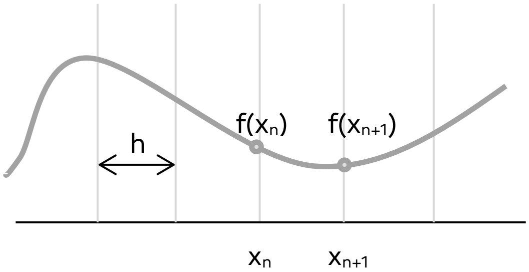
(*Boîte de*) dérivation

La dérivation numérique permet d'estimer la dérivée d'une fonction (« *pente d'une fonction* ») en utilisant un ensemble discret de points.
Nous allons nous intéresser au calcul d'une fonction f échantillonnée sur **x** points (seules certaines valeurs sont connues)

On utilise une variable discrétisée $\mathbf{x_n}$ définie par $\mathbf{x_n = nh}$ ou h est le pas de discrétisation.

On note $f_n = f(x_n)$



Les questions à se poser lors de l'évaluation numérique de la dérivée d'une fonction concernent :

- le choix de la méthode de dérivation
- la valeur du pas de discrétisation h

Mais ce calcul de la dérivée peut être :

- **Onéreux** (parce que l'expression est difficile à évaluer)
- **Imprécis** quand la fonction est donnée par un ensemble discret de valeurs (issues de données expérimentales par exmple)
- Voire **impossible** quand la dérivée intervient dans une équation différentielle par exemple

Formules d'Euler

La méthode la plus simple consiste à utiliser des approximations de différences finies. La dérivation d'une fonction f notée f'(x) ou $\frac{df(x)}{dx}$ est définie par :

- $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)$, limite à droite (1)
- $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right)$, limite à gauche (2)
- $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \right)$, limite symétrique (3)

L'évaluation numérique de la dérivée est réalisée à partir de la suite numérique fx (ensemble des évaluations de la fonction f sur l'ensemble discret des points x)

En adaptant les équations précédentes, on obtient par exemple pour l'évaluation à droite, l'évaluation de la dérivée au point x_n : $df_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$ avec $f_n = f(x_n)$ et $f_{n+1} = f(x_n+h)$

Interpolation de Lagrange

Les polynômes de Lagrange permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points (appelés nœuds)

Soient (n+1) couples de données (x_i,y_i), distincts deux à deux, le polynôme P(x) est le polynôme de Lagrange qui interpole les couples de données.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_j \; L_i(x) \in \; R^n[x]$$

$$\text{où } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ecrire une fonction qui **P=lagrange(f, X)** qui calcule le polynôme d'interpolation de Lagrange où f est la fonction à interpoler et X est le vecteur des points d'abscisses x_i. On utilisera un polynôme de Lagrange construit sur 3 points. Calculer la dérivée du polynôme en x est alors très simple.

Travail à effectuer

Durant ce projet, vous utiliserez les 5 fonctions suivantes qui vous serviront d'illustration pour ce projet :

1. $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$
2. $g(x) = \; e^{x^2}$
3. $h(x) = \ln\left(|\sin(x)|\right)$
4. $i(x) = \frac{1}{1+x^2}$
5. $j(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 7}$

Calcul

Créer autant de fonctions que nécessaires permettant de calculer les valeurs des fonctions en tout point.

Ecrire **quatre programmes** relatifs aux trois méthodes présentées plus haut et le calcul de la dérivée par un polynôme de Lagrange permettant de calculer les valeurs de la dérivée d'une fonction entre les deux bornes avec un pas h donné.

Affichage

Pour chacune des fonctions, écrire un programme permettant de choisir la fonction à afficher (parmi les cinq proposées) ainsi que les bornes entre lesquelles on souhaite l'afficher.

A l'affichage, la **fonction** devra être affichée en **bleu** et sa **dérivée en rouge**. Pensez à afficher les <u>différents renseignements importants</u> sur un graphique (légende, titre des axes, nom de chaque courbe représentée, etc.).

Evaluation

Au-delà de l'aspect graphique, il est indispensable de <u>**quantifier**</u> la qualité des calculs effectués. La qualité va s'évaluer quand cela est possible en comparant les résultats numériques obtenus avec la dérivée *formelle* de la fonction étudiée.

On pourra alors estimer en chaque point l'erreur en calculant la différence entre la fonction g_n, dérivée analytique de f et la dérivée numérique f_n évaluée pour ce point. Ainsi, l'**erreur = |f_n -g_n|**

Ecrire un programme qui, pour chacune des fonctions :

- **calcule l'erreur moyenne** pour chacune des méthodes sur un intervalle donné **en fonction du pas**.
- **affiche le résultat sous forme de graphique ainsi que sa moyenne et sa variance**.

Les méthodes de dérivation seront évaluées au moyen de trois paramètres : le nombre de valeurs discrètes utilisées, l'erreur sur l'intervalle et le temps de calcul pour les 5 fonctions proposées.

Les résultats d'évaluation seront présentés :

- sous la forme d'un tableau par fonction reprenant les éléments calculés ainsi que pour chaque méthode l'erreur obtenue en fonction du nombre de pas utilisés
- et sous une forme graphique adaptée à déterminer

Proposer enfin une valeur approximative du pas le plus pertinent pour les calculs et essayer de conclure sur la méthode la plus performante.

Travail à rendre

Vous devrez rendre pour le **dimanche 11 janvier 2026 23h55 GMT dernier délai** par voie électronique (à l'adresse **Philippe.Truillet@upssitech.fr**) :

- Les fichiers **.m, .py** ou **.ipynb** que vous aurez créés. Il vous est conseillé de faire un fichier pour chaque fonction de calcul et un fichier pour l'évaluation et la comparaison des méthodes de calcul ;
- Un rapport décrivant les algorithmes que vous aurez programmés en expliquant votre démarche de travail.

Une présentation orale de 10 minutes (avec documents pour la vidéo-projection) aura enfin lieu après la fin du projet dans la semaine du **12 au 16 janvier 2026**