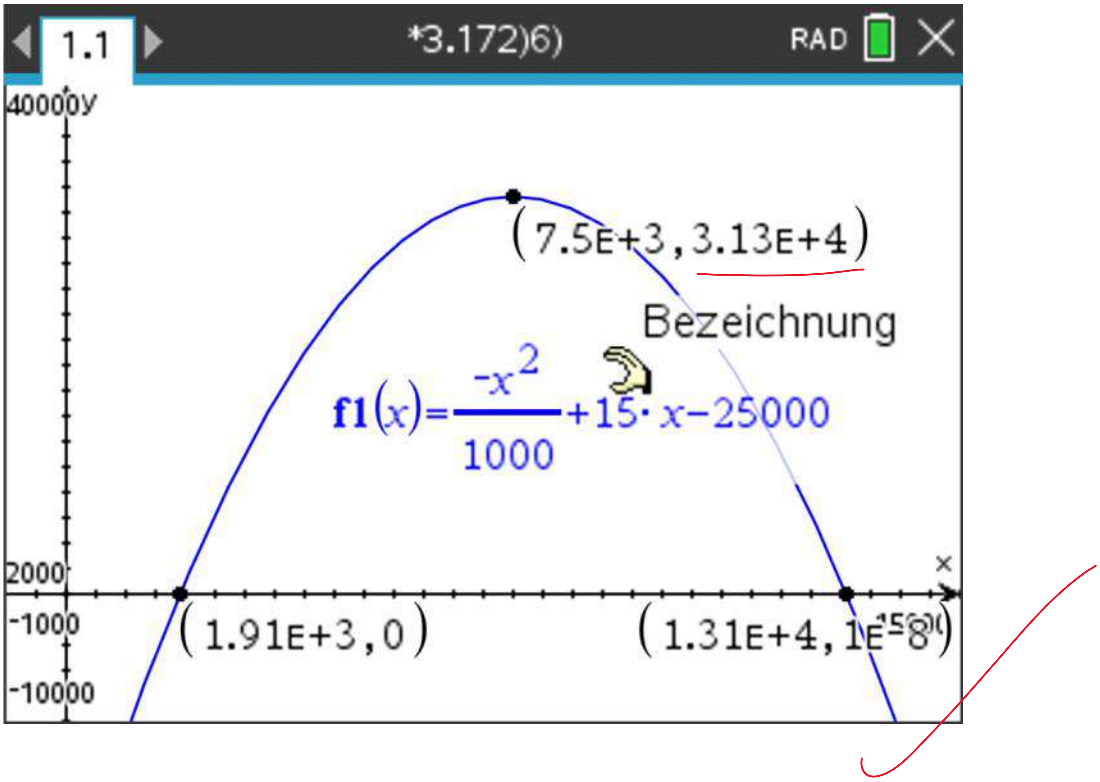

1.1
*3.172)6)
RAD
40000 y
(7.5E+3, 3.13E+4)
Bezeichnung
f1(x)=-x^2/1000+15·x-25000
2000
-1000
-10000
x
(1.91E+3, 0)
(1.31E+4, 1E-8)

3.114) x …. äußere Länge in m

$x-10$ …. äußere Breite in m
(40 − 30 = 10 und das muss bleiben!)

$$5 \cdot 40 \cdot 30 = x \cdot (x-10) - 40 \cdot 30 \quad | + 1200$$

$$x^2 - 10x = 7200 \quad | - 7200$$

$$x^2 - 10x - 7200 = 0$$

g.L.: $$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-7200)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{28900}}{2}$$

$$x_1 = \frac{10 + 170}{2} = \underline{\underline{90}} \qquad \left(x_2 = \frac{10-170}{2} = -80\right)$$

$$x = 90 \longrightarrow x - 10 = 80$$

A: Die Rasenaußenseiten müssen 90 m und 80 m lang sein.

3.114) $\overset{40}{x}$ ... äuß. L. in m

↳ $\underset{30}{\frac{3}{4}x}$ ... ä. B. in m

$\overset{A}{5 \cdot 30 \cdot 40} = x \cdot \frac{3}{4}x \overset{A}{-} 30 \cdot 40 \quad |+1200$

$6000 = \frac{3}{4}x^2 \quad | : \frac{3}{4} \rightarrow \cdot 4 : 3$

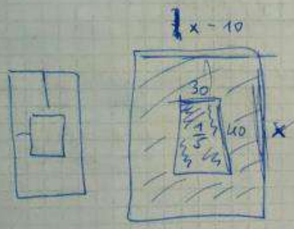
$7200 = \frac{3}{4}x^2$

$401 \cdot 3 = 120 : 4 = 30$

24000
↳ 8000

$7200 \cdot 4$
28800

$\frac{3}{4}x^2 - 30 \cdot 40 = 5 \cdot 30 \cdot 40$



$30 \cdot 40 = 1200$
fünf mal → · 5
$6000 m^2 - 1200$
↓
$4800 m^2$

$\frac{3}{4}x^2 = 4800 \quad | \cdot 4 : 3$

$x^2 = 6400$

$x = 80$

$7200 m^2$

$\frac{3}{4}x^2 = 7200 \quad | \cdot 4 : 3$

$x^2 = 9600 \quad | \sqrt{}$

$x = 97,97$

~~40 · 120~~ $= x \cdot 7200$

$x = 2400$

$(x - 10) \cdot x = 7200$

$x^2 - 10x = 7200 \quad | -7200$

Dies sind meine Nebenrechnungen ...

Das auch....

$a = 1$
$b = -10$
$c = \cancel{0} -7200$

g.L.: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 0}}{2}$

$x_{1} = \dfrac{10 + 10\cancel{0}}{2} = 55$

$x_2 = \dfrac{10 - 100}{2} = \underline{-45}$

$x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 4(-7200)}}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{28900}}{2}$

$x_1 = \dfrac{10 + 170}{2} = \underline{\underline{90}}$

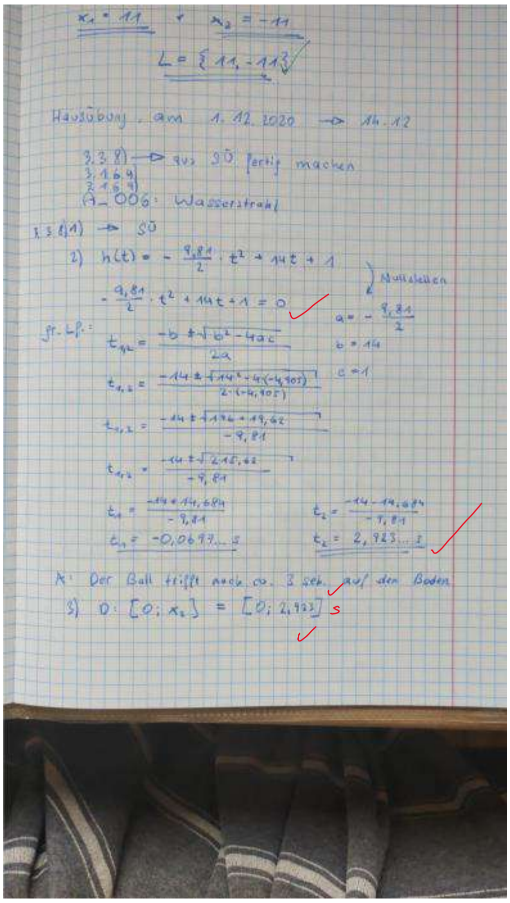
$\cancel{x_2 = 10 - 170}$

$\underline{\underline{x - 10 = 80}}$

18.12. fs

12. HÜ, am 01.12.2020

Mittwoch, 2. Dezember 2020 13:21



$\underline{\underline{x_1 = 11}}$ ∨ $\underline{\underline{x_2 = -11}}$

$\underline{\underline{L = \{11, -11\}}}$

Hausübung, am 1.12.2020 → 14.12

3.3.8) → aus SÜ fertig machen
3.1.6.4)
3.1.6.9)
A_006: Wasserstrahl

3.3.8)1) → SÜ

2) $h(t) = -\frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 14t + 1$

$-\frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 14t + 1 = 0$ } Nullstellen

$a = -\frac{9{,}81}{2}$, $b = 14$, $c = 1$

gr. Lf.:

$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$t_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-4{,}905)}}{2 \cdot (-4{,}905)}$

$t_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 19{,}62}}{-9{,}81}$

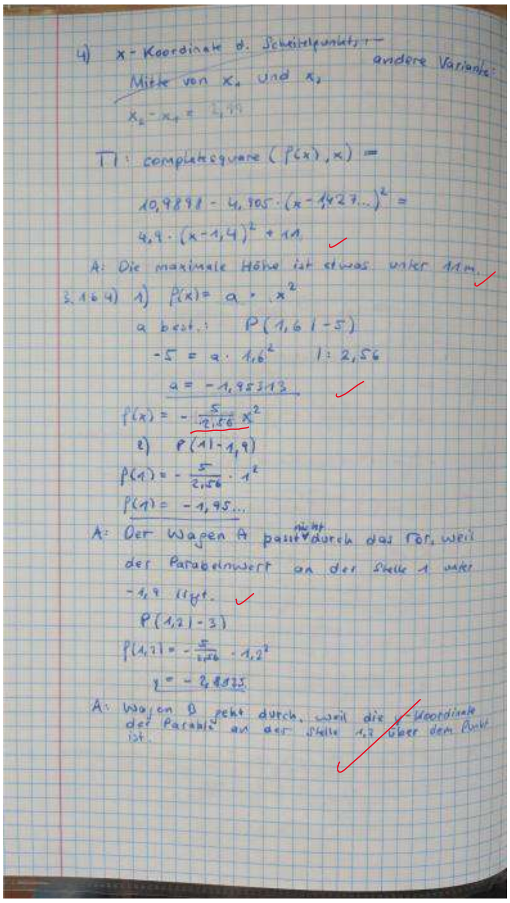
$t_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{215{,}62}}{-9{,}81}$

$t_1 = \frac{-14 + 14{,}684}{-9{,}81}$ $t_2 = \frac{-14 - 14{,}684}{-9{,}81}$

$\underline{t_1 = -0{,}0697... \, s}$ $\underline{\underline{t_2 = 2{,}923... \, s}}$

A: Der Ball trifft nach ca. 3 sek. auf den Boden

3) $D: [0; x_2] = [0; 2{,}923]$ s



4) x-Koordinate d. Scheitelpunkts: andere Variante:
Mitte von x_1 und x_2
$x_2 - x_1 = 2{,}99$

TI: completesquare (f(x), x) =

$10{,}9898 - 4{,}905 \cdot (x - 1{,}427...)^2 =$

$4{,}9 \cdot (x - 1{,}4)^2 + 11$

A: Die maximale Höhe ist etwas unter 11 m.

3.1.6.4) 1) $f(x) = a \cdot x^2$

a best.: $P(1{,}6 \mid -5)$

$-5 = a \cdot 1{,}6^2 \quad | : 2{,}56$

$\underline{a = -1{,}95313}$

$f(x) = -\frac{5}{2{,}56} x^2$

2) $P(1 \mid -1{,}9)$

$f(1) = -\frac{5}{2{,}56} \cdot 1^2$

$\underline{f(1) = -1{,}95...}$

A: Der Wagen A passt nicht durch das Tor, weil der Parabelnwert an der Stelle 1 unter $-1{,}9$ liegt.

$P(1{,}2 \mid -3)$

$f(1{,}2) = -\frac{5}{2{,}56} \cdot 1{,}2^2$

$\underline{y = -2{,}8125}$

A: Wagen B geht durch, weil die y-Koordinate der Parabel an der Stelle 1,2 über dem Punkt ist.

Die Weste, die immer am unteren Rand des Bildes zu sehen ist, hängt über meinem Sessel…
(Ist natürlich kein Teil der Mathe Hausübung)

3.169) 1) $h(t) = -5 \cdot t^2 + 12t + 7{,}25$

Zeichnung → TI

Der Graph beschreibt nicht die Flugbahn, weil keine Bewegungen im horizontalen Bereich gegeben sind.

2) $h(0{,}5) = 12\,m$

$h(1{,}5) = 14\,m$

$h(2) = 11{,}25\,m$

3) $h(t) = -5 \cdot t^2 + 12t + 7{,}25 =$

$= -5 \cdot (t^2 - 2{,}4t - 1{,}45) =$

$= -5\left[(t - 1{,}2)^2 - 2{,}89\right] =$

$= \underline{-5 \cdot (t - 1{,}2)^2 + 14{,}45}$

A: Es dauert 1,2s bis der Ball 14,45m erreicht.

4) A: Der Ball wird von 7,25m in die Höhe geworfen.

$7{,}25 = -5 \cdot t^2 + 12t + 7{,}25 \quad | -7{,}25$

$-5 \cdot t^2 + 12t = 0$

gr. L.f.: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$t_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0}}{2 \cdot (-5)} =$

$= \frac{-12 \pm \sqrt{144}}{-10}$

$\underline{t_1 = 0} \qquad \underline{t_2 = 2{,}4}$

A: Wenn der Scheitelpunkt bei 1,2s ist, muss der zweite Punkt bei 2,4s sein.

5) Nie. bei 2,9s trifft der Ball auf den Boden auf.

Wasserstrahl)

a) $0 = -0{,}15x^2 + 0{,}9x + 0{,}6$

$a = -0{,}15$
$b = 0{,}9$
$c = 0{,}6$

gr. L.f.: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-0{,}9 \pm \sqrt{0{,}9^2 - 4 \cdot (-0{,}15) \cdot 0{,}6}}{2 \cdot (-0{,}15)}$

$x_1 = -0{,}605551\ldots m$ V $\qquad \underline{x_2 = 6{,}605\ldots m}$

A: Das Wasser trifft nach ca. 6,5 m auf den Boden auf, wenn der Schlauch höher liegt, trifft das Wasser weiter weg auf, weil es mehr Zeit hat, weiter weg zu landen.

b) $S(3|2{,}5) \qquad P(0|1)$

$h(x) = a \cdot (x - 3)^2 + 2{,}5$

$1 = a \cdot (1 - 3)^2 + 2{,}5 \quad | -2{,}5$

$-1{,}5 = a \cdot 4 \quad | : 4$

$\underline{a = -\frac{1{,}5}{4}} = \underline{-\frac{15}{40}}$

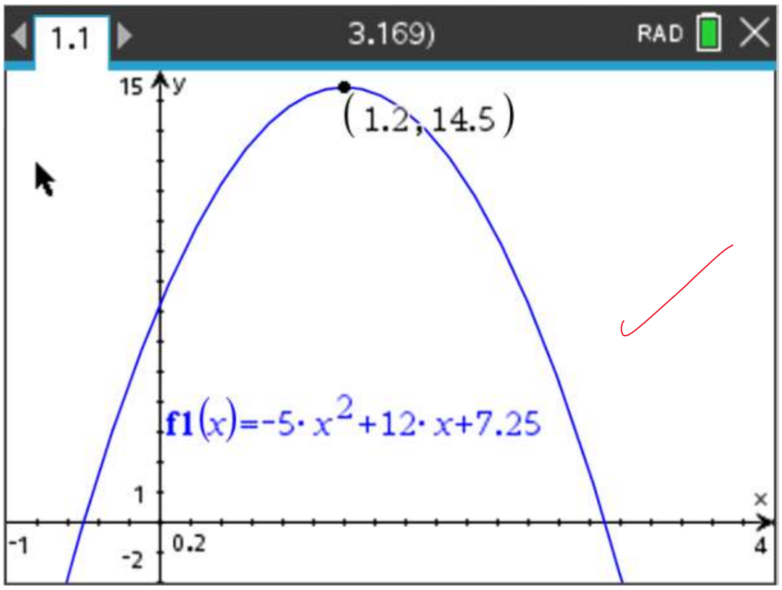
$\underline{h(x) = -\frac{15}{40} \cdot (x - 3)^2 + 2{,}5}$

c) blau: $S(2{,}3|2{,}4)$ max. Reich.: 4,6m max Höhe: 2,4m

rot: $S(3|1{,}5)$ max. Reich.: 6m; max Höhe: 1,5m

grün: $S(2{,}2|0{,}5)$ max. Reich.: 4,4m; max Höhe: 0,5m

A: Die beste Reichweite erreicht man bei 45°, darunterliegende Austrittwinkel und darüberliegende Austrittwinkel haben weniger Reichweite, weil entweder nicht genug Höhe und folgedessen auch Weite oder zu viel Höhe und folgedessen zu wenig Weite (eindeutig grün) erreicht wird.



02.12.2020 13:59 - Bildschirmausschnitt

6.12.2020 f

Dies ist der Graph aus 3.169)1) und der Scheitelpunkt auf dem Graphen aus 3.169)3)

11. HÜ, am 24.11.2020

Mittwoch, 25. November 2020 20:05

Fast hätte ich schon wieder vergessen, die HÜ hochzuladen ;)
Entschuldigung wegen letzten Dienstag...

3, 91
Forts.

$$x^2 - 121 = 0$$

$$x^2 = 121 \quad | :\sqrt{}$$

$$x = \sqrt{121}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 11}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = -11}}$$

$$\underline{\underline{L = \{11, -11\}}}$$

Schon ok :)

d) $5v^2 + 29v + 20 = 0$ $\quad a = 5$, $b = 29$, $c = 20$

$$v_{1,2} = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20}}{2 \cdot 5}$$

$$v_{1,2} = \frac{-29 \pm \sqrt{841 - 400}}{10}$$

$$v_{1,2} = \frac{-29 \pm 21}{10}$$

$\underline{\underline{x_1 = 0{,}8}}$ ✓ $\quad \underline{\underline{x_2 = 5}}$ ✓

3.91a) $\frac{4}{x^2-25} - \frac{x+5}{x-5} = \frac{x-5}{x+5} - 3 \quad | \cdot HN$

Nenner	Faktor	EF
x^2-25	$(x-5)(x+5)$	—
$x-5$	$(x-5)$	$(x+5)$
$x+5$	$(x+5)$	$(x-5)$
HN	$(x-5)(x+5)$	

$\underline{\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}}}$ ✓

$4 - (x+5)(x+5) = (x-5)^2 - 3(x-5)(x+5)$

$4 - (x^2 + 10x + 25) = x^2 - 10x + 25 - 3x^2 + 75$

$-2x^2 + 20x + 4 = 0 \quad | : (-2)$

$x^2 - 20x - 4 = 0$

$p = -20$
$q = -4$

$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{(-10)^2 + 4}$

$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 + 4}$

$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{98}$

$x_{1,2} = 10 \pm$

$4 - x^2 \cancel{-10x} - 25 = x^2 \cancel{-10x} + 25 - 3x^2 + 75$

$-x^2$ ...

3.70) a) $n^2 + 11n + 24 = 0$ $\qquad p = 11$, $q = 24$

$n_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 24} =$

$= -5,5 \pm \sqrt{30,25 - 24} =$

$= -5,5 \pm \sqrt{6,25} =$

$= -5,5 \pm 2,5$

$x_1 = -5,5 + 2,5$ ∨ $x_2 = -5,5 - 2,5$

$x_1 = 3$ $\qquad x_2 = -8$

$L = \{3, -8\}$ $\quad -3$

b) $3p^2 - 8p - 3 = 0$ $\qquad a = 3$, $b = -8$, $c = -3$

$p_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3}$

$p_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6}$

$p_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{6}$

$x_1 = 3$ ∨ $x_2 = -\frac{1}{3}$

$L = \{3, -\frac{1}{3}\}$

c) $h^2 - 10h + 25 = 0$ $\qquad p = -10$, $q = 25$

$h_{1,2} = 5 \pm \underbrace{\sqrt{25 - 25}}_{0}$

$h = 5$

3.9 1) a)

3.30) 1) $f(x) = x^2 \cdot a$

a best.:

$f(1,5) = -4$

$-4 = 1,5^2 \cdot a$

$a = \frac{-4}{1,5^2} = -\frac{16}{9}$

$f(x) = -\frac{16}{9} x^2$

✓ 26.11.

26.11.

