$f_{xx} = 12x^2y$

$f_y : x^4 - 6xy^2$

$f_{yx} : 4x^3 - 6y^2$

$f_{yy} : 12y$

2.36) c) $f(x,y) = 4x^2\cos(x+y)$

$f_x = 8x \cdot \cos(x+y) - 4x^2 \cdot \sin(x+y)$

$f_{xx} = 8\cos(x+y) - 8x\sin(x+y) - 8x\sin(x+y) - 4x^2\cos(x+y)$

21. Schulübung, am 16.01.2023

Buch Seite 38

Notwendige Bedingung für den lokalen Extremwert:

Wenn eine Funktion $z = f(x,y)$ bei (x_0,y_0) einen relativen Extremwert aufweist und die partielle Ableitungen f_x und f_y an der Stelle (x_0,y_0) existieren, so gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{array}}$$ und

22. SÜ, am 23.01.2023

Buch Seite 39

Hinreichende Bedingung für einen lokalen Extrempunkt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right]^2 > 0$$

bzw. in Kurzfassung:

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

Gilt $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, so liegt ein lokales Maximum vor.

Gilt $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, so liegt ein lokales Minimum vor.

Wenn

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

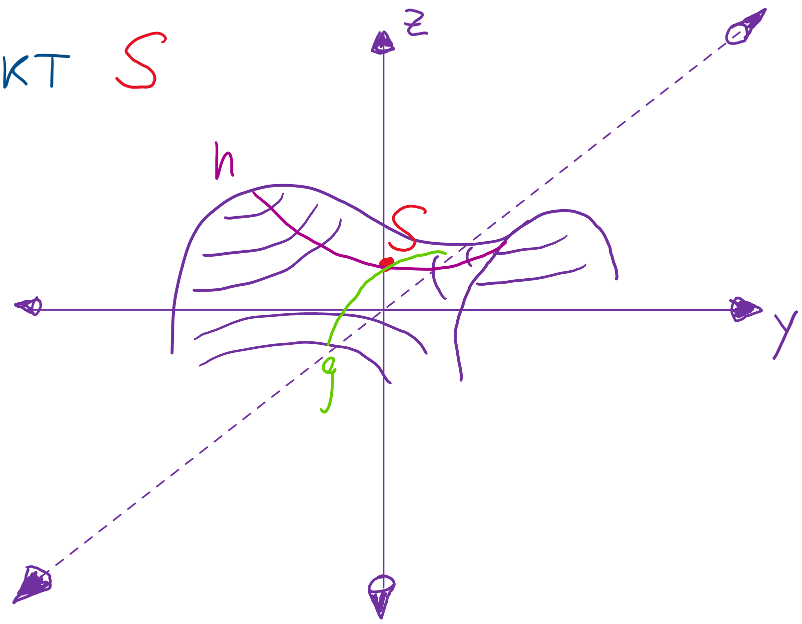
dann

$\Rightarrow$ SATTELPUNKT S

(weder Hoch- noch Tiefpunkt)

$S \rightarrow$ Maximum v. g

$S \rightarrow$ Minimum v. h



2.46b) $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + x - 4y$

$f_x = -\frac{1}{x^2} + 1$ $\quad$ $f_y = \frac{1}{y^2} - 4$

$f_{xx} = \frac{2}{x^3}$ $\quad$ $f_{yy} = -\frac{2}{y^3}$ $\quad$ $f_{xy} = 0$

$\text{I}: -\frac{1}{x^2} + 1 = 0$

$\text{II}: -\frac{1}{y^2} - 4 = 0$

$x_0 = \pm 1; \ y_0 = \pm \frac{1}{2}$

① $x_0 = 1; \ y_0 = \frac{1}{2}$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{2}{1^3} \cdot -\frac{2}{(\frac{1}{2})^3} - 0^2 < 0$$

↳ Sattelpunkt

$\underline{S(1, \frac{1}{2}, -2)}$ ✓

(2) $x_0 = 1;\ y_0 = -\frac{1}{2}$

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{2}{1^3} \cdot -\frac{2}{(-\frac{1}{2})^3} - 0 > 0$

↳ Extrempunkt

$f_{xx}(1, -\frac{1}{2}) = \frac{2}{1^3} > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt

$\underline{\underline{T(1, -\frac{1}{2}, 6)}}$ ✓

(3) $x_0 = -1;\ y_0 = \frac{1}{2}$

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{2}{(-1)^3} \cdot -\frac{2}{(\frac{1}{2})^3} - 0^2 > 0$

↳ Extrempunkt

$f_{xx}(-1, \frac{1}{2}) = \frac{2}{(-1)^3} < 0 \rightarrow$ Hochpunkt

$\underline{H(-1, \frac{1}{2}, -6)}$ ✓

(4) $x_0 = -1;\ y_0 = -\frac{1}{2}$

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{2}{(-1)^3} \cdot -\frac{2}{(-\frac{1}{2})^3} - 0^2 < 0$

↳ Sattelpunkt

$\underline{S(-1, -\frac{1}{2}, 2)}$ ✓

23. Schulübung, am 27.01.2023

Lineare Fehlerfortpflanzung

Buch Seite 41 lernen

2.52) → Buch

2.54) a) $z = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(y)$

Vollständiges Differenzial

$$\Delta z \mathrel{\hat{=}} dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

$$f_x = 2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(y)$$

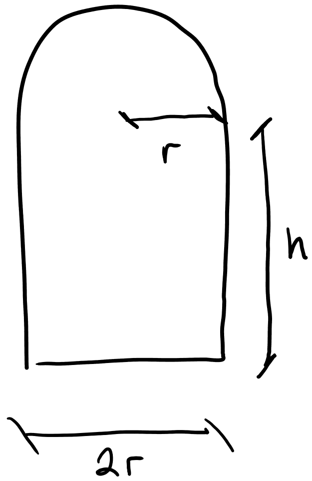
$$f_y = -2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$dz = 2 \cdot \cos(x_0) \cdot \cos(y_0) \cdot dx - 2 \cdot \sin(x_0) \cdot \sin(y_0) \cdot dy$$

2.57) $U(r,h) = r\cdot\pi + 2h + 2r$

$r = (4{,}6 \pm 0{,}3)\,m$

$h = (18{,}4 + 0{,}2)\,m$



$$|\Delta z_{max}| = |f_x(x_0,y_0)\cdot \Delta x| + |f_y(x_0,y_0)\cdot \Delta y|$$

$U_r = \pi + 2$

$U_h = 2$

$$|\Delta U_{max}| = |U_r(r_0,h_0)\cdot \Delta r| + |U_h(r_0,h_0)\cdot \Delta h| =$$

$$= |[\pi+2]\cdot 0{,}3| + |2\cdot 0{,}2| = \underline{1{,}942\ldots\,m}$$

$$U_0 = 4{,}6\pi + 2\cdot 18{,}4 + 2\cdot 4{,}6 = \underline{60{,}451\ldots}\,m$$

$$U = U_0 \pm \Delta U_{max}$$

$$\underline{U = (60{,}451\ldots \pm 1{,}942\ldots)\,m}$$

24. Schulübung, am 30.01.2023

2.77) $P(U,R) = \frac{U^2}{R}$

$U(220 \pm 5)\,V = (u_0 \pm \Delta u)\,V$

$R(\ldots \pm 2)\,\Omega = (R_0 \pm \Delta R)\,\Omega$

$U(220 \pm 5)\,V = (u_0 \pm \Delta u)\,V$

$R(110 \pm 2)\,\Omega = (R_0 \pm \Delta R)\,\Omega$

$P(U,R) = \frac{U^2}{R}$

1) $|\Delta z_{max}| = |f_x(x_0,y_0)\cdot dx| + |f_y(x_0,y_0)\cdot dy|$

$|\Delta P_{max}| = |P_U(U_0,R_0)\cdot dU| + |P_R(U_0,R_0)\cdot dR|$

$P_U = \frac{2U}{R} \qquad P_R = -\frac{U^2}{R^2}$

$|\Delta P_{max}| = \left|\frac{2U}{R}\cdot \Delta U\right| + \left|-\frac{U^2}{R^2}\cdot \Delta R\right|$

$= \frac{2\cdot 220}{110}\cdot 5 + \frac{220^2}{110^2}\cdot 2$

$= \underline{28\ W}$

$P = P_0 \pm \Delta P_{max}$

$P_0 = \frac{220^2}{110} = \underline{440\ W}$

$\underline{\underline{P = 440\ W \pm 28\ W}}$

2) A: Die Leistung liegt im Bereich

$\underline{[412\ W; 468\ W]}$

3) $\left|\frac{\Delta P_{max}}{P_0}\right| = \frac{28}{440} = \underline{6{,}36\,\%}$

17. Funktionenreihen

Monday, January 30, 2023 12:08 PM

17. Funktionenreihen

Konvergenz: Buch Seite 49

Taylorpolynome, Taylorreihen

$f(x) = \sin(x)$ $\quad$ $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x)$ $\quad$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$ $\quad$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$ $\quad$ $f'''(0) = -1$

$f''''(x) = \sin(x)$ $\quad$ $f''''(0) = 0$

$f'''''(x) = \cos(x)$ $\quad$ $f'''''(0) = 1$

$f''''''(x) = -\sin(x)$ $\quad$ $f''''''(0) = 0$

$f'''''''(x) = -\cos(x)$ $\quad$ $f'''''''(0) = -1$

Annähern durch die Funktionen $g_1, g_2, g_3, \ldots$

$g_1(x) = x$ $\quad$ $g_1(0) = 0$

$g_1'(x) = 1$ $\quad$ $g_1'(0) = 1$

$g_1''(x) = 1$ $\quad$ $g_1''(0) = 1$ ✗

$g_2(x) = x - \frac{x^3}{6}$ $\quad$ $g_2(0) = 0$

$g_2'(x) = 1 - \frac{3x^2}{6}$ $\quad$ $g_2'(0) = 1$

$g_2''(x) = -\frac{6x}{6}$ $\quad$ $g_2''(0) = 0$

$g_2'''(x) = -1$ $\quad$ $g_2'''(0) = -1$

$g_2''''(x) = 0$ $\quad$ $g_2''''(0) = 0$

$g_2'''''(x) = 0$ $\quad$ $g_2'''''(0) = 0$ ✗

$g_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ $\quad$ $g_3(0) = 0$

$g_3'(x) = 1 - \frac{3x^2}{6} + \frac{5x^4}{120}$ $\quad$ $g_3'(0) = 1$

$g_3''(x) = -\frac{6x}{6} + \frac{20x^3}{120}$ $\quad$ $g_3''(0) = 0$

$g_3'''(x) = -1 + \frac{60x^2}{120}$ $\quad$ $g_3'''(0) = -1$

$g_3''''(x) = \frac{120x}{120}$ $\quad$ $g_3''''(0) = 0$

120 $\quad$ $'''''(0) = 1$

$g_3''''(x) = \frac{120x}{120}$ $\qquad$ $g_3''''(0) = 0$

$g_3'''''(x) = \frac{120}{120}$ $\qquad$ $g_3'''''(0) = 1$

$g_3''''''(x) = 0$ $\qquad$ $g_3''''''(0) = 0$

$g_3'''''''(x) = 0$ $\qquad$ $g_3'''''''(0) = 0$ ✗

25. Schulübung, am 03.02.2023

f wird durch g bei x_0 umso besser approximiert, je mehr Ableitungen von f und g übereinstimmen.

Bsp.: Approximiere die Funktion $f(x) = \cos(x)$ bei $x_0 = 0$ durch ein Polynom vom Grad 5.

$f(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $g(x) = a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

$\underline{I}$: $f(x) = g(x)$
$\underline{II}$: $f'(x) = g'(x)$
$\underline{III}$: $f''(x) = g''(x)$
$\underline{IV}$: $f'''(x) = g'''(x)$
$\underline{V}$: $f^{IV}(x) = g^{IV}(x)$
$\underline{VI}$: $f^{V}(x) = g^{V}(x)$

TI: Gleichungssystem

$a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = -\frac{1}{2}$

$a_3 = 0 \quad a_4 = \frac{1}{24} \quad a_5 = 0$

$\underline{g(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1}$ $\rightarrow$ Taylorpolynom

$$\cos(x) = 1 - \underset{\substack{\downarrow \\ 2!}}{\frac{1}{2}} x^2 + \underset{\substack{\downarrow \\ 4!}}{\frac{1}{24}} x^4 \underset{\substack{\downarrow \\ 6!}}{-} \ldots$$

$\ldots 1 \ldots x^2 \ldots 1 \ldots x^4 - 1 \ldots x^6 + 1 \ldots x^8$

$2!$ $4!$ $6!$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

26. SÜ, am 13.02.2023

Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots$$

mit $c_n \in \mathbb{R}$

c_n $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ ..... Koeffizienten der Potenzreihe

Konvergenzradius

Bereich [Intervall] in dem die
Potenzreihe mit der Funktion konvergiert.

lol

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Taylorreihe:

n-te Ableitung von $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n =$$

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

Taylorreihe ist ein Spezialfall der Potenzreihe.
Obrige Potenzreihe nennt man Taylorreihe.

