1.159)   + 1.172)

1.167)

1.159 Gib den Grenzwert g für $n \to \infty$ zuerst ohne zu rechnen an. Überprüfe deine Vermutung anschließen-f mithilfe -er Grenzwertsätze.

a) $a_n = \frac{n+4}{n^2-8}$ **b)** $a_n = \frac{8n^6+12}{n^6+3n-5}$ **c)** $a_n = \frac{7n^6+n^2-13}{n^5-n-2}$ **d)** $a_n = \frac{3+7n}{4n^4-11}$

a) 0 $\to \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} \to 0 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} \to 0}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{n^2} \to 0} = \frac{0}{1} = 0$ ✓

b) 8 $\to \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8\cancel{n^6}}{\cancel{n^6}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{12}{n^6} \to 0}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^6}}{\cancel{n^6}} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{6}5}} \to 0 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^6} \to 0} = \frac{8}{1} = 8$ ✓

c) kein GW $\to \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7\cancel{n^6}}{\cancel{n^6}} + 0 - 0}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^6} \to 0 - 0 - 0} = \frac{7}{0}$ ∄ GW ✓

d) 0 $\to \dfrac{0 + 0}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\cancel{n^4}}{\cancel{n^4}} - 0} = \frac{0}{4} = 0$ ✓

1.167 Argumentiere für jede der angegebenen Folgen, ob die Summe der zugehörigen unendlichen Reihe konvergiert oder divergiert.

1) ⟨5, 5, 5, 5, ...⟩ **3)** $\langle \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, ... \rangle$ **5)** ⟨2; 3; 4,5; 6,75; ...⟩

2) ⟨3; 1,5; 0,75; 0,375; ...⟩ **4)** ⟨2, 4, 6, 8, ...⟩ **6)** ⟨1, 4, 7, 10, ...⟩

1) divergiert → $q > 1$ → das bedeutet, man kann keine Summe bilden ✓

2) konvergiert → $q < 1$ → das bedeutet, man kann eine Summe bilden ✓

3) konvergiert → $q < 1$ ✓

4) divergiert → $d = 2$ ✓

5) divergiert → $q > 1$ ✓

6) divergiert → AF ✓

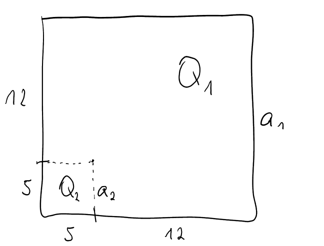
1.172 Die Seiten eines Quadrats Q_1 mit der Seitenlänge a_1 werden im Verhältnis 5 : 12 geteilt. Die Teilungspunkte sind die Eckpunkte eines zweiten Quadrats Q_2, dessen Seitenlängen ebenfalls im gleichen Verhältnis geteilt werden, sodass ein weiteres Quadrat Q_3 entsteht. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt.

1) Berechne die Summe der Umfänge von Q_1 bis Q_{12}.

2) Berechne die Summe aller Umfänge.

3) Argumentiere, warum das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Flächeninhalte $\frac{169}{289}$ ist. Berechne anschließend die Summe aller Flächeninhalte.

Variante 1:



1) $u_n = 4 \cdot a_1 + 4 \cdot a_1 \cdot \frac{5}{17} + 4 \cdot a_1 \cdot \frac{5 \cdot 5}{17 \cdot 17} + \dots 4 \cdot a_1 + \frac{5^{12}}{17^{12}}$

$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \underline{4a_1 \cdot \left(\frac{5}{17}\right)^{n-1}}$

$S_{12} = \sum\limits_{n=1}^{12} u_n = 4a_1 \cdot \dfrac{\left(\frac{5}{17}\right)^{12} - 1}{\frac{5}{17} - 1} = \underline{\underline{5{,}6666\ldots \cdot a_1 \text{ cm}}}$

A: Der Umfang der ersten zwölf Quadrate ist ca. 6,86mal a_1.

2) $S_\infty = 4 \cdot a_1 \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{5}{}} = \underline{\underline{5{,}\dot{6} \cdot a_1 \text{ cm}}}$

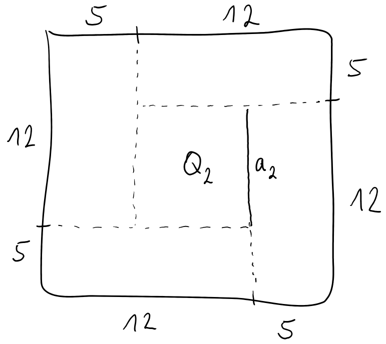
2) $S_\infty = 4 \cdot a_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{17}} = \underline{\underline{5{,}\mathring{6} \cdot a_1 \text{ cm}}}$

3) $A_n = \left[a_1 \cdot \left(\frac{5}{17}\right)^{n-1}\right]^2 = a_1^2 \cdot \left(\frac{25}{287}\right)^{n-1}$

$\downarrow$

$\underline{q = \frac{25}{287}}$

Variante 2:



1) $a_2 = \frac{a_1 \cdot (17 - 2 \cdot 5)}{17}$

$a_2 = \frac{7a_1}{17}$

$\underline{q = \frac{7}{17}}$

$S_{12} = \sum_{n=1}^{12} u_n = 4 \cdot a_1 \cdot \frac{\left(\frac{7}{17}\right)^{12} - 1}{\frac{7}{12} - 1} = \underline{\underline{6{,}7998\ldots \cdot a_1 \text{ cm}}}$

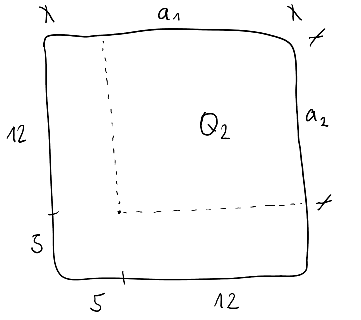
2) $S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 4 \cdot a_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{17}} = \underline{\underline{6{,}8 \cdot a_1 \text{ cm}}}$

3) $A_n = \left[a_1 \cdot \left(\frac{7}{17}\right)^{n-1}\right]^2 = a_1^2 \cdot \left(\frac{49}{289}\right)^{n-1}$

$\downarrow$

$\underline{q = \frac{49}{289}}$

Variante 3:



1) $q = \frac{12}{17}$

$u_n = 4a_1 \cdot \left(\frac{12}{17}\right)^{n-1}$

$S_{12} = \sum_{n=1}^{12} u_n = 4a_1 \cdot \frac{\left(\frac{12}{17}\right)^{12} - 1}{\frac{12}{17} - 1} = \underline{\underline{13{,}3918\ldots \cdot a_1 \text{ cm}}}$

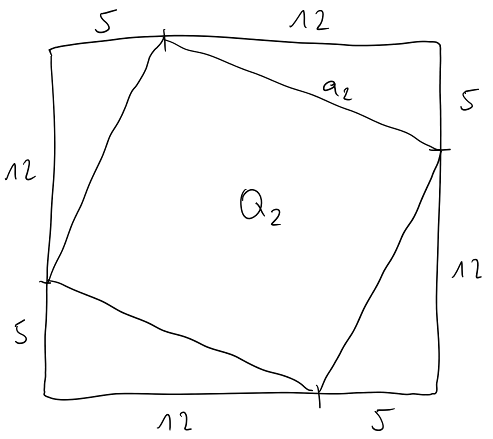
2) $s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 4a_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{12}{17}} = \underline{\underline{13{,}6 \cdot a \text{ cm}}}$

3) $A_n = \left[a_1 \cdot \left(\frac{12}{17}\right)^{n-1}\right]^2 = a_1^2 \cdot \left(\frac{144}{289}\right)^{n-1}$

$\downarrow$

$\underline{q = \frac{144}{289}}$

Variante 4:



1) $a_2 = \sqrt{\left(\frac{5}{17} \cdot a_1\right)^2 + \left(\frac{12}{17} \cdot a_1\right)^2}$

$a_2 = \frac{13}{17} \cdot a_1$

$u_n = 4 \cdot a_1 \cdot \left(\frac{13}{17}\right)^{n-1}$

$s_{12} = \sum_{n=1}^{12} u_n = 4a_1 \cdot \frac{\left(\frac{13}{17}\right)^{12} - 1}{\frac{13}{17} - 1} = \underline{\underline{16,3201\ldots \cdot a}}$

2) $s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 4a_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{13}{17}} = \underline{\underline{17a}}\ cm$

3) $A_n = \left[a_1 \cdot \left(\frac{13}{17}\right)^{n-1}\right]^2 = a_1^{\,2} \cdot \left(\frac{169}{289}\right)^{n-1}$

$\downarrow$

$q = \frac{169}{289}$

A: Die Seitenlänge des nächst inneren Quadsats beträgt $\frac{13}{17}$ der Seitenlänge des äußeren Quadrats, weil diese mit dem Pytaporas berechnet wird. Die Katheten betrapen hierbei $\frac{5}{17}$ und $\frac{12}{17}$. Das Verhältnis der Flächeninhalte beträpd $\frac{169}{289}$, weil dies die $\frac{13}{17}$ der Seitnlänge quadriert sind. Es muss quadriert sein, weil der Flächeninhalt mit der Formel $A = a^2$ berechnet wird.

$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = a_1^{\,2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{169}{289}} = \underline{\underline{2,408\dot{3} \cdot a^2\ cm^2}}$

1 cm

4. Woche

Donnerstag, 23. September 2021 19:13

1.174)

1.203)

1.98)a)

1.103) - 1.106) a)

B_449_Lauftraining

B_436_Sitzreihen

B_242_Seriationsmaterial

1.174) 1) Nein, weil $q = 0,5$ ist.

2) Ja, weil sich die Länge aller HKU dem ersten HKU langsam annähert.

$$U_\infty = \frac{a_1 \cdot \pi}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{1}}{1 - \frac{1}{2}} = a \cdot \pi$$

$$U_K = a_1 \cdot \pi$$

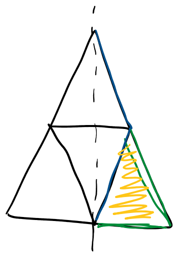
3) Nein, es ist hoch 2. $\frac{U_1}{U_2} = \frac{A_1}{A_2}$

4) Nein, der würde sich $\frac{1}{16}$.

1.203) $u_n = u_1 \cdot 0,5^{n-1}$

$u_1 = 10 + 2 \cdot 26$

$u_1 = 62$



$u_n = 62 \cdot 0,5^{n-1}$

a) $S_{10} = 62 \cdot \frac{0,5^{10} - 1}{0,5 - 1} = 123,878\ldots \text{ cm}$ ✓

b) $S_\infty = 62 \cdot \frac{1}{1 - 0,5} = 124 \text{ cm}$ ✓

1.98)a) $Z = K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360}$

$z = 350 \cdot 0,032$

$z = 11,2$ € ✓

1.103)a) $q = 1 + i = 1,015$

$q = 1 + \frac{3i}{4} = 1,01125$

1.104)a) $K(t) = 3500 \cdot 1,015^{15}$

$K(t) = 4375,812\ldots$ € ✓

1.105)a) $10\,406,30 = 5000 \cdot (1+i)^{14} \quad | :5000$

$2,08126 = (1+i)^{14}$

$1 + i = \sqrt[14]{2,08126}$

$i = 5,375\,\%$ ✓

1.106)a) $2\,968,92 = 2200 \cdot 1,04375^n$

$1,349\ldots = 1,04375^n$

$n = \frac{\ln(1,349\ldots)}{\ln(1,04375)}$

$n = 9,28\ldots$ Jahre ✓

$n = 9{,}28\ldots$ Jahre

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Lauftraining*

Aufgabennummer: B_449

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Anna, Beate und Clara bereiten sich auf einen Laufwettbewerb vor. Dabei verfolgen sie unterschiedliche Trainingspläne.

a) Anna und Beate überlegen sich folgende Trainingspläne:

		Trainingstag			
		1	2	3	4
Länge der Trainingsstrecke in km	Anna	1,5	1,65	1,815	1,9965
	Beate	1,5	2	2,5	3

1) Zeigen Sie, dass die Längen der Trainingsstrecken von Anna an den ersten 3 Tagen eine geometrische Folge bilden.

$q = \frac{1,65}{1,5} = \frac{1,815}{1,65} = 1,1$

2) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

$b_{n+1} = b_n \cdot 1,1;\ b_1 = 1,5$

Die Längen der Trainingsstrecken von Beate an den ersten 3 Tagen bilden eine arithmetische Folge.

3) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf. $a_{n+1} = a_n + 0,5$

4) Ergänzen Sie unter Verwendung der jeweiligen Bildungsgesetze die fehlenden Werte in der letzten Spalte der obigen Tabelle.

b) Clara berechnet die Längen ihrer Trainingsstrecken folgendermaßen:

$c_n = 2,75 + 0,125 \cdot n$

n ... Trainingstag
c_n ... Länge der Trainingsstrecke am n-ten Tag in km

1) Berechnen Sie, am wievielten Trainingstag Claras Trainingsstrecke eine Länge von 8 km hat.

A: Am 42. Trainingstag hat Clara 8 km erreicht.

$2,75 + 0,125 \cdot n = 8 \quad |-2,75$

$0,125 \cdot n = 5,25 \quad |:0,125$

$n = 42$

* ehemalige Klausuraufgabe

GF:

$a_1 = 1,5$

$a_2 = 1,65$

$a_1 = 1,5 \cdot q^0$

$a_2 = 1,5 \cdot q^1$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1,65}{1,5} = 1,1$

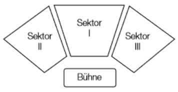
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sitzreihen*

Aufgabennummer: B_436

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Schule plant eine Theateraufführung im Turnsaal. Der Schulwart hat die Idee, die Zuschauerstühle wie folgt um die Bühne aufzubauen (siehe nachstehende Abbildung).



a) Im Sektor I stehen in der ersten Sitzreihe 8 Stühle. In jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 3.

– Begründen Sie mathematisch, warum die Anzahlen der Stühle in den jeweiligen Sitzreihen eine arithmetische Folge a_n bilden.

$a_n = a_1 + 3n$ Es skipt um eine feste Anzahl.

– Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für a_n auf.

$a_{n+1} = a_n + 3$; $a_1 = 8$

b) Im Sektor II stehen in der ersten Sitzreihe 5 Stühle, in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 1.

– Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz auf, mit dem man die Anzahl der Stühle in der n-ten Sitzreihe berechnen kann.

$a_n = 4 + n$

Die Gesamtanzahl der Stühle in den ersten n Sitzreihen des Sektors II ist $\frac{(9 + n) \cdot n}{2}$.

– Berechnen Sie, aus wie vielen Sitzreihen der Sektor II besteht, wenn 126 Stühle für diesen Sektor verwendet werden.

12

$126 = \frac{(9+n) \cdot n}{2}$

$252 = 9n + n^2$

$n^2 + 9n - 252 = 0$

$a = 0$
$b = 9$
$c = -252$

$n_1 = -21$ $\underline{n_2 = 12}$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für den Sektor III ist eine Sitzordnung vorgesehen, bei der die Anzahl der Stühle in der n-ten Sitzreihe durch folgendes explizites Bildungsgesetz beschrieben wird:

$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahlen 5 und 4 im gegebenen Sachzusammenhang.

5 … Startanzahl 4 … pro Reihe 4 mehr

– Berechnen Sie, wie viele Stühle in der 7. Sitzreihe stehen.

29 $5 + 4 \cdot 6$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

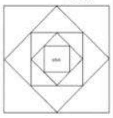
Seriationsmaterial

Aufgabennummer: B_242

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem Kindergarten gibt es verschiedene Materialien, mit denen die Kinder spielerisch Größenverhältnisse erforschen können. Eines dieser Materialien besteht aus quadratischen Platten aus festem Schaumstoff, deren Seitenlängen S_n eine geometrische Folge bilden (Abb. 1). Jedes Quadrat berührt das nächstgrößere mit seinen Eckpunkten genau im Mittelpunkt der Seiten.
Die größte Platte hat eine Seitenlänge von 1 Meter (m).

Abb. 1



$\sqrt{2 \cdot 0{,}5^2} = 0{,}70710\ldots$

a) – Berechnen Sie die Seitenlänge der 2. Platte in Zentimetern (cm).

$\approx$ 71 cm

b) – Begründen Sie, warum der nachstehende Graph in Abb. 2 die geometrische Folge, die in Abb. 1 dargestellt ist, beschreibt.

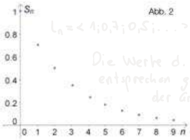


Abb. 2

c) Ein Spielmaterial besteht aus Holzstäben, deren Länge jeweils um 5 cm zunimmt. Der kürzeste Stab ist 10 cm lang.

$a_n = 10 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 5$

– Erstellen Sie eine Formel, mit der man die Länge a_n eines beliebigen Stabes berechnen kann.
– Beschreiben Sie alle Variablen, die in der Formel vorkommen.

a_n … Länge d. nten Holzstäbchens in cm n … wievielte Stäbchen

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

November

Donnerstag, 23. September 2021 19:13

2.8)
2.12)
2.13)
2.23) a)

2.8 Erkläre, welchem Grenzwert sich die Funktion B mit $B(x) = \frac{3}{2 + e^{-x}}$ für $x \to \infty$ nähert.

Weil e^{-x} im Unendlichen gegen 0 konvergiert, ergibt der Grenzwert gegen Unendlich 1,5.

