$$y' = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt[3]{x^5}}$$

4.260) a) $y = 2x^2 - 12x + 13; \quad x_0 = 2{,}5$

$y' = 4x - 12$

$P(2{,}5 \mid y_P)$

$P(2{,}5 \mid 2 \cdot 2{,}5^2 - 12 \cdot 2{,}5 + 13)$

$\underline{P(2{,}5 \mid -4{,}5)}$

$k = y'(x_0)$

$\underline{\underline{k = -2}}$

$y = k \cdot x + d$

$-4{,}5 = -2 \cdot 2{,}5 + d$

$\underline{d = 0{,}5}$

A

$f(x) = -2x + 0{,}5$
schneidet die Funktion
$f(x) = 2x^2 - 12x + 13$
im Punkt
$P(2{,}5 \mid -4{,}5)$

SÜ, am 14.1.2022

13.3 Weitere Ableitungsregeln und höhere Ableitung

Höhere Ableitungen

z.B.: $y = x^5$

$y' = \frac{dy}{dx} = 5x^4$ 1. Ableitung

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3$ 2. Ableitung

„y-2-Strich" = „d zwei y nach d x zum Quadrat"

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2$ 3. Ableitung

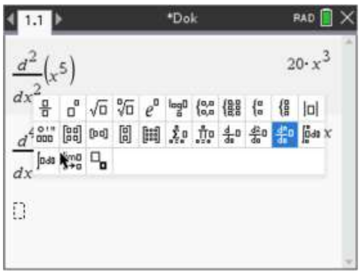
Nach was leiten wir ab?

$y = a \cdot x^5$

$y' = \frac{dy}{dx} = 5ax^4$

$y' = \frac{dy}{da} = x^5$

TI:



Weitere Ableitungsregeln

EXPONENTIALFUNKTION

$f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

$f(x) = a^x$ $\quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

LOGARITHMUSFUNKTION

$f(x) = \log_a(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$f(x) = \ln(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \lg(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

$f(x) = \lg(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

$f(x) = \sin(x) \qquad f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x) \qquad f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \tan(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

HYPERBELFUNKTIONEN

$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad f'(x) = \cosh(x)$

$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad f'(x) = \sinh(x)$

$f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

Produktregel

z.B.: $y = \underbrace{x^2}_{\text{POLYNOM}} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\text{TRIGONOM}}$

→ Produkt aus 2 einzelnen elementaren Funktionen

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$y = u \cdot v$

$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

$u = x^2 \qquad u' = 2x$

$v = \sin(x) \qquad v' = \cos(x)$

•) $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$

$f'(x) = e^x \cdot \cos(x) - e^x \cdot \sin(x)$

•) $f(x) = 2x^3 \cdot \ln(x)$

•) $f(x) = 2x^3 \cdot \ln(x)$

$f(x) = 6x^2 \cdot \ln(x) + 2x^3 \cdot \frac{1}{x}$

$= 6x^2 \cdot \ln(x) + 2x^2$

•) $f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \sin(x)$

$f(x) = 2x \cdot e^x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot e^x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot e^x \cdot \cos(x)$

SÜ, am 17.01.2022

$f(x) = 12x^3 \cdot \cos(x)$

$f'(x) = 36x^2 \cdot \cos(x) + 12x^3 \cdot (-\sin(x))$

Quotientenregel

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

•) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{x^4}$

•) $k(h) = \frac{e^h \cdot h^2}{\cos(h)}$

$k'(h) = \frac{[e^h \cdot h^2 + e^h \cdot 2h] \cdot \cos(h) - [e^h \cdot h^2] \cdot (-\sin(h))}{\cos^2(h)}$

•) $f(x) = \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{e^x \cdot \sin(x)}$

$f'(x) = \frac{[3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x}] \cdot e^x \cdot \sin(x) - x^3 \cdot \ln(x) \cdot [e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x)]}{(e^x \cdot \sin(x))^2}$

•) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\overbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}^{1}}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Kettenregel

Kettenregel

bei Funktionen, die verkettet sind (verschachtelt)

$f(x) = (x+2)^3$

$z = x+2$

$f(x) = z^3$

$$f(x) = y(z(x)) \qquad f'(x) = \underbrace{y'(z(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

•) $f(x) = (\underbrace{x+2}_{z})^3$

$$f'(x) = \underbrace{3 \cdot (x+2)^2}_{\text{äuß. A.}} \cdot \underbrace{1}_{\text{inn. A.}}$$

SÜ, am 18.01.2022

Übungen der 3 Ableitungsregeln:

$f(x) = \sin^2(x) \cdot x$

$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot x + \sin^2(x)$

$$f(x) = \frac{e^x \cdot x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Zähler: $u'(x) = e^x \cdot (x+1)$

Nenner: $v'(x) = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x^2+1} - e^x \cdot x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot x}{x^2+1}$$

$f(x) = \ln(x) \cdot (2x+5)^4$

$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (2x+5)^4 + \ln(x) \cdot 4 \cdot (2x+5)^3 \cdot 2$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x^7}}{\cos^2(x)}$$

$\rightarrow (2x^7)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot (2x^7)^{-\frac{2}{3}} \cdot 14x^6$

$\rightarrow 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x))$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3} \cdot (2x^7)^{-\frac{2}{3}} \cdot 14x^6 \cdot \cos^2(x) - \sqrt[3]{2x^7} \cdot 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^4(x)}$$

SÜ, am 21.01.2022

$$f(x) = \frac{3\cdot e^x \cdot x^2}{\sqrt[4]{2x^3+5}}$$

Zähler: $3e^x \cdot x^2 + 3e^x \cdot 2x$

Nenner: $\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{(2x^3+5)^3}} \cdot 6x^2$

$$f'(x) = \frac{(3e^x \cdot x^2 + 3e^x \cdot 2x)\cdot\sqrt[4]{2x^3+5} - 3e^x x^2 \cdot \frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{(2x^3+5)^3}}\cdot 6x^2}{\sqrt{2x^3+5}}$$

$$f(x) = 3\cdot\cos^2(x^2+1) = 3\cdot[\cos(x^2+1)]^2$$

$$f'(x) = 3\cdot 2\cdot[\cos(x^2+1)]\cdot(-\sin(x^2+1))\cdot 2x$$

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Brennofen*

Aufgabennummer: A_236

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Keramik-Produzenten werden Krüge hergestellt. Sobald ein Krug aus dem Brennofen genommen wird, beginnt er abzukühlen. Der Temperaturverlauf lässt sich durch die Funktion T beschreiben:

$T(t) = 20 + 780 \cdot e^{-k\cdot t}$ Exponentialfkt.; str. m. fallend

t ... Zeit seit der Entnahme aus dem Brennofen in Stunden (h)
$T(t)$ ... Temperatur des Kruges zur Zeit t in Grad Celsius (°C)
k ... Konstante

a) Ein Krug hat 2 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen eine Temperatur von 80 °C.

– Berechnen Sie die Temperatur des Kruges 5 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen.

$f(2|80)$:

$80 = 20 + 780\cdot e^{-k\cdot 2} \quad |-20$

$60 = 780\cdot e^{-2k} \quad |$

$\frac{6}{78} = e^{-2k} \quad |\ln()$

$\ln(\frac{6}{78}) = -2k \quad |:(-2)$

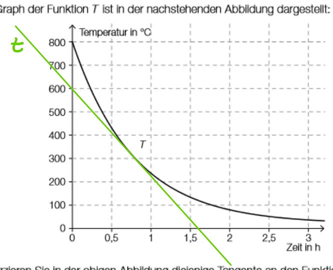
$k = \frac{\ln(\frac{6}{78})}{-2}$

$k = 1,2824...$

$T(5) = 20 + 780\cdot e^{-1,2824...\cdot 5}$

$T(5) = 21,280...$

b) Der Graph der Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Tangente an den Funktionsgraphen, deren Ordinatenabschnitt (~~Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse~~) 600 beträgt.
– Beschreiben Sie, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird: $\frac{T(3)-T(1)}{2}$

Mit dem Ausdruck wird beschrieben um welche Temperatur pro Stunde im Intervall [1; 3] die Temperatur abnimmt (mittlere Änderungsrate).

* ehemalige Klausuraufgabe

$T(t) = 20 + \underline{780} \cdot \boxed{e^{-k \cdot t}}$

c) Ihnen wird folgende fehlerhafte Berechnung der Ableitungsfunktion T' vorgelegt:

$T'(t) = 780 \cdot e^{-k \cdot t}$

$T'(t) = 780 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot (-k)$

– Geben Sie an, welche Ableitungsregel hier vermutlich verletzt wurde.

Kettenregel wurde verletzt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Weitere Anwendungen

Mittlere und lokale bzw. momentane Änderungsraten werden in Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft verwendet, um Veränderungen zu beschreiben. Im Folgenden ist die Bedeutung des Differentialquotienten für einige wichtige Zusammenhänge angeführt.

- **Größen der Rotation – Winkelgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung α**

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ — Änderung des bei einer Kreisbewegung überstrichenen Winkels φ in Abhängigkeit von der Zeit t

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$ — Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Kraft F und Leistung P**

$F = \frac{dW}{ds}$ — Änderung der in Wegrichtung verrichteten Arbeit W in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg s

$P = \frac{dW}{dt}$ — Änderung der verrichteten Arbeit W in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Drehmoment M**

$M = \frac{dL}{dt}$ — Änderung des Drehimpulses L in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Elektrische Stromstärke i und Stromdichte j**

$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ — Änderung der elektrischen Ladung q in einem elektrischen Leiter in Abhängigkeit von der Zeit t

$j = \frac{di}{dA}$ — Änderung der Stromstärke i in einem elektrischen Leiter in Abhängigkeit von der Querschnittsfläche A des Leiters

- **Wärmestrom $\dot{Q}$**

$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ — Änderung der Wärmemenge (Wärmeenergie) Q in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Wärmekapazität c**

$c = \frac{dQ}{dT}$ — Änderung der Wärmemenge (Wärmeenergie) Q in einem Körper in Abhängigkeit von der Temperatur T

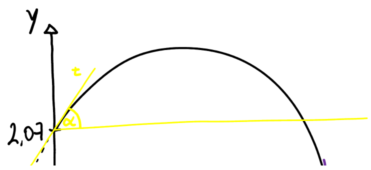
- **Grenzkostenfunktion K'**

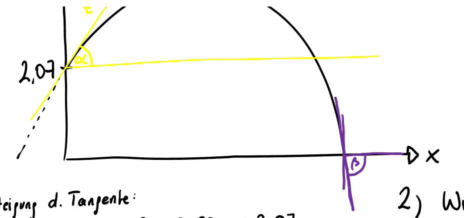
$K'(x) = \frac{dK}{dx}$ — Änderung der Kosten K in Abhängigkeit von der produzierten Stückmenge x

4.14)

4.14 Der aktuelle Weltrekord im Kugelstoßen aus dem Jahr 1990 liegt bei einer Weite von [redacted] Die Flugbahn einer Kugel bei einem ähnlich weiten Stoß lässt sich durch folgende Funktion annähern:
$y(x) = -0{,}04x^2 + 0{,}83x + 2{,}07$
x … waagrechte Entfernung vom Abwurfpunkt in m
y(x) … Höhe des Balls bei einer waagrechten Entfernung x in m
1) Berechne, in welchem Winkel die Kugel abgestoßen wird.
2) Ermittle, in welchem Winkel die Kugel auf dem Boden auftrifft.

Skizze:





1) Steigung d. Tangente:

$y(x) = -0{,}04x^2 + 0{,}83x + 2{,}07$

$\underline{y'(x) = -0{,}08x + 0{,}83}$

Steigung an Stelle 0:

$\underline{y(0) = 0{,}83}$

$\alpha = \arctan(0{,}83)$

$\underline{\underline{\alpha = 39{,}7^\circ}}$

2) Wurfweite: $y(x) = 0$

$$x_A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$0 = -0{,}04x^2 + 0{,}83x + 2{,}07$

$x_A = 23\,m$

$\beta = \arctan(-1{,}01)$

$\underline{\underline{\beta = -45{,}285\ldots^\circ}}$

Sü. am 28.01.2022

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+5} \cdot \sin(x)}{e^{3x}}$$

Quotientenregel
Produktregel
Kettenregel

Zähler': $\frac{1}{2} \cdot (2x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x \cdot \sin(x) + \sqrt{2x^2+5} \cdot \cos(x)$

Nenner': $e^{3x} \cdot 3$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (2x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x \cdot \sin(x) + \sqrt{2x^2+5} \cdot \cos(x)\right] \cdot e^{3x} - \sqrt{2x^2+5} \cdot \sin(x) \cdot e^{3x} \cdot 3}{e^{6x}}$$

$$f(x) = e^{-x}$$

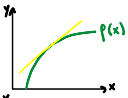
$$f'(x) = -e^{-x}$$

13.4 Bedeutung der Ableitungen

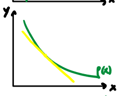
Bedeutung der 1. Ableitung

→ Steigung der Tangente an einer bestimmten Stelle

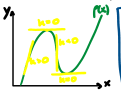
↳ Aussage über Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$



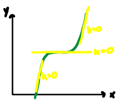
$k = f'(x) > 0$
$\Rightarrow f(x)$: streng monoton steigend



$k = f'(x) < 0$
$\Rightarrow f(x)$: str. monoton fallend

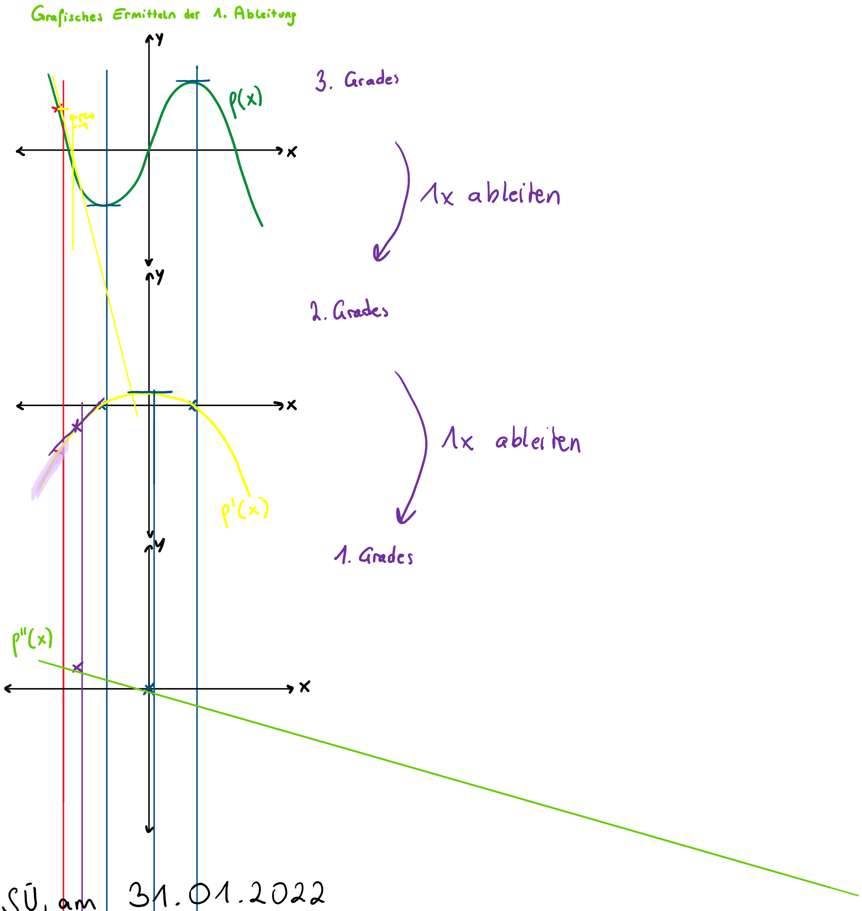


Ist $k = f'(x) = 0$ (keine St.d.T.)
An dieser Stelle wechselt das Monotonieverhalten
→ es liegt eine Extremstelle vor (Hoch-/Tiefstelle)



Sonderfall: $k=0$
↳ aber Monotonieverh wechselt nicht
↳ KEINE EXTREMSTELLE!

Grafisches Ermitteln der 1. Ableitung



SÜ, am 31.01.2022

→ teilweise 4. Woche

Speziell gilt:

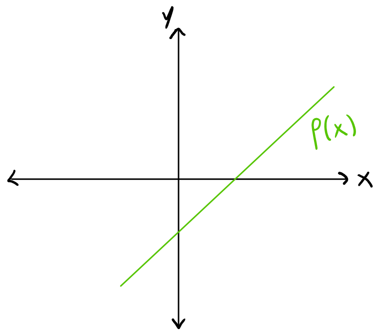
Für lineare Funktionen:

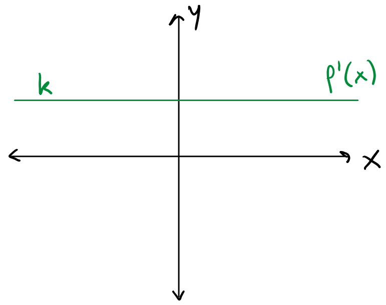
$f(x) = k \cdot x + d$ | $f(x) = 3x + 2$

$f'(x) = k$ | $f'(x) = 3$

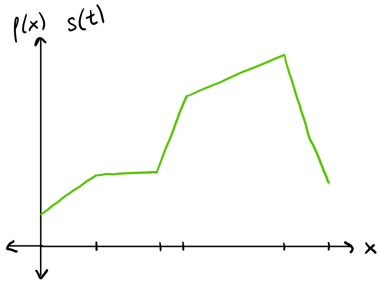
$f(x) = k \cdot x + d$ | $f(x) = \ldots$

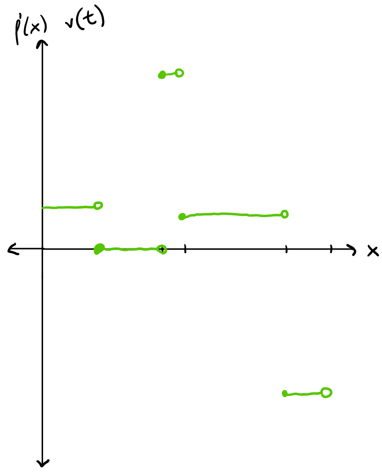
$f'(x) = k$ | $f'(x) = 3$





Für stückweise definierte Funktionen:



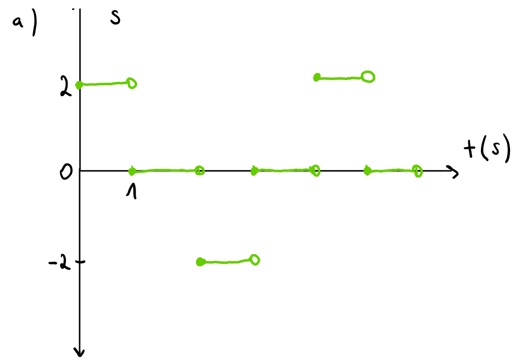


4.30) Ist die Ableitung f' einer Funktion positiv, dann ist die Funktion steigend.