Entwicklung einer Funktion e^x in einer Taylorreihe
mit $x_0 = 0$

↳ Buch S. 57-59

3.23)

Potenzreihen elementarer Funktionen → S. 59

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzbereich
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
a^x mit $a\in\mathbb{R}$	$1+\frac{\ln(a)\cdot x}{1!}+\frac{(\ln(a))^2\cdot x^2}{2!}+\frac{(\ln(a))^3\cdot x^3}{3!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2\cdot\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right]$	$\lvert x\rvert<1$
$\ln(x)$	$(x-1)-\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3-\frac{1}{4}\cdot(x-1)^4\pm\ldots$	$0<x\leq 2$
$\sin(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cos(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\tan(x)$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2\cdot x^5}{15}+\frac{17\cdot x^7}{315}+\frac{62\cdot x^9}{2835}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\sinh(x)$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cosh(x)$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\tanh(x)$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{2\cdot x^5}{15}-\frac{17\cdot x^7}{315}+\frac{62\cdot x^9}{2835}\pm\ldots$	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3\pm\ldots$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+\ldots$	$\lvert x\rvert<1$

3.24) c)

$$a^x = 1 + \frac{\ln(a)\cdot x}{1!} + \frac{\ln(a)^2\cdot x^2}{2!} + \frac{\ln(a)^3\cdot x^3}{3!} + \ldots$$

$$f(x) = 2^x$$

$$P_4(x) = 1 + \frac{\ln(2)\cdot x}{1!} + \frac{\ln(2)^2\cdot x^2}{2!} + \frac{\ln(2)^3\cdot x^3}{3!} + \frac{\ln(2)^4\cdot x^4}{4!}$$

$P_4(0{,}4) = 1{,}319\ldots$ | $2^{0{,}4} = 1{,}3195\ldots$

$P_4(-2{,}3) = 0{,}270\ldots$ | $2^{-2{,}3} = 0{,}203\ldots$

3.32)

$f(x) = 3x^2 - 5x + 7 \qquad x_0 = 2$ | $f(2) = 9$

$f'(x) = 6x - 5$ | $f'(2) = 7$

$f''(x) = 6$ | $f''(2) = 6$

$f'''(x) = f''''(x) = f'''''(x) = 0$ | $f'''(2) = 0$

$$P(x) = 9 + 7\cdot(x-2) + \frac{6}{2}\cdot(x-2)^2 \checkmark$$

A: Das ist eine endliche Reihe, weil ab der dritten Ableitung alle Funktionen 0 sind.

44.5 Schulübung, am 8.5.2023 (Supplierstunde)

3.69) c) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

$$f'(x) = e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x)$$

$$f''(x) = 2e^x \cdot \cos(x)$$

$$f'''(x) = 2e^x \cdot \cos(x) - 2e^x \cdot \sin(x)$$

$$p''(x) = 2e^x \cdot \cos(x)$$

$$p'''(x) = 2e^x \cdot \cos(x) - 2e^x \cdot \sin(x)$$

$$p(0{,}5) = 0{,}790\ldots$$

$$p'(0{,}5) = 2{,}237\ldots$$

$$p''(0{,}5) = 2{,}893\ldots$$

$$p'''(0{,}5) = 1{,}312\ldots$$

$$p(x) = \frac{p(0{,}5)}{1} \cdot (x-0{,}5)^0 + \frac{p'(0{,}5)}{1} \cdot (x-0{,}5)^1 + \frac{p''(0{,}5)}{2} \cdot (x-0{,}5)^2 + \frac{p'''(0{,}5)}{6} \cdot (x-0{,}5)^3 + \ldots$$

$$\underline{p(x) = 0{,}790\ldots + 0{,}237\ldots \cdot (x-0{,}5) + \frac{2{,}893\ldots}{2} \cdot (x-0{,}5)^2 + \frac{1{,}312\ldots}{6} \cdot (x-0{,}5)^3 + \ldots}$$

Fourierpolynome, Fourierreihen

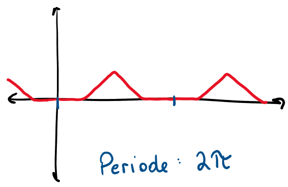
Friday, February 17, 2023 9:59 AM

27. Schulübung, am 17.02.2023

Fourierpolynome, Fourierreihen

periodische Funktionen:

3.42) b)



Periode: 2π

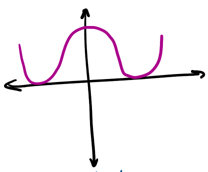
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi}x - 2 & \text{für } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{\pi}x - 2 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

f_1: $k_1 = -\frac{4}{\pi}$ $d_1 = -2$

f_3: $k_3 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{\pi/2} = \frac{4}{\pi}$ $d_3 = -2$

Symmetrieeigenschaften von Funktion

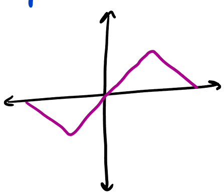
gerade Funktion:



Symmetrisch zur y-Achse

$f(x) = f(-x)$

ungerade Funktion:



punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

$f(x) = -f(-x)$

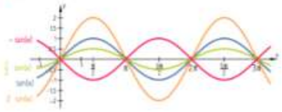
3.43) a) $T = 6s$

Spannung pro Zeit $\rightarrow$ $u(t) = \begin{cases} 25V & \text{für } 0 \leq x < 3 \\ 0V & \text{für } 3 \leq x < 6 \end{cases}$

28. Schulübung, am 20.02.2023

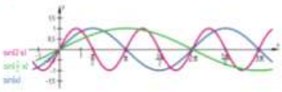
Trigonometrische Funktionen

- $y = a \cdot \sin(x)$



$|a|$ ... Amplitude

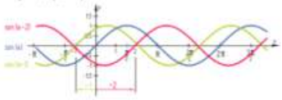
- $y = \sin(b \cdot x)$



b ... Kreisfrequenz

Mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man eine Sinusschwingung $y = \sin(\omega \cdot t)$

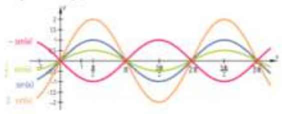
- $y = \sin(x + c)$



c ... Phasenverschiebung

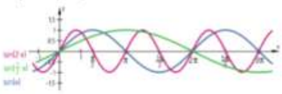
Trigonometrische Funktionen

- $y = a \cdot \sin(x)$



$|a|$ ... Amplitude

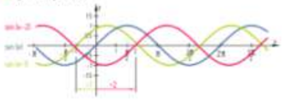
- $y = \sin(b \cdot x)$



b ... Kreisfrequenz

Mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man eine Sinusschwingung $y = \sin(\omega \cdot t)$

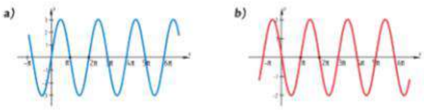
- $y = \sin(x + c)$



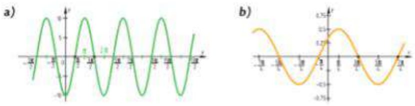
c ... Phasenverschiebung

Aufgaben: Ermittle jeweils die Funktionsgleichung des dargestellten Graphen und gib sie als Sinusfunktion an.

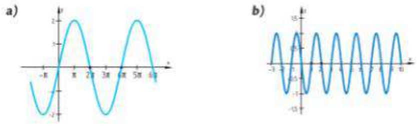
A1:



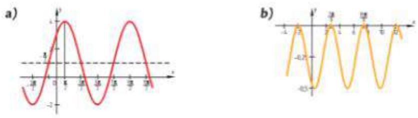
A2:



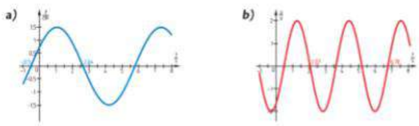
A3:



A4:



A5:



b) $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$

$a = 2$
$b = 2$

$y = 2\sin(2x + c)$

$P(0|6{,}78)$

$0 = 2\sin(2 \cdot 6{,}78 + c)$

$c = -13{,}56\ldots + 2\pi \cdot k$

irgendeine natürliche Zahl

$\underline{y = 2\sin(2x - 1)}$

Weitere Aufgaben: Aufgabenpool: Deskriptorsuche B_T2_3.3

3.43) b)

$T = 10\,s$

$$v(t) = \begin{cases} 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} x\right) & \text{für } 0 \le t < 5 \\ 0 & \text{für } 5 \le t < 10 \end{cases}$$

Fourierkoeffizienten

Ist $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion,

so gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) \right]$$

$a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots$ .... Fourierkoeffizienten

↳ entsprechen den Amplituden der

↳ entsprechen den Amplituden der Sinus- und Cosinusschwingungen

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx$$

29. Schulübung, am 24.02.2023

3.51) b)

$$T = 2\pi$$

$$f(x) = \begin{cases} -x + \pi & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} (-x + \pi)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0\, dx \right)$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} (-x + \pi) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx \right)$$

$$= -\frac{\cos(n\cdot\pi)-1}{n^2\cdot\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{2}{9\pi} \quad a_4 = 0 \quad \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(-x+\pi)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx$$

$$= -\frac{\sin(n\cdot\pi)-n\cdot\pi}{n^2\cdot\pi} = \frac{1}{n}$$

$$b_1 = 1 \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad b_3 = \frac{1}{3} \quad b_4 = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(n\cdot x) + b_n\cdot\sin(n\cdot x)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\cos(n\cdot\pi)-1}{n^2\pi}\cdot\cos(n\cdot x) + \frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot x)\right]$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cdot\cos(x) + \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{2}{9\pi}\cdot\cos(3x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \ldots$$

30. Schulübung, am 27.02.2023

3.52) a)

$T = 2\pi$ keine Symmetrie

$$f(x) = \begin{cases} 5\cdot\sin(x) & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} 5 \cdot \sin(x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0\, dx \right] =$$

$$= \underline{\frac{10}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} 5 \cdot \sin(x) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx + 0 \right]$$

$$= \left[\frac{5}{2 \cdot (n+1)\, \pi} - \frac{5}{\underbrace{2 \cdot (n-1)}_{n \neq 1}\, \pi} \right] \cdot \cos(n \cdot \pi) + \frac{5}{2 \cdot (n+1) \cdot \pi} - \frac{5}{2 \cdot (n-1) \cdot \pi} \qquad \text{für } n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} 5 \cdot \sin(x) \cdot \cos(1 \cdot x)\, dx + 0 \right]$$

$$a_0 = \frac{10}{\pi} \quad a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{10}{3\pi} \quad a_3 = 0 \quad a_4 = -\frac{2}{3\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\, \sin(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 5 \sin(x)\, \sin(nx)\, dx =$$

$$= \left[\frac{5}{2 \cdot (n+1)\pi} - \frac{5}{\underbrace{2 \cdot (n-1)}_{n \neq 1}\pi} \right] \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0,\ \text{wenn } n \in \mathbb{N}} \qquad \text{für } n \neq 1$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 5 \sin^2(x)\, dx$$

$$b_1 = \frac{5}{2} \qquad b_2 = b_3 = b_4 = \dots = 0$$

Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \right] =$$

$$5 \quad 5 \ \sin(x) \quad 10 \ \cos(2x) - 2 \ \cos(4x) + \dots$$

$$= \frac{5}{\pi} + \frac{5}{2} \cdot \sin(x) - \frac{10}{3\pi} \cos(2x) - \frac{2}{3\pi} \cos(4x) + \dots$$

Vereinfachung der Fourierkoeffiezienten einer 2π-periodischen Funktion

Ist $f(x)$ eine gerade Funktion:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx)$$

Ist $f(x)$ eine ungerade Funktion:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$$

31. Schulübung, am 03.03.2023

18 Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen.

Ordnung: 1

Bsp.: $y' = x$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

Ordnung: 2

Bsp.: $y'' - 2y' + 3y = 0$

Grundbegriffe

Ordnung: höchst vorkommende Ableitung

Bsp.: $y''' + 3y'' - 2 = 0$

↳ Ordnung: 3

Grad: Exponent der höchsten Ableitung

Bsp.: $(y'')^3 + (y')^5 = 0$

↳ Grad: 3

Lineare Differenzialgleichung:

Lineare Differenzialgleichung:

nur lineare Terme von $y, y', y'', \dots$ treten auf; keine Produkte aus der Funktion und den Ableitungen

Bsp.: $2y'' + x \cdot y = \sin(x)$

kein Bsp.: $y \cdot y' = 0$

gewöhnliche Differenzialgleichung:

hängt nur von einer unbekannten Variable ab

4.7) → Buch

1. Ableitung von y nach x direkt proportional zu y:

$$\frac{dy}{dx} = ky \qquad (1A)$$

1. Ableitung von y nach x indirekt proportional zu y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{y} \qquad (2B)$$

4.8/b) $y' = \sqrt[3]{x}$

c) $y' = x + y$

4.10/a) $\frac{dv}{dh} = \frac{k}{\sqrt{h}}$

c) $\frac{dp}{dT} = \frac{k \cdot p}{T^2}$

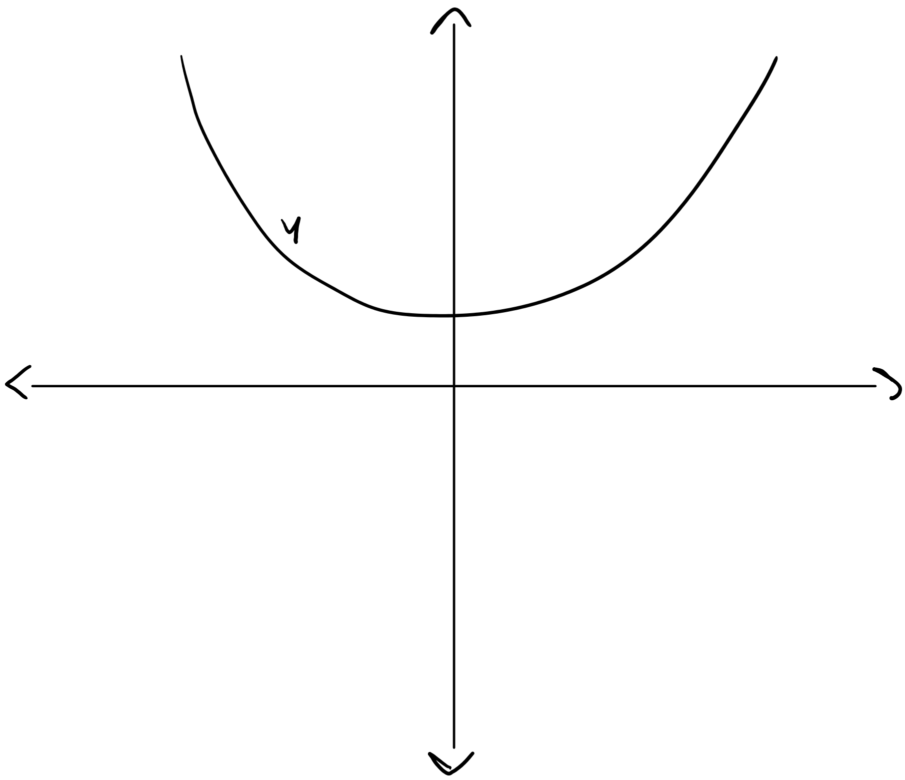
32. Schulübung, am 6.3.23

Bsp.: $y' = x$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

↳ Kurvenschar (allgemeine Lösung)

z.B.:



Für die spezielle Lösung werden Bedingungen benötigt (Anzahl d. zusätzlichen Funktionen muss mit der Ordnung übereinstimmen = Anzahl d. Integrationskonstanten)

Anfangsbedingung:

alle Informationen betreffen dieselbe Stelle x_0

$y(x_0) = \dots$

$y'(x_0) = \dots$

$y'(x_0) = \dots$

$y''(x_0) = \dots$

↳ Anfangswertproblem

Randbedingung:

alle Informationen für verschiedene Stellen sind gegeben

$y(x_0) = \dots$

$y(x_1) = \dots$

$y'(x_2) = \dots$

↳ Randwertproblem

4.11) 1) Ordnung: 1

↳ 1 Bedingung

2) Ordnung: 2

↳ 2 Bedingungen

3) Ordnung: 3

↳ 3 Bedingungen

4) Ordnung: 2

↳ 2 Bedingungen

4.13) c) $y'' = 5x + \sqrt[3]{x} = 5x + x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{5x^2}{2} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C_1 = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C_1$$

$$.. = \frac{5x^3}{6} + \frac{3}{4}\,\frac{x^{\frac{7}{3}}}{7} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$y = \frac{5x^3}{6} + \frac{3}{4}\,\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$= \frac{5}{6}x^3 + \frac{9}{28}x^{\frac{7}{3}} + C_1 \cdot x + C_2$$

↳ allgemeine Lösung, weil noch Cs

4.16) b) $y'' = -0{,}6x + 0{,}5$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0{,}1$

↳ Anfangsbedingungen

$$y' = -0{,}3x^2 + 0{,}5x + C_1$$

$$y = -0{,}1x^3 + 0{,}25x^2 + C_1 x + C_2$$

↳ allgemeine Lösung

spezielle Lösung:

Gleichungssystem:

$1 = C_2$

$0{,}1 = C_1$

$$y = -0{,}1x^3 + 0{,}25x^2 + 0{,}1x + 1$$

↳ spezielle Lösung

TI: MENU → Analyse → Differentialgleichungslöser

4.18) b) $a = 0\,\frac{m}{s^2}$

$v_0 = 15\,\frac{m}{s}$ $v(0)$

$s = 120\,m$ $s(0)$

$v_0 =$ …

$s_0 = 120\,m$ $s(0)$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a$$

$$v(t) = \int a\, dt = a \cdot t + C_1 = C_1$$

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int C_1 \cdot dt = \underbrace{C_1 \cdot t + C_2}_{\text{allgemeine Lsg}}$$

Gleichungssystem:

$C_2 = 120\,m \rightarrow s(0)$

$C_1 = 15\,\frac{m}{s} \rightarrow v(0)$

$$\underbrace{s(t) = 15t + 120}_{\text{spezielle Lösung}}$$

RICHTUNGSFELDER

Grafische Veranschaulichung: Buch S. 82/83

4.5 → Buch

4.21 → Buch

2) a) A: Logarithmusfkt

b) B: gebrochene rationale Fkt

Trennen der Variablen

4.26) a)

$y' = 2xy$ $y(0) = 5$

$y' = 2xy \qquad y(0) = 5$

$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x \cdot y$ // Differenzialquotient

$\frac{1}{y} \cdot dy = 2 \cdot x \cdot dx$ // Trennen d. Variablen

$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 2 \cdot x \cdot dx$ // Integrationen

$\ln|y| + C_1 = x^2 + C_2 \quad | -C_1$ // Durchführung

$\ln|y| = x^2 + \tilde{C}$ // Integrationskonstanten zusammenfassen

$|y| = e^{x^2 + \tilde{C}}$

$y = e^{x^2 + \tilde{C}}$ // Gleichung lösen

$y = e^{x^2} \cdot e^{\tilde{C}} \qquad \tilde{C} = C_2 - C_1 \qquad e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$y(x) = e^{x^2} \cdot C \qquad C = \tilde{C}$

allgemeine Lsg

$y = e^{x^2} \cdot C \qquad y(0) = 5$

$e^0 + C = 5$

$C = 5$

$y(x) = 5e^{x^2}$

spezielle Lösung

Die Methode „Trennen d. Variable" kann nur

... angewandt werden:

Die Methode „Trennen d. Variable" kann nur in manchen Fällen angewandt werden:

Differenzialgleichungen der Form

$y' = f(x) \cdot g(y)$ mit $y = y(x)$

können durch „Trennen d. Variablen" gelöst werden.

4.29) c)

$2y \cdot \sin(x) + y' = 0$

$y' = \boxed{-2y} \cdot \boxed{\sin(x)}$

$\frac{dy}{dx} = -2y \cdot \sin(x) \quad | : (-2y) \quad \cdot dx$

$-\frac{1}{2y} \cdot dy = \sin(x) \, dx$

$\int -\frac{1}{2y} \cdot dy = \int \sin(x) \cdot dx$

$-0{,}5 \cdot \ln|y| + C_1 = -\cos(x) + C_2$

$-0{,}5 \cdot \ln|y| = -\cos(x) + C_3$

$\ln|y| = \frac{-\cos(x) + C_3}{-0{,}5}$

$|y| = e^{\frac{-\cos(x) + C_3}{-0{,}5}} = e^{\frac{-\cos(x) + C_3}{-\frac{1}{2}}}$

$|y| = e^{2\cos(x) - 2C_3}$

$|y| = e^{2\cos(x)} + C$

$y(x) = e^{2\cos(x)} + C$

allgemeine Lösung

$\int \frac{1}{y} \, dy = \int -2 \sin(x) \cdot dx$

$\ln|y| + C_1 = 2\cos(x) + C_2$

$\ln|y| = 2\cos(x) + \tilde{C}$

$|y| = e^{2\cos(x)} + C$

$y(x) = e^{2\cos(x)} + C$

allgemeine Lösung

33. Schulübung, am 10.03.2023

33. Schulübung, am 10.03.2023

4.30) c) $3xy' - y = 0 \quad | + y$

$$3xy' = y \quad | : 3x$$

$$y' = \frac{y}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x} \quad | : y \quad \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{3x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| + C_1 = \frac{1}{3} \ln|x| + C_2 \quad | - C_1$$

$$\ln|y| = \frac{1}{3} \ln|x| + \widetilde{C}$$

$$\boxed{n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{3}\ln|x|} \cdot C$$

$$|y| = |x|^{\frac{1}{3}} \cdot C$$

$$|y| = \sqrt[3]{|x|} \cdot C$$

$$\underline{y(x) = \sqrt[3]{|x|} \cdot C}$$

allgemeine Lösung

$y(1) = 3$

$$3 = \sqrt[3]{1} \cdot C$$

$$C = 3$$

$$\underline{y(x) = 3\sqrt[3]{|x|}}$$

spezielle Lösung

4.31) c)

$$y' - 4 \cdot (2+y) = 0 \qquad \Big| + [4 \cdot (2+y)]$$

$$y' = 4 \cdot (2+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot (2+y) \qquad \Big| : (2+y)$$

$$\frac{1}{2+y}\, dy = 4\, dx$$

$$\int \frac{1}{2+y}\, dy = \int 4\, dx$$

$$\ln|2+y| + C_1 = 4x + C_2$$

$$\ln|2+y| = 4x + \tilde{C} \qquad \Big| e^{\wedge}$$

$$|2+y| = e^{4x} \cdot C$$

$$2+y = e^{4x} \cdot C \qquad \Big| -2$$

$$\underline{y(x) = Ce^{4x} + 2}$$

allgemeine Lösung

4.32) c)

$$y'\,(1-x^2) + xy = 0 \qquad \Big| -xy$$

$$y'\,(1-x^2) = -xy \qquad \Big| : (1-x^2)$$

$$y' = -\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1-x^2} \qquad \Big| : y \qquad \Big| \cdot dx$$

$$\frac{1}{y}\, dy = -\frac{x}{1-x^2}\, dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \underline{\int -\frac{x}{1-x^2}\, dx}$$

Substituieren:

$$\int \frac{x}{\dots}\, dx = \left| u = 1-x^2 \right| =$$

$$\ln|y| + C_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln|1-x^2| + C_2$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \cdot \ln|1-x^2| + \tilde{C}$$

$$\ln|y| = \ln\left(|1-x^2|^{\frac{1}{2}}\right) + \tilde{C} \qquad | \, e^{\wedge}$$

$$y(x) = |1-x^2|^{\frac{1}{2}} \cdot C$$

$$\underline{y(x) = \sqrt{|1-x^2|} \cdot C}$$

Substituieren:

$$\int -\frac{x}{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x \cdot dx \\ dx = \frac{du}{-2x} \end{array} \right| =$$

$$= \int \cancel{-} \frac{\cancel{x}}{u} \, \frac{du}{\cancel{-}2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2} \ln|u| + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C_2$$

34. Schulübung, am 17.03.2023

Anwendungen

Exponentielles und beschränktes Wachstum

exponentielles Wachstum / Abnahme

1. Ableitung ist proportional zum momentanen Funktionswert

Zunahme $y'(t) = k \cdot y(t)$

wenn $k > 0$

Abnahme: $y'(t) = -k \cdot y(t)$

wenn $k > 0$

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y$$

$$\frac{1}{y}\,dy = k \cdot dx$$

$$\ln|y| = k \cdot x + C$$

$$y(x) = C \cdot e^{k \cdot x}$$

↳ Lösungskurve = eine Exponentialfunktion

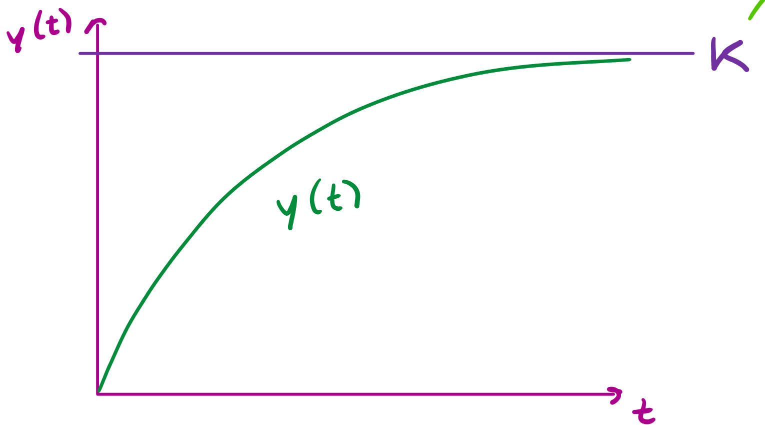
beschränktes Wachstum | Abnahme

beschränktes Wachstum:

$$y'(t) = k \cdot [K - y(t)]$$

wenn $k > 0$

Kapazitätsgrenze / Sättigungswert

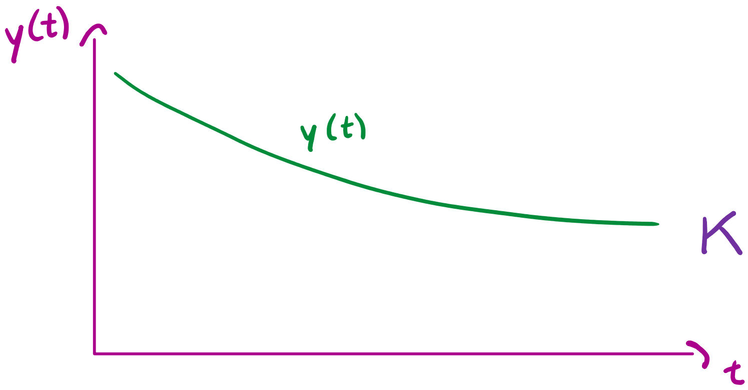


$y(0) < K$

beschränkte Abnahme

$$y'(t) = -k \cdot [y(t) - K]$$

mit $k > 0$



$y(0) > K$

S. 88)

4.37)

1) $B'(t) = k \cdot [8000 - B(t)]$

2) $B(0) = 300$

2) $B(0) = 300$

$B(1) = 300 \cdot 0{,}15 = 345$

Trennen d. Variablen:

$B' = k \cdot [8000 - B]$

$\frac{dB}{dt} = k \cdot [8000 - B] \quad | \cdot dt \quad | : [8000-B]$

$\frac{1}{8000-B} \cdot dB = k \cdot dt$

$\int \frac{1}{8000-B} \, dB = \int k \cdot dt$

$- \ln|8000-B| = kt + \tilde{C} \quad | \cdot (-1)$

→ wegen richtig ableiten

$\ln|8000-B| = -kt - \tilde{C}$

$8000 - B = e^{-kt-\tilde{C}}$

$8000 - B = e^{-kt} \cdot C \quad | -8000$

$-B = e^{-kt} \cdot C - 8000 \quad | \cdot (-1)$

$B(t) = 8000 - e^{-kt} \cdot C$

allgemeine Lösung

$300 = B(0) = 8000 - e^{-k \cdot 0} \cdot C$

$C = 7700$

$345 = B(1) = 8000 - e^{-k} \cdot 7700$

$7655 = +e^{-k} \cdot 7700$

$\frac{7655}{7700} = e^{-k}$

$$\frac{7655}{7700} = e^{-k}$$

$$\ln\left(\frac{7655}{7700}\right) = -k$$

$$k = -\ln\left(\frac{7655}{7700}\right)$$

$$B(t) = 8000 - e^{-\ln\left(\frac{7655}{7700}\right)\cdot t} \cdot 7700$$

spezielle Lösung

$$8000 \cdot 0{,}9 = B(t)$$

$$7200 = 8000 - e^{-\ln\left(\frac{7655}{7700}\right)\cdot t} \cdot 7700$$

$t \mathrel{\hat{=}} 386{,}3$ Wochen

35. Schulübung, am 20.03.2023

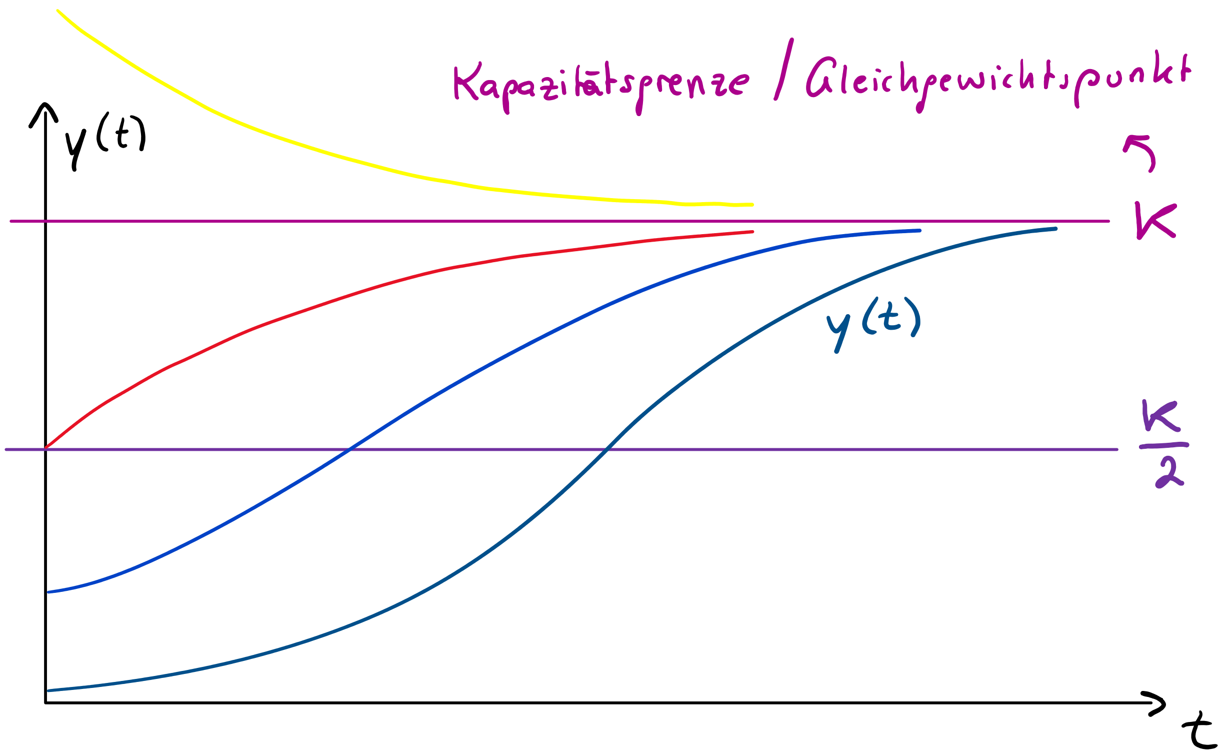
logistisches Wachstum

(Buch S. 89)

$$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

$$y(t) = \frac{K \cdot y_0}{y_0 \cdot (K - y_0) \cdot e^{-k\cdot t}}$$

$$y(t) = \frac{\quad}{y_0 \cdot (K - y_0) \cdot e^{-k \cdot t}}$$



4.40) $k = 0{,}031395$

$K = 197274$

$y_0 = 2890$

$$y'(t) = 0{,}031395 \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{197274}\right)$$

$$y(0) = 2890$$

TI: Analyses → Differenzialgleichungslöser

deSolve (y' = 0,03... and y(0) = 2890, t, y) / GUI

$$y(t) = \frac{197274 \cdot (1{,}0318930\ldots)^t}{\ldots}$$

$$y(t) = \frac{194274 \cdot (1{,}0318930\ldots)^t}{(1{,}0318930\ldots)^t + 67{,}260899\ldots} \checkmark$$

t … Zeit in Jahren ab 1780

y(t) … Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t in Tausend

2) $y(1860-1780) = y(80) = 30549{,}8962\ldots \checkmark$

$\Delta y = 31{,}443 \cdot 10^6 - 30549 \cdot 10^6 = 0{,}893 \cdot 10^6 \checkmark$

$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{0{,}8\ldots}{31{,}44\ldots} \mathrel{\hat{=}} 2{,}84\ldots\,\% \checkmark$

36. Schulübung, am 24.03.2023

Bewegungsvorgänge

S. 90

Antriebskraft

$$F = F_A - F_R$$

Kraft

Reibungskraft | Widerstandskraft

$$F = m \cdot a = F_a - b \cdot v$$

Reibungskoeffizient
(Wasser/Luft/Straße/…)
… |Auto)

Reibungskraft
(Wasser / Luft / Straße / ...)
(Schiff / Flugzeug / Auto)

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_a - b \cdot v$$

4.42) $m = 16t$
$v = 72\,km/h$

$ma = F_a - bv$
$\downarrow$
$= 0$, weil keine Antriebskraft

$$\boxed{m \cdot \dot{v} = - \boxed{b} v}$$

$\dot{v} = a$ ← Ableitung nach t

$F_a = 0$

Proportionalitätsfaktor der Reibungskraft

2) $m \cdot \frac{dv}{dt} = - b \cdot v \qquad | : v \quad | : 16000 \quad | \cdot dt$

$$\frac{1}{v}\, dv = - \frac{b}{m}\, dt$$

$$\int \frac{1}{v}\, dv = - \frac{b}{m} \int dt$$

$$\ln|v| = - \frac{b}{m} t + \tilde{C} \qquad | e^{\wedge}$$

$$v(t) = e^{-\frac{b}{m} t} \cdot C$$

allgemeine Lösung

$v(0) = 72 \frac{km}{h} \mathrel{\hat{=}} 20 \frac{m}{s}$

$v(10) = 72 - 1{,}8 \frac{km}{h} \mathrel{\hat{=}} 19{,}5 \frac{m}{s}$

Einheiten!

$$v(0) = e^{-\frac{b}{16000} \cdot 0} \cdot C = 20$$

$$v(0) = e^{-\frac{b}{16000}\cdot 0} \cdot C = 20$$

$\underline{C = 20}$

$$v(10) = e^{-\frac{b}{16000}\cdot 10} \cdot 20 = 19{,}5$$

$b = 40{,}508\ldots$

$$v(t) = 20 \cdot e^{-\frac{40{,}508\ldots}{16000} t}$$

spezifische Lösung

t .... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum ZP t in $\frac{m}{s}$

4) $s = \int_0^{\infty} v(t)\, dt = \underline{\underline{7900\,m}}$

A: Der Gesamtweg beträgt ca. 7900 m.

37. Schulübung, am 27.03.2023

Anwendung in der Thermodynamik

Newton'sches Abkühlungsgesetz:

Änderung d. Temperatur nach der Zeit t ist

Änderung d. Temperatur nach der Zeit t ist proportional zur Differenz der momentanen Temperatur T des Körpers und Umgebungstemperatur T_U.

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{k}_{\text{Konstante}} \cdot (T(t) - T_U)$$

Konstante, welche abhängig von Menge, Oberfläche, Wärmekoeffizient, ... ist

Abkühlung:	$\frac{dT}{dt}$ ist negativ
Erwärmung:	$\frac{dT}{dt}$ ist positiv

4.46) 1) $\underbrace{\frac{dT}{dt}}_{<0} = \underbrace{k}_{<0} \cdot \underbrace{(T(t) - 25)}_{>0}$

Abkühlung: $\frac{dT}{dt}$ ist negativ

k muss negativ sein

2) Trennen d. Variablen

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - 25) \quad |:() \quad |\cdot dt$$

$$\frac{1}{T-25} dT = k\, dt$$

$$\ln|T-25| = kt + \tilde{C}$$

$$T - 25 = e^{kt} \cdot C$$

$$\underline{T(t) = 25 + e^{kt} \cdot C}$$

allgemeine Lösung

allgemeine Lösung

$T(0) = 43 \rightarrow C = 18$

$T(10) = 38 \rightarrow k = -0{,}0325...$

$T(t) = 25 + e^{-0{,}0325...t} \cdot 18$

spezielle Lösung

3) $T(20) > 35°$? "Ah, schön warm" : "KALT!"

$T(20) = 34{,}39...° \rightarrow$ KALT!

38. Schulübung, am 31.03.23

Mischungsaufgaben

S 92 / 4.47 im Buch

4.48) t .... Zeit in min

$c(t)$ ... CO_2 Gehalt in m^3 abhängig t

Zufluss: $50 \frac{m^3}{min} \cdot 500 \cdot 10^{-6}$

Abfluss: $50 \frac{m^3}{min} \cdot \frac{c(t)}{5000}$

$$\frac{dC}{dt} = 50 \cdot 500 \cdot 10^{-6} - 50 \cdot \frac{C}{5000}$$ [Zufluss - Abfluss]

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}025 - \frac{C}{100}$$

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}025 - \frac{C}{100}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{2{,}5 - C}{100}$$

$$\int \frac{1}{2{,}5 - C}\, dC = \frac{1}{100} \int dt$$

$$-\ln|2{,}5 - C| = \frac{t}{100} + \tilde{L}$$

$$-(2{,}5 - C) = e^{t/100} \cdot L$$

$$2{,}5 - C = -e^{t/100} \cdot L$$

$$\underline{C(t) = 2{,}5 - e^{t/100} \cdot L}$$

allgemeine Lösung

$$C(0) = 5000 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}$$

$$C(0) = 5$$

$$5 = 2{,}5 - L$$

$$\underline{L = -2{,}5}$$

$$C(t) = 2{,}5 + 2{,}5 e^{-t/100}$$

1) $C(20) = \underline{4{,}5 \ldots m^3}$

$$\frac{4{,}5\ldots}{5000} \cdot 10^6 = 909{,}36\ldots \text{ ppm}$$

A: Nach 20min sind 909,36 ppm CO_2 m^3 im Raum.

2) $5000\ m^3 \cdot 0{,}0007 = 3{,}5\ m^3$

$C(t) = 3{,}5$

$t = 91{,}629\ldots$ min

A: Nach spätestens 92 Minuten ist nur mehr 0,07 % CO_2 im Raum.

39. Schulübung, am 14.04.23

Sedimente B-543

1) $\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a(t) = 0} = 10-20v$ Beschleunigung 0

$v = 0{,}5\ \frac{m}{s}$

2) $\frac{dv}{dt} = (10-20v) \cdot 1 \quad | : ()$

$\frac{dv}{10-20v} = dt$

$$\int \frac{dv}{10-20v} = \int dt$$

$$-\frac{1}{20} \cdot \ln|10-20v| = t + \tilde{C} \quad \Big| : \left(-\frac{1}{20}\right) \qquad \left(\ln|10-20v|\right)' = \frac{1}{10-20v} \cdot (-20)$$

$$\ln|10-20v| = -20t + \tilde{C}_1 \quad | e^{\wedge}$$

$$10-20v = e^{-20t} \cdot C_1 \quad | -10$$

$$-20v = e^{-20t} \cdot C_1 - 10 \quad | \cdot (-20)$$

$$v(t) = C \cdot e^{-20t} + \frac{1}{2}$$

allgemeine Lösung

$$v(0) = 0{,}2$$

$$0{,}2 = C + 0{,}5$$

$$\underline{C = -0{,}3}$$

$$\underline{v(t) = -0{,}3 \cdot e^{-20t} + 0{,}5}$$

spezielle Lösung

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Friday, April 14, 2023 10:08 AM

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

homogene Differentialgleichung:

$$y' + p(x) \cdot y = \boxed{0}$$

↳ Trennen der Variablen
Exponentialansatz

inhomogene Differentialgleichung:

$$y' + p(x) \cdot y = \boxed{s(x)}$$

↳ Störfunktion

↳

lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung
mit konstanten Koeffizienten

$p \in \mathbb{R}$

$y' + p \cdot y = 0$ → allg. Lösung: Exponentialfunktionen der Form $y = C \cdot e^{-p \cdot x}$

bzw.

$y' + p \cdot y = s(x)$

4.52) homogen inhomogen

B A

C ($\to 5y' = 2y \Rightarrow y' - \frac{2}{5}y = 0$)

($y' + y = \sin(x)$) D

4.53) d) $-5y' + 12y = 0$ $\quad | : -5$

$y' + -\frac{12}{5}y = 0$ => homogen

Exponentialansatz

$y(x) = C \cdot e^{12x/5}$

Kettenregel

Probe: $y'(x) = C \cdot e^{12x/5} \cdot \frac{12}{5}$

$-5y' + 12y = 0$

$-\cancel{5} \cdot C \cdot e^{12x/5} \cdot \frac{12}{\cancel{5}} + 12 \cdot C \cdot e^{12x/5} = 0$

$-12 \cdot C \cdot e^{12x/5} + 12 \cdot C \cdot e^{12x/5} = 0$

$0 = 0$ ✓

40. Schulübung, am 17.04.2023

INHOMOGENE LINEARE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

1. ORDNUNG mit konstanten Koeffizienten

INHOMOGENE LINEARE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

1. ORDNUNG mit konstanten Koeffizienten

↳ Buch Seite 94

Allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung

$y = y_h + y_p$

↳ partikuläre Teil / statischer Teil

↳ homogene Teil / flüchtiger Teil

↳ Buch Seite 95/96

Lösungsansätze für die partikuläre Lösung y_p

↳ Buch Seite 96

4.54) d)

$0{,}5y' + y = 2x$

$y' + 2y = 4x$

homogene Lsg: $y' + 2y = 0$

$y_h(x) = C \cdot e^{-2x}$

homogene Lösung

partikulärer Lsg: $s(x) = 4x$ → Lineare Fkt

$y_p = Ax + B$

$y_p' = A$

$A + 2 \cdot (Ax + B) = 4x$

$A + 2Ax + 2B = 4x$

$2Ax + A + 2B = 4x + 0$

$2A = 4$

$\underline{\underline{A = 2}}$

$A + 2B = 0$

$2 + 2B = 0$

$2B = -2$

$\underline{\underline{B = -1}}$

partikuläre Lösung

$y_p = 2x - 1$

allgemeine Lösung:

$y = y_h + y_p$

$y(x) = C \cdot e^{-2x} + 2x - 1$

$y(x) = C \cdot e^{-2x} + 2x - 1$

41. Schulübung, am 21.04.2023

4.57) $y' + 8y = 2 \cdot e^{-3t}$ $\qquad y_0 = -1$

homogene Lösung y_h:

$y' + 8y = 0$

$y(t) = C \cdot e^{-8t}$ Exponentialansatz

partikuläre Lösung y_p:

$s(t) = 2e^{-3t}$ $\qquad b = -3$

$y_p = A \cdot e^{bt}$

$y_p = A \cdot e^{-3t}$

$y_p' = A \cdot e^{-3t} \cdot -3$ $\qquad y' + 8y = 2e^{-3t}$

$A \cdot e^{-3t} \cdot -3 + 8 \cdot A \cdot e^{-3t} = 2e^{-3t}$ $\qquad | : e^{-3t}$

$-3A + 8A = 2$

$5A = 2$

$\underline{\underline{A = \frac{2}{5}}}$

partikuläre Teil: $y_p = \frac{2}{5} \cdot e^{-3t}$

homogener Teil: $y_h = C \cdot e^{-8t}$

$\underline{y(t) = C \cdot e^{-8t} + \frac{2}{5} e^{-3t}}$ $\qquad y_0 = -1$

allgemeine Lösung

$C + \frac{2}{5} = -1$

$\underline{C = -\frac{7}{5}}$

$y(t) = -\frac{7}{5} e^{-8t} + \frac{2}{5} e^{-3t}$

42. Schulübung, am 24.04.2023

4.57) f) $y' + 4y = 5\cos(2t)$ $\qquad y(0) = \pi$

homogene Fkt:

$-4t$ C

homogene Fkt:

$$\underline{y(t) = e^{-4t} \cdot C}$$

partikuläre Fkt:

$$s(t) = 5\cos(2t)$$

$$y_p = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t)$$

$$y_p' = A \cdot \cos(2t) \cdot 2 - B \cdot \sin(2t) \cdot 2$$

$$2A\cos(2t) - 2B\sin(2t) + 4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) = 5\cos(2t)$$

$$\underbrace{4A\sin(2t) - 2B\sin(2t)}_{\sin} + \underbrace{2A\cos(2t) + 4B\cos(2t)}_{\cos} = \underbrace{0\sin(2t)}_{\sin} + \underbrace{5\cos(2t)}_{\cos}$$

$\underline{I}$: $4A - 2B = 0$

$\underline{II}$: $2A + 4B = 5$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \qquad B = 1}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t)$$

$$\underline{y(t) = C \cdot e^{-4t} + \frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t)}$$

allgemeine Lsg

$$y(0) = \pi$$

$$\pi = C + 1$$

$$\underline{C = \pi - 1}$$

$$\underline{y(t) = (\pi - 1)\, e^{-4t} + \frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t)}$$

spezielle Lsg

4.60) y_h

y

y_p

4.61) $T' = kT - kT_U$

$y' + p \cdot y = s(x)$

$T' - kT = \underline{-kT_U}$

auf die Form bringen

↳ Konstante

43. Schulübung, am 28.04.2023

43. Schulübung, am 28.04.2023

Da es der Form entspricht, ist es eine lineare Differentialgleichung

2) $T_h(t) = Ce^{kt}$

$s(t) = -kT_U$

$y_p = A$

$y_p' = 0$

$0 - kA = -kT_U$

$A = T_U$

$T_p(t) = T_U$

$T(t) = Ce^{kt} + T_U$

3) $\underbrace{\frac{dT}{dt}}_{<0} = \underbrace{k}_{<0} \cdot \underbrace{[T(t) - T_U]}_{>0}$

$\boxed{k < 0}$

$T(t) = \underbrace{C \cdot \underbrace{e^{kt}}_{t \to \infty,\ \to 0}}_{\to 0} + T_U$

$\lim_{t \to \infty} T(t) = \lim_{t \to \infty} (Ce^{kt} + T_U) = T_U$

44. Schulübung, am 5.5.2023

4.64) 1) $m = 81\,kg$

$F_R = bv$

$F_a = 216\ N$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + bv = F_a$$

$$81 \frac{dv}{dt} + 27v = 216$$

homogene Lsg:

$$81 \frac{dv}{dt} + 27v = 0 \qquad |:81$$

$$\dot{v} + \frac{1}{3}v = 0$$

$$\underline{v(t) = C \cdot e^{-t/3}}$$

partikuläre Lsg:

$s(t) = 216$

$v_p = A$

$v_p' = 0$

$$81 \cdot 0 + 27A = 216$$

$$\underline{A = 8}$$

$$\underline{v(t) = C\,e^{-t/3} + 8}$$

t… Zeitpunkt in Sekunden

v(t)… Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Meter pro Sekunden

2) $v(0) = 0$

$C \cdot e^0 + 8 = 0$

$\underline{C = -8}$

$$\underline{v(t) = -8 \cdot e^{-t/3} + 8}$$

spezielle Lsg

$8\,\frac{m}{s} \mathrel{\hat{=}} 28{,}8\,\frac{km}{h}$

v(t) geht im Unendlichen nach $28{,}8\,\frac{km}{h}$, weil in der Funktion der erste Term sich immer mehr verkleinert und nur $8\,\frac{m}{s}$ übrig bleiben. → monoton steigend

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 8\,\frac{m}{s} \mathrel{\hat{=}} 28{,}8\,\frac{km}{h}$$

3) $81\,\frac{dv}{dt} + 27v = 0$

$v(0) = 24\,\frac{km}{h} \mathrel{\hat{=}} \underline{6\,\frac{2m}{3s}}$

[TI: →4→D]

$$\underline{v(t) = 6\tfrac{2}{3} \cdot e^{-t/3}}$$

4) $s(t) = \int_0^\infty v(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{20}{3} e^{-t/3}\,dt = \underline{20m}$

2) $10 = \int_0^t v(t)\,dt$

5) Welche Beschleunigung wirkt nach 1min auf den Fahrer?

$a(60) = v'(60) = -\frac{20}{9} \cdot e^{-60/3}$

$a(60) = -4{,}58\ldots \cdot 10^{-9}\,\frac{m}{s^2}$

45. Schulübung, am 08.05.2023

Wachstumsmodelle:

Lineare Wachstum: konstante Wachstumsgeschwindigkeit

$y'(t) = k$

$y(t) = k \cdot t + C$

[illegible]: proportionale Wachstumsgeschwindigkeit

$y(t) = k \cdot t + C$

exponentielle Wachstum: proportionale Wachstumsgeschwindigkeit

$y'(t) = k \cdot y(t)$ Die Änderung einer Menge ist proportional zur jeweils vorhandenen Menge $y(t)$.

$y(t) = C \cdot e^{kt}$

$\lambda = \frac{y'(t)}{y(t)}$ ... Wachstumsrate

[Exponentialansatz o. Trennen d. Variable]

$y(t) = C \cdot a^t$ $[a = e^{\lambda}]$ $[\lambda = k]$

a .... Wachstumsfaktor

$\lambda < 0$ ... Abnahme $[0 < a < 1]$

$\lambda > 0$ .... Zunahme / Wachstum

beschränktes Wachstum: proportionale maximale Wachstumsgeschwindigkeit

$y'(t) = \lambda \cdot (y(t) - K)$ Die Änderung ist proportional zur Differenz einer Konstante und des momentanen Funktionswertes.

$y(t) = K - (K - y_0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

4.84) 1) t ... Zeit in Jahren

$y(t)$ ... Population d. Tiere

$y'(t) = k$

$y(t) = k \cdot t + C$

$y(0) = 150$

$y(3) = 250$

$\underline{C = 150}$

$\underline{k = \frac{100}{3}}$

$y(t) = \frac{100}{3}t + 150$

2) $y'(t) = k \cdot y(t)$

$y(t) = C e^{\lambda \cdot t}$

$y(0) = 150$
$y(3) = 250$

$C = 150$

$\lambda = 0{,}170\ldots$

$y(t) = 150e^{0{,}170\ldots t}$

3) $y(t) = K - (K - y_0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$y(0) = 150$
$y(3) = 250$
$K = 900$

$y(t) = 900 - 750e^{-\lambda t}$

$\lambda = 0{,}047\ldots$

$y(t) = 900 - 750e^{-0{,}047t}$

4.82) t... Zeit in Stunden

$y(t)$... Radioaktivität nach t Stunden

$y'(t) = \lambda \cdot y(t)$

$y(t) = C \cdot e^{\lambda t} = C \cdot a^t$

$y(1) = 0{,}9 \cdot y_0$ $\qquad C = y_0$

$0{,}9 = e^{\lambda \cdot 1} \cdot 1 \quad C = 1$

$y(1) = 0,9 \cdot y_0$

$0,9 = e^{\lambda \cdot 1} \cdot 1 \quad C = 1$

$\lambda = -0,105\ldots$

$y'(t) = -0,105\ldots \cdot y(t)$

46. Schulübung, am 22.05.2023

LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG

2. ORDNUNG

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

homogene Differentialgleichung:

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$$

inhomogene Differentialgleichung:

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = \underbrace{s(x)}_{\text{Störfunktion}}$$

homogene DTG:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

Exponentialansatz:

$$y(x) = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$y'(x) = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$y''(x) = C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} + p \cdot C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + q \cdot C \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0$$

$$C \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot [\lambda^2 + p \cdot \lambda + q] = 0$$

Dadurch, dass e^x nicht 0 sein kann und $C = 0$ keinen Sinn macht, muss der andere Faktor 0 sein...

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{p^2}{4} - q}_{\text{Diskriminante}}}$$

$D > 0: \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$

$D = 0: \quad \lambda_1 = \lambda_2 \quad y(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot [C_1 + C_2 \cdot x]$

$D < 0: \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i \in \mathbb{C} \quad y(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot [C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x)]$

$$i^2 = -1$$
$$i = \sqrt{-1}$$

4.89) a) $y'' + 7y' + 10y = 0$

$p = 7$
$q = 10$

$\lambda^2 + 7 \cdot \lambda + 10 = 0$

$\underline{\lambda_1 = -5}$
$\underline{\lambda_2 = -2}$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{-2x}$$

b) $y'' + y = 0$

$p = 0 \quad q = 1$

$\lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda^2 = -1$
$\lambda_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta = 1$

$$y(x) = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x)$$

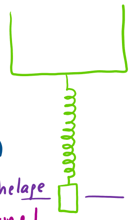
47. Schulübung, am 26.05.2023

Anwendungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

Mechanische Schwingung

Schwingungsgleichung einer freien Schwingung

$y(t)$ ... momentane Auslenkung zum Zeitpunkt t



Rückstellkraft: $F_y(t) = -k \cdot y(t)$

$k > 0$ .... Federkonstante

Reibungskraft: $F_R(t) = -b \cdot v(t)$

$F_R(t) = -b \cdot \dot{y}(t)$

$b > 0$ ... Reibungskoeffiziente

Gesamtkraft: $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y}(t)$

Kräftebilanz: $F = F_y + F_R$

$$m \cdot \ddot{y} = -b \cdot \dot{y} - k \cdot y$$

allgemeine Schwingungsgleichung einer freien Schwingung

19. Matrizen

Freitag, 26. Mai 2023 10:18

MATRIZEN

Tabelle	AM	E	D
S1	2	3	1
S2	1	4	4
S3	3	2	1
S4	2	2	2

Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(4×3) - Matrix → Typ der Matrix

Zeilen ↑ (4), Spalten ↑ (3)

„Zeilen zuerst; Spalten später"

Zeilen Spalten

„Zeilen zuerst; Spalten später"

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m \times n)$-Matrix

a_{ij} i … Zeile
j … Spalte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ Matrix A

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ transponierte Matrix von A

↳ Zeilen und Spalten vertauschen

5.3) 1) (4×5)-Matrix

2) $a_{12} = 5$

$a_{35} = 2$

$a_{44} = 12$

3) 1 Gut bei 3ter SA

14 Befriedigend bei 3ter SA

4) Bedeutung a_{24}:

6 Genügend bei 2ter SA

48. Schulübung, am 02.06.2023

5.4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 0$

$a_{25} = 3$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 8 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

5.5) 1) Spaltenvektor = transponierter Zeilenvektor

2) Einheitsmatrix: 1sen auf Diagonale

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^T = E$$

19.1 Rechnen mit Matrizen

Freitag, 2. Juni 2023 09:55

19.1 Rechnen mit Matrizen

Addition und Subtraktion

Dies ist nur möglich, wenn die Matrixen vom gleichen Typ sind.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Multiplizieren und Dividieren mit Skalarwerten

$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a & k\cdot b \\ k\cdot c & k\cdot d \end{pmatrix}$$

5.8) b)

$$\frac{1}{5} \cdot \left[\begin{pmatrix} 14 & -6 & 12 \\ -5 & 12 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ 10 & 18 & -13 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & 14 \\ -15 & -6 & 16 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{14}{5} \\ -3 & -\frac{6}{5} & \frac{16}{5} \\ 1 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

5.10)

$$A = \begin{array}{cccc} \text{Flat.} & \text{Sal.} & \text{USB} & \\ \left(\begin{matrix} 54 \\ 26 \\ 43 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 12 \\ 5 \\ 14 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 123 \\ 88 \\ 105 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \text{Juni} \\ \text{Juli} \\ \text{August} \end{matrix} \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 31 & 14 & 143 \\ 34 & 25 & 114 \\ 58 & 16 & 67 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 108 & 24 & 246 \\ 52 & 10 & 176 \\ 86 & 28 & 210 \end{pmatrix}$$

$$A+B+C = \begin{pmatrix} 193 & 50 & 512 \\ 112 & 40 & 378 \\ 187 & 58 & 382 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

$(m \times n)$ - Matrix A

mal

$(n \times r)$ - Matrix B

Spalte der ersten Matrix gleich Zeile der zweiten Matrix

5.12) a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1-2\cdot 4 & -1\cdot 3+2\cdot 2 & 1\cdot 2-2\cdot 0 \\ 2\cdot 1+0\cdot 4 & -2\cdot 3-0\cdot 2 & 2\cdot 2+0\cdot 0 \\ -3\cdot 1+1\cdot 4 & 3\cdot 3-1\cdot 2 & -3\cdot 2+1\cdot 0 \\ -1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 3-2\cdot 2 & -1\cdot 2+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$(4 \times 2) \cdot (2 \times 3)$

5.15) 1)

$$T_1 = \begin{pmatrix} 40 & 12 & 23 \\ 53 & 19 & 72 \\ 42 & 16 & 85 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$ {}_{Z}T_{1\,Z} = \begin{pmatrix} 40 & 12 & 23 \\ 53 & 19 & 72 \\ 42 & 16 & 85 \\ 80 & 113 & 0 \end{pmatrix} \checkmark $$

$$ {}_{Z}T_{2\,M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \checkmark $$

$$ {}_{Z}M_{M} = \underset{(4\times\cancel{3})}{T_1} \cdot \underset{(\cancel{3}\times 3)}{T_2} = \begin{pmatrix} 191 & 206 & 92 \\ 470 & 356 & 125 \\ 515 & 338 & 100 \\ 419 & 320 & 273 \end{pmatrix} \checkmark $$

2)

$$ A = \begin{array}{c} \text{Gesamtmenge} \\ \begin{pmatrix} 450 \\ 750 \\ 860 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} $$

$$ B = M \cdot A = \begin{pmatrix} 319.570 \\ 586.000 \\ 571.250 \\ 663.330 \end{pmatrix} $$

B sagt aus: Es werden 319.570 Zutaten 1, 586.000 Zutaten 2, ...
gebraucht, um die insgesamten Mengen erfüllen zu können.