10. HÜ, am 17.11.2020

Dienstag, 24. November 2020 10:45

I: $\frac{1}{2} = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$

II: $\frac{3}{2} = a + b + c$

III: $8 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

I: $\frac{1}{2} = a + (-b) + c$

II: $\frac{3}{2} = a + b + c$ → $b = \frac{1}{2}$

III: $8 = 4a + 2b + c$ ⊖

$-6{,}5 = -3a - \frac{1}{2} + 0 \quad | + \frac{1}{2}$

$-6 = -3a \quad | : (-3)$

$a = 2$

$a = 2,\ b = \frac{1}{2}$ in II: $\frac{3}{2} = 2 + \frac{1}{2} + c \quad | - 2\frac{1}{2}$

$c = -1$

I ∩ II:

3.24)b) $P(-1 | \frac{1}{2})$; $Q(1 | \frac{3}{2})$; $R(2 | 8)$

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

a, b, c ... Unbekannte

$P(-1|\frac{1}{2})$: $f(-1) = \frac{1}{2} = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$

$Q(1|\frac{3}{2})$: $f(1) = \frac{3}{2} = a + b + c$

$R(2|8)$: $f(2) = 8 = 2^2 a + 2b + c$

$f(x) = 2 \cdot x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ ✓

10. Hausübung, am 17.11.2020

↳ 24.11

3.17) a)
3.15) a) b) ohne TI
3.21) a)
3.22) a)
3.24) b)

→ Onenote hochladen

Schüler besprechen HÜ

3.17) a) A: $f(x) = -(x+2)^2 + 5$

B: $f(x) = 0{,}5 \cdot (x+2)^2 - 4$

C: $f(x) = -5 \cdot (x-2)^2 + 2$

D: $f(x) = 8 \cdot (x-4)^2 - 2$

3.15) a) $f(x) = 2x^2 + 20x - 4 =$

$= 2 \cdot [(x + \cancel{10}\,5)^2 - 27] =$

$= \underline{\underline{2 \cdot (x+5)^2 - 54}}$ $\quad S(-5|-54)$

b) $v(t) = t^2 + 6t - 2 =$

$= \underline{\underline{(t+3)^2 - 11}}$ $\quad S(-3|-11)$

3.21) a) $P(3|27) \quad S(0|0)$

$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s = a \cdot x^2$

a bestimmen:

$f(3) = 27 = a \cdot 3^2 \quad |:9$

$\underline{\underline{a = 3}}$

$\underline{\underline{f(x) = 3 \cdot x^2}}$

3.22) a) $S(1|2) \quad P(0|0)$

$f(x) = a \cdot (x-1)^2 + 2$

a bestimmen:

$f(0) = 0 = a \cdot (0-1)^2 + 2$

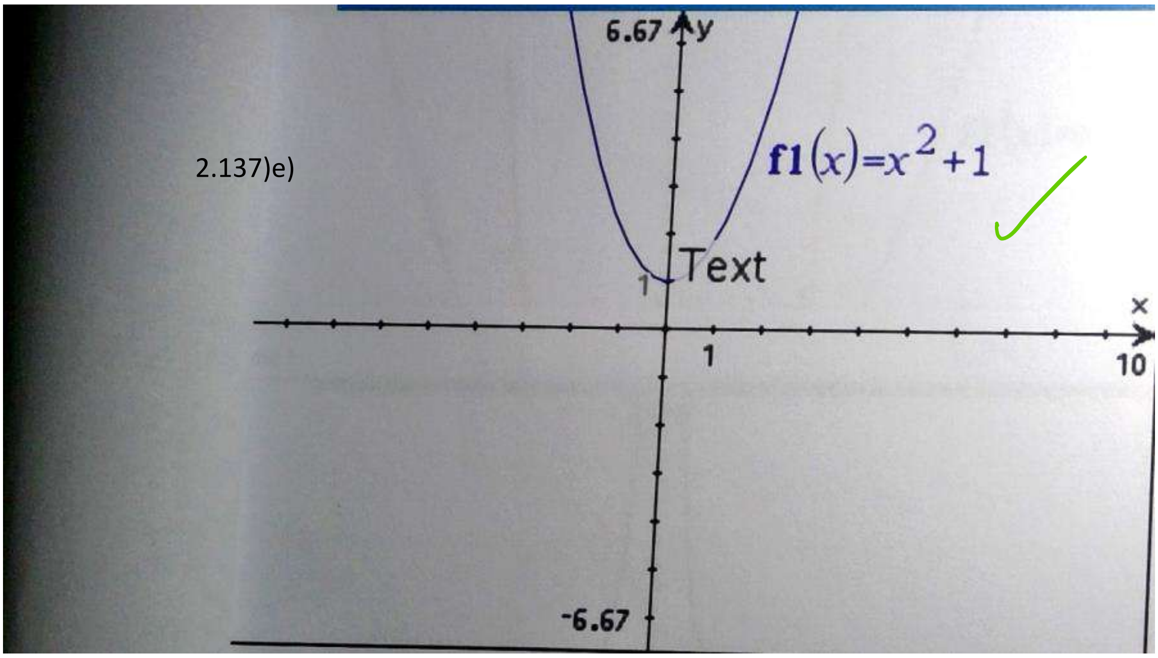
$\underline{\underline{-2 = a}}$

$f(x) = \cancel{a} -2(x-1)^2 + 2$

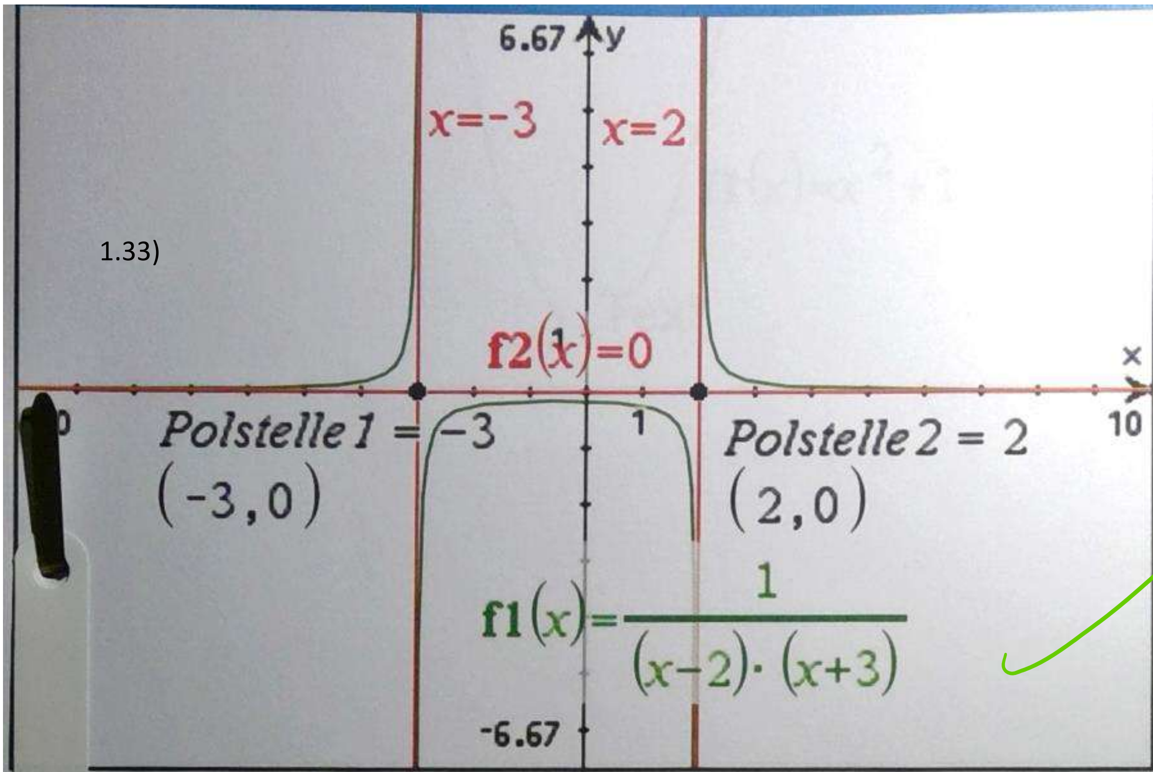
9. HÜ, am 10.11.2020

Dienstag, 10. November 2020 14:38

2.137)e)



1.33)



nktion zeichen

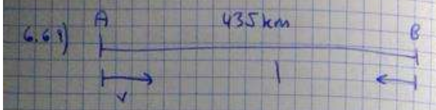
ymptoten als Relation/Funktion
zeichnen

Polstellen mithilfe der
Schnittpunkt/Intersection – Funktion
einzeichnen

schöne Beschriftungen hinzufügen

Fertig

6.6 1)



$s_1 = v_1 \cdot t_1$

$s = s_1 + s_2$

$\mathrm{I}: 435 = 2{,}8v + 2{,}8v$

$\mathrm{II}: 435 = 2\frac{48}{60}v + 2\frac{14}{60}(v+16)$

$5{,}6v = 2\frac{48}{60}v + 2\frac{14}{60}(v+16) \quad | \cdot 60$

$336v = 168v + 134(v+16)$

$336v = 168v + 134v + 2144 \quad | -336v \quad | -2144$

$-2144 = -34v \quad | : (-34)$

$\underline{\underline{v = 63{,}058\ldots}}$

$63 \cdot 2{,}8 = \underline{\underline{176{,}57\,km}}$ Entfernung

v=63 in I

A: Der 1. PKW fährt mit rund 63 km/h und der 2. mit 79 km/h

1.2 8) f) 1) A: Diese Funktion ist nicht symmetrisch

2) Nein

3) $H_1(1|1)$ $H_2(3|1)$ $T_1(2|0)$

4) $N_1(0{,}6|0)$ $N_2(3{,}\dot{3}|0)$

5) str. m. f.: $]1;2[$; $]3;\infty[$

str. m. ab.: $]-\infty;1[$; $]2;3[$

1.3 3) → TI

2.12.8) a) $\frac{3b}{\sqrt[5]{27b^4}} = \frac{3b}{\sqrt[5]{27b^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{27^4 b^{16}}}{\sqrt[5]{27^4 b^{16}}} =$

$= \cancel{\frac{\sqrt[5]{\ldots}}{27b^4}} = \frac{3b \cdot \sqrt[5]{27^4 b^{16}}}{27b^4} = \frac{\sqrt[5]{27^4 b^{16}}}{9b^3} =$

$= \frac{b^3 \cdot \sqrt[5]{27^4 b}}{9\cancel{b^3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt[5]{27^4 b}}{9}}}$ $= \neq$

2.13.3) a) $y_1 = (x-3)^2 + 1$

$y_2 = -(x+3)^2 + 5$

$y_3 = x^2 + 2$

b) $y_1 = -(x-4)^{-2}$

$y_2 = (x+2)^{-2} + 2$

$y_3 = x^{-2} - 2$

2.1.3 7) c) → TI

Hausübung am 10.11.2020 → 16.11 (18 Uhr)

1. Klasse-Buch:

6.57)
6.69)

2. Klasse-Buch:

1.28) f)
1.33)
2.128) a)
2.133)
2.137) e)

6.57)

$\text{I}: \quad 70 = 2a + 2b$

$\text{II}: \quad \cancel{96 = (a+3)(b+2)}$

$\text{II}: \quad ab + 96 = (a+3)(b+2) \quad | -ab$

$\text{II}: \quad 96 = \cancel{ab} + 3b + 2a + 6 \cancel{-ab} \quad | -6$

$\text{II}: \quad 90 = 2a + 3b$

$-$

$-20 = \cancel{0} - b \quad | :(-1)$

$\underline{\underline{b = 20\text{ cm}}}$

$b = 20$ in I: $70 = 2a + 2 \cdot 20 \quad | -40$

$30 = 2a \quad | :2$

$\underline{\underline{a = 15\text{ cm}}}$

A: Die kürzere Seite ist 15 cm, die längere 20 cm.

16.11.2020

8. HÜ, am 03.11.2020

Hausübung, am 3.11 → 9.11 18 Uhr

2.69)
2.70)
2.72)
2.51)

2.69) a) blau: $y_2 = x^5 + 2$

rot: $y_1 = -(x+4)^2 + 5$

b) blau: $y_2 = x^{-2} + 1$

rot: $y_1 = (x-2)^{-3} + 2$

2.70) a) A: $y_1 = 2x^2$

B: $f(x) = x^2$

C: $f(x)_2 = \frac{1}{3}x^2$

D: $y_3 = -x^2$

E: $f(x) = -3x^2$

b) A: $f(x)_1 = 4x^3$

B: $y = x^3$

C: $f(x)_2 = 0{,}5x^3$

D: $y = -2x^3$

E: $y = -x^3$

2.72) 1) h... Höhe d. Glases

r... Radius d. Grundfläche d. Glases

$h(r) = \frac{0.5}{\pi r^2}$

2) Dies ist ein Graph, nur im 1. Quadranten, (ähnlich einer Parabel, nicht linear.)

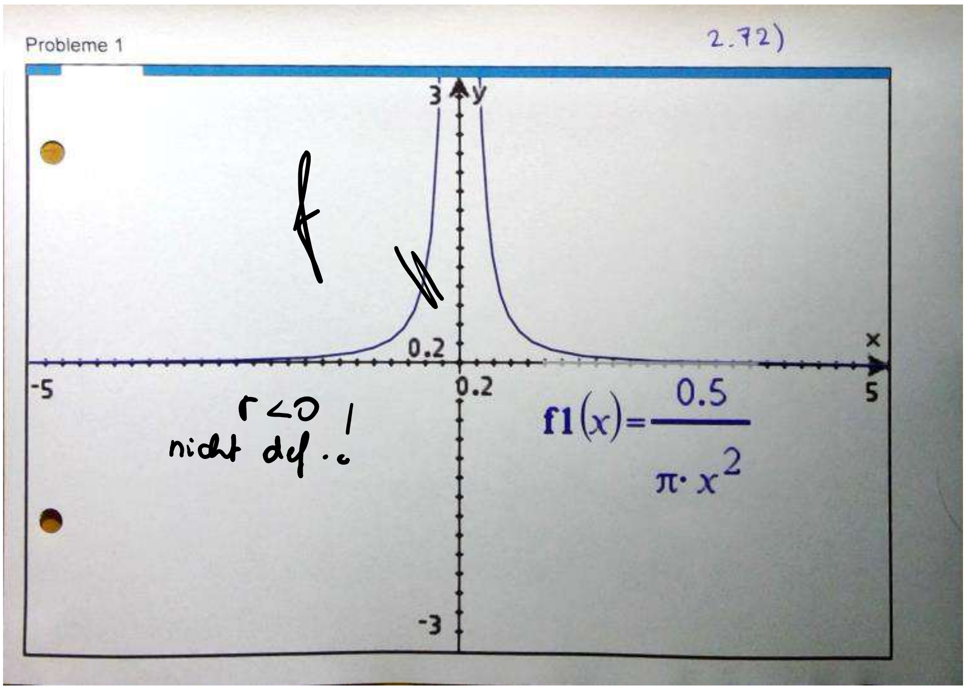
Hyperbel 2. Ordnung

3) $D = \mathbb{R}^+$ ... theoretisch

4) $h = \frac{0{,}5}{\pi 5^2} = 0{,}0063...$ $\approx$ ~~0,0064 cm~~ Df

$h = \frac{0{,}5\,\boxed{dm^3}}{\pi \cdot 5\,\boxed{cm^2}}$

Einheiten passen bei dir nicht zusammen



2.51) a) $\frac{1}{c^2} \cdot \sqrt[3]{c^2} = c^{-2} \cdot \sqrt[3]{c^2} = \sqrt[3]{c^{-6} \cdot c^2} = \sqrt[3]{c^{-4}} =$

$= c^{-1} \cdot \sqrt[3]{c^{-1}}$

2.51) a) $\frac{1}{c^2} \cdot \sqrt[3]{c^1} = c^{-2} \cdot \sqrt[3]{c^2} = \sqrt[3]{c^{-6} \cdot c^1} = \underline{\underline{\sqrt[3]{c^{-4}}}} =$

$= \underline{\underline{c^{-1} \cdot \sqrt[3]{c^{-1}}}}$ ✓

b) $\frac{w}{v^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{vw}} = v^{-3} w \cdot \sqrt{v^{-1} w^{-1}} =$

$\underline{\underline{\sqrt{v^{-7} w}}} = \underline{\underline{v^{-3} \cdot \sqrt{v^{-1} w}}}$ ✓

c) $\frac{m^2}{n} \cdot \sqrt[3]{n \cdot \frac{1}{m^4}} = m^2 n^{-1} \cdot \sqrt[3]{n \cdot m^{-2}} =$

$\sqrt[3]{m^4 n^{-2}} = \underline{\underline{m \sqrt[3]{m n^{-2}}}}$ ✓

d) $a \cdot \sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3}} = a \cdot \sqrt[5]{a^2 b^{-3}} = \underline{\underline{\sqrt[5]{a^7 b^{-3}}}}$ ✓

e) $\frac{2b^2}{p} \cdot \sqrt{\frac{p}{4b}} = 2b^2 p^{-1} \cdot \sqrt{p \cdot 4^{-1} b^{-1}} =$

$= \underline{\underline{\sqrt{\cancel{2} b^3 p^{-1}}}}$ f

f) $\frac{s^2}{r^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{s} \cdot r^3} = s^2 r^{-3} \cdot \sqrt[4]{s^{-1} r^3} =$

$= \underline{\underline{\sqrt[4]{s^7 r^{-9}}}}$ ✓

f: 2.72 4), 2.51e) 8.11.2020

7. HÜ, am 06.10.2020

Montag, 12. Oktober 2020 12:23

Hausübung, am 6.10.20 → 13.10.20

1.9)
1.11) b)
1.13) b)
1.17) 1)

↳ Ausdrucken

1.9) 1) steigend 2) $]-2;3[$ 3) $y=1$ 4) $y=0$
5) ein Fixpunkt 6) ein Höchepunkt

1.11)b) gerade Funktion; nein; $N(-3)$; $N(3)$;
$T_1(-2|-2)$ $H_1(0|-1)$ $T_2(2|-2)$;
$]\infty;-2[$ str.m.f.
$]-2;0[$ str.m.st.
$]0;2[$ str.m.f.
$]2;\infty[$ str.m.st.

SMÜ 12.05.2021

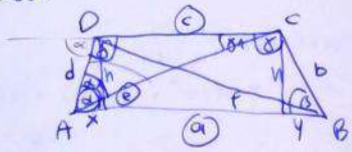
Montag, 17. Mai 2021 10:35

Name: Felix Schneider 7/7 27.04.21 2AHIT

Von einem Trapez sind die Längen der Seiten a = 87mm, c = 32mm und die Diagonale e = 54mm sowie der Winkel $\alpha = 50°$ gegeben.

Berechnen Sie die Winkel β, δ, γ und die Längen der Seiten b, d und der Diagonale f.

Skitte:



δ: $180° - \alpha = \underline{130°}$

α_1: $\dfrac{\sin(\alpha_1)}{c} = \dfrac{\sin(\delta)}{e}$

$\alpha_1 = \arcsin\left(\dfrac{c \cdot \sin(\delta)}{e}\right)$

$\alpha_1 = \underline{26{,}997\ldots°}$

$\left(\alpha_1' = 180° - \alpha_1 = 153{,}003\ldots° > 50°\right)$ ein Teil eines Winkels kann ja nicht größer als der Winkel selbst sein!

γ_1: $180° - \alpha_1 - \delta = \underline{23{,}003\ldots°}$

d: $\dfrac{d}{\sin(\gamma_1)} = \dfrac{e}{\sin(\delta)}$

$d = \dfrac{\sin(\gamma_1) \cdot e}{\sin(\delta)} = \dfrac{\sin(23{,}003\ldots) \cdot 54}{\sin(130°)}$

$d = \underline{27{,}546\ldots}\ mm$

f: $f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\alpha)}$

$f = \underline{72{,}435\ldots\ mm}$

h: $\cancel{\sqrt{\quad}}$ $\sin(\alpha) = \dfrac{h}{d} \rightarrow h = d \cdot \sin(\alpha)$

$h = \underline{21{,}101\ldots\ mm}$

x: $\sqrt{d^2 - h^2} = \underline{17{,}706\ldots\ mm}$

$y = a - x - c = \underline{\underline{37{,}293\ldots\,mm}}$

$b = \sqrt{y^2 + h^2} = \underline{\underline{42{,}849\ldots\,mm}}$

β: $\sin(\beta) = \frac{h}{b}$

$\beta = \arcsin\left(\frac{h}{b}\right) = \arcsin\left(\frac{21{,}101\ldots}{42{,}849\ldots}\right)$

$\underline{\underline{\beta = 29{,}502\ldots^\circ}}$ $\left(\beta' = 180^\circ - 29{,}502 = \underline{\underline{150{,}497\ldots^\circ}}\right)$

kein Trapez!

$\gamma = 180^\circ - \beta = \underline{\underline{150{,}497\ldots^\circ}}$

SA-Stoff

Montag, 22. Februar 2021 10:34

SA - Stoff:

Alle Berechnungen sind auch händisch (ohne spezielle Befehle am TI) durchzuführen!