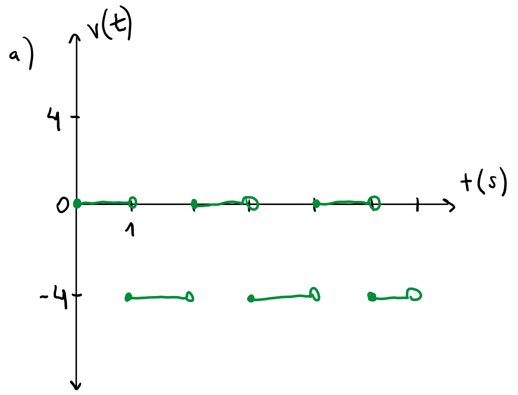
4.31) $\frac{dW}{dt} = P(t)$

a)

a)



a)



4.33) 1) → D

2) → C

3) → A

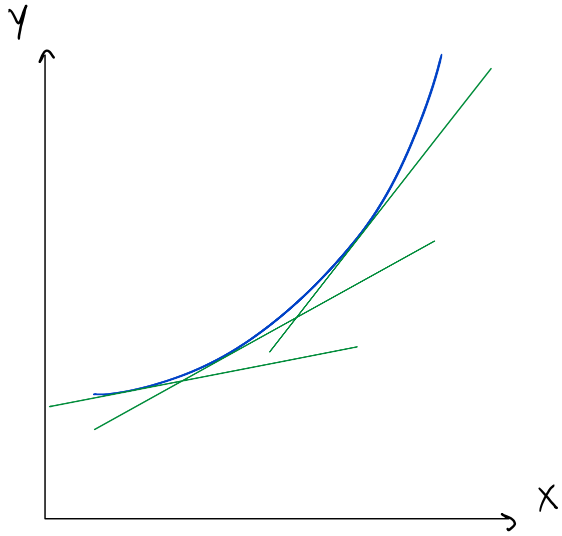
4) → B

4.34) mon. steig.:]-∞; -2[,]1; 3[

mon. fall.:]-2; 1[,]3; ∞[

Bedeutung der 2. Ableitung

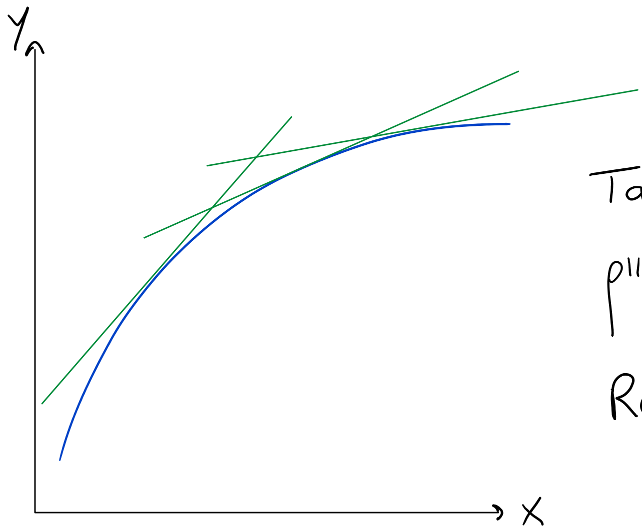
Die 2. Ableitung gibt die Änderung der Tangentensteigungen (= 1. Ableitung) an.
Sie kennzeichnet die Krümmung des Funktionsgraphen.



Tangentensteigungen werden größer

$f''(x) > 0$

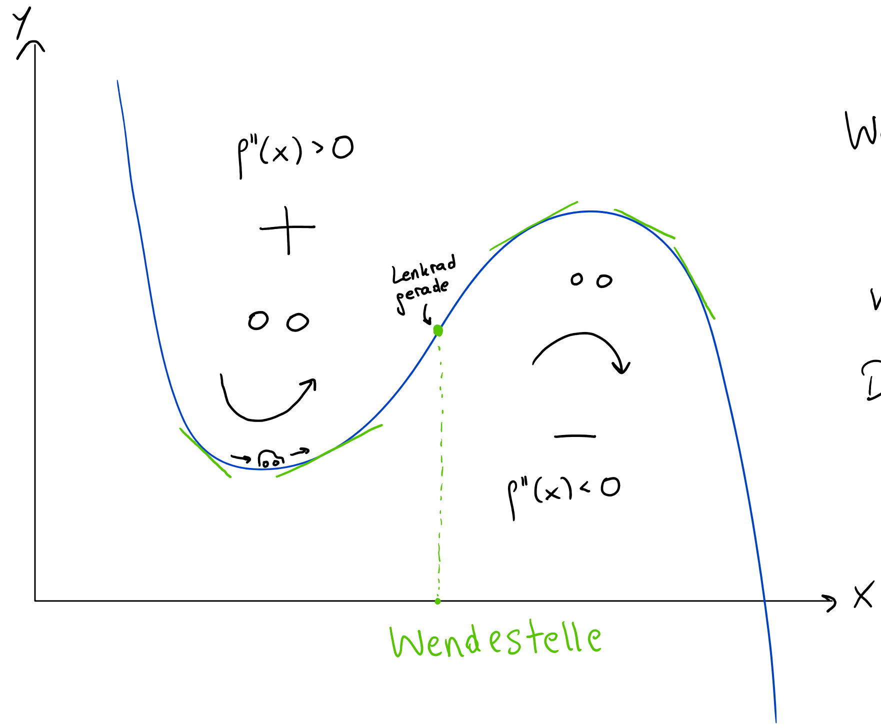
Linksgekrümmt; positiv gekrümmt



Tangentensteigungen werden kleiner

$f''(x) < 0$

Rechtsgekrümmt; negativ gekrümmt



Wendestelle:

$f''(x_0) = 0$

Krümmung ändert sich

Die Tangentensteigung ist hier maximal/minimal.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bevölkerungsentwicklung*

Aufgabennummer: A_218

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.

a) Zu Beginn des Jahres 1992 lebten in der steirischen Gemeinde Eisenerz 7965 Menschen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 4524.

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl in Eisenerz soll näherungsweise durch eine lineare Funktion N_1 beschrieben werden.

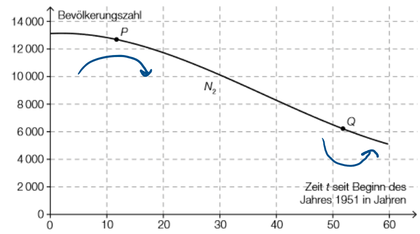
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion N_1.

t … Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1992
$N_1(t)$ … Bevölkerungszahl zur Zeit t

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Funktion N_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im nachstehenden Diagramm wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl von Eisenerz im Zeitraum von 1951 bis 2011 näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion N_2 dargestellt.



– Ordnen Sie den Punkten P und Q jeweils die an der entsprechenden Stelle zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

P	C
Q	B

~~A~~	~~$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$~~
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
~~D~~	~~$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$~~

c) In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres …	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
– Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N_1(t) = k \cdot t + d$

$d = N_1(0) = 7965$

$k = \frac{4524 - 7965}{22} = -156{,}4...$

$N_1(t) = -156 \cdot t + 7965$

Im gegebenen Zeitraum nahm die Bevölkerungszahl im Mittel pro Jahr um etwa 156 Personen ab.

b)

P	C
Q	B

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$

$4524 = 10068 \cdot a^{33} \Rightarrow a = 0{,}976...$

$N_3(t) = 10068 \cdot 0{,}976...^t$

oder: $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$4524 = 10068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \Rightarrow \lambda = 0{,}024...$

$N_3(t) = 10068 \cdot e^{-0{,}024... \cdot t}$

$N_3(49) = 3069{,}5...$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_1
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C: für die richtige Zuordnung

c) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_3
1 × B: für das richtige Ermitteln der Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030

BMB
Bundesministerium für Bildung

Elektrische Bauteile*

Aufgabennummer: B_432

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der zeitliche Verlauf der Spannung beim Entladen eines Kondensators kann näherungsweise durch eine Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

t ... Zeit ab Beginn des Entladevorgangs
$u(t)$ ... Spannung am Kondensator zur Zeit t
U_0 ... Spannung zur Zeit $t = 0$
τ ... Zeitkonstante

– Erstellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion u an der Stelle $t = 0$.

b) Der zeitliche Verlauf der Stromstärke in einer Spule kann durch eine Funktion f beschrieben werden, deren Graph in der unten stehenden Abbildung 1 dargestellt ist.

– Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in Abbildung 2.

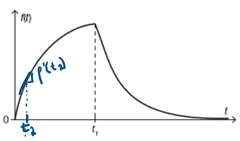


Abbildung 1

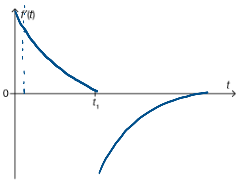


Abbildung 2

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der zeitliche Verlauf der Spannung an einem Kondensator kann nach dem Einschalten des Stroms durch die Funktion u beschrieben werden:

$$\boxed{u(t) = 40 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,24}}\right)}$$

t … Zeit nach dem Einschalten des Stroms in s
$u(t)$ … Spannung am Kondensator zur Zeit t in Volt (V)

– Erklären Sie, ausgehend von der Funktionsgleichung für u, warum die Spannung des Kondensators für $t \to \infty$ asymptotisch gegen 40 V geht.

Im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ steigt die Spannung am Kondensator von $u(t_1) = 5$ V auf $u(t_2) = 30$ V.

– Berechnen Sie den linearen Mittelwert der Spannung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$.

Ihnen wird folgende fehlerhafte Berechnung der 1. Ableitung von u vorgelegt:

$$\frac{du(t)}{dt} = -40 \cdot e^{-\frac{t}{0,24}} \cdot \underline{\quad} \text{ innere Ableitung } \cdot \left(-\frac{1}{0,24}\right)$$

– Geben Sie an, welche Ableitungsregel hier missachtet wurde.

Kettenregel

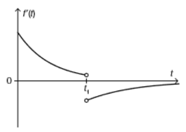
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Tangente $g(t) = k \cdot t + d$ an der Stelle $t = 0$:

$k = u'(0) = -\frac{U_0}{\tau}$
$d = U_0$
$\Rightarrow \quad g(t) = -\frac{U_0}{\tau} \cdot t + U_0$

b)



c) Da der Ausdruck $e^{-\frac{t}{0,24}}$ für steigende Werte von t gegen null geht, nähert sich der Klammerausdruck dem Wert 1. Daher nähert sich der Funktionswert asymptotisch dem Wert 40 V.

Durch Lösen der Gleichung $u(t_1) = 5$ bzw. $u(t_2) = 30$ erhält man die Integrationsgrenze $t_1 = 0{,}0320...$ bzw. $t_2 = 0{,}3327...$

$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,dt = 20{,}04...$

Der lineare Mittelwert der Spannung in diesem Zeitintervall beträgt rund 20,0 V.

Die Kettenregel wurde missachtet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Tangente

b) 1 × A1: für die richtige Skizze des Graphen der Ableitungsfunktion im Bereich $0 < t < t_1$ (richtiges Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion)
1 × A2: für die richtige Skizze des Graphen der Ableitungsfunktion im Bereich $t > t_1$ (richtiges Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion)

c) 1 × D: für die richtige Erklärung des Verhaltens der Funktion
1 × B: für die richtige Berechnung des linearen Mittelwerts
1 × C: für das richtige Angeben, dass die Kettenregel missachtet wurde, oder eine richtige Beschreibung

Berechnung besonderer Punkte

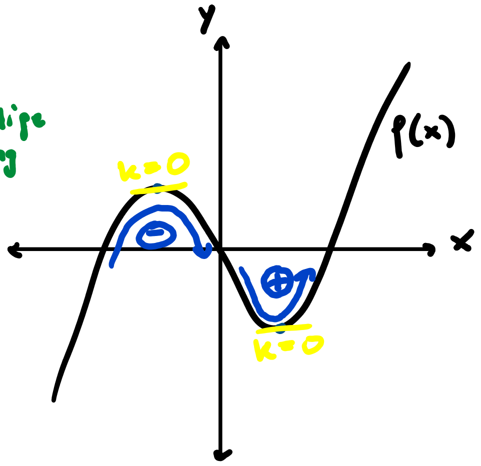
Montag, 5. September 2022 14:07

Berechnung besonderer Punkte

1. Extremstellen

$\boxed{f'(x) = 0}$ notwendige Bedingung

„1. Ableitung null setzen und x_0 berechnen"



Hochstelle
$f''(x) < 0$

Tiefstelle
$f''(x) > 0$

} hinreichende Bedingung

Bsp. $f(x) = x^2 - 2x$

ges.: H, T

$f'(x) = 2x - 2$

$2x - 2 = 0$

$x = 1$ ... Extremstelle

$f''(x) = 2 > 0$

↳ positiv $\Rightarrow$ $x = 1$ ist Tiefstelle

$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1$

$f(1) = -1$

Antwort: $T(1|-1)$

Bsp2.: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

ges.: H, T

Bsp.: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

ges.: H, T

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$3x^2 + 6x = 0$ (→ große Lösungsformel)

$x \cdot (3x + 6) = 0$

$\underline{x_1 = 0}$ $\qquad$ $3x + 6 = 0$

$\underline{x_2 = -2}$

Extremstellen

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(0) = 6$ $\qquad$ $f''(-2) = -6$

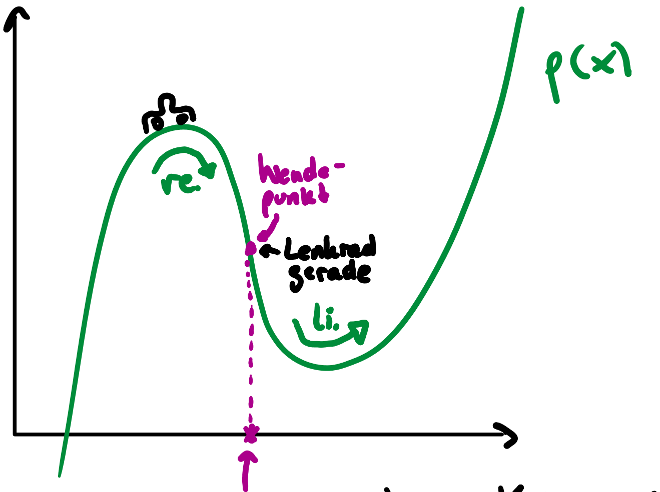
↓ Tiefstelle $\qquad$ ↓ Hochstelle

$f(0) = -1$ $\qquad$ $f(-2) = -8 + 12 - 1 = 3$

T(0|-1) $\qquad$ **H(-2|3)**

2. Wendestelle

Eine Wendestelle liegt vor, wenn sich das Krümmungsverhalten ändert.



Wendestelle: keine Krümmung

Bedingung:

$$f''(x_0) = 0$$

(hinreichende Bedingung: $f'''(x_0) \neq 0$)

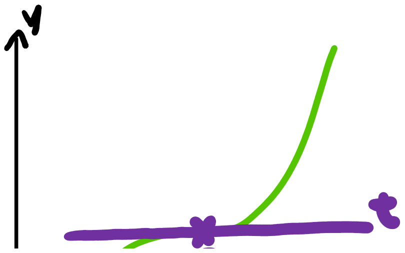
Außerdem: Die Funktion hat an der Wendestelle die minimale / maximale Steigung.

Sonderfall:

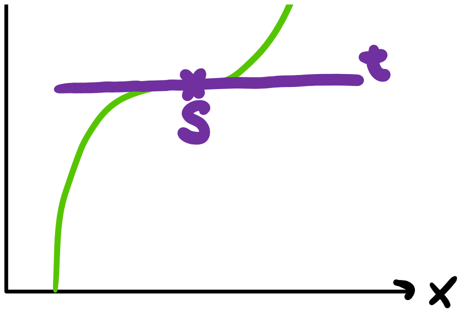
Terrassenpunkt,

Sattelpunkt

ist spezieller Wendepunkt aber mit waagrechter Tangente



Monotonie von f(x) ändert sich nicht!



nicht!

$f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) = 0$ } → Sattelpunkt/-stelle

z.B.: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

Wendestellen?

$f''(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f''(x) = 6x + 6$

$6x + 6 = 0$

$\underline{\underline{x = -1}}$ ..... Wendestelle

$\underline{\underline{W(-1 \mid 3)}}$

SÜ, am 15.02.2022 (Clemens Geburtstag)

13.5 Kurvendiskussion

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}$

1) Symmetrie

gerade Funktion	ungerade Funktion
↓	↓
an y-Achse gesp.	an Ursprung gesp.

gerade Fkt.: $f(x) = f(-x)$

ungerade Fkt.: $f(x) = -f(-x)$

keine Symmetrie

$$f(-x) = \frac{1}{9}\cdot(-x)^3 - \frac{1}{3}\cdot(-x)^2 - \frac{8}{3}\cdot(-x) + \frac{26}{9}$$

$$f(-x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}$$

$$f(x) \overset{?}{=} -f(-x)$$

$$\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \overset{?}{=} \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{26}{9}$$

$\neq$ $\Rightarrow$ nicht ungerade Funktion

$\Rightarrow$ nicht gerade Funktion

nicht symmetrisch

2) Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

3) Nullstellen

$f(x) = 0$

$x_1 = -(3\cdot\sqrt{3} - 1)$

$x_2 = 1$

$x_3 = 3\cdot\sqrt{3} + 1$

4) Hoch- & Tiefpunkte

$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$

4) Hoch- & Tiefpunkte

$f'(x) = 0$

$x = ?$

$\boxed{f'(x) =} \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$

→ große Lösungsformel

$x^2 - 2x - 8 = 0$

→ kleine Lösungsformel

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ $p = -2$, $q = -8$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\underbrace{1 + 8}_{\text{Diskriminante}}}$

$x_{1,2} = 1 \pm 3$

$\underline{\underline{x_1 = -2}}$ $\underline{\underline{x_2 = 4}}$ ...... Extremstellen

$f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$f''(-2) = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{-2}} < 0$ → Rechts → Hochstelle

$f''(4) = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{2}} > 0$ → Links → Tiefstelle

18.02.2022

$y_T = f(4) = \underline{-6}$ $\underline{TP(4|-6)}$

$y_H = f(-2) = \underline{6}$ $\underline{HP(-2|6)}$

5) Wendepunkt(e)

Wendestelle: $f''(x_0) = 0$

$\boxed{f''(x) =} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

$\underline{\underline{x = 1}}$

$y_W = f(1) = 0$ $\underline{\underline{WP(1|0)}}$

6) Wendetangente: $y = k \cdot x + d$

$k = f'(1) = -3$

$d = y_W - k \cdot x_W = 0 - (-3) \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

T: $y = -3 \cdot x + 3$

7) Zeichnung ✓

Bsp. 2: $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

1) Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

2) mögliche Unstetigkeitsstellen

$x = -1$:

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty$

$\neq$

$\Downarrow$

POLSTELLE

bei $x = -1$ → senkrechte Asymptote

$x = 1$:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\neq$

$\Downarrow$

POLSTELLE

bei $x = 1$ → senkrechte Asymptote

TI rechnen

3) Verhalten im Unendlichen

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

→ waagrechte Asymptote: $\underline{\underline{y = 0}}$

4) Symmetrie

ges. Fkt.: $f(x) = f(-x)$

$\frac{1}{1-x^2} = f\ \frac{1}{1-(-x)^2}$

$x^2 = (-x)^2$ ✓

$$\frac{1}{1-x^2} = f\ \frac{1}{1-(-x)^2}$$

$$x^2 = (-x)^2$$

Gerade Funktion liegt vor.