2.12 Eine Software-Firma präsentiert ein neues Computerspiel, das per App auf ein Mobiltelefon geladen werden kann. Die Anzahl der Personen, die das neue Spiel auf ihr Mobiltelefon geladen haben, lässt sich durch die Funktion A beschreiben:

B D TE

$A(t) = \frac{4\,236}{1 + 5 \cdot e^{-0{,}14 \cdot t}}$

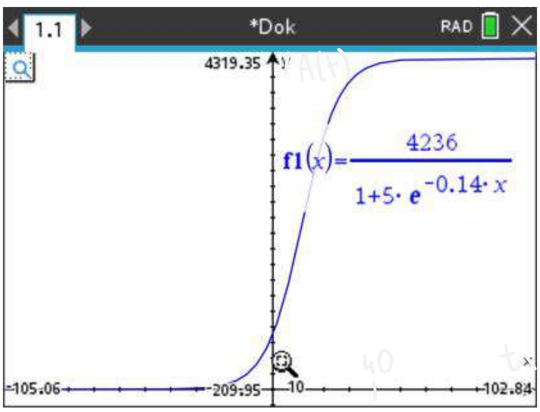
t … Zeit in Wochen, A(t) … Anzahl der Personen zur Zeit t, die das Spiel geladen haben

1) Stelle die Funktion für die ersten 40 Wochen grafisch dar.

2) Argumentiere anhand der Grafik, dass es sich bei diesem Modell um ein logistisches Wachstum handelt.

3) Begründe anhand der Funktionsgleichung, welchem Wert sich die Anzahl der Personen nach langer Zeit nähert.

1)



ACHSENBESCHRIFTUNG

2) Diese Funktion hat einen oberen und unteren Grenzwert, und sieht aus wie „S".

3) 4236, weil der Zähler bei logischem Wachstum der Grenzwert ist.

2.13 Das Bevölkerungswachstum einer Kleinstadt kann durch folgende Funktion B beschrieben werden:

$B(t) = \frac{250t}{t^2+4} + 500$ für $t \geq 0$

t … Zeit in Jahren, B(t) … Anzahl der Bevölkerung in 1 000 zur Zeit t

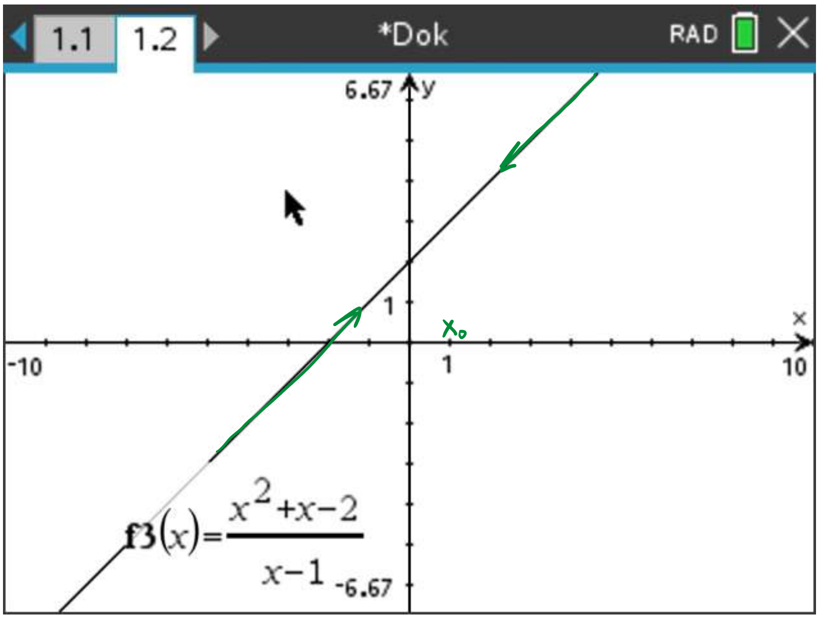
1) Berechne die Bevölkerungsanzahl zu Beginn der Aufzeichnungen.

2) Erkläre anhand der Funktionsgleichung, welchem Wert sich die Bevölkerungsanzahl nach sehr langer Zeit nähert.

1) $B(0) = \frac{250 \cdot 0}{0+4} + 500 = 500 \cdot 1000 = \underline{500\,000 \text{ EW}}$

2) Wenn x gegen Unendlich geht, hebt sich der 1. Term auf und es bleibt nur 500 000 EW übrig.

2.23 **a)** $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$, $x_0 = 1$



$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g_L = 3 \quad g_R = 3 \quad g_L = g_R = g = 3$ ✓

$g \neq f(1) =$ nicht definiert

$\Rightarrow$ nicht stetig

ABER: stetig fortsetzbar

5. Woche

Donnerstag, 23. September 2021 19:13

2.39) a) b) → rechnerisch
2.40) a)
2.51) c)
2.52) a)

Def.
Art d. Unstet.
+alle Asymptoten

2.39 ~~Stelle die Funktion grafisch dar.~~ Überlege ~~mithilfe der Zeichnung~~ und der Funktionsgleichung, ob und an welchen Stellen, welche Arten von Unstetigkeitsstellen vorliegen.

a) $y = \frac{1}{1-x^2}$ **b)** $y = e^{-3x^2+1}$ **c)** $y = 2^x$ **d)** $y = \frac{1}{\sin(x)}$ **e)** $y = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

a) $y = \frac{1}{1-x^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$x_0 = 1 \quad x_0 = -1$ $\quad g_L = -\infty \neq g_R = \infty$

$\Downarrow$

$g_L = \lim_{x \to 1^-} y = \infty$

$\neq \implies$ POLSTELLE

$g_R = \lim_{x \to 1^+} y = -\infty$

Asymptoten: Relation: $\underline{x = 1}$ $\underline{x = -1}$

Funktion $\lim_{x \to \infty} y \Rightarrow \underline{y = 0}$

b) $f(x) = e^{-3x^2+1}$

$D = \mathbb{R}$ → <u>keine Unstetigkeitsstellen</u>

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\quad \underline{y = 0}$ → Asymptote

2.40 Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-2}$ auf Stetigkeit. Gib die Art der Unstetigkeitsstelle an. Stelle den Funktionsgraphen der Funktion f dar und zeichne die Asymptoten ein.

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\neq \implies$ Polstelle bei $x = 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$

Asymptoten: Relation: $x = 2$

Funktion: $y = 0$

2.51 Bestimme die Definitionsmenge der Funktion und beschreibe das Verhalten der Funktion an den Definitionslücken. Gib die Gleichungen der senkrechten Asymptoten an.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ **b)** $f(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{25-4x^2}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x^2-2x}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2,5; 2,5\}$

$(25 - 4x^2 = (5-2x)(5+2x))$

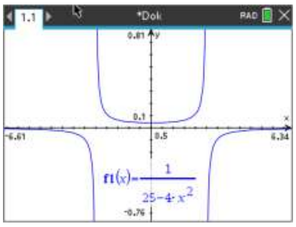
$(25-4x^2 = (5-2x)(5+2x))$

$\uparrow$

Herr Formel Binomisch der 3te

$\lim\limits_{x \to -2,5^-} f(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to 2,5^-} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -2,5^+} f(x) = \infty$ | $\lim\limits_{x \to 2,5^+} f(x) = -\infty$



In beiden Fällen eine Polstelle.

Asymptoten: Relation: $x = -2,5$

$x = 2,5$

Funktion: $y = 0$

2.52 Bestimme die stetige Fortsetzung der gegebenen Funktion. Gib sie als einzelnen Term und als stückweise definierte Funktion an.

a) $f(x) = \frac{2x^2-8x}{x-4}$ **b)** $f(x) = \frac{8x^3-4x^2+2x}{x^2-2x+1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x+2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^4-18x^2+81}{x^2-6x+9}$

$f(x) = \frac{2x^2-8x}{x-4}$ → polynomdivision Jahre später...

$\overline{f(x)} = 2x$

$\frac{2x^2-8x}{x-4} = \frac{2x \cdot \cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}} = 2x$

$f(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$\overline{f(x)}$: $D = \mathbb{R}$ (← nicht so interessant :))

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 8$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 8$

$\Rightarrow$ HEBBARE LÜCKE

(wer hätte das gedacht...?)

Asymptote: Relation: $x = 8$ (nur bei $f(x)$)

(nicht bei $\overline{f(x)}$)

Funktion: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ → keine waagrechte Asymptote

Dezember

Montag, 6. Dezember 2021 14:38

2. Woche

Montag, 6. Dezember 2021 14:38

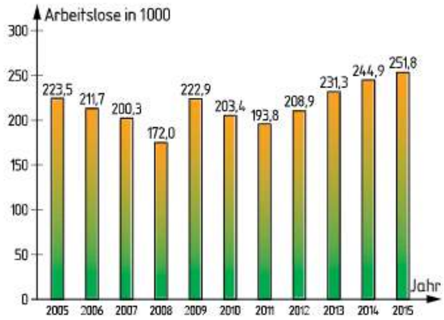
4.4)

4.4 Das Diagramm zeigt die Anzahl der arbeitslosen Erwerbsfähigen über 15 Jahre in Österreich in den Jahren von 2005 bis 2015.

1) Ermittle die absolute Änderung der Arbeitslosenzahlen von 2005 bis 2010 sowie von 2010 bis 2015. Vergleiche die Ergebnisse.

2) Berechne die relative Änderung der Arbeitslosenzahlen von 2005 bis 2006 sowie von 2009 bis 2010. Interpretiere die Ergebnisse.

3) Überprüfe folgende Aussage nachweislich: *„Im Vergleich zu den Jahren 2013 und 2014 ist der relative Zuwachs der Arbeitslosenzahlen von 2014 auf 2015 zurückgegangen."*



1) 2005 - 2010: $203{,}4 - 223{,}5 = \underline{-20{,}1 \text{ ALZ}}$ (· 1000)

2010 - 2015: $251{,}8 - 203{,}4 = \underline{48{,}4 \text{ ALZ}}$ (· 1000)

Vom Jahr 2005 auf 2010 ist die Arbeitslosenzahl gesunken, von 2010 auf 2015 ist sie dann wieder gestiegen.

2) 2005 - 2006: $\frac{211{,}7 - 223{,}5}{223{,}5} = \underline{-0{,}052\ldots \text{ ALZ}}$

2009 - 2010: $\frac{203{,}4 - 222{,}9}{222{,}9} = \underline{-0{,}087\ldots \text{ ALZ}}$

Relativ gesehen ist die ALZ von 2009 auf 2010 stärker zurückgegangen als von 2005 auf 2006. (Auch absolut betrachtet ist dies der Fall...)

3) 2013 - 2014: $\frac{244{,}9 - 231{,}3}{231{,}3} = \underline{0{,}058\ldots \text{ ALZ}}$

$$2014-2015: \frac{251{,}8-244{,}9}{244{,}9} = \underline{0{,}028\ldots \text{ ALZ}}$$

A: Mit dieser Aussage hat die Person, die sie petätigt hat, recht, weil die Zahlen (/Rechnungen) der Person mit Freude zustimmen.

SMÜ Verbessern

3. Woche

Montag, 6. Dezember 2021 14:38

4.10)

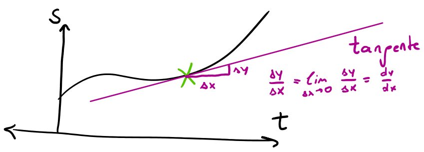
4.11) b) $\longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} + \arctan(\alpha)$

4.12) a)

4.10 Ergänze die Textlücken in folgendem Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Bei einer Weg-Zeit-Funktion wird ___①___ durch ___②___ angegeben.

①		②	
der Unterschied zwischen zwei Strecken	A	den Differenzenquotienten	A
die Momentangeschwindigkeit	☒ B	den Differentialquotienten	☒ B
die mittlere Beschleunigung	C	die relative Änderung	C



4.11 Ermittle die 1. Ableitung der gegebenen Funktion mithilfe des Differentialquotienten.
a) $f(x) = -x^3$ **b)** $f(x) = 2x^2 - 3$ **c)** $f(x) = x^2 + x$

$f(x) = 2x^2 - 3$ (Schnellverfahren: $f'(x) = 4x$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_0 + \Delta x)^2 - 3 - [2 \cdot x_0^2 - 3]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2) \cancel{-3} - 2x_0^2 \cancel{+3}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x_0^2} + 4x_0 \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 \cancel{-2x_0^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x_0 \cdot \Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (4x_0 + 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4x_0 + 2\Delta x) =$$

0

$$f'(x_0) = 4x_0$$

Winkel d. Steigung berechnen:

$\Delta x = $ z.B.: 1

$\hookrightarrow \Delta y = 4 \cdot 1 = 4$

$$\tan(\alpha) = k$$

$$\hookrightarrow \alpha = \arctan(k) = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) =$$

$$= \arctan\left(\frac{4}{1}\right) =$$

$$\alpha = 75{,}963°$$

4.12 Ermittle den Steigungswinkel der Funktion an der angegebenen Stelle.
a) $f(x) = 0{,}3x^2$; $x_0 = -1$ **b)** $f(x) = -3x^3$; $x_0 = 0{,}2$ **c)** $f(x) = 1{,}5x^2 + 3$; $x_0 = -0{,}5$

$f(x) = 0{,}3x^2$

ges.: mom. Änd. an Ste. $x_0 = -1$

$f(x) = 0{,}3x^2 \rightarrow f'(x) = 0{,}6x$

$$f(x) = 0{,}3x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}3(x_0 + \Delta x)^2 - 0{,}3x_0^2}{\Delta x} =$$

$f(x) = 0{,}3x^2 \to f'(x) = 0{,}6x$

$\boxed{\text{EASY MODE}}$

$f'(-1) = 0{,}6 \cdot (-1) = \underline{\underline{-0{,}6}}$

Steigung:

$\arctan(k) \to \arctan(-0{,}6) = -30{,}963°$

negativer Winkel: Steigung nach unten

A: An der Stelle -1 hat die Tangente eine Steigung nach unten von ca. $31°$.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}3(x_0+\Delta x)^2 - 0{,}3x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}3\,(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2) - 0{,}3x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{0{,}3x_0^2} + 0{,}6\,x_0 \cdot \Delta x + 0{,}3\Delta x^2 - \cancel{0{,}3x_0^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}6x_0 \cdot \Delta x + 0{,}3\Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (0{,}6\,x_0 + 0{,}3\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(0{,}6x_0 + 0{,}3\overset{0}{\Delta x}\right) = \underline{\underline{0{,}6x}}$$

Januar

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

2. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

4.61)

4.62)

4.68) a)

erste Ableitung an bestimmten Punkt:

4.61 **a)** $y = 3x^2 - 2x + 1, \; x_0 = -1$ **b)** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4} + 3, \; x_0 = 25$ **c)** $y = 3 - \frac{1}{x}, \; x_0 = 0{,}5$

a) $y' = 6x - 2$

$\rightarrow y'(x_0) = k = 6 \cdot -1 - 2 = -8$

$P(-1|6) \rightarrow 6 = -8 \cdot -1 + d$

$d = -2$

$p(x) = -8x - 2$

b) $p(x)' = \frac{1}{8\sqrt[2]{x}}$

$\rightarrow p'(x_0) = k = \frac{1}{8\sqrt{25}} = 0{,}025$

$P(25|1{,}25) \rightarrow 1{,}25 = 0{,}025 \cdot 25 + d$

$d = 0{,}625$

$p(x) = 0{,}025x + 0{,}625$

c) $y' = x^{-2}$

$\rightarrow y'(x_0) = k = 0{,}5^{-2} = 4$

$P(0{,}5|1) \rightarrow 1 = 4 \cdot 0{,}5 + d$

$d = -1$

$p(x) = 4x - 1$

$p(x) = 4x - 1$

erste Ableitung an bestimmten Punkt:

4.62 **a)** $q(t) = 2t^2 + 3t - \frac{1}{t}$, $t_0 = 3$ **b)** $f(x) = \frac{2x^5}{3} - \frac{x^3}{6} + \frac{27}{2x^2}$, $x_0 = -3$

a) $q' = 4t + 3 + \frac{1}{t^2}$ ✓

$\rightarrow q'(t_0) = k = 4 \cdot 3 + 3 + \frac{1}{9} = \underline{15{,}\dot{1}}$ ✓

$P(3 \mid 26{,}\dot{6}) \rightarrow 26{,}\dot{6} = 15{,}\dot{1} \cdot 3 + d$

$\underline{d = -18{,}\dot{6}}$

$\underline{p(x) = 15\frac{1}{9}x - 18\frac{2}{3}}$

b) $f' = \frac{10x^4}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{54}{2x^3}$

$(-3)^2$ ← Klammern!

$\rightarrow f'(x_0) = k = \frac{10 \cdot -3^2}{3} - \frac{-3^2}{2} - \frac{54}{2 \cdot -3^2} = \underline{266{,}5}$ ✓

$P(-3 \mid -156) \rightarrow -156 = 266{,}5 \cdot -3 + d$

$\underline{d = 643{,}5}$

$\underline{p(x) = 266{,}5x + 643{,}5}$

4.68 Berechne, an welcher Stelle der Funktion die Tangente die angegebene Steigung hat.
a) $y = x^2 - 5x + 11$, $k = \frac{1}{2}$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$, $k = 10$ **c)** $y = x + \sqrt{x} - 1$, $k = \frac{5}{4}$

$\underline{y' = 2x - 5}$

$y'(x_0) = k = \frac{1}{2} = 2x - 5 \quad | +5$

$5\frac{1}{2} = 2x \quad | :2$

$\underline{x = 2{,}75}$ ✓

A: An der Stelle 2,75 hat die Tangente eine Steigung

A: An der Stelle 2,75 hat die Tangen[illegible]
von 0,5.

