Phần thứ nhất

LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Combinatorial Theory

Fall 2009

Nội dung

Chương 0. Mở đầu

Chương 1. Bài toán đếm

Chương 2. Bài toán tồn tại

Chương 3. Bài toán liệt kê tổ hợp

Chương 4. Bài toán tối ưu tổ hợp

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

1. Nguyên lý cộng và Nguyên lý nhân

- Đây là hai nguyên lý cơ bản của tổ hợp, được vận dụng rộng rãi vào việc giải quyết các bài toán đếm
- Còn gọi là Qui tắc cộng và Qui tắc nhân (Sum Rule và Product Rule)

1.1. Nguyên lý cộng
(The sum rule)

- *NÕu A vµ B lµ hai tËp hîp rêi nhau th×*

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

- Nguyªn lý céng ®îc më réng cho nhiÒu tËp con rêi nhau:

NÕu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ lµ mét ph©n ho¹ch cña tËp hîp X th×

$$N(X) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_k).$$

- Mét trêng hîp riªng hay dïng cña nguyªn lý céng:

NÕu A lµ mét tÝnh chÊt cho trªn tËp X th×

$$N(A) = N(X) - N(A^c).$$

$$N(A) = N(X) - N(\bar{A})$$

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 1.** Một đoàn vận động viên gồm 2 môn bắn súng và bơi được cử đi thi đấu ở nước ngoài. Nam có 10 người. Số vận động viên thi bắn súng (kể cả nam và nữ) là 14. Số nữ vận động viên thi bơi bằng số nam vận động viên thi bắn súng. Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu người?
- **Giải:** Chia đoàn thành 2 lớp: nam và nữ. Lớp nữ lại được chia 2: thi bắn súng và thi bơi. Thay số nữ thi bơi bằng số nam thi bắn súng (2 số này bằng nhau theo đầu bài), ta được số nữ bằng tổng số đấu thủ thi bắn súng. Từ đó, theo nguyên lý cộng, toàn đoàn có 10 + 14 = 24 người.

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 2.** Trong một đợt phổ biến đề tài tốt nghiệp, Ban chủ nhiệm Khoa công bố danh sách các đề tài bao gồm 80 đề tài về chủ đề "xây dựng hệ thông tin quản lý", 10 đề tài về chủ đề "thiết kế phần mềm dạy học" và 10 đề tài về chủ đề "Hệ chuyên gia". Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?
- **Giải:** Sinh viên có thể lựa chọn đề tài theo chủ đề thứ nhất bởi 80 cách, theo chủ đề thứ hai bởi 10 cách, theo chủ đề thứ ba bởi 10 cách. Vậy tất cả có 100 cách lựa chọn.

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **VÝ dô 3.** Hái r»ng gi¸ trÞ cña k sÏ lµ bao nhiªu sau khi ®o¹n ch¬ng tr×nh PASCAL sau ®îc thùc hiÖn?

```
n1:=10; n2:=20;  n3:=30;
k:=0;
for i1:= 1 to n1 do k:=k+1;
for i2:= 1 to n2 do k:=k+1;
for i3:= 1 to n3 do k:=k+1;
```

- **Gi¶i:** §Çu tiªn gi¸ trÞ cña k ®îc g¸n b»ng 0. Cã 3 vßng lÆp for ®éc lËp. Sau mçi lÇn lÆp cña mçi mét trong 3 vßng for, gi¸ trÞ cña k t¨ng lªn 1. Vßng for thø nhÊt lÆp 10 lÇn, vßng for thø hai lÆp 20 lÇn, vßng for thø ba lÆp 30 lÇn. VËy, kÕt thóc 3 vßng lÆp for gi¸ trÞ cña k sÏ lµ 10+20+30= 60.

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 4:** Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân có đúng 3 ký tự là 9?
- **Giải:** Xâu có thể chứa:
  - Ký tự khác 9 ở vị trí thứ nhất
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ hai
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ ba
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ tư
  - Ta có thể sử dụng qui tắc cộng
    - Đối với mỗi trường hợp, có 9 khả năng chọn ký tự khác với 9 (bất kể chữ số khác 9 nào trong 9 chữ số 0, 1, ...,8)
  - Vậy, đáp số là 9+9+9+9 = 36

1.2. Nguyên lý nhân
The product rule

- *NÕu mçi thµnh phÇn a_i cña bé cã thø tù k thµnh phÇn (a_1, a_2, …, a_k) cã n_i kh¶ n¨ng chän (i = 1, 2, …, k), th× sè bé sÏ ®îc t¹o ra lµ tÝch sè cña c¸c kh¶ n¨ng nµy $n_1 n_2 \ldots n_k$.*
- Mét hÖ qu¶ trùc tiÕp cña nguyªn lý nh©n:

$$N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = N(A_1)\, N(A_2) \ldots N(A_k),$$

víi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ lµ nh÷ng tËp hîp nµo ®ã, nãi riªng:

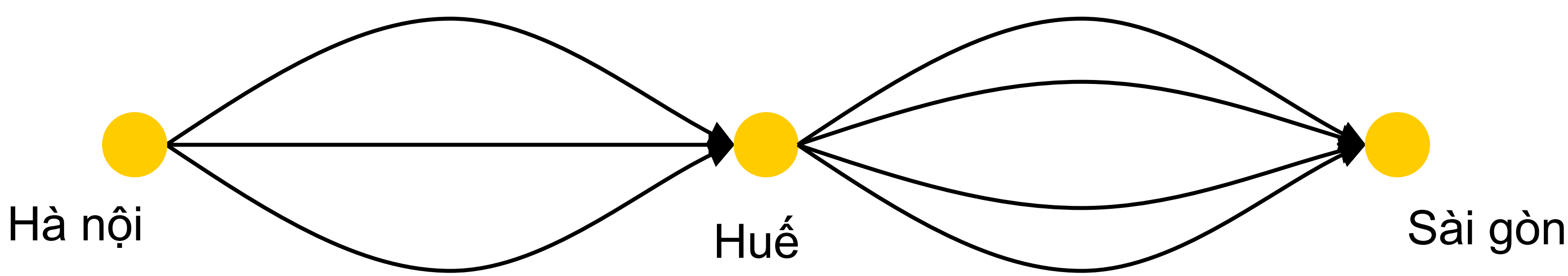
$$N(A^k) = [N(A)]^k .$$

1.2. Nguyên lý nhân
The product rule

- Trong nhiÒu bµi to¸n ®Õm, chØ sau khi x©y dùng xong thµnh phÇn thø nhÊt ta míi biÕt c¸ch x©y dùng thµnh phÇn thø hai, sau khi x©y dùng xong hai thµnh phÇn ®Çu ta míi biÕt c¸ch x©y dùng thµnh phÇn thø ba,... Trong trêng hîp ®ã cã thÓ sö dông ***nguyªn lý nh©n tæng qu¸t:***
- Gi¶ sö ta x©y dùng bé cã thø tù *k* thµnh phÇn (a_1, a_2, ..., a_k) theo tõng thµnh phÇn vµ
  - a_1 cã thÓ chän bëi n_1 c¸ch;
  - Sau khi a_1 ®· chän, a_2 cã thÓ chän bëi n_2 c¸ch;
  - ...
  - Sau khi a_1, a_2,...,a_{k-1} ®· chän, a_k cã thÓ chän bëi n_k c¸ch;
- ThÕ th× sè bé ®îc t¹o ra lµ tÝch sè $\boldsymbol{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

Nguyên lý nhân: Ví dụ

- ***VÝ dô 1***. Tõ Hµ néi ®Õn HuÕ cã 3 c¸ch ®i: m¸y bay, « t«, tµu ho¶. Tõ HuÕ ®Õn Sµi gßn cã 4 c¸ch ®i: m¸y bay, « t«, tµu ho¶, tµu thuû. Hái tõ Hµ néi ®Õn Sµi gßn (qua HuÕ) cã bao nhiªu c¸ch ®i?
- ***Gi¶i:*** Mçi c¸ch ®i tõ Hµ néi ®Õn Sµi gßn (qua HuÕ) ®îc xem gåm 2 chÆng: Hµ néi - HuÕ vµ HuÕ - Sµi gßn. Tõ ®ã, theo nguyªn lý nh©n, sè c¸ch ®i tõ Hµ néi ®Õn Sµi gßn lµ $3 \times 4 = 12$ c¸ch.



Nguyên lý nhân: Ví dụ

- **VÝ dô 2.** Hái r»ng gi¸ trÞ cña k sÏ lµ bao nhiªu sau khi ®o¹n ch¬ng tr×nh PASCAL sau ®îc thùc hiÖn?

```
n1:=10; n2:=20; n3:=30;
k:=0;
for i1:=1 to n1 do
   for i2:=1 to n2 do
      for i3:=1 to n3 do k:=k+1;
```

- **Gi¶i:** §Çu tiªn gi¸ trÞ cña k ®îc g¸n b»ng 0. Cã 3 vßng lÆp for lång nhau. Sau mçi lÇn lÆp cña vßng for, gi¸ trÞ cña k t¨ng lªn 1. Vßng for thø nhÊt lÆp 10 lÇn, vßng for thø hai lÆp 20 lÇn, vßng for thø ba lÆp 30 lÇn. VËy, theo nguyªn lý nh©n, kÕt thóc 3 vßng lÆp for lång nhau, gi¸ trÞ cña k sÏ lµ $10 \times 20 \times 30 = 6000$.

Nguyên lý nhân: Ví dụ

- **Ví dụ 3:** Hỏi có bao nhiêu lá cờ gồm 3 vạch mầu, mầu của mỗi vạch lấy từ ba mầu xanh, đỏ, trắng sao cho:
  - a) Không có hai vạch liên tiếp nào cùng màu
  - b) Không có hai vạch nào cùng màu
- **Giải.** Đánh số các vạch của lá cờ bởi 1, 2, 3 từ trên xuống.

