

BÀI GIẢNG: HÀM PHI EULER ($\phi(n)$)

1. Mục tiêu bài học:

- Hiểu khái niệm "nguyên tố cùng nhau"
- Hiểu định nghĩa và cách tính hàm phi Euler $\phi(n)$
- Biết tính tay và tính nhanh bằng công thức
- Biết viết code tính $\phi(n)$ cho nhiều số

2. Khái niệm cơ bản

- a. Nguyên tố cùng nhau là gì?
- Hai số a và b được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu $\text{GCD}(a, b) = 1$
- Ví dụ:
 - - 4 và 9: $\text{GCD} = 1 \rightarrow$ cùng nhau
 - - 6 và 9: $\text{GCD} = 3 \rightarrow$ không cùng nhau
 - - 10 và 13: $\text{GCD} = 1 \rightarrow$ cùng nhau
- b. Định nghĩa hàm phi Euler $\phi(n)$
- $\phi(n)$ là số lượng số nguyên dương $\leq n$ mà nguyên tố cùng nhau với n
- Ví dụ:
 - - $n = 6$: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ cùng nhau với 6: $\{1, 5\} \rightarrow \phi(6) = 2$
 - - $n = 9$: cùng nhau với 9: $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \rightarrow \phi(9) = 6$
 - - $n = 8$: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow$ cùng nhau với 8: $\{1, 3, 5, 7\} \rightarrow \phi(8) = 4$

3. Cách tính $\phi(n)$ bằng tay

- Đếm số lượng số i sao cho $\text{GCD}(i, n) = 1$
- Dùng vòng lặp: for $i = 1 \rightarrow n$, nếu $\text{GCD}(i, n) == 1 \rightarrow$ đếm++
- Ví dụ:
- Tính $\phi(10)$:
- Các số từ 1 đến 10: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Nguyên tố cùng nhau với 10: $\{1, 3, 7, 9\} \rightarrow \phi(10) = 4$

4. Công thức tính nhanh $\phi(n)$

- Nếu $n = p_1^{k_1} * p_2^{k_2} * \dots * p_r^{k_r}$ (phân tích thừa số nguyên tố)
- Ví dụ: $12 = 2^2 * 3$
- Công thức: $\phi(n) = n * (1 - 1/p_1) * (1 - 1/p_2) * \dots$
- Ví dụ 1: $\phi(12) = 12 * (1 - 1/2) * (1 - 1/3) = 12 * 1/2 * 2/3 = 4$
- Ví dụ 2: $\phi(15) = 15 * (1 - 1/3) * (1 - 1/5) = 15 * 2/3 * 4/5 = 8$

5. Thuật toán sàng Euler tính $\phi(n)$ cho nhiều số

- Mã giả:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) phi[i] = i;
for (int i = 2; i <= n; i++) {
    if (phi[i] == i) { // i là số nguyên tố
        for (int j = i; j <= n; j += i) {
            phi[j] = phi[j] - phi[j] / i;
        }
    }
}
```
- Gọi nhớ: dòng $\text{phi}[j] = \text{phi}[j] - \text{phi}[j]/i$; tương đương với nhân ($\phi(j) = \phi(j) * (1 - 1/i)$)
- Ví dụ hoạt động:
 - Ban đầu: $\text{phi}[6] = 6$
 - Khi $i = 2 \rightarrow \text{phi}[6] = 6 - 6/2 = 3$
 - Khi $i = 3 \rightarrow \text{phi}[6] = 3 - 3/3 = 2 \rightarrow \phi(6) = 2$

6. Bài tập

- Tính tay $\phi(7)$, $\phi(10)$, $\phi(15)$
- Viết chương trình tính $\phi(n)$ với n đến 1000000
- Áp dụng công thức để tính nhanh $\phi(20)$, $\phi(100)$, $\phi(225)$

7. Câu hỏi củng cố

- Khi nào một số i là số nguyên tố?
- GCD là gì? Nguyên tố cùng nhau nghĩa là gì? Cho ví dụ minh họa.
- Tại sao trong code lại dùng trừ thay vì nhân? Cho ví dụ cụ thể.

8. Tổng kết

- Khái niệm:
- $\phi(n)$: Số lượng số nguyên dương $\leq n$ nguyên tố cùng nhau với n
- Cách tính tay: Đếm $\text{GCD}(i, n) == 1$
- Công thức tổng quát: $n * (1 - 1/p_1) \dots$
- Sàng phi Euler: Tính nhanh $\phi(i)$ cho nhiều i