- Quadratische Gleichungen und Funktionen:
  - Parabel – Eigenschaften und Verschiebungen, Scheitelpunkt bestimmen, aus Funktionsgraph Parabelgleichung (Funktionsgleichung) bestimmen; Scheitelpunktsform
  - rechnerisch Funktion bestimmen (Scheitelpunktsform, drei Punkte),
  - quadratische Gleichungen lösen: kleine und große Lösungsformel, Bruchgleichungen,
  - Nullstellen berechnen
  - Textbeispiele: allgemeine Beispiele, Leistungsaufgaben, Weg-Zeit-Beispiele, geometrische Aufgaben
  - Anwendungen (quadratische Modelle): Parabel und Gerade, physikalische Aufgaben (Wurfparabel), Gewinnfunktion, Erlös, Kosten

- Exponential – und Logarithmusrechnung
  - Exponentialfunktionen: Eigenschaften, Verschiebungen
  - Logarithmus: Definition, Eigenschaften, Rechenregeln anwenden
  - Exponentialgleichungen lösen
  - Modelle: Wachstum, Zerfall, Sättigung, Logistisches Wachstum
  - Logarithmusgleichungen und Modelle

$$f(x) = c \cdot (1 - a^{-x})$$

$$y(t) = \frac{k}{1 + c \cdot a^{t}}$$

SA Übung

Montag, 1. März 2021 10:34

SÜ, am 01.03.2021

SMÜ → 7/7 P.

Verbesserung:

$$\lg(u \cdot v) = \lg(u) + \lg(v)$$

$$\lg\left(\frac{(x-y)^2}{3\cdot(x+y)} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3}{x+y}}\right) =$$

$$= \lg\left((x-y)^2\right) - \lg\left(3(x+y)\right) + \lg\left(\sqrt[5]{x^3}\right) - \lg\left(\sqrt[5]{x+y}\right) =$$

$$= 2\cdot\lg(x-y) - \lg(3) - \lg(x+y) + \frac{1}{5}\cdot\lg(x^3) - \frac{1}{5}\cdot\lg(x+y) =$$

$$= - \quad , \quad , \quad - + \frac{3}{5}\cdot\lg(x) - \frac{1}{5}\cdot\lg(x+y) =$$

$$= 2\cdot\lg(x-y) - \lg(3) - 1\frac{1}{5}\cdot\lg(x+y) + \frac{3}{5}\cdot\lg(x)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\lg(a+b) + 3\cdot\lg(a-b)\right] - \frac{1}{3}\cdot\left[3 - \lg(a) + \lg(b)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\lg\left((a+b)\cdot(a-b)^3\right)\right] - \frac{1}{3}\cdot\left[\lg\left(\frac{1000b}{a}\right)\right] =$$

$$= \lg\left(\sqrt{(a+b)\cdot(a-b)^3}\right) - \lg\left(\sqrt[3]{\frac{1000b}{a}}\right) =$$

$$= \lg\left(\frac{\sqrt{(a+b)\cdot(a-b)^3}}{\sqrt[3]{\frac{1000b}{a}}}\right) =$$

$$= \lg\left(\frac{(a-b)\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt[3]{a}}{10\cdot\sqrt[3]{b}}\right)$$

3.130) $x \cdot (x+1) = 506$

$$x^2 + x = 506 \qquad | -506$$

$$x^2 + x - 506 = 0$$

$a = 1$
$b = 1$
$c = -506$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-506)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2025}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 45}{2}$$

$$x_1 = 22 \qquad (x_2 = -23)$$

A: Es sind 22 Studierende

SA, am 02.03.2021 Di

Freitag, 5. März 2021 18:28

2. Schularbeit

Jede Berechnung ist mit einem nachvollziehbaren Rechenansatz durchzuführen!

Selbst gewählte Variablen sind zu erklären und gegebenenfalls mit Einheiten zu benennen.

Die Verwendung des TI ist zu belegen. (ausdrucken!)

Wird eine Aufgabe mehrfach gerechnet, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen!

1.

a) Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200km. Nach der Sanierung der Gleise kann ein Zug mit einer um 10km/h höheren konstanten Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Berechnen Sie die Fahrzeit t des Zugs vor der Sanierung in Stunden auf eine Nachkommastelle genau.

b) Die Geschwindigkeitsfunktion eines Autos kann mithilfe einer quadratischen Funktion beschrieben werden. Die Geschwindigkeit erreicht nach 25 s ihr Maximum von 15 m/s und nach einer Fahrzeit von 50 s ist sie gleich Null.
Stellen Sie diejenige Funktion auf, die diesen Sachverhalt beschreibt.

2. Die Kosten für die Produktion eines Produkts lassen sich durch die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}05x^2 + 3x + 155$ angeben, wobei $K(x)$ die Kosten in Euro bei einer produzierten Menge x in Stück darstellen. Das Produkt wird zu einem fixen Preis von 9€ pro Stück verkauft.
   1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
   2) **Ohne spezielle Befehle am TI:** Berechnen Sie die Gewinnzone.
   3) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
   4) Stellen Sie die Gewinnfunktion in einem skalierten und beschrifteten Koordinatensystem dar und ermitteln Sie grafisch den maximalen Gewinn.

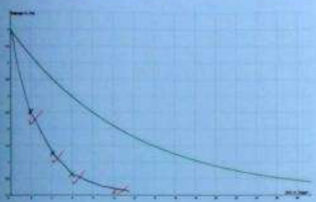
3. Die folgenden Beispiele sind **OHNE spezielle Befehle am TI** zu lösen:
   a) Zerlegen Sie den Term so weit wie möglich: [illegible]
   b) Berechnen Sie die Lösungsmenge: [illegible]

4.

a) Die Anzahl der Seerosen nimmt durch die schlechte Witterung alle zwei Tage um 6% ab. Berechnen Sie den Abnahmefaktor pro Tag auf 4 Nachkommastellen genau.

b) Die Intensität eines Lichtstrahls kann durch die Funktionsgleichung $I(x) = I_0 \cdot e^{[illegible]}$ dargestellt werden, wobei $I(x)$ die Intensität in $\frac{W}{m^2}$ und x die Eindringtiefe in m beschreibt. I_0 ist die Intensität des Lichtstrahls an der Wasseroberfläche.
   1) Der Zusammenhang lässt sich ebenfalls durch die Funktion $I(x) = I_0 \cdot b^x$ darstellen. Geben Sie den Parameter b an.
   2) Berechnen Sie wie viel Prozent von I_0 in einer Eindringtiefe von 1,5m noch vorhanden sind.
   3) **Ohne spezielle Befehle am TI:** Berechnen Sie, in welcher Eindringtiefe 99% der Intensität des Lichtstrahls abgebaut sind (ohne spezielle Befehle am TI).

c) In der nachstehenden Abbildung ist der exponentielle Zerfall eines radioaktiven Materials dargestellt.
Zeichnen Sie in die Abbildung im Intervall [0;10] denjenigen Graphen eines anderen radioaktiven Materials, das nur ein Viertel der Halbwertszeit des radioaktiven Materials hat, das dargestellt ist. Die Menge zu Beginn ist bei beiden Materialien gleich.



5. Eine Tierpopulation in einem bestimmten Gebiet besteht zu Beginn aus 10 Tieren. Drei Jahre später waren es 77 Tiere. Man nimmt an, dass in diesem Gebiet nicht mehr als 1 000 Tiere dieser Art leben können.
Es sei N(t) die Anzahl der Tiere nach t Jahren.
   1) Stellen Sie, unter der Annahme, dass logistisches Wachstum der Form $N(t) = \frac{K}{1+c\cdot e^{-k\cdot t}}$ vorliegt, die Funktionsgleichung für N(t) auf. (TI möglich)
   2) Berechnen Sie, nach wie viel Monaten zum ersten Mal mehr als 800 Tiere in diesem Gebiet leben (ohne spezielle Befehle am TI).

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	7	4
2	8	7
3	8	6
4	6	7
5	3	2
Gesamt	32	26

Note: Gut

Notenschlüssel:

Sehr gut: 32 – 30 Gut: 29 – 26 Befriedigend: 25 – 21 Genügend: 20 – 16 Nicht genügend: 15 – 0

2AHIT 2. Schularbeit 02.03.2021

Falk Schneider

1

1)a)

	s[km]	t[h]	v[km/h]
Vor S.	200	x	$\frac{200}{x}$
Nach	200	x+10	$\frac{200}{x+10} + 0{,}5$

$t = \frac{s}{v}$

$\frac{200}{x} = \frac{200}{x+10} + 0{,}5 \quad | \cdot x \cdot (x+10)$

$200(x+10) = 200x - 0{,}5x(x+10)$

$\cancel{200x} + 2000 = \cancel{200x} - 0{,}5x^2 - 5x \quad | +0{,}5x^2 + 5x$

$0{,}5x^2 + 5x + 2000 = 0$

TI S. ①

x keine Lösung

b) $f(x) = a \cdot (x-25)^2 + 15$

$S(25|15)$ $P(50|0)$

$0 = a \cdot (50-25)^2 + 15$

$0 = a \cdot 625 + 15$ Umformung f

$0 = a \cdot 640 \quad | : 640$

$\cancel{a = 0}$ Df

$f(x) = 0 \cdot \cancel{(x-25)^2} + 15$

Verbesserung

$$\frac{200}{x} = \frac{200}{x+10} + 0{,}5$$

$$200(x+10) = 200x + 0{,}5x(x+10)$$

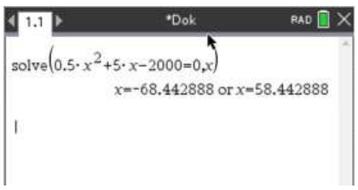
$$\cancel{200x} + 2000 = \cancel{200x} + 0{,}5x^2 + 5x$$

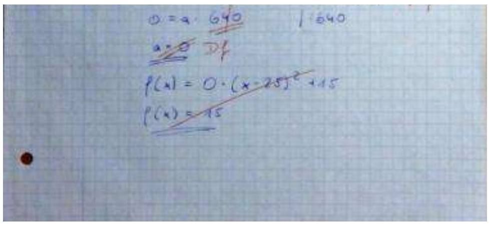
$$0{,}5x^2 + 5x - 2000 = 0$$

TI: solve(…, x)

$x_1 = -68{,}442\ldots$

$x_2 = 58{,}442\ldots \frac{km}{h}$





$0 = a \cdot 640 \quad | :640$

$a = 0$ DF

$f(x) = 0 \cdot (x-25)^2 + 15$

$f(x) = 15$

$x_2 = 58{,}442\ldots \frac{km}{h}$

$t = \frac{200}{x} = 3{,}422\ldots h$

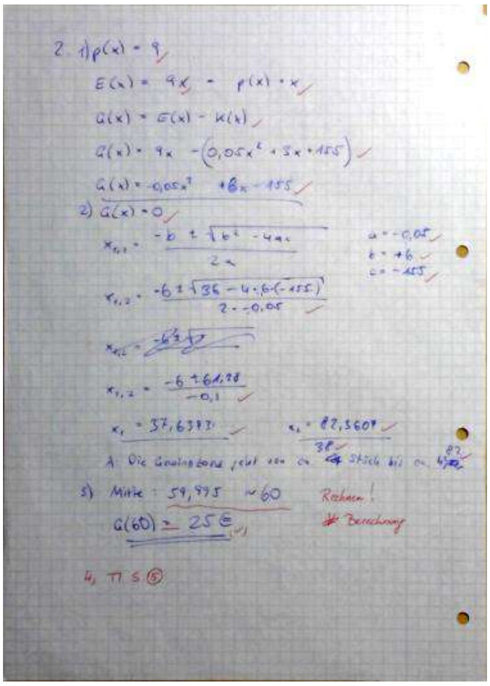
A: Der „alte Zug" fuhr ca. 3,4 h.

$0 = 625a + 15 \quad | -15$

$-15 = 625a \quad | :625$

$a = -\frac{3}{125}$

$f(x) = -\frac{3}{125} \cdot (x-25)^2 + 15$



2\. 1) $p(x) = 9$

$E(x) = 9x = p(x) \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 9x - (0{,}05x^2 + 3x + 155)$

$G(x) = -0{,}05x^2 + 6x - 155$

2) $G(x) = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $a = -0{,}05$ $b = +6$ $c = -155$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 6 \cdot (-155)}}{2 \cdot -0{,}05}$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 61{,}78}{-0{,}1}$

$x_1 = 37{,}6393$ $x_2 = 82{,}3607$

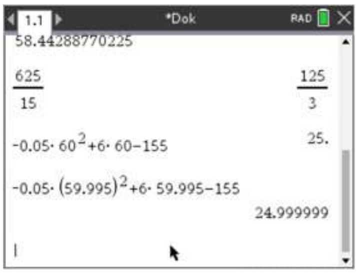
A: Die Gewinnzone geht von ca. 38 Stück bis ca. 82

3) Mitte: 59,995 ≈ 60 Rechnen! # Berechnung

$G(60) = 25$ €

4, TI S. 5

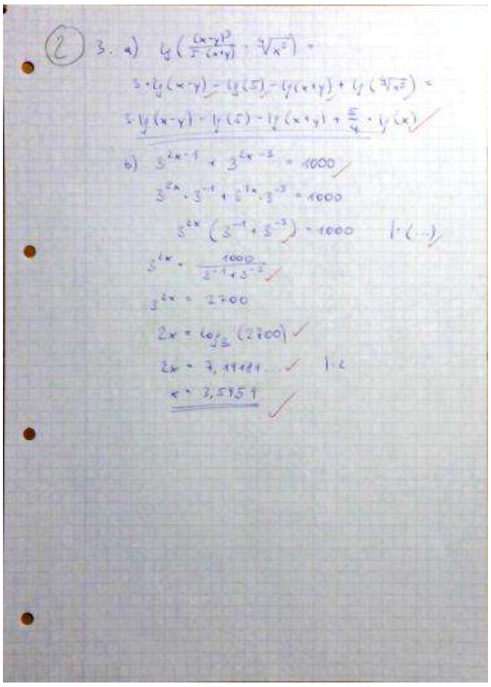
$G(59{,}995) = -0{,}05 \cdot 59{,}995^2 + 6 \cdot 59{,}995 - 155$



$G(59{,}995) = 24{,}\dot{9}$ €

59,995 ist ein gerundeter Wert, da x_1 und x_2 schon nicht genau berechnet sind

→ besser: max. Gewinn aus Scheitelpunktsform ablesen!



② 3. a) $lg\left(\frac{(x-y)^3}{5(x+y)} \cdot \sqrt[4]{x^5}\right) =$

$3 \cdot lg(x-y) - lg(5) - lg(x+y) + lg(\sqrt[4]{x^5}) =$

$3 \cdot lg(x-y) - lg(5) - lg(x+y) + \frac{5}{4} \cdot lg(x)$

b) $3^{2x-1} + 3^{2x-3} = 1000$

$3^{2x} \cdot 3^{-1} + 3^{2x} \cdot 3^{-3} = 1000$

$3^{2x}(3^{-1} + 3^{-3}) = 1000 \quad | :(\ldots)$

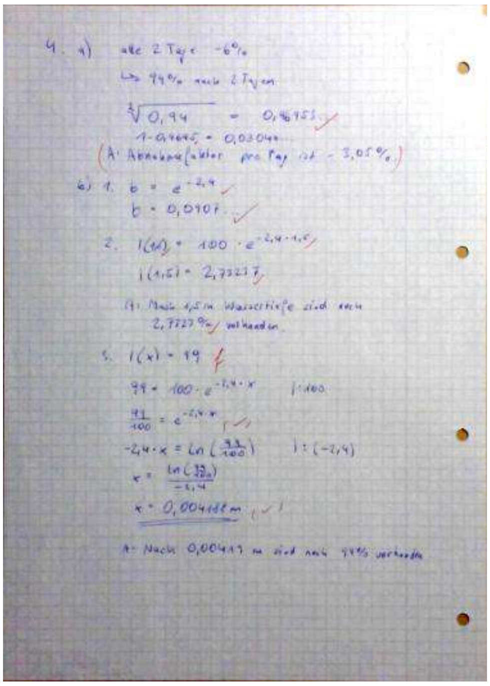
$3^{2x} = \frac{1000}{3^{-1} + 3^{-3}}$

$3^{2x} = 2700$

$2x = \log_3(2700)$

$2x = 7{,}19181\ldots \quad | :2$

$x = 3{,}5959$



4. a) alle 2 Tage -6%

$\hookrightarrow$ 94% nach 2 Tagen

$\sqrt[2]{0{,}94} = 0{,}96953$

$1 - 0{,}96953 = 0{,}03047$

(A: Abnahmefaktor pro Tag ist $-3{,}05\%$.)

b) 1. $b = e^{-2{,}4}$

$b = 0{,}0907$

2. $I(1{,}5) = 100 \cdot e^{-2{,}4 \cdot 1{,}5}$

$I(1{,}5) = 2{,}73237$

A: Nach 1,5 m Wassertiefe sind noch 2,7327 % vorhanden.

3. $I(x) = 99$

$99 = 100 \cdot e^{-2{,}4 \cdot x} \quad | :100$

$\frac{99}{100} = e^{-2{,}4 \cdot x}$

$-2{,}4 \cdot x = \ln\left(\frac{99}{100}\right) \quad | :(-2{,}4)$

$x = \frac{\ln\left(\frac{99}{100}\right)}{-2{,}4}$

$x = 0{,}004188\,m$

A: Nach 0,00419 m sind noch 99% vorhanden

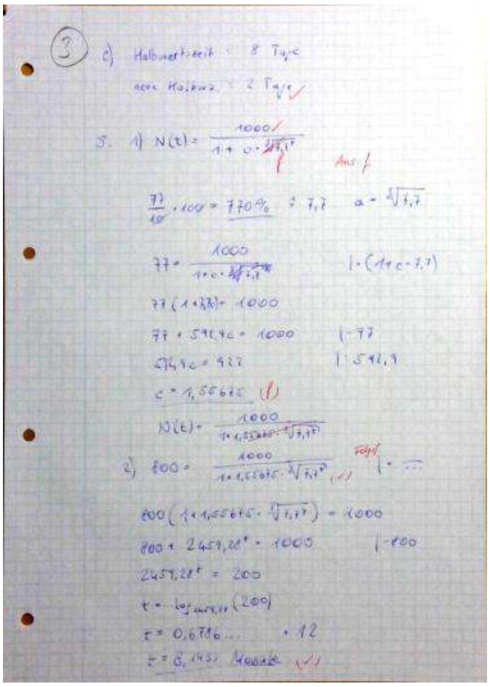
$$I(x) = 1$$

$$1 = 100 \cdot e^{-2{,}4x} \quad \Big| :100$$

$$0{,}01 = e^{-2{,}4x} \quad \Big| \ln()$$

$$\ln(0{,}01) = -2{,}4x$$

$$\underline{x = 1{,}918\ldots\, m}$$



3 c) Halbwertszeit: 8 Tage

neue Halbwz.: 2 Tage

5. 1) $N(t) = \frac{1000}{1 + c \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^t}$

Ans: f

$\frac{77}{10} \cdot 100 = 770\%$ $: 7{,}7$ $a = \sqrt[3]{7{,}7}$

$77 = \frac{1000}{1 + c \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^3} \quad | \cdot (1 + c \cdot 7{,}7)$

$77(1 + 7{,}7c) = 1000$

$77 + 592{,}9c = 1000 \quad | -77$

$592{,}9c = 923 \quad | :592{,}9$

$c = 1{,}55675$ (f)

$N(t) = \frac{1000}{1 + 1{,}55675 \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^t}$

2) $800 = \frac{1000}{1 + 1{,}55675 \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^t}$ Folgef. $| \cdot \ldots$

$800\left(1 + 1{,}55675 \cdot \sqrt[3]{7{,}7}^t\right) = 1000$

$800 + 2459{,}28^t = 1000 \quad | -800$

$2459{,}28^t = 200$

$t = \log_{2459{,}28}(200)$

$t = 0{,}6786\ldots \quad \cdot 12$

$t = 8{,}1451$ Monate

$$N(0) = 10$$

$$N(3) = 77$$

$$K = 1000$$

$$N(t) = \frac{1000}{1 + c \cdot e^{\lambda t}}$$

$$\underline{\mathrm{I}}: \quad 10 = \frac{1000}{1 + c \cdot e^{\lambda \cdot 0}} = \frac{1000}{1 + c} \quad \Big| \cdot (1 + c)$$

$$10 + 10c = 1000 \quad | -10$$

$$10c = 990 \quad | :10$$

$$\underline{\underline{c = 99}}$$

$$\underline{\mathrm{II}}: \quad 77 = \frac{1000}{1 + 99 \cdot e^{\lambda \cdot 3}} \longrightarrow \underline{\lambda = -0{,}7376\ldots}$$

$$N(t) = 800$$

$$800 = \frac{1000}{1 + 99 \cdot e^{-0{,}7376 \cdot t}}$$

$$\underline{t = 8{,}5 \text{ J.} = 102 \text{ Monate}}$$

4

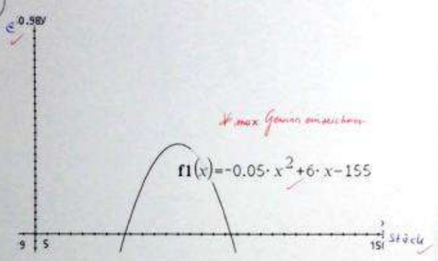
02.03.2021 Felix Schneider 2AHIT

1a

solve$(0.5\cdot x^2+5\cdot x+2000=0,x)$	false
$(-3)^2-4\cdot 8.95\cdot -155$	5558.
$\sqrt{5558.}$	74.552
$2\cdot 8.95$	17.9
$\frac{3+74.551995278463}{17.9}$	4.33251
$\frac{3-74.551995278463}{17.9}$	-3.99732
$\sqrt{36+4\cdot 6\cdot 155}$	$2\cdot \sqrt{939}$
$77\cdot 7.7$	592.9
$1000-77$	923
$\frac{923}{592.9}$	1.55675

5

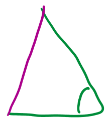
02.03.2021 Felix Schneider 2AHIT



Übung SMÜ

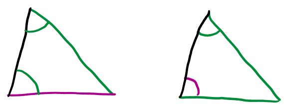
Dienstag, 27. April 2021 18:53

Coss.: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$



$\rightarrow$ SWS

Sins.: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$

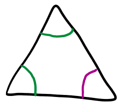


$\rightarrow$ SWW / SSW

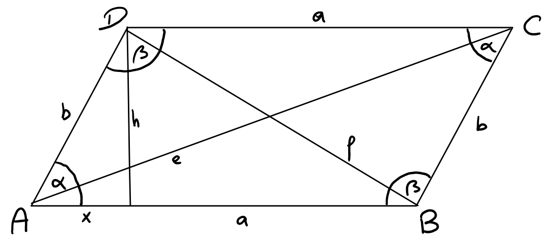
$\downarrow$

falls längere Seite gegenüber Winkel

Winkelsumme:



$\rightarrow$ WSW (+ Sins.)