Trường hợp a)

- Màu của vạch 1 có 3 cách chọn.
- Sau khi màu của vạch 1 đã chọn, màu của vạch 2 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1).
- Sau khi màu của hai vạch 1, 2 đã chọn, màu của vạch 3 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 2).
- Theo nguyên lý nhân số lá cờ cần đếm trong trường hợp a) là 3.2.2=12

Nguyên lý nhân: Ví dụ 3 (tiếp)

Trường hợp b):

- Màu của vạch 1 có 3 cách chọn.
- Sau khi màu của vạch 1 đã chọn, màu của vạch 2 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1).
- Sau khi màu của hai vạch 1, 2 đã chọn, màu của vạch 3 có 1 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1 và 2).
- Theo nguyên lý nhân số lá cờ cần đếm trong trường hợp b) là 3.2.1=6

Nguyên lý nhân: Ví dụ

Ví dụ 4. Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân

a) không chứa một chữ số nào hai lần?

- Chúng ta sẽ chọn chữ số vào lần lượt từng vị trí
  - Ký tự thứ nhất có 10 cách chọn
  - Ký tự thứ hai có 9 cách (không chọn lại chữ số đã chọn vào vị trí thứ nhất)
  - Ký tự thứ ba có 8 cách chọn
  - Ký tự thứ tư có 7 cách chọn
- Tổng cộng có 10*9*8*7 = 5040 xâu cần đếm.

b) kết thúc bởi chữ số chẵn?

- Ba ký tự đầu tiên mỗi ký tự có 10 cách chọn
- Ký tự cuối cùng có 5 cách chọn
- Tổng cộng có 10*10*10*5 = 5000 xâu cần đếm.

Các ví dụ phức tạp hơn

- Khi nào sử dụng qui tắc cộng?
- Khi nào sử dụng qui tắc nhân?

- Ta có thể sử dụng phối hợp cả qui tắc cộng và qui tắc nhân
- Bằng cách đó ta có thể giải được nhiều bài toán thú vị và phức tạp hơn

Chụp ảnh đám cưới

Xét bài toán: Có 10 người tham gia vào việc chụp ảnh kỷ niệm ở một đám cưới, trong đó có cô dâu và chú rể. Ta xét bức ảnh chỉ gồm 6 người trong họ.

a) Có bao nhiêu bức ảnh trong đó có mặt cô dâu?

Qui tắc nhân: Xếp chỗ cho cô dâu **VÀ** sau đó xếp chỗ cho những nhân vật còn lại trong bức ảnh.

Trước hết xếp chỗ cho cô dâu: Cô dâu có thể đứng ở 1 trong 6 vị trí

Tiếp đến, xếp 5 nhân vật còn lại của bức ảnh nhờ sử dụng qui tắc nhân: Có 9 người để chọn nhân vật thứ hai, 8 người để chọn nhân vật thứ ba, ... Tổng cộng có 9*8*7*6*5 = 15120 cách xếp 5 nhân vật còn lại của bức ảnh.

Qui tắc nhân cho ta 6 * 15120 = 90 720 bức ảnh

Chụp ảnh đám cưới

b) Có thể chụp bao nhiêu bức ảnh mà trong đó có mặt cả cô dâu lẫn chú rể?

- Qui tắc nhân: Xếp dâu/rể VÀ sau đó xếp những nhân vật còn lại trong bức ảnh
- Trước hết xếp dâu và rể
  - Cô dâu có thể xếp vào 1 trong 6 vị trí
  - Chú rể có thể xếp vào 1 trong 5 vị trí còn lại
  - Tổng cộng có 30 khả năng
- Tiếp theo, xếp chỗ cho 4 nhân vật còn lại trong bức ảnh theo qui tắc nhân
  - Có 8 người để chọn nhân vật thứ ba, 7 người để chọn nhân vật thứ tư, ...
  - Tổng cộng có 8*7*6*5 = 1680
- Theo qui tắc nhân có 30 * 1680 = 50 400 bức ảnh

Chụp ảnh đám cưới

c) Có bao nhiêu bức ảnh mà trong đó có mặt chỉ một người trong cặp tân hôn?

- Qui tắc cộng: Chỉ xếp cô dâu
  - Qui tắc nhân: xếp cô dâu và sau đó xếp các nhân vật còn lại
  - Trước hết xếp cô dâu: Cô dâu có thể đứng ở một trong 6 vị trí
  - Tiếp đến, xếp những nhân vật khác theo qui tắc nhân: Có 8 người để chọn nhân vật thứ hai, 7 để chọn nhân vật thứ ba, v.v. (Ta không được chọn chú rể!)
    - Tổng cộng = 8*7*6*5*4 = 6720
  - Qui tắc nhân cho 6 * 6720 = 40 320 khả năng
- hoặc chỉ xếp chú rể
  - Số lượng khả năng cũng giống như cô dâu: 40 320
- Qui tắc cộng cho 40 320 + 40 320 = 80 640 khả năng

Chụp ảnh đám cưới

- Một cách khác để thu được lời giải câu c)

c) Có bao nhiêu bức ảnh mà trong đó có mặt chỉ một người trong cặp tân hôn?

  - Tổng số bức ảnh trong đó có cô dâu (có hoặc không có chú rể): 90 720
    - Theo kết quả phần (a)
  - Tổng số bức ảnh có mặt cả dâu lẫn rể: 50 400
    - Theo kết quả phần (b)
  - Số bức ảnh chỉ có mặt cô dâu: 90 720 – 50 400 = 40 320
  - Đó cũng là số bức ảnh chỉ có mặt chú rể
  - Tổng cộng = 40 320 + 40 320 = 80 640

Số lượng Mật khẩu

Mỗi cá nhân sử dụng mạng máy tính đều có mật khẩu gồm từ 6 đến 8 ký tự, mỗi ký tự là chữ cái in hoa hoặc chữ số. Mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Có bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

- Theo qui tắc cộng, nếu P là số lượng mật khẩu và P_6, P_7, P_8 là số lượng mật khẩu độ dài 6, 7, và 8, tương ứng, thì

$$P = P_6+P_7+P_8$$

Số lượng Mật khẩu

P_6 = số lượng mật khẩu gồm 6 ký tự chứa ít nhất một chữ số

= (tổng số mật khẩu gồm 6 ký tự) trừ bớt (số mật khẩu gồm 6 ký tự không chứa chữ số)

$= (26+10)(26+10)(26+10)(26+10)(26+10) - (26)(26)(26)(26)(26)(26) = 36^6 - 26^6$

= **1 867 866 560**

Số lượng Mật khẩu

Tương tự như vậy, ta có

$P_7 = 36^7 - 26^7 = 70\ 332\ 353\ 920$

$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\ 612\ 282\ 842\ 880$

$P_6 + P_7 + P_8 = 2\ 684\ 483\ 063\ 360$

Chú ý: Nếu máy tính 2 GHz có thể thử 200 triệu mật khẩu trong một giây, thì trong thời gian bao nhiêu lâu có thể xác định được mật khẩu để thâm nhập hệ thống máy tính này?

(2 684 483 063 360/200 000 000)/(60*60) giờ

Gần 4 tiếng đồng hồ!

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản

- Các cấu hình tổ hợp cơ bản là:
  - ***Chỉnh hợp lặp,***
  - ***Chỉnh hợp không lặp,***
  - ***Hoán vị,***
  - ***Tổ hợp***
- Phép đếm các cấu hình tổ hợp cơ bản được sử dụng để giải các bài toán đếm phức tạp hơn
- Giả sử X là tập n phần tử, mà không giảm tổng quát ta có thể coi X là tập gồm các số 1, 2, ..., n.

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi *chỉnh hợp lặp chập m từ n* phần tử của X là bộ có thứ tự gồm m thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử là A_n^m
- Theo định nghĩa, một chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

  $$(a_1, a_2, ..., a_m), a_i \in X, i = 1, 2, ..., m.$$
- Dễ thấy tập tất cả các chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử của X chính là X^m. Vì vậy, theo nguyên lý nhân ta có
- **Định lý 1.** $A_n^m = n^m$.

Chỉnh hợp lặp

- **VÝ dô 1**. TÝnh sè ¸nh x¹ tõ tËp *m* phÇn tö $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ vµo tËp *n* phÇn tö *V*.
- **Gi¶i**: Mçi ¸nh x¹ *f* cÇn ®Õm ®îc x¸c ®Þnh bëi bé ¶nh ($f(u_1)$, $f(u_2)$, ..., $f(u_m)$), trong ®ã $f(u_i) \in V$, $i=1, 2, ..., m$. Tõ ®ã nhËn ®îc sè cÇn t×m lµ n^m.
- **VÝ dô 2**. TÝnh sè d·y nhÞ ph©n ®é dµi *n*.
- **Gi¶i**: Mçi d·y nhÞ ph©n ®é dµi *n* lµ mét bé gåm *n* thµnh phÇn, trong ®ã mçi thµnh phÇn chØ nhËn mét trong hai gi¸ trÞ (1 hoÆc 0). Tõ ®ã suy ra sè c¸c d·y nhÞ ph©n ®é dµi *n* lµ 2^n.
- Do mçi tËp con cña tËp *n* phÇn tö t¬ng øng víi mét vect¬ ®Æc trng lµ mét x©u nhÞ ph©n ®é dµi *n*, nªn ta cã
- **HÖ qu¶:** Sè lîng tËp con cña tËp *n* phÇn tö lµ 2^n.

Chỉnh hợp lặp

- **Ví dụ 3.** Cần phải phân bố 100 sinh viên vào 4 nhóm thực tập ACCESS, FOXPRO, EXCEL, LOTUS. Mỗi sinh viên phải tham gia vào đúng một nhóm và mỗi nhóm có thể nhận một số lượng không hạn chế sinh viên
- **Giải:** 4^{100} hay 100^4?
- Mỗi cách phân bố cần tìm có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự gồm 100 thành phần $(b_1, ..., b_{100})$ trong đó $b_i \in \{A, F, E, L\}$ là nhóm thực tập của sinh viên thứ i. Từ đó suy ra số cách phân bố cần đếm là 4^{100}.