49. Schulübung, am 05.06.2023

5.17)

1)

$$ A^T = \begin{array}{c} \text{Arbeitszeiten} \\ \begin{array}{cc} Z1 & Z2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ C1 \quad \text{Chiparten} \\ C2 \\ C3 \end{array} $$

$$ B = \begin{array}{c} \text{Löhne pro Arbeitsschritt} \\ \begin{array}{cccc} L1 & L2 & L3 & L4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11,8 & 12,4 & 9,6 & 15,8 \\ 10,4 & 9,3 & 8,6 & 15,2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ Z1 \quad \text{Arbeitszeiten} \\ Z2 \end{array} $$

$$ M = A^T \cdot B $$

$M = A^T \cdot B$

Löhne pro Arbeitsschritt

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} L1 & L2 & L3 & L4 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 176{,}2 & 170{,}5 & 144{,}6 & 247{,}4 \\ 78{,}4 & 77{,}5 & 64{,}2 & 108{,}8 \\ 142{,}2 & 136{,}4 & 116{,}8 & 200{,}6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C1 \\ C2 \\ C3 \end{array} \end{array}$$

Chiparten

A: Die Matrix M beschreibt die Löhne für jeden Arbeitsschritt pro Chipsatz

2) $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^T$

$N = \begin{pmatrix} 738{,}7 & 328{,}9 & 596 \end{pmatrix}$

A: Die Matrix N gibt die insgesamten Löhne pro Chipart an.

19.2 Determinante

Montag, 12. Juni 2023 11:59

19.2 DETERMINANTE

Eine Determinante ordnet einer quadratischen Matrix einen Zahlenwert zu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1$$

TI: det(A) ↵

19.3 Inverse Matrix

Die Matrix A^{-1} ist die inverse Matrix zu einer quadratischen Matrix A mit $\det(A) \neq 0$, wenn $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ gilt.

E = Einheitsmatrix = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.34) a) $P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

51. Schulübung, am 19.06.2023

5.47) $t_w: \; 12x + y = -8$

$p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

$\underline{\text{I}}$: $p'(0) = 0$

$\underline{\text{II}}$: $p''(2) = 0$

$\underline{II}$: $p''(2) = 0$

$\underline{III}$: $p(2) = -32$

$\underline{IV}$: $p'(2) = -12$

$\underline{I}$: $c = 0$

$\underline{II}$: $12a + 2b = 0$

$\underline{III}$: $8a + 4b + 2c + d = -32$

$\underline{IV}$: $12a + 4b + c = -12$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -32 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -32 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = x^3 - 6x^2 - 16$$

5.50)

$$p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

$$p'(x) = 4a \cdot x^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

I: $p''(1) = 0$

II: $p(0) = -1$

III: $p(1) = 1$

IV: $p'(-0{,}5) = 0$

V: $p'(1) = 0$

I: $0{,}5a + 0{,}75b - c + d = 0$

[illegible]

$\underline{\text{I}}$: $0{,}5a + 0{,}75b - c + d =$

$\underline{\text{II}}$: $12a + 6b + 2c = 0$

$\underline{\text{III}}$: $a + b + c + d + e = 0$

$\underline{\text{IV}}$: $4a + 3b + 2c + d = 0$

$\underline{\text{V}}$: $e = -1$

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}75 & -1 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}75 & -1 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{p(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x - 1}$

WASCHMITTEL 2 (B_381/b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8000 & 400 & 20 & 1 \\ 27000 & 900 & 30 & 1 \\ 125000 & 2500 & 50 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 604 \\ 672 \\ 920 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}002\dot{6} \\ -0{,}08 \\ 5{,}733 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

FUSZBALLTORE (B-279)

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

$\underline{\mathrm{I}}$: $K(0) = 300$

$\underline{\mathrm{II}}$: $\frac{K(10)}{10} = 320$

$\underline{\mathrm{III}}$: $K(100) = 5450$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0{,}1 \\ 10000 & 100 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 320 \\ 5450 \end{pmatrix}$$

1. Hausübung, am 12.09.2022

Monday, April 18, 2022 12:29 PM

1. Hausübung:

1.7) c)
1.9) b) d)
1.18)

1.7) c) $p(x) = \frac{2 \cdot \sin(4x)}{x^3}$

$$p'(x) = \frac{2 \cdot \cos(4x) \cdot 4 \cdot x^3 - 2 \cdot \sin(4x) \cdot 3x^2}{x^6}$$

1.9) b) $z = a \cdot (1 + b \cdot c)^3$

1) $\frac{dz}{da} = (1 + b \cdot c)^3$

2) $\frac{dz}{db} = 3a \cdot (1 + b \cdot c)^2 \cdot c$

d) $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$ $u' \cdot v - u \cdot v'$

1) $\frac{d\eta}{dT_1} = \frac{(-1) \cdot T_1 - (T_2 - T_1)}{{T_1}^2}$

2) $\frac{d\eta}{dT_2} = \frac{1}{T_1}$

1.18) 1) $K(x) = 110x + 1200$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = [-4x^2 + 450x] - [110x + 1200] =$

$= -4x^2 + 340x - 1200$

2) $G(x) = 0$ TI: SOLVE (..., +)

$x_1 = 3{,}689\ldots$ Stück

$x_2 = 81{,}310\ldots$ Stück

A: Ab 4 Stück macht man Gewinn.
Bis zu 81 Stück macht man Gewinn

3) $G'(x) = -8x + 340$

$G'(x) = 0$

$x_1 = 42{,}5$

$G(42) = 6024$ GE

$G(43) = 6024$ GE

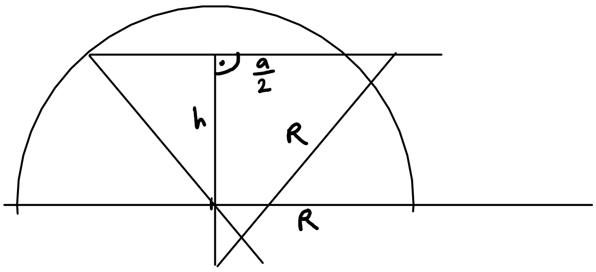
A: Der max. Gewinn beträgt 6024 GE.

2. Hausübung, am 16.09.2022

Freitag, 16. September 2022 11:26

SÜ fertig machen:

1.32) a)



HB: $A(a,h) = \frac{a \cdot h}{2}$

NB: $R^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\underline{a = 2 \cdot \sqrt{R^2 - h^2}}$

$\boxed{0 \leq h \leq R}$

ZF: $A(h) = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{R^2 - h^2} \cdot h}{\cancel{2}} = h \cdot \sqrt{R^2 - h^2}$

quadrite Funktion

$\bar{A}(h) = (R^2 - h^2) \cdot h^2$

$\bar{A}'(h) = 0$

↳ TI: solve(…, h)

$\bar{A}$ ← eine Funktion, die für uns einfacher ist

$$\left(\begin{matrix} h_1 = 0 \\ h_2 = -\frac{R}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right)$$

$\underline{\underline{h_3 = \frac{R}{\sqrt{2}}}}$ → $a = 2 \cdot \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} = \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot |R|}}$

$A_H = \frac{R^2 \pi}{2}$

$A_D = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot |R| \cdot \frac{R}{\sqrt{2}}}{2} = 0{,}5 \cdot R^2$

$p = \frac{A}{G} = \frac{A_D}{A_H} = \frac{0{,}5 \cdot R^2}{\frac{R^2 \cdot \pi}{2}} = \underline{\underline{31{,}83\ldots\,\%}}$

$$\rho = \frac{A}{G} = \frac{\ldots}{A_u} = \frac{\ldots}{\frac{R^2\cdot\pi}{2}} = \underline{\underline{31,83\ldots\%}}$$

2. Hausübung, am 16.09.2022

1.29)
1.31)

SÜ fertig

1.29) HB: $O(r,h) = 1{,}25 \cdot \underbrace{r^2 \cdot \pi}_{\text{Kreisfläche}} \cdot 2 + \underbrace{2r\pi}_{\text{Kreisumfang}} \cdot h$

25% mehr

Deckel & Boden

Oberfläche bezogen auf Kosten

NB: $V(r,h) = \underbrace{r^2 \cdot \pi}_{\text{K.f.}} \cdot h = 75$

$$h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} = \frac{75}{r^2 \cdot \pi}$$

ZF: $O(r) = 1{,}25 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 2 + 2\cancel{r}\cancel{\pi} \cdot \frac{75}{r^{\cancel{2}} \cdot \cancel{\pi}}$

$$O(r) = 2{,}5 r^2 \pi + \frac{150}{r}$$

$$O'(r) = 5r\pi - \frac{150}{r^2}$$

$$\boxed{O'(r) =} \; 0 = 5r\pi - \frac{150}{r^2}$$

TI: solve $(\ldots, r)$

$\hookrightarrow \underline{r = 2{,}1215\ldots \text{ cm}}$

$$h = \frac{75}{r^2 \cdot \pi} = \frac{75}{2{,}1\ldots^2 \cdot \pi} = \underline{5{,}303\ldots \text{ cm}}$$

A: Bei ca. 2,12 cm Radius und 5,3 cm Höhe sind die Kosten der Dose am geringsten.

1.31) M ... Menge der produzierten Milch pro Jahr in L

x ... Anzahl der Ziegen

l ... Milchmenge von einer Ziege pro Jahr in L

HB: $M(x,l) = x \cdot l$

NB: $l = 800 - \underbrace{(x-50)}_{\text{Anzahl Ziegen mehr als 50}} \cdot 10$ pro Ziege mehr 10 L weniger / Ziege

ZF: $M(x) = x \cdot (800 - (x-50) \cdot 10)$

$M'(x) = 0$

TI: solve$(\cdots , x)$

$\underline{\underline{x = 65}}$ (-50 = zusätzliche Ziegen)

A: Der Bauer sollte sich zusätzlich noch 15 Ziegen holen.

3. Hausübung, am 19.09.2022

AA, Freitag: 1.19)
1.21)
1.23)
1.24)
1.25) 1)

+ SMÜ Kurvendiskussion + umgekehrte (Anwendung)

1.19) $h(t) = -5t^2 + 10t + 7$

1) $\underline{h(0) = 7m}$

A: Der Ball wird aus 7m Höhe abgeworfen.

2) $h(t) = 7$

$-5t^2 + 10t = 0$ große LF: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2 \cdot a}$

$t_{1,2} = \frac{-10 \pm 10}{-10}$ $a = -5$
$b = 10$
$c = 0$

$(\underline{t_1 = 0s})$ $\underline{\underline{t_2 = 2s}}$

A: Nach 2s erreicht der Ball wieder die Ausgangshöhe.

3) $h'(t) = -10t + 10$

$h'(t) = 0$

$-10t + 10 = 0$

$-10t = -10$

$\underline{\underline{t = 1}}$

$h''(t) = -10$

$h''(1) < 0 \rightarrow$ Maximum

4) $h(t) = 0$

$-5t^2 + 10t + 7 = 0$

$a = -5$
$b = 10$
$c = 7$

$t_{1,2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 5 \cdot 7}}{-2 \cdot 5}$

$20 \cdot 7 = 140$

$t_{1,2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{240}}{-10}$

$t_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 15{,}491\ldots}{-10}$

$\underline{\underline{t_1 = 2{,}549\ldots m}}$ $\quad (\underline{t_2 = -0{,}549\ldots m})$ out of $D > 0$

$h'(2{,}549\ldots) =$

TI: $-10 \cdot 2{,}549\ldots + 10 = \underline{-15{,}491\ldots \frac{m}{s}}$

A: Der Ball schläpt mit ca. $15{,}5 \frac{m}{s}$ aufm Boden auf.