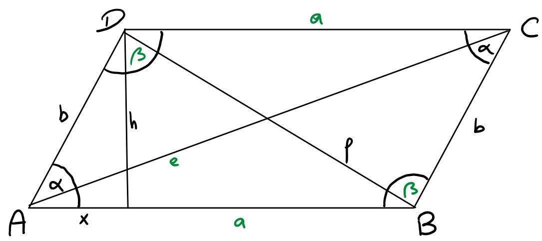


1) geg.: ▱ $a = 3\,cm$

$e = 7\,cm$

$\beta = 100°$

ges.: b✓, α✓, h✓, f✓, x✓, A✓



α: $180° - \beta = 180° - 100° = \underline{\underline{80°}}$

α_1: $\dfrac{\sin(\alpha_1)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{e}$

$\alpha_1 = \arcsin\left(\dfrac{a \cdot \sin(\beta)}{e}\right)$

$\alpha_1 = \arcsin\left(\dfrac{3 \cdot \sin(100°)}{7}\right)$

$\alpha_1 = \underline{\underline{24,964...}}°$

$(\alpha_1' = 155,035...°)$

α_2: $\alpha - \alpha_1 = 80° - 24,964...° = \underline{\underline{55,035...}}°$

b: $\dfrac{b}{\sin(\alpha_2)} = \dfrac{e}{\sin(\beta)}$

$b = \dfrac{e \cdot \sin(\alpha_2)}{\sin(\beta)}$

$b = \dfrac{7 \cdot \sin(55,035...°)}{}$

$$b = \frac{\quad}{\sin(\beta)}$$

$$b = \frac{7 \cdot \sin(55{,}035\ldots^\circ)}{\sin(100^\circ)}$$

$$b = \underline{\underline{5{,}825\ldots\,cm}}$$

A: $A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

$$A = 3 \cdot 5{,}825\ldots \cdot \sin(80)$$

$$A = \underline{\underline{17{,}209\ldots\,cm^2}}$$

h: $A = a \cdot h$

$$h = \frac{A}{a}$$

$$h = \frac{17{,}209\ldots}{3}$$

$$h = \underline{\underline{5{,}736\ldots\,cm}}$$

x: $\cos(\alpha) = \frac{x}{b}$

$$x = b \cdot \cos(\alpha)$$

$$x = 5{,}825\ldots \cdot \cos(80^\circ)$$

$$x = \underline{\underline{1{,}011\ldots\,cm}}$$

f: $f = \sqrt{h^2 + (a-x)^2}$

$$f = \sqrt{5{,}736\ldots^2 + (3 - 1{,}011\ldots)^2}$$

$$f = \underline{\underline{6{,}0714\ldots\,cm}}$$

---

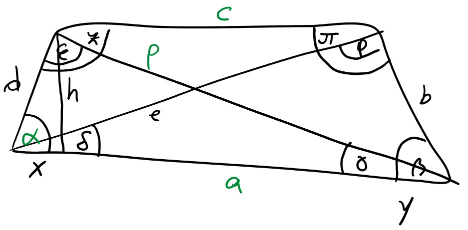
geg: ⏢ $a = 8\,cm$

$c = 2\,cm$

$f = 7\,cm$

$\alpha = 50^\circ$

Skizze:



ges: alles

ε: $$\frac{\sin(\alpha)}{f} = \frac{\sin(\varepsilon)}{a}$$

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\alpha)}{f}\right)$$

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{8 \cdot \sin(50^\circ)}{7}\right)$$

$$\varepsilon = 61{,}101\ldots°$$ (✓)

γ: $180° - \alpha - \varepsilon = \underline{68{,}898\ldots°}$

d: $\dfrac{d}{\sin(\gamma)} = \dfrac{f}{\sin(\alpha)}$

$$d = \frac{\sin(\gamma)\cdot f}{\sin(\alpha)}$$

$$d = \frac{\sin(68{,}898)\cdot 7}{\sin(50)}$$

$$\underline{\underline{d = 8{,}525\ldots\,\text{cm}}}$$ ✓

h: $\sin(\alpha) = \dfrac{h}{d}$

$$h = \sin(\alpha)\cdot d$$

$$h = \sin(50°)\cdot 8{,}525\ldots$$

$$\underline{\underline{h = 6{,}530\ldots\,\text{cm}}}$$ ✓

x: $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{d}$

$$x = \cos(\alpha)\cdot d$$

$$x = \cos(50°)\cdot 8{,}525\ldots$$

$$\underline{\underline{x = 5{,}479\ldots\,\text{cm}}}$$ (✓)

y: $a - c - x = 8 - 2 - 5{,}479\ldots = \underline{\underline{0{,}520\ldots\,\text{cm}}}$ (✓)

b: $b = \sqrt{h^2 + y^2}$

$$b = \sqrt{6{,}530^2 + 0{,}520^2}$$

$$\underline{\underline{b = 6{,}551\ldots\,\text{cm}}}$$ ✓

β: $\dfrac{\sin(\beta)}{h} = \dfrac{\sin(90°)}{b}$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{h\cdot\sin(90°)}{b}\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{6{,}530\ldots\cdot\sin(90°)}{6{,}551\ldots}\right)$$

$$\underline{\underline{\beta = 85{,}445\ldots°}}$$ ✓

π: $180° - \beta = \underline{\underline{94{,}554\ldots°}}$ ✓

$\measuredangle$: $180° - \alpha = \underline{\underline{130°}}$ ✓

A: $A = \dfrac{a+c}{2}\cdot h$

$$A = \frac{8+2}{2}\cdot 6{,}530\ldots$$

A: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

$A = \frac{8+2}{2} \cdot 6{,}530...$

$\underline{\underline{A = 32{,}652...\,cm^2}}$ ✓

e: $e = \sqrt{h^2 + (c+x)^2}$

$e = \sqrt{6{,}530...^2 + (2+5{,}479...^2)}$

$\underline{\underline{e = 9{,}929...\,cm}}$ ✓

δ: $\frac{\sin(\delta)}{h} = \frac{\sin(\beta)}{e}$

$\delta = \arcsin\left(\frac{h \cdot \sin(\beta)}{e}\right)$

$\delta = \arcsin\left(\frac{6{,}530... \cdot \sin(85{,}445...°)}{9{,}929...}\right)$

$\underline{\underline{\delta = 40{,}966...°}}$ (✓)

φ: $180° - \delta - \beta = \underline{\underline{53{,}587...°}}$ (✓)

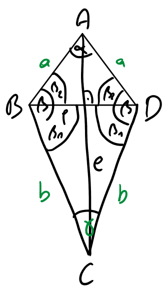
---

geg: ◊ $b = 10cm$

$a = 9{,}5cm$

$\gamma = 25{,}8°$

Skizze:



β_1: $\beta_1 = \frac{180° - \gamma}{2}$

$\beta_1 = \frac{180° - 25{,}8°}{2}$

$\underline{\underline{\beta_1 = 77{,}1°}}$ (✓)

f: $\frac{f}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta_1)}$

$f = \frac{\sin(\gamma) \cdot b}{\sin(\beta_1)}$

$f = \frac{\sin(25{,}8°) \cdot 10}{\sin(77{,}1°)}$

$\underline{\underline{f = 4{,}465...\,cm}}$ ✓

α: $\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\frac{f}{2}} = \frac{\sin(90°)}{a}$

α: $\frac{\alpha}{2} = \arcsin\left(\frac{\frac{f}{2} \cdot \sin(90°)}{a}\right)$

$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\frac{4{,}465...}{2} \cdot \sin(90°)}{9{,}5}\right)$

$\underline{\underline{\alpha = 27{,}183...°}}$ ✓

e: $e = \sqrt{a^2 - (\frac{f}{2})^2} + \sqrt{b^2 - (\frac{f}{2})^2}$

$e = \sqrt{9{,}5^2 - (\frac{4{,}465...}{2})^2} + \sqrt{10^2 - (\frac{4{,}465...}{2})^2}$

e: $e = \sqrt{a^2 - (\frac{f}{2})^2} + \sqrt{b^2 - (\frac{f}{2})^2}$

$e = \sqrt{9{,}5^2 - (\frac{4{,}465...}{2})^2} + \sqrt{10^2 - (\frac{4{,}465...}{2})^2}$

$\underline{\underline{e = 18{,}981... \text{ cm}}}$ ✓

β: $\beta = 90° - (\frac{\alpha}{2}) + 90° - (\frac{\gamma}{2})$

$\beta = 180° - \frac{\alpha + \gamma}{2}$

$\beta = 180° - \frac{27{,}183... + 25{,}8}{2}$

$\underline{\underline{\beta = 153{,}508...°}}$ ✓

A: $A = \frac{e \cdot f}{2}$

$A = \frac{18{,}981... \cdot 4{,}465...}{2}$

$\underline{\underline{A = 42{,}376... \text{ cm}^2}}$ ✓

10. Beschreibende Statistik

Monday, June 14, 2021 11:03 AM

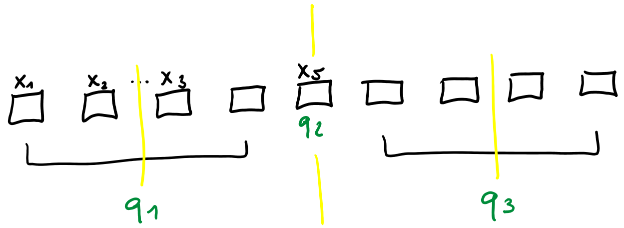
10.09.2021

Fortsetzung: 10.2 Lagemaße

▹ **Quartile:** $q_1; q_2; q_3$

Diese Werte unterteilen die geordnete Liste in 4 gleich große Teile.

q_2: Median



$n = 9$
(ungerade/geordnet)

Die Hälfte der Werte (50%) sind kleiner oder gleich bzw. größer oder gleich als q_2 ($\tilde{x}$).

Ein Viertel der Werte (25%) sind kleiner oder gleich als q_1. 75% sind größer oder gleich als q_3.

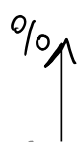
Drei Viertel der Werte (75%) sind kleiner oder gleich als q_3. 25% sind größer oder gleich als q_3.

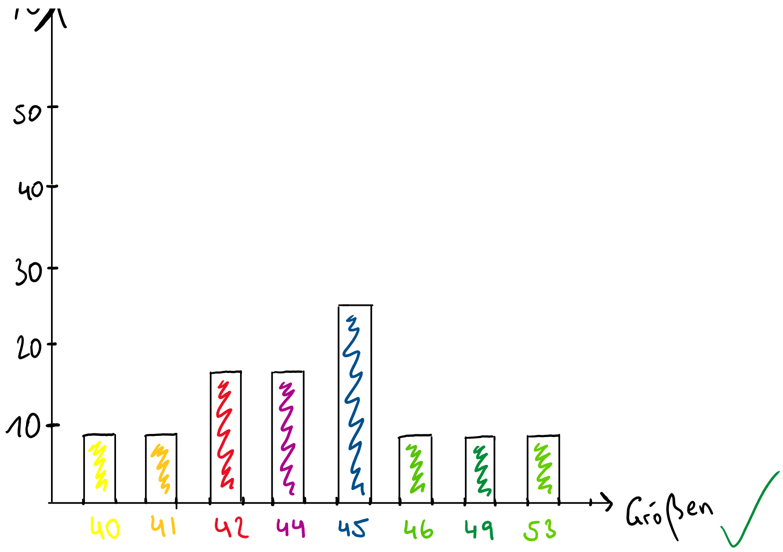
Bsp.: 40, 41, 42, 42, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 49, 53 $\quad n = 12$

$q_1 = 42 \longrightarrow \frac{1}{4}$ d. Werte (also 3) sind ≤ 42

$q_2 = 44{,}5 \longrightarrow \frac{1}{2}$ d. Werte (also 6) sind $\leq 44{,}5$

$q_3 = 45{,}5 \longrightarrow \frac{3}{4}$ d. Werte (also 9) sind $\leq 45{,}5$




50
40
30
20
10
40
41
42
44
45
46
49
53
Größen

10.3 Streuungsmaße

→ Minimum: x_{min}: kleinste Wert einer Liste

→ Maximum: x_{max}: größte Wert einer Liste

→ Spannweite (range): $R = x_{max} - x_{min}$

→ Möchte man mögliche Ausreißer ausschließen, verwendet man besser den Interquartilabstand:

$d = q_3 - q_1$ → enthält somit die Hälfte aller Werte
(25% kleinsten & größten Werte werden nicht berücksichtigt)

→ Varianz, s^2

ist ein Maß dafür, wie sehr die Merkmalswerte x_i um ihr arithmetisches Mittel streuen.

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n \; (-1)}$$

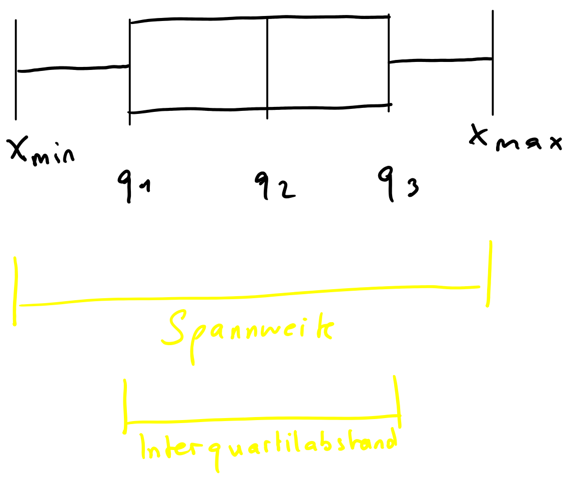
→ Standardabweichung, s

$s = \sqrt{s^2}$ (selbe Einheit wie Messwert)

10.4 Boxplot

Montag, 5. September 2022 13:24

10.4 Der Boxplot (Kastenschaubild)



10.36 Die Anzahl der Sonnenstunden pro Tag in Walterskirchen, NÖ, betrug innerhalb einer Woche 3 h, 14 h, 8 h, 7 h, 15 h, 13 h und 11 h.
Erstelle einen Boxplot mit diesen Daten.

geordnete Liste: 3h, 7h, 8h, 11h, 13h, 14h, 15h

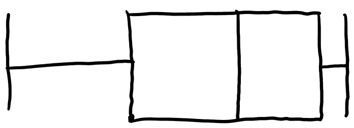
$x_{min} = 3h$

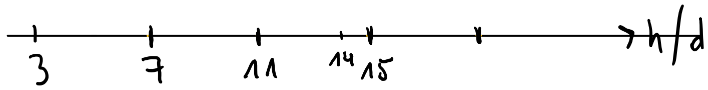
$q_1 = 7h$

$q_2 = 11h$

$q_3 = 14h$

$x_{max} = 15h$





Maturabeispiel Weitsprung

a) $\bar{x} = 3{,}61\,m$

$s = 0{,}7578\ldots\,m$

b) Häufigkeiten:

Sg	||||
g	||||
B	||
G	|
NG	|

Note	Anzahl
1	4
2	4
3	2
4	1
5	1

c) $\tilde{x} = q_2 = 3{,}7$

$q_1 = 3{,}2$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Reinanken

Aufgabennummer: A_029

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Man hat Längenmessungen an einer bestimmten Sorte von Fischen (Reinanken) im Wörthersee durchgeführt und tabellarisch festgehalten. Die Altersklasse von Fischen wurde dabei in Lebens-Sommern („sömmrig") angegeben.

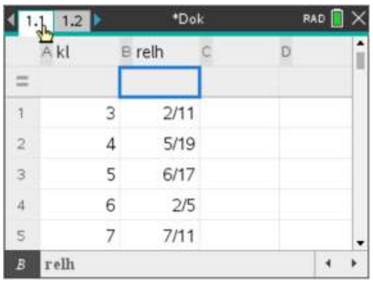
Altersklasse (sömmrig)	männliche Fische	weibliche Fische	mittlere Länge in cm	relH
3	18	4	31,4	4/22
4	28	10	34,7	10/38
5	22	12	38	12/34
6	12	8	40,3	8/20
7	8	14	44	14/22
8	2	10	46,9	10/12

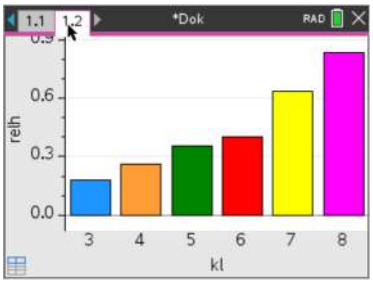
a) – Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten für das Vorkommen weiblicher Fische in den unterschiedlichen Altersklassen bezogen auf die Gesamtzahl der Fische in der jeweiligen Altersklasse.
– Stellen Sie diese relativen Häufigkeiten in einem Säulendiagramm dar.

b) – Berechnen Sie das arithmetische Mittel der mittleren Längen für alle gefangenen Fische und dokumentieren Sie Ihre Vorgehensweise in Worten.

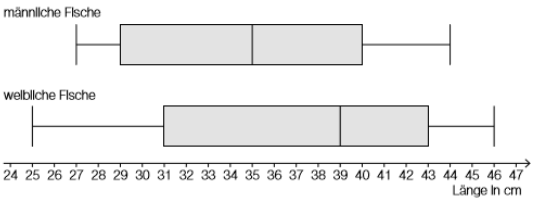
$$\bar{x} = (22 \cdot 31{,}4 + 38 \cdot 34{,}7 + 34 \cdot 38 + 20 \cdot 40{,}3 + 22 \cdot 44 + 12 \cdot 46{,}9) \cdot \frac{1}{148} = 38{,}09\ldots \text{ cm}$$

Man multipliziert die Anzahl der Fische der einzelnen Klassen und addiert dies mit den anderen Produkten, dividiert durch die Gesamtanzahl der Fische





c) Bei einer Untersuchung der Längen von männlichen und weiblichen Fischen wurden die untenstehenden Boxplots erstellt. Es wurden jeweils 120 Fische untersucht.



– Vergleichen Sie die Diagramme der männlichen und der weiblichen Fische bezüglich der Aussage des Parameters *Spannweite*.

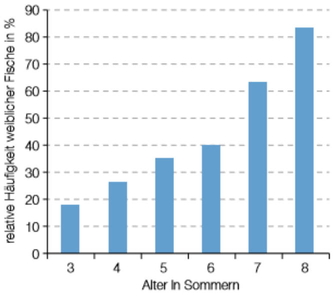
Die Spannweite der weiblichen Fische ist größer als die der männlichen, die weiblichen Fischgrößen sind mehr gestreut als die männlichen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Altersklasse (sömmrig)	relative Häufigkeit weiblicher Fische in Prozent (gerundet)
3	18,2
4	26,3
5	35,3
6	40,0
7	63,6
8	83,3



b) $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot H_i \approx 38{,}1$ cm

Die einzelnen Werte x_i (mittlere Fischlänge in cm) werden mit der absoluten Häufigkeit H_i ihres Auftretens multipliziert und danach addiert. Diese Summe wird dann durch die Gesamtzahl der Werte n dividiert.