Chỉnh hợp không lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi chỉnh hợp không lặp chập m từ n phần tử của X là bộ có thứ tự gồm m thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp không lặp chập m từ n phần tử là P_n^m. Rõ ràng, để tồn tại chỉnh hợp không lặp, thì $m \le n$.
- Theo định nghĩa, một chỉnh hợp không lặp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

$$(a_1, a_2, ..., a_m),\ a_i \in X,\ i = 1, 2, ..., m,\ a_i \neq a_j,\ i \neq j.$$

- Việc đếm số lượng chỉnh hợp không lặp chập m từ n phần tử có thể thực hiện theo nguyên lý nhân. Ta có
- Định lý 2. $P_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Chỉnh hợp không lặp

- **VÝ dô 1.** TÝnh sè đơn ¸nh tõ tËp *m* phÇn tö $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ vµo tËp *n* phÇn tö *V*.
- **Gi¶i:** Mçi đơn ¸nh *f* cÇn ®Õm ®îc x¸c ®Þnh bëi bé ¶nh $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m))$, trong ®ã $f(u_i) \in V$, $i=1, 2, \ldots, m$, $f(u_i) \neq f(u_j)$, $i \neq j$. Tõ ®ã nhËn ®îc sè cÇn t×m lµ $n(n-1)\ldots(n-m+1)$.

- **Ví dụ 2.** Có bao nhiêu cách xếp 4 học sinh vào ngồi sau một cái bàn có 10 chỗ ngồi với điều kiện không được phép ngồi lòng.
- **Giải.** Đánh số các học sinh từ 1 đến 4, các chỗ ngồi từ 1 đến 10. Mỗi cách xếp học sinh cần đếm có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự (g_1, g_2, g_3, g_4), trong đó $g_i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ là chỗ ngồi của học sinh i. Từ điều kiện đầu bài $g_i \neq g_j$, $i \neq j$; do đó mỗi cách xếp cần đếm là một chỉnh hợp không lặp chập 4 từ 10. Vậy số cách xếp cần đếm là $P_{10}^{4} = 10.9.8.7 = 5040$.

Chỉnh hợp không lặp

- **Chú ý:** Để giải ví dụ 2 có thể lập luận trực tiếp theo nguyên lý nhân:
- Ta lần lượt xếp các học sinh vào chỗ ngồi.
  - Học sinh thứ nhất có 10 cách xếp
  - Tiếp đến học sinh thứ hai có thể xếp vào 1 trong 9 chỗ còn lại, ...
- Theo nguyên lý nhân có 10.9.8.7 cách xếp

Hoán vị

- **Định nghĩa.** Ta gọi hoán vị từ n phần tử của X là bộ có thứ tự gồm n thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng hoán vị từ n phần tử là P_n.
- Theo định nghĩa, một hoán vị từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

$$(a_1, a_2, ..., a_n), a_i \in X, i = 1, 2, ..., n, a_i \neq a_j, i \neq j.$$

- Rõ ràng $P_n = P_n^n$. Vì vậy, ta có
- Định lý 3. $P_n = P_n^n = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1 = n!$

Hoán vị

- **VÝ dô 1**. 6 ngêi ®øng xÕp thµnh mét hµng ngang ®Ó chôp ¶nh. Hái cã thÓ bè trÝ bao nhiªu kiÓu?
- **Gi¶i**: Mçi kiÓu ¶nh lµ mét ho¸n vÞ cña 6 ngêi. Tõ ®ã nhËn ®îc sè kiÓu ¶nh cã thÓ bè trÝ lµ 6! = 720.
- **VÝ dô 2.** CÇn bè trÝ viÖc thùc hiÖn *n* ch¬ng tr×nh trªn mét m¸y vi tÝnh. Hái cã bao nhiªu c¸ch?
- **Gi¶i**: §¸nh sè c¸c ch¬ng tr×nh bëi 1, 2,..., *n*. Mçi c¸ch bè trÝ viÖc thùc hiÖn c¸c ch¬ng tr×nh trªn m¸y cã thÓ biÓu diÔn bëi mét ho¸n vÞ cña 1, 2, ..., *n*. Tõ ®ã suy ra sè c¸ch bè trÝ cÇn t×m lµ *n*!

Hoán vị

- **Ví dụ 3.** Có bao nhiêu song ánh từ tập n phần tử X vào chính nó? (Mỗi song ánh như vậy được gọi là một phép thế).
- **Giải.** Mçi song ¸nh f cÇn ®Õm ®îc x¸c ®Þnh bëi bé ¶nh ($f(u_1)$, $f(u_2)$, ..., $f(u_n)$), trong ®ã $f(u_i) \in V$, $i=1, 2, \ldots, n$, $f(u_i) \neq f(u_j)$, $i \neq j$. Tõ ®ã nhËn ®îc sè cÇn t×m lµ $n!$
- **Ví dụ 4.** Có bao nhiêu cách bố trí n thợ thực hiện n việc sao cho mỗi thợ thực hiện một việc và mỗi việc do đúng một thợ thực hiện
- **Giải:** $n!$

Tổ hợp

- **Định nghĩa.** Ta gọi tổ hợp chập m từ n phần tử của X là bộ không có thứ tự gồm m thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng tổ hợp chập m từ n phần tử là C_n^m (đôi khi ta sẽ sử dụng ký hiệu $C(n,m)$)
- Theo định nghĩa, một tổ hợp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi **bộ không có thứ tự**

$$\{a_1, a_2, ..., a_m\}, a_i \in X, i = 1, 2, ..., m, a_i \neq a_j, i \neq j.$$

- Với giả thiết $X=\{1, 2,...,n\}$, một tổ hợp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi **bộ có thứ tự**

$$(a_1, a_2, ..., a_m), a_i \in X, i = 1, 2, ..., m, 1 \leq a_1 < a_2 < ...<a_m \leq n.$$

Tổ hợp

- ViÖc ®Õm c¸c tæ hîp cã khã kh¨n h¬n so víi việc đếm c¸c cÊu h×nh ®· tr×nh bµy, tuy nhiªn c¸ch ®Õm díi ®©y cho biÕt c¸ch vËn dông c¸c nguyªn lý cïng víi c¸c kÕt qu¶ ®Õm ®· biÕt trong viÖc ®Õm mét cÊu h×nh míi.
- XÐt tËp hîp tÊt c¶ c¸c chØnh hîp kh«ng lÆp chËp *m* cña *n* phÇn tö. Chia chóng thµnh nh÷ng líp sao cho hai chØnh hîp thuéc cïng mét líp chØ kh¸c nhau vÒ thø tù. Râ rµng c¸c líp nµy lµ mét ph©n ho¹ch trªn tËp ®ang xÐt vµ mçi líp nh thỖ lµ t¬ng øng víi mét tæ hîp chËp *m* cña *n*. Sè chØnh hîp trong mçi líp lµ b»ng nhau vµ b»ng *m*! (sè ho¸n vÞ). Sè c¸c líp lµ b»ng sè tæ hîp chËp *m* cña *n*. Theo nguyªn lý céng, tÝch cña m! víi sè nµy lµ b»ng sè c¸c chØnh hîp kh«ng lÆp chËp m cña *n*, nghÜa lµ b»ng $n(n-1)\ldots(n-m+1)$. Tõ ®ã nhËn ®îc sè tæ hîp chËp *m* cña *n* lµ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} \quad hay \quad \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Tổ hợp

- Định lý 4.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ (cßn ký hiÖu lµ } C(n,m) \text{ hay } \binom{n}{m}\text{)}$$

- $C(n,m)$ được gọi là hệ số tổ hợp.
- Khi nhËn xÐt r»ng, gi¸ trÞ cña phÐp chia trong công thức của định lý 4 lµ mét sè nguyªn, ta nhËn ®îc mét kÕt qu¶ lý thó trong sè häc: *TÝch cña k sè tù nhiªn liªn tiÕp bao giê còng chia hÕt cho k*!.

Tổ hợp

- **VÝ dô 1**. Cã *n* ®éi bãng thi ®Êu vßng trßn. Hái ph¶i tæ chøc bao nhiªu trËn ®Êu?
- **Gi¶i**: Cø 2 ®éi th× cã mét trËn. Tõ ®ã suy ra sè trËn ®Êu sÏ b»ng sè c¸ch chän 2 ®éi tõ *n* ®éi, nghÜa lµ b»ng

$$C(n,2) = n(n-1)/2.$$

- **VÝ dô 2**. Hái cã bao nhiªu giao ®iÓm cña c¸c ®êng chÐo cña mét ®a gi¸c låi *n* ($n \geq 4$) ®Ønh n»m ë trong ®a gi¸c, nÕu biÕt r»ng kh«ng cã ba ®êng chÐo nµo ®ång quy t¹i ®iÓm ë trong ®a gi¸c?
- **Gi¶i**: Cø 4 ®Ønh cña ®a gi¸c th× cã mét giao ®iÓm cña hai ®êng chÐo n»m trong ®a gi¸c. Tõ ®ã suy ra sè giao ®iÓm cÇn ®Õm lµ

$$C(n,4) = n(n-1)(n-2)(n-3)/24.$$

Bài toán chia kẹo

Giả sử k và n là các số nguyên không âm. Hỏi phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm?

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k = n;$$

$$t_1, t_2, \cdots, t_k \in Z_+$$

Nội dung thực tế:

Cần chia n cái kẹo cho k em bé B_1, B_2, …,B_k. Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau?