4.110)
4.113)
4.121)
4.140)

erste Ableitung: $f'(x)$ (4.110 + 4.113)

4.110 **a)** $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ **b)** $f(x) = x \cdot \lg(x)$ **c)** $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$ **d)** $f(t) = 3e^t \cdot \ln(t)$

a) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$

$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x}$ ✓

b) $f(x) = x \cdot \lg(x)$

$f'(x) = \lg(x) + x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$ ✓

c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$ ✓

d) $f(x) = 3e^x \cdot \ln(x)$

$f'(x) = 3e^x \cdot \ln(x) + 3e^x \cdot \frac{1}{x} = 3e^x \cdot \left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right)$ ✓

4.113 **a)** $y = (x^2 + 3) \cdot 5^x$ **b)** $y = 5x \cdot 2^x$ **c)** $y = (e^x - 1) \cdot (2^x + 1)$

a) $y = (x^2 + 3) \cdot 5^x$

$y' = 2x \cdot 5^x + (x^2 + 3) \cdot 5^x \cdot \ln(5)$ ✓

b) $y = 5x \cdot 2^x$

$y' = 5 \cdot 2^x + 5x \cdot 2^x \cdot \ln(2)$ ✓

c) $y = (e^x - 1) \cdot (2^x + 1)$

$y' = e^x \cdot (2^x + 1) + (e^x - 1) \cdot 2^x \cdot \ln(2)$ ✓

erste Ableitung + vereinfachen:

4.121 **a)** $y = \frac{2x^5}{e^x}$ **b)** $y = \frac{e^x + 1}{2e^x - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x + e^x}{x^2 - e^x}$

$2x^5$

4.121 **a)** $y = \frac{2x^5}{e^x}$ **b)** $y = \frac{e^x + 1}{2e^x - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x + e^x}{x^2 - e^x}$

a) $y = \frac{2x^5}{e^x}$

$y' = \frac{10x^4 \cdot e^x - 2x^5 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (10x^4 - 2x^5)}{e^{2x}}$ ✓

b) $y = \frac{e^x + 1}{2e^x - 1}$

$2e^{2x} + 2e^x$

$y' = \frac{e^x \cdot (2e^x - 1) - (e^x + 1) \cdot 2e^x}{(2e^x - 1)^2} = \frac{e^x \cdot [(2e^x - 1) - 2 \cdot (e^x + 1)]}{4e^{2x} - 4e^x + 1}$ ✓

c) $y = \frac{x + e^x}{x^2 - e^x}$

$y' = \frac{e^x \cdot (x^2 - e^x) - (x + e^x) \cdot (2x - e^x)}{(x^2 - e^x)^2}$ ✓

$x^4 - 2x^2 e^x + e^{2x}$

erste Ableitung (Kettenregel) + vereinfachen:

4.140 **a)** $f(x) = \sqrt{1 - x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{2x - 3x^8}$ **c)** $f(x) = \sqrt[4]{(5x - x^7)^3}$

a) $f(x) = \sqrt{1 - x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = y'(z(x)) \cdot z'(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x}}$ ✓

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 3x^8} = (2x - 3x^8)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (2x - 3x^8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 - 24x^7) = (2 - 24x^7) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 3x^8)^2}}$ ✓

c) $f(x) = \sqrt[4]{(5x - x^7)^3} = (5x - x^7)^{\frac{3}{4}}$

$-\frac{1}{4} \quad (\quad ^6) \quad \frac{3}{\quad} \cdot (5 - 7x^6)$ /

c) $f(x) = \sqrt[4]{(5x \ldots)}$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot (5x - x^7)^{-\frac{1}{4}} \cdot (5 - 7x^6) = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{(5x - x^7)}} \cdot (5 - 7x^6)$$ ✓

HÜ, am 21.01.2022

$$\left.\begin{array}{l} 4.268) \\ 4.270) \\ 4.273) \end{array}\right\} \rightarrow \text{1. Ableitung}$$

4.268 **a)** $f(x) = (x^2 + 5)^6$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{8x - 1}$ **c)** $f(x) = e^{3x^2}$

a) $f(x) = (x^2 + 5)^6$ Kettenregel

$f'(x) = 6 \cdot (x^2 + 5)^5 \cdot 2x$ ✓

b) $f(x) = \sqrt[3]{8x - 1}$ Kettenregel

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(8x-1)^2}} \cdot 8$ ✓

c) $f(x) = e^{3x^2}$ Kettenregel $\left(e^{z()} \quad z() = 3x^2\right)$

$f'(x) = e^{3x^2} \cdot 6x$ ✓

4.270 **a)** $f(t) = a \cdot (1 - e^{-t})$ **b)** $f(t) = a \cdot t \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$ **c)** $f(t) = a \cdot t - e^{-\frac{t}{2a}}$

a) $f(t) = a \cdot (1 - e^{-t})$ $(e^{-t})' = -1 \cdot e^{-t}$ Kettenregel

$f'(t) = a \cdot \quad e^{-t}$

b) $f(t) = a \cdot t \cdot (1 - e^{-\frac{t}{2}})$ Produktregel, Kettenregel

$f'(t) = a \cdot (1 - e^{-\frac{t}{2}}) + a \cdot t \cdot (-(-\frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{t}{2}})$

c) $f(t) = a \cdot t - e^{-\frac{t}{2a}}$

$f'(t) = a - (-\frac{1}{2a}) \cdot e^{-\frac{t}{2a}}$

4.273 **a)** $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ **b)** $f(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{\ln(x)}$ **c)** $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$

a) $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot e^x - x^3 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 \cdot (3-x)}{e^x}$$

b) $f(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{\ln(x)}$ Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \ln(x) - 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}}{\ln(x)^2}$$

c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$ Quotientenregel, 1. Binomische Formel

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot [\cos(x) + \sin(x)] - \sin(x) \cdot [(-\sin(x)) + \cos(x)]}{\cos^2(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin^2(x)}$$

4. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

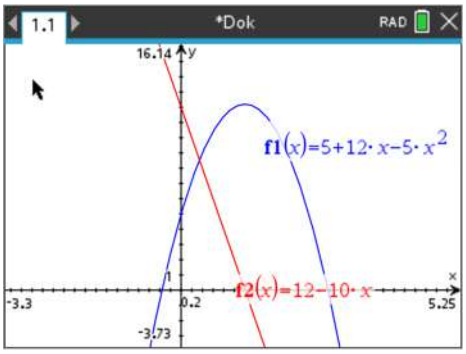
4.278)

4.279)

4.280)

4.278) 1) $v(t) = h'(t) = 12 - 10t$ ✓

2)



✓

3) Der Ball fällt wieder zu Boden (negative Geschwindigkeit). ✓

4.279) 1) $v(t) = s'(t) = a \cdot t$ $v(t) = 11{,}11t$

2) $t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{320}{3{,}6}}{11{,}11} = \underline{\underline{8{,}0008\,s}}$ ✓ $\left[\frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s^2}}\right] = \left[\frac{\cancel{m} \cdot s^{\cancel{2}}}{\cancel{m} \cdot \cancel{s}}\right] = \boxed{\underline{\underline{s}}}$ ✓

A: Man benötigt ca. 8 s um auf diese Geschwindigkeit zu kommen. ✓

3) $s(\sim 8) = \frac{11{,}11}{2} \cdot 8{,}0008^2 = \underline{\underline{355{,}591\,m}}$ ✓

A: Man legt dabei ca. 350 m zurück. ✓

4.280) $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 27$ ✓

1) $v(3) = -3 \cdot 3^2 + 27 = 0$ ✓

$a(t) = v'(t) = -6 \cdot t$ ✓

2) $a(2) = -6 \cdot 2 = \underline{\underline{-12\,\frac{m}{s}}}$ ✓

5. Woche

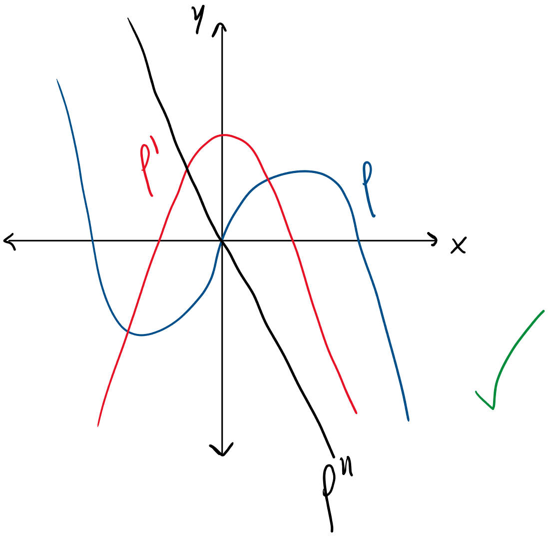
Samstag, 1. Januar 2022 19:56

HÜ, am 01.02.2022 → 15.02.2022

5.4) a) b)

5.10)

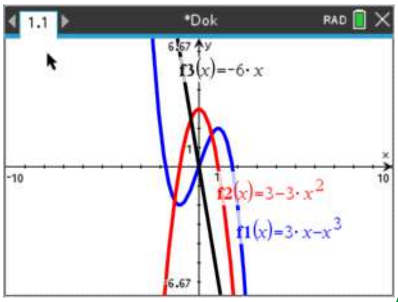
5.4 **1)** Stelle die Funktion f und ihre Ableitungen f' und f'' in einem Koordinatensystem grafisch dar.
2) Lies die Extrempunkte und Wendepunkte aus dem Funktionsgraphen ab und beschreibe die jeweils geltenden Eigenschaften der Ableitungen für diese Punkte mit eigenen Worten.
a) $f(x) = 3x - x^3$ **b)** $f(x) = 1 - 3x^2 - x^3$ **c)** $f(x) = \frac{1}{5} \cdot (x^5 - 5x^4 + 5)$



a) $f(x) = 3x - x^3$

$f'(x) = 3 - 3x^2$

$f''(x) = -6x$



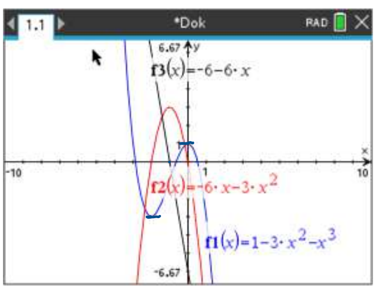
An der Stelle −1 (Tiefstelle der Funktion) wird die 1. Ableitung nach 0 positiv, weil die Steigung positiv wird.

Am Wendepunkt wird die Steigung nicht mehr stärke, somit hat die 1. Ableitung einen Hölepunkt und die 2. Ableitung wird negativ.

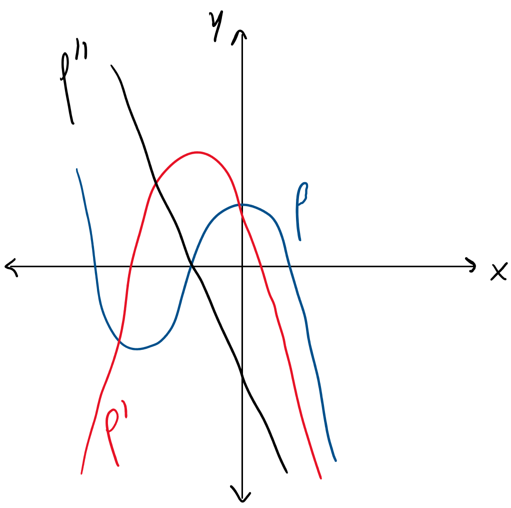
b) $f(x) = 1 - 3x^2 - x^3$

$f'(x) = -6x - 3x^2$

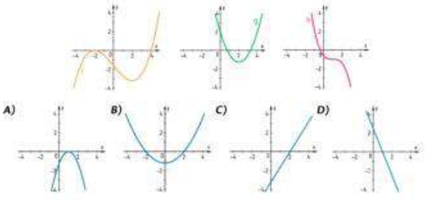
$f''(x) = -6 - 6x$



An den Extrempunkten der Funktion wird die 1. Ableitung dieser Funktion entweder positiv oder negativ.



5.10 Ordne den Funktionen f, g und h jeweils die Grafik zu, die ihre erste Ableitung darstellt. Begründe deine Auswahl.



f(x) → 1. Ableitung: B, weil an Stellen −2 und 2 (Extremstellen) eine Nullstelle ist.

g(x) → 1. Ableitung: C, weil an Stelle 2 Nullstelle ist.

$h(x) \rightarrow$ 1. Ableitung A, weil an Stelle 1 Nullstelle und Funktion ist immer negativ ($h(x)$ Steigung ist immer fallend)

Februar

Samstag, 1. Januar 2022 19:57

3. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

4. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

5. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

Hü, am 04.03.2022

5.24) a)
5.26) d)
5.44) d)
5.18)

Aufgaben 5.24 – 5.25: ***1)*** Erkläre, wie viele Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte bei der Funktion f jeweils auftreten können. ***2)*** Führe die Kurvenuntersuchung durch. Kennzeichne alle ermittelten Punkte sowie die Wendetangenten im Graphen.

5.24 ***a)*** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ***c)*** $f(x) = 0{,}05x^3 + 0{,}15x^2 - 1{,}2x$ ***e)*** $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x^4 - 8x^2 - 3)$

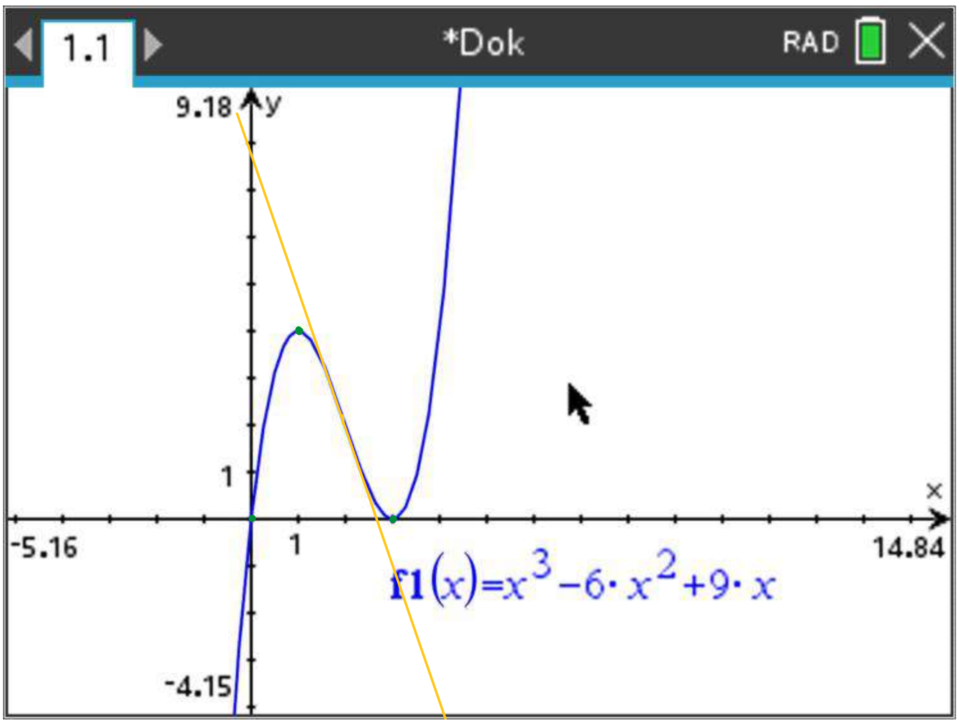
b) $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}9x$ ***d)*** $f(x) = -0{,}25x^3 + 1{,}5x^2 + 9x$ ***f)*** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

1) 3 Nullstellen, weil 3ten Grades meistens 3 Mal die x-Achse schneiden (könnte auch nur 1 od. 2 Nullstellen sein)
↳ gleichzeitig Extrempunkt ✓

2 Extrempunkte (könnte auch 1 Sattelpunkt sein) ✓

1 Wendepunkt (könnte auch der Sattelpunkt sein) ✓

2)



∀ Kurvend.

Aufgaben 5.26 – 5.27: Diskutiere die Funktion.