5) Nullstellen

↳ keine vorhanden, weil Asymptote $y=0$

$$f(x) = 0$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 0$$

$$1 = 0 \quad \text{falsche Aussage} \quad \nexists N$$

6) Extremstelle (HP, TP)

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{0\cdot(1-x^2) - 1\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0$$

$$2x = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

$$f(x) = e^{x\cdot\ln(x)}$$

Kettenregel

für äußere Ableitung Produktregel

$$f(x) = e^x$$

$$z(x) = x\cdot\ln(x)$$

$$z(x) = 1\cdot\ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1$$

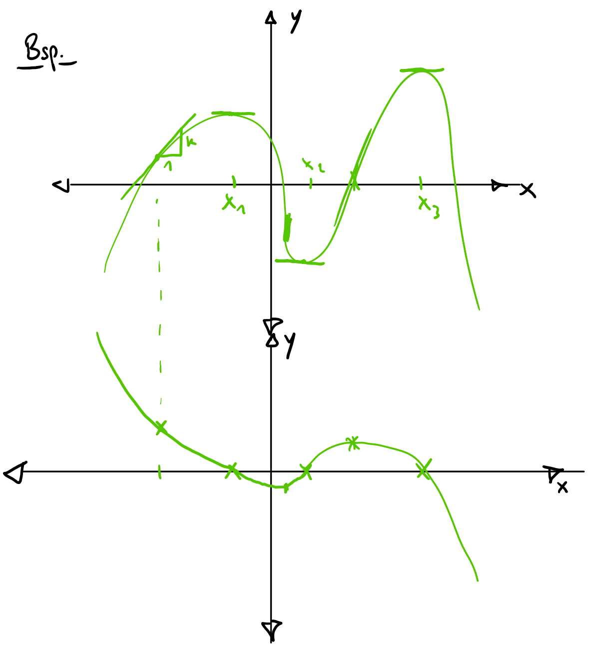
$$f'(x) = \underbrace{[\ln(x)\ 1]}_{\text{äuß. A.}} \cdot \underbrace{e^{x\cdot\ln(x)}}_{\text{innere A.}}$$

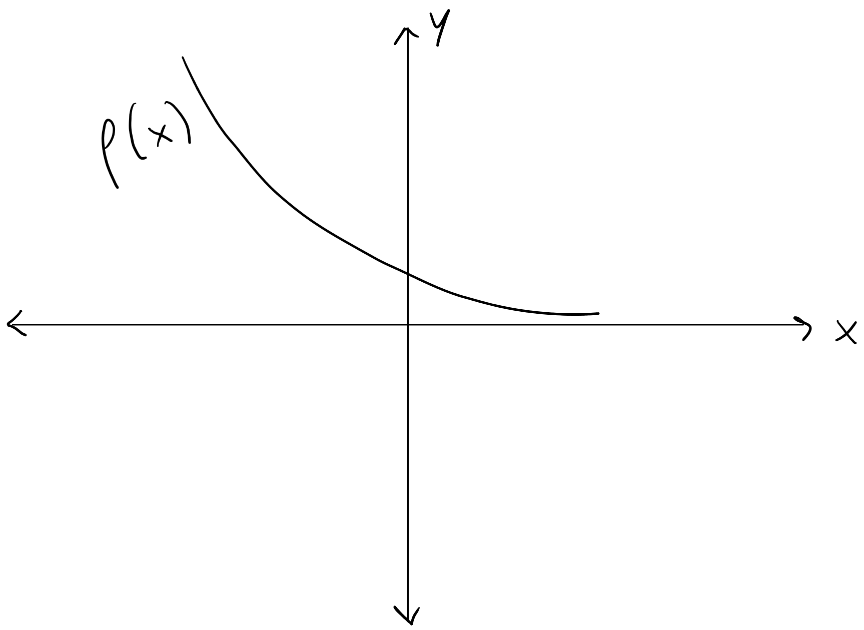
Bsp.: $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}} \quad \left(= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \left(\frac{1-x}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

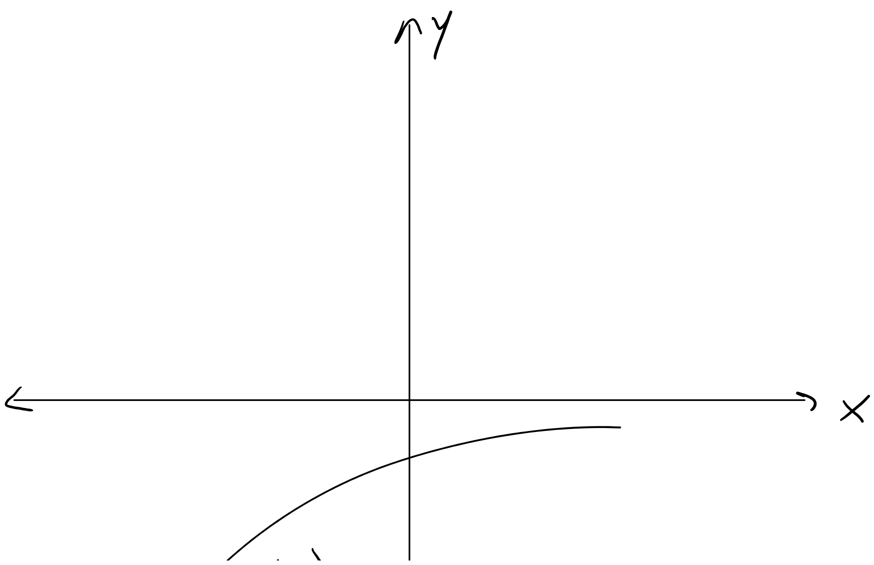
$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äuß. A}} \cdot \underbrace{\frac{-1\cdot(x^2+1) - (1-x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}}$$

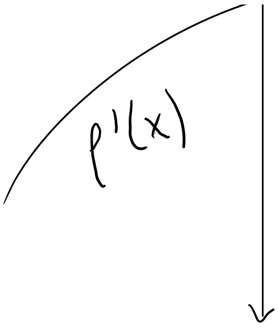
$$f'(x) = \underbrace{\frac{\;}{2} \cdot \left(\frac{\;}{x^2+1}\right)}_{\text{äuß. A.}} \cdot \underbrace{\frac{\;}{(x^2+1)^2}}_{\text{inn. Abl.}}$$

Bsp.









SÜ, am 25.02.2022

Rückgabe d. Schularbeit → 29P./32 GUT

Verbesserung d. Schularbeit

1-3) ⇒ alle Punkte

4) Fehler bei Berechnung von Tangentensteigung an Stelle -0,6.

Man darf in diesem Fall keine 2 Dinge gleichzeitig lösen wollen:

$$\cancel{\frac{dy}{dx}(f(-0{,}6))}$$

es wird zuerst f(-0,6) berechnet, wo eine Zahl herauskommt.

Anschließend wird die Ableitung einer Zahl berechnet

FALSCH!

FALSCH!

Richtig wäre:

$$\frac{dy}{dx}(p(x)) \boxed{\hookleftarrow} \rightarrow \underline{p'(x)}$$

$$p'(-0{,}6) = \underline{\underline{-3{,}125}}$$

2. Fehler: Tangentenfunktion berechnung fehlt:

$$p(x) = k \cdot x + d$$

$$p(x) = -3{,}125 \cdot x + d$$

$$2 = -3{,}125 \cdot (-0{,}6) + d$$

$$\underline{d = 0{,}125}$$

$P(x|y)$

$x \rightarrow -0{,}6$

$y \rightarrow p(-0{,}6)$

$\hookrightarrow = 2$

$$\underline{p(x) = -3{,}125 \cdot x + 0{,}125}$$

Schularbeitsbeispiel 5.

1) $v(0) = ?$

$v(t) = s'(t)$

$v(t) = -t^2 + 3t + 3$

$\underline{\underline{v(0) = 3 \frac{km}{min}}}$

2) $\overline{v(t)} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(2) - s(0)}{2} = \underline{4{,}\dot{6} \frac{km}{min}} \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{280 \frac{km}{h}}}$

3) TI Graph → Menü → Table → Split

↳ Wertetabelle bekommen

4) $a = \frac{\Delta V}{} = \frac{2}{} = 1 \frac{km}{min}$ $\frac{km}{}$

↳ Wertetabelle bekommen

4) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2}{2} = 1 \frac{\frac{km}{min}}{min} = \underline{\underline{1 \frac{km}{min^2}}}$

mittlere Beschleunigung

5) $a(t) = -2t + 3 = 0$

$a(t) = s''(t) = v'(t)$

$\underline{\underline{t = 1{,}5 min}}$

Kurvendiskussion:

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

1) $D = ?$

$x^2 - 4 = 0$

$x_1 = \pm 2$

$\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}}$

2) Polstellen, Lücken?

$x_0 = 2$:

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$

$x_1 = -2$:

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$

$x_0 = 2$ ist Polstelle $\quad x_1 = -2$ ist Polstelle

3) senk. Asymptoten:

$\underline{\underline{x = -2}}, \underline{\underline{x = 2}}$

waagr. Asymptoten:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\underline{\underline{y = 0}}$

4) Symmetrie?

Minus hebt sich nicht auf

$f(x) \neq f(-x)$? gerade Fkt. $\quad f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

$f(x) \neq -f(-x)$? ungerade Fkt.

$-f(-x) = -\frac{-x-1}{x^2-4} = \frac{x+1}{x^2-4}$ nicht gleich

↳ keine Symmetrie

5) Nullstellen ?

$f(x) = 0$

$\frac{x-1}{x^2-4} = 0 \quad | \cdot (x^2-4)$

$\underline{x = 1}$

$\underline{\underline{N(1|0)}}$

6) Extrempunkte (H,T)

Extremstellen

$f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-4) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2+2x}{N} = \frac{-x^2+2x-4}{N}$

$\frac{-x^2+2x-4}{N} = 0 \quad | \cdot N$

$-x^2+2x-4 = 0$

$x = $ k.L. ← false

keine Extremp. ⟶ keine Extremstellen.

7) Wendestelle / -punkt, + Tangente

$f''(x) = 0$

$f'(x) = \frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$

$f''(x) = \frac{(-2+2)(x^2-4)^2 - (-x^2+2x-4)\,2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4}$

TI solve(): $f''(x) = 0$

$\underline{x = 0{,}362...}$

$f(0{,}362...) = \underline{0{,}164...}$

$\underline{\underline{P_W\,(0{,}362... \,|\, 0{,}164...)}}$

Tangente: $\underline{f'(0{,}362...) = -0{,}227... = k}$

$y = k \cdot x + d$

$$y = k \cdot x + d$$

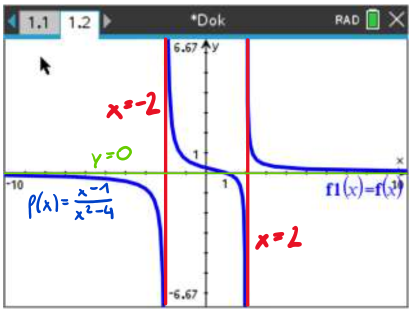
$$0{,}164\ldots = -0{,}227\ldots \cdot 0{,}362\ldots + d$$

$$d = 0{,}164\ldots - (-0{,}227\ldots \cdot 0{,}362\ldots)$$

$$\underline{\underline{d = 0{,}247\ldots}}$$

$$y = -0{,}227\ldots \cdot x + 0{,}247\ldots$$

8) Zeichnung



13.6 Krümmung an einem Punkt, Kappa

Montag, 5. September 2022 15:50

Sü, am 04.03.2021

13.6 Krümmung an einem Punkt, κ (Kappa)

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{[1+(y')^2]^3}}$$

Krümmungsradius $\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right|$

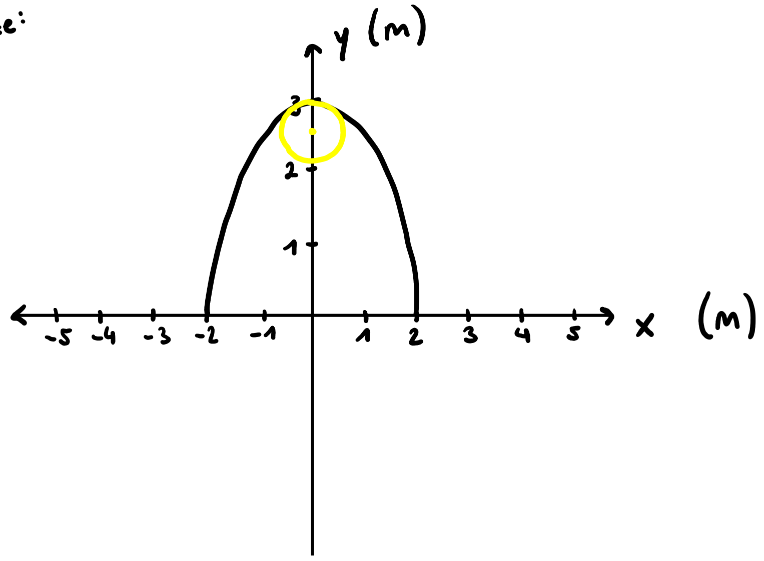
ρ „rho"

Die Umrisse vieler Kirchenfenster können mit einer Parabel angenähert werden. Ein Fenster hat eine Höhe von 3 m und eine Spannweite von 4 m.

1) Wähle das Koordinatensystem so, dass die Endpunkte der Parabel auf der x-Achse liegen und die y-Achse durch den Scheitel verläuft. Ermittle die Funktionsgleichung der Parabel.

2) Am höchsten Punkt der Parabel soll ein kreisförmiges Ornament angebracht werden, das denselben Radius wie der Krümmungskreis der Parabel hat. Ermittle diesen Radius.

Skizze:



$$\downarrow$$

1. Mögl. $y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$P_1(-2|0)$ I: $0 = 4a - 2b + c$

$S(0|3)$ II: $3 = c$

$P_2(2|0)$ III: $0 = 4a + 2b + c$

I: $0 = 4a - 2b + 3$

III: $0 = 4a + 2b + 3$ $\ominus$

$0 = \cancel{0} - 4b + \cancel{0}$

$\underline{b = 0}$

$b=0$ in I: $0 = 4a - 0 + 3 \quad | -3$

$4a = -3 \quad | :4$

$\underline{a = -\frac{3}{4}}$

$$p(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

2. Mögl. $y(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$

$S(0|3)$ $y(x) = a \cdot x^2 + 3$

$P(2|0)$

a: $0 = a \cdot 2^2 + 3$

$\underline{a = -\frac{3}{4}}$

$$\underline{p(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3}$$

2) $\kappa(0) = \frac{y''(0)}{\sqrt{[1+(y'(0))^2]^3}} = \frac{-\frac{3}{2}}{1} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$

$\underline{y'(x) = -\frac{3}{2}x}$; $\underline{\underline{y'(0) = 0}}$

$\underline{y''(x) = -\frac{3}{2}}$; $\underline{\underline{y''(0) = -\frac{3}{2}}}$

$\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right| = \underline{\underline{\frac{2}{3}m}}$

In Abb. 4.38 sind ein Parabelbogen und ein Geradenstück dargestellt, die im Punkt P zusammengefügt sind: $y = f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ sowie $y = f_2(x) = x + 1$.

a) Erkläre, wie die Funktion f_2 geändert werden muss, damit der Übergang in P knickfrei erfolgt.

b) Im Straßenbau wird darüber hinaus noch verlangt, dass in P nach Möglichkeit auch kein Sprung in der Krümmung (kein „Ruck") erfolgt. Argumentiere, weshalb diese Forderung hier nicht erfüllt werden kann.

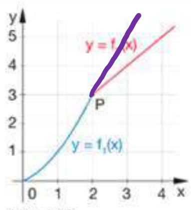


Abb. 4.38

„knickfrei": An der Stelle, an der die beiden Funktionen zusammentreffen, muss die Steigung gleich groß sein.

$f_1'(2) = f_2'(2)$

„ruckfrei": kein Sprung in der Krümmung

a) $f_1'(x) = x + \frac{1}{2}$

$\underline{\underline{k = f_1'(2) = 2,5}}$ d.h. $f_2'(2)$ muss 2,5 sein

$f_2'(x) = 1 \rightarrow$ falsch $\rightarrow$ knick ✓

$f_2(x) = 2,5 \cdot x + d$ $\quad$ P(2|3)

$3 = 2,5 \cdot 2 + d$

$d = -2$

$f_2(x) = 2{,}5 \cdot x - 2$ ⟵ knickfrei ✓

b) A: Die Forderung kann nicht erfüllt werden, weil die erste Funktion quadratisch und die zweite linear ist, weswegen die Krümmung der zweiten automatisch 0 ist.

$\kappa(2) = ?$ von $f_1(x)$

$$\kappa = \frac{f''(2)}{\sqrt{(1+f'(2)^2)^3}}$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{(1+2{,}5^2)^3}} = 0{,}0512\ldots$$

$$\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right| = 19{,}5212\ldots \text{ m}$$

13.7 Kurvendiskussion in Anwendung

⇨ allgemeine Anwendungen

5.34) $A(t) = -0{,}16t^3 + 1{,}4t^2 - 2{,}3t + 4{,}565$

1) $A(t) = 3{,}505$

A: Um 11:00 Uhr sind 3 505 Besucher auf der Messe.

2) Monotonieverhalten

2.1 zuerst Extremstellen berechnen
2.2 zweite Ableitung an den Stellen berechnen, und Monotonieverhalten ablesen

Extrempunkte: $t_1 = 0{,}989...$
$t_2 = 4{,}84...$

$A''(0{,}989...) = 1{,}85 > 0 \Rightarrow t_1 = 0{,}989...$ ist Tiefpunkt

$[0; 0{,}989[$ h fällt die Besucheranzahl
$[0{,}989; 4{,}84[$ h steigt – " –
$[4{,}84; 9{,}5[$ h fällt – " –

3) max. Besucheranzahl (Hochpunkt)

$t_2 = 4{,}84$

Um 14:50 Uhr ist die Besucheranzahl maximal.

$A(4{,}84) = 8{,}088...$ ≙ 8088 Besucher

Sü, am 08.03.2022

5.34) 4) A: Man berechnet den Zeitpunkt, bei dem die größte Änderung d. Anzahl d. Besucherströme stattfindet, weil d. Steigung d. Tangente max./min ist.

5) $A(t) > 5$

$$\frac{5000}{1000} > -0{,}16t^3 + 1{,}4t^2 - 2{,}3t + 4{,}565$$

TI solve

$t_1 = -0{,}17\ldots$ $\notin$ Def.

$t_2 = 2{,}46\ldots$ $\approx$ nach 2,5h $\hat{=}$ 12:30 Uhr

$t_3 = 6{,}45\ldots$

Bundesinstitut bifie

Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Abbau von Arzneimitteln*

Aufgabennummer: B_340

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Einnahme von Arzneimitteln gelangen Wirkstoffe über den Verdauungstrakt in den Blutkreislauf, wo diese dann abgebaut werden.

a) Nach Einnahme einer Tablette kann die Wirkstoffmenge im Blut näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$m(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0{,}05 \cdot t}) - 0{,}125 \cdot t$ mit $t \geq 0$

$m(t) = 20 - 20e^{-0{,}05t} - \frac{1}{8}t$

t … Zeit nach der Einnahme in Minuten (min)

$m(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in Milligramm (mg)

$m'(t) = -20 \cdot (-0{,}05) \cdot e^{-0{,}05t} - \frac{1}{8}$

1) – Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt der Wirkstoff vollständig abgebaut ist. $\rightarrow m(t) = 0$ $t = ?$

$t = 159{,}946\ldots$ min

2) – Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut 0,5 mg/min beträgt. $m'(t) = 0{,}5$ $t = 9{,}4$ min

3) – Argumentieren Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion m negativ gekrümmt ist.

2) $-20 \cdot (-0{,}05) \cdot e^{-0{,}05t} - \frac{1}{8} = 0{,}5$

$e^{-0{,}05t} = \frac{5}{8}$ | ln()

$-0{,}05t = \ln\left(\frac{5}{8}\right)$

$t = \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{-0{,}05}$

$t = 9{,}4$ min

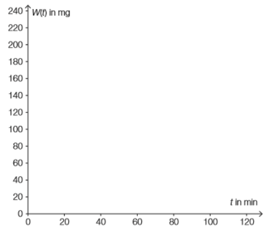
3) weil $e^{-0{,}05t}$ immer negativ bleibt, auch, wenn man die 2te Ableitung bildet.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Zur näherungsweisen Beschreibung des Abbaus eines Arzneimittels können lineare oder exponentielle Modelle verwendet werden.