Bài toán chia kẹo

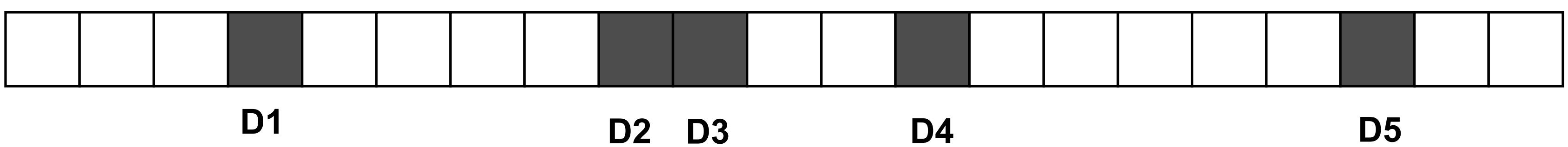
- Cần thả n quả bóng giống nhau vào k phòng: Room1, Room2, …, Roomk. Hỏi có bao nhiêu cách phân bổ khác nhau?
- Nếu gọi t_j là số lượng quả bóng thả vào Room$j$, $j = 1, 2, ..., n$; thì vấn đề đặt ra dẫn về bài toán: Hỏi phương trình sau đây

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k = n$$

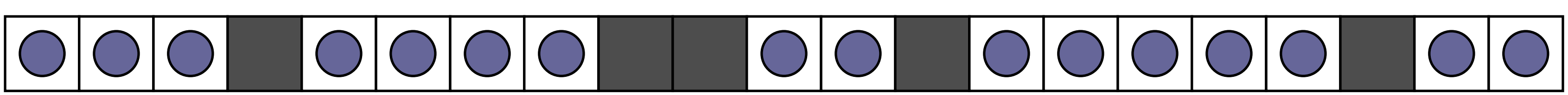
có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Giải bài toán chia kẹo

- Xét dãy $n+k$-1 hộp. Tô k-1 hộp nào đó bởi màu xám; các hộp xám này sẽ là vách ngăn: D1, D2, D(k-1).
- Ví dụ: với n=16, k=6

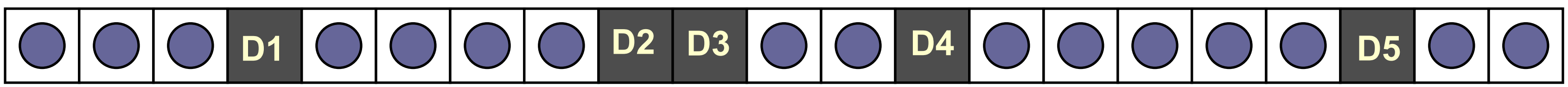


- Thả n quả bóng vào n hộp còn lại, mỗi hộp 1 quả.

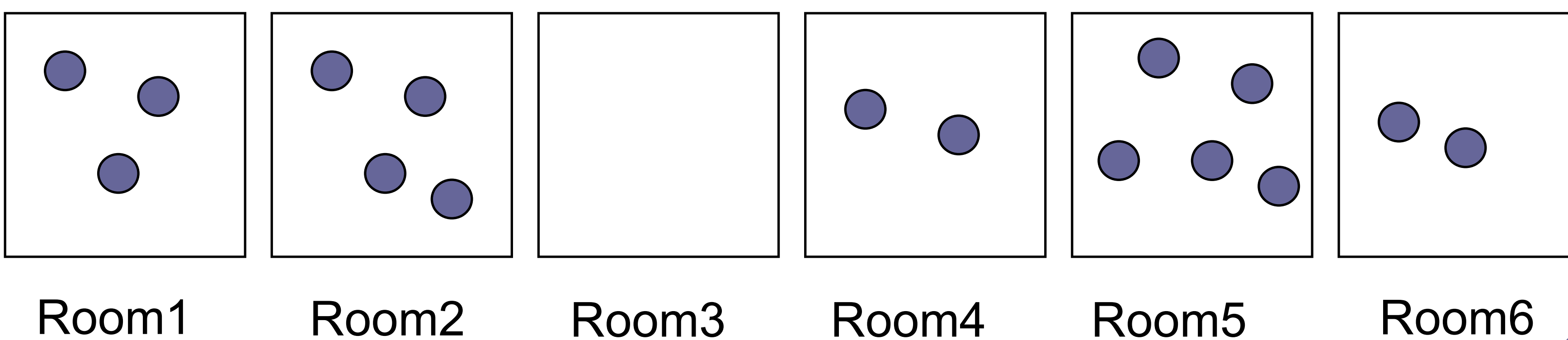


Giải bài toán chia kẹo

- Ví dụ, với n=16, k=6



- Thả các quả bóng trước vách ngăn D1 vào Room1, các quả bóng giữa vách ngăn D1 và D2 vào Room2, vân vân, và cuối cùng các quả bóng sau D(k-1) vào Room(k).



Giải bài toán chia kẹo

- Như vậy, rõ ràng tồn tại tương ứng 1-1 giữa một cách phân bổ các quả bóng và một cách chọn k-1 hộp trong số $n+k$-1 hộp làm vách ngăn.
- Do có tất cả

$$C_{n+k-1}^{k-1}$$

cách chọn k-1 hộp từ $n+k$-1 hộp, nên đó cũng chính là số cách phân bổ n quả bóng vào k phòng, cũng chính là số cách chia n cái kẹo cho k em bé và cũng chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k = n$$

Giải bài toán chia kẹo

- **Bài toán chia kẹo 2.** Có bao nhiêu cách chia n cái kẹo cho k em bé mà trong đó mỗi em được ít nhất một cái? Hay tương đương: Hỏi phương trình sau đây :

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_k = n.$$

  có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

- Trước hết chia cho mỗi em 1 cái kẹo, n-k cái kẹo còn lại sẽ được chia cho k em bé. Bài toán dẫn về: Hỏi có bao nhiêu cách chia n-k cái kẹo cho k em bé. Sử dụng kết quả bài trước, ta có đáp số cần tìm là**:**

$$C_{n-1}^{k-1}$$

Hệ số tổ hợp

- Díi ®©y lµ mét vµi tÝnh chÊt cña c¸c hÖ sè tæ hîp:

a) §èi xøng

$$C(n,m) = C(n,n-m)$$

b) §iÒu kiÖn ®Çu

$$C(n,0) = 1;\ \ C(n,n) = 1,\ n \geq 0$$

c) C«ng thøc ®Ö qui

$$C(n,m) = C(n-1,m) + C(n-1,\ m-1),\ \ n > m > 0$$

- Điều kiện đầu suy trực tiếp từ định nghĩa của hệ số tổ hợp. C¸c tính chất còn lại có thể chứng minh nhờ sử dụng công thức trong định lý 4.

Tổ hợp

- Từ b) và c), ta có thể tính tất cả các hệ số tổ hợp chỉ bằng phép cộng. Các hệ số này được tính và viết lần lượt theo từng dòng (mỗi dòng ứng với một giá trị *n*=0, 1, ...), trên mỗi dòng chúng được tính và viết lần lượt theo từng cột (mỗi cột ứng với một giá trị *m* = 0, 1, ..., *n*) theo bảng tam giác dưới đây:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
 & C_n^0 & & C_n^1 & & \cdots & & C_n^{n-1} & & C_n^n & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

- B¶ng nµy ®îc gäi lµ *tam gi¸c Pascal*.

Tổ hợp

- Tam giác Pascal, n=8

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Tổ hợp

- C¸c hÖ sè tæ hîp cã liªn quan chÆt chÏ víi viÖc khai triÓn luü thõa cña mét nhÞ thøc. ThËt vËy, trong tÝch

  $$(x+y)^n = (x+y)\,(x+y)\,.\,.\,.\,(x+y)$$

  hÖ sè cña $x^m\, y^{n-m}$ sÏ lµ sè c¸ch chän m nh©n tö (x + y) mµ tõ ®ã ta lÊy ra x vµ ®ång thêi trong n-m nh©n tö cßn l¹i ta lÊy ra y, nghÜa lµ

  $$(x+y)^n = C_n^0 y^n + \ldots + C_n^m x^m y^{n-m} + \ldots + C_n^n x^n$$

  $$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$$

C«ng thøc trên ®îc gäi lµ *khai triÓn nhÞ thøc Newton* vµ c¸c hÖ sè tæ hîp cßn ®îc gäi lµ c¸c *hÖ sè nhÞ thøc*.

Tổ hợp

- Trong c«ng thøc Niuton đặt y=1 ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \qquad (*)$$

- RÊt nhiÒu ®¼ng thøc vÒ hÖ sè tæ hîp ®îc suy tõ (*). Ch¼ng h¹n, trong (*) chän x =1 ta ®îc:

$$C(n,0) + C(n,1) + \ldots + C(n,n) = 2^n,$$

  tøc lµ nhËn ®îc kÕt qu¶ ®· biÕt: sè c¸c tËp con cña mét n-tËp b»ng 2^n, cßn nÕu chän x = -1 ta ®îc:

$$C(n,0) – C(n,1) + C(n,2) - \ldots + (-1)^n C(n,n) = 0,$$

  tøc lµ sè c¸c tËp con ch½n (cã sè phÇn tö lµ sè ch½n) b»ng c¸c sè tËp con lÎ vµ b»ng 2^{n-1}.

- NhiÒu tÝnh chÊt cña hÖ sè tæ hîp cã thÓ thu ®îc tõ (*) b»ng c¸ch lÊy ®¹o hµm hoÆc tÝch ph©n theo x hai vÕ cña ®¼ng thøc nµy mét sè h÷u h¹n lÇn, sau ®ã g¸n cho x nh÷ng gi¸ trÞ cô thÓ.

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

3. Nguyên lý bù trừ (The inclusion-exclusion principle)

3.1. Phát biểu nguyên lý

3.2. Các ví dụ áp dụng

3.1. Phát biểu nguyên lý

- Nguyên lý bù trừ trong trường hợp hai tập:

  $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (1)$$

  - Giả sử A có 5 phần tử, B có 3 phần tử và có 1 phần tử thuộc vào cả A lẫn B
  - Khi đó số phần tử của hợp hai tập là 5+3-1 = 7, chứ không phải là 8
- **CM:**

Nguyên lý bù trừ

- Mở rộng cho trường hợp 3 tập: Giả sử A, B, C là ba tập bất kỳ. Khi đó:

$|A \cup B \cup C|$

$= |(A \cup B) \cup C)|$

$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C)| + |A \cap B \cap C)|$

Vậy

$\mathbf{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C)| + |A \cap B \cap C)|} \qquad \mathbf{(2)}$

Có thể chứng minh bằng lập luận trực tiếp!