5.26 **a)** $f(x) = \frac{3}{16} \cdot x^3 - \frac{27}{8} \cdot x^2 + 18x - 24$ **c)** $f(x) = \frac{1}{27} \cdot (16x^3 - 120x^2 + 192x + 47)$

b) $f(x) = -\frac{1}{27} \cdot (5x^3 - 60x^2 + 180x + 27)$ **d)** $f(x) = -0{,}25x^4 + x^3 + 0{,}5x^2 - 3x + 0{,}75$

1) Definitionsmenge

$D = \mathbb{R}$ ✓

2) Polstellen & hebbare Lücken

↳ weil $D = \mathbb{R}$ → keine Unstetigkeitsstellen ✓

3) Asymptoten

senkrecht: — wegen $D = \mathbb{R}$ ✓

waagrecht:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

↳ keine waagrechten Asymptoten ✓

4) Symmetrie

gerade Funktion (Spiegelung y-Achse):

$f(x) = f(-x)$

↳ NEIN, weil ungerade Potenzen von x vorkommen ✓

ungerade Funktion (Spiegelung im Ursprung):

$f(x) = -f(-x)$

↳ NEIN, weil gerade Potenzen von x ✓

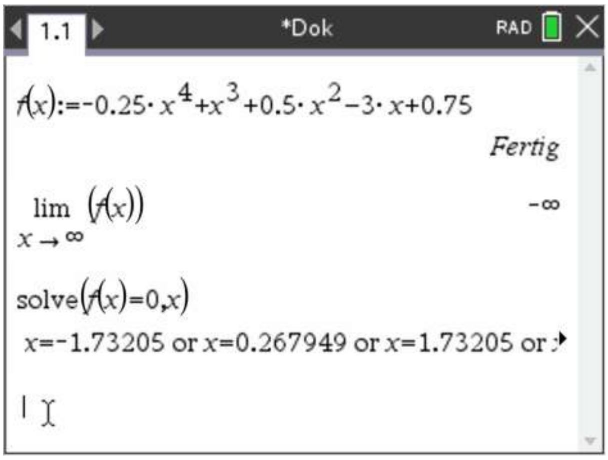
↳ NEIN, weil gerade Potenzen von x vorkommen

5) Nullstellen

$f(x) = 0$

$-0{,}25x^4 + x^3 + 0{,}5x^2 - 3x + 0{,}75 = 0$

TI:



$x_1 = -1{,}732\ldots \approx -1{,}73$

$x_2 = 0{,}267\ldots \approx 0{,}27$

$x_3 = 1{,}732\ldots \approx 1{,}73$

$x_4 = 3{,}732\ldots \approx 3{,}73$

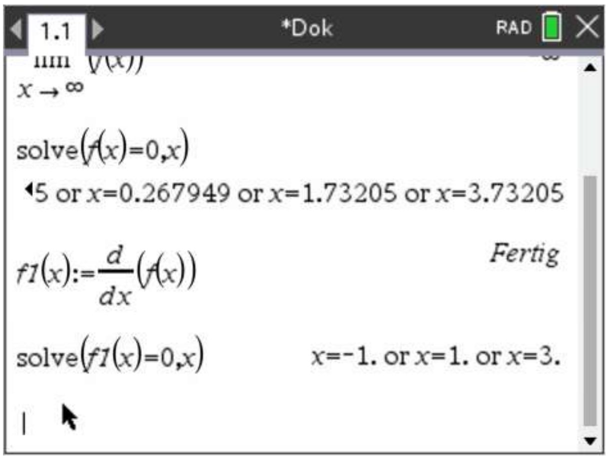
↳ 4 Nullstellen

6) Extrempunkte (H,T)

$f'(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$

TI:



$x_1 = -1$
$x_2 = 1$
$x_3 = 3$ ✓

$f(-1) = 3$ $\quad$ $f''(-1) = -8 \rightarrow H$
$f(1) = -1$ $\quad$ $f''(1) = 4 \rightarrow T$
$f(3) = 3$ $\quad$ $f''(3) = -8 \rightarrow H$

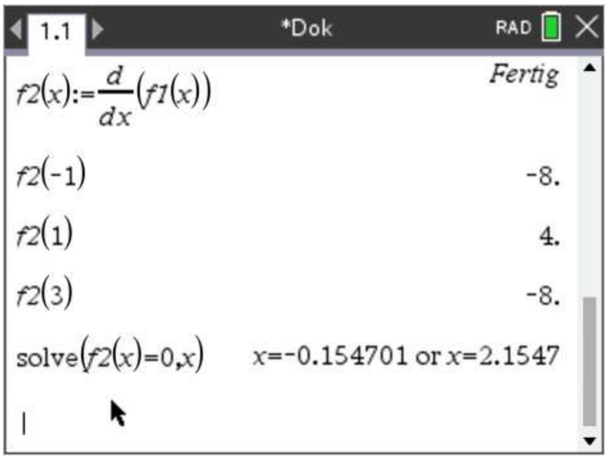
$H_1(-1|3)$ ✓ $\quad T(1|-1)$ ✓ $\quad H_2(3|3)$ ✓

7) Wendepunkte (min., max.)

$f''(x) = 0$

$-3x^2 + 6x + 1 = 0$

TI:



$x_1 = -0{,}154\ldots \cong -0{,}15$ ✓

$x_2 = 2{,}154\ldots \cong 2{,}15$ ✓

$f(-0{,}15) = 1{,}\dot{2}$ $\qquad$ $f'''(-0{,}15) = 6{,}92\ldots$

$f(2{,}15) = 1{,}\dot{2}$ $\qquad$ $f'''(2{,}15) = -6{,}92\ldots$

$W_{max}(-0{,}15 \mid 1{,}\dot{2})$ ✓ $\qquad$ $W_{min}(2{,}15 \mid 1{,}\dot{2})$ ✓

8) Wendetangente (n)

1.: $y = k \cdot x + d$

$k = f'(-0{,}15) = -3{,}079\ldots$

$W_{max}(-0{,}15 \mid 1{,}\dot{2})$

$1{,}\dot{2} = -3{,}079\ldots \cdot -0{,}15 + d$

$d = 0{,}745\ldots$

$\underline{y = -3{,}079\ldots \cdot x + 0{,}745\ldots}$ ✓

2.: $k = f'(2{,}15) = 3{,}079\ldots$

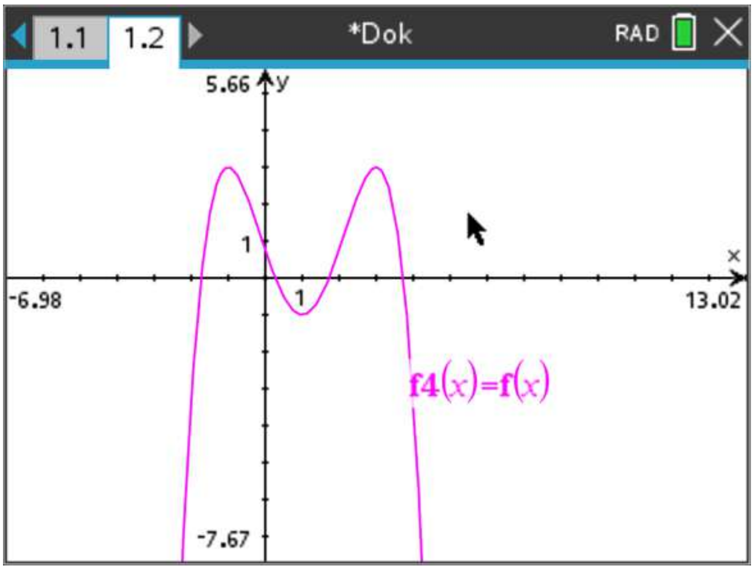
$W_{min}(2{,}15 \mid 1{,}\dot{2})$

$1{,}\dot{2} = 3{,}079\ldots \cdot 2{,}15 + d$

$d = -5{,}412\ldots$

$\underline{y = 3{,}079\ldots \cdot x - 5{,}412\ldots}$

9) Zeichnung



Aufgaben 5.43 – 5.45: Diskutiere die Funktionen.

5.43 **a)** $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = \frac{2}{9 - x^2}$ **c)** $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ **d)** $f(x) = -\frac{2}{(4-x)^2}$

5.44 **a)** $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 4}$ **d)** $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

1) Definitionsmenge

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

2) Polstellen & hebbare Lücke

2) Polstellen & hebbare Lücke

$x_0 = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

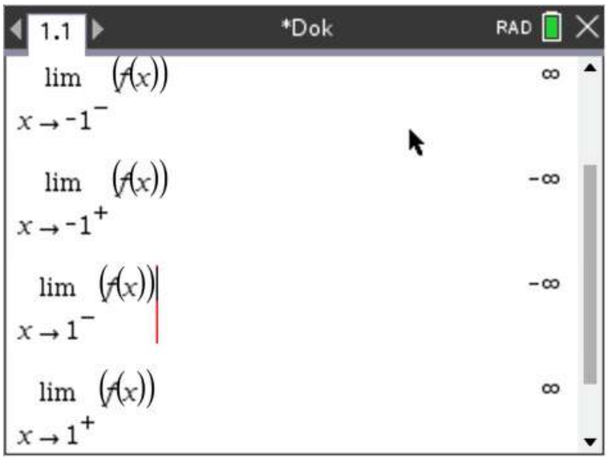
↳ Polstelle $x_0 = -1$ ✓

$x_0 = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

↳ Polstelle $x_0 = 1$ ✓



3) Asymptoten

senkrecht: $\underline{\underline{x = -1}}$ ✓; $\underline{\underline{x = 1}}$ ✓

waagrecht: $\underline{\underline{y = 1}}$ ✓ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} f(x)\right)$

4) Symmetrie

gerade Funktion:

gerade Funktion:

ja, weil nur gerade Potenzen von x vorkommen ✓

5) keine Nullstellen, weil $f(x) = 0 \rightarrow$ k.L. ✓

6) Extrempunkte

$x_0 = 0$, weil $f'(x) = 0 \rightarrow x_0 = 0$ liefert

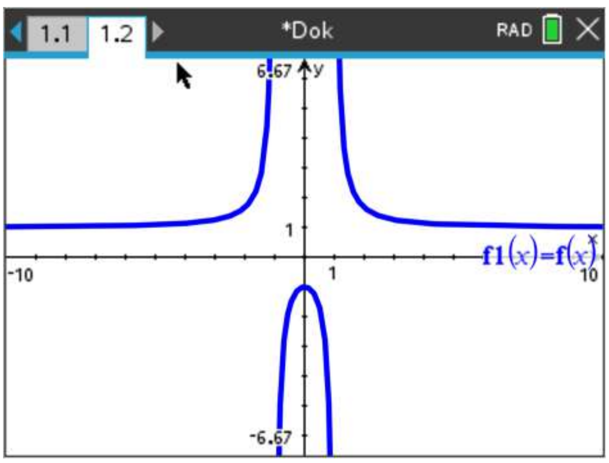
$f(0) = -1$ $\quad f''(0) = -4$

$H(0|-1)$ ✓

7) keine Wendepunkte, weil nur 2ten Grades ✓

8) keine Wendetangente ✓

9) Zeichnung



✓

5.18 Ein Juwelier lädt zu einem Empfang ein. Jede Kundin bekommt zur Begrüßung ein Sektglas mit einer Glasperle überreicht. Der Längsschnitt des Glases kann näherungsweise durch die Funktion $y = 10x^2$ im Intervall $[-0{,}3; 0{,}3]$ (Angaben in dm) beschrieben werden. Ermittle, welchen Durchmesser eine Perle maximal haben kann, wenn die Perle genau am Boden des Glases aufliegen soll.

$$\kappa(0) = \frac{y''}{\sqrt{[1+(y'(0))^2]^3}} = \frac{20}{1} = 20$$

$$y''(x) = 20 \rightarrow 20$$

$$y'(x) = 20x \rightarrow 0$$

$$\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{20}\,\text{dm}}}$$

A: Der maximale Durchmesser beträgt 1 cm.

März

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

2. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

S. 37)

S. 47)

A_250 Fussballspielen_im_Park

A_288_Fressverhalten_von_Furchenwalen (a1 nicht)

∀ HÜ verbessern

S. 24) a) Kurvendiskussion

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1) $D = \mathbb{R}$

↳ keine Unstetigkeitsstellen

↳ keine senkrechten Asymptoten

2) waagrechte Asymptoten

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

↳ keine waagrechten Asymptoten

3) Symmetrie

weder gerade, noch ungerade, weil sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von x in der Funktion vorkommen.

4) Nullstellen

$f(x) = 0$

TI: $\underline{x_1 = 0}$ $\underline{x_2 = 3}$

5) Extrempunkte

$f'(x) = 0$

TI: $\underline{x_1 = 1}$ $\underline{x_2 = 3}$

$f''(1) = -6$ $f''(3) = 6$ → Krümmung

$f(1) = 4$ $f(3) = 0$ → y-Wert

↓ ↓

$H(1|4)$ $\qquad$ $T(3|0)$

6) Wendepunkte

$p''(x) = 0$

TI: $\underline{x_0 = 2}$

$p'(2) = -3 \rightarrow$ minimale Steigung

$p(2) = 2 \rightarrow$ y-Wert

$W_{min}(2|2)$

7) Wendetangente

$W_{min}(2|2)$ $\qquad$ $k = -3$

$y = k \cdot x + d$

$2 = -3 \cdot 2 + d$

$\underline{\underline{d = 8}}$

$\underline{y = -3x + 8}$

8) Zeichnung → HÜ, 5. Woche Februar

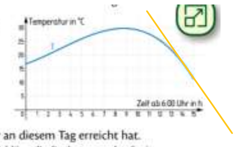
5.37)

5.37 Die Grafik zeigt den Temperaturverlauf an einem Sommertag zwischen 6:00 Uhr und 21:00 Uhr. Dieser kann durch folgende Funktion genähert werden:

$T(t) = -0{,}02t^3 + 0{,}18t^2 + 1{,}44t + 16{,}84$

t … Zeit ab 6:00 Uhr in h

T(t) … Temperatur zur Zeit t in °C



1) Berechne, welchen Höchstwert die Temperatur an diesem Tag erreicht hat.
2) Bestimme die Gleichung der Wendetangente. Erkläre die Bedeutung der Steigung dieser Tangente im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Veranschauliche die betragsmäßig größte momentane Änderungsrate der Temperatur in der Grafik und gib diese an.

1) → Extrempunkt berechnen

$T'(t) = 0$

TI: $(t_1 = -2{,}744\ldots)$

$\underline{t_2 = 8{,}744\ldots\ h}$ ✓

$\underline{T(8{,}7) = 29{,}822\ldots\ °C}$ ✓

$\underline{T''(8{,}7) = -0{,}689\ldots}$ → negative Krümmung + Extremstelle = Hochp. ✓

$\underline{H(8{,}7 \mid 29{,}8)}$ ✓

A: An dem Tag ist die Höchsttemperatur ca. 29,8°C.

2) Wendetangente + Sachzusammenhang

$T''(t) = 0$

TI: $\underline{t = 3}$

$T'(3) = 1{,}98\ \frac{°C}{h} = k$

$\underline{T(3) = 22{,}24\ °C}$

$W_{max}(3 \mid 22{,}24) \qquad k = 1{,}98$

$y = k \cdot x + d$

$22{,}24 = 1{,}98 \cdot 3 + d$

$\underline{d = 16{,}3}$

$\underline{y = 1{,}98 \cdot t + 16{,}3}$ ✓

A: Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass die Temperaturzunahme um 9:00 Uhr am höchsten ist, sprich: am schnellsten steigt. ✓

3) betragsmäßig = kann positiv und negativ sein
hauptsache Wert ist groß

↳ minimalste Steigung im Intervall $[0;15]$ berechnen.

$T'(15) = \underline{-6{,}66}\ \frac{°C}{h}$ ✓

$\underline{T(15) = 11{,}44\ °C}$

$P(15 \mid 11{,}44) \qquad k = -6{,}66$

$y = k \cdot x + d$

$11{,}44 = -6{,}66 \cdot 15 + d$

$d = 111{,}34\ °C$

$11{,}44 = -6{,}66 \cdot 15 + d$

$\underline{d = 111{,}34\ °C}$

$\underline{\underline{y = -6{,}66 \cdot x + 111{,}34}}$ ✓

5.47)

5.47 Aufgrund einer Krankheit erhält ein Patient eine Injektion. Die Wirkstoffmenge M in einem Liter Blut in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden ab Beginn der Injektion) lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$M(t) = \frac{M_0 \cdot t}{t^2 + 1}$ mit $M_0 = 1{,}5\ m\ell$ $\quad M(t)$ ... Wirkstoffmenge in einem Liter Blut in $m\ell$

1) Ermittle, nach welcher Zeit die Wirkstoffmenge im Blut ein Maximum erreicht hat.
2) Berechne, zu welchem Zeitpunkt die Abnahme am stärksten war.
3) Skizziere den Funktionsgraphen.

1) → Extremstelle

$M'(t) = 0$

TI: $(t_1 = -1)$ $\quad \underline{t_2 = 1}$ ✓

A: Nach 1 Stunde hat die Wirkstoffmenge im Blut ihr Maximum erreicht. ✓

2) → W_{min}

$M''(t) = 0$ $\quad$ ausgeschieden $\quad$ $M'(t)$

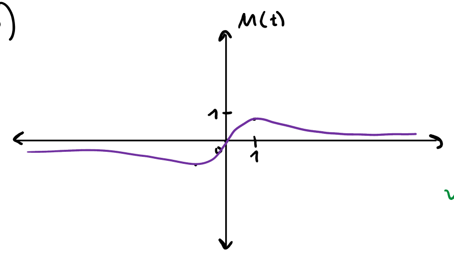
TI: $t_1 = -1{,}732..$ $\quad$ $-0{,}187..$

$t_2 = 0$ $\quad$ $1{,}5$ ← ausgeschieden

$\underline{t_3 = 1{,}732..}$ ✓ $\quad$ $\underline{-0{,}187...}$

A: Nach 1,732... Stunden nimmt die Wirkstoffmenge am schnellsten ab. ✓

3)



✓

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Fußballspielen im Park*

Aufgabennummer: A_250		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balls von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls über dem Boden an der Stelle x in m

a) – Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.
– Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

– Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

a) • Nullstellen

$h(x) = 0$

TI: $x_1 = 0$
$x_2 = 19$

$\rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 19\}$ ✓

• Extrempunkt

$h'(x) = 0$

TI: $(x_1 = 0)$ $x_2 = 12{,}66\ldots$

$h''(12{,}67) = -0{,}114\ldots \rightarrow$ Hochpunkt

$h(12{,}67) = 3{,}048\ldots$

$H(12{,}67 \mid 3{,}05)$ ✓

b) $h(x) = 1{,}8$

TI: $(x_1 = -5)$
$x_2 = 7{,}101\ldots$
$x_3 = 16{,}899\ldots$ ✓

A: Julia könnte den Ball nach ca. 7,1 m oder 16,9 m auffangen. ✓

c) $h(10) = 2{,}7\,m$ ✓

A: Der Ball würde nicht über das Klettergerüst fliegen. ✓

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fressverhalten von Furchenwalen*

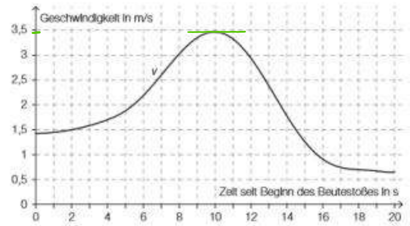
Aufgabennummer: A_288

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Beutestoß nehmen Furchenwale mit weit geöffnetem Maul eine große Menge Meerwasser und die darin enthaltene Beute auf. Forscher/innen beobachteten dieses Fressverhalten. Sie ermittelten mithilfe von Sensoren die Geschwindigkeit des Furchenwals bei einem Beutestoß, die Größe der Maulöffnung und das gesamte Wasservolumen, das dabei aufgenommen wird.