Die mittlere Länge aller gefangenen Fische beträgt rund 38,1 cm.

c) Die Spannweite, also die Differenz zwischen dem kleinsten und dem größten Fisch, ist bei den weiblichen Fischen größer. Sie weisen also hinsichtlich der Länge eine größere Streuung auf:
– weibliche Fische: Min.: 25 cm Max.: 46 cm
– männliche Fische: Min.: 27 cm Max.: 44 cm

Die größten, aber auch die kleinsten Fische sind also weiblich.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 2
c) leicht	c) 1

Thema: Biologie

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pizzalieferdienst*

Aufgabennummer: A_264

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Pizzeria liefert Pizzen auf Bestellung aus. Die Kunden sollen möglichst schnell beliefert werden, damit die Pizzen bei der Zustellung noch heiß sind.

a) Für 100 Pizzen wurden die Zustellzeiten erhoben und in 6 Klassen eingeteilt:

Klasse	Zustellzeit in Minuten	Klassenmitte	absolute Häufigkeit
1	[0; 10[	5	4
2	[10; 20[	15	48
3	[20; 30[	25	27
4	[30; 40[	35	11
5	[40; 50[	45	5
6	[50; 60[	55	5

– Geben Sie an, in welcher Klasse der Median der Zustellzeiten liegt. Kl 2

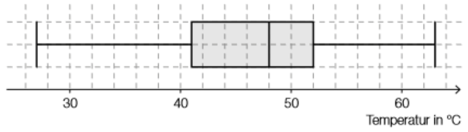
Mithilfe der Klassenmitten können das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die Standardabweichung s der Zustellzeiten näherungsweise berechnet werden.
Es gilt: $\bar{x} = 23$ min

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die zugehörige Standardabweichung s der Zustellzeiten berechnet werden kann.

$\sqrt{\frac{(5-23)+(15-23)+(25-23)+(35-23)+(45-23)+(55-23)}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2+(15-23)^2+(25-23)^2+(35-23)^2+(45-23)^2+(55-23)^2}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2 \cdot 4+(15-23)^2 \cdot 48+(25-23)^2 \cdot 27+(35-23)^2 \cdot 11+(45-23)^2 \cdot 5+(55-23)^2 \cdot 5}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2 \cdot 4+(15-23)^2 \cdot 48+(25-23)^2 \cdot 27+(35-23)^2 \cdot 11+(45-23)^2 \cdot 5+(55-23)^2 \cdot 5}{100}}$	☒
$\sqrt{\frac{(4-23)^2 \cdot 5+(48-23)^2 \cdot 15+(27-23)^2 \cdot 25+(11-23)^2 \cdot 35+(5-23)^2 \cdot 45+(5-23)^2 \cdot 55}{100}}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei einer statistischen Erhebung wurde die Temperatur der gelieferten Pizzen untersucht. Die erhobenen Daten sind im folgenden Boxplot dargestellt:



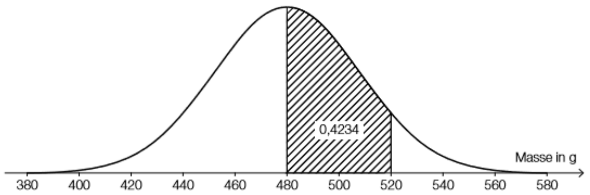
Es wird auf Basis dieses Boxplots behauptet: „Mindestens 80 % der gelieferten Pizzen haben eine Temperatur von über 45 °C.“

– Argumentieren Sie anhand des obigen Boxplots, dass diese Behauptung falsch ist.

Dadurch, dass das 1. Quartil schon kleiner als 45 ist, ist die B. falsch.

c) Die Masse der Pizzen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 480$ g.

In der nachstehenden Darstellung der Dichtefunktion ist diejenige Fläche markiert, die der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Pizza zwischen 480 g und 520 g liegt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza eine Masse von mindestens 520 g hat.
– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Dichtefunktion einer Normalverteilung mit einem Erwartungswert von 520 g und einer kleineren Standardabweichung als jener der gegebenen Dichtefunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

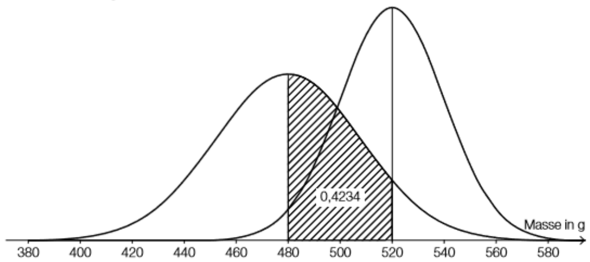
Möglicher Lösungsweg

a) Der Median liegt in der Klasse 2.

$\sqrt{\frac{(5-23)^2 \cdot 4 + (15-23)^2 \cdot 48 + (25-23)^2 \cdot 27 + (35-23)^2 \cdot 11 + (45-23)^2 \cdot 5 + (55-23)^2 \cdot 5}{100}}$	☒

b) Es gilt, dass mindestens 25 % der Werte kleiner oder gleich $q_1 = 41$ °C sind. Daher können nicht mindestens 80 % der gelieferten Pizzen eine Temperatur von über 45 °C haben.

c) Wegen der Symmetrie der Glockenkurve gilt:
$P(X \geq 520) = 0{,}5 - 0{,}4234 = 0{,}0766$
X ... Masse in g



Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für die richtige Angabe derjenigen Klasse, in der der Median liegt
1 × C2: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit
1 × A: für das richtige Skizzieren des Graphen der Dichtefunktion (Maximumstelle bei 520 g, Glockenkurve höher und schmäler als in der gegebenen Darstellung)

11. Folgen und Reihen

Montag, 5. September 2022 13:26

11. FOLGEN UND REIHEN

11.1 Grundlagen

Menge: $\mathbb{N}_g = \{4, 2, 8, 6\}$

FOLGE: $\langle 2, 4, 6, 8 \rangle$ $\qquad a_1 = 2$ ... erste Folgenglied

↳ geordnete Anordnung von Zahlen

a_n ... „a-nte Folgenglied"

a_{n+1} ... Nachfolger

n.... Index

$a_n = n \cdot 2$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$ $\quad$ → 1. Index = 0 → Differenzengleichung

Darstellungsmöglichkeiten

→ explizite Darstellung / Termdarstellung / erzeugender Term

$a_n = n \cdot 2$

$a_{100} = 200$

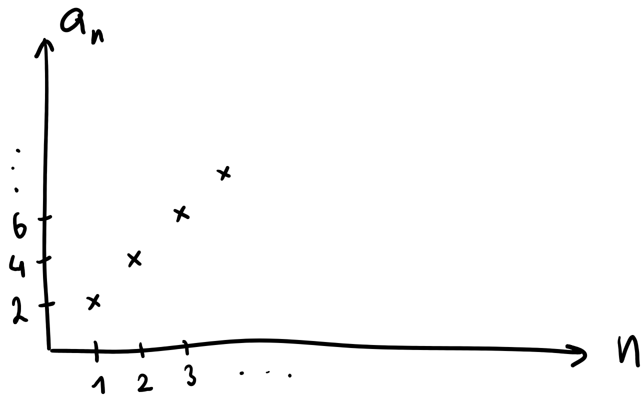
→ rekursive Darstellung / zurücklaufende Darstellung

→ rekursive Darstellung / zurücklaufende Darstellung

$a_{n+1} = a_n + 2 \;;\; a_1 = 2$

$a_{100} = a_{99} + 2$

→ grafische Darstellung



$a_n = \langle 2, 4, 6, 8 \ldots \rangle$

$n \in \mathbb{N}$

11.2 Spezielle Folgen

→ arithmetische Folge

Es gilt: 2 benachbarte Folgenglieder unterscheiden sich um eine konstante Differenz d.

z.B.: $a_n = \langle \overset{a_1}{3}, \overset{a_2}{7}, \overset{a_3}{11}, \overset{a_4}{15}, \overset{a_5}{19} \dots \rangle$

$2\cdot(+4)$ $4\cdot(+4)$

+4 +4 +4 . . .

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 7 - 3 = 4 \\ a_5 - a_4 &= 19 - 15 = 4 \end{aligned}\right\} d = 4$$

allgemeine Bildungsgesetz:

rekursiv: $a_{n+1} = a_n + d\,;\ a_1$

erzeugender Term: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

z.B.: $a_n = 3 + (n-1)\cdot 4$

$a_n = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$

1.36) a)

AF $a_{16} = 56$
$d = 3$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$56 = a_1 + (16-1)\cdot 3 \quad | -45$

$a_1 = 11$

$a_n = 11 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 8$

$a_n = \langle 11, 14, 17, 20, 23, \dots \rangle$

1.37) a) AF

$a_6 = 8$

$a_9 = 14$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

I: $8 = \cancel{a_1} + 5\cdot d$

II: $14 = \cancel{a_1} + 8\cdot d$

⊖

$$6 = 3d$$
$$d = 2$$

$d=2$ in I: $8 = a_1 + 10 \quad | -10$

$$a_1 = -2$$

$$a_n = -2 + (n-1) \cdot 2$$
$$a_n = -2 + 2n - 2$$
$$a_n = 2n - 4$$

1.38) $a_1 = 10$
$a_4 = 1$

I: $10 = \cancel{a_1} + 0 \cdot d$
II: $1 = \cancel{a_1} + 3 \cdot d$ $\quad \ominus$

$$-9 = 3d$$
$$d = -3$$
$$a_1 = 10$$

$$a_n = 10 + (n-1) \cdot -3$$
$$a_n = -3n + 13$$
$$a_n = \langle 10, 7, 4, 1 \rangle$$

→ geometrische Folge

Der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder ist konstant.

z.B.: $b_n = \langle 2, 4, 8, 16, 32 \rangle$ $\quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$

$\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$

$q = 2$

Bildungsgesetz:

rekursiv: $b_{n+1} = b_n \cdot q \; ; \; b_1$

explizit: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Bsp.: 1.62) a)

GF: $b_6 = 11\,664$ ersten 5 Folgengl.

$q = 3$

$$\boxed{b_6 =} \; b_1 \cdot q^5 = 11\,664$$

$$b_1 = \frac{11\,664}{3^5}$$

$$b_1 = 48$$

$$b_n = \langle 48, 144, 432, 1296, 3888 \rangle$$

Welches Folgenglied $> 10^3$?

$b_n > 1000 \qquad n = ?$

$$\boxed{b_n =} \; 48 \cdot 3^{n-1} > 1000 \qquad | :48$$

$$3^{n-1} > \frac{1000}{48} \qquad | \ln()$$

$$(n-1) \cdot \ln(3) > \ln\left(\frac{1000}{48}\right) \qquad | : \ln(3)$$

$$n-1 > \frac{\ln\left(\frac{1000}{48}\right)}{\ln(3)} \qquad | +1$$

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1008}{48}\right)}{\ln(3)} + 1$$

$$n > 3{,}7639\ldots$$

$n \in \mathbb{N} \qquad \underline{\underline{n = 4}}$

A: Ab dem 4ten Folgenglied ist die Zahl größer als 1000.

1.63) GF: $b_6 = 224$ Bildungsgesetz

$b_{16} = 229\,376$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_6 = b_1 \cdot q^5 = 224$

$b_{16} = b_1 \cdot q^{15} = 229\,376$

$b_1 = \frac{224}{q^5} = \frac{229\,376}{q^{15}} \quad | \cdot q^5$

$224 = \frac{229\,376}{q^{10}} \quad | \cdot q^{10}$

$224 \cdot q^{10} = 229\,376 \quad | : 224$

$q^{10} = \frac{229\,376}{224} \quad | \sqrt[10]{}$

$q = \sqrt[10]{\frac{229\,376}{224}}$

$\underline{\underline{q = 2}}$

$b_1 = \frac{224}{2^5}$

$\underline{\underline{b_1 = 7}}$

$b_n = 7 \cdot 2^{n-1}$

$b_{n+1} = b_n \cdot 2 \; ; \; b_1 = 7$

1.66) GF

$b_5 = 10\,000$

$q = 1{,}2$

$b_5 = b_1 \cdot 1{,}2^4 = 10\,000 \quad | : 1{,}2^4$

$b_1 = 4822{,}5309\ldots$ €

$b_n = \langle 4822{,}53\ldots ; 5787{,}03\ldots ; 6944{,}44\ldots ; 8333{,}33\ldots ; 10\,000 \rangle$

Bundesinstitut bifie

Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

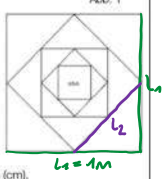
Seriationsmaterial

Aufgabennummer: B_242

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem Kindergarten gibt es verschiedene Materialien, mit denen die Kinder spielerisch Größenverhältnisse erforschen können. Eines dieser Materialien besteht aus quadratischen Platten aus festem Schaumstoff, deren Seitenlängen S_n eine geometrische Folge bilden (Abb. 1). Jedes Quadrat berührt das nächstgrößere mit seinen Eckpunkten genau im Mittelpunkt der Seiten.
Die größte Platte hat eine Seitenlänge von 1 Meter (m).

Abb. 1



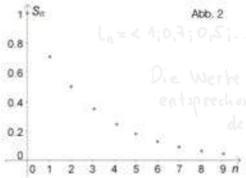
$\sqrt{2 \cdot 0{,}5^2} = 0{,}70710\ldots$

a) – Berechnen Sie die Seitenlänge der 2. Platte in Zentimetern (cm).

71 cm

b) – Begründen Sie, warum der nachstehende Graph in Abb. 2 die geometrische Folge, die in Abb. 1 dargestellt ist, beschreibt.

Abb. 2



$L_n = \langle 1; 0{,}7; 0{,}5; \ldots \rangle$

Die Werte d. Folge entsprechen genau der Grafik.

c) Ein Spielmaterial besteht aus Holzstäben, deren Länge jeweils um 5 cm zunimmt. Der kürzeste Stab ist 10 cm lang.

$a_n = 10 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 5$

– Erstellen Sie eine Formel, mit der man die Länge a_n eines beliebigen Stabes berechnen kann.
– Beschreiben Sie alle Variablen, die in der Formel vorkommen.

a_n … Länge d. nten Holzstäbchens in cm n … wievielte Stäbchen

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Seitenlänge der zweiten Platte ist die Diagonale eines Quadrats mit der halben Seitenlänge der ersten:
$a_0 = 100$ cm
$a_1 = 50 \cdot \sqrt{2} \approx 71$ cm

b) Der Graph in Abb. 2 beschreibt eine geometrische Folge mit abnehmenden Gliedern. Die Zahlenwerte der dargestellten Folgeglieder stimmen mit den Seitenlängen S_n in Abb. 1 überein.

Jede schlüssige, korrekte Begründung gilt als richtig.

c) Bei den Holzstäben handelt es sich um eine arithmetische Folge.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k$ mit $n \in \{1, 2, 3, ...\}$

a_1 … Länge des 1. Stabes in cm
k … Längenzunahme in cm
a_n … Länge des n-ten Stabes in cm

$a_n = 10 + (n - 1) \cdot 5$

Es können auch andere Bezeichnungen gewählt werden.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Lauftraining*

Aufgabennummer: B_449

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Anna, Beate und Clara bereiten sich auf einen Laufwettbewerb vor. Dabei verfolgen sie unterschiedliche Trainingspläne.

a) Anna und Beate überlegen sich folgende Trainingspläne:

		Trainingstag			
		1	2	3	4
Länge der Trainingsstrecke in km	Anna	1,5	1,65	1,815	1,9965
	Beate	1,5	2	2,5	3

1) Zeigen Sie, dass die Längen der Trainingsstrecken von Anna an den ersten 3 Tagen eine geometrische Folge bilden. $q = \frac{1,65}{1,5} = \frac{1,815}{1,65} = 1,1$

2) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

$b_{n+1} = b_n \cdot 1,1; \ b_1 = 1,5$

Die Längen der Trainingsstrecken von Beate an den ersten 3 Tagen bilden eine arithmetische Folge.

3) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf. $a_{n+1} = a_n + 0,5$

4) Ergänzen Sie unter Verwendung der jeweiligen Bildungsgesetze die fehlenden Werte in der letzten Spalte der obigen Tabelle. ✓

b) Clara berechnet die Längen ihrer Trainingsstrecken folgendermaßen:

$c_n = 2,75 + 0,125 \cdot n$

n … Trainingstag

c_n … Länge der Trainingsstrecke am n-ten Tag in km

1) Berechnen Sie, am wievielten Trainingstag Claras Trainingsstrecke eine Länge von 8 km hat. A: Am 42. Trainingstag hat Clara 8km erreicht.

$2,75 + 0,125 \cdot n = 8 \quad |-2,75$

$0,125 \cdot n = 5,25 \quad |:0,125$

$\underline{\underline{n = 42}}$

* ehemalige Klausuraufgabe

GF:

$a_1 = 1,5$

$a_2 = 1,65$

$a_1 = 1,5 \cdot q^0$

$a_2 = 1,5 \cdot q^1$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1,65}{1,5} = \underline{1,1}$

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{1,65}{1,5} = 1,1 \quad \frac{1,815}{1,65} = 1,1$

Es handelt sich um eine geometrische Folge, da die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Folge gleich sind.

a2) Anna: $a_1 = 1,5 \quad a_{n+1} = 1,1 \cdot a_n$

a3) Beate: $b_1 = 1,5 \quad b_{n+1} = b_n + 0,5$

a4) Tabellenwert für Anna: 1,9965
Tabellenwert für Beate: 3

b1) $8 = 2,75 + 0,125 \cdot n \quad \Rightarrow \quad n = 42$

Am 42. Trainingstag läuft Clara eine Strecke von 8 km.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für den richtigen Nachweis
a2) 1 × A1: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes für Annas Trainingsstrecken
a3) 1 × A2: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes für Beates Trainingsstrecken
a4) 1 × A3: für das richtige Ergänzen der fehlenden Tabellenwerte
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung

AF

$c_5 = 22$

AF

$c_5 = 22$

$c_8 = 31$

$$c_n = \cancel{c_1} + 4 \cdot d = 22$$
$$c_n = \cancel{c_1} + 7 \cdot d = 31$$

$\ominus$

$$-3d = -9$$
$$\underline{\underline{d = 3}}$$

$d=3$ in I: $c_1 + 4 \cdot 3 = 22 \quad | -12$

$$\underline{\underline{c_1 = 10}}$$

$c_n = \langle 10, 13, 16, 19, 22, \ldots \rangle$

$\underline{c_n = 10 + (n-1) \cdot 3}$

11. 3 Endliche Reihen

Das ist die Summe einer bestimmten Anzahl von Folgengliedern.

$$x_n = \langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}$$

$$s_n = \sum_{i=3}^{7} x_i = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

↳ „Partialsumme"

Bsp.: Ergebnis d. Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen?

$$\overset{x_1}{1} + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + \overset{x_{100}}{100}$$

$\boxed{\text{100 Werte}}$

$$x_n = \langle 1, 2, 3, \ldots, 100 \rangle$$

+

+

101

$\cdot 50$

=

5050

$$\sum^{100} x_i = 50 \cdot 101 = 5050$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 50 \cdot 101 = 5050$$

$$\frac{n}{2} \cdot (x_1 + x_n)$$

Allg.: Summenformel für die Arithmetische Reihe

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$= \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

1.49) a) $280 = 7 + 9 + 11 + \dots + \underbrace{a_n}_{} ?$ $\quad n = ?$

$a_1 = 7$; $d = 2$

$$280 = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot 7 + (n-1) \cdot 2] \quad | \cdot 2$$

$$560 = n \cdot [14 + 2n - 2]$$

$$560 = n \cdot (12 + 2n)$$

$$560 = 12n + 2n^2$$

$$2n^2 + 12n - 560 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-560)}}{2 \cdot 2}$$

$n_1 = 14$ $\quad (n_2 = -20 \notin \text{Def.}) \rightarrow n \in \mathbb{N}$

1.51) $d = 0{,}1$ €

$S_{26} = 48{,}10$ €

$a_{26} = ?$

$a_{26} = ?$

$$S_{26} = \frac{26}{2} \cdot [2a_1 + 25 \cdot 0{,}1]$$

$$48{,}10 = 13 \cdot [2a_1 + 2{,}5] \quad | :13$$

$$3{,}7 = 2a_1 + 2{,}5 \quad | -2{,}5$$

$$1{,}2 = 2a_1 \quad | :2$$

$$\underline{\underline{a_1 = 0{,}60\ €}}$$

$$a_{26} = 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{3{,}10\ €}} \text{ am 7. Geb.}$$

Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \dots b_n$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} \quad \text{für } q \neq 1$$

1.80)

GF: $b_1 = 1\text{km}$

$q = 1{,}1$

$$b_n = 1 \cdot 1{,}1^{n-1}$$

1) $5 < 1{,}1^{n-1} \qquad | \ln()$

$$(n-1) \cdot \ln(1{,}1) > \ln(5) \qquad | : \ln(1{,}1)$$

$$n-1 > \frac{\ln(5)}{\ln(1{,}1)} \qquad | +1$$

$$n > \frac{\ln(5)}{\ln(1{,}1)} + 1$$

$$n > 17{,}8863...$$

$$\underline{\underline{n = 18}}$$

A: Am 18. Tag geht sie d. 1st Mal über 5km.