Nguyên lý bù trừ

$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+ |C| - |A \cap B| - |A \cap C|- |B \cap C)|+ |A \cap B \cap C)|$ **(2)**

Có thể chứng minh bằng lập luận trực tiếp:

- Trong tổng của ba số hạng đầu tiên các phần tử chung của A và B được tính hai lần, vì vậy phải trừ bớt đi một lần. Tương tự như vậy đối với các phần tử chung của A và C và các phần tử chung của B và C.
- Thế nhưng, trừ như vậy là hơi quá, bởi vì những phần tử chung của cả ba tập A, B và C chưa được tính đến trong tổng của 6 số hạng đầu tiên. Vì vậy phải cộng bù lại.

Nguyên lý bù trừ

- **§Þnh lý.** *Gi¶ sö $A_1, A_2, \ldots , A_m$ lµ c¸c tËp h÷u h¹n. Khi ®ã*

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m) = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{m-1} N_m$$

trong ®ã

$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

(N_k lµ tæng sè phÇn tö cña tÊt c¶ c¸c tËp lµ giao cña k tËp lÊy tõ m tËp ®· cho, nãi riªng

$$N_1 = N(A_1) + \ldots + N(A_m),$$

$$N_m = N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)).$$

Nguyên lý bù trừ

- **Chøng minh.**
- Chó ý r»ng, sè c¸c giao cña k tËp lÊy tõ m tËp b»ng $C(m,k)$, $k = 1,2,\ldots,m$.
- §Ó chøng minh c«ng thøc cña nguyªn lý bï trõ, ta sÏ tÝnh xem mçi phÇn tö cña tËp $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ ®îc ®Õm bao nhiªu lÇn trong vÕ ph¶i:
- XÐt mét phÇn tö tuú ý $a \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$. Gi¶ sö a lµ phÇn tö cña k tËp trong sè m tËp ®· cho. Khi ®ã a ®îc ®Õm ë vÕ ph¶i cña c«ng thøc

$$C(k,1) - C(k,2) + \ldots + (-1)^{k-1}C(k,k)$$

lÇn. Do

$$C(k,1) - C(k,2) + \ldots + (-1)^{k-1}C(k,k)$$

$$= 1 - [C(k,0) - (C(k,1) - C(k,2) + \ldots + (-1)^{k-1}C(k,k))] = 1 - (1 - 1)^k = 1$$

Tõ ®ã suy ra ®¼ng thøc cÇn chøng minh lµ ®óng

Nguyên lý bù trừ

- B©y giê ta ®ång nhÊt tËp A_k víi tÝnh chÊt A_k cho trªn mét tËp X nµo ®ã vµ ®Õm xem cã bao nhiªu phÇn tö cña X kh«ng tho¶ m·n bÊt cø mét tÝnh chÊt A_k nµo c¶.
- Gäi $\overline{N}$ lµ sè cÇn ®Õm. Do $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ lµ tËp tÊt c¶ c¸c phÇn tö cña X tho¶ m·n Ýt nhÊt mét trong sè m tÝnh chÊt ®· cho, nªn ta cã:

$$\overline{N} = N(X) - N(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m)$$

$$= N(X) - N_1 + N_2 - ... + (-1)^m N_m$$

  trong ®ã N_k lµ tæng c¸c phÇn tö cña X tho¶ m·n k tÝnh chÊt lÊy tõ m tÝnh chÊt ®· cho.
- C«ng thøc thu ®îc cho phÐp tÝnh $\overline{N}$ qua c¸c N_k trong trêng hîp c¸c sè nµy dÔ tÝnh to¸n h¬n.

3. Nguyên lý bù trừ
(The inclusion-exclusion principle)

3.1. Phát biểu nguyên lý

3.2. Các ví dụ áp dụng

Nguyên lý bù trừ

- **VÝ dô 1.** Hái trong tËp X = {1, 2, ..., 10000} cã bao nhiªu sè kh«ng chia hÕt cho bÊt cø sè nµo trong c¸c sè 3, 4, 7?
- **Gi¶i.** Gäi

$$A_i = \{ x \in X : x \text{ chia hÕt cho } i\},\ i = 3, 4, 7.$$

- Khi ®ã $A_3 \cup A_4 \cup A_7$ lµ tËp c¸c sè trong X chia hÕt cho Ýt nhÊt mét trong 3 sè 3, 4, 7, suy ra sè lîng c¸c sè cÇn ®Õm sÏ lµ

$$N(X) - N(A_3 \cup A_4 \cup A_7) = 10000 – (N_1 - N_2 + N_3).$$

- Ta cã

$$N_1 = N(A_3) + N(A_4) + N(A_7)$$

$$= [10000/3] + [10000/4] + [10000/7]$$

$$= 3333 + 2500 + 1428 = 7261,$$

Nguyên lý bù trừ

$$N_2 = N(A_3 \cap A_4) + N(A_3 \cap A_7) + N(A_4 \cap A_7)$$

$$= [10000/(3\times4)] + [10000/(3\times7)] + [10000/(4\times7)]$$

$$= 833 + 476 + 357 = 1666,$$

$$N_3 = N(A_3 \cap A_4 \cap A_7) = [10000/(3\times4\times7)\ ] = 119,$$

ë ®©y ký hiÖu [*r*] ®Ó chØ sè nguyªn lín nhÊt kh«ng vît qu¸ *r*.

- Tõ ®ã sè lîng c¸c sè cÇn ®Õm lµ

$$10000 - 7261 + 1666 - 119 = 4286.$$

Nguyên lý bù trừ

- **VÝ dô 2.** Cã bao nhiªu x©u nhÞ ph©n ®é dµi 10 hoÆc lµ b¾t ®Çu bëi 00 hoÆc lµ kÕt thóc bëi 11?
- **Gi¶i**. DÔ thÊy lµ sè x©u nhÞ ph©n ®é dµi 10 b¾t ®Çu bëi 00 lµ $2^8 = 256$ vµ sè x©u nhÞ ph©n ®é dµi 10 kÕt thóc bëi 11 lµ $2^8 = 256$. Ngoµi ra, sè x©u nhÞ ph©n ®é dµi 10 b¾t ®Çu bëi 00 vµ kÕt thóc bëi 11 lµ $2^6 = 64$. Theo nguyªn lý bï trõ suy ra sè x©u nhÞ ph©n hoÆc b¾t ®Çu bëi 00 hoÆc kÕt thóc bëi 11 lµ

$$256 + 256 - 64 = 448.$$

Nguyên lý bù trừ: Bài toán bỏ thư

- **Bµi to¸n bá th**. Cã *n* l¸ th vµ *n* phong b× ghi s½n ®Þa chØ. Bá ngÉu nhiªn c¸c l¸ th vµo c¸c phong b×. Hái x¸c suÊt ®Ó x¶y ra kh«ng mét l¸ th nµo bá ®óng ®Þa chØ lµ bao nhiªu?
- **Gi¶i**: §¸nh sè c¸c l¸ th tõ 1 ®Õn *n*, c¸c phong b× t¬ng øng víi chóng còng ®îc ®¸nh sè tõ 1 ®Õn *n*. Mçi c¸ch bá th vµo phong b× cã thÓ biÓu diÔn bëi bé cã thø tù

$$(p_1, p_2, ..., p_n),$$

trong ®ã p_i lµ phong b× bá l¸ thø thø *i*. Tõ ®ã suy ra tån t¹i t¬ng øng 1-1 gi÷a mét c¸ch bá th vµo phong b× víi mét ho¸n vÞ cña n sè. VËy cã tÊt c¶ *n*! c¸ch bá th.

Nguyên lý bù trừ: Bài toán bỏ thư

- VÊn ®Ò cßn l¹i lµ ®Õm sè c¸ch bá th sao cho kh«ng cã l¸ th nµo ®óng ®Þa chØ.
- Gäi *X* lµ tËp hîp tÊt c¶ c¸c c¸ch bá th vµ A_k lµ tÝnh chÊt l¸ th thø *k* bá ®óng ®Þa chØ. Khi ®ã, theo nguyªn lý bï trõ ta cã:

$$\overline{N} = N(X) - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^n N_n$$

trong ®ã $\overline{N}$ lµ sè cÇn t×m, $N(X) = n!$, cßn N_k lµ sè tÊt c¶ c¸c c¸ch bá th sao cho cã *k* l¸ th ®óng ®Þa chØ.

Nguyên lý bù trừ: Bài toán bỏ thư

- Chó ý lµ

$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

- nghÜa lµ, N_k lµ tæng theo mäi c¸ch lÊy k l¸ th tõ n l¸, víi mçi c¸ch lÊy k l¸ th, cã $(n-k)!$ c¸ch bá trong ®ã k l¸ nµy ®óng ®Þa chØ, ta nhËn ®îc:

$$N_k = C(n, k).(n-k)! = n! / k!$$

- Do ®ã

$$\overline{N} = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

- VËy x¸c suÊt cÇn t×m lµ:

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Nguyên lý bù trừ

- Mét ®iÒu lý thó lµ x¸c suÊt nµy dÇn ®Õn e^{-1} (nghÜa lµ cßn lín h¬n 1/3) khi *n* kh¸ lín. Sè trong bµi to¸n trªn ®îc gäi lµ *sè mÊt thø tù* vµ ®îc ký hiÖu lµ D_n. Díi ®©y lµ mét vµi gi¸ trÞ cña D_n, cho ta thÊy D_n t¨ng nhanh thÕ nµo so víi *n*:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_n	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961	4890741

Số lượng toàn ánh

Giả sử $A=\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ và $B=\{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

Trong các phần trước ta đã chứng minh:

- Số lượng ánh xạ từ A vào B là n^m
- Số lượng đơn ánh từ A vào B là $n(n-1)...(n-m+1)$ $(n \geq m)$.
- Số lượng song ánh từ A vào B là $n!$ $(n=m)$.

Bây giờ giả sử $m \geq n$, ta cần đếm số lượng toàn ánh từ A vào B.

Nhắc lại: Ánh xạ f từ A vào B là toàn ánh nếu với mỗi phần tử b thuộc B đều tìm được a thuộc A sao cho $f(a)=b$. (Do mỗi phần tử của A qua ánh xạ f được đặt tương ứng với đúng một phần tử của B, nên muốn có toàn ánh từ A vào B thì rõ ràng ta phải có $m \geq n$.)