Zu Beginn ($t = 0$ min) sind 200 mg des Wirkstoffs im Blut, nach 120 Minuten ist nur noch ein Achtel dieser Menge vorhanden.

– Veranschaulichen Sie den Verlauf des linearen Modells im nachstehenden Diagramm.



– Ermitteln Sie die Halbwertszeit desjenigen exponentiellen Modells, das diesen Abbau beschreibt, in Minuten.
– Veranschaulichen Sie den Verlauf des exponentiellen Modells unter Verwendung der ermittelten Halbwertszeit im obigen Diagramm.
– Erklären Sie, für welches der beiden Modelle zu jedem Zeitpunkt gilt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{35}{24}$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

SÜ, am 11.03.2022

5.35) $h(t) = \frac{2}{27}t^4 - \frac{16}{9}t^3 + \frac{32}{3}t^2 + 24$

1) $h(0) = ?$

$h(0) = 24$ cm

$h(3) = ?$

$h(3) = 78$ cm

2) höchste Wasserstand → Hochpunkt

$h'(t) = \frac{8}{27}t^3 - \frac{48}{9}t^2 + \frac{64}{3}t$

$h'(t) = 0$

$t_1 = 0 \quad t_2 = 6 \quad t_3 = 12$

$h''(t) = \frac{24}{27}t^2 - \frac{96}{9}t + \frac{64}{3}$

$\underline{\underline{h''(6) = -\frac{32}{3}}} < 0 \implies t = 6$ ist Hochstelle

$\underline{h(6) = 120\text{cm}}$

A: Bei $t = 6$ Tagen ist der Höchstwasserstand 120cm.

3) A: Mittlere Wasserstandhöhenänderung pro Tag vom 2ten bis zum 4ten Tag.

SÜ, am 14.03.2022

(KURVENDISKUSSION ANWENDUNG)

5.35) 4) → *Wendestelle*

$h''(t) = 0$

TI: $\underline{t_1 = 2{,}536\ldots d}$

$(t_2 = 9{,}464\ldots d)$

$\underline{\underline{t = 2{,}536\ldots d}}$

5) $h(t) = 80$

$(t_1 = -1{,}968\ldots \notin D_{ef.})$

$\underline{t_2 = 3{,}083\ldots}$

$\underline{t_3 = 8{,}916\ldots}$

$(t_4 = 13{,}968\ldots \notin D_{ef.})$

6) $h(t) < 30$

$(t_1 = -0{,}708\ldots \notin D_{ef.})$

$\underline{t_2 = 0{,}803\ldots}$

$\underline{\underline{t_3 = 11{,}19\ldots}}$ → Am 12. Tage

$(t_4 = 12{,}7\ldots \notin D_{ef.})$

⇨ betriebswirtschaftliche Anwendungen

kurze Wh:

KOSTENFUNKTION

(aus Sicht des Produzenten)

- FIXKOSTEN: unabhängig v. Produktionsmenge
  (Miete, Strom, Personal, ...)

- VARIABLEN KOSTEN: abhängig v. Produktionsmenge
  (Rohstoffe, Transport, ...)

$K(x) = K_V + K_F$ → meist kubisch

(2. Kl. → meist quadratisch)

(1. Kl. → meist linear)

ERLÖSFUNKTION

$E(x) = p(x) \cdot x$

$p(x)$ .... Preisabsatzfkt.

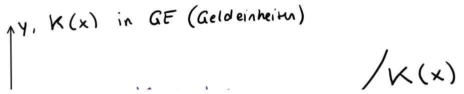
x .... Stückzahl / Mengeneinheit

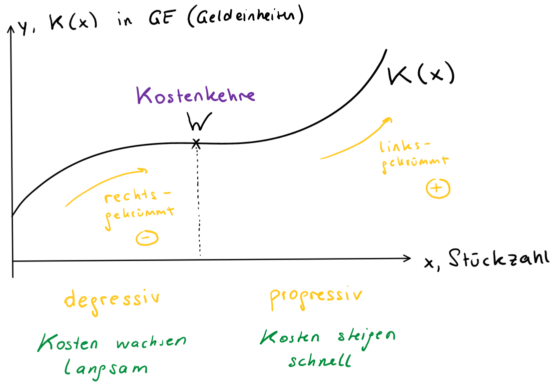
GEWINNFUNKTION

$G(x) = E(x) - K(x)$

Break-Even-Point: erste Nullstelle d. Gewinnfunktion

→ Kostenfunktion





degressiver Kostenverlauf

Bei geringen Produktionsmengen wachsen die Kosten verhältnismäßig langsamer als die Stückzahlen.

$K''(x) < 0$

progressiver Kostenverlauf

Bei höheren Produktionsmengen wachsen die Kosten verhältnismäßig schneller als die Stückzahl.

$K''(x) > 0$

Grenzkostenfunktion [= $K'(x)$]

$K'(x)$

- momentane Änderungsrate der Kostenfunktion
- gibt jenen Kostenzuwachs an, wenn um eine unendlich kleine Mengeneinheit mehr produziert wird

Stückkostenfunktion [= $\overline{K(x)}$]

$$\overline{K(x)} = \frac{K(x)}{x}$$

Die Stelle des Minimums der Stückkostenfunktion heißt Betriebsoptimum

$$\overline{K'(x)} = 0$$

$x = \ldots\ldots$ Minimum

Bundesinstitut bifie Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Pumpenproduktion

Aufgabennummer: B_169

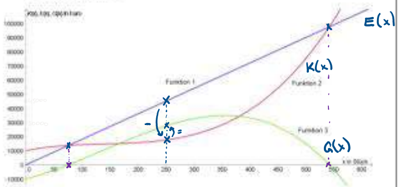
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x ... Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen
- der Kostenfunktion K
- der Erlösfunktion E
- der Gewinnfunktion G



– Begründen Sie, warum der Graph von Funktion 3 den Verlauf der Gewinnfunktion beschreibt. $G(x) = E(x) - K(x)$

b) 1)– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Kosten, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
2) – Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
3) – Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

1) $\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(101) - K(100)}{1} = 15{,}86 \ \frac{€}{\text{Stück}}$

2) $K'(x) = 0{,}0036x^2 - x + 80$

$K'(100) = 16 \ \frac{€}{\text{Stück}}$

3) Die momentane Grenzkosten sind genau bei einem Punkt (momentan) während die mittlere Änderungsrate die Änderung zwischen 2 Stück ist.

c) Die Schmutzwasserpumpen werden zu einem Preis von € 200 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei wie vielen verkauften Schmutzwasserpumpen der Gewinn maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

$p(x) = 200$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$E(x) = 200x$

$K(x) = 0{,}0012x^3 - 0{,}5x^2 + 80x + 10\,000$

$G(x) = 200x - [0{,}0012x^3 - 0{,}5x^2 + 80x + 10\,000]$

$\underline{G(x) = -0{,}0012x^3 + 0{,}5x^2 + 120x - 10\,000}$

$G'(x) = -0{,}0036x^2 + x + 120 = 0$

$a = -0{,}0036$
$b = 1$
$c = 120$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 0{,}0036 \cdot 120}}{-2 \cdot 0{,}0036}$

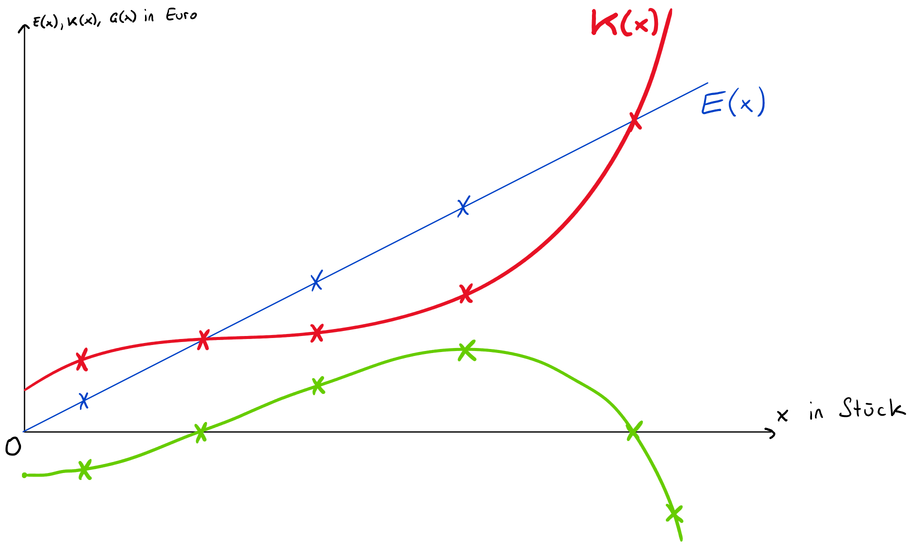
$(x_1 = -90) \notin D$

$\underline{x_2 = 368{,}287\ldots \text{ Stück}}$

$G''(368{,}287\ldots) < 0$

$G''(x) = -0{,}0072x + 1$

A: Bei 368 verkauften Stück ist d. Gewinn maximal



(Betriebswirtschaftliche Anwendung)

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bügeleisen*

Aufgabennummer: B_217

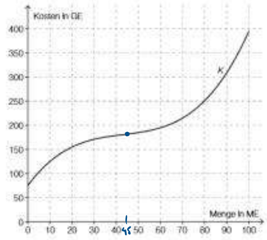
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

[0;45[Stück

* ehemalige Klausuraufgabe

$\overline{K(x)} = \frac{K(x)}{x}$ $\overline{K'(x)} = 0$ → $x = 72{,}1948...$ Stück

$\overline{K(x)} = 0{,}001x^2 - 0{,}13x + 6{,}2 + \frac{75}{x}$ $\overline{K'(x)} = 0{,}002x - 0{,}13 - \frac{75}{\sqrt{x}}$

b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind. $x = 72,...$ ✓

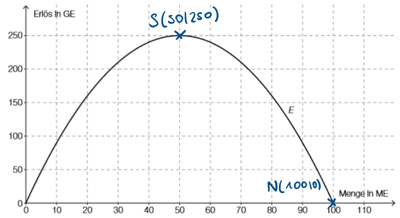
$\overline{K(72{,}19...)} = K'(72{,}19...)$

$K'(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}26x + 6{,}2$

$\overline{K(72{,}19...)} = 3{,}06... \frac{GE}{ME}$

$K'(72{,}19...) = 3{,}06... \frac{GE}{ME}$

c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



$250 = a \cdot 50^2 + b \cdot 50 \quad | \cdot 2$
$0 = a \cdot 100^2 + b \cdot 100$

$500 = 2a \cdot 50^2 + 100b$
$0 = a \cdot 100^2 + 100b$ ⊖

$500 = (2a \cdot 50^2) - (a \cdot 100^2)$

$\underline{\underline{a = -\frac{1}{10}}}$

$a = -\frac{1}{10}$ in II: $0 = -\frac{1}{10} \cdot 100^2 + 100b$
$\underline{\underline{b = 10}}$

$\underline{E(x) = -\frac{x^2}{10} + 10x}$

– Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss. Die Parabel ist nach unten hin offen, weshalb a negativ sein muss.
– Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf. ✓
– Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

$G(x) = 50$ $G(x) = E(x) - K(x)$
$x = ...$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

$G(x) = \left[-\frac{x^2}{10} + 10x\right] - \left[0{,}001x^3 - 0{,}13x^2 + 6{,}2x + 75\right] =$

$G(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}03x^2 + 3{,}8x - 75$

$G(x) = 50$

$(x_1 = -62{,}600...)$
$x_2 = 34{,}179...$ Stück
$x_3 = 58{,}420...$ Stück

A: 34 ME und 58 ME erzielen 50 GE.

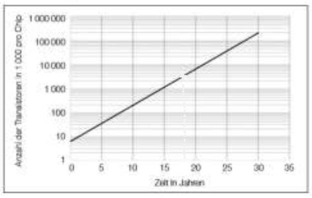
BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Computer

Aufgabennummer: B_370

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das Moore'sche Gesetz beschreibt die Zunahme der Anzahl an Transistoren pro Chip in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren (siehe nachstehende Grafik). Für das Jahr 1974 wird die Zeit $t = 0$ Jahre festgelegt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Transistoren pro Chip erstmals 3 000 000 erreicht hat.

nach 18 Jahren

Für die Gleichung der in der Grafik veranschaulichten Funktion gilt:

$y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

$P_1(10|100)$
$P_2(30|200\,000)$

t ... Zeit in Jahren
$y(t)$ ... Anzahl der Transistoren in 1 000 Stück pro Chip

– Ermitteln Sie die Parameter y_0 und λ mithilfe der Grafik.

↳ einlösen, solve

b) – Weisen Sie nach, dass eine Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot b^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer Skalierung der y-Achse als Gerade dargestellt wird.

$y = a \cdot b^x \quad | \lg()$
$\lg(y) = \lg(a \cdot b^x)$
$\lg(y) = \lg(a) + x \cdot \lg(b) \quad (y = kx + d)$
$\lg(y) = \lg(b) \cdot x + \lg(a)$ ✓

c) Ein Unternehmen produziert Bauteile für Computer. Die Gesamtkosten pro Tag für x produzierte ME können durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... pro Tag produzierte Bauteile in ME
$K(x)$ ... Gesamtkosten pro Tag bei x produzierten ME in Euro

Folgende Wertepaare sind bekannt:

x in ME	0	40	60
$K(x)$ in GE	12 000	27 520	30 720

Weiters ist bekannt, dass die Grenzkosten $K'(x)$ bei einer Produktion von 50 ME 157 GE/ME betragen.

$K(x) = 0{,}03x^3 - 6{,}8x^2 + 612x + 12\,000$

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d auf.
– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c und d.
– Berechnen Sie die Stelle des Minimums der Grenzkostenfunktion.
– Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im gegebenen Sachzusammenhang. → kleinstes Anstieg der Kosten / Kostenanstieg ist am geringsten (Betriebsoptimum)

$K'(x) = 0{,}09x^2 - 13{,}6x + 612$
$K''(x) = 0{,}18x - 13{,}6 = 0 \quad | +13{,}6$
$x = \frac{13{,}6}{0{,}18}$
$\underline{x = 75{,}\dot{5} \text{ ME}}$

d) Die Lebensdauer einer Sorte Akkus ist annähernd normalverteilt. Eine Stichprobe des Umfangs $n = 8$ hat den Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 1\,005$ Ladezyklen und die Stichprobenstandardabweichung $s_{n-1} = 48$ Ladezyklen.

– Ermitteln Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Lebensdauer mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\,\%$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

13.8 Das Differenzial und Linearisierung einer Funktion

Man möchte eine Funktion an einer Stelle und ihrer Umgebung durch eine lineare Funktion ersetzen (= Tangente).

Bsp.: 4.186) a)

geg.: $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

ges.: Linearisierung bei x_0

t: $y = k \cdot x + d$

$k = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{2}}$

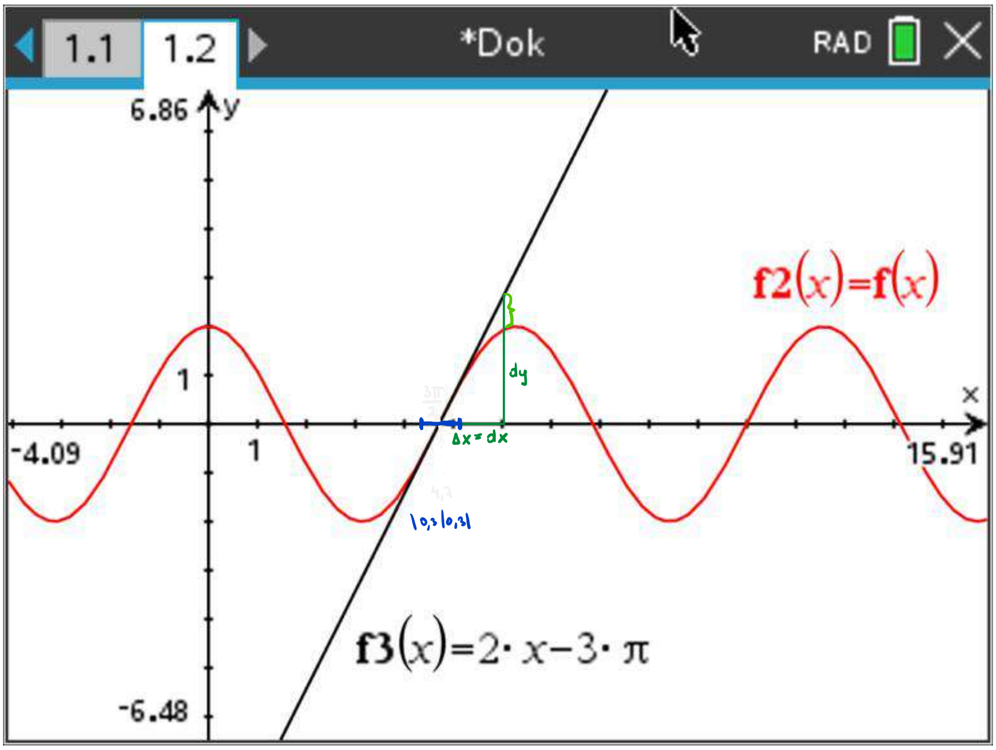
$f'(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ TI: RAD!

$d = y - kx$

$P\left(\frac{3\pi}{2} \middle| 0\right)$

$d = 0 - 2 \cdot \frac{3\pi}{2} = \underline{-3\pi}$

t: $\underline{y = 2x - 3\pi}$



Allgemein:

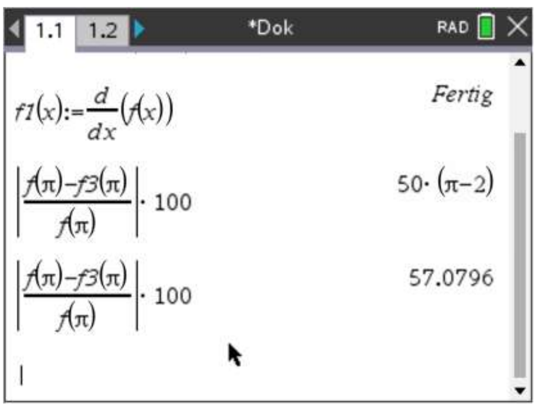
Es gilt, dass der relative Fehler kleiner als 5% sein soll!

relativer Fehler:

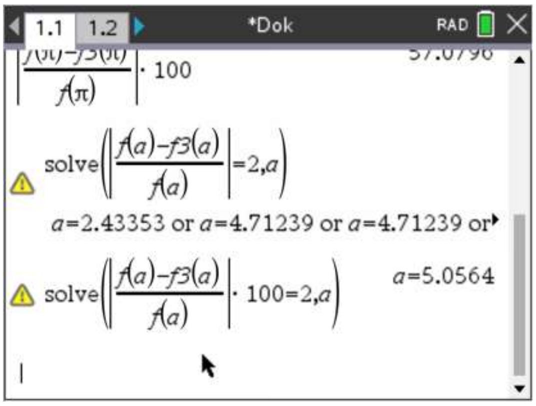
$$\left|\frac{f(x)-t(x)}{f(x)}\right|\cdot 100\%$$

Berechne relativer Fehler ($x_0=\pi$):

$$\left|\frac{f(\pi)-t(\pi)}{f(\pi)}\right|\cdot 100\% = \underline{57{,}079\ldots\%}$$



Berechne Stelle a, wenn r.F = 2% ist:



SÜ, am 29.03.2022

13.9 Regel von de L'Hospital

Montag, 5. September 2022 15:58

13.9 Regel von de L'Hospital

Wenn bei der Grenzwertbildung ein Bruch entsteht, der auf einen unbestimmten Ausdruck führt, dann kann diese Regel angewendet werden:

z.B.: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x} = „\frac{0}{0}“ \quad \nexists$ GW

$$\boxed{\text{Regel:} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to x_0} \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

13.10 umgekehrte Kurvendiskussion

Aus einigen bekannten Punkten (Eigenschaften) einer Funktion soll die Funktionsgleichung ermittelt werden.

