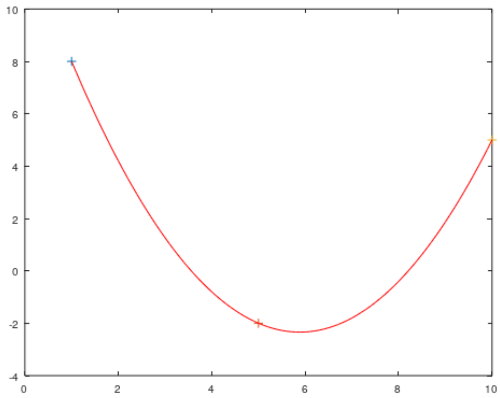
1A GCGEO 2023/2024

Interpolation polynomiale

Ce projet va traiter de l'approximation d'une fonction inconnue explicitement dont on ne connait les valeurs qu'à certains points ou évaluable uniquement au moyen d'un appel coûteux.

En analyse numérique, une fonction ***f inconnue explicitement*** est cependant souvent connue seulement en certains points x_0, x_1, … x_n. On a souvent aussi besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, …) sur la fonction. On cherche donc à reconstruire la fonction par une autre fonction simple et facile à évaluer à partir des données discrètes



Soit *f* une fonction continue sur `[a,b]`. Pour ce projet, il s'agira d'approcher *f(x)* par un polynôme *p(x)*

Dans ce projet, vous allez développer plusieurs méthodes permettant d'interpoler une série de points (appelés aussi nœuds) par un polynôme.

1. méthode de Lagrange

Soient (n+1) couples de données (x_i,y_i), distincts deux à deux, le polynôme L(x) est le polynôme de Lagrange qui interpole les couples de données.

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ (\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i})$$

Ecrire une fonction qui **P=lagrange(f, X)** qui calcule le polynôme d'interpolation de Lagrange où f est la fonction à interpoler et X est le vecteur des points d'abscisses x_i.

2. différences divisées et formule de Newton

Etant donnés les (n+1) points tous distincts deux à deux, chercher le polynôme d'interpolation de Newton revient à calculer :

$$N(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \, n_j(x) \ avec \ n_j(x) = \prod_{0\leq i<j}^{k} (x - x_i)$$

Ecrire une fonction qui **P=newton(f, X)** qui calcule le polynôme d'interpolation de Newton où f est la fonction à interpoler et X est le vecteur des points d'abscisses x_i.

3. la méthode de Hermite

L'interpolation de Hermite est une généralisation de celle de Lagrange en faisant coïncider non seulement *f(x)* et *p(x)* aux nœuds x_i mais également leurs dérivées d'ordre k_i aux nœuds x_i

Cette méthode permet notamment d'éviter les phénomènes de Runge.

Une méthode de construction consiste à prendre les carrés des polynômes de Lagrange associés aux points x_0, x_1, …, x_n.

$$q_i(X) = L_i(X)^2 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (\frac{X - x_j}{x_i - x_j})^2$$

Ecrire une fonction qui **P=hermite[f, X]** qui calcule le polynôme d'interpolation d'Hermite où f est la fonction à interpoler et X est le vecteur des points d'abscisses x_i.

4. les nœuds de Tchebychev

Dans le cas de l'interpolation de Lagrange et celle de Hermite, l'utilisateur a la liberté de choisir les nœuds d'interpolation.

Tchebychev s'est aperçu qu'en utilisant les racines sur [a,b] de ces polynômes comme points d'interpolation, on peut réduire la marge d'erreur provoquée par l'interpolation. Ces points sont définis par l'équation suivante :

$$x_i = \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right).\cos\left(\frac{(2(n-i)+1)\pi}{2n}\right) avec\ i = 0,1,\dots n$$

Ecrire une fonction qui **P=tchebychev[f, Intervalle]** qui calcule le polynôme d'interpolation avec les nœuds de Tchebychev où f est la fonction à interpoler et Intervalle est l'intervalle d'interpolation.

Affichage

Pour chacune des fonctions, écrire un **script** permettant de choisir la fonction (cf. plus bas) à afficher dans l'intervalle choisi et d'afficher la précision obtenue en fonction du nombre de points d'interpolation (choix entre 3, 5et 10 points pour les points 1/ 2/ et 3/).

Evaluation

Durant ce projet, vous utiliserez les fonctions à interpoler suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-5,5]$$

$$g(x) = 2x.e^{-(4x+2)}, x \in [0,1]$$

$$h(x) = x.sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1, x \in [-1,2]$$

Au-delà de l'aspect graphique des résultats, il est indispensable de **quantifier** la qualité des calculs effectués.

La qualité va s'évaluer quand cela est possible en comparant les résultats numériques obtenus avec une valeur de référence (fonction f donnée)

Les méthodes de calcul seront évaluées *a minima* au moyen de deux variables : **l'erreur par rapport à la valeur de référence** et le **temps de calcul** pour les interpolations des fonctions proposées.

Les résultats d'évaluation seront présentés :

1. sous la forme d'une matrice pour chaque fonction où pour chacune des méthodes utilisée, nous trouverons pour chacun des intervalles donnés: le polynôme d'interpolation calculé, le résultat trouvé avec la méthode utilisée, la précision et le temps de calcul.
2. sous la forme de graphiques représentant pour chaque méthode, le nombre de points d'interpolation utilisées par rapport à la précision demandée.

Conclure en argumentant sur la meilleure méthode à utiliser pour calculer une interpolation polynomiale d'une fonction donnée.

Travail à rendre

Vous devrez rendre pour le **vendredi 12 janvier 2024 23h55 GMT dernier délai** par voie électronique (à l'adresse : **Clement.Truillet@irit.fr** ou **Philippe.Truillet@irit.fr** suivant votre groupe de TP) :

- Les fichiers **.m** que vous aurez créés. Il vous est conseillé de faire un fichier pour chaque fonction de calcul un fichier pour l'évaluation et la comparaison des méthodes de calcul ;
- Un rapport décrivant les algorithmes que vous aurez programmés en expliquant votre démarche de travail.

Une présentation orale de 20 minutes (avec documents pour la vidéo-projection) aura enfin lieu après la fin du projet.