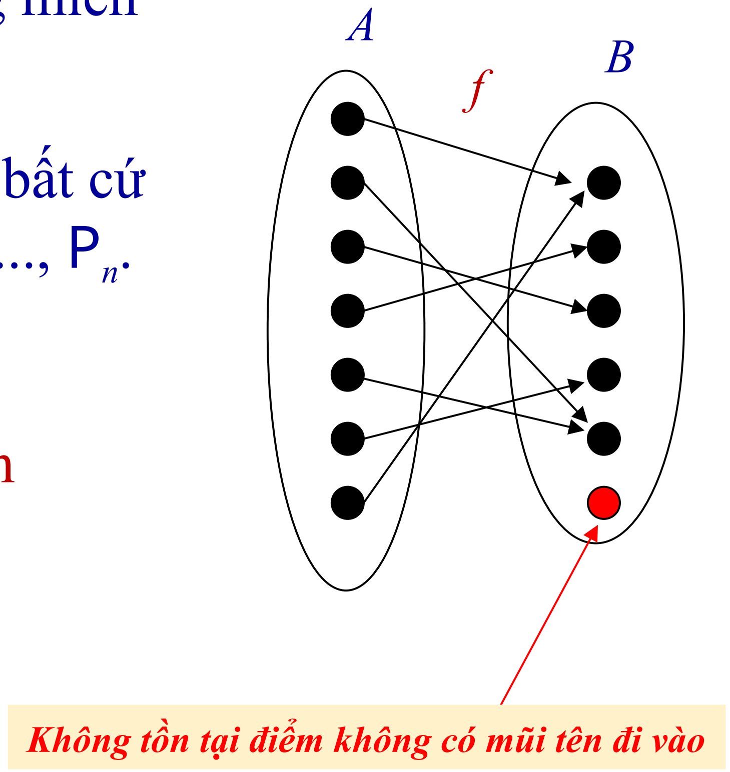
Số lượng toàn ánh

Ta muốn tất cả b_i đều thuộc miền giá trị của f. Gọi P_i là tính chất "b_i không nằm trong miền giá trị của f".

Khi đó ta cần đếm số ánh xạ không có bất cứ tính chất nào trong số các tính chất $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n$.

Ký hiệu:

P_i = tập các ánh xạ từ A vào B có tính chất P_i , $i = 1, 2, \ldots, n$.



$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Số lượng toàn ánh

- Theo nguyên lý bù trừ số lượng toàn ánh cần đếm là:

  $$N - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^n N_n.$$

- Ta có:
  - N - số ánh xạ từ m-tập A vào n-tập B: n^m
  - Do $N(P_i)$ - số ánh xạ không có b_i trong miền giá trị, nên $N(P_i) = (n-1)^m$, do đó $N_1 = C(n,1)\,(n-1)^m$
  - Do $N(P_i \cap P_j)$ - số ánh xạ không có b_i và b_j trong miền giá trị, nên $N(P_i \cap P_j) = (n-2)^m$, do đó $N_2 = C(n,2)\,(n-2)^m$.

    $$N(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k}) = (n-k)^m$$
  - Tổng quát ta có:

    dó đó $N_k = C(n,k)\,(n - k)^m$.

- Từ đó ta có số lượng toàn ánh là:

  $n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m.$

Số lượng toàn ánh

- Ta viết gọn công thức

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m.$$

dưới dạng sau đây:

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m$$

$$= C_n^0(n-0)^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m + (-1)^n C_n^n 0^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

4. Công thức đệ qui

- Công thức đệ qui là công thức cho phép tính giá trị của các đại lượng theo từng bước, dựa vào các giá trị tính ở các bước trước và một số giá trị đầu.
- Là một kỹ thuật quan trọng cho phép giải nhiều bài toán đếm

4. Công thức đệ qui

- 4.1. Xây dựng công thức đệ qui
- 4.2. Giải công thức đệ qui

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Ví dụ 1.** Xây dựng công thức đệ qui cho $C(n,k)$ - số lượng tập con k phần tử của tập n phần tử X.
- **Giải:**
- Theo định nghĩa

$$C(n,0) = 1 \text{ và } C(n,n) = 1 \qquad (1)$$

- Giả sử $n > k > 0$, ta xây dựng công thức đệ qui để tính $C(n,k)$. Cố định một phần tử $x \in X$. Phân tập các tập con k phần tử của X ra thành 2 tập:
  - A – tập các tập con k phần tử có chứa x
  - B – tập các tập con k phần tử không chứa x

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Rõ ràng A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các tập con k phần tử của X. Do đó, theo nguyên lý cộng:

$$C(n,k) = |A| + |B|.$$

- Ta có:
  - Do mỗi tập con trong A có chứa x, nên k-1 phần tử còn lại của nó là một tập con k-1 phần tử của tập $X \setminus \{x\}$, suy ra

$$|A| = C(n-1,k-1)$$

  - Tương tự như vậy,

$$|B| = C(n-1, k)$$

- Vậy,

$$C(n,k) = C(n-1, k-1) + C(n-1,k), \quad n > k > 0 \qquad (2)$$

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Công thức đệ qui (2) cùng với điều kiện đầu (1) cho phép tính giá trị của $C(n,k)$ với mọi giá trị của n và k.
- Công thức đệ qui (2) cho phép viết hàm đệ qui sau đây để tính giá trị của $C(n,k)$:

```
function C(n,k: integer): longint;
begin
     if (k=0) or (k=n) then C:=1
     else C:= C(n-1,k-1) + C(n-1,k);
end;
```

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Hàm vừa xây dựng không cho một cách tính hiệu quả. Thực vậy, nếu gọi $C^*(n,k)$ là số phép toán "gán giá trị" phải thực hiện bởi lệnh gọi hàm $C(n,k)$, dễ thấy

$$C^*(n,0) = 1;\ C^*(n,n) = 1$$

$$C^*(n,k) = C^*(n-1, k-1) + C^*(n-1,k)+1, \quad n > k > 0$$

tức là $C^*(n,k)$ thoả mãn công thức đệ qui tương tự như hệ số tổ hợp $C(n, k)$, do đó:

$$C^*(n,k) \sim n!/[k!(n-k)!]$$

và giá trị này là rất lớn khi n lớn và $k = n/2$.

- Dễ dàng xây dựng một hàm lặp để tính giá trị của $C(n,k)$ một cách hiệu quả hơn.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **VÝ dô 2**. Trªn mÆt ph¼ng, kÎ n ®êng th¼ng sao cho kh«ng cã 2 ®êng nµo song song vµ 3 ®êng nµo ®ång quy. Hái mÆt ph¼ng ®îc chia thµnh mÊy phÇn ?
- **Gi¶i**: Gäi sè phÇn mÆt ph¼ng ®îc chia bëi n ®êng th¼ng lµ S_n. Râ ràng

$$S_1 = 2, \qquad (3)$$

- XÐt $n > 1$, ta t×m c«ng thøc ®Ö qui cho S_n.

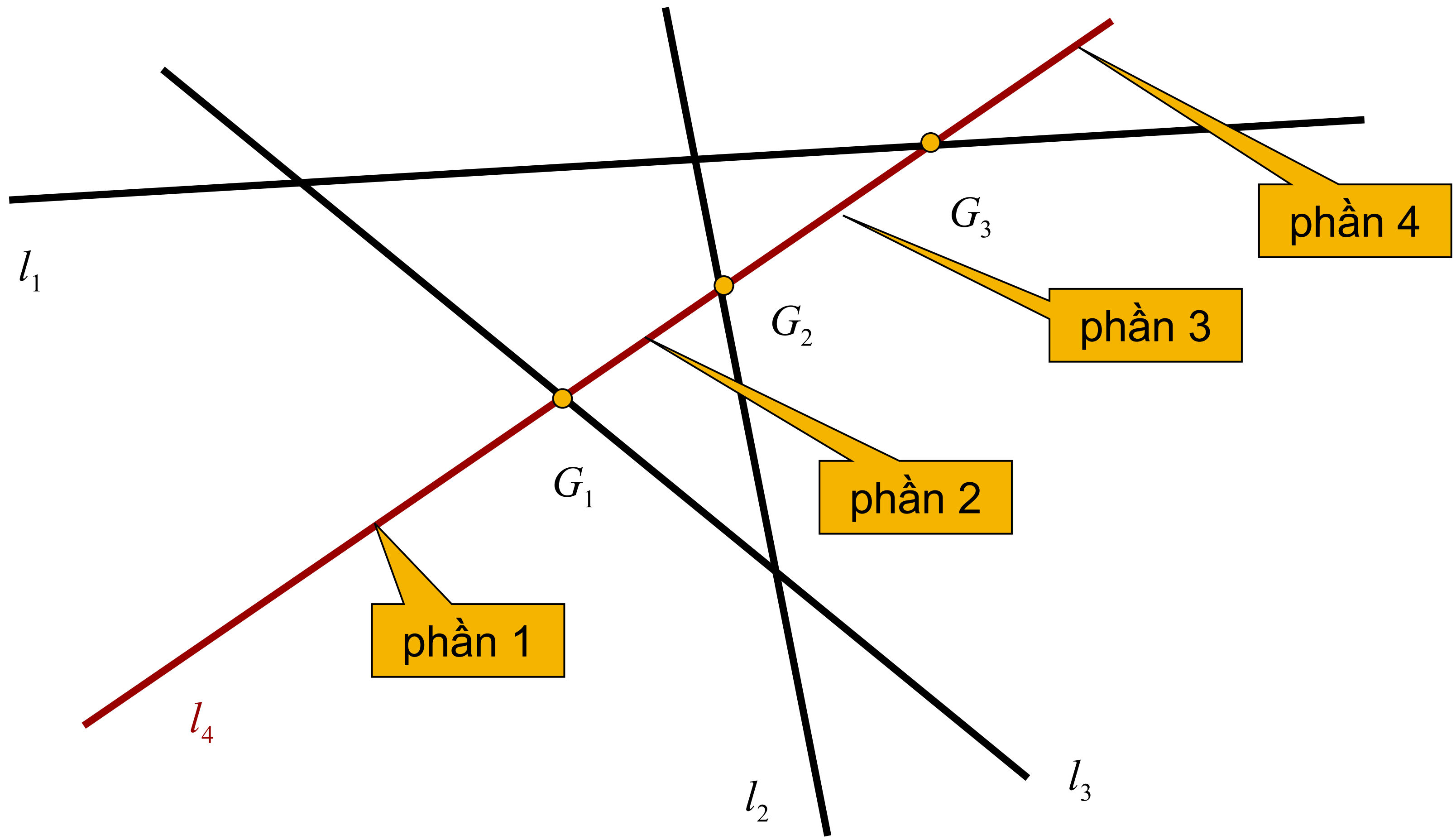
4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Gi¶ sö ®· kÎ n-1 ®êng th¼ng, khi ®ã mÆt ph¼ng ®îc chia ra lµm S_{n-1} phÇn. B©y giê kÎ thªm ®êng th¼ng thø n. §êng th¼ng nµy c¾t n-1 ®êng th¼ng ®· vÏ t¹i n-1 giao ®iÓm. C¸c giao ®iÓm nµy chia ®êng th¼ng thø n ra lµm n phÇn, mçi phÇn nh vËy sÏ chia mét phÇn nµo ®ã sinh bëi n-1 ®êng th¼ng vÏ tríc ®ã ra lµm hai phÇn. Tõ ®ã suy ra, sau khi vÏ ®êng th¼ng thø n sè phÇn t¨ng thªm lµ n. Tõ ®ã nhËn ®îc c«ng thøc ®Ö qui