2) GR: $b_1 + b_2 + \dots b_{17} = b_1 \cdot \frac{1{,}1^{17} - n}{1{,}1 - 1}$

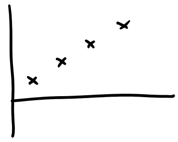
$\rightarrow \underline{\underline{40{,}5447... \text{ km}}}$

11.4 Unendliche Folgen

1. Monotonie

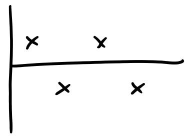
z.B.: $a_n = \langle 2, 4, 6, 8, 10, \dots \rangle$

↳ streng monoton steigend



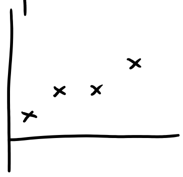
z.B.: $b_n = \langle -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots \rangle$

↳ keine Monotonie



z.B.: $c_n = \langle 2, 4, 4, 6, 8, 8, \dots \rangle$

↳ monoton steigend



Def.: $a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ streng monoton steigend

$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$ monoton steigend

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ streng monoton fallend

$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow$ monoton fallend

Bsp.: $a_n = 5n - 3$

Vermutung: $a_n = \langle 2; 7; 12; \dots \rangle$

str. m. ste.

Beweis: zz.: $a_{n+1} > a_n$

$$5(n+1) - 3 > 5n - 3$$
$$5n - 3 + 5 > 5n - 3 \quad | -5n$$
$$2 > -3 \Rightarrow \text{wahre Aussage}$$
$$\Rightarrow \square \text{. ged.}$$

streng monoton steigend

1.145) c) $a_n = \dfrac{10n - 3}{-15n + 4}$

zz.: str. m. f.

Beweis: $a_{n+1} < a_n$

$$\frac{10(n+1)-3}{-15(n+1)+4} < \frac{10n-3}{-15n+4}$$

$$\frac{10n+7}{-15n-11} < \frac{10n-3}{-15n+4} \quad | \cdot (-15n-11) \quad \cdot (-15n+4)$$

$$(10n+7)\cdot(-15n+4) < (10n-3)\cdot(-15n-11)$$

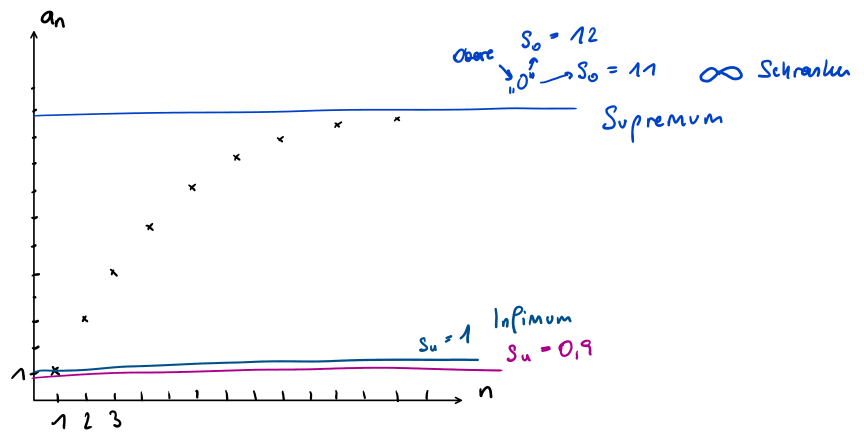
$$\cancel{-150n^2} \cancel{-65n} + 28 < \cancel{-150n^2} \cancel{-65n} + 33$$

$$28 < 33$$

↳ wahre Aussage

⇒ Diese Folge ist str. m.f.

2. Schranken



Es gilt: $s_o \geq a_n$ — Alle Folgenglieder sind kleiner gleich als die sogenannte OBERE SCHRANKE S_o.

„Beste" ober Schrank: kleinste obere Schrank

↳ Supremum

$S_u \leq a_n$ — Alle Folgenglieder sind größer gleich als die sogenannte UNTERE SCHRANKE S_u.

größte untere Schranke:

↳ Infimum

1.143) A: false
B: true
C: false
D: false
E: true

↳ Grenzwert und Konvergenz von unendl. Folgen

Grundsätzlich gilt dabei, dass jede monotone und beschränkte Folge einen Grenzwert besitzt (ist konvergent).

z.B.: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

$a_n = \langle 0;\ 0{,}5;\ 0{,}\dot{6};\ 0{,}75;\ \ldots \rangle$

- streng monoton steigend
- $s_u = 0$ (untere Schranke)
- $s_o = 1$ (obere Schranke)

$\Downarrow$

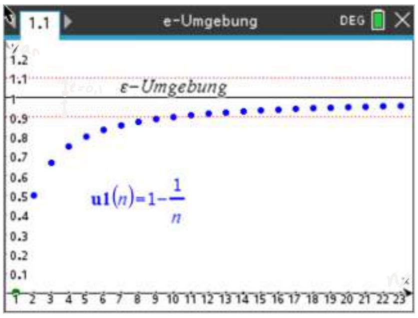
„es gibt" $\exists$ Grenzwert

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1 \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

„limes für n nach unendlich"

ε - Umgebung

kleines Intervall um einen bestimmten Zahlenwert



Definition:

Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert, wenn in jeder ε-Umgebung um den Grenzwert $\boxed{\text{fast alle}}$ Folgenglieder liegen.

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Bsp. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$; $\varepsilon = \frac{1}{100}$

$a = 1$

Ab welchem Folgeglied liegt man innerhalb der ε-Umgebung?

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\cancel{1} - \frac{1}{n} - \cancel{1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$$

$$\underline{\underline{n > 100}}$$

A: Ab a_{101} liegt der Wert in der ε-Umgebung

Berechnung des Grenzwerts von rationalen Folgen

Die folgenden Rechenregeln, die für das Arbeiten mit Grenzwerten gelten, nennt man **Grenzwertsätze**, wobei $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergente Folgen sind und $k \in \mathbb{R}$ ist.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}$ mit $b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) \neq 0$

Mithilfe der Grenzwertsätze können die Grenzwerte vieler Folgen ermittelt werden.

ZB $a_n = \frac{n^2}{n^3+3}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^3+3}\right) = „\frac{\infty}{\infty}"$$

- Da in der gegebenen Form für $n \to \infty$ sowohl Zähler als auch Nenner ∞ werden, erhält man „$\frac{\infty}{\infty}$", also einen unbestimmten Ausdruck.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^3+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{3}{n^3}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^3}}\right) =$$

- Zähler und Nenner werden durch die höchste Potenz von n, hier n^3, dividiert. Durch Kürzen erhält man Terme, die entweder Nullfolgen oder Konstanten sind.

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{0}{1+0} = 0$$

- Grenzwertsätze anwenden: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^3}\right) = 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) = 3 \cdot 0 = 0$

Mit dieser Methode kann der Grenzwert jeder Folge ermittelt werden, die durch einen rationalen Term (Bruchterm mit je einem Polynom in Zähler und Nenner) dargestellt ist.

Geben Sie hier eine Formel ein.

Berechnung konkret:

⇨ Division jedes einzelnen Summanden durch die höchste vorkommende Potenz des Index

3 Fälle:

1) $c_n = \dfrac{2n^2 - 7}{5n^2 + 3n}$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\overbrace{2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\,1}{\cancel{n^2}}}^{2} - \overbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^2}}^{0\ \text{(Nullfolge)}}}{\underbrace{5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\,1}{\cancel{n^2}}}_{5} + \underbrace{3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\,1}{\cancel{n^2}}}_{0\ \text{(Nullfolge)}}} = \frac{2-0}{5+0} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

→ Zählergrad = Nennergrad; so entspricht der Grenzwert den Koeffizienten

$5 \quad + \quad 0$ (Nullfolge)

Es gilt: Zählergrad = Nennergrad; so entspricht der Grenzwert den Koeffizienten der höchsten Potenz

2) $c_n = \dfrac{7n^2 + 3}{3n - 6}$

$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \dfrac{7}{0} \to \nexists$ GW

Es gilt: Zählergrad > Nennergrad $\Rightarrow \nexists$ GW

3) $c_n = \dfrac{3n - 7}{5n^3 - 7n^2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \dfrac{0}{5} = 0$

Es gilt: Zählergrad < Nennergrad: GW = 0

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^2 - 7n^3 + 5}{14n^3 - 7n} = -\frac{1}{2}$$

11.5 Unendliche Reihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$ .... Addition von unendlich vielen Folgengliedern.

$\nexists$ ∞AR → Es gibt keine unendlich arithmetische Reihe.

GF: $c_n = \langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots \rangle = 2^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$ (nicht konvergent)

GF: $b_n = \langle \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots \rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $q < 1$!

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underline{\underline{1}}$$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

konvergiert

Konvergenzsatz

Der Grenzwert einer unendlichen Geometrischen Reihe existiert für $|q| < 1$

Summenformel

$$\boxed{S_\infty = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}}$$

1.173)

Folge d. Radien: $r_n = \langle r_1; \frac{r_1}{2}; \frac{r_1}{4}; \dots \rangle \quad q = \frac{1}{2}$

Folge d. Halbk.umfä.: $u_n = \langle r_1 \cdot \pi; \frac{r_1}{2} \cdot \pi; \frac{r_1}{4} \cdot \pi; \dots \rangle \quad q = \frac{1}{2}$

Folge d. Halbk.flächen: $a_n = \langle \frac{1}{2} \cdot r_1^2 \cdot \pi; \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1^2}{4} \cdot \pi; \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1^2}{16} \cdot \pi; \dots \rangle \quad q_a = \frac{1}{4}$

1) $S_{12} = \sum_{n=1}^{12} u_n = r_1 \cdot \pi + r_2 \cdot \pi + r_3 \cdot \pi + \dots + r_{12} \cdot \pi$

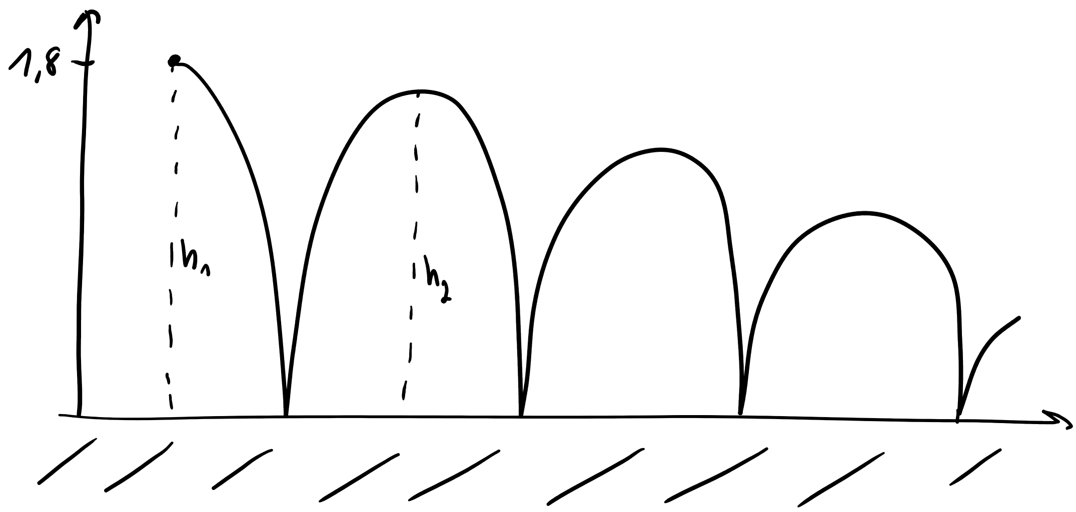
$$S_{12} = 50 \cdot \pi \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \underline{\underline{314{,}082\dots cm}}$$

2) $S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = r_1 \cdot \pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 100\pi = \underline{\underline{314{,}159\dots cm}}$

Zusatz: Summe ersten 10 Halbkreisflächen:

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{r_1^2 \cdot \pi}{2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{20} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \underline{\underline{5235{,}982\dots cm^2}}$$

1.69)



1) $h_1 = 1{,}80m \qquad h_2 = \frac{7}{8} \cdot 1{,}80m = 1{,}575m$

$q = \frac{7}{8}$

$h_n = 1{,}8 \cdot (\frac{7}{8})^{n-1}$

$$1{,}8 \cdot \left(\tfrac{7}{8}\right)^{n-1} > 0{,}0001 \qquad \Big| :1{,}8$$

$$\left(\tfrac{7}{8}\right)^{n-1} > \frac{0{,}0001}{1{,}8}$$

$$n-1 < \log_{\frac{7}{8}}\left(\frac{0{,}0001}{1{,}8}\right) \qquad \Big| +1$$

$$n < \log_{\frac{7}{8}}\left(\frac{0{,}0001}{1{,}8}\right) + 1$$

$$n < 74{,}3769\ldots$$

$$\underline{\underline{n = 74}}\text{ mal}$$

2) $$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} h_n = 1{,}8 \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{8}} \cdot 2 - 1{,}8 = \underline{\underline{27\,m}}$$

1.176) $a = 10\,cm$

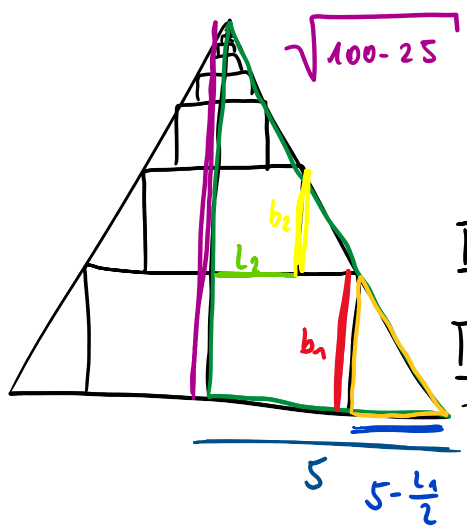
$l_1 : b_1 = 5 : 3$

$l_1 = \frac{5 \cdot b_1}{3}$

Summe d. Flacheninhalte aller Rechtecke $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cdot \frac{1}{1-q}$

$A_1 = l_1 \cdot b_1$

$q_v = \frac{A_2}{A_1}$



$$\left(5 - \frac{l_1}{2}\right) : 5 = b_1 : \sqrt{75}$$

$$\text{I}: \left(\frac{l_1}{2} - \frac{l_2}{2}\right) : \frac{l_1}{2} = b_2 : \sqrt{75} - b_1$$

$$\text{II}: l_2 : b_2 = 5 : 3$$

TI: $l_2 = 3{,}48962\ldots\,cm$

$b_2 = 2{,}09377\ldots\,cm$

$b_2 = 2{,}09377\ldots cm$

$l = 5{,}9073\ldots$

$b_1 = 3{,}544\ldots$

$A_1 = l_1 \cdot b_1 = 20{,}9377\ldots\ cm^2$

$q = \frac{A_2}{A_1} = 0{,}348974\ldots$

$A_2 = l_2 \cdot b_2 = 7{,}30677\ldots\ cm^2$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 20{,}937 \cdot \frac{1}{1-0{,}34\ldots} = \underline{\underline{32{,}160\ldots\ cm^2}}$$

$$A_{\triangle} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \underline{\underline{25 \cdot \sqrt{3}\ cm^2}}$$

$$p = \frac{A}{G} \cdot 100 = \frac{32{,}160\ldots}{25 \cdot \sqrt{3}} = \underline{74{,}27\ \%}$$

A: Ca. $\frac{3}{4}$ der Fläche sind bedeckt.

11.6 Zinsrechnung

Montag, 5. September 2022 13:43

11.6 Zinsrechnung

11.6 Anwendungen: Finanzmathematik: Zins und Zinseszins	**Seite 24**

Grundbegriffe:

- **Einfache (lineare) Verzinsung:**
  Die Zinsen werden für die gesamte Laufzeit berechnet. In der Praxis bis 1 Jahr
- **Zinseszinsen (exponentielle Verzinsung):**
  Nach jeder Zinsperiode (z.B. am Ende des Jahres) werden die aufgelaufenen Zinsen dem Kapital zugeschlagen und tragen von da an selbst wieder Zinsen.

Bezeichnungen:

K_0: Barwert (Anfangskapital)

K_n: Endwert (Kapital nach n Jahren)

i: Zinssatz (interest rate), i= p/100 = p% (p wird Zinsfuß genannt) i=p%
Zinssatz i wird in Prozent oder als Dezimalzahl angegeben, z.B. i = 5% = 0,05.

n: Laufzeit in Jahren

Nach dem Bankwesengesetz gilt:

- 1 Jahr = 360 Tage, 1 Monat = 30 Tage
- Verzinsungsdauer beginnt einen Werktag nach Einzahlung und endet mit dem Kalendertag vor der Abhebung
- Beträge, die innerhalb von 14 Tagen wieder abgehoben werden, werden nicht verzinst.
- **Kapitalertragssteuer (KESt):**
  Von den Zinsen müssen (derzeit) 25% Steuer bezahlt werden. Diese werden an das Finanzamt abgeführt. Somit verringert sich der Zinssatz i auf $\boxed{i_k = 0{,}75 \cdot i}$

Einfache Verzinsung

Für eine Verzinsung von t Tagen gilt: $i = \frac{p}{100}$

Zinsen: $Z = K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360}$ **Zinsen für ein Jahr:** $Z = K \cdot i$

Kapital: $K_t = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$ **oder m Monate:** $K_m = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{m}{12}\right)$

Einfache Verzinsung entspricht einer arithmetischen Folge ab n=0.
Die einfache Verzinsung wird nur für Zeiträume unter 1 Jahr angewendet.

1. *400 € werden 5 Monate zum Zinssatz i = 6% angelegt.Endbetrag?*

$K(t) = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$ $p = 0{,}001 \rightarrow K(5 \cdot 30) =$

$K(5 \cdot 30) = 400€ \cdot \left(1 + 0{,}06 \cdot \frac{5 \cdot 30}{360}\right) = \underline{410 €}$ $\underline{\underline{400{,}0017€}}$

2. *Welchen Betrag muss man auf ein Sparbuch mit 4% Verzinsung einzahlen, wenn man in 9 Monaten 800 € abheben will?*

$K_0 = \frac{800}{1 + 0{,}04 \cdot \frac{9}{12}} = \underline{776{,}70 €}$

1

Zinseszinsen 25

Die angelaufenen Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode dem Kapital hinzugefügt.
Das Kapital wächst also pro Jahr um den ***Aufzinsungsfaktor q*** **= 1 + i,** [illegible]

Verzinsung ist nachschüssig: dekursive Verzinsung

Zinseszinsformel bzw. Aufzinsungsformel:

n … Verzinsungsdauer,

$\mathbf{K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n}$ oder $K_n = K_0 \cdot q^n$, **wobei q = 1 + i**

Das Sparguthaben wächst exponentiell, es entspricht somit einer geometrischen Folge.

Beispiele:

1. Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 100 € in 8 Jahren bei einer Verzinsung von i=5%?

   $K(8) = 100€ \cdot 1{,}005^8$ mit KeST: $K(8) = 100€ \cdot 1{,}00375^8$

   $K(8) = 104{,}07\ €$ $K(8) = 103{,}04\ €$

2. *Wie hoch war ein Kapital, wenn es in 5 Jahren bei einer Verzinsung von i = 3% auf 742 € angewachsen ist?*

   $K(t) = K_0 \cdot (1+i)^n$

   $K_0 = \frac{742}{1{,}03^5} = 640{,}06\ €$

3. *Jemand leiht sich 4000 € aus und zahlt nach 4 Jahren 4500 € zurück. Welchem Zinssatz entspricht das?*

   $4500 = 4000 \cdot (1+i)^4$

   $1{,}125 = (1+i)^4$

   $1{,}029 = 1+i$

   $i = \sim 3\%$

4. *Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 1500 € bei einer Verzinsung von 4,5% auf 2000 € anwächst?*

   $2000 = 1500 \cdot 1{,}045^n$

   $1\frac{1}{3} = 1{,}045^n$

   $\frac{\ln(\frac{4}{3})}{\ln(1{,}045)} = n$

   $n = 6{,}535\ldots$ J

Gemischte (praktische) und theoretische Verzinsung

Gemischte (Praktische) Verzinsung:
Bei Spareinlagen, die länger als ein Jahr, bzw. über den Jahreswechsel verzinst werden.

Vorgehen:
- Bis zum ersten Jahreswechsel: einfache Zinsen,
- ganze Jahre – Zinseszinsen,
- Rest des letzten Jahres: einfache Zinsen

Oder: Theoretische Verzinsung:
Statt gemischter Verzinsung wird die Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ verwendet und für n auch nicht ganzzahlige Jahreswerte zugelassen. (meist in Tage umrechnen)
Damit nimmt man eine **exponentielle Verzinsung** vor.

