

Kvadratroten av i

Truls Thirud

Oppgave

Hva er kvadratroten av i , hvor $i = \sqrt{-1}$?

Løsning

Anta at det finnes et komplekst tall $a + bi$ slik at

$$a + bi = \sqrt{i} \quad (1)$$

og hvor $a, b \in \mathbb{R}$

Da vil

$$\begin{aligned} (a + bi)^2 &= i \\ \Downarrow \\ a^2 + 2abi - b^2 &= i \end{aligned}$$

Siden a og b er reelle tall betyr dette at

$$2ab = 1 \wedge a^2 = b^2 \quad (2)$$

Den første likningen viser at a og b har samme fortegn. Den siste likningen over blir da så enkel som

$$a = b$$

Setter vi inn for b i første del av (likn. 2) får vi

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} \\ \Downarrow \\ a &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

slik at de to kvadratrøttene til i blir $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

Kontroll

Skeptisk? Vi kontrollerer!

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 &= \\ \frac{2}{4}(1+2i-1) &= \\ \frac{1}{2}(2i) &= i \quad \blacksquare\end{aligned}$$