$$S_n = S_{n-1} + n, \quad n \geq 2$$

(4)

4.1 Xây dựng công thức đệ qui



4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- §Ó t×m c«ng thøc trùc tiÕp, ta céng c¸c hÖ thøc $S_k = S_{k-1} + k$ víi $k = 2, \ldots, n$.

$$S_1 = 2$$
$$S_2 = S_1 + 2$$
$$S_3 = S_2 + 3$$
$$\ldots$$
$$S_{n-1} = S_{n-2} + (n-1)$$
$$S_n = S_{n-1} + n$$

$$S_n = 2 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = n(n+1)/2 + 1 = (n^2+n+2)/2$$

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Ví dụ 3.** Xây dựng công thức đệ qui cho f_n là số chỉnh hợp lặp chập n từ hai phần tử 0, 1 (cũng chính là xâu nhị phân độ dài n) không chứa hai số 0 liền nhau.
- **Giải.** Ta có

$$f_1 = 2; f_2 = 3$$

Giả sử $n > 2$. Phân tập các chỉnh hợp cần đếm ra thành 2 tập:

  - A – tập các chỉnh hợp cần đếm chứa 1 ở vị trí đầu tiên;
  - B – tập các chỉnh hợp cần đếm chứa 0 ở vị trí đầu tiên;

- Rõ ràng A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các chỉnh hợp cần đếm.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Do đó, theo nguyên lý cộng:

$$f_n = |A| + |B|.$$

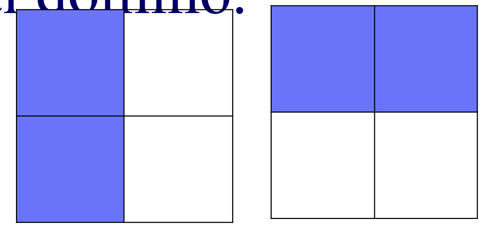
- Ta có:
  - Do mỗi chỉnh hợp trong A chứa 1 ở vị trí đầu tiên, nên n-1 phần tử còn lại sẽ tạo thành một chỉnh hợp cần đếm độ dài n-1, suy ra: $|A| = f_{n-1}$
  - Do mỗi chỉnh hợp trong B chứa 0 ở vị trí đầu tiên, nên vị trí thứ hai của nó phải là 1 còn n-2 phần tử còn lại sẽ tạo thành một chỉnh hợp cần đếm độ dài n-2, suy ra: $|B| = f_{n-2}$
- Vậy, ta thu được công thức đệ qui

$$f_1 = 2; f_2 = 3;$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \ n > 2 \qquad (5)$$

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Ví dụ 4.** Xây dựng công thức đệ qui cho Q_n là số lượng cách phủ lưới ô vuông kích thước $2\times n$ bằng các quân bài domino.



- **Giải.** Ta có

  $Q_1 = 1$; $Q_2 = 2$ (xem hình vẽ)

- Giả sử $n > 2$. Phân tập các cách phủ cần đếm ra thành 2 tập:
  - A – tập các cách phủ trong đó ô ở góc trên trái được phủ bởi quân bài nằm đứng;
  - B – tập các cách phủ trong đó ô ở góc trên trái được phủ bởi quân bài nằm ngang.
- Rõ ràng A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các cách phủ cần đếm.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Do đó, theo nguyên lý cộng:

$$Q_n = |A| + |B|.$$

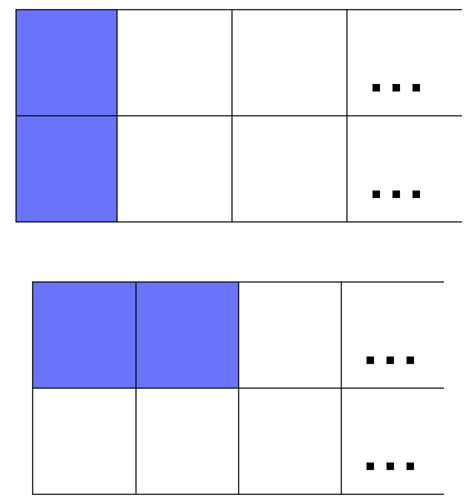
- Ta có:
  - $|A| = Q_{n\text{-}1}$
  - $|B| = Q_{n\text{-}2}$
- Vậy, ta thu được công thức đệ qui

$$Q_1 = 1;\ Q_2 = 2;$$

$$Q_n = Q_{n\text{-}1} + Q_{n\text{-}2},\quad n > 2 \qquad (6)$$

A

B



4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **VÝ dô 5.** (Bµi to¸n th¸p Hµ néi). Trß ch¬i th¸p Hµ néi ®îc tr×nh bµy nh sau: *"Cã 3 cäc a, b, c. Trªn cäc a cã mét chång gåm n c¸i ®Üa ®êng kÝnh gi¶m dÇn tõ díi lªn trªn. CÇn ph¶i chuyÓn chång ®Üa tõ cäc a sang cäc c tu©n thñ qui t¾c: mçi lÇn chØ chuyÓn* 1 *®Üa vµ chØ ®îc xÕp ®Üa cã ®êng kÝnh nhá h¬n lªn trªn ®Üa cã ®êng kÝnh lín h¬n. Trong qu¸ tr×nh chuyÓn ®îc phÐp dïng cäc b lµm cäc trung gian".* Bµi to¸n ®Æt ra lµ: Tìm công thức đệ qui cho h_n là sè lÇn di chuyÓn ®Üa Ýt nhÊt cÇn thùc hiÖn ®Ó hoàn thành nhiÖm vô ®Æt ra trong trß ch¬i th¸p Hµ néi.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Gi¶i: R**â rµng:

$$h_1 = 1.$$

- Gi¶ sö $n \geq 2$. ViÖc di chuyÓn ®Üa gåm c¸c bíc:

(i) ChuyÓn *n*-1 ®Üa tõ cäc *a* ®Õn cäc *b* sö dông cäc *c* lµm trung gian. Bíc nµy ®îc thùc hiÖn nhê gi¶ thiÕt quy n¹p.

(ii) ChuyÓn 1 ®Üa (®Üa víi ®êng kÝnh lín nhÊt) tõ cäc *a* ®Õn cäc *c*.

(iii) ChuyÓn *n*-1 ®Üa tõ cäc *b* ®Õn cäc *c* (sö dông cäc *a* lµm trung gian). Bíc nµy ®îc thùc hiÖn nhê gi¶ thiÕt quy n¹p.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Bíc (i) vµ (iii) ®ßi hái gi¶i bµi to¸n th¸p Hµ néi víi n-1 ®Üa, v× vËy sè lÇn di chuyÓn ®Üa Ýt nhÊt cÇn thùc hiÖn trong hai bíc nµy lµ $2h_{n-1}$. Do ®ã ta cã c«ng thøc ®Ö qui sau:

$$h_n = 2h_{n-1} + 1,\ n \geq 2.$$

- Sö dông c«ng thøc ®Ö qui vµ ®iÒu kiÖn ®Çu võa t×m ®îc ®èi víi h_n ta cã thÓ dÔ dµng chøng minh b»ng qui n¹p lµ

$$h_n = 2^n - 1,\ n \geq 1.$$

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Ta có thể tìm được công thức trực tiếp cho h_n bằng phương pháp thế:

$$h_n = 2\, h_{n-1} + 1$$

$$= 2\,(2\, h_{n-2} + 1) + 1 \qquad = 2^2 h_{n-2} + 2 + 1$$

$$= 2^2(2\, h_{n-3} + 1) + 2 + 1 \qquad = 2^3\, h_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

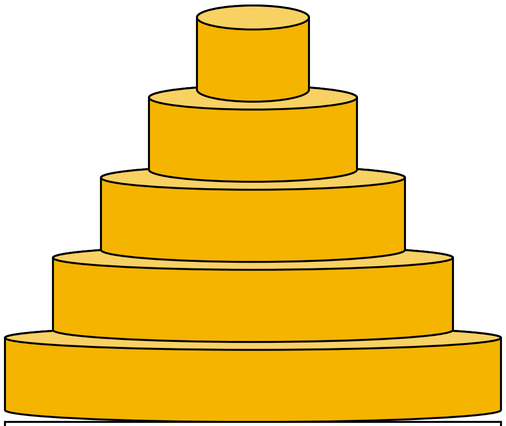
$$\ldots$$

$$= 2^{n-1}\, h_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \qquad \text{(do } h_1 = 1\text{)}$$

$$= 2^n - 1$$

Tower of Hanoi: n=5



Cọc a	Cọc c	Cọc b

4. Công thức đệ qui

- 4.1. Xây dựng công thức đệ qui
- 4.2. Giải công thức đệ qui

§4.2. Giải công thức đệ qui

- Ta hiểu việc giải công thức đệ qui là việc tìm công thức dưới dạng hiện cho số hạng tổng quát của dãy số thoả mãn công thức đệ qui đã cho.
- Chưa có phương pháp giải mọi công thức đệ qui.
- Sẽ xét phương pháp giải công thức đệ qui tuyến tính thuần nhất hệ số hằng (sẽ viết tắt là CTĐQ TTTNHSH)

§4.2. Giải công thức đệ qui

- **Định nghiã.** *Công thức đệ qui tuyến tính thuần nhất hệ số hằng bậc k* là công thức đệ qui sau

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

trong đó c_i là các hằng số, và $c_k \neq 0$.