Datenquelle: Goldbogen, Jeremy A.: Schwieriger Kraftfang der Wale. In: *Spektrum der Wissenschaft* November 2010, S. 60–67.

a) Die Geschwindigkeit eines Furchenwals bei einem Beutestoß, der insgesamt 20 s dauert, kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Schätzen Sie die Länge s desjenigen Weges ab, der bei diesem Beutestoß zurückgelegt wird.

Integral rechnung ?

s = ______________ m

Ein Forscher behauptet:
„Der Furchenwal erreicht bei diesem Beutestoß eine maximale Geschwindigkeit von 15 km/h."

2) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

a) 2) $v(10) \cong 3{,}45\ \frac{m}{s} \overset{\cdot 3{,}6}{\hat{=}} \underline{12{,}42\ \frac{km}{h}}$ ✓

A: Maximalgeschwindigkeit liegt nur bei $12{,}42\ \frac{km}{h}$. ✓

b) Die Größe der Maulöffnung bei einem Beutestoß eines Furchenwals kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$m(t) = \frac{1}{175} \cdot (-17 \cdot t^4 + 204 \cdot t^3 - 922{,}5 \cdot t^2 + 1863 \cdot t)$ mit $0 \leq t \leq 6$

t ... Zeit seit Beginn des Öffnens des Mauls in s
$m(t)$ ... Größe der Maulöffnung zur Zeit t in m²

1) Ermitteln Sie die maximale Größe der Maulöffnung.

b) 1) $m'(t) = 0$

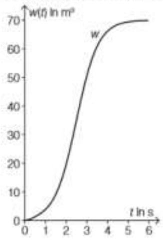
TI: $\underline{t = 3}$ ✓

$m''(3) = -0{,}0514... \rightarrow$ Hochpunkt

$\underline{m(3) = 8{,}1\ m^2}$ ✓

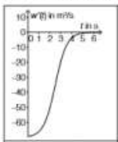
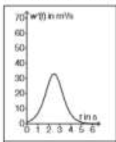
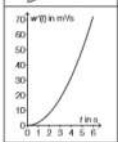
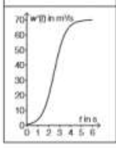
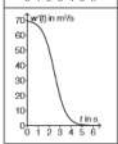
A: Die maximale Fläche der Maulöffnung beträgt $8{,}1\ m^2$. ✓

c) Die Funktion w beschreibt näherungsweise das gesamte Wasservolumen, das ein Furchenwal während eines Beutestoßes aufnimmt (siehe nachstehende Abbildung).



t ... Zeit seit Beginn der Wasseraufnahme in s
$w(t)$ ... gesamtes aufgenommenes Wasservolumen bis zur Zeit t in m³

1) Kreuzen Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion w' an. *[1 aus 5]*

	☐		☒
	☐		☐
	☐		

Weil Steigung
1. immer positiv
2. anfangs und endlich niedriger
(Wendepunkt
= neuer
Hochpunkt)

3. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

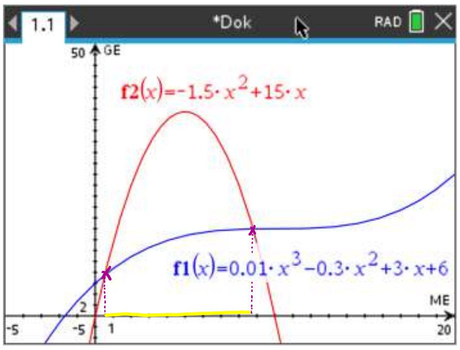
4. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

Hausübung, am 21.03.2022

5.32)
5.86)
A_237 Baseball

5.32 Die Kosten K für die Herstellung eines Produkts und der Erlös E beim Verkauf des Produkts lassen sich durch folgende Funktionen beschreiben:
$K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}3x^2 + 3x + 6$
$E(x) = -1{,}5x^2 + 15x$
x … Anzahl der produzierten bzw. verkauften Stück in ME
K(x) … Kosten bei der Herstellung von x ME in GE
E(x) … Erlös beim Verkauf von x ME in GE
1) Stelle die Funktionen E und K in einem Koordinatensystem grafisch dar.
2) Der Gewinn G kann durch G = E − K berechnet werden. Erkläre anhand der Grafik aus **1)**, in welchem Bereich die Firma Gewinn erzielt.
3) Ermittle, bei wie viel verkauften Mengeneinheiten der Gewinn maximal ist und berechne diesen.



2) Im gelben Bereich ist E(x) immer größer als K(x), weshalb G(x) positiv ist, sprich wo Gewinn gemacht wird.

Dies ist ca. im Intervall]0,6; 8,8[.

3) Der Gewinn ist bei der ME am größten, wo der Abstand / die Differenz zwischen E(x) und K(x) am größten ist...

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = [-1{,}5x^2 + 15x] - [0{,}01x^3 - 0{,}3x^2 + 3x + 6] =$

$G(x) = -1{,}5x^2 + 15x - 0{,}01x^3 + 0{,}3x^2 - 3x - 6$

$\underline{G(x) = -0{,}01x^3 - 1{,}2x^2 + 12x - 6}$

$G'(x) = 0$

$G'(x) = -0{,}03x^2 - 2{,}4x + 12$

$a = -0{,}03$; $b = -2{,}4$; $c = 12$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{2{,}4 \pm \sqrt{\cancel{576} + 4 \cdot 0{,}03 \cdot 12}}{-0{,}06}$$

$$x_{1,2} = \frac{2{,}4 \pm \cancel{24{,}0299}\ldots}{-0{,}06}$$

$$x_1 = \cancel{360{,}499}\ldots \text{ ME} \quad (x_2 = -440{,}499\ldots \text{ ME})$$

$4{,}7\ldots$ ME

A: Bei ~~360~~ 4,7... ME hat man den max. Gewinn.

5.86 Die Gesamtkosten für die Produktion von 2 000 Stück einer Ware betragen 4 000,00 €, für 3 000 Stück derselben Ware betragen die Gesamtkosten 5 500,00 €.

1) Ermittle die lineare Kostenfunktion K.

2) Der Preis der Ware lässt sich durch die folgende Preisfunktion beschreiben:
$p(x) = -x + 100$ x ... Stückzahl, p(x) ... Preis pro Stück in €
Stelle die Erlösfunktion E und die Gewinnfunktion G auf.

3) Bei welcher Stückzahl ist der erzielte Gewinn maximal?

4) Stelle die Kosten-, die Erlös- und die Gewinnfunktion grafisch dar. Kennzeichne den Break-Even-Point. Lies aus der Grafik ab, in welchem Bereich Gewinn erzielt wird.

1) $P_1(2000 | 4000)$ $\quad y = k \cdot x + d$
$P_2(3000 | 5500)$

$$\text{I}: \quad 4000 = k \cdot 2000 + d$$
$$\text{II}: \quad 5500 = k \cdot 3000 + d \quad \ominus$$

$$-1500 = -1000k + \varnothing \quad | : (-1000)$$

$$\underline{\underline{k = 1{,}5}}$$

$k = 1{,}5$ in I: $4000 = 1{,}5 \cdot 2000 + d \quad | -3000$

$$\underline{\underline{d = 1000}}$$

$$\underline{K(x) = 1{,}5x + 1000} \checkmark$$

2) $E(x) = p(x) \cdot x$

$$\underline{E(x) = -x^2 + 100x} \checkmark$$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G(x) = [-x^2 + 100x] - [1{,}5x + 1000]$$

$$\underline{G(x) = -x^2 + 98{,}5x - 1000} \checkmark$$

3) $G'(x) = 0$

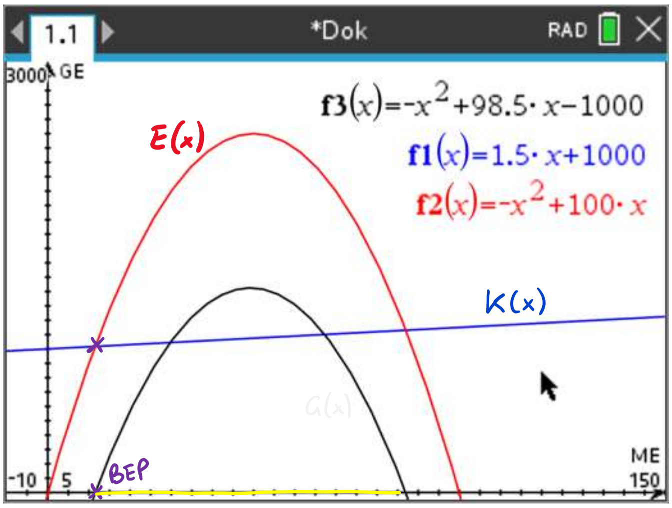
$$G'(x) = -2x + 98{,}5 = 0 \quad | -98{,}5$$

$$-2x = -98{,}5 \quad | : (-2)$$

$$\underline{x = 49{,}25} \text{ ME} \checkmark$$

A: Bei ca. 49 ME ist der Gewinn Maximal.

4)



≙ Bereich, wo Gewinn erzielt wird

BEP ... Break-Even-Point

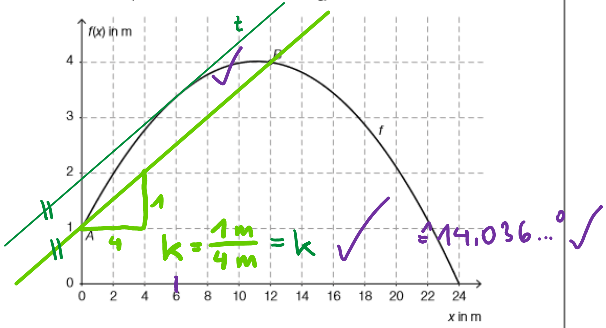
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Baseball*

Aufgabennummer: A_237

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Flugbahn eines Baseballs kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Ermitteln Sie den Steigungswinkel der Geraden durch die Punkte A und B.

Es soll diejenige Stelle x_0 ermittelt werden, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Geraden durch die Punkte A und B ist. $x_0 = 6$

– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung, wie man x_0 näherungsweise grafisch ermitteln kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Baseball-Verein überlegt, Fan-Shirts über eine Online-Plattform zu vertreiben. Die Kosten für die Herstellung eines T-Shirts belaufen sich auf € 6,40. Für Betreuung und Servermiete der Online-Plattform sind monatlich € 570 zu zahlen.

– Stellen Sie die zugehörige lineare Kostenfunktion K auf. $K(x) = 6{,}4x + 570$ ✓

x ... Anzahl der T-Shirts
$K(x)$ ... monatliche Kosten bei x T-Shirts in Euro (€)

Man rechnet damit, dass 75 T-Shirts pro Monat produziert und auch verkauft werden.

– Bestimmen Sie denjenigen Verkaufspreis pro Stück, ab dem die T-Shirts ohne Verlust verkauft werden können.

$75p = 570 \rightarrow \cancel{p = 7{,}60\ €}$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

$K(75) = 1050$
$/75 = 14\ €$

Hü, am 25.03.2022

5.59)
5.62)
5.82)
5.85)
B_279 Fußballtore

5.59 Die Konzentration K eines Medikaments in $\frac{mg}{L}$ im Blut lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:
$K(t) = 6 \cdot (e^{-0{,}11 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t}) \quad t \geq 0$
t ... Zeit in Stunden nach Beginn der Injektion

1) Gib an, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Medikaments im Blut maximal ist. Wie hoch ist die Konzentration dann?
2) Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Konzentration am stärksten?
3) Ermittle den Zeitpunkt, an dem noch 30 % der maximalen Konzentration vorhanden sind.
4) Beschreibe das Verhalten der Funktion K für $t \rightarrow \infty$ anhand der Funktionsgleichung.

1) → Hochpunkt

$K'(t) = 0$

TI: solve $\Rightarrow t_1 = 3,8823... h$ ✓

$K''(3,88) = -0,167...$ → negativ → Hochstelle ✓

$K(3,88) = 3,0533... \frac{mg}{L}$ ✓

A: Nach 3,882 h hat die Konzentration des Medikaments im Blut den maximalen Wert von 3,053 mg/L erreicht.

2) → Wendepunkt

$K''(t) = 0$

TI: solve $\Rightarrow t_1 = 7,764... h$ ✓

A: Nach 7,76 h ist die Abnahme am Stärksten.

3) $30\% \cdot 3,053... = 0,916... \frac{mg}{L}$

$K(t) = 0,916...$

TI: solve $\Rightarrow$ ($t_1 = 0,448... h$) → weil „noch"

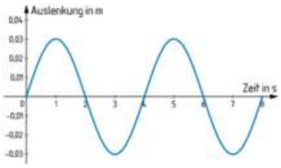
$\underline{t_2 = 17,074... h}$ ✓

A: Nach ca. 17 h sind noch 30% der max. Konzentration vorhanden

4) $K(t) = 6 \cdot (e^{-0,11 \cdot t} - e^{-0,5 \cdot t})$

A: Wenn t nach ∞ geht, geht $-0,5t$ nach $-\infty$, geht $e^{-0,5t}$ nach 0, geht der Ausdruck in Klammern nach 0, geht die gesamte Funktion nach 0, was Sinn macht, weil die Konzentration im Blut irgendwann weg sein wird. ✓

5.62 Ein mechanisches System wird in Schwingung versetzt. Der Schwingungsverlauf ist in der Abbildung dargestellt und lässt sich durch eine Funktion folgender Form beschreiben:
$y(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$
t … Zeit in s
$y(t)$ … Auslenkung zur Zeit t in m
1) Ermittle die Parameter a und b der Funktion.
2) Führe eine Kurvenuntersuchung im Intervall [0 s; 8 s] durch.



1) a → Grafik ablesen

$y(t) = 0{,}03 \cdot \sin(b \cdot t)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$y(t) = 0{,}03 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$

2) Kurvenuntersuchung: Definitionsbereich, Stetigkeit, Unstetigkeitsstellen, Asymptoten, Monotonie, Symmetrie, Nullstellen, Extremstellen (H,T), Wendestelle, Wendetangente, Zeichnung

2.1) $D = \mathbb{R}$

↳ daraus folgt: 2.2) stetig
2.3) k. Unstetigk.stellen
2.4) k. senkr. Asym. ✓

2.4) k. waagr. Asymptoten, weil sinus. ✓

2.5) [0; 1[str. m. st.
]1; 3[str. m. f.
]3; 5[str. m. st.
]5, 7[str. m. f.
]7; 8] str. m. st. ✓

2.6) gerade Funktion:

$y(t) = y(-t)$

$\cancel{0{,}03} \cdot \sin(90\cancel{t}) = \cancel{0{,}03} \cdot \sin(-90\cancel{t})$

$1 \neq -1$ → nicht gerade

Ungerade Funktion:

$y(t) = -y(-t)$

$1 = -(-1)$ ✓ ungerade Funktion ✓

2.7) $y(t)=0$

TI: solve => $\underline{t = 2 \cdot n}$

Alle 2s ist $y(t)=0$. ([0s; 8s] → 0,2,4,6,8) ✓

2.8) $y'(t)=0$

TI: solve => $\underline{t = 2 \cdot n - 1}$

Alle 4s (von 1s beginnend) ist eine Hochstelle bei 1m, alle 4s (von 3s beginnend) ist eine Tiefstelle bei -1m. ([0s; 8s] → H: 1,5 T: 3,7) ✓

2.9) $y''(t)=0$

TI: solve => $\underline{t = 2 \cdot n}$

Bei jeder Nullstelle ist eine Wendestelle.
(Bei jeder 4n ist die Steigung maximal,
bei jeder 4n+2 ist die Steigung minimal)

([0s; 8s] → W_{min}: 2,6 W_{max}: 0,4,8) ✓

2.10) von $t_0 = 0$

$y'(0) = 0{,}0471... = k$

$\boxed{y = kx + d}$

$0 = 0{,}0471... \cdot 0 + d$

$d = 0$

$T(t) = 0{,}0471... \cdot t$ ✓

2.11) → in Angabe

5.82 Ein Unternehmen stellt neuartige medizinische Apparaturen her. Dabei wird von folgender Kostenfunktion ausgegangen:
$K(x) = 0{,}25x^3 - 82{,}5x^2 + 9\,000x + 125\,000$ x … Anzahl in ME, K(x) … Kosten in €
1) Bestimme die Grenzkostenfunktion K′.
2) Berechne, bei welcher Menge x es den geringsten Kostenzuwachs gibt.
Zeige, dass es sich bei dem berechneten Extremum um ein Minimum handelt.

1) $K'(x) = 0{,}75x^2 - 165x + 9000$ ✓

2) Wendepunkt → $K''(x) = 0$

TI: solve ⇒ $x = 110$ ME

$K'(110) = -75$ → kein Zuwachs!