5.71) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

P(4|6): I: $6 = 64a + 16b + 4c + d$
N(0|0): II: $0 = d$
III: $0 = 66a + 2b$
IV: $0 = 3a \cdot 16 + 2b \cdot 4 + c$

TI: solve ⇒ $a = \frac{3}{200}$
$b = -\frac{99}{200}$
$c = \frac{81}{25}$
$d = 0$

$f(x) = \frac{3}{200} x^3 - \frac{99}{200} x^2 + \frac{81}{25} x$

SÜ, am 22.04.2022

5.73) $f(x) = a \cdot x^4 + \cancel{b \cdot x^3} + c \cdot x^2 + \cancel{d \cdot x} + e$

→ symmetrisch zur y-Achse
↳ gerade Funktion → nur gerade Potenzen
↳ $b = 0$ $d = 0$

$f(x) = a \cdot x^4 + c \cdot x^2 + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$
$f''(x) = 12ax^2 + 2c$

I: W(-1|5): $f(-1) = 5$: $5 = a \cdot (-1)^4 + c \cdot (-1)^2 + e$
II: $f''(-1) = 0$: $0 = 12a \cdot (-1)^2 + 2c$
III: P(0|0): $f(0) = 0$: $0 = e$

TI: solve → $a = -1$ $b = 6$ $e = 0$

$f(x) = -x^4 + 6x^2$

5.72) d) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

I: P(-1|-10): $f(-1) = -10$: $-10 = -a + b - c + d$
II: $k = 1$: $f'(-1) = 1$: $1 = 3a - 2b + c$
III: R(1|-4): $f(1) = -4$: $-4 = a + b + c + d$

$\underline{I}$: $P(-1|-10)$: $p(-1) = $ [illegible]

$\underline{II}$: $k = 1$: $p'(-1) = 1$: $1 = 3a - 2b + c$

$\underline{III}$: $R(1|-4)$: $p(1) = -4$: $-4 = a + b + c + d$

$\underline{IV}$: $k = -3$: $p'(1) = -3$: $-3 = 3a + 2b + c$

TI : solve => $a = -2$ $b = -1$ $c = 5$ $d = -6$

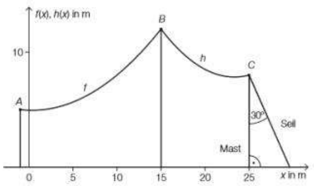
$$\underline{\underline{p(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 6}}$$

Stromversorgung einer Baustelle*

Aufgabennummer: B_308

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Stromleitung zur Versorgung einer Baustelle soll, wie in der nachstehenden Skizze dargestellt, durch die 3 Punkte *A*, *B* und *C* führen. Die zwischen den einzelnen Masten liegenden Teile der Stromleitung können näherungsweise durch Graphen von Polynomfunktionen 2. Grades durch die Punkte *A* und *B* bzw. *B* und *C* beschrieben werden. Alle Längen sind in Metern angegeben.



a) Der erste Teil der Leitung verläuft zwischen den Punkten $A = (-1|5)$ und $B = (15|12)$.

Eine Gleichung der Tangente im Punkt *A* an den Graphen der Polynomfunktion *f* lautet:

$y = 4{,}913 - 0{,}0875 \cdot x$

- Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion 2. Grades auf.
- Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Zwischen den Punkten *B* und *C* kann die Stromleitung durch den Graphen der folgenden Funktion *h* beschrieben werden:

$h(x) = \frac{3}{50} \cdot x^2 - \frac{14}{5} \cdot x + \frac{81}{2}$ mit $15 \leq x \leq 25$

Die Stromleitung soll in diesem Bereich in einer Höhe von mindestens 7 m verlaufen.

- Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Bedingung erfüllt ist.
- Berechnen Sie die Länge desjenigen Seils, das vom Punkt *C* zum Boden gespannt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

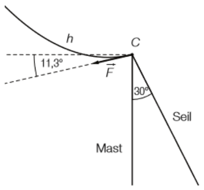
$p(x) = ax^2 + bx + c$

$p'(x) = 2ax + b$

$\underline{I}$: $A(-1|5)$: $p(-1) = 5$: $5 = a - b + c$

$\underline{II}$: $B(15|12)$: $p(15) = 12$: $12 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c$

c) Wie in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Skizze dargestellt, ist im Punkt C ein Seil unter einem Winkel von 30° zum Mast gespannt.
Auf der anderen Seite wirkt durch die Stromleitung auf den Befestigungspunkt C eine Kraft $\vec{F}$ von 1 000 Newton unter einem Winkel von 11,3° zur Waagrechten. Diese Kraft kann in zwei Kräfte aufgeteilt werden, eine in Seilrichtung und eine in Mastrichtung.



– Berechnen Sie den Betrag derjenigen Kraft, die in Seilrichtung wirkt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Sü, am 26.04.2022

Info: alle haben ne 4 in WebUntis

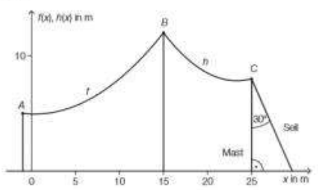
Umgekehrte Kurvendiskussion

Stromversorgung einer Baustelle*

Aufgabennummer: B_308

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Stromleitung zur Versorgung einer Baustelle soll, wie in der nachstehenden Skizze dargestellt, durch die 3 Punkte A, B und C führen. Die zwischen den einzelnen Masten liegenden Teile der Stromleitung können näherungsweise durch Graphen von Polynomfunktionen 2. Grades durch die Punkte A und B bzw. B und C beschrieben werden. Alle Längen sind in Metern angegeben.



a) Der erste Teil der Leitung verläuft zwischen den Punkten $A = (-1|5)$ und $B = (15|12)$.

Eine Gleichung der Tangente im Punkt A an den Graphen der Polynomfunktion f lautet:

$y = 4{,}913 - 0{,}0875 \cdot x$

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion 2. Grades auf.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Zwischen den Punkten B und C kann die Stromleitung durch den Graphen der folgenden Funktion h beschrieben werden:

$h(x) = \frac{3}{50} \cdot x^2 - \frac{14}{5} \cdot x + \frac{81}{2}$ mit $15 \leq x \leq 25$

Die Stromleitung soll in diesem Bereich in einer Höhe von mindestens 7 m verlaufen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Bedingung erfüllt ist.
– Berechnen Sie die Länge desjenigen Seils, das vom Punkt C zum Boden gespannt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

$p(x) = ax^2 + bx + c$
$p'(x) = 2ax + b$

I: $A(-1|5)$: $p(-1) = 5$: $5 = a - b + c$
II: $B(15|12)$: $p(15) = 12$: $12 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c$
III: $k_A = -0{,}0875$: $p'(-1) = -0{,}0875$: $-0{,}0875 = -2a + b$

$\underline{a = 0{,}0328\ldots}$ $\underline{b = -0{,}0218\ldots}$ $\underline{c = 4{,}945\ldots}$

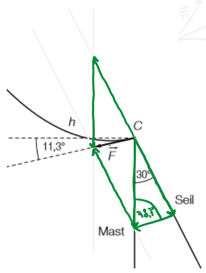
$p(x) = 0{,}0328x^2 - 0{,}0218x + 4{,}945$

$h'(x) = 0 \longrightarrow$ Tiefpunkt (1. Lösungsmöglichkeit)
TI: solve: $x = \frac{70}{3}$
$h(\frac{70}{3}) = 7{,}8\dot{3} > 7$ ✓

... Punkt des Seils liegt

c) Wie in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Skizze dargestellt, ist im Punkt C ein Seil unter einem Winkel von 30° zum Mast gespannt.
Auf der anderen Seite wirkt durch die Stromleitung auf den Befestigungspunkt C eine Kraft $\vec{F}$ von 1 000 Newton unter einem Winkel von 11,3° zur Waagrechten. Diese Kraft kann in zwei Kräfte aufgeteilt werden, eine in Seilrichtung und eine in Mastrichtung.

$|\vec{F}| = 1000$ N



– Berechnen Sie den Betrag derjenigen Kraft, die in Seilrichtung wirkt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

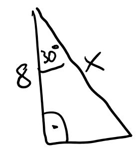
$h\left(\frac{70}{3}\right) = 7{,}8\dot{3} > 7$ ✓

A: Der niedrigste Punkt des Seils liegt bei $7{,}8\dot{3}$m Höhe

2. Lösungsweg: $7 < h(x)$ ∄ Lösung

↳ false ✓

$h(25) = 8$



$$\cos(\alpha) = \frac{AN}{HY} = \frac{8}{x} = \cos(30°)$$

$$x = \frac{8}{\cos(30)} = \underline{\underline{9{,}237\ldots \text{ m}}}$$

A: Die Länge des Seils beträgt ca. 9,24m.

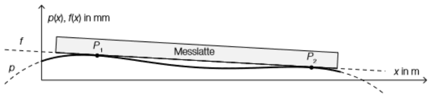
Sü, am 29.04.2022

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bodenunebenheiten*

Aufgabennummer: B_405		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.



Das Profil des Bodens kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion *p* beschrieben werden, die Unterkante der Messlatte kann durch den Graphen einer linearen Funktion *f* beschrieben werden.

a) Die Messlatte berührt den Boden in den Punkten $P_1 = (x_1|p(x_1))$ und $P_2 = (x_2|p(x_2))$.
Die Steigung der linearen Funktion *f* ist *k*.

Eine der folgenden Aussagen stimmt nicht mit der obigen Abbildung überein.

– Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$k = \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1}$	☐
$p'(x_1) = 0$	☒
$p'(x_2) = k$	☐
$p'(x_1) = p'(x_2)$	☐
$f(x_1) = p(x_1)$	☐

→ $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (mittlere Änderungsrate)

b) – Begründen Sie, warum der Grad der in der obigen Abbildung dargestellten Polynomfunktion *p* größer oder gleich 4 sein muss.

mind. 3 Extremstellen

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der Graph der Polynomfunktion *p* mit $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft durch die folgenden 5 Punkte:

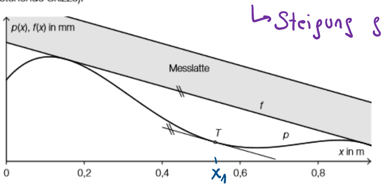
$A = (0|1,8)$, $B = (0,25|2,1)$, $C = (0,5|0,4)$, $D = (0,75|0,7)$, $E = (1|0,5)$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
p(*x*) ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion *p* auf.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion *p*.

d) Um die Unebenheit eines anderen Bodens zu ermitteln, soll der Punkt *T* bestimmt werden. Im Punkt *T* ist die Tangente an den Graphen von *p* parallel zur Geraden *f* (siehe nachstehende Skizze).

↳ Steigung gleich



Es gilt:

$p(x) = -70{,}000 \cdot x^4 + 150{,}000 \cdot x^3 - 100{,}000 \cdot x^2 + 17{,}000 \cdot x + 3{,}000$
$f(x) = \boxed{-4{,}046} \cdot x + 4{,}378$

$p'(x) = -4{,}046$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
p(*x*), *f*(*x*) ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

$-4{,}046 = -280x^3 + 450x^2 - 200x + 17$
$(x_1 = 0{,}15)$
$x_2 = 0{,}53$
$(x_3 = 0{,}91)$

– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die *x*-Koordinate des Punktes *T* berechnet werden kann.
– Berechnen Sie die *x*-Koordinate des Punktes *T*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

I: $A(0|1,8)$: $p(0) = 1,8$: $1,8 = e$
II: $B(0,25|2,1)$: $p(0,25) = 2,1$: $2,1 = a \cdot 0,25^4 + b \cdot 0,25^3 + c \cdot 0,25^2 + 0,25d + e$
III: $C(0,5|0,4)$: $p(0,5) = 0,4$: $0,4 = a \cdot 0,5^4 + b \cdot 0,5^3 + c \cdot 0,5^2 + 0,5d + e$
IV: $D(0,75|0,7)$: $p(0,75) = 0,7$: $0,7 = a \cdot 0,75^4 + b \cdot 0,75^3 + c \cdot 0,75^2 + 0,75d + e$
V: $E(1|0,5)$: $p(1) = 0,5$: $0,5 = a + b + c + d + e$

TI: solve => kein Bock

Möglicher Lösungsweg

a)

$p'(x_1) = 0$	☒

b) Der Graph der Funktion hat mindestens 2 Wendepunkte.

oder:

Die Funktion hat mindestens 3 lokale Extrema.

oder:

Es gibt mindestens 4 Schnittpunkte mit einer geeigneten Geraden.

c) $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

I: $p(0) = 1{,}8$
II: $p(0{,}25) = 2{,}1$
III: $p(0{,}5) = 0{,}4$
IV: $p(0{,}75) = 0{,}7$
V: $p(1) = 0{,}5$

oder:

I: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 1{,}8$
II: $a \cdot 0{,}25^4 + b \cdot 0{,}25^3 + c \cdot 0{,}25^2 + d \cdot 0{,}25 + e = 2{,}1$
III: $a \cdot 0{,}5^4 + b \cdot 0{,}5^3 + c \cdot 0{,}5^2 + d \cdot 0{,}5 + e = 0{,}4$
IV: $a \cdot 0{,}75^4 + b \cdot 0{,}75^3 + c \cdot 0{,}75^2 + d \cdot 0{,}75 + e = 0{,}7$
V: $a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e = 0{,}5$

Berechnung der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:

$a = -69{,}333...$
$b = 146{,}666...$
$c = -95{,}666...$
$d = 17{,}033...$
$e = 1{,}8$

d) $p'(x) = f'(x)$
$p'(x) = -4{,}046$

$-280 \cdot x^3 + 450 \cdot x^2 - 200 \cdot x + 17 = -4{,}046$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = 0{,}1527...)$
$x_2 = 0{,}5357...$
$(x_3 = 0{,}9187...)$

Die x-Koordinate des Punktes T ist 0,5357...

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung der x-Koordinate des Punktes T
1 × B: für die richtige Berechnung der x-Koordinate des Punktes T

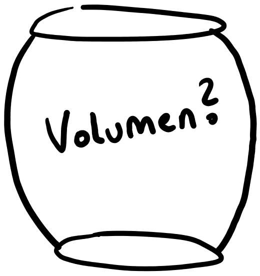
14. Integralrechnung

Montag, 5. September 2022 16:03

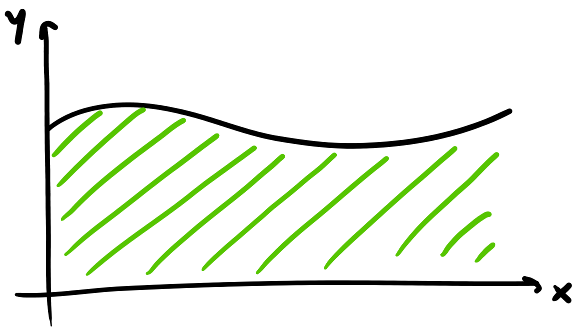
14. INTEGRALRECHNUNG

Fass:

Kepler's Problem:



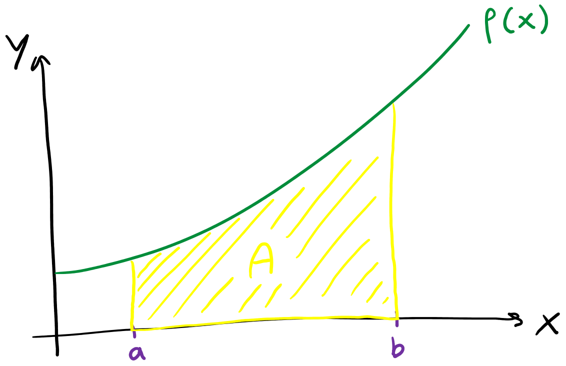
Grundproblem: Flächeninhalt einer krummlinigen Fläche?



14.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

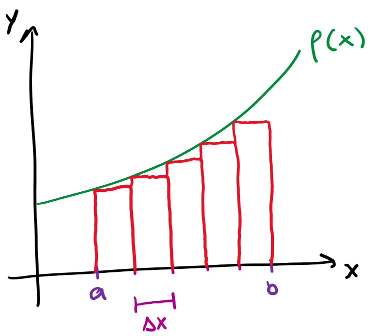
a) bestimmtes Integral

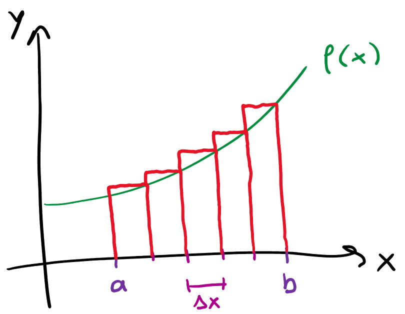
ges.: Flächeninhalt unterhalb d. Kurve



Das Intervall [a; b] wird in gleich breite Abschnitte Δx zerlegt.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$ n.... Anzahl der Streifen





Die Summe aller Flächen der Rechtecke ergibt

die Untersumme $\underline{S}$. | die Obersumme $\overline{S}$.

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

die Untersumme $\underline{S}$. | die Obersumme $\overline{S}$.

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x \qquad \Bigg| \qquad \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$\underline{S} \leq A \leq \overline{S}$$

Die Näherung wird umso genauer, je kleiner die Breite der Rechtecke wird (schmäler).

d.h.: $\Delta x \to 0$

Damit wächst aber gleichzeitig die Anzahl der Rechtecke

d.h.: $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x \quad = \text{bestimmte Integral}$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

a, b: Grenzen
(a: untere Grenze;
b: obere Grenze)

$f(x)$: Integrand

„das bestimmte Integral von a nach b von f(x) mal dx"

b) unbestimmtes Integral

die Stammfunktion

z.B.: geg: $f'(x) = x^2$

ges: Wie lautet $f(x)$?

allg.: Wie lautet die Funktion, deren erste Ableitung diese Funktion ergibt

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3; \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2; \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 69; \ \ldots$$

Es gilt:

Die Funktion $F(x) = \int f(x) \cdot dx + C$

heißt Stammfunktion von $f(x)$.

Das Ermitteln der Stammfunktion nennt sich unbestimmt integrieren.

Der Summand C heißt Integrationskonstante.

Unbestimmt integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens.

