TD 4 :
Les aventures de π
Méthodes de calcul d'intégrales

Calcul de π

Le nombre π est sans doute l'entité mathématique la plus connue de par le monde. Apparu dès l'Antiquité de manière intuitive en tant que rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre, il n'a cessé de susciter l'intérêt en mathématiques. Mais c'est Archimède (287-212 avant J.C.) qui le premier se pencha réellement sur la question.
Dans son écrit *De la mesure du cercle*, il commence par démontrer qu'il existe une unique constante π telle que l'on ait $A=\pi R^2$ et $P=2\pi R$, où A et P sont respectivement l'aire et le périmètre du cercle de rayon R.

Ce sont ces fameuses décimales qui aujourd'hui font tout l'intérêt de ce nombre. Nous allons donc étudier diverses méthodes et formules pour approcher ce nombre **π**.

Vous allez tout d'abord écrire une série de fonctions sous GNU Octave permettant de calculer une valeur approchée de π **suivant un nombre n d'itérations souhaitées.**

Produit infini de Viète (1540-1603)

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad U_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} U_{n-1}}$$

$$\pi = \frac{2}{\prod_{k=0}^{\infty} U_k}$$

Produit infini de Wallis (1606-1703)

$$\pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

Formule d'Euler (1707-1783)

$$\pi = \sqrt{6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$$

La méthode de Monte-Carlo

Le terme de « *méthode de Monte-Carlo* » désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire en utilisant des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été proposé par l'équipe du physicien Nicholas Metropolis.
Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales (en particulier, pour calculer des surfaces et des volumes). Elles sont également couramment utilisées en physique des particules, où des simulations probabilistes permettent d'estimer la forme d'un signal ou la sensibilité d'un détecteur.

L'exemple suivant est un classique de l'usage de la méthode de Monte-Carlo. Soit une zone rectangulaire ou carrée dont les côtés sont de longueur connue. Au sein de cette aire se trouve un lac dont la superficie est inconnue. Grâce aux mesures des côtés de la zone, on connaît l'aire du rectangle. Pour trouver l'aire du lac, on demande à une armée de tirer « **x** » coups de canon de manière aléatoire sur cette zone. On compte ensuite le nombre « **n** » de boulets qui sont restés sur le terrain ; on peut ainsi déterminer le nombre de boulets qui sont tombés dans le lac : **x-n**. Il suffit ensuite d'établir un rapport entre les différentes valeurs pour trouver l'aire finale.

Soit un point `M` de coordonnées `(x, y)`, où `0<x<1` et `0<y<1`.

On tire aléatoirement les valeurs de `x` et `y`. Le point `M` appartient au disque de centre `(0,0)` de rayon `1` si et seulement si $x^2+y^2= 1$.

La probabilité que le point `M` appartienne au disque est alors de **π/4**. En faisant le rapport du nombre de points dans le disque au nombre de tirages, on obtient une approximation du nombre π si le nombre de tirages est grand.

Intégration

Soit `f` une fonction continue sur `[a,b]`, dans les exercices qui suivent, il s'agira d'approcher l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Méthode des rectangles

Dans la méthode dite des rectangles, on a le choix entre trois techniques :

1. on fait coïncider le sommet haut gauche du rectangle avec la courbe : c'est la méthode des rectangles à gauche,
2. on fait coïncider le sommet haut droit du rectangle avec la courbe : c'est la méthode des rectangles à droite,
3. on fait coïncider le milieu du côté haut du rectangle avec la courbe : c'est la méthode du point milieu

On définit le pas d'approximation :

$h = \frac{b-a}{n}$ où `n` est le nombre de rectangles avec lesquels nous allons « *paver* » l'aire à calculer.

On définit ainsi : $x_i = a + ih$

Avec la méthode du point milieu, l'aire se calcule de la manière suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$$

Ecrire une fonction GNU Octave **`integration_rectangles`** qui utilise la méthode des rectangles.

Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes est à peu près similaire à la méthode précédente mais on utilise maintenant des trapèzes pour « paver » l'aire afin d'être plus précis.

Comme plus haut, l'intervalle `[a,b]` est partagé en n petits trapèzes de largeur `h = (b-a)/n`. Nous savons ainsi que l'aire de chaque petit trapèze est A_i `= (h/2)*(f(a+ih) + f(a+(i-1)h))`.

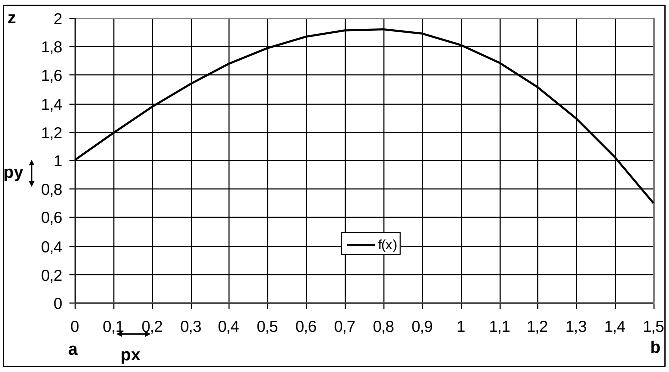
Nous obtenons alors l'aire recherchée en sommant l'aire de tous les trapèzes entre a et b, ce qui nous donne (**vous pouvez vérifier** !) :

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Ecrire une fonction GNU Octave **`integration_trapezes`** qui utilise la méthode des trapèzes.

Méthode de Monte-Carlo

Soit une fonction `f(x)` définie sur l'intervalle `[a,b]`. On définit un rectangle de longueur **`b-a`** (axe des abscisses) et de largeur **`z`** (axe des ordonnées) telle que `z` soit supérieur à tout point de la courbe `f(x)`. On génère $(n+1)^2$ points espacés régulièrement, avec des pas notés **`px`** et **`py`** respectivement suivant l'axe des abscisses et des ordonnées. Pour chaque abscisse x_i, on compare chaque valeur y_i des points associés à cette abscisse avec la valeur de `f(x)`. Chaque fois que `y<f(x)`, on incrémente la valeur d'un compteur **C**. On calcule ensuite le rapport **R** entre le nombre de points compris sous la courbe et le nombre total de points. La valeur approchée **`I`** de l'intégrale est donnée par la relation `I = R*(b-a)*z`.



Ecrire une fonction octave qui permet d'estimer l'intégrale de la fonction `f(x)`.