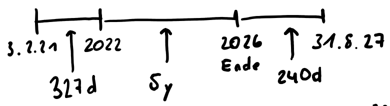
Beispiel1:
1000€ werden für a) 5 Monate b) 2Jahre 3 Monate 14 Tage zu 3% p.a. angelegt.
Berechne den Endwert bei theoretischer und praktischer Verzinsung.

a) $K_0 = 1000€$ $\quad K_{5m} = 1000 \cdot \left(1+0{,}03 \cdot \frac{5}{12}\right) = 1012{,}50€$ prak. Verzinsung
$K_{5m} = 1000 \cdot 1{,}03^{\frac{5}{12}} = 1012{,}39€$ theor. Verzinsung

b) $K_0 = 1000€$ prakt. Verz.: $K_E = 1000 \cdot 1{,}03^2 \cdot \left(1+0{,}03 \cdot \frac{104}{360}\right) = \underline{1070{,}09€}$
$t = 824d$ theor. Verz.: $K_E = 1000 \cdot 1{,}03^{\frac{824}{360}} = \underline{1070{,}00€}$

Beispiel 2:
Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 4000€ bei einem Zinssatz von 3,5% p.a. (theoretische Verzinsung) auf 5000€ angewachsen ist?

Bsp.: $K_0 = 10\,000€$; $p = 1\%$ p.a.
3.2.2021 – 31.8.2027



prakt. V.: $K_E = 10\,000 \cdot \left(1+0{,}01 \cdot \frac{327}{360}\right) \cdot 1{,}01^5 \cdot \left(1+0{,}01 \cdot \frac{240}{360}\right)$
$= \underline{10\,676{,}30€}$

theor. V.: $K_E = 10\,000 \cdot 1{,}01^{\frac{2367}{360}} = \underline{10\,676{,}11€}$

Unterjährige Verzinsung

Bisher: jährliche Verzinsung (p.a.) mit einem bestimmten Jahreszinssatz

Wird die Zinsperiode nicht jährlich vorgenommen, so spricht man von **unterjähriger Verzinsung**.

Bezeichnungen:	entsprechende Zinssätze heißen:
p.s. … Verzinsung pro Halbjahr (Semester)	Semesterzinssatz
p.q. … Verzinsung pro Vierteljahr (Quartal)	Quartalszinssatz
p.m. … Verzinsung pro Monat	Monatszinssatz

Die Zinssätze werden allgemein mit i_m bezeichnet.

Der effektive Jahreszinssatz – Effektivzinssatz i_{eff} berechnet sich mit:
$$i_{eff} = (1+i_m)^m - 1$$
Berechnung des Endkapitals bei unterjähriger Verzinsung: $K_m = K_0 \cdot (1+i_m)^m$

Beispiel:
Barwert (=Kapital zu Beginn) =10 000 €; Zinssatz = 1,5% p.q.
Endwert? Effektivzinssatz?

$i_{eff} = 1{,}015^4 - 1 = 0{,}0613 \hat{=} 6{,}13\%$ p.a. $\quad (1{,}5\%$ p.m $\hat{=} 19{,}6\%$ p.a.$)$
$K_E = 10\,000 \cdot \left(1+0{,}0613 \cdot \frac{1}{2}\right) = \underline{10306{,}82€}$

12. Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Montag, 5. September 2022 13:44

12. Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

12.1 Exponentialfunktion

Def. für Grenzwert wie bei Folgen.
Buch Seite 55+56+57

Kondensator * (B_496) b)

Ein Kondensator ist ein elektronisches Bauelement, das mithilfe einer Batterie aufgeladen werden kann. Ist der Kondensator bei einem Aufladevorgang zu Beginn ungeladen, so kann der Verlauf der Kondensatorspannung durch die Funktion u beschrieben werden.

$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Kondensatorspannung zur Zeit t in Volt (V)
U_0 ... Spannung der Batterie (konstant) in V
τ ... Zeitkonstante in s

b) 1) Begründen Sie anhand der oben angegebenen Funktionsgleichung, warum die Kondensatorspannung für $t \to \infty$ asymptotisch gegen U_0 geht.

$$u(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dadurch, dass $e^{-\frac{t}{\tau}}$ im Unendlichen gegen 0 geht, bleibt U_0 übrig, weil $U_0 - 0$.

Bewegung eines Bootes * (B_074)

c) Für einen bestimmten Zeitraum kann der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines anderen Motorboots durch die Funktion v_{MB} näherungsweise beschrieben werden:

$v_{MB}(t) = a + b \cdot (e^{-0,1 \cdot t} - e^{-t})$

t ... Zeit
$v_{MB}(t)$ ... Geschwindigkeit des Motorboots zur Zeit t
a, b ... positive Konstante

– Argumentieren Sie mathematisch, dass die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote dieser Funktion ist.

Weil $e^{-0,1 \cdot t}$ und e^{-t} im Unendlichen mit

0 konvergiert, wird das Produkt 0 und es bleibt nur a übrig.

Erwärmung von Substanzen (A_096)

Eine Substanz wird aus dem Kühlschrank (Temperatur T_1) genommen und in einen Raum mit der Umgebungstemperatur T_2 gebracht. Der zeitliche Verlauf der Temperatur dieser Substanz kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden:

$T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$ mit $T_2 > T_1$

t ... Zeit seit der Entnahme aus dem Kühlschrank in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C

a) – Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils die zutreffenden Eigenschaften aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$(T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	
$T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	

A	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_2. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.
B	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert 0. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_1.
C	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_1. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_2.
D	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert $T_2 - T_1$. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.

Kfz-Bestand (1) * (B_300)

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$$K_L(t) = \frac{22{,}5}{3 + 2 \cdot e^{-0{,}06264 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_L(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

d1): Argumentieren, Kfz-Bestand 7,5 Mil. annähert

Weil $e^{-0{,}06264\cdot t}$ im Unendlichen gegen 0 konvergiert, haben wir 3 im Nenner und es kommt $\frac{22{,}5}{3}$, also 7,5 Millionen heraus.

12.2 rationale Funktionen

Montag, 5. September 2022 13:46

12.2 rationalen Funktionen

z.B.: $f(x) = \frac{1}{x}$ → Variable kommt mind. 1mal im Nenner vor

$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x-2}$

Allg.: $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_1 \cdot x^n + a_2 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n \cdot x^0}{b_1 \cdot x^m + b_2 \cdot x^{m-1} + \dots + b_m \cdot x^0}$

Zähler : Grad n
Nenner : Grad m

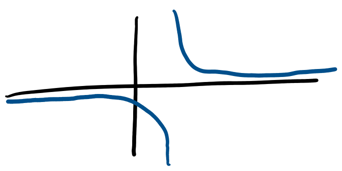
⇒ n < m

z.B.: $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x^4 - 2}$ $2 < 4$ ✓

Es gilt: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

x-Achse ist Asymptote : Glg: $f(x) = 0$

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x-2}$



3 Möglichkeiten:
- lernen
- zeichnen
- TI → lim-Template

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

waagre. Asy. mit $y = 0$

⇒ n = m

z.B.: $f(x) = \frac{2\cancel{x^3} - \cancel{7x^2}}{4\cancel{x^3} - \cancel{5x} + \cancel{3}} = \frac{1}{2}$ Durch höchste Potenz

↳ Grenzwertsätze

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

→ Koeff. der höchsten Potenz bleiben übrig

As.: $y = \frac{1}{2}$

As.: $y = \frac{1}{2}$

$n > m$

$\rightarrow n = m+1$

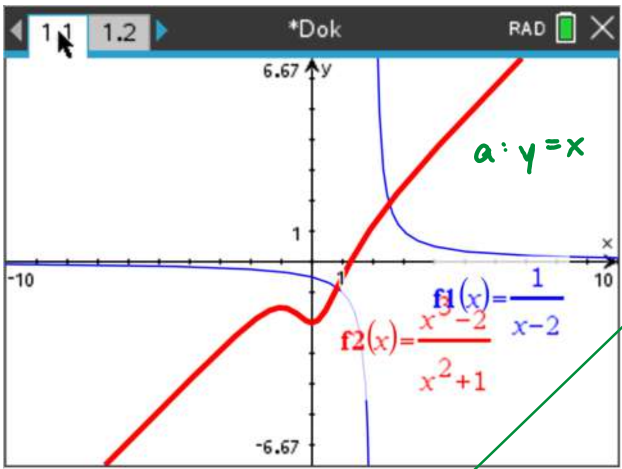
schräge Asymptote (lineare Funktion)

$\rightarrow n > m+1$

Asymptote ist „Grenzkurve"

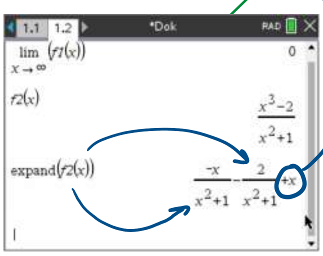
Bsp.: $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$ Ges.: Asy.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (uneigentlicher Grenzwert)



mit TI: Zerlegung mittels „expand()"

Restterm gibt schräge bzw. kurvige Asymptote wieder



12.3 Grenzwert und Stetigkeit an einer bestimmten Stelle x_0

Linksseitige Näherung an die Stelle x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g_L$$

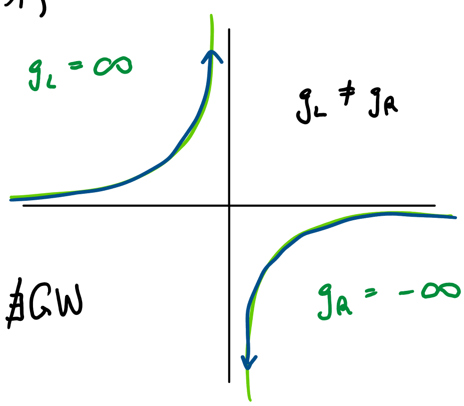
Rechtsseitige Näherung an die Stelle x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g_R$$

Gibt es einen Links- & Rechtsseitigen Grenzwert an dieser Stelle und es gilt $g_L = g_R$, dann ist dieser Wert der Grenzwert g an die Stelle x_0.

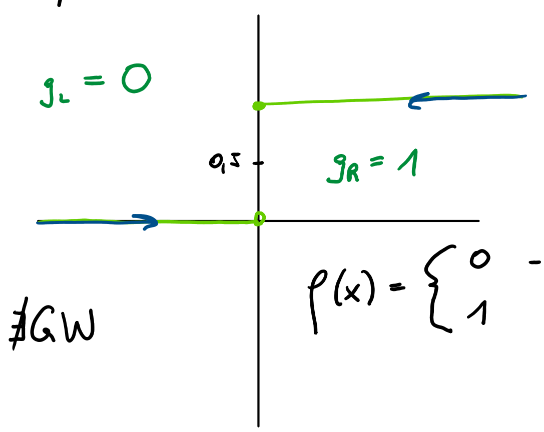
$$g_L = g_R = g$$

2.19) 1)



nicht stetig

2)

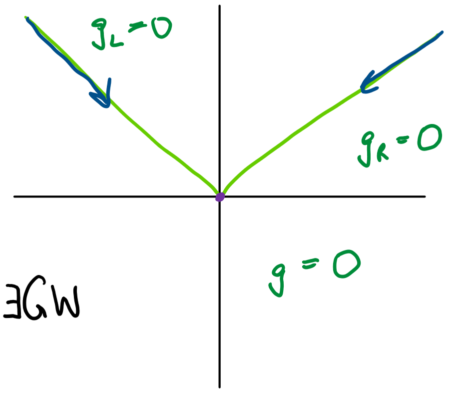


nicht stetig

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

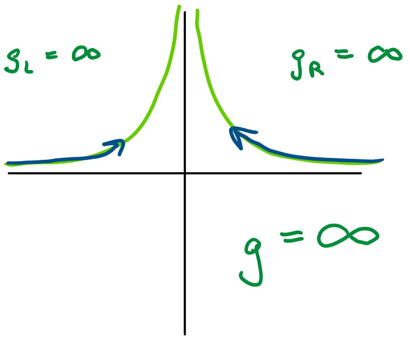
3)

3)



stetig

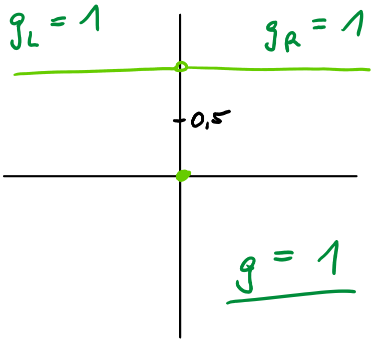
4)



$\boxed{\text{uneigentlicher Grenzwert}}$

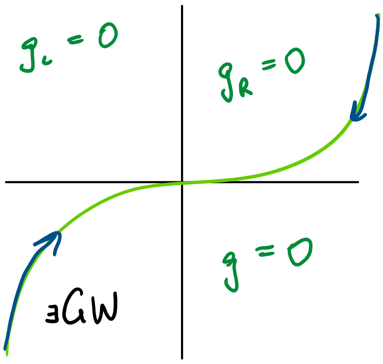
nicht stetig

5)



nicht stetig

6)



stetig

Stetigkeit:

Hat eine Funktion an einer Stelle

x_0 einen Grenzwert g $(g_L = g_R = g)$

UND stimmt der Funktionswert an dieser Stelle mit dem Grenzwert g überein, so ist die Funktion stetig.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Stetig sind: Polynomfunktionen $(n \in \mathbb{R}^+)$,
Exponentialfunktionen,
Logarithmusfunktionen,
Winkelfunktionen (sin, cos),

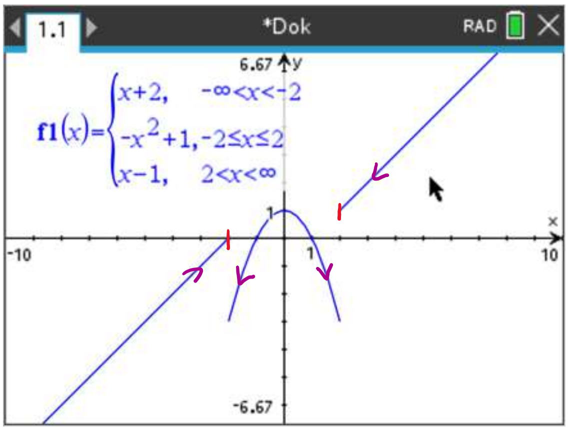
Nicht stetig: Polynomfunktionen $(n \in \mathbb{R}^-)$,
Winkelfunktionen (tan),
i.A. Sprungfunktionen,
rationale Funktionen

Mögliche Unstetigkeitsstellen

- Sprungstelle (bei Sprungpkt.)

$g_L \neq g_R$

z.B.: $f(x) = \begin{cases} x+2, & -\infty < x < -2 \\ -x^2+1, & -2 \leq x \leq 2 \\ x-1, & 2 < x < \infty \end{cases}$



$x = -2$
$x = 2$ } Unstetigkeitsstellen

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -3$$

$\lim\limits_{x \to -2^-} (f1(x))$	0
$\lim\limits_{x \to -2^+} (f1(x))$	-3

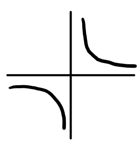
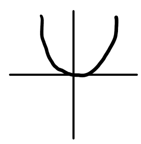
$\neq$

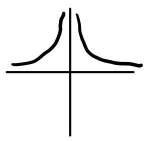
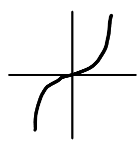
↳ nicht stetig bei $x = -2$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Polstellen / Unendlichkeitsstelle

bei rationalen Funktionen

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$  $f(x) = x^2$ 

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$  $f(x) = x^3$ 

Definitionsmenge

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$ .... mögliche Polstelle: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

uneigentlicher Grenzwert (verschieden)!

$\Longrightarrow x = 0$ ist Polstelle

An jeder Polstelle ist eine senkrechte Asymptote.

$x = 0$

Übung für SA

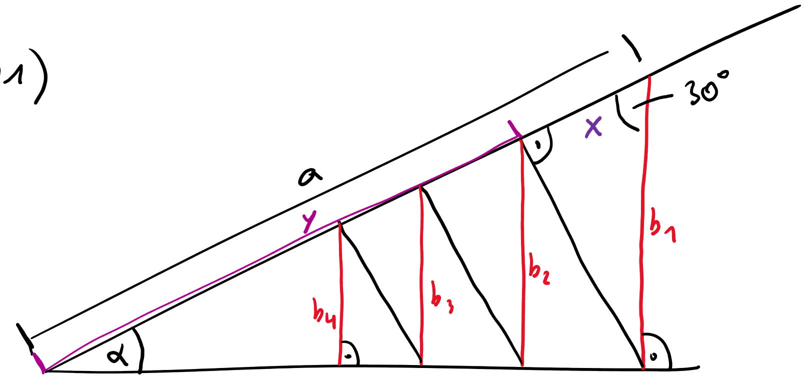
- Säulendiagramm

  Menü → Data → Ergebnisdiagramm

- Boxplot

  Menü → Plot-Typ → BoxPlot

1.171)



b_1: $\sin(60°) = \frac{b_1}{1}$ $\quad b_1 = \sin(60°)$

b_2: x: $\cos(30°) = \frac{x}{b_1} \Rightarrow x = b_1 \cdot \cos(30°)$

$\sin(60°) = \frac{b_2}{1-x} \Rightarrow b_2 = (1-x) \cdot \sin(60°)$

$$S_\infty = \sin(60°) \cdot \frac{1}{1-q} = \sin(60°) \cdot \frac{1}{x}$$

Bsp.: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 7x^2}{5x^4 - 3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}}{5 - \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{5} = \underline{\underline{0}}$

Bsp.: geordnete Liste:

1 2 2 3 4 5 5 (7) $n = 7/8$

Median? $\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$ (→ für ungerade)

$\tilde{x} = x_{\frac{7+1}{2}} = x_4 = \underline{\underline{3}}$

$\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \underline{\underline{3{,}5}}$

1 2 2 3 3 4 4 5

Modi: 2, 3, 4

Polstelle

$f(x) = \frac{2}{2-x}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) = \frac{\smile}{2-x}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

möql. Polst. $x = 2$ Überprüfen: l.N. ... linksseitige Näherung
r.N.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$

$\neq$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ $x = 2$ ist Polst.

$\Rightarrow$ Glg. As. $x = 2$

Hebbare Lücke

Bsp.: $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x_0 = 1$:

LN: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

$=$?

RN: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

$f(1) =$ nicht exist. $f(x)$ ist nicht stetig

Allg.: Stimmen g_L & g_R an einer NICHT definierten Stelle überein, so handelt es sich um eine HEBBARE LÜCKE (Unstetigkeitsstelle)

Aber: die Funktion kann stetig fortgesetzt werden („die Lücke kann gestopft werden")

Diese stetig fortgesetzte Funktion lautet

$\boxed{\overline{f(x)} = x + 2}$

1 (1) a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

2.51) a) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$x_0 = -3$

$g_L = \lim_{x \to -3^-} f(x) = \infty$

$g_R = \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\neq$

$\Rightarrow g_L \neq g_R \Rightarrow x_0 = -3$ ist POLSTELLE

$x_0 = +3$

$g_L = \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

$g_R = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$

$\neq$

$\Rightarrow g_L \neq g_R \Rightarrow x_0 = 3$ ist POLSTELLE

Asymptoten:

senkrechte A.: $x = -3$, $x = 3$

waagrechte A.: $\lim_{x \to \infty} f(x) = y = 0$

2.52) c) $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x+2}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2) Unstetigkeitsstellen?

$x_0 = -2$: $g_L = 9$, $g_R = 9$ $\neq$

$\underline{\underline{g = 9}}$

$g_L = g_R = g \Rightarrow x_0 = -2$ ist HEBBARE LÜCKE

STETIG FORTGESETZTE FUNKTION:

$\overline{f}(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{8x^3 - 4x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$

1) Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x_0 = 1$: $g_L = \infty$, $g_R = \infty$ $\qquad g_L = g_R = \infty \rightarrow$ uneigentlich

SONDERFALL!

JK

SONDERFALL!

„einfach" eine Unstetigkeitsstelle → weder Polstelle noch Hebbare Lücke

Asymptote: $\underline{x = 1}$ senkrecht A.

$\underline{y = 8x + 12}$ schräge A.