1.21) $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$p'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

1.21) $f(x) = a \cdot x \ldots$

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

---

1) I: $P(2|4)$: $f(2) = 4$: $4 = 8a + 4b + 2c + d$

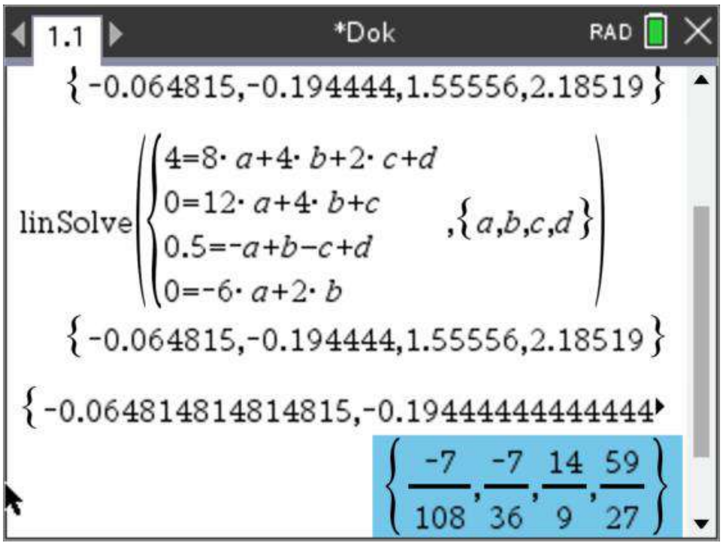
II: $E(2|4)$: $f'(2) = 0$: $0 = 12a + 4b + c$

III: $P(-1|0{,}5)$: $f(-1) = 0{,}5$: $0{,}5 = -a + b - c + d$

IV: $W(-1|0{,}5)$: $f''(-1) = 0$: $0 = -6a + 2b$

---

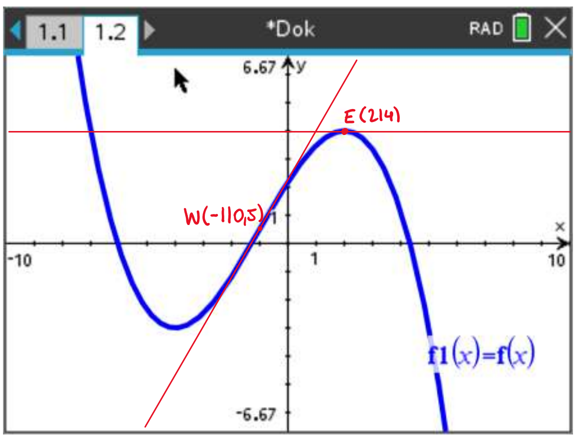
2)



$a = -\frac{7}{108}$; $b = -\frac{7}{36}$; $c = \frac{14}{9}$; $d = \frac{59}{27}$

$f(x) = -\frac{7x^3}{108} - \frac{7x^2}{36} + \frac{14x}{9} + \frac{59}{27}$

3)



1.23) $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$p'(x) = 2a \cdot x + b$

$p''(x) = 2a$

1) $\underline{I}$: $P(5|0)$: $p(5) = 0$: $0 = 25a + 5b + c$

t_p: $y = -x + 7$

$y(3) = 4$

$\underline{II}$: $P(3|4)$: $p(3) = 4$ $\quad 4 = 9a + 3b + c$

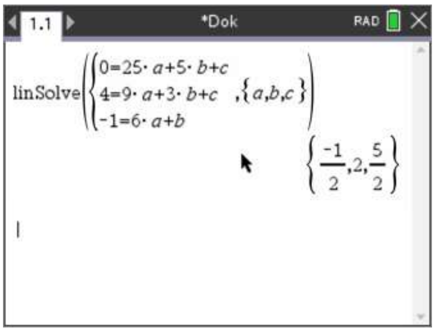
$y'(3) = -1$

$\underline{III}$: $P(3|4)$ $k = -1$: $p'(3) = -1$ $\quad -1 = 6a + b$

$\underline{I}$: $0 = 25a + 5b + c$

$\underline{II}$: $4 = 9a + 3b + c$

$\underline{III}$: $-1 = 6a + b$



$\underline{a = -\frac{1}{2}\,;\ b = 2\,;\ c = \frac{5}{2}}$

$\underline{\underline{p(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{2}}}$

2) $p'(x) = 0$ (Extremstelle)

TI: solve $\rightarrow$ $\underline{x = 2}$

$p''(2) = -1$ $\rightarrow$ Hochpunkt

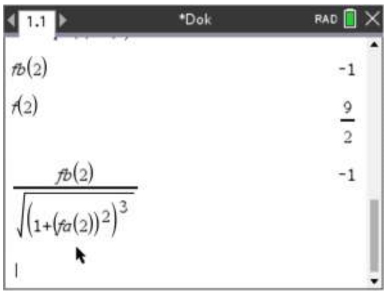
$\underline{p(2) = \frac{9}{2}}$

Krümmung am Punkt $P(-6|12,1)$

3. Kl.: $\boxed{K = \frac{y''}{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}}}$

$$K(2) = \frac{f''(2)}{\sqrt{\left[1+(f'(2))^2\right]^3}}$$

TI:



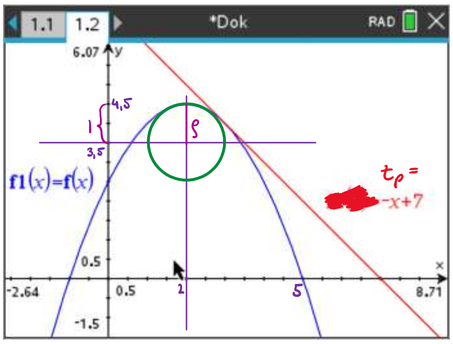
$$K(2) = \underline{\underline{-1}}$$

3. Kl.: Krümmungsradius: $\rho = \left|\frac{1}{K}\right|$

(„rho")

$$\rho = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1$$

3) grafische Darstellung:



1.24) 1) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

$f'''(x) = 6a$

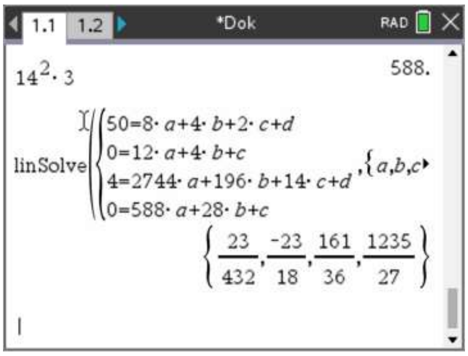
I: H(2|50): $f(2) = 50$: $50 = 8a + 4b + 2c + d$

II: $f'(2) = 0$: $0 = 12a + 4b + c$

III: T(14|4): $f(14) = 4$: $4 = 2744a + 196b + 14c + d$

IV: $f'(14) = 0$: $0 = 588a + 28b + c$

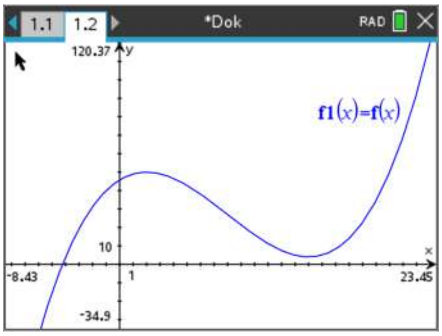
TI:



$a = \frac{23}{432}$; $b = -\frac{23}{18}$; $c = \frac{161}{36}$; $d = \frac{1235}{27}$

$$f(x) = \frac{23x^3}{432} - \frac{23x^2}{18} + \frac{161x}{36} + \frac{1235}{27}$$

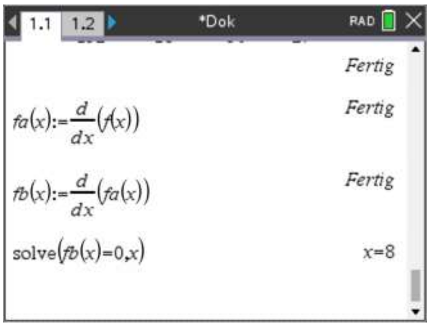
SD
TI



2) Wendepunkt + Steigungswinkel

$f''(x) = 0$

TI: solve (..., x) : $x = 8$



$f(8) = 27\,m$

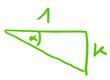
$f'(8) = -\frac{23}{4}$

W(8|27)

$k = -\frac{23}{4}$

$\tan = \frac{GK}{AK}$

$k = \tan(\alpha)$



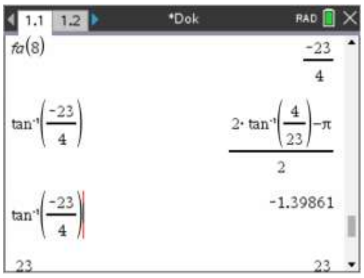
$\alpha = \arctan(k)$

$(-\frac{23}{\;}) = -1.398...^\circ$

$\alpha = \arctan(k)$

$\alpha = \arctan\left(-\frac{23}{4}\right) = \underline{-1{,}398...^\circ}$

TI:



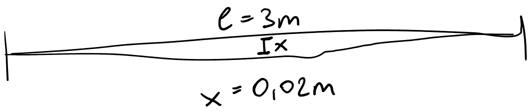
1.25) 1)

$p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$p'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + 2c \cdot x + d$

$p''(x) = 12a \cdot x^2 + 6b \cdot x + 2c$

$p'''(x) = 24a \cdot x + 6b$



I: $P(0|0)$ $k=0$: $p(0) = 0$: $0 = e$

II: $p'(0) = 0$: $0 = d$

III: $P(3|0)$ $k=0$: $p(3) = 0$: $0 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$

IV: $p'(3) = 0$: $0 = 108a + 27b + 6c + d$

V: $P(1{,}5|-0{,}02)$: $p(1{,}5) = -0{,}02$: $-0{,}02 = 5{,}0625a + 3{,}375b + 2{,}25c + 1{,}5d + e$

4. Hausübung, am 30.09.2022

Montag, 3. Oktober 2022 11:28

1.33) HB: $A(l,b) = l \cdot b$

NB: $2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \pi + 2 \cdot l = 500 \quad | -2 \cdot l$

$500 - 2 \cdot l = b \cdot \pi \quad | : \pi$

$b = \frac{500 - 2 \cdot l}{\pi}$

ZF: $A(l) = l \cdot \frac{500 - 2 \cdot l}{\pi}$

$A'(l) = 0$

TI: solve$(\ldots, l)$

$\underline{\underline{l = 125 m}}$

$A''(125) = -\frac{4}{\pi} < 0 \rightarrow$ Maximum

$A(125) = 31250/\pi$

$\underline{\underline{b = 79{,}577 \ldots m}}$

5. Hausübung, am 02.10.2022

Freitag, 7. Oktober 2022 09:30

5. HÜ, am 03.10.22

SÜ fertig machen + Ränder

S. 17 / 1.55 / b
1.56 / b
1.61 / b, c ← Substitution

Aufgaben 1.55 – 1.56: Ermittle jeweils das unbestimmte Integral.

1.55 a) $\int(4x^3 - 3x + 1)\,dx$ b) $\int(a \cdot t + b)\,dt$ c) $\int\left(2 \cdot \sin(x) + 3 \cdot e^x + \frac{2}{x}\right)dx$

b) $\int (a \cdot t + b)\,dt = a \cdot \frac{t^2}{2} + b + C$

1.56 a) $\int\left(-5x^2 + \frac{3}{x^3} - \sqrt[3]{x}\right)dx$ b) $\int\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)dx$ c) $\int\left(6x - 5 \cdot \sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right)dx$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right) dx = \sqrt[3]{\frac{x^3}{3}} + 5 \cdot \ln(x) + \frac{3}{x} + C$

Aufgaben 1.61 – 1.63: Ermittle jeweils das unbestimmte Integral.

1.61 a) $\int 3x \cdot e^{2x^2}\,dx$ b) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ c) $\int \frac{3-2x}{(x^2-3x+4)^2}\,dx$

b) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right| = \int \frac{\cancel{x}}{t} \cdot \frac{dt}{2\cancel{x}} =$

$= \int \frac{1}{2t} \cdot dt = \ln(t) \cdot \frac{1}{2} = \underline{\ln(x^2+1) \cdot \frac{1}{2}}$

c) $$\int \frac{3-2x}{(x^2-3x+4)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} z = x^2-3x+4 \\ \frac{dz}{dx} = 2x-3 \\ dx = \frac{dz}{2x-3} \end{array} \right| = \int \frac{3-2x}{z^2}\,\frac{dz}{2x-3} =$$

$$= \frac{-1\cdot\cancel{(-3+2x)}\cdot dz}{z^2\cdot\cancel{(2x-3)}} = \int -\frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2-3x+4} + C$$

6. Hausübung, am 07.11.2022

Montag, 10. Oktober 2022 09:52

6. Hausübung, am 07.11.22

1.71) 3) 4) 6)

3. Kl.: 6.80) d)

1.71) (teilweise in SÜ)

3) Die Funktion ist dritten Grades, weshalb sie zu einer holen Wahrscheinlichkeit einen Wendepunkt hat (Außnahme: Sattelpunkt)

$$p(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4$$

$$p'(x) = x^2 - 4x$$

$$p''(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

$$p(2) = \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$$

$$W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$$

4) $p(x) = k \cdot x + d$

$\text{I}: W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right): \quad p(2) = -\frac{4}{3}: \quad -\frac{4}{3} = k \cdot 2 + d$

$\text{II}: H(0 \mid 4): \quad p(0) = 4: \quad 4 = k \cdot 0 + d$

$d = 4$

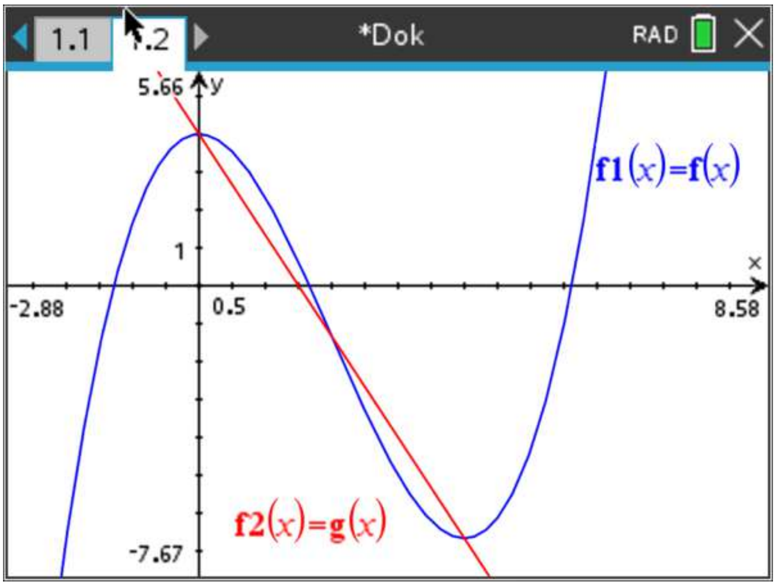
$-\frac{4}{3} = k \cdot 2 + 4 \quad \Big| - \frac{12}{3}$

$-\frac{16}{3} = k \cdot 2 \quad \Big| : 2$

$k = -\frac{8}{3}$

$p(x) = -\frac{8}{3}x + 4$

6)



3. Kl. 6.80) d)

d) $\int \frac{4}{(7s+3)^5}\,ds$

$$\int \frac{4}{(7s+3)^5}\, ds = \left| \begin{array}{l} z = 7s+3 \\ \frac{dz}{ds} = 7 \\ ds = \frac{dz}{7} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{4}{z^5} \cdot \frac{dz}{7} = \int \frac{4z^{-5}}{7} \cdot dz =$$

$$\frac{4 \cdot z^{-4}}{-4 \cdot 7} + C = -\frac{1}{7z^4} + C = -\underline{\underline{\frac{1}{7 \cdot (7s+3)^4} + C}}$$

7. Hausübung, am 10.10.2022

Mittwoch, 12. Oktober 2022 16:33

7. Hausübung, am 10.10.22

1.77 (4. Kl.)