- Dãy số thoả mãn công thức đã cho là xác định duy nhất nếu đòi hỏi nó thoả mãn k điều kiện đầu

$$a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = C_{k-1},$$

trong đó $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ là các hằng số.

- **Ví dụ:**

1) $a_n = 4a_{n-1} + 2na_{n-3}$

2) $h_n = 2h_{n-1} + 1$

3) $b_n = 5b_{n-2} + 2(b_{n-3})^2$

4) $q_n = 3\, q_{n-6} + q_{n-8}$

Giải CTĐQ TTTNHSH

- Ta sẽ tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số.
- Dãy số $\{a_n = r^n\}$ thoả mãn CTĐQ đã cho nếu r thoả mãn phương trình:

  $r^n = c_1 r^{n-1} + \ldots + c_k r^{n-k}$, hay

  $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$

  (chuyển vế và $\times$ với r^{k-n})
- Phương trình cuối cùng được gọi là *phương trình đặc trưng, còn nghiệm của nó* sẽ được gọi là *nghiệm đặc trưng* của CTĐQ TTTNHSH.
- Ta có thể sử dụng nghiệm đặc trưng để thu được công thức cho dãy số.

Giải CTĐQ TTTNHSH

- **§Þnh lý 1.** *Cho* c_1, c_2 *lµ c¸c h»ng sè thùc. Gi¶ sö ph¬ng tr×nh* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *cã hai nghiÖm ph©n biÖt* r_1 *vµ* r_2. *Khi ®ã d·y sè* $\{a_n\}$ *lµ nghiÖm cña c«ng thøc ®Ö qui*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi vµ chØ khi

$$a_n = \alpha_1(r_1)^n + \alpha_2(r_2)^n \qquad (5)$$

$n = 0, 1, \ldots,$ *trong ®ã* α_1 , α_2 *lµ c¸c h»ng sè.*

Giải CTĐQ TTTNHSH

- **Chøng minh.** Tríc hÕt ta chøng minh r»ng nÕu r_1 vµ r_2 lµ hai nghiÖm ph©n biÖt cña ph¬ng tr×nh ®Æc trng, vµ α_1 , α_2 lµ c¸c h»ng sè, th× d·y sè $\{a_n\}$ x¸c ®Þnh bëi c«ng thøc (5) lµ nghiÖm cña c«ng thøc ®Ö qui ®· cho.
- Thùc vËy, do r_1 vµ r_2 lµ nghiÖm ®Æc trng nªn

$$r_1^2 = c_1 r_1 + c_2 ,$$

$$r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$$

Giải CTĐQ TTTNHSH

- Tõ ®ã suy ra

$c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

$= c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2})$

$= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2)$

$= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2$

$= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$= a_n$.

Giải CTĐQ TTTNHSH

- B©y giê ta sÏ chØ ra r»ng nghiÖm {a_n} cña c«ng thøc ®Ö qui $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ lu«n cã d¹ng (5) víi α_1, α_2 nµo ®ã.
- Thùc vËy, gi¶ sö {a_n} lµ nghiÖm cña c«ng thøc ®· cho víi ®iÒu kiÖn ®Çu

$$a_0 = C_0\,,\ a_1 = C_1, \qquad (6)$$

- Ta chØ ra r»ng cã thÓ t×m ®îc c¸c sè α_1 , α_2 ®Ó cho (5) lµ nghiÖm cña hÖ thøc víi ®iÒu kiÖn ®Çu nµy.

Giải CTĐQ TTTNHSH

- Ta cã

$$a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2\,,$$
$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2.$$

- HÖ ph¬ng tr×nh tuyÕn tÝnh phô thuéc hai Èn α_1, α_2 nµy cã ®Þnh thøc lµ $r_2 - r_1 \neq 0$ (do $r_1 \neq r_2$) cã nghiÖm duy nhÊt

$$\alpha_1 = (C_1 - C_0 r_2)/(r_1 - r_2),\ \ \alpha_2 = (C_0\, r_1 - C_1)/(r_1 - r_2).$$

- Víi nh÷ng gi¸ trÞ cña α_1 , α_2 võa t×m ®îc, d·y $\{a_n\}$ x¸c ®Þnh theo (5) lµ nghiÖm cña hÖ thøc ®· cho víi ®iÒu kiÖn ®Çu (6). Do hÖ thøc ®· cho cïng víi ®iÒu kiÖn ®Çu (6) x¸c ®Þnh duy nhÊt mét d·y sè, nªn nghiÖm cña hÖ thøc ®îc cho bëi c«ng thøc (5).
- §Þnh lý ®îc chøng minh.

VÝ dô

- D·y Fibonaci trong to¸n häc ®îc ®Þnh nghÜa b»ng hÖ thøc truy håi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ n \geq 2,$$

$$F_0 = 0, \ F_1 = 1.$$

  T×m c«ng thøc hiÖn cho F_n.

Leonardo Fibonacci
1170-1250

- **Gi¶i:** Gi¶i ph¬ng tr×nh ®Æc trng:

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

ta thu ®îc hai nghiÖm ®Æc trng

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

VÝ dô

- Do ®ã c«ng thøc hiÖn cã d¹ng:

$$F_n = \alpha_1.(r_1)^n + \alpha_2.(r_2)^n$$

$F_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$F_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = 1$

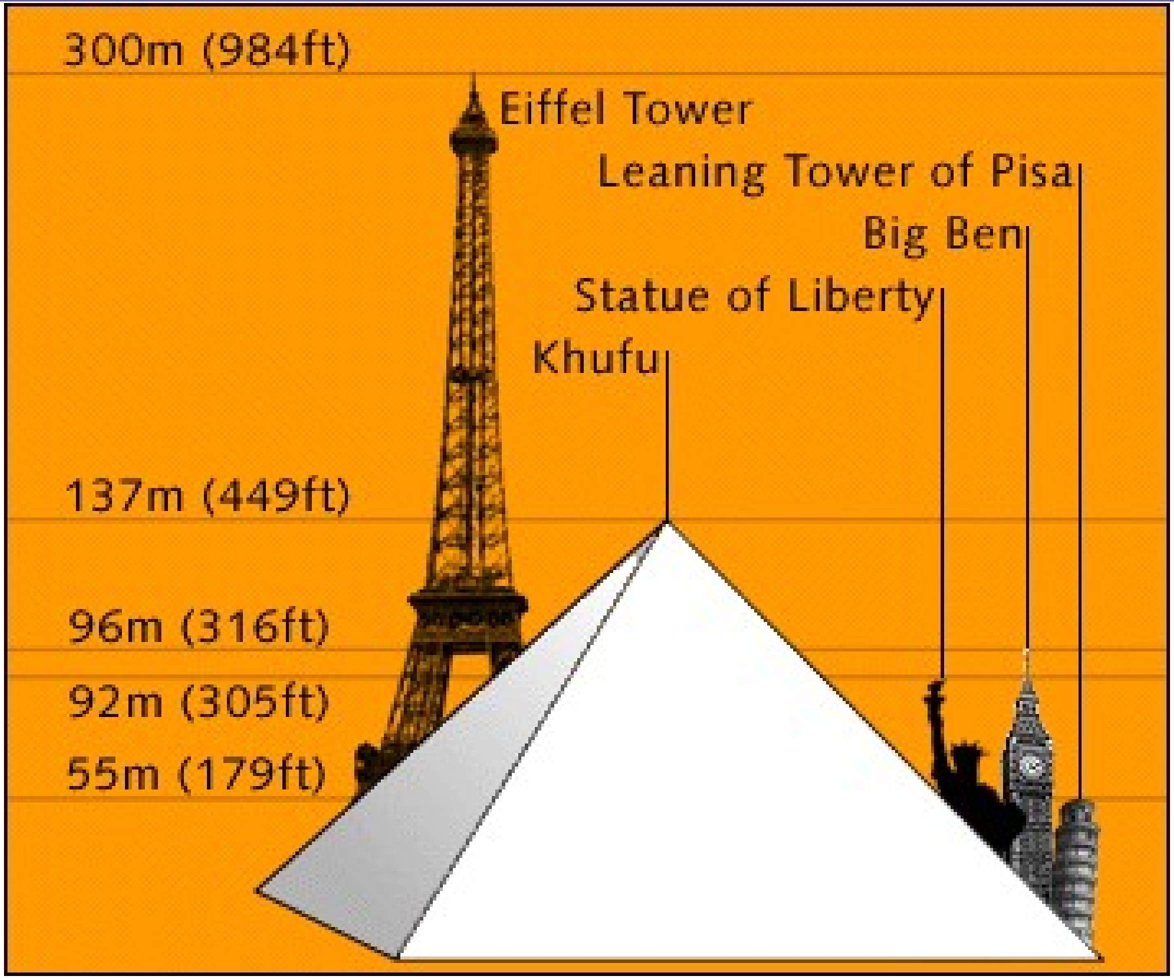
trong ®ã α_1, α_2 lµ c¸c h»ng sè cÇn x¸c ®Þnh tõ c¸c gi¸ trÞ ban ®Çu F_0, F_1. Gi¶i hÖ PTTT nµy, ta cã: $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

C«ng thøc Muavre