Extrempunkt → $K'(x) = 0$

TI: solve ⇒ $x_1 = 100$ ME
$x_2 = 120$ ME

$K''(100) = -15$	$K''(120) = 15$
$K(100) = 450\,000$	$K(120) = 449\,000$
-15 → negative Krümmung → kein Zuwachs!	15 → positive Krü. → ZUWACHS! ✓

A: Bei $x_0 = \cancel{120}$ 110 ist der Kostenzuwachs am Geringsten.

5.85 Die Fixkosten einer Produktion einer Ware betragen 1 200,00 €. Für die Produktion von 100 ME belaufen sich die Gesamtkosten auf 1 240,00 €.
1) Ermittle die lineare Kostenfunktion K.
2) Berechne die Schnittpunkte der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E mit
$E(x) = -x^2 + 90x$ x … verkaufte Menge in ME, E(x) … Erlös bei x ME in €
3) Beschreibe, welche wirtschaftliche Bedeutung die Schnittpunkte aus **2)** haben.
4) Berechne den maximalen Gewinn.

1) $P_1(0|1200)$ $P_2(100|1240)$

$K(x) = kx + d$ $\underline{d = 1200}$

$1240 = k \cdot 100 + 1200$

$40 = 100k$

$\underline{k = 0{,}4 \frac{€}{ME}}$

$\underline{k = 0{,}4\ \frac{}{ME}}$

$K(x) = 0{,}4x + 1200$ ✓

2) $E(x) = K(x)$

$-x^2 + 90x = 0{,}4x + 1200$

$-x^2 + 89{,}6x - 1200 = 0$

TI: solve => $x_1 = 16{,}3915\ldots$ ME

$x_2 = 73{,}2084\ldots$ ME ✓

3) Wenn ca. zwischen 16,4 und 73,2 ME verkauft werden, macht das Unternehmen Gewinn (positiv). ✓

4) $G(x) = E(x) - K(x)$

$\underline{G(x) = -x^2 + 89{,}6x - 1200}$

$G'(x) = 0$

TI: solve => $\underline{x = 44{,}8 \text{ ME}}$

A: Das Unternehmen muss 45 ME verkaufen, um den maximalen Gewinn zu erzielen. ✓

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fußballtore

Aufgabennummer: B_279

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Betrieb produziert Fußballtore.

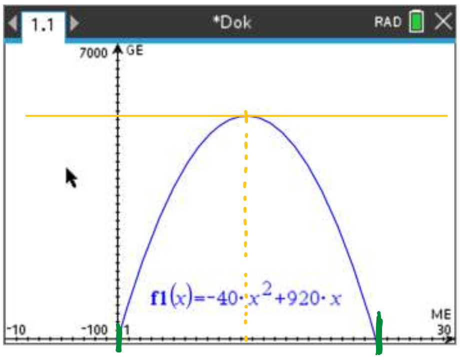
a) Die Preisfunktion der Nachfrage p_N ist bekannt:

$p_N(x) = -40 \cdot x + 920$ mit $0 \leq x \leq 23$

x … nachgefragte Menge in ME
p_N … Preis bei der Nachfrage x in GE/ME

$E(x) = -40x^2 + 920x$

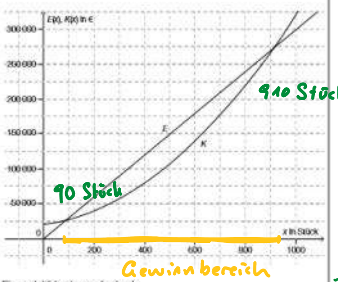
- Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
- Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E für den angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem.
- Lesen Sie aus der Grafik diejenige Menge ab, bei der der maximale Erlös erzielt wird.



11,5 ME erzielen max. Erlös.

b) In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der Gesamtkostenfunktion K und der Erlösfunktion E für Trainingstore dargestellt.

- Kennzeichnen Sie in der Abbildung den Gewinnbereich.
- Lesen Sie aus der Abbildung die Werte für die Gewinnschwelle und die obere Gewinngrenze ab.
- Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung jene Anzahl x_{max} ermittelt, für die der größte Gewinn erzielt wird, wenn die Funktionsgleichungen von E und K bekannt sind.



[90; 910] Stück

Gewinnfunktion ermitteln, E-K. Erste Ableitung d. Gewinnfunktion 0 setzen.
(Überprüfen, ob zweite Ableitung negativ ist)

Voilá!

c) Für die Fußballtore werden Netze produziert.
Die Fixkosten betragen € 3.000.
Bei der Produktion von 10 Netzen betragen die Stückkosten € 320 pro Netz.
Bei der Produktion von 100 Netzen betragen die Gesamtkosten € 5.450.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der zugehörigen quadratischen Gesamtkostenfunktion ermittelt werden können.
– Übertragen Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise.

d) Für nichtlineare Gesamtkostenfunktionen gilt: Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der Stückkostenfunktion an der Stelle des lokalen Stückkostenminimums.

– Zeigen Sie die Richtigkeit dieses Sachverhalts mithilfe der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

$K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$P_1(0|3000)$: I: $3000 = c$

$P_2(10|3200)$: II: $3200 = 100a + 10b + c$

$P_3(100|5450)$: III: $5450 = 10000a + 100b + c$

d) $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}$

$$\frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0$$

$$\frac{K'(x) \cdot \cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} - \frac{K(x)}{x^2} = 0$$

$$\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} = 0 \qquad | \cdot x$$

$$K'(x) - \frac{K(x)}{x} = 0$$

$$K'(x) = \frac{K(x)}{x}$$

Grenz-kosten

Stück-kosten

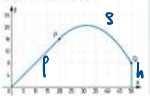
5. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

5.75)
5.77) 2)

A_214: Durchhängende Kette
A_013: Ortsumfahrung
A_022: Skispringen

5.75 Durch Drehung der abgebildeten Kurve um die x-Achse entsteht die Form eines Endstücks einer Vorhangstange. Die Kurve setzt sich aus einer Parabel und zwei Geradenstücken zusammen, wobei im Übergang P die beiden Funktionen dieselbe Steigung haben. Ermittle die Funktionsgleichungen der Kurvenstücke. Entnimm die dazu benötigten Werte aus der Grafik. Alle Angaben in mm.



$p = kx + d$

$\underline{p = \frac{4}{5}x}$ ✓

$s = ax^2 + bx + c$

$s' = 2ax + b$

I: $P(20|16)$: $s(20) = 16 \Rightarrow 16 = 400a + 20b + c$ ✓

II: $Q(50|8)$: $s(50) = 8 \Rightarrow 8 = 2500a + 50b + c$ ✓

III: $k = \frac{4}{5}$ bei $x_0 = 20$: $s'(20) = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{5} = 40a + b$ ✓

TI: solve $\Rightarrow$ $a = -\frac{8}{225}$

$b = \frac{20}{9}$

$c = -\frac{128}{9}$

$\underline{s = -\frac{8}{225}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{128}{9}}$ ✓

$\underline{h: x = 50}$

5.77 Die Form einer Rampe soll durch eine Polynomfunktion 3. Grads beschrieben werden. Die Rampe muss einen Höhenunterschied von 80 cm zwischen zwei Gehwegen ausgleichen und dabei an beide Wege waagrecht anschließen.
~~1)~~ In waagrechter Entfernung stehen maximal 4 m zur Verfügung. Ermittle eine Funktionsgleichung und gib den maximalen Steigungswinkel an.
2) Wie viel Platz in waagrechter Richtung benötigt man, wenn der maximale Steigungswinkel der Rampe höchstens 10° betragen darf?

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\qquad 10° \stackrel{\wedge}{=} 0{,}1763\ldots = k$

$p''(x) = 6ax + 2b$

z .... unbekannter waagrechter Abstand

I: $P(0|0)$: $\quad p(0) = 0$: $\quad 0 = 0a + 0b + 0c + d$

II: $Q(z|80)$: $\quad p(z) = 80$: $\quad 80 = az^3 + bz^2 + cz + d$

$p'(0) = 0$: $\quad 0 = 0a + 0b + c$

$\underline{\text{II}}$: $Q(z\mid 80)$:	$p(z)=80$:	$80=az^3+bz^2+cz+d$
$\underline{\text{III}}$: $k=0;\ x_0=0$:	$p'(0)=0$:	$0=0a+0b+c$
$\underline{\text{IV}}$: $k=0;\ x_0=z$:	$p'(z)=0$:	$0=3az^2+2bz+c$
$\underline{\text{V}}$: $k=\tan(10);\ x_0=\frac{z}{2}$:	$p'(\frac{z}{2})=\tan(10)$:	$\tan(10)=3a(\frac{z}{2})^2+2b(\frac{z}{2})+c$

$a=-0{,}00000051$

$b=0{,}00051819$

$c=0$

$d=0$

$\underline{\underline{z=680{,}553\ldots\ \text{cm}}}$

A: Der Abstand (waagrecht) beträgt ca. 6,8 m.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Durchhängende Kette

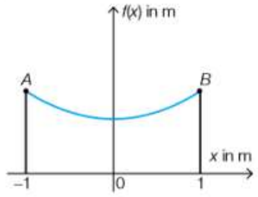
Aufgabennummer: A_214

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine durchhängende Kette zwischen 2 Masten gleicher Höhe, die 2 m voneinander entfernt sind, kann mit der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = e^x + e^{-x}$

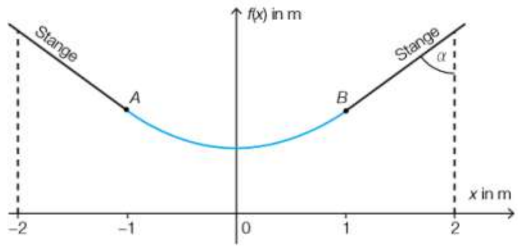
$|x|$ ... Abstand von der vertikalen Achse in m
$f(x)$ ... Höhe der Kette über dem Boden in m



a) Die Funktion f ist symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse und kann näherungsweise auch durch eine quadratische Funktion g beschrieben werden. Der Graph der Funktion g enthält ebenfalls die Punkte A und B und hat den gleichen Tiefpunkt wie die Funktion f.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das zur Ermittlung der Koeffizienten von g benötigt wird.
– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

b) Die oben beschriebene Kette soll an den Punkten A und B an 2 Stangen befestigt werden, die an den 2 Punkten die gleichen Steigungswinkel wie die Kette haben.



– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, den die Stangen mit der Senkrechten einschließen.

a)

$g(x) = ax^2 + c$

$\underline{I}$: $c = e^0 + e^{-0}$
$\underline{II}$: $e^1 + e^{-1} = a + c$ ✓

TI: solve ⇒ $a = 1{,}0861...$
$b = 0$
$c = 2$

$g(x) = 1{,}086x^2 + 2$ ✓

b)

$f'(1) = 2{,}350...$

$\arctan(2{,}350...) = \underline{66{,}9...^\circ}$ ✓

$\alpha = 90^\circ - 66{,}9^\circ \cong \underline{23{,}04...^\circ}$ ✓

c) Für eine Abstandsberechnung wurden ausgehend von der Gleichung $e^x + e^{-x} = 2{,}5$ folgende Umformungsschritte durchgeführt:

(1) $e^x + \frac{1}{e^x} = 2{,}5$

(2) $e^{2 \cdot x} + 1 = 2{,}5 \cdot e^x$

(3) $\ln(e^{2 \cdot x}) + \ln(1) = \ln(2{,}5 \cdot e^x)$

(4) $2 \cdot x + 0 = \ln(2{,}5) + x$

(5) $x = \ln(2{,}5)$

der Unterschied zwischen $\ln(e^{2x}+1)$ und $\ln(e^{2x}) + \ln(1)$ ist wesentlich und wurde nicht berücksichtigt (die Summanden wurden einzeln logarithmiert)

In der Umformung von Zeile 2 auf Zeile 3 wurde ein Fehler gemacht.

– Erklären Sie, worin der Fehler besteht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ortsumfahrung

Aufgabennummer: A_013

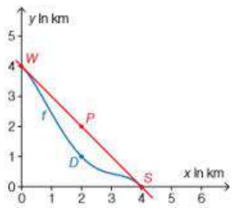
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine große Ortschaft $P = (2|2)$ liegt auf einer geraden Straße zwischen den Dörfern $W = (0|4)$ und $S = (4|0)$. Es soll um die Ortschaft P eine Umfahrungsstraße gebaut werden, die über den Punkt $D = (2|1)$ führt und bei W bzw. S wieder in die gerade Straße einmündet. Die Koordinatenwerte sind in Kilometern angegeben.

a) Eine Umfahrungsstraße, die durch die Funktion

$f(x) = -0{,}0625 \cdot x^4 + 0{,}5 \cdot x^3 - x^2 - x + 4$

beschrieben werden kann, hat den Vorteil, dass sie in den Punkten S und W tangential in die ursprüngliche Straße einmündet.



– Zeigen Sie durch Berechnung, dass die Gerade durch die Punkte S und W in diesen beiden Punkten eine Tangente an die Funktion f ist.

b) Eine Umfahrungsvariante soll im Definitionsbereich $0 \leq x \leq 4$ durch eine quadratische Funktion h beschrieben werden, die die Punkte W, D und S enthält.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

WPS:
$k_g = -1$ $(g(x) = -x + 4)$

$f'(4) = -1$ ✓ $= k_g = k_f$

$f'(0) = -1$ $= k_g = k_f$

$[f'(x) = -0{,}25x^3 + 1{,}5x^2 - 2x - 1]$

$h(x) = ax^2 + bx + c$

I: $4 = c$
II: $1 = 4a + 2b + c$
III: $0 = 16a + 4b + c$

TI: solve => $a = \frac{1}{4}$
$b = -2$
$c = 4$

$h(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$ ✓

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Skispringen (1)

Aufgabennummer: A_022

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Bergisel-Schanze gilt als ein Wahrzeichen Innsbrucks.

a) Vom östlichen Stadion-Eingang führt ein Aufzug bis zum Schanzenturm.
– Berechnen Sie, welche Strecke dieser Aufzug in Metern zurücklegt, wenn er mit einer mittleren Geschwindigkeit von 7,5 Kilometern pro Stunde (km/h) die Besucher in 2 Minuten zum Turm bringt.

$\frac{km}{h} \xrightarrow[:60]{\cdot 1000} \frac{m}{min}$ → Faktor :0,06

a) $s = v \cdot t = 125 \cdot 2 = \underline{\underline{250\,m}}$ ✓

Bundesinstitut **bifie**
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Skispringen (1)

Aufgabennummer: A_022

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Die Bergisel-Schanze gilt als ein Wahrzeichen Innsbrucks.

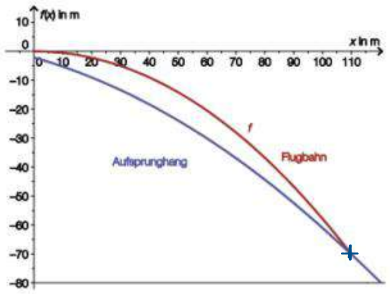
a) Vom östlichen Stadion-Eingang führt ein Aufzug bis zum Schanzenturm.

– Berechnen Sie, welche Strecke dieser Aufzug in Metern zurücklegt, wenn er mit einer mittleren Geschwindigkeit von 7,5 Kilometern pro Stunde (km/h) die Besucher in 2 Minuten zum Turm bringt.

b) Die Flugbahn eines Skispringers lässt sich annähernd mit der Funktion f beschreiben:

$$f(x) = a \cdot x^2 \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^-$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in Metern (m)



– Ermitteln Sie den Wert von a, indem Sie die dazu nötigen Daten aus der Grafik ablesen.
– Erklären Sie, wie man den Parameter a verändern müsste, damit eine Flugbahn mit kürzerer Sprungweite modelliert werden kann.

c) Das Profil des Aufsprunghangs lässt sich näherungsweise mit einer Polynomfunktion g vom Grad 3 beschreiben. Die für die Sprungwertung ausschlaggebende Landezone auf dem Aufsprunghang liegt um jenen Punkt des Funktionsgraphen, in dem der Hang das größte Gefälle aufweist.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mittels Differenzialrechnung die Koordinaten des Punktes mit dem größten Hanggefälle berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

$$\frac{km}{h} \xrightarrow{\cdot 1000} \;\hat{=}\; \xrightarrow{:60} \frac{m}{min} \quad \rightarrow \text{Faktor } :0{,}06$$

a) $s = v \cdot t = 125 \cdot 2 = \underline{\underline{250\,m}}$

b) $P(110|-70)$: $f(110) = -70$

$-70 = a \cdot 110^2$

$a = -\frac{70}{110^2}$

$a = -0{,}00578...$

a müsste noch größer negativ sein, damit die Parabel gestauchter ist.

c) Man berechne den Wendepunkt, indem man die 2te Ableitung bildet. und null setzt.
und löst → x-Koordinate

Möglicher Lösungsweg

a) $v = 7{,}5$ km/h

$t = \frac{1}{30}$ h

$v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = v \cdot t$

$s = 7{,}5 \cdot \frac{1}{30} = 0{,}25$

0,25 km = 250 m

Es werden 250 m zurückgelegt.

b) Aus dem Graphen kann zum Beispiel der Punkt (110|–70) abgelesen werden.
Damit ergibt sich folgende Gleichung:
$f(x) = a \cdot x^2$
$-70 = a \cdot 110^2$
$a = -0{,}0058$

Der Parameter a legt die Form der Parabel fest.
Wird a verringert, so verschmälert sich die Parabel. Entsprechend kürzer ist die Flugbahn.

c) Das größte Gefälle des Aufsprunghangs wird im Wendepunkt erreicht.
Die erste Koordinate des Wendepunkts ermittelt man durch die Berechnung der Nullstelle der 2. Ableitung der Polynomfunktion g. Diese Koordinate setzt man in die Funktion g ein, um die 2. Koordinate des Wendepunkts zu erhalten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 1

Themen: Sport, Architektur

Quellen:
http://geol43.uni-graz.at/05W/600001/skispringen.html
http://www.bergisel.info/de/besucher-information/bergisel-schanze.php
http://www.fis-ski.com/data/document/grundlagenprojektierungschanze-2005.pdf

Skispringen (1)

Aufgabennummer: A_022

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Die Bergisel-Schanze gilt als ein Wahrzeichen Innsbrucks.