14.2 Grundlegende Integrationsregeln

Montag, 5. September 2022 16:03

SÜ, am 03.05.2022

14.2 Grundlegende Integrationsregeln

1) $f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R}$ (konstante Funktion)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int c \cdot dx = c \cdot x + C$$

z.B.: $f(x) = 4$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = 4x + C$$

2) $f(x) = x^n \qquad n \neq -1;\ n \in \mathbb{Z}$ (Potenzfunktion)

$$F(x) = \int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

z.B.: $\int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} + C$

d

$\int x^{\boxed{7}} \cdot dx = \frac{x^{\boxed{8}}}{8} \cdot C$

3) Summenregel:

$$\int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx = \int [f(x) + g(x)] \cdot dx$$

z.B.:

$$\int (x^2 + x^3) \cdot dx = \int x^2 \cdot dx + \int x^3 \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$$

4) Faktorregel:

$$\int a \cdot f(x) \cdot dx = a \cdot \int f(x) \cdot dx \qquad a \in \mathbb{R}$$

z.B.:

$$\int 3x^4 \cdot dx = 3 \cdot \int x^4 \cdot dx =$$

$$= 3\,\frac{x^5}{5} + C$$

Beispiele:

1) $\int (3x^2 + 5x - 7)\, dx =$

$$3 \cdot \frac{x^3}{3} + 5\,\frac{x^2}{2} - 7x + C =$$

$$\underline{\underline{x^3 + 2{,}5x^2 - 7x + C}}$$

2) $\int 4 \cdot a \cdot x^2 \cdot dx$ vs. $\int 4 \cdot a \cdot x^2 \cdot da$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$4a \cdot \frac{x^3}{3} + C \qquad\qquad 4x^2 \cdot \frac{a^2}{2} + C$$

3) $\int \sqrt{x} \cdot dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx =$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C}}$$

$$= \frac{x}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C}}$$

4) $$\int \frac{1}{x^3} \cdot dx = \int x^{-3} \cdot dx =$$

$$- \frac{x^{-2}}{2} + C = \underline{\underline{- \frac{1}{2x^2} + C}}$$

14.3 Berechnung vom bestimmten Integral - der orientierte Flächeninhalt

Samstag, 1. Januar 2022 19:56

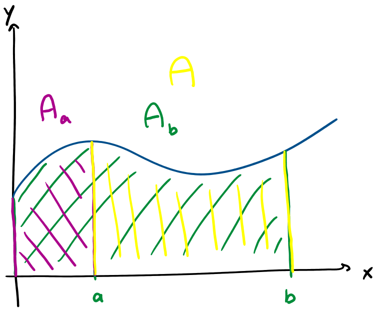
Sü, am 09.05.2022

14.3 Berechnung vom bestimmten Integral – der orientierte Flächeninhalt

Der Hauptsatz der Differenzial- & Integralrechnung

Voraussetzung: stetige Funktion im Intervall $[a;b]$:

$f(x) > 0$



$A = A_b - A_a$

Fläche von $[0;b] = F(b)$

Fläche von $[0;a] = F(a)$

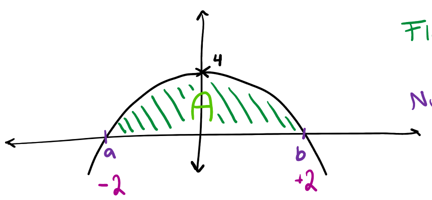
Fläche von $[a;b] = F(b) - F(a)$

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)}$$

Beispiele:

1. geg.: $f(x) = 4 - x^2$

   ges.: Flächeninhalt, der von der Kurve und der x-Achse eingeschlossen wird



Fläche oberhalb d. x-Achse

Nullstellen: Grenzen

↳ $f(x) = 0$

$x_1 = -2 \rightarrow a$

$x_2 = +2 \rightarrow b$

$$A = \int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2) \cdot dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{2} =$$

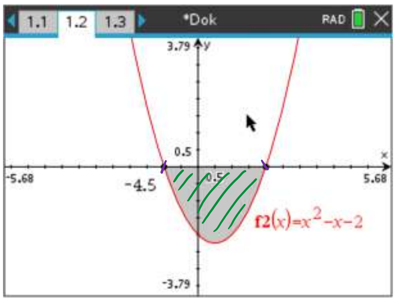
$= \int_{-2} (4-x^2)\cdot dx = 4x - \frac{\quad}{3}\Big|_{-2} =$

$= \left[4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] =$

„obere Grenze minus untere Grenze"

$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}\ FE}}$

2.: $f(x) = x^2 - x - 2$



Fläche unterhalb d. x-Achse

Grenzen: Nullstellen: $f(x)=0$

$x_1 = -1$
$x_2 = 2$

$A = \int_{-1}^{2} (x^2-x-2)\cdot dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = \underline{-4{,}5\ FE}$

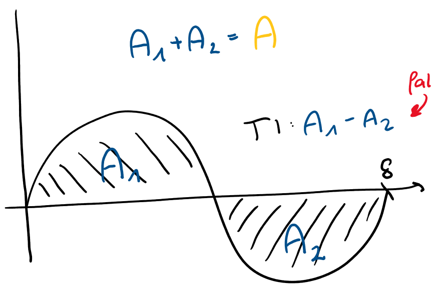
$A = \int_{2}^{-1} (x^2-x-2)\cdot dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{2}^{-1} = \underline{+4{,}5\ FE}$

Problem:

$A_1 + A_2 = A$

falsch (orientierter Flächeninhalt)

TI: $A_1 - A_2$



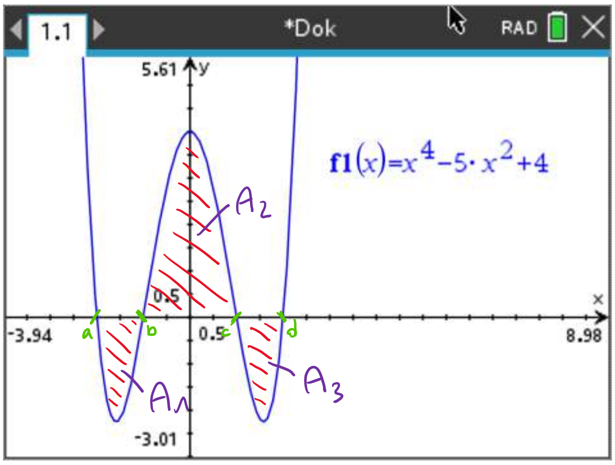
Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert sich das Vorzeichen des Flächeninhalts.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$$

Sü, am 10.05.2022

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

ges: Flächeninhalt, von $f(x)$ und x-A. eingeschlossen



Kurve teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse!

Grenzen: Nullstellen

$a = -2$
$b = -1$
$c = 1$
$d = 2$

$$A = \underbrace{\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right|}_{A_1} + \underbrace{\left| \int_b^c f(x) \cdot dx \right|}_{A_2} + \underbrace{\left| \int_c^d f(x) \cdot dx \right|}_{A_3}$$

$$A = \overbrace{\int_b^a f(x) \cdot dx} + \overbrace{\int_b^c f(x) \cdot dx} + \overbrace{\int_d^c f(x) \cdot dx}$$

$$A_1 = \int_{-1}^{-2} (x^4 - 5x^2 + 4) \cdot dx = \frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{-1}^{-2}$$

$$= \left[\frac{(-2)^5}{5} - 5\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - 5\frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right] =$$

$$= 1{,}4\dot{6} \text{ FE}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 5x^2 + 4) \cdot dx = \frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4\right] - \left[-\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 4\right] =$$

$= 5{,}0\dot{6}\ FE$

$$A_3 = \int_2^1 (x^4 - 5x^2 + 4) \cdot dx = \frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x \Big|_2^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right] - \left[\frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 8 \right] =$$

$= 1{,}4\dot{6}\ FE$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1{,}4\dot{6} + 5{,}0\dot{6} + 1{,}4\dot{6} = 8\ FE$$

SÜ, am 13.05.2022

7.5) a) $\int_a^b f(x) \cdot dx + \left| \int_b^c f(x) \cdot dx \right|$

7.5) b) $\int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot dt + \int_{t_3}^{t_2} g(t) \cdot dt$

7.5) c) $\int_b^a h(x) \cdot dx$

7.6) a) $a \cdot c - \int_0^a y \cdot dx$

b) $y = -x^2 + 9 = 0$

$x = \pm 3$

$$\int_0^3 (-x^2+9)\cdot dx = -\frac{x^3}{3} + 9x \Big|_0^3$$

$$= -\frac{3^3}{3} + 9\cdot 3 - 0 = -9 + 9\cdot 3 = 2\cdot 9 = \underline{\underline{18\ FE}}$$

c) $c = 0{,}5 \cdot 2^3 = \underline{\underline{4}}$

$$2\cdot 4 - \int_0^2 (0{,}5x^3)\cdot dx = 2\cdot 4 - \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 =$$

$$2\cdot 4 - \frac{2^4}{8} = \underline{\underline{6\ FE}}$$

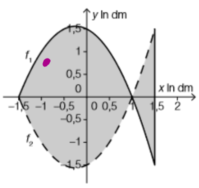
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pinboard

Aufgabennummer: A_037

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Es sollen Pinboards in Form eines Fisches angefertigt werden. Die obere und die untere Begrenzungslinie können durch die Funktionen f_1 und f_2 beschrieben werden:



Die Graphen von f_1 und f_2 sind symmetrisch bezüglich der x-Achse. Es gilt:

$f_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}\cdot x - \frac{3}{2}$ mit $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$

x, $f_1(x)$, $f_2(x)$ … Koordinaten in dm

a) – Erstellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt A des Fisches mithilfe von f_2.

$A = \left[\left|\int_{-1,5}^{1} (x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2})\cdot dx\right| + \int_{1}^{1,5} (x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2})\cdot dx\right]\cdot 2 =$

$$\left[\left|\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\Big|_{-1,5}^{1}\right| + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right)\Big|_{1}^{1,5}\right]\cdot 2 =$$

$$= \left[\left|\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2} - \left(-\frac{27}{24}+\frac{9}{16}+\frac{9}{4}\right)\right| + \left(\frac{27}{24}+\frac{9}{16}-\frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot 2 = \underline{\underline{5{,}916\ dm^2}}$$

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fisches.

b) – Argumentieren Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion f_2 nur eine lokale Extremstelle und keine Wendestelle hat.

Die Ableitung einer quadratischen Fkt ist linear, welche nur eine Nullstelle hat, und die Ableitung dieser Fkt ist constant und hat k. Nullstelle

c) Eine Begrenzungslinie eines anderen Pinboards kann durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f enthält die Punkte (–1,5|0), (0|1) und (1|0).

$f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.
– Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

I: $P(-1{,}5|0)$: $f(-1{,}5) = 0$: $0 = a\cdot(-1{,}5)^2 + b\cdot(-1{,}5) + c$
II: $P(0|1)$: $f(0) = 1$: $1 = c$
III: $P(1|0)$: $f(1) = 0$: $0 = a + b + c$

$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 2 \cdot \left(-\int_{-1,5}^{1} f_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{1,5} f_2(x)\,\mathrm{d}x\right)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$A = 5{,}91\overline{6}\ \mathrm{dm}^2 \approx 5{,}92\ \mathrm{dm}^2$

b) $f_2'(x) = 2 \cdot x + \frac{1}{2}$
$f_2''(x) = 2$

Die 1. Ableitung von f_2 ist eine lineare Funktion und hat somit genau eine Nullstelle. Diese ist die einzige lokale Extremstelle von f_2.

Eine Wendestelle von f_2 kann nur dort vorliegen, wo die 2. Ableitung von f_2 eine Nullstelle hat. Da f_2'' keine Nullstelle hat, kann f_2 keine Wendestelle haben.

c) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f(-1{,}5) = 0$ bzw. $a \cdot (-1{,}5)^2 + b \cdot (-1{,}5) + c = 0$
$f(0) = 1$ bzw. $c = 1$
$f(1) = 0$ bzw. $a + b + c = 1$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{2}{3},\ b = -\frac{1}{3},\ c = 1$
$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x + 1$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

4.185) b)

$p(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ $\quad x_0 = 2;\ y_0 = 3$

4.185) b)

$p(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \qquad x_0 = 2;\ y_0 = 3$

1) Linearisieren bei x_0

2) Intervall: Fehler $\leq 2\%$

$t: \ y = kx + d$

$k = p'(2)$

$\underline{\underline{k = 1}}$

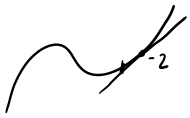
$p'(x) = 1{,}5x^2 - 4x + 3$

$p'(2) = 6 - 8 + 3 = \underline{\underline{1}}$

$d = y - kx$

$d = 3 - 1 \cdot 2 = \underline{1}$

$\underline{\underline{t: \ y = x + 1}}$



2) $\left| \dfrac{p(a) - t(a)}{p(a)} \right| \cdot 100\% \leq 2$

3) Wie groß ist d. Fehler bei $x = 3$?

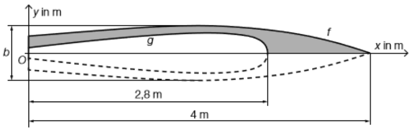
$\left| \dfrac{p(3) - t(3)}{p(3)} \right| \cdot 100\% = \left| \dfrac{5{,}5 - 4}{5{,}5} \right| \cdot 100 = 27{,}\overline{27}\%$

$\underline{\underline{27\%}}$

Stand-up-Paddling (1)

Stand-up-Paddling ist eine Wassersportart, bei der man aufrecht auf einem Board steht und paddelt.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Entwurf für ein zweifärbiges Board in der Ansicht von oben dargestellt.



1) Stellen Sie mithilfe der Funktionen f und g eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$A = \int_0^4 f(x)\cdot dx - \int_0^{2,8} g(x)\cdot dx$ *[0/1 P.]*

Der Entwurf ist symmetrisch bezüglich der x-Achse.
Für die Funktion f gilt:

$f(x) = -0{,}0125 \cdot x^3 + 0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}07 \cdot x + 0{,}2 \quad \text{mit} \quad 0 \le x \le 4$

2) Berechnen Sie die maximale Breite b des Boards. *[0/1 P.]*

Extrempunkt:

$f'(x) = -0{,}0375x^2 + 0{,}04x + 0{,}07$

$f'(x) = 0$

TI: solve => $(x_1 = -0{,}9\dot{3})$ $\underline{x_2 = 2}$

$\underline{f(2) = 0{,}32}$

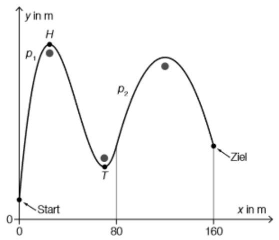
$b = 2 \cdot 0{,}32 = \underline{0{,}64}$

A: Die maximale Breite beträgt 64 cm.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

SRDP
Standardisierte
Reife- und Diplomprüfung

b) Barbaras Stand-up-Paddling-Trainingsstrecke verläuft um 3 Bojen herum (siehe nachstehende Abbildung).



In einem Modell kann der Verlauf von Barbaras Trainingsstrecke durch die Graphen der Funktionen p_1 und p_2 beschrieben werden.

Es gilt:

$p_1'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$p_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad \text{mit} \quad 0 \le x < 80$

Die Punkte $H = (25|200)$ und $T = (70|60)$ sind Extrempunkte des Graphen der Funktion p_1.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu H und T ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d. *[0/1/2 P.]*

I: $p(25) = 200$
II: $p(70) = 60$
III: $p'(25) = 0$
IV: $p'(70) = 0$

Der Graph der quadratischen Funktion p_2 beschreibt den Verlauf von Barbaras Trainingsstrecke für $80 \le x \le 160$ (siehe obige Abbildung).

2) Kreuzen Sie diejenige Ungleichung an, die auf die Funktion p_2 nicht zutrifft. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$p_2'(150) < 0$	☐
$p_2'(90) > 0$	☐
$p_2''(90) > 0$	☐
$p_2(150) > 0$	☐
$p_2''(150) < 0$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{2,8} g(x)\,\mathrm{d}x$

a2) Berechnung der Extremstellen von *f* mittels Technologieeinsatz:

$f'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0375 \cdot x^2 + 0{,}04 \cdot x + 0{,}07 = 0$
$x_1 = 2$ $(x_2 = -0{,}933...)$
$f(2) = 0{,}32$
$b = 2 \cdot f(2)$
$b = 0{,}64$ m

In der Abbildung ist erkennbar, dass der Hochpunkt von f an der Stelle x_1 ist. Ein (rechnerischer) Nachweis, dass x_1 eine Maximumstelle ist, und eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der maximalen Breite *b*.

b1) $p_1'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $p_1(25) = 200$
II: $p_1(70) = 60$
III: $p_1'(25) = 0$
IV: $p_1'(70) = 0$

oder:

I: $15625 \cdot a + 625 \cdot b + 25 \cdot c + d = 200$
II: $343000 \cdot a + 4900 \cdot b + 70 \cdot c + d = 60$
III: $1875 \cdot a + 50 \cdot b + c = 0$
IV: $14700 \cdot a + 140 \cdot b + c = 0$

b2)

$p_2''(90) > 0$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *H* und *T*.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Sü, am 23.05.2022

Kleingartensiedlung

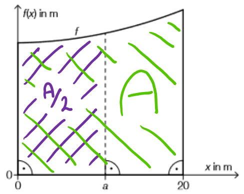
a) In einem Plan ist ein Grundstück durch 3 gerade Seiten und durch den Graphen der Funktion f begrenzt (siehe unten stehende Abbildung).

$f(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 16 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 20$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

Das Grundstück soll so halbiert werden, dass 2 Kleingärten mit gleich großem Flächeninhalt entstehen.

Die Halbierung soll – wie in der nachstehenden Abbildung dargestellt – an der Stelle a erfolgen.



1) Berechnen Sie die Stelle a. [0/1/2 P.]

$$A_{ges} = \int_0^{20} f(x) \cdot dx = \frac{0{,}01x^3}{3} + \frac{0{,}01x^2}{2} + 16x \Big|_0^{20} =$$

$$= \left[\frac{0{,}01 \cdot 20^3}{3} + \frac{0{,}01 \cdot 20^2}{2} + 16 \cdot 20\right] - [0] = \underline{348{,}\dot{6} \text{ FE}}$$

$$A_{halb} = \frac{A_{ges}}{2} = \underline{174{,}\dot{3} \text{ FE}}$$

$$174{,}\dot{3} = \int_0^{a} f(x) \cdot dx = \frac{0{,}01x^3}{3} + \frac{0{,}01x^2}{2} + 16x \Big|_0^{a} =$$

$$174{,}\dot{3} = \left[\frac{0{,}01}{3}a^3 + \frac{0{,}01}{2}a^2 + 16a\right] - [0]$$

$$\underline{\underline{a = 10{,}611\ldots \text{ m}}}$$

b) Ein Gartenhaus mit einem Pultdach hat eine rechteckige Grundfläche mit den Seiten a und b (siehe nachstehende Abbildungen).

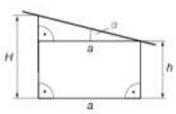


Abbildung 1

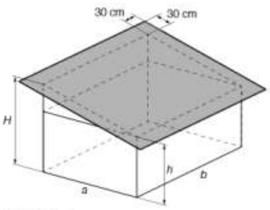


Abbildung 2

a, b, h, H ... Längen in cm

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe H auf. Verwenden Sie dabei a und h sowie den Winkel α.

$H =$ ________________________ [0/1 P.]

In der obigen Abbildung 2 ist das Pultdach als graues Rechteck dargestellt, das auf allen 4 Seiten jeweils gleich weit über den Rand reicht.

2) Kreuzen Sie den richtigen Ausdruck für den Inhalt der Fläche des grauen Rechtecks an. [1 aus 5] [0/1 P.]

