

Babusjka-matematikk

Truls Thirud

Oppgave

Løs likningen

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}} \quad (1)$$

Løsning

Ikke se på løsningen før du har prøvd selv!

Et hint for løsningen er å se på uttrykkene på begge sider som to litt ulike Babusjkaer - russiske dukker som har dukker inne i dukker. Men disse babusjkaene er uendelige. Vi starter med å pakke ut den første Babusjkaen.

La B være verdien av

$$B = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}} \quad (2)$$

Vi pakker ut ytterste Babusjka ved å kvadrere.

Fra første likhet i (likn. 2) får vi

$$B^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} \quad (3)$$

\Downarrow

$$B^2 = x + B \quad (4)$$

Hvis vi gjør samme kvadrering med siste uttrykk i (likn. 2) får vi

$$B^2 = x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}} \quad (5)$$

\Downarrow

$$B^2 = xB \quad (6)$$

\Downarrow

$$B = x \quad (7)$$

Hvis vi setter inn for B i (likn. 4) får vi

$$x^2 = x + x \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

og dermed får vi to løsninger: $x = 0$ eller $x = 2$