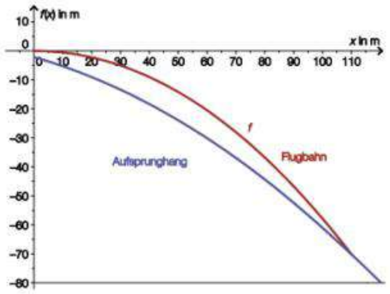
a) Vom östlichen Stadion-Eingang führt ein Aufzug bis zum Schanzenturm.

- Berechnen Sie, welche Strecke dieser Aufzug in Metern zurücklegt, wenn er mit einer mittleren Geschwindigkeit von 7,5 Kilometern pro Stunde (km/h) die Besucher in 2 Minuten zum Turm bringt.

b) Die Flugbahn eines Skispringers lässt sich annähernd mit der Funktion f beschreiben:

$$f(x) = a \cdot x^2 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^-$$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Metern (m)



- Ermitteln Sie den Wert von a, indem Sie die dazu nötigen Daten aus der Grafik ablesen.
- Erklären Sie, wie man den Parameter a verändern müsste, damit eine Flugbahn mit kürzerer Sprungweite modelliert werden kann.

c) Das Profil des Aufsprunghangs lässt sich näherungsweise mit einer Polynomfunktion g vom Grad 3 beschreiben. Die für die Sprungwertung ausschlaggebende Landezone auf dem Aufsprunghang liegt um jenen Punkt des Funktionsgraphen, in dem der Hang das größte Gefälle aufweist.

- Dokumentieren Sie in Worten, wie man mittels Differenzialrechnung die Koordinaten des Punktes mit dem größten Hanggefälle berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $v = 7{,}5$ km/h
$t = \frac{1}{30}$ h
$v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = v \cdot t$
$s = 7{,}5 \cdot \frac{1}{30} = 0{,}25$
0,25 km = 250 m

Es werden 250 m zurückgelegt.

b) Aus dem Graphen kann zum Beispiel der Punkt $(110|-70)$ abgelesen werden.
Damit ergibt sich folgende Gleichung:
$f(x) = a \cdot x^2$
$-70 = a \cdot 110^2$
$a \approx -0{,}0058$

Der Parameter a legt die Form der Parabel fest.
Wird a verringert, so verschmälert sich die Parabel. Entsprechend kürzer ist die Flugbahn.

c) Das größte Gefälle des Aufsprunghangs wird im Wendepunkt erreicht.
Die erste Koordinate des Wendepunkts ermittelt man durch die Berechnung der Nullstelle der 2. Ableitung der Polynomfunktion g. Diese Koordinate setzt man in die Funktion g ein, um die 2. Koordinate des Wendepunkts zu erhalten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 1

Themen: Sport, Architektur

Quellen:
http://geol43.uni-graz.at/05W/600001/skispringen.html
http://www.bergisel.info/de/besucher-information/bergisel-schanze.php
http://www.fis-ski.com/data/document/grundlagenprojektierungschanze-2005.pdf

April

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

2. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

4. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

5. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

Mai

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

Hü, am 06.05.2022

B_053 Harmonische Schwingung

6.35) b) c)
6.36) b) c)
6.37) b) c)
6.38) b) c)

6.45) händisches Rechnen!

6.35 a) $\int x^{-2}\,dx$ b) $\int \frac{1}{t^3}\,dt$ c) $\int x^{-6}\,dx$ d) $\int \frac{du}{u^5}$

b) $\int \frac{1}{t^3}\,dt = \int t^{-3}\cdot dt = -\frac{t^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C$ ✓

c) $\int x^{-6}\,dx = -\frac{x^{-5}}{5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$ ✓

6.36 a) $\int x^{[illegible]}\,dx$ b) $\int u^{\frac{5}{2}}\,du$ c) $\int t^{\frac{7}{3}}\,dt$ d) $\int x^{[illegible]}\,dx$ e) $\int t^{-[illegible]}\,dx$ f) $\int t^{-[illegible]}\,dt$ g) $\int x^{-[illegible]}\,dx$ h) $\int x^{-[illegible]}\,dx$

b) $\int u^{\frac{5}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + C$ ✓ $= \frac{2\sqrt{u^7}}{2} + C$

c) $\int t^{\frac{7}{3}}\,dt = \frac{t^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + C = \frac{3t^{\frac{10}{3}}}{10} + C$ ✓ $= \frac{3\sqrt[3]{t^{10}}}{10} + C$

6.37 a) $\int \sqrt[3]{t}\,dt$ b) $\int \sqrt[7]{x^5}\,dx$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt$

b) $\int \sqrt[7]{x^5}\cdot dx = \int x^{\frac{5}{7}}\cdot dx = \frac{x^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}} + C = \frac{7x^{\frac{12}{7}}}{12} + C$ ✓

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C$ ✓ $= 2\sqrt{x} + C$

6.38 a) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2}\,dx$ b) $\int \sqrt[4]{t^3}\cdot\sqrt[3]{t^4}\,dt$ c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{t^4}}\,dt$

b) $\int \sqrt[4]{t^3}\cdot\sqrt[3]{t^4}\cdot dt = \int t^{\frac{3}{4}}\cdot t^{\frac{4}{3}}\cdot dt = \cancel{\frac{t^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}\cdot\frac{t^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C =}$

$\cancel{= \frac{4t^{\frac{7}{4}}}{7}\cdot\frac{3t^{\frac{7}{3}}}{7} + C = \frac{4\sqrt[4]{t^7}\cdot 3\sqrt[3]{t^7}}{7} + C}$ $= \int t^{\frac{9}{12}}\cdot t^{\frac{16}{12}}\cdot dt = \int t^{\frac{25}{12}}\cdot dt = \frac{t^{\frac{37}{12}}}{\frac{37}{12}} + C = \frac{12}{37}\cdot\sqrt[12]{t^{37}} + C$

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\cdot dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$ ✓

6.45 a) $\int (3x^2+1)\,dx$ b) $\int \left(5t^4 + \frac{t^2}{2} - 2t\right)dt$ c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 4\right)dx$

a) $\int (3x^2+1)\,dx = 3\cdot\int x^2\cdot dx + \int 1\cdot dx$

$= 3\,\frac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C$ ✓

b) $\int \left(5t^4 + \frac{t^2}{2} - 2t\right)\cdot dt = 5\,\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{6} - 2\,\frac{t^2}{2} + C$

$= t^5 + \frac{t^3}{6} - t^2 + C$ ✓

c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 4\right)\cdot dx = -3x^{-1} - 4x + C$ ✓ $= -\frac{3}{x} - 4x + C$

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Harmonische Schwingung

Aufgabennummer: B_053

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Funktion $y(t) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$ beschreibt allgemein die harmonische Schwingung eines mathematischen Pendels.

A ... Amplitude in Metern (m)
T ... Zeitdauer in Sekunden (s), die das Pendel für eine volle Schwingung benötigt
φ ... Phasenwinkel im Bogenmaß (rad)
$y(t)$ ... Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t in Metern (m)
ω ... Kreisfrequenz (s^{-1}), $\omega = \frac{2\pi}{T}$

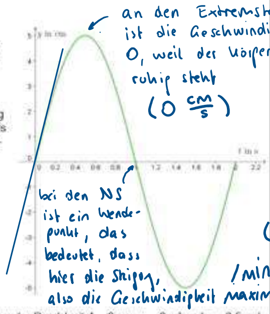
$v(t) = y'(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi)\cdot\omega$

a) – Ermitteln Sie die Funktion für die Geschwindigkeit v des harmonisch schwingenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t.
– Bestimmen Sie daraus allgemein den Zeitpunkt, zu dem der Pendelkörper den Umkehrpunkt erreicht. $\pi/2 + 2\pi n$

$\rightarrow v(t) = 0 \rightarrow t =$

b) Der zeitliche Verlauf der Auslenkung einer vollen Schwingung eines harmonisch schwingenden Pendels ist in der nebenstehenden Grafik dargestellt.

– Interpretieren Sie den Funktionsgraphen in Bezug auf die Auslenkung und die Geschwindigkeit des Pendels an den Extremstellen und an den Nullstellen.
– Geben Sie jeweils die ungefähren Zahlenwerte dieser Größen an.



an den Extremstellen ist die Geschwindigkeit 0, weil der Körper komplett ruhig steht ($0\,\frac{cm}{s}$)

bei den NS ist ein Wendepunkt, das bedeutet, dass hier die Steigung, also die Geschwindigkeit maximal /minimal ist. ($\approx -15\,\frac{cm}{s}$)

c) – Geben Sie für ein harmonisch schwingendes Pendel mit $A = 2$ cm, $\omega = 2\ s^{-1}$ und $\varphi = 0{,}5$ rad die lineare Näherung der Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ s an. Runden Sie die Parameter auf 3 Dezimalstellen. $y'(t) = 0 \rightarrow$
– Berechnen Sie den relativen Fehler, der sich bei Berechnung der Auslenkung nach $t = 0{,}2$ s bei Verwendung dieser Näherung ergibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

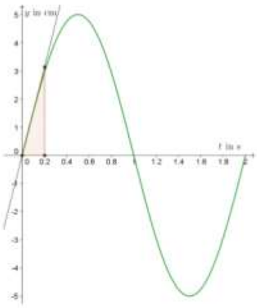
Möglicher Lösungsweg

a) $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
$v(t) = y'(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega$

an den Umkehrpunkten gilt: $v(t) = 0$
Daher ist die Gleichung $A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega = 0$ nach t aufzulösen.

$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+1)\pi - 2\varphi}{\omega}, \quad n = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

b) Der Pendelkörper erreicht die Extremstellen mit einer Auslenkung von 5 cm nach 0,5 s und nach 1,5 s. Er ändert an diesen Stellen die Bewegungsrichtung, die momentane Geschwindigkeit ist jeweils null.
An den Nullstellen bei $t = 0$ s, 1 s und 2 s beträgt die Auslenkung null. Der Pendelkörper erreicht an diesen Stellen jeweils die größte Geschwindigkeit. Die Größe der Geschwindigkeit entspricht dem Anstieg der Kurve in den Nullstellen. Der Anstieg der Tangente in $t = 0$ ist ca. 15,7.
(Ablesbar aus der Grafik. Falls jemand mit der 1. Ableitung argumentiert, so ist das nicht verlangt, aber auch richtig!)
Die Geschwindigkeit beträgt zu Beginn sowie nach 2 Sekunden jeweils 15,7 cm/s. Nach 1 Sekunde beträgt die Steigung –15,7. Das bedeutet, dass sich der Pendelkörper mit einer Geschwindigkeit von 15,7 cm/s in Richtung abnehmender y-Koordinaten bewegt.



Die Ablesung aus der Grafik kann je nach verwendeter Technologie mit Ungenauigkeiten behaftet sein. Das ist zu tolerieren.

c) Die lineare Näherung ist die Tangente zum Zeitpunkt $t = 0$.

$y(t) = 2 \cdot \sin(2t + 0{,}5)$ $\qquad y(0) = 0{,}959$
$k(t) = y'(t) = 4 \cdot \cos(2t + 0{,}5)$
$k(0) = 3{,}510$
Gleichung der Tangente: $y = 3{,}510t + 0{,}959$

Der relative Fehler wird ermittelt, indem man die Differenz zwischen dem genäherten und dem wahren Wert bildet und die Differenz der beiden durch den wahren Wert dividiert.
relativer Fehler: $\frac{1{,}661 - 1{,}567}{1{,}567} = 0{,}06 = 6\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 4
c) mittel	c) 3

Thema: Physik

Quellen: –

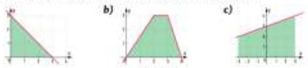
HÜ, am 13.05.22

7.8)

7.10) a) b)

7.8 Ermittle den Inhalt der markierten Fläche 1) [illegible]
[illegible]

a) b) c)



Analysis

a) $\int_0^3 (-x+3)\cdot dx = -\frac{x^2}{2} + 3x \Big|_0^3 = \left[-\frac{3^2}{2}+9\right] - [0] = \underline{\underline{4{,}5\,FE}}$ ✓

b) $\int_0^2 1{,}5x \cdot dx + 3 + \int_3^4 (-3x+12)\cdot dx = \frac{1{,}5x^2}{2}\Big|_0^2 + 3 - \frac{3x^2}{2} + 12x \Big|_3^4 = \frac{1{,}5\cdot 4}{2} + 3 - 24 + 48 - \left[-\frac{27}{2}+36\right] = 6 + 24 - 22{,}5 = \underline{\underline{7{,}5\,FE}}$ ✓

c) $\int_{-3}^3 \left(\frac{1}{3}x+3\right)\cdot dx = \frac{x^2}{6} + 3x \Big|_{-3}^3 = \left[\cancel{\frac{9}{6}}+9\right] - \left[\cancel{\frac{9}{6}}-9\right] = \underline{\underline{18\,FE}}$ ✓

7.10 a) $f(x) = x^2 + 3x$, $a = -2$, $b = 1$
b) $f(x) = x^3 - 1$, $a = -1$, $b = 2$
c) $f(x) = x^2 + 6x + 5$, $a = -4$, $b = 0$
d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, $a = -1$, $b = 4$

a) Nullstelle: $x^2 + 3x = 0 \rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 0$

$\int_0^{-2} (x^2+3x)\cdot dx + \int_0^1 (x^2+3x)\cdot dx =$

$= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \Big|_0^{-2} + \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 =$

$= \frac{(-2)^3}{3} + 3\frac{(-2)^2}{2} - 0 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 0 =$

$= \underline{\underline{\frac{31}{6}\,FE}}$ ✓

b) Nullstelle: $x^3 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$\int_1^{-1} (x^3-1)\cdot dx + \int_1^2 (x^3-1)\cdot dx =$

$= \frac{x^4}{4} - x \Big|_1^{-1} + \frac{x^4}{4} - x \Big|_1^2 =$

$= \underbrace{\cancel{\frac{1}{4}} + 1 - \left(\cancel{\frac{1}{4}} - 1\right)}_{2} + \underbrace{\frac{16}{4} - 2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)}_{\frac{11}{4}} = \underline{\underline{\frac{19}{4}\,FE}}$ ✓

3. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

4. Woche

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

HÜ, am 23.05.2022

A_144 Wellness

A_229 Am Fluss

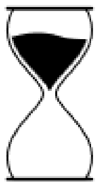
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wellness*

Aufgabennummer: A_144

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In Saunen werden zur Zeitmessung meist Sanduhren verwendet.
Der Sand in einer solchen Sanduhr benötigt 15 Minuten, bis er von oben nach unten vollständig durchgerieselt ist. Pro Minute rieseln 4 Gramm Sand von oben nach unten.
Die gesamte Sandmenge befindet sich zu Beginn ($t = 0$) im oberen Teil der Sanduhr (siehe nebenstehende Skizze).



– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion, die der Zeit t in Minuten die Sandmenge im oberen Teil der Sanduhr in Gramm zuordnet.

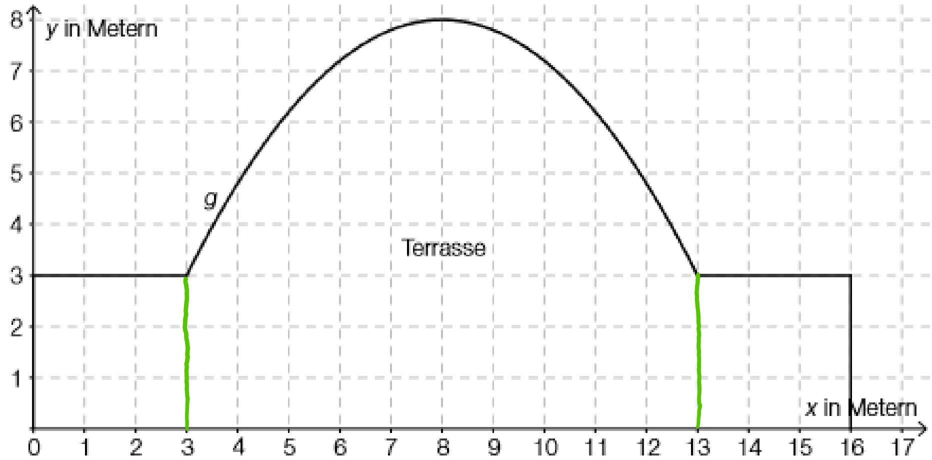
$M(t) = -4t + 15 \cdot 4$

$M(t)$ ... Sandmenge zum Zeitpunkt t in Gramm

t ... Zeitpunkt in min

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im Außenbereich einer Sauna wird eine neue Terrasse mit folgender Grundfläche geplant (siehe Grafik):



In dem gegebenen Koordinatensystem wird die Rundung der Terrasse im Intervall [3; 13] durch den Graphen einer Funktion g beschrieben.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der Grundfläche der Terrasse, wenn die Funktion g bekannt ist.