7.50)d) (3. Kl.)

7.52)a) (3. Kl.)

1.77) 1)+2) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f'(x) = 2a \cdot x + b$

I: $P(10|0)$: $f(10) = 0$: $0 = 100a + 10b + c$

II: $k = -5$: $f'(10) = -5$: $-5 = 20a + b$

III: $k_{14} = 0$: $f'(14) = 0$: $0 = 28a + b$

$a = \frac{5}{8}$; $b = -\frac{35}{2}$; $c = \frac{225}{2}$

$$\underline{f(x) = \frac{5x^2}{8} - \frac{35x}{2} + \frac{225}{2}}$$

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

I: $P(0|0)$: $f(0) = 0$: $0 = d$

I: $P(0|0)$: $p(0)=0$: $0=d$

II: $k=-0{,}7$: $p'(0)=-0{,}7$: $-0{,}7=c$

III: $P(10|-10)$: $p(10)=-10$: $-10=1000a+100b+10c+d$

IV: $k=0$: $p'(10)=0$: $0=300a+20b+c$

$$a=\frac{13}{1000};\ b=-\frac{4}{25};\ c=-\frac{7}{10};\ d=0$$

$$p(x)=\frac{13x^3}{1000}-\frac{4x^2}{25}-\frac{7x}{10}$$

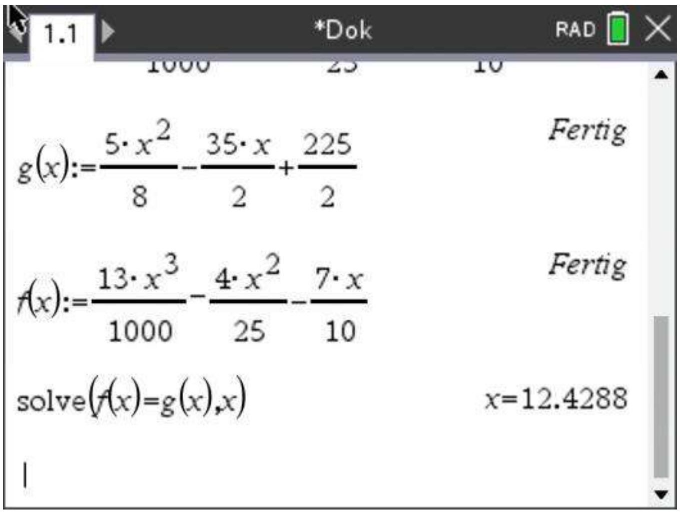
3) $A = A_{XF} + A_{GF}$ ← Fläche in 2 Teile teilen.
1\. Teil: $p(x)$ und x-Achse
2\. Teil: $p(x)$ und $g(x)$

Schnittpunkt $p(x)$ & $g(x)$:

$p(x)=g(x)$ $\mathbb{D}=[0;14]$

TI: solve(…, x) →

$x=12{,}4288\ldots$



$\int_0$ … $\int_{12{,}428\ldots}$

$$A = \int_{10}^{0} f(x) \cdot dx + \int_{10}^{12,428\ldots} [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

[TI:]

$$= 67,147 \; E^2$$

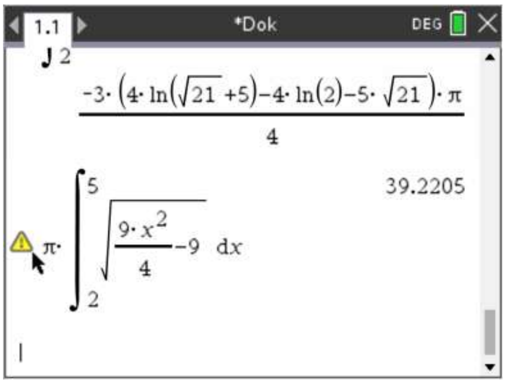
7.50) d) $y = \sqrt{\frac{9x^2}{4} - 9}$ $[2;5]$ x-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_2^5 y^2 \cdot dx =$$

$$\pi \cdot \int_2^5 \sqrt{\frac{9x^2}{4} - 9} \cdot dx =$$

[TI:]

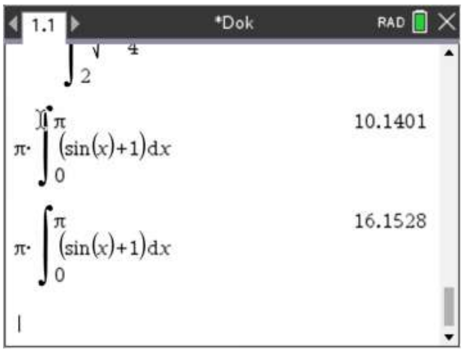
$$V_x = 39,2205\ldots \; E^3$$



7.52) a) $y = \sin(x) + 1$ $[0;\pi]$

$$V = \pi \cdot \int^{\pi} [\sin(x) + 1] \cdot dx =$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0 [\sin(x)+1] \cdot dx =$$



[TI:]

$$= \underline{\underline{16{,}1528\ldots\ E^3}}$$

8. Hausübung, am 14.10.2022

Donnerstag, 20. Oktober 2022 07:28

8. Hausübung, am 14.10.22

7.29) [3. Kl.]

7.31) 1) 2) [3. Kl.]

Rohrleitungen 1) b) [Maturaaufgabe]

Babynahrung b) [Maturaaufgabe]

7.29) 1) $f(x) = a \cdot x^2$

b = 0, weil Scheitelpunkt nicht horizontal verschoben

c = 0, weil Scheitelpunkt nicht vertikal verschoben

$f(4) = 2 \rightarrow 2 = 16a$

$\underline{\underline{a = \frac{1}{8}}}$

$\underline{\underline{f(x) = \frac{x^2}{8}}}$ ✓

2) Fläche zw. 2 Funktionen:

- $f(x) = \frac{1}{8} x^2$
- $g(x) = 2$

$\int^4 [\ldots]\,dx = \int^4 [2 - \frac{x^2}{\ldots}]\,dx =$

$$A = \int_{-4}^{4} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-4}^{4} \left[2 - \frac{x^2}{8}\right] \cdot dx =$$

[TI:]

$$A_1 = \frac{32}{3} \, m^2$$

$$V = A \cdot 1600$$

$V = 17066,\dot{6} \, m^3 \mathrel{\hat{=}} 170666,\dot{6}$ hL (→ Aufgabe 4)

3) Fläche zw. 2 Funktionen:

- $f(x) = \frac{1}{8} x^2$
- $g(x) = 1$

Grenzen: $f(x) = 1$ [TI: solve(..., x)] → $x_1 = -2 \cdot \sqrt{2}$
$x_2 = 2 \cdot \sqrt{2}$

$$A = \int_{-2\cdot\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x^2}{8}\right] \cdot dx =$$

$$A_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \, m^2$$

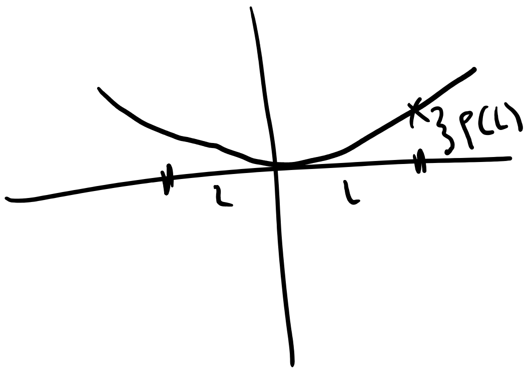
$$p = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{3}}{\frac{32}{3}} = 35,35\,\%$$

$$p = \frac{\ldots}{A_n} = \frac{\ldots}{\frac{32}{3}} = \underline{\underline{35,35\,\%}}$$

A: Der Kanal kann 35,35% passen, wenn er nur bis zur $\frac{\wedge}{2}$ gefüllt ist.

4) $V = 80000\,hL \hat{=} \frac{8000\,m^3}{1600\,m} = \underline{A = 5\,m^2}$

$$\boxed{\int_a^b [y - p(x)] \cdot dx = 5\,m^2}$$



$$\text{solve}\left(2 \cdot l \cdot p(l) - \int_{-l}^{l} p(x) \cdot dx = 5, l\right)$$

$l = 3,1072\ldots$

$$p(3,1072\ldots) = \underline{\underline{1,206\ldots\,m}}$$

A: Der Wasserstand muss ca. 1,2 m betragen.

7.31) 1) $A = \int_0^6 [\min(y_1(x), 4) - \max(y_2(x), 0)] \cdot dx$

2) $y_1(x)$: $y_1(5) = 4$

$4 = 0{,}1 \cdot 5^3 - 0{,}7 \cdot 5^2 + 1{,}3 \cdot 5 + a$

[T1:] $\underline{a = 2{,}5}$ ✓

$y_2(x)$: $y_2(1) = 0$

$0 = 0{,}15 - 1{,}55 + 5 + b$

[T1:] $\underline{b = -3{,}6}$ ✓

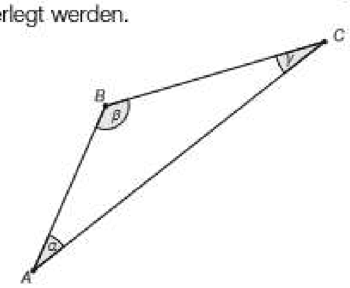
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Rohrleitungen (1)*

Aufgabennummer: B_040

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

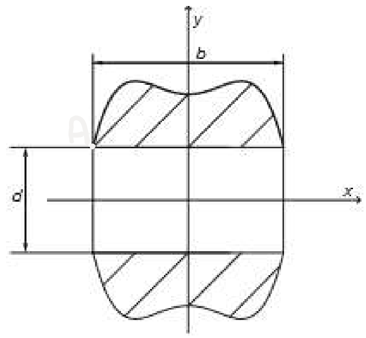
a) Rohre sollen, wie in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt, geradlinig zwischen den Punkten A, B und C verlegt werden.



Die folgenden Daten des Dreiecks ABC sind bekannt:
$\overline{AB} = 50$ m, $\overline{AC} = 80$ m, $\gamma = 20°$. Der Winkel β ist ein stumpfer Winkel.

– Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke dieses Dreiecks (beide Winkel und Länge der fehlenden Seite).

b) Ein Verbindungsstück für 2 Rohre soll untersucht werden.
Das Verbindungsstück ist rotationssymmetrisch bezüglich der x-Achse. Die obere Begrenzungskurve der Schnittfläche, die in der nachstehenden Grafik schraffiert dargestellt ist, wird durch die Funktionsgleichung $y = 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$ beschrieben, wobei x und y Längen in Dezimetern beschreiben. Der innere Durchmesser des Verbindungsstückes ist $d = 2$ dm.



$A(x_0 | 1)$
[T1:] $1 = 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$
$x_{01} = -1{,}798\ldots$
$x_{02} = 1{,}798\ldots$

$b = |x_{01}| + x_{02}$
$b = 3{,}597\ldots$ dm ✓

– Berechnen Sie die Breite b des Verbindungsstückes.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens des Verbindungsstückes mithilfe der Integralrechnung.

$V = \pi \cdot \int_{-1{,}798}^{1{,}798} [y^2] \cdot dx - 1 \cdot \pi \cdot 3{,}597 \approx 35{,}4$ m³ ✓

Das Verbindungsstück ist aus einem Material mit der Dichte $\rho = 900$ kg/m³ gefertigt.

– Berechnen Sie die Masse des Verbindungsstückes. $m = V \cdot \rho \approx 31{,}9$ kg ✓

* ehemalige Klausuraufgabe

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Babynahrung

Aufgabennummer: B_028

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

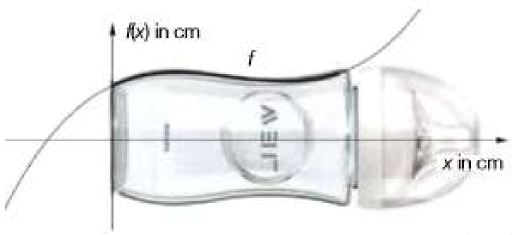
a) Bei der Zubereitung von Säuglingsmilch muss das Dosierungsverhältnis genau eingehalten werden. Ein gestrichener Messlöffel Pulver wird in 30 ml Wasser gegeben.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion auf, die die Anzahl der Messlöffel L in Abhängigkeit von der Wassermenge w in Millilitern modellhaft beschreibt.

– Beschreiben Sie, welchen Zusammenhang die Umkehrfunktion in diesem Fall angibt.

b) Der Querschnitt der abgebildeten ca. 10 cm hohen Babyflasche hat als Begrenzungslinie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596$.

x … Flaschenhöhe in cm
$f(x)$ … Radius der Flasche in der Höhe x in cm



– Bestimmen Sie den maximalen Durchmesser der Flasche. $f'(x) = 0 \rightarrow x \approx 3{,}1\ldots$ cm
$d \approx 6{,}3\ldots$ cm

– Erstellen Sie eine Formel für das Füllvolumen in Abhängigkeit von der Flaschenhöhe. $\pi \int_0^h f(x)^2 \cdot dx$

– Berechnen Sie, in welcher Höhe sich die Markierung für 150 ml befinden muss.

$\pi \int_0^h f(x)^2 \cdot dx = 150 \rightarrow h \approx 5{,}3\ldots$ cm