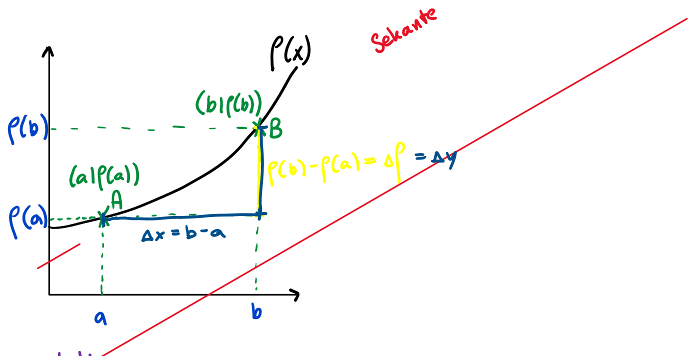
13. Differenzialrechnung

Montag, 5. September 2022 13:52

13 DIFFERENZIALRECHNUNG

13.1 Änderungsmaße

Man unterscheidet:



- absolute Änderung
  $f(b) - f(a) = \Delta f$
  im Intervall $[a, b]$.
- prozentuelle Änderung / relative Änderung
  $$\frac{\Delta f}{f(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$$ → relative
  $$\cdot 100\,\%$$ → prozentuell
- mittlere Änderungsrate, Differenzenquotient
  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
  Steigung der Sekante

4.5) A) mittlere Änderungsrate → Rate: Änderung pro Zeiteinheit

$$\frac{64263 - 72960}{4} \frac{kt}{y} =$$

↘ 4 Jahre

$$= -2174{,}25 \frac{kt}{y} \neq -1685{,}4 \frac{kt}{y}$$

Antwort: falsch

B) prozentuelle Änderung: $\frac{72960 - 62\,060}{62\,060} \cdot 100\,\%$

$= 17{,}5\ldots\,\% \neq 1\,\%$

→ falsch

c) absolute Änderung

$65\,980 - 63\,920 > 67\,780 - 67\,850$

$2060 > -70$

→ richtig

D) $|(64\,263 - 79\,600)| = 79\,600 \cdot 0{,}8$

$15\,337 \neq 63\,680$

→ falsch

BMWBF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Abfallwirtschaft

Aufgabennummer: A_184

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die nachstehende Tabelle zeigt die Menge des gesammelten Restmülls in Graz in den Jahren 2001, 2002, 2005 und 2010.

Jahr	2001	2002	2005	2010
Restmüllmenge in t	41 072	41 292	43 312	52 569

Es wird vermutet, dass sich die Entwicklung der Restmüllmenge durch eine quadratische Funktion näherungsweise beschreiben lässt.

– Erstellen Sie mithilfe der Daten der Jahre 2001, 2002 und 2005 eine Gleichung der quadratischen Funktion, die als Modell für die Entwicklung der Restmüllmenge verwendet werden kann. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2001.
– Berechnen Sie für das Jahr 2010 die prozentuelle Abweichung dieses Modells von der tatsächlich gesammelten Restmüllmenge.

b) Die Entwicklung der Restmüllmenge in den Jahren 2001 bis 2010 in Graz kann mithilfe der Funktion R näherungsweise beschrieben werden:

$R(t) = 120 \cdot t^2 + 80 \cdot t + 41072$

t ... Zeit in Jahren ab 2001, d. h., für das Jahr 2001 gilt: $t = 0$
$R(t)$ ... Restmüllmenge zur Zeit t in t

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate für $t = 5$ bis $t = 9$.

c) Aus dem Abfallwirtschaftsplan des Bundes geht hervor, dass im Jahr 2009 in Österreich insgesamt 53 543 000 t Müll angefallen sind.

– Stellen Sie diesen Wert mittels Gleitkommadarstellung in Kilogramm dar.

In Österreich lebten im Jahr 2009 rund 8,375 Millionen Menschen.

– Berechnen Sie für das Jahr 2009 die durchschnittliche Menge des pro Kopf angefallenen Mülls in Tonnen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

1) $P_1(0 \mid 41072)$
$P_2(1 \mid 41292)$
$P_3(4 \mid 43312)$

I: $41072 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c$ → $\underline{\underline{c = 41072}}$
II: $41292 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 41072$
III: $43312 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + 41072$

$$\underline{\underline{R(t) = 113{,}\dot{3}t^2 + 106{,}\dot{6}t + 41072}}$$

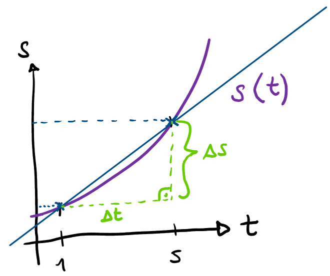
2) rel. F.: $\frac{|52569 - R(9)|}{52569} \cdot 100\%$

$= \underline{2{,}581...\%}$

Anwendung der mittleren Änderungsrate

mittlere Geschwindigkeit

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$



z.B.: $s(t) = 5t^2$

$\bar{v}$ in $[1;5]$ s

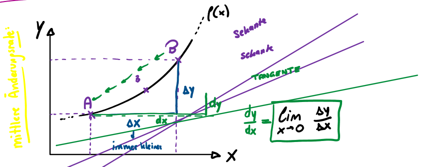
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(1)}{5-1} = \frac{125 - 5}{4} = \underline{\underline{30\,\frac{m}{s}}}$$

m

s

$\frac{m}{s}$

13.2 momentane Änderungsrate



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Bestimmung Definitionsmenge SMÜ:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$a = 1$
$b = -1$
$c = -6$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \qquad \underline{\underline{x_1 = -2}} \qquad \underline{\underline{x_2 = 3}}$$

Bildet man den Grenzwert des Differentenquotienten von einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0, so entsteht der **Differenzialquotient (momentane Änderungsrate)**.

Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \\ &= y' = f'(x_0) \\ &= \text{erste Ableitung} \end{aligned}}$$

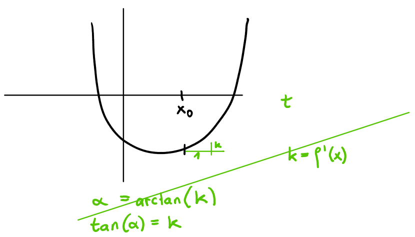
Differenzial

$\frac{dy}{dx}$ … „dy nach dx" (Eigentlich kein Bruch)

y' … „y Strich"

„ableiten" … den Differenzialquotienten bilden

Geometrisch: Steigung der Tangente an die Stelle x_0.



Bsp.: $f(x) = 2x^2 - 4x$

ges: mom. Änderungsrate bei $x_0 = 1$

ableiten

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

ges: mom. Änderungsrate bei $x_0 = 1$

ableiten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cdot(x_0+\Delta x)^2 - 4\cdot(x_0+\Delta x) - 2\cdot x_0^2 + 4\cdot x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x_0^2} + 4x_0\cdot\Delta x + 2\Delta x^2 - \cancel{4x_0} - 4\Delta x - \cancel{2\cdot x_0^2} + \cancel{4\cdot x_0}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x_0\cdot\Delta x + 2\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(4x_0 + 2\Delta x - 4)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (4x_0 + \cancel{2\Delta x} - 4) = \underline{\underline{4x_0 - 4}}$$

$\underline{\underline{f'(1) = 0}}$ → Steigung der Tangente = 0
↳ Extrempunkt

$\underline{\underline{f'(2) = 4}}$ → Steigung d. Tangente = 4

$\underline{\underline{f'(-2) = -12}}$

Anwendung bei Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung

mittlere Gesch. .... $v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Momentangeschw.:

Steigung der Tangente im Weg-Zeit-Diagramm an einem Punkt (Zeitpunkt).

physikalisch

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t) = [\dot{s}$$

Momentanbeschl.:

Steigung der Tangente im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm an einem Punkt (Zeitpunkt).

physikalisch

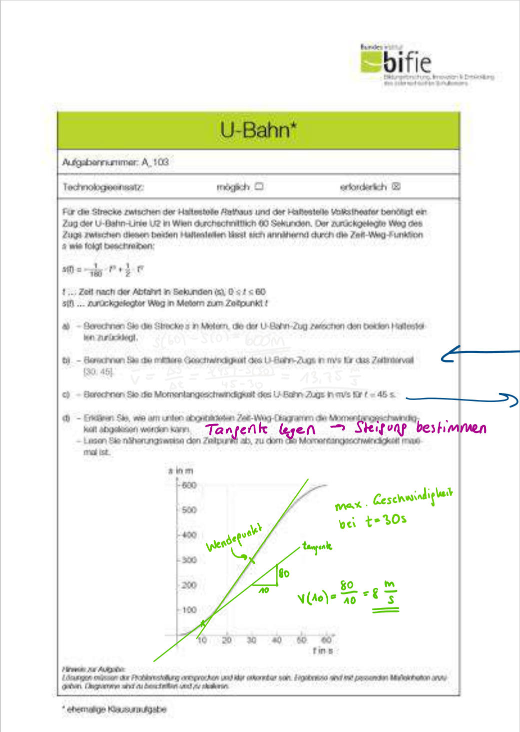
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t) = [\dot{v}$$

$$= s''(t) = [\ddot{s}$$

physikalisch

2te Ableitung

negative Beschleunigung: BREMSEN!



Bundesinstitut bifie

U-Bahn*

Aufgabennummer: A_103

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Strecke zwischen der Haltestelle *Rathaus* und der Haltestelle *Volkstheater* benötigt ein Zug der U-Bahn-Linie U2 in Wien durchschnittlich 60 Sekunden. Der zurückgelegte Weg des Zugs zwischen diesen beiden Haltestellen lässt sich annähernd durch die Zeit-Weg-Funktion s wie folgt beschreiben:

$s(t) = -\frac{1}{180} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach der Abfahrt in Sekunden (s), $0 \leq t \leq 60$
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg in Metern zum Zeitpunkt t

a) – Berechnen Sie die Strecke s in Metern, die der U-Bahn-Zug zwischen den beiden Haltestellen zurücklegt.

$s(60) - s(0) = 600m$

b) – Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für das Zeitintervall [30; 45].

$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(45) - s(30)}{45-30} = 13,75 \frac{m}{s}$

c) – Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für $t = 45$ s.

d) – Erklären Sie, wie am unten abgebildeten Zeit-Weg-Diagramm die Momentangeschwindigkeit abgelesen werden kann.

Tangente legen → Steigung bestimmen

– Lesen Sie näherungsweise den Zeitpunkt ab, zu dem die Momentangeschwindigkeit maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

:= Funktion definieren!

$$\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} =$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot a b^2 + b^3$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\frac{1}{180}(t_0 + \Delta t)^3 + \frac{1}{2}(t_0 + \Delta t)^2 - \left[-\frac{1}{180} t_0^3 + \frac{1}{2} t_0^2\right]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\frac{1}{180}(t_0^3 + 3 \cdot t_0^2 \Delta t + 3 \cdot t_0 \Delta t^2 + \Delta t^3) + \frac{1}{2}(t_0^2 + 2 t_0 \Delta t + \Delta t^2) + \frac{1}{180} t_0^3 - \frac{1}{2} t_0^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{-\frac{t_0^3}{180}} - \frac{t_0^2 \Delta t}{60} - \frac{t_0 \Delta t^2}{60} - \frac{\Delta t^3}{180} + \cancel{\frac{t_0^2}{2}} + t_0 \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} + \cancel{\frac{t_0^3}{180}} - \cancel{\frac{t_0^2}{2}}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t} \cdot \left(-\frac{t_0^2}{60} - \frac{t_0 \Delta t}{60} - \frac{\Delta t^2}{180} + t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\cancel{\Delta t}} =$$

$\to 0$ $\to 0$ $\to 0$

$$f'(x) = \underline{\underline{\lim_{\Delta t \to 0} \left(-\frac{t_0^2}{60} + t_0\right)}} = v(t) = s'(t) = \dot{s}$$

$$v(45) = -\frac{45^2}{60} + 45 = \underline{\underline{11,25 \frac{m}{s}}}$$

$$s(t) = -\frac{1}{180} t^3 + \frac{1}{2} t^2$$
$$s'(t) = -\frac{1}{60} t^2 + t$$
$$-\frac{1}{180} \cdot 3 \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t$$

$$f(x) = -2x^2 - 4x$$
$$f'(x) = -4x - 4$$
$$-2 \cdot 2 \cdot x - 4 \cdot 1 \cdot x^0$$

Elementare Ableitungsregeln:

Potenzregel

$$f(x) = x^n$$
$$f'(x) = \frac{df}{dx} = n \cdot x^{(n-1)}$$

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$

konstante Funktion:

$$f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = c \cdot x^0 = 0 \cdot c \cdot x^{-1} = 0$$

$$f(x) = 2$$
$$f'(x) = 0$$

konstante Faktoren / Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot x^n$$
$$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{(n-1)}$$

$$f(x) = 3 \cdot x^4$$
$$f'(x) = 12 x^3$$

Summenregel:

$f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{(n-1)} + \dots + y \cdot x^1 + z$

$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{(n-1)} + (n-1) \cdot b \cdot x^{(n-2)} + \dots + y$

$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = 6x + 2$

Summen / Differenzen können pliedweise differenziert werden.

Zum Beispiel:

$s(t) = 4t^2 + 2t - 7$

$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} = 8t + 2$

$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = 8$

Bsp: $s(t) = 0{,}5t^2 + 15t + 2 \quad [0; 5]\,s$

1) mittlere Geschwindipkeit?

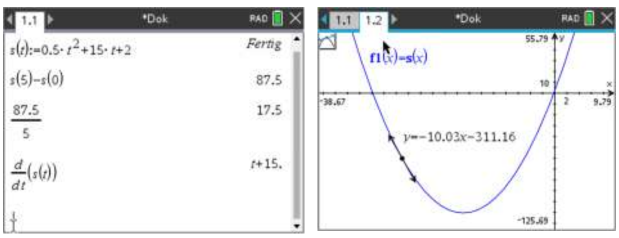
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(0{,}5 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 2) - 2}{5} = \underline{\underline{17{,}5 \frac{m}{s}}}$$

2) momentane Geschwindipkeit bei 3s?

$v(t) = \frac{ds}{dt}$

$v(t) = t + 15$

$v(3) = 3 + 15 = \underline{\underline{18 \frac{m}{s}}}$



4.9)

4.9 Ein Körper wird senkrecht nach oben geworfen. Das Diagramm zeigt die Höhe des Körpers zur Zeit t nach dem Abwurf.

1) Lies die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Intervall [1 s; 2 s] ab.

2) Veranschauliche die momentane Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t_0 = 1 s. Lies diese Geschwindigkeit ab. $v = 15 \frac{m}{s}$

4.73) $h(t) = 11 \cdot t - 5 \cdot t^2$

$6 = 11t - 5t^2$

$-5t^2 + 11t - 6 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad a = -5,\ b = 11,\ c = -6$

$t_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-6)}}{2 \cdot -5}$

$t_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 120}}{-10}$

$t_{1,2} = \frac{-11 \pm 1}{-10}$

$t_1 = \underline{\underline{1s}} \qquad t_2 = \frac{12}{10} = \underline{\underline{\frac{6}{5}}}\,s$

Ableitung:

$v(t) = h'(t) = 11 - 10t$

$1\,m$

Ableitung:

$v(t) = h'(t) = 11 - 10t$

$v(1) = 11 - 10 \cdot 1 = \underline{\underline{1 \frac{m}{s}}}$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Freier Fall eines Apfels

Aufgabennummer: A_181		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Ein Apfel fällt vom Baum auf den Boden. Die senkrechte Entfernung des frei fallenden Apfels vom Boden in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch die Funktion h beschrieben:

$h(t) = u - 5 \cdot t^2$ mit $u \in \mathbb{R} > 0$

$u = h(t) + 5t^2$

t … Fallzeit in s
$h(t)$ … Abstand des Apfels zur Zeit t zum Boden in m

$h(0) = u - 5 \cdot 0 = \underline{u}$

a) – Zeigen Sie, dass die Konstante u der Fallhöhe entspricht.
– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Fallzeit t_F des Apfels, wenn u bekannt ist.

$t_F = \sqrt{\frac{h(t) - u}{-5}}$ ______________________

b) Ein Apfel fällt aus einer Höhe von 15 m. $15 - 5 \cdot t^2$

– Berechnen Sie den Betrag der mittleren Geschwindigkeit des Apfels für den Zeitraum $0{,}5\ \text{s} \leq t \leq 1{,}5\ \text{s}$.
– Beschreiben Sie, wie man vorgeht, um für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 die Momentangeschwindigkeit zu erhalten.

$\bar{v} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(1{,}5) - h(0{,}5)}{1} = (15 - 5 \cdot 1{,}5^2) - (15 - 5 \cdot 0{,}5^2) = -10 \frac{m}{s}$

$\underline{\underline{\bar{v} = 10 \frac{m}{s}}}$

1. Ableitung von $h(t) \rightarrow t_0$ einsetzen

c) – Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung des Apfels.

$a(t) = v'(t) = h''(t) = 10 \frac{m}{s^2}$

d) Der Luftwiderstand F_w, den der Apfel während seines Falls erfährt, lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$F_w = k \cdot v^2$

F_w … Luftwiderstand
k … Konstante
v … Geschwindigkeit des Apfels

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Luftwiderstand F_w ist proportional zur Geschwindigkeit v.	☐
Wird der Luftwiderstand F_w verdoppelt, vervierfacht sich die Geschwindigkeit v.	☐
Der Luftwiderstand F_w ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v.	☐
Haben Luftwiderstand F_w und Geschwindigkeit v den gleichen Zahlenwert, so gilt $k = 1$.	☐
Nimmt die Geschwindigkeit v um den Wert 1 zu, dann nimmt der Luftwiderstand um den Wert k zu.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

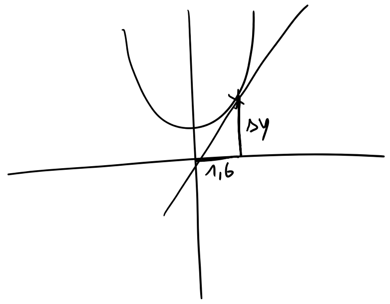
21.12.2021

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 2$

$f'(x) = x$

$p'(x) = x$

$p'(1{,}6) = \underline{\underline{1{,}6}} = k$



$y = k \cdot x + d$

$y = 1{,}6 \cdot x + d$

$3{,}28 = 1{,}6 \cdot 1{,}6 + d$

$\underline{d = 0{,}72}$

$P(x|y)$

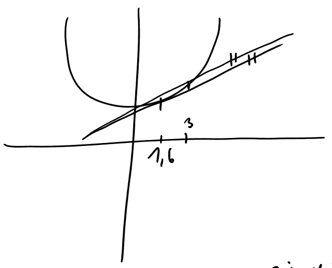
$y = \frac{1{,}6^2}{2} + 2$

$\underline{\underline{P(1{,}6|3{,}28)}}$

Funktion d. Tangente:

t: $\underline{\underline{y = 1{,}6 \cdot x + 0{,}72}}$

•) Glg. einer ∥ Gerade zu t bei x = 3?



$y = k \cdot x + d$

$y = 1{,}6 \cdot x + d$

$d = y - 1{,}6 \cdot 3$

$d = 6{,}5 - 1{,}6 \cdot 3$

$\underline{\underline{d = 1{,}7}}$

g: $\underline{\underline{y = 1{,}6x + 1{,}7}}$

•) Glg. einer ⊥ Gerade zu t bei x = 3?

g: $y = k \cdot x + d$

Minus + Kehrwert

$y = -0{,}625x + d$

$d = y + 0{,}625x$

$d = 6{,}5 + 0{,}625 \cdot 3$

$\underline{\underline{d = 8{,}375}}$

h: $y = -0{,}625x + 8{,}375$

<u>Bsp.:</u>

Bsp.:

$$f(x) = 2x^3 + 4x - \sqrt{x} \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$x_0 = 1$$

$$f'(x) = 6x^2 + 4 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \qquad \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(1) = 9{,}5$$

t: $y = k \cdot x + d$

$y = 9{,}5 \cdot x + d$

$5 = 9{,}5 + d$ $\qquad P(1 \mid f(1))$

$d = -4{,}5$ $\qquad \downarrow$ 5

t: $y = 9{,}5 \cdot x - 4{,}5$

Bsp.:

$$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x - 4 \cdot x^{-3} + 5 \cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + 12x^{-4} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{12}{x^4} - \frac{5}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

SÜ, am 10.01.2022

4.71) a) $y = x^2 - 3$; $x_0 = 1$

$y' = 2x$ $\qquad k = y'(x)$

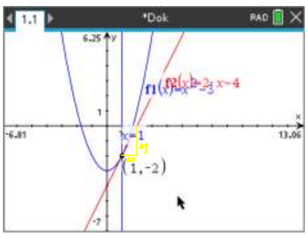
Tangente an Stelle 1:

$P(1 \mid y_P)$ $\qquad f(x) = k \cdot x + d$

$P(1 \mid 1^2 - 3)$ $\qquad -2 = 2 \cdot 1 + d$

$P(1 \mid -2)$ $\qquad d = -4$

$f(x) = 2 \cdot x - 4$



SÜ, am 11.01.2022

4.254) a) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt[3]{x^5}}$$