$A = 18 + \int_3^{13} g(x) \cdot dx$

Für die Verlegung von Sandsteinfliesen auf der Terrasse werden 90 m² Fliesen eingekauft. Die Sandsteinfliesen kosten netto (ohne 20 % Umsatzsteuer) pro Quadratmeter € 56.

– Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Sandsteinfliesen inklusive Umsatzsteuer, wenn ein Preisnachlass von 3 % gewährt wird.

$56 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97 \cdot 90 = 5866{,}56$ €

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $s(t) = -4 \cdot t + 60$

t ... Zeit in min
$s(t)$ ... Sandmenge zur Zeit t in g

b) $A = 18 + \int_3^{13} g(x)\,\mathrm{d}x$

$90 \cdot 56 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97 = 5866{,}56$

Die Gesamtkosten betragen € 5.866,56.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × B: für die richtige Berechnung der Gesamtkosten

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Am Fluss*

Aufgabennummer: A_229

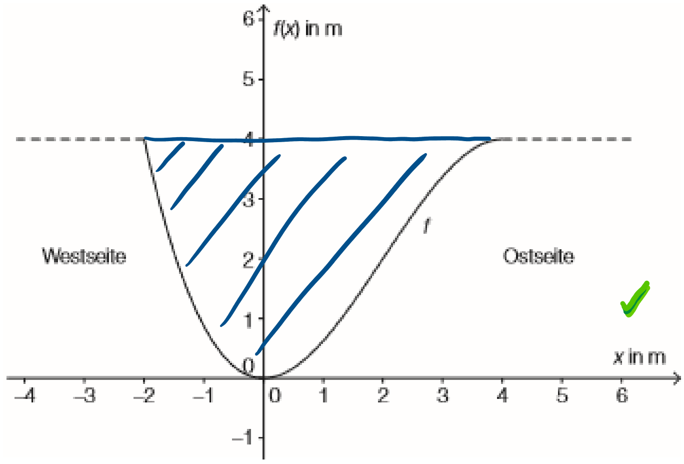
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \quad \text{mit} \quad -2 \leq x \leq 4$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt. $f''(x) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 2}}$ ✓

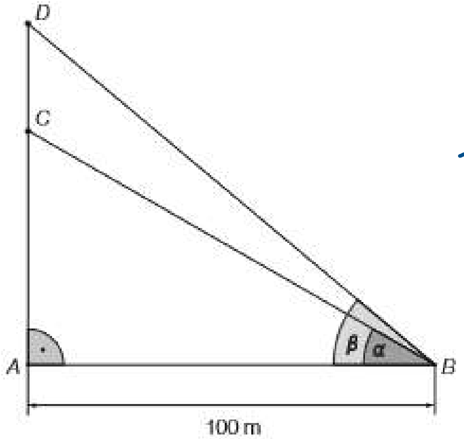
Gegeben ist das folgende Integral:

$$\int_{-2}^{4} (4 - f(x))\,dx$$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mithilfe dieses Integrals berechnet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein von einem Punkt *A* senkrecht aufsteigender Ballon wird von einem Punkt *B* am Flussufer unter dem Höhenwinkel $\alpha = 30°$ gesehen. Etwas später erscheint der Ballon unter dem Höhenwinkel $\beta = 40°$ (siehe nachstehende Skizze).



$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$

$GK = \tan(\alpha) \cdot AK$

– Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{CD}$. $[\tan(40) - \tan(30)] \cdot 100 = \underline{26{,}17\,m}$

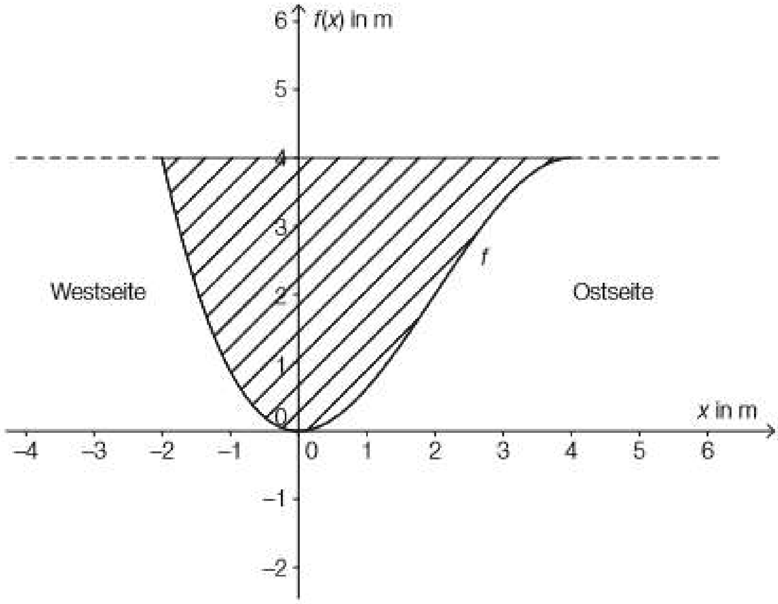
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2}$

$0 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2$

An der Stelle $x = 2$ steigt das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten an.



b) $\overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\tan(\boldsymbol{\beta}) - \tan(\boldsymbol{\alpha}))$

$\overline{CD} = 26{,}1\ldots \text{ m} \approx 26 \text{ m}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle der Funktion f
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Anstieg des Querschnittsprofils an der Ostseite an der Wendestelle am stärksten ist. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)
1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Fläche

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{CD}$

Hü, am 31.05.2022

7.23)
7.24)

A_277 Scheunentor
A_131 Tunnelzelte

7.23 Eine Polynomfunktion 3. Grads hat den Hochpunkt H(3|5) und den Wendepunkt W(4|4).
a) Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse von x = 2 bis zur x-Koordinate des Tiefpunkts?
b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der Tangente in $P(6|y_P)$.

1) Funktion ermitteln

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

I: $P(3|5)$: $f(3) = 5$: $5 = 27a + 9b + 3c + d$
II: $P(4|4)$: $f(4) = 4$: $4 = 64a + 16b + 4c + d$
III: $k = 0$; $x_0 = 3$: $f'(3) = 0$: $0 = 27a + 6b + c$
IV: $W(4|4)$: $f''(4) = 0$: $0 = 24a + 2b$

$a = \frac{1}{2}$ $b = -6$ $c = \frac{45}{2}$ $d = -22$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{45}{2}x - 22$ ✓

$f'(x) = 0 \rightarrow x_1 = 3 \rightarrow$ Hochstelle
$x_2 = 5 \rightarrow$ Tiefstelle

a) A von Kurve bis x-Achse von 2 bis 5?

$$A = \int_2^5 f(x) \cdot dx = \frac{99}{8} \text{ FE}$$ ✓

b) Tangente: $y = k \cdot x + d$

$P(6|y_P)$
$\downarrow$
$f(6) = 5$

$f'(6) = \frac{9}{2}$ $P(6|5)$

$5 = \frac{9}{2} \cdot 6 + d$

$\underline{\underline{d = -22}}$

$t: \quad \underline{y = \frac{9}{2} \cdot x - 22}$

Grenzen: $p(x) = t(x)$

$\underline{x_1 = 0} \quad \underline{x_2 = 6}$

$$A = \int_0^6 [p(x) - t(x)] \cdot dx = \underline{54 \text{ FE}} \checkmark$$

7.24 Eine Polynomfunktion 3. Grads berührt die x-Achse im Ursprung und hat den Hochpunkt $H(2|\frac{4}{3})$.

1) Ermittle die Nullstellen x_1 und x_2 sowie die Gleichung der Wendetangente.

2) Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Wendetangente, der Kurve und den Senkrechten bei x_1 und x_2 eingeschlossen wird.

$p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$p'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$p''(x) = 6a \cdot x + 2b$

I: $P(0|0)$: $p(0) = 0$: $0 = d$

II: $k = 0; x_0 = 0$: $p'(0) = 0$: $0 = c$

III: $P(2|\frac{4}{3})$: $p(2) = \frac{4}{3}$: $\frac{4}{3} = 8a + 4b + 2c + d$

IV: $k = 0; x_0 = 2$: $p'(2) = 0$: $0 = 12a + 4b + c$

$a = -\frac{1}{3} \quad b = 1 \quad c = 0 \quad d = 0$

$\underline{p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2} \checkmark$

1) $p(x) = 0 \rightarrow x_1 = 0$
$x_2 = 3$

$p''(x) = 0 \rightarrow \underline{x = 1}$

$p'(1) = 1 = k \quad p(1) = \frac{2}{3} \rightarrow \underline{P(1|\frac{2}{3})}$

$t: \quad y = k \cdot x + d$

$\frac{2}{3} = 1 \cdot 1 + d$

$\underline{\underline{d = -\frac{1}{3}}}$

$t: \quad \underline{y = x - \frac{1}{3}} \checkmark$

2) $A = \int_0^1 [p(x) - t(x)] \cdot dx + \int_1^3 [t(x) - p(x)] \cdot dx =$

$A = \frac{17}{12}$ FE

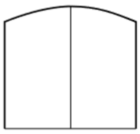
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Scheunentor*

Aufgabennummer: A_277

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Scheunentor besteht aus 2 symmetrischen Flügeln. Die Vorderseite des Scheunentors (Rechteck mit einem aufgesetzten Bogen) ist in der nachstehenden Abbildung vereinfacht dargestellt.



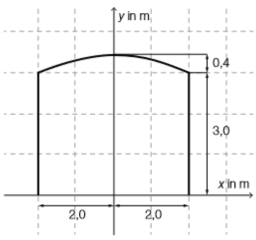
a) Der Bogen des Scheunentors kann näherungsweise durch den Graphen einer quadratischen Funktion mit folgender Gleichung beschrieben werden (vergleiche nachstehende Abbildung):

$y = a \cdot x^2 + b$

x, y ... Koordinaten in m

$P(2|3)$

$P(0|3,4)$



1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

I: $P(2|3)$: $3 = a \cdot 2^2 + b$

II: $P(0,3,4)$: $3,4 = b$

$a = -0,1$ $b = 3,4$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für ein anderes Scheunentor, dessen Flügel jeweils 2,5 m breit sind, lässt sich der Bogen näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion f beschreiben:

$f(x) = -0{,}08 \cdot x^2 + 4$

x ... Koordinate in m
$f(x)$ ... Höhe des Scheunentors an der Stelle x in m

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Vorderseite des Scheunentors.

$\int_{-2,5}^{2,5} f(x) \cdot dx = 19{,}1\dot{6}\ m$

c) Der Flächeninhalt der Vorderseite eines anderen Scheunentors beträgt 16 m². Das Scheunentor hat eine Dicke von 8 cm. Für die Stärke der Verankerung ist es wichtig, die Masse des Tors zu kennen.
Die Masse ist das Produkt aus Volumen und Materialdichte.
Die Materialdichte beträgt 0,7 kg/dm³.

$1600 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7$
$= 896\ kg$

1) Ermitteln Sie die Masse des Scheunentors in Tonnen.

$\hat{=}\ \underline{0{,}896 t}$

Möglicher Lösungsweg

a1) Koordinatensystem in der Symmetrieachse:
$y(0) = 3{,}4$: $3{,}4 = b$
$y(2) = 3$: $3 = 4 \cdot a + 3{,}4 \Rightarrow a = -0{,}1$

b1) $A = 2 \cdot \int_0^{2{,}5} (-0{,}08 \cdot x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{115}{6} \approx 19{,}17$

Der Flächeninhalt beträgt rund 19,17 m².

c1) Das Volumen V ist das Produkt aus Flächeninhalt und Dicke: 16 m² = 1600 dm²;
8 cm = 0,8 dm
$V = 1600\ \text{dm}^2 \cdot 0{,}8\ \text{dm} = 1280\ \text{dm}^3$
Masse des Scheunentors: $m = 0{,}7\ \text{kg/dm}^3 \cdot 1280\ \text{dm}^3 = 896\ \text{kg} = 0{,}896\ \text{t}$
Die Masse des Scheunentors beträgt 0,896 t.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Masse in Tonnen

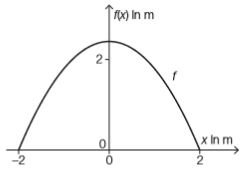
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tunnelzelte

Aufgabennummer: A_131		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Aufblasbare Tunnelzelte erfreuen sich als Messestände immer größerer Beliebtheit.

a) In der nebenstehenden Abbildung ist die innere Querschnittsfläche eines Tunnelzelts dargestellt. Sie kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.



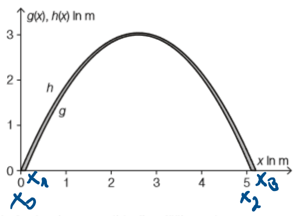
– Kreuzen Sie die für die Koeffizienten von f zutreffenden Bedingungen an. *[1 aus 5]*

$a > 0,\ b = 0,\ c > 0$	☐
$a < 0,\ b = 0,\ c > 0$	☒
$a > 0,\ b > 0,\ c < 0$	☐
$a < 0,\ b < 0,\ c > 0$	☐
$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$	☐

b) In der nebenstehenden Abbildung ist die Querschnittsfläche eines Tunnelzelts dargestellt. Die Querschnittsfläche der Innenhaut wird durch den Graphen der Funktion g, jene der Außenhaut durch den Graphen der Funktion h beschrieben.

$g(x) = -0{,}48 \cdot x^2 + 2{,}496 \cdot x - 0{,}2448$
$h(x) = -0{,}45 \cdot x^2 + 2{,}34 \cdot x$

x, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m



Der Bereich zwischen der Innen- und der Außenhaut muss mit Luft gefüllt werden.

– Berechnen Sie das zum Aufblasen benötigte Luftvolumen bei einer Zeltlänge von 5 m.

$x_0 = 0$

$g(x) = 0 \rightarrow x_1 = 0{,}1$
$x_2 = 5{,}1$

$h(x) = 0 \rightarrow x_3 = 5{,}2$

$$A = \int_0^{0{,}1} h(x) \cdot dx + \int_{0{,}1}^{5{,}1} [h(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{5{,}1}^{5{,}2} h(x) \cdot dx =$$

$$= \underline{0{,}5456\ m^2}$$

$$V = A \cdot 5m = \underline{\underline{2{,}728\ m^3}}\ \checkmark$$

c) Die nachstehende *allgemeine Gasgleichung* beschreibt den Zusammenhang verschiedener physikalischer Größen für ein Gas (z. B. Luft):

$p \cdot V = n \cdot 8{,}314 \cdot T$

p ... Druck in Pascal (Pa)
V ... Volumen in m³
n ... Stoffmenge in Mol
T ... Temperatur in Kelvin (K)

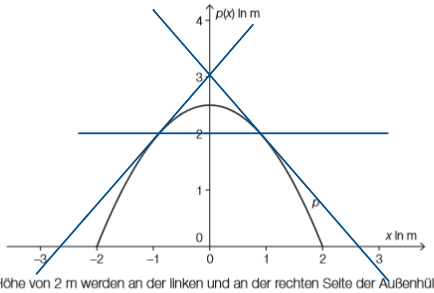
1 Mol Luft enthält rund $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

Zum Aufblasen eines Zeltes werden 4 m³ Luft benötigt.

– Berechnen Sie, wie viele Teilchen in diesem Luftvolumen unter einem Druck von 303 000 Pa bei einer Temperatur von 293 K enthalten sind.

$303000 \cdot 4 = n \cdot 8{,}314 \cdot 293$
$n = 497{,}5365...$
$\cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = \underline{2{,}996... \cdot 10^{26}\ \text{Teilchen}}\ \checkmark$

d) In der nachstehenden Abbildung ist die Außenhülle eines Zeltes, die durch den Graphen einer geraden Funktion p modelliert wurde, dargestellt.



In einer Höhe von 2 m werden an der linken und an der rechten Seite der Außenhülle Seile angebracht. Diese werden so gespannt und am Boden befestigt, dass sie wie eine Tangente an die Außenhülle verlaufen.

– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Seile ein.

Eine Funktion f wird *gerade* genannt, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt:
$f(x) = f(-x)$
Eine Funktion f wird *ungerade* genannt, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt:
$f(x) = -f(-x)$

Mit der folgenden Rechnung wird gezeigt, dass die Ableitung jeder geraden Funktion f ungerade ist:

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \overset{(1)}{=} f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x)$$

– Erklären Sie den mit (1) gekennzeichneten Rechenschritt unter Angabe der entsprechenden Ableitungsregel.

Wegen der Kettenregel muss man das $-x$ außen ableiten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

$a < 0,\ b = 0,\ c > 0$	☒

b) Berechnung der Nullstellen von g und h mittels Technologieeinsatz:
Nullstellen von g: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 5{,}1$
Nullstellen von h: $x_3 = 0$, $x_4 = 5{,}2$

Flächeninhalt der Querschnittsfläche zwischen der Innen- und der Außenhaut:
$\int_0^{5,2} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0,1}^{5,1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5456$

Luftvolumen: $0{,}5456 \cdot 5 = 2{,}728$ m³

Das benötigte Luftvolumen beträgt 2,728 m³.

c) $n = \frac{p \cdot V}{8{,}314 \cdot T} = \frac{303\,000 \cdot 4}{8{,}314 \cdot 293} = 497{,}53...$
$497{,}53... \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 2{,}9... \cdot 10^{26}$

Es sind rund $3 \cdot 10^{26}$ Teilchen enthalten.