$b \cdot \sqrt{(H-h)^2 - a^2} + 60 \cdot 60$	☐
$\sqrt{(H-h+a)^2} \cdot (b+60)$	☐
$\left(\sqrt{(H-h)^2 + a^2} + 60\right) \cdot (b+60)$	☐
$60 \cdot b + \sqrt{H^2 - h^2 + a^2} \cdot b$	☐
$(60 + (H^2 - h^2 + a^2)) \cdot b$	☐

Möglicher Lösungsweg

Kleingartensiedlung

a1) $\frac{1}{2} \cdot \int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = 174{,}3...$

$\int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 174{,}3...$

oder:

$\int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 10{,}61...$

a1) Ein Punkt für den richtigen Ansatz.
Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.

b1) $H = h + a \cdot \tan(\alpha)$

b2)

$\left(\sqrt{(H-h)^2 + a^2} + 60\right) \cdot (b + 60)$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

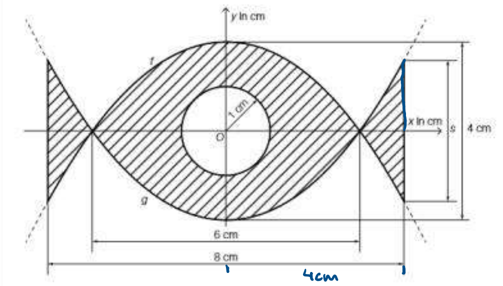
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schmuckstück

Aufgabennummer: A_064

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Schmuckstück wird gemäß nachstehender Skizze in den schraffierten Teilen mit Blattgold belegt.



Die Begrenzungslinien der Blattgoldfläche sind außen die Graphen der Funktionen f und g und innen ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

$f(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^2 + 2$

$g(x) = -f(x)$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

a) – Berechnen Sie die Länge s (siehe obige Abbildung). $2 \cdot |f(4)| = s$

b) – Berechnen Sie den Inhalt der mit Blattgold belegten Fläche.

$A = \left[\int_{-4}^{-3} g(x) \cdot dx + \int_{-3}^{3} f(x) \cdot dx + \int_{3}^{4} g(x) \cdot dx \cdot 2\right] - \pi$

c) Die Blattgoldfläche soll vertikal um insgesamt 1 cm verbreitert werden. Die beiden Koordinatenachsen als Symmetrieachsen sowie die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen bleiben unverändert.
Die nach unten offene Parabel, die eine Begrenzungslinie der so veränderten Blattgoldoberfläche bildet, ist der Graph der Funktion f_{neu}.

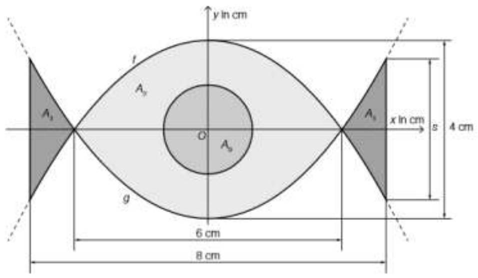
– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_{neu} auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s = 2 \cdot g(4) \approx 3{,}1$ cm

b)



$A_1 = \int_{-4}^{-3} [g(x) - f(x)]\,dx = 1{,}48...$
$A_2 = \int_{-3}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx = 16$
$A_3 = r^2 \cdot \pi = 1^2 \cdot \pi = \pi = 3{,}14...$

$A = 2 \cdot A_1 + A_2 - A_3 = 15{,}82...$

Man benötigt Blattgold für eine Fläche von rund 15,82 cm².

c) $f_{neu}(x) = a \cdot x^2 + b$

$f_{neu}(0) = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad b = 2{,}5$
$f_{neu}(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 3^2 + 2{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{5}{18}$
$f_{neu}(x) = -\frac{5}{18} \cdot x^2 + 2{,}5$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	**Punkteanzahl:**
a) leicht	a) 1
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 2

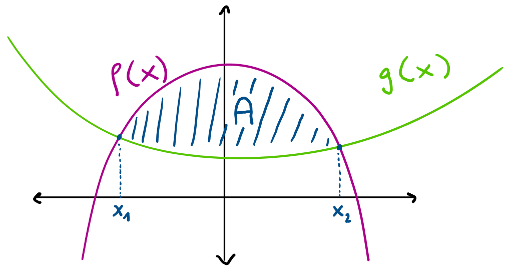
Thema: Sonstiges

Quellen: —

Sü, am 24.05.2022

Flächeninhalt zwischen 2 Kurven

Skizze:

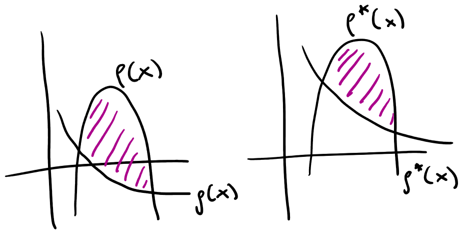


$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \ldots \text{ Schnittstellen} \\ f(x) = g(x) \\ x_1 = \ldots \\ x_2 = \ldots \end{array}\right\} \text{Grenzen}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x) \right] \cdot dx$$

„OBERE - UNTERE KURVE"

Wenn die Funktionen im angegebenen Intervall Nullstellen haben, dann ist das für die Flächenberechnung zwischen den beiden Kurven nicht relevant.



$f^*(x) = f(x) + 5$

$g^*(x) = g(x) + 5$

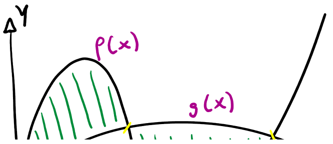
↑ fällt weg

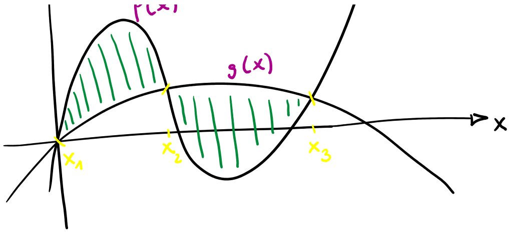
Beispiel: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$g(x) = -0{,}5x^2 + 2x$

ges.: Flächeninhalt zwischen d. Kurven

Überlegung (Daumen × Pi):





$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{x_2}^{x_3} [g(x) - f(x)] \cdot dx$$

Schnittstellen: $x_1 = 0$
$x_2 = 2$
$x_3 = 3{,}5$

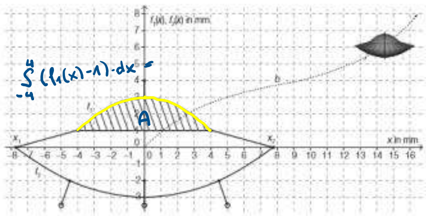
$\underline{A = 4{,}88 \text{ FE}}$

Bundesinstitut **bifie**
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

UFO

Aufgabennummer: A_188		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Für ein Computerspiel wurde ein einfaches UFO konstruiert.



Die obige Abbildung zeigt eine Querschnittsfläche des UFOs. In dieser werden die Kuppel und der Unterbau durch die quadratischen Funktionen f_1 und f_2 modelliert.

$f_2(x) = \frac{x^2}{20} - 3$ $\rightarrow = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{20}}$

$x, f_2(x)$ ... Koordinaten in Millimetern

a) – Stellen Sie mithilfe der Abbildung eine Funktionsgleichung von f_1 auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche in der obigen Abbildung.

$\underline{f_1(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 3}$

b) – Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_1 und x_2 der Funktion f_2. $f_2(x) = 0$
– Interpretieren Sie, was durch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx$ bestimmt wird.

Das ergibt die Fläche zwischen f_2 und x-Achse (in negativ).

c) Die Steigung der dargestellten Flugbahn b des UFOs erhält man durch folgende Ableitungsfunktion: $b'(x) = \frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1$

$b(x) = \int b'(x) \cdot dx = \frac{x^3}{240} - \frac{x^2}{10} + x + C$

x ... Strecke in Millimetern (mm) mit $x \geq 0$
$b'(x)$ ... Steigung des Funktionsgraphen b an der Stelle x

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der entsprechenden Funktion b.

Folgende Gleichung wurde mithilfe der Ableitung von b' aufgestellt: $\frac{x}{40} - \frac{1}{5} = 0$ $= b''(x) = 0$

– Interpretieren Sie, was durch die Lösung dieser Gleichung bestimmt wird.

Wendestelle der Funktion b.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

$f_1(x) = a \cdot x^2 + 3$

$P(4|1)$: $f_1(4) = 1 = 16a + 3$

$\underline{a = -\frac{1}{8}}$

$$\int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{8}x^2 + 3 - 1\right) \cdot dx = \int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{8}x^2 + 2\right) \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{24}x^3 + 2x \Big|_{-4}^{4} = \left[-\frac{1}{24}4^3 + 2 \cdot 4\right] - \left[-\frac{1}{24}(-4)^3 + 2 \cdot (-4)\right] =$$

$$-\frac{64}{24} + 8 - \left[+\frac{64}{24} - 8\right] = -\frac{128}{24} + 16 = \underline{\underline{10{,}\dot{6} \text{ FE}}}$$

Möglicher Lösungsweg

a) $f_1(x) = a \cdot x^2 + 3$. Einsetzen eines Punktes ergibt $a = -\frac{1}{8}$.

$2 \cdot \left(\int_0^4 f_1(x)\,\mathrm{d}x - 4\right) = 10{,}66\ldots$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt rund 10,7 mm².

b) Aus $0 = \frac{x^2}{20} - 3$ folgt $x_{1,2} = \pm\sqrt{60} \approx \pm 7{,}75$.

Das Integral entspricht dem negativen Wert der Fläche zwischen x-Achse und dem Funktionsgraphen von f_2.

c) $b(x) = \int \frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{240} - \frac{x^2}{10} + x + C$, wobei die Konstante $C = 0$, da die dargestellte Funktion durch den Ursprung geht.

Die gegebene Gleichung entspricht $b''(x) = 0$. Die Lösung ist die x-Koordinate des Wendepunkts.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analyse

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analyse
b) 4 Analyse
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Sü, am 30.05.2022

7.22)

1. Tangente legen

$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$P(3 | y_P)$

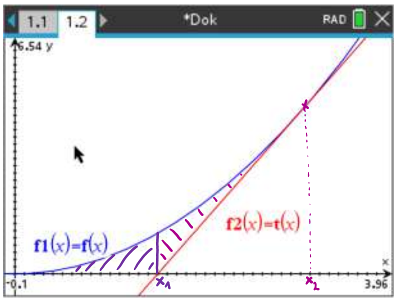
$k = p'(3) = 3$

$\hookrightarrow P(3 | 4,5)$

$d = y_P - k \cdot x_P = 4,5 - 3 \cdot 3 = -4,5$

$t: \; y = 3x - 4,5$

2. Zeichnung:



$$A = \int_0^{x_1} p(x) \cdot dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[p(x) - t(x) \right] \cdot dx$$

x_1: $3x - 4,5 = 0$

$3x = 4,5$

$x = 1,5$

$$A = \int_0^{1,5} \frac{1}{2}x^2 \, dx + \int_{1,5}^{3} \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4,5 \right] \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{6} \Big|_0^{1,5} + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 4,5x \Big|_{1,5}^{3} =$$

$= 1,125$ FE

14.4 weitere Grundintegrale

Montag, 5. September 2022 16:10

14.4 WEITERE GRUNDINTEGRALE

→ $$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$$

→ $$\int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

→ $$\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot dx = \tan(x) + C$$

14.5 INTEGRATIONSMETHODEN

1. Substitutionsmethode (→ Ersetzen)

Man ersetzt einen Ausdruck (Term) durch eine Hilfsvariable, damit man ein Grundintegral erhält.

wird zu Hilfsvariable

z.B.: $\int e^{\boxed{2x+1}} \cdot \underline{dx}$

Substitution: $u = 2x + 1$ ...... beide Seiten nach x ableiten

$\frac{du}{dx} = 2$

$\underline{dx} = \frac{du}{2}$

$$\stackrel{\circ}{=} \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int e^u \cdot du = \frac{1}{2} \cdot e^u + C$$

Rücksubtitution:

$$\underline{\frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} + C}$$

$\int \sin(\boxed{2x}) \cdot dx$

Substitution: $u = 2x$

$\frac{du}{dx} = 2$

$dx = \frac{du}{2}$

$$\stackrel{\circ}{=} \int \sin(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int \sin(u) \cdot du = -\frac{1}{2} \cdot \cos(u) + C$$

Rücksubstitution:

$$-\frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + C$$

Sü, am 03.06.2022

bestimmtes Integral:

z.B.:

$$\int_1^3 (2x+1)^3 \cdot dx$$

1. Möglichkeit: zuerst unbestimmt integrieren

$\int (2x+1)^3 \cdot dx \stackrel{\circ}{=}$

$u = 2x+1$ | differenzieren

$\frac{du}{dx} = 2$

$dx = \frac{du}{2}$

$$\stackrel{\circ}{=} \int u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot (2x+1)^4$$

jetzt Grenzen einsetzen

$$\frac{1}{8} (2x+1)^4 \Big|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 7^4 - \frac{1}{8} \cdot 3^4 = \underline{290\ FE}$$

$$\frac{1}{8}(2x+1)^4\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 7^4 - \frac{1}{8}\cdot 3^4 = \underline{290\ FE}$$

2. Möglichkeit: Grenzen werden mitsubstituiert

$$\int_1^3 (2x+1)^3 \cdot dx =$$

$$u = 2x+1$$
$$dx = \frac{du}{2}$$

$$x_u = 1 \qquad u_u = 2\cdot 1+1 = 3$$
$$x_o = 3 \qquad u_o = 2\cdot 3+1 = 7$$

$$= \int_3^7 u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_3^7 =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 7^4 - \frac{1}{8}\cdot 3^4 = \underline{\underline{290\ FE}}$$

---

z.B.:

$$\int_2^4 \left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)\cdot dt =$$

$$u = -\frac{t}{2}$$
$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}$$
$$dt = -2du$$

$$x_u = 2 \qquad u_u = -1$$
$$x_o = 4 \qquad u_o = -2$$

$$= \int_{-1}^{-2} (1-e^u)\cdot -2du = -2\cdot(u-e^u)\Big|_{-1}^{-2} =$$

$$= \left[-2\cdot(-2-e^{-2})\right] - \left[-2\cdot(-1-e^{-1})\right] =$$

$$= \underline{\underline{1{,}534\ldots\ FE}}$$

---

z.B.:

$$\int_0^1 \frac{t^2}{2t^3+1}\cdot dt$$

$$u = 2t^3+1 \qquad |\text{differenzieren}$$
$$\frac{du}{dt} = 6t^2$$
$$dt = \frac{du}{6t^2}$$

Wenn t nicht kürzen fehlt dann funktioniert das Substitutionsverfahren nicht!

$$\int \frac{\cancel{t^2}}{u}\cdot\frac{dt}{6\cancel{t^2}} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\cdot du = \frac{1}{6}\cdot \ln|u| =$$

$$\frac{1}{6}\cdot\ln|2t^3+1|\Big|_0^1 = \underline{\underline{0{,}183\ldots\ FE}}$$

SÜ, am 13.06.2022

$$\int \tan(x) \cdot dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot dx \;=$$

Subst.: $u = \sin(x)$

$$\frac{du}{dx} = \cos(x)$$

$$dx = \frac{du}{\cos(x)}$$

$$= \int \frac{u}{\cos^2(x)} \cdot du \longrightarrow \text{geht nicht}$$

Subst.: $u = \cos(x)$

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x)$$

$$dx = \frac{du}{-\sin(x)}$$

$$= -\int \frac{\sin(x)}{u} \cdot \frac{du}{\sin(x)} = -\int \frac{1}{u} \cdot du =$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \tan(x) \cdot dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

2. Partielle Integration (Produktintegration)

$$\boxed{\int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx}$$

u sollte so gewählt werden, dass die Ableitung einfacher wird.

Bsp.: $\int x \cdot \cos(x) \cdot dx \;=$

2 Funktionen

$u = x \xrightarrow{d} u' = 1$

$v' = \cos(x) \xrightarrow{\int} v = \sin(x)$

$$= x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) =$$

$$= x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$$

Warum das nicht funktioniert:

$$u = \cos(x) \xrightarrow{d} -\sin(x)$$
$$v' = x \xrightarrow{\int} \frac{x^2}{2}$$

$$\ominus \cos(x) \cdot \frac{x^2}{2} + \int \sin(x) \cdot \frac{x^2}{2} \cdot dx \quad ?$$

¿?

~.

Sü, am 14.06.2022

6.104) a)

$$\int x^2 \cdot \sin(x) \cdot dx \ominus$$

partielle (teilweise) Integration:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$u = x^2 \xrightarrow{d} u' = 2x$$
$$v' = \sin(x) \xrightarrow{\int} v = -\cos(x)$$

$$\ominus -x^2 \cdot \cos(x) + \int 2 \cdot x \cdot \cos(x) \cdot dx =$$

$$= -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot \int x \cdot \cos(x) \cdot dx \ominus$$

$$u = x \xrightarrow{d} u' = 1$$
$$v' = \cos(x) \xrightarrow{\int} v = \sin(x)$$

$$\ominus -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot \left[x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \cdot dx\right] =$$

$$= -x^2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) + C$$

6.106) a)

$$\int \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot dt \ominus \qquad \int uv' = uv - \int u'v$$

$$u = \sin(t) \xrightarrow{d} u' = \cos(t)$$
$$v' = \cos(t) \xrightarrow{\int} v = \sin(t)$$

$$\ominus \sin(t) \cdot \sin(t) - \int \cos(t) \cdot \sin(t) \cdot dt$$

$$\boxed{\int \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot dt} = \sin^2(t) - \boxed{\int \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot dt} \qquad | + \int \ldots$$

$$2 \cdot \int \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot dt = \sin^2(t) \qquad | : 2$$

$$\int \sin(t)\cdot\cos(t)\cdot dt = \underline{\underline{\frac{\sin^2(t)}{2} + C}}$$

Gemischte Integration (Par + Sub)

6.107) d)

$$\int x \cdot \cos(2x) \cdot dx \;=$$

$$u = x \xrightarrow{d} u' = 1$$

$$v' = \cos(2x) \xrightarrow[\text{Substitution}]{\int} v = \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)$$

$$\int \cos(2x)\cdot dx \;\boxed{=}$$

$$o = 2x \qquad \frac{do}{dx} = 2 \qquad dx = \frac{do}{2}$$

$$\boxed{=} \int \cos(o) \cdot \frac{do}{2} =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)}$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\sin(2x) - \frac{1}{2}\cdot\int \sin(2x)\cdot dx =$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\sin(2x) - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(2x)$$

$$= \underline{\underline{\frac{x}{2}\cdot\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)}}$$

Bsp.:

$$\int \ln(x)\cdot dx = \int 1\cdot\ln(x)\cdot dx \;=$$

$$u = \ln(x) \xrightarrow{d} u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\int} v = x$$

$$= \ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x \cdot dx =$$

$$= \underline{\underline{\ln(x)\cdot x - x + C}}$$

$$\boxed{\int \ln(x)\cdot dx = x\cdot[\ln(x) - 1] + C}$$

SÜ, am 24.06.2022

6.113) c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot dx \;\boxed{=}$$

Partielle Integration:

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$u = e^{2x} \xrightarrow{d} u' = 2 \cdot e^{2x}$$
$$v' = \sin(x) \xrightarrow{\int} v = -\cos(x)$$

$$\boxed{=} -e^{2x} \cdot \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \cos(x) \cdot dx \;\circleddash$$

PARTIELLE INTEGRATION

$$u = e^{2x} \xrightarrow{d} u' = 2 \cdot e^{2x}$$
$$v' = \cos(x) \xrightarrow{\int} v = \sin(x)$$

$$\circleddash\; -e^{2x} \cdot \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cdot \left[e^{2x} \cdot \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot dx \right] =$$

$$= -e^{2x} \cdot \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \boxed{4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot dx} = \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot dx} \qquad \Big| + 4 \cdot \int$$

$$= \left(-e^{2x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin(x)\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot dx \qquad \Big| : 5$$

$$= \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \left(-e^{2x} \cdot \boxed{\cos(x)} + 2 \cdot e^{2x} \cdot \boxed{\sin(x)}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\text{Ergebnis in FE}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot dx$$

$\boxed{\text{RAD}}$

$$= 9{,}456\ldots \text{ FE}$$

September

Dienstag, 7. September 2021 07:43

2. Woche

Dienstag, 7. September 2021 08:03

Säulendiagramm → siehe SÜ

10.23 Bei einer Prüfung erreichten die Kandidaten folgende Punktezahlen: 22 15 9 18 12 23 25 17 16 12 19 21 20 3 19 20 14 16 16 22 23 9 11
1) Berechne das arithmetische Mittel.
2) Ermittle den Median sowie die Quartile q_1 und q_3.

$$\bar{x} = \frac{22+15+9+\dots+23+9+11}{23}$$

$\bar{x} = 16{,}6087\dots$ A: Die durchschnittliche Punktezahl beträgt 16,608.

3, 9, 9, 11, 12, 12, 14, 15, 16, 16, 16, 17, 19, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 23, 25

$q_1 = 12$ $q_2 = 17$ $q_3 = 21$

10.26 An einer belebten Kreuzung wurde an 10 aufeinander folgenden Tagen die Anzahl der Fahrzeuge zwischen 16:00 Uhr und 17:00 Uhr erhoben:
958 789 846 912 1 634 903 755 871 804 923
1) Gib an, ob das arithmetische Mittel oder der Median zur Beschreibung der Daten besser geeignet ist. Begründe deine Antwort.
2) Ermittle das gewählte Lagemaß.

Median, weil dieser 1 634 (Ausreißer) nicht berücksichtigt

755, 789, 804, 846, 871, 903, 912, 923, 958, 1 634

$\tilde{x} = \bar{x}(871, 903) = \underline{\underline{887}}$

10.29 In einer KFZ-Werkstätte wurde eine Stichprobe über den Zeitaufwand bei der Reparatur eines bestimmten Schadens erhoben (Angaben in Stunden):
2,2 3,5 4,1 2,3 1,8 0,9 2,2 3,1 1,9 2,7
Ermittle den Median, die Spannweite, das arithmetische Mittel und die Varianz.

0,9; 1,8; 1,9; 2,2; 2,2; 2,3; 2,7; 3,1; 3,5; 4,1

$\tilde{x} = \underline{\underline{2{,}25}}$ $\bar{x} = \underline{\underline{2{,}47}}$ A: Der Median ist 2,25 Stunden, das AM ist 2,47h

$$s^2 = \frac{(0{,}9-2{,}47)^2 + (1{,}8-2{,}47)^2 + \dots + (3{,}5-2{,}47)^2 + (4{,}1-2{,}47)^2}{10}$$

$s^2 = 0{,}7581$

$s = \sqrt{0{,}7581} = \underline{\underline{0{,}87068\dots}}$

$\underline{\underline{R = 3{,}2}}$

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Mathematikwettbewerb*

Aufgabennummer: A_148		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Eine Schülergruppe hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen.

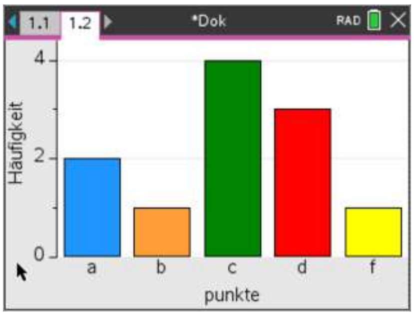
a) Die 12 Burschen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

32; 38; 40; 52; 53; 54; 56; 60; 61; 64; 66; 84

Nun sollen die Ergebnisse übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird die folgende Klasseneinteilung verwendet:

A	30 bis 39
B	40 bis 49
C	50 bis 59
D	60 bis 69
E	70 bis 79
F	80 bis 89

– Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Klassen *A* bis *F* dargestellt sind.



b) Das arithmetische Mittel und der Median für die Punktezahlen der Burschen betragen 55 Punkte.
Die 12 Mädchen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

37; 38; 44; 53; 54; 57; 59; 60; 61; 62; 63; 65

Die Mädchen behaupten, dass sie sowohl beim arithmetischen Mittel als auch beim Median eine größere Punktezahl als die Burschen erreicht haben.

– Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob diese Behauptung richtig ist.

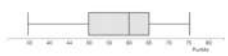
$\tilde{x} = \frac{57+59}{2} = 58$ Punkte

$\bar{x} = \frac{37+38+\ldots+63+65}{12} = 54{,}41\dot{6}\ldots$ Punkte

A: Damit haben die Mädchen Unrecht weil das arithmetische Mittel ca 54,5 beträgt

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Punkteverteilung einer anderen Schülergruppe ist in dem nachstehenden Boxplot dargestellt.

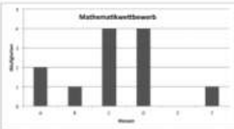


– Lesen Sie ab, wie viel Prozent der Schüler/innen mindestens 50 Punkte erreicht haben. 75% (q_1)
– Ermitteln Sie die Spannweite der Punktezahlen. 40 Punkte

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Punktezahlen der Mädchen:
– arithmetisches Mittel: 54,4 Punkte
– Median: 58 Punkte

Die Behauptung ist also falsch.

c) Die Punktezahl 50 ist das 1. Quartil. Das heißt: 75 % der Schüler/innen haben mindestens 50 Punkte erreicht.

Spannweite: 75 – 35 = 40.
Die Spannweite beträgt 40 Punkte.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A für das richtige Erstellen des Säulen- oder Balkendiagramms mit korrekter Beschriftung
b) 1 × D für die richtige Überprüfung der Behauptung
c) 1 × C für das richtige Ablesen des Prozentsatzes
1 × B für das richtige Ermitteln der Spannweite

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Orangen

Aufgabennummer: A_220

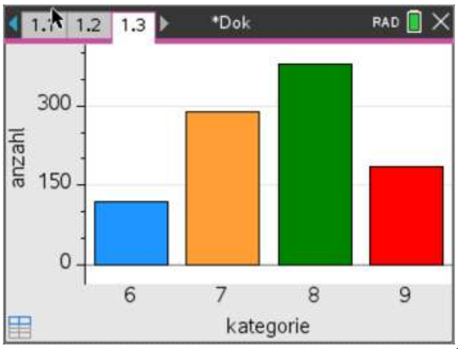
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

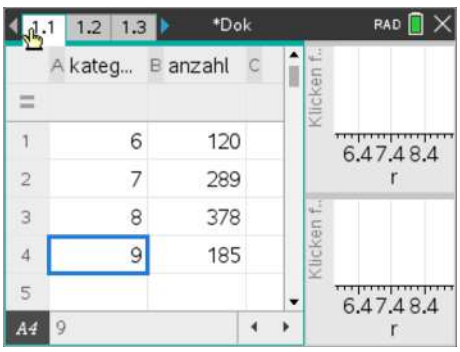
a) Ein Orangenbauer teilt die Früchte einer Ernte nach ihrem Durchmesser ein.
Orangen mit einem Durchmesser von weniger als 6 cm und einem Durchmesser ab 10 cm bleiben unberücksichtigt.

Durchmesser d in cm	Anzahl der Orangen
$6 \leq d < 7$	120
$7 \leq d < 8$	289
$8 \leq d < 9$	378
$9 \leq d < 10$	185

→ 972

– Erstellen Sie ein Säulendiagramm, das die Anzahl der Orangen pro Klasse darstellt.
– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Durchmesser aller Orangen.
(Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.) 8,14609... cm ✓





b) Frisch gepresster Orangensaft hat gewöhnlich einen Vitamin-C-Gehalt von 50 Milligramm pro Deziliter (mg/dl).
1 L frisch gepresster Orangensaft wird mit 500 ml Wasser verdünnt. 1,5 L ... 500 mg ✓

– Berechnen Sie die Vitamin-C-Menge in Milligramm, die in 0,3 L des verdünnten Orangensafts enthalten ist.
↳ 100 mg ✓

c) Der Abbau von Vitamin C im menschlichen Körper kann annähernd durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit in Tagen nach der Aufnahme
$N(t)$ ... Vitamin-C-Menge im Körper zur Zeit t in mg
$k > 0$ ... Konstante
N_0 ... Vitamin-C-Menge im Körper zur Zeit $t = 0$ in mg

Im Körper einer bestimmten Person wird in den ersten 6 Tagen nach der Aufnahme etwa ein Achtel der aufgenommenen Vitamin-C-Menge abgebaut.

– Ermitteln Sie den Parameter k.

$\frac{7}{8} = 1 \cdot e^{-k \cdot 6}$

$\frac{7}{8} = e^{-k \cdot 6}$

$\ln\left(\frac{7}{8}\right) = -k \cdot 6$

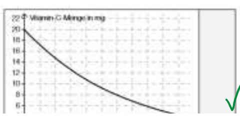
$-k \cdot 6 = -0{,}1335$

$-k = -0{,}022255...$

$k = 0{,}02225$ ✓

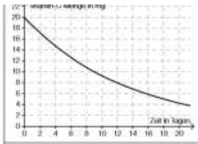
Die Halbwertszeit von Vitamin C im menschlichen Körper variiert sehr stark.

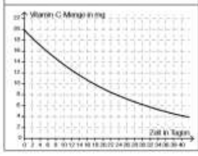
– Ordnen Sie den beiden Grafiken jeweils die korrekte Halbwertszeit aus A bis D zu.
[2 zu 4]



A	18 Tage

✓



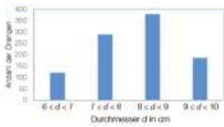


A	18 Tage
B	20 Tage
C	9 Tage
D	40 Tage

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\bar{x} = \frac{6,5 \cdot 120 + 7,5 \cdot 289 + 8,5 \cdot 378 + 9,5 \cdot 185}{972} = 8,14...$

$\bar{x} \approx 8,1$ cm

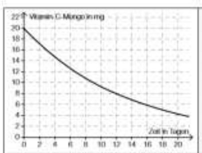
b) 1,5 L verdünnter Orangensaft ... 500 mg Vitamin C
0,3 L verdünnter Orangensaft ... x mg Vitamin C

$x = \frac{0,3}{1,5} \cdot 500 = 100$

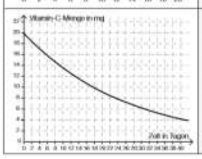
0,3 L des verdünnten Orangensafts enthalten 100 mg Vitamin C.

c) $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$
$0,875 = e^{-6 \cdot k}$

Durch Umformung auf $k = \frac{\ln(0,875)}{-6}$ oder Lösen der Gleichung mit Technologieeinsatz erhält man k.
$k = 0,02225... \approx 0,0223$



C



A

A	18 Tage
B	20 Tage
C	9 Tage
D	40 Tage

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 1 Zahlen und Maße
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	**Punkteanzahl:**
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.vitalstoff-lexikon.de/Vitamine-A-C-D-E-K/Vitamin-C/

4. Woche

Dienstag, 7. September 2021 08:11

1.37) b)

1.39) 1)

1.62) b)

1.37 Von einer arithmetischen Folge kennt man zwei Glieder. Gib ein Bildungsgesetz an.
a) $a_6 = 8,\ a_9 = 14$ **b)** $a_{17} = 55,\ a_{28} = 11$ **c)** $a_{38} = 24,\ a_{54} = 36$

AF: $a_{17} = 55$
$a_{28} = 11$

$$\boxed{a_n =} \cancel{a_1} + 16 \cdot d = 55$$
$$a_n = \cancel{a_1} + 27 \cdot d = 11$$
$\ominus$

$$-11d = 44$$
$$\underline{d = -4} \checkmark$$

$d = -4$ in I: $a_1 + 16 \cdot (-4) = 55 \quad | +64$

$$\underline{a_1 = 119} \checkmark$$

$$\underline{\underline{a_n = 119 - (n-1) \cdot 4}} \checkmark \quad = 123 - 4n$$

1.39 Die Längen der Seiten und die Länge der Diagonalen eines Rechtecks bilden eine arithmetische Folge. Berechne die fehlenden Längen.
1) längere Seite: 70 cm **2)** kürzere Seite: 243 mm **3)** Diagonale: 172 m

AF: $a_2 = 70\text{cm}$

$$a_3 = \sqrt{a_2^2 + a_1^2}$$

$\text{I}:\quad a_3 = \sqrt{70^2 + a_1^2}$

$\text{II}:\quad a_3 - 70 = 70 - a_1 \qquad | +70$

$$a_3 = 140 - a_1$$

$$a_3^2 = 70^2 + a_1^2$$

$$(140 - a_1)^2 = 70^2 + a_1^2$$

$$19600 - 280a_1 + \cancel{a_1^2} = 70^2 + \cancel{a_1^2} \qquad | +280a_1 \; -70^2$$

$$14700 = 280a_1 \qquad | :280$$

$$\underline{\underline{a_1 = 52{,}5}} \checkmark$$

$$a_3 = 70 + (70 - 52{,}5)$$

$$\underline{\underline{a_3 = 87{,}5}} \checkmark$$

↳ Beweis: $\sqrt{52{,}5^2 + 70^2} = 87{,}5$ ✓

1.62 Von einer geometrischen Folge kennt man ein Glied und den Quotienten q. Berechne die ersten fünf Glieder dieser Folge und das erste Folgeglied, das größer als 10^9 ist.

a) $b_6 = 11\,664$, $q = 3$ **b)** $b_8 = 312\,500$, $q = 5$ **c)** $b_{12} = 2\,176\,782\,336$, $q = 6$

GF: $b_8 = 312\,500$

$q = 5$

$$b_n = b_1 \cdot 5^7 = 312\,500 \quad | : 5^7$$

$$\underline{\underline{b_1 = 4}}$$ ✓

$$b_n = < 4, 20, 100, 500, 2500 >$$

$$b_n = 4 \cdot 5^{n-1} > 100\,000 \quad | : 4$$

$$5^{n-1} > 25\,000 \quad | \ln()$$

$$(n-1) \cdot \ln(5) > \ln(25\,000) \quad | : \ln(5)$$

$$n-1 > \frac{\ln(25000)}{\ln(5)} \quad | +1$$

$$n > \frac{\ln(25000)}{\ln(5)} + 1$$

$$\underline{n > 7{,}292\ldots}$$ ✓

$$\underline{n = 8}$$ ✓ A: Ab 8ten Folgenglied

$$\underline{\underline{b_8 = 312\,500}}$$ ✓

Oktober

Donnerstag, 23. September 2021 19:13

1.52)

1.54)

1.145) a)

1.185)

1.186)

1.52 Ein Geldbetrag soll unter den ersten sechs Gewinnern eines Fotowettbewerbs so aufgeteilt werden, dass das Preisgeld für den 1. Platz um 100,00 € höher ist als das für den 2. Platz, dieses um 100,00 € mehr als für den 3. Platz usw.

a) Der Sieger erhält 2 750,00 €. Berechne, wie viel Preisgeld insgesamt ausbezahlt wird.

b) Wie hoch ist das Preisgeld für die ersten drei Plätze jeweils, wenn der insgesamt zur Verfügung gestellte Geldbetrag 10 000,00 € beträgt?

a) AF: $a_1 = 2750$

$d = -100$

ges.: AR

AR: $\sum_{i=1}^{6} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$S_a = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$

$S_a = \frac{6}{2} \cdot [2 \cdot 2750 + 5 \cdot -100]$

$S_a = 3 \cdot [5500 - 500]$

$\underline{\underline{S_a = 15\,000}}$ ✓

A: Insgesamt werden für die ersten 6 Gewinner 15 000 € ausbezahlt.

b) $S_a = 10\,000$ €

$d = -100$ €

$n = 3$

$$S_a = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d] \quad \Big| : \frac{n}{2}$$

$$\frac{2S_a}{n} = 2a_1 + (n-1) \cdot d \quad \Big| -(n-1) \cdot d$$

$$2a_1 = \frac{2S_a}{n} - (n-1) \cdot d \quad \Big| : 2$$

$$a_1 = \left(\frac{2S_a}{n} - (n-1) \cdot d\right) \cdot \frac{1}{2}$$

- - - - - - - - - - - - -

$$a_1 = \left(\frac{2 \cdot 10000}{6} - 5 \cdot (-100)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \left(\frac{20000}{6} + 500\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 1916{,}\dot{6} \text{ €}$$

$$a_n = \langle 1916{,}\dot{6};\, 1816{,}\dot{6};\, 1716{,}\dot{6} \rangle$$ ✓

A: Der erste Platz erhält 3.433 €, jeder weitere immer um 100€ weniger.

1.54 Die Summe s_5 einer endlichen arithmetischen Reihe ist 5. Das Produkt aus dem zweiten und dem dritten Summanden ist (–14). Gib die fehlenden Summanden an.

AR: $s_5 = 5$

$a_2 \cdot a_3 = -14$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$S_5 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d$

I: $S_5 = 5a_1 + 10d = 5a_2 + 5d \rightarrow a_2 = 1 - d$

$(a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d) = -14$

$a_2 \cdot (a_2 + d) = -14$

II: $a_2^2 + a_2 d = -14$

$(1-d)^2 + (1-d) \cdot d = -14$

$1 - 2d \cancel{+d^2} + d \cancel{-d^2} = -14$

$1 - 2d + d = -14$

$1 - d = -14$

$d = 15$

$d = 15$ in I: $a_2 = 1 - 15$

$a_2 = -14$

$\hookrightarrow a_1 = -29$

$a_n = \langle -29, -14, 1, 16, 31 \rangle$ ✓

1.145 Zeige, dass die Folge streng monoton fallend ist.

a) $a_n = \frac{1}{n}$ **b)** $a_n = \frac{24n - 5}{2n^2 + 1}$ **c)** $a_n = \frac{10n - 3}{-15n + 4}$

a) $a_n = \frac{1}{n}$

$a_{n+1} < a_n$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad | \cdot n \cdot (n+1)$

$n < n + 1$

$0 < 1$ ✓

↳ wahre Aussage

1.185 Von einer arithmetischen Folge kennt man $a_1 = -3$, $a_n = 31$ und $d = 2$. Berechne n und s_{20}.

AF: $a_1 = -3$
$a_n = 31$
$d = 2$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$31 = -3 + (n-1) \cdot 2 \quad | +3$

$34 = (n-1) \cdot 2 \quad | :2$

$17 = n-1 \quad | +1$

$\underline{\underline{n = 18}}$ ✓

$s_{20} = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$

$s_{20} = 10 \cdot [-6 + 19 \cdot 2]$ → 38, 32

$\underline{\underline{s_{20} = 320}}$ ✓

1.186 Von einer geometrischen Folge kennt man $b_3 = 16$ und $b_7 = 81$. Berechne q und s_8.

GF: $b_3 = 16$
$b_7 = 81$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

I. $16 = b_1 \cdot q^2$

I: $16 = b_1 \cdot q^2$

II: $81 = b_1 \cdot q^6$

$$\boxed{b_1 =} \frac{16}{q^2} = \frac{81}{q^6} \qquad | \cdot q^6$$

$$16 \cdot q^4 = 81 \qquad | : 16$$

$$q^4 = 5{,}0625$$

$$\underline{\underline{q_1 = 1{,}5}} \checkmark \quad (q_2 = -1{,}5)$$

$q = 1{,}5$ in I: $b_1 = \frac{16}{q^2}$

$$b_1 = \frac{16}{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{b_1 = 7{,}\dot{1}}} \checkmark$$

$$S_8 = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_8 = 7{,}\dot{1} \cdot \frac{1{,}5^8 - 1}{0{,}5}$$

$$\underline{\underline{S_8 = 350{,}2\dot{7}}} \checkmark$$