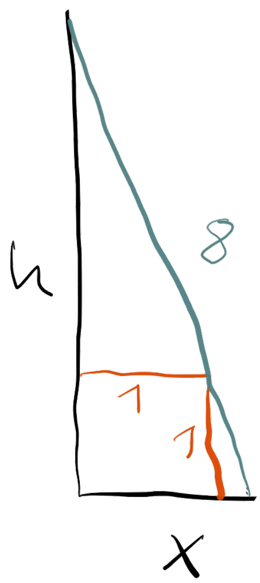
Stige-oppgave

Truls Thirud

Oppgave

En stige med lengde 8 settes inntil en vegg hvor det står en kasse med mål $1x1x1$. Hvor høyt opp på veggen h kommer stigen?



Figur 1: Stige mot vegg inntil en kasse

Løsning

Forsøker man å løse for h ved å bruke pythagoras' setning og lengdeforhold i kongruente trekanter, får man en fjerdegradslikning i h - som kan være vrien å løse.

En mer fruktbar plan er å først løse for $h + x$, hvor vi har satt x til å være avstanden fra vegg til bunnen av stigen langs gulvet. Deretter løser vi for $h - x$, som da enkelt gir h, som er det vi er ute etter.

Pga kongruente trekanter ser vi at

$$\frac{h}{x} = \frac{h-1}{1} \Rightarrow hx = h + x \tag{1}$$

Pythagoras' setning på den store trekanten gir

$$x^2 + h^2 = 8^2 = 64 \tag{2}$$

Her kan vi legge til $2hx$ på begge sider

$$x^2 + h^2 + 2hx = 64 + 2hx \tag{3}$$
$$\Downarrow$$
$$(h + x)^2 = 64 + 2(h + x) \tag{4}$$

pga (likn. 1) - som igjen gir

$$(h + x)^2 - 2(h + x) - 64 = 0 \tag{5}$$
$$\Downarrow$$
$$h + x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$h + x = 1 \pm \sqrt{65} \tag{6}$$

Vi er kun interessert i den verdien av h hvor $h > x > 1$ så vi får

$$x + h = 1 + \sqrt{65} \tag{7}$$

Neste trinn blir å bruke (likn. 2) for å finne en verdi for $h - x.$ Da trekker vi fra $2hx$ på begge sider og får:

$$x^2 + h^2 - 2hx = 64 - 2hx$$
$$\Downarrow$$
$$(h - x)^2 = 64 - 2(1 + \sqrt{65}) \tag{8}$$

fordi vi ser av (likn. 1) og (likn. 7) at

$$h + x = hx = 1 + \sqrt{65}$$

Videre gir (likn. 8) at

$$h - x = \pm\sqrt{62 - 2\sqrt{65}}$$

vi er fremdeles kun interessert i verdier av x og h hvor $h > x > 0$, så vi dropper verdien hvor $h - x$ blir negativ, altså har vi

$$h - x = \sqrt{62 - 2\sqrt{65}} \tag{9}$$

hvis vi nå adderer (likn. 7) og (likn. 9) får vi

$$h + x + h - x = 1 + \sqrt{65} + \sqrt{62 - 2\sqrt{65}}$$
$$\Downarrow$$
$$h = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{65} + \sqrt{62 - 2\sqrt{65}}\right) \tag{10}$$