TP « surplus » : les aventures de π

Le nombre π est sans doute l'entité mathématique la plus connue de par le monde. Apparu dès l'Antiquité de manière intuitive en tant que rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre, il n'a cessé de susciter l'intérêt en mathématiques. Mais c'est Archimède (287-212 avant J.C.) qui le premier se pencha réellement sur la question.

Dans son écrit *De la mesure du cercle*, il commence par démontrer qu'il existe une unique constante π telle que l'on ait $A=\pi R^2$ et $P=2\pi R$, où A et P sont respectivement l'aire et le périmètre du cercle de rayon R.

Ce sont ces fameuses décimales qui aujourd'hui font tout l'intérêt de ce nombre. Nous allons donc étudier diverses méthodes et formules pour approcher ce nombre **π.**

Vous allez tout d'abord écrire une série de fonctions sous GNU Octave permettant de calculer une valeur approchée de π **suivant un nombre n d'itérations souhaitées.**

Formule de Gauss (1777-1855)

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(12\left(\frac{1}{38}\right)^{2n+1}+20\left(\frac{1}{57}\right)^{2n+1}+7\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}+24\left(\frac{1}{268}\right)^{2n+1}\right)$$

Produit infini de Viète (1540-1603)

$$U_0=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad U_n=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}U_{n-1}}$$

$$\pi=\frac{2}{\prod_{k=0}^{\infty}U_k}$$

Formule de Newton (1642-1727)

$$\pi = 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2\,(2n+1)}$$

Produit infini de Wallis (1606-1703)

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

Formule de Gregory (1638-1675) et Leibniz (1646-1716)

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

Formule de type Machin (1680-1751)

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right)$$

Formule d'Euler (1707-1783)

$$\pi=\sqrt{6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$$

Formule dite de BBP, Bailey-Borwein-Plouffe

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

La méthode de Monte-Carlo

Soit un point `M` de coordonnées `(x, y)`, où `0<x<1` et `0<y<1`.

On tire aléatoirement les valeurs de `x` et `y`. Le point `M` appartient au disque de centre `(0,0)` de rayon `1` si et seulement si $x^2+y^2= 1$.

La probabilité que le point `M` appartienne au disque est alors de **π/4**. En faisant le rapport du nombre de points dans le disque au nombre de tirages, on obtient une approximation du nombre π si le nombre de tirages est grand.

Nota : la fonction *rand* sous octave permet d'obtenir des valeurs pseudo-aléatoires ; il sera peut-être nécessaire d'utiliser d'autres types de fonctions aléatoires comme *randn* (distribution normale), *randp* (distribution de Poisson), *randg* ou *rande*

Pour chacune des fonctions présentées ci-dessus que vous venez d'écrire, définissez un **fichier script** permettant à un utilisateur

1. de choisir la fonction à afficher (par l'utilisation d'un menu par exemple)
2. et de visualiser graphiquement les résultats suivant le nombre d'itérations de calcul par rapport à la valeur de référence de π.

Nota : pour créer un menu sous GNU Octave

```
# Menu
choix = menu('Choisissez une fonction', 'Gauss', 'Viete');
switch choix
  case 1
    # lancement de la fonction Gauss
    printf("Gauss\n");
  case 2
    # lancement de la fonction Viete
    printf("Viete\n");
  otherwise
    # erreur
    printf("Erreur\n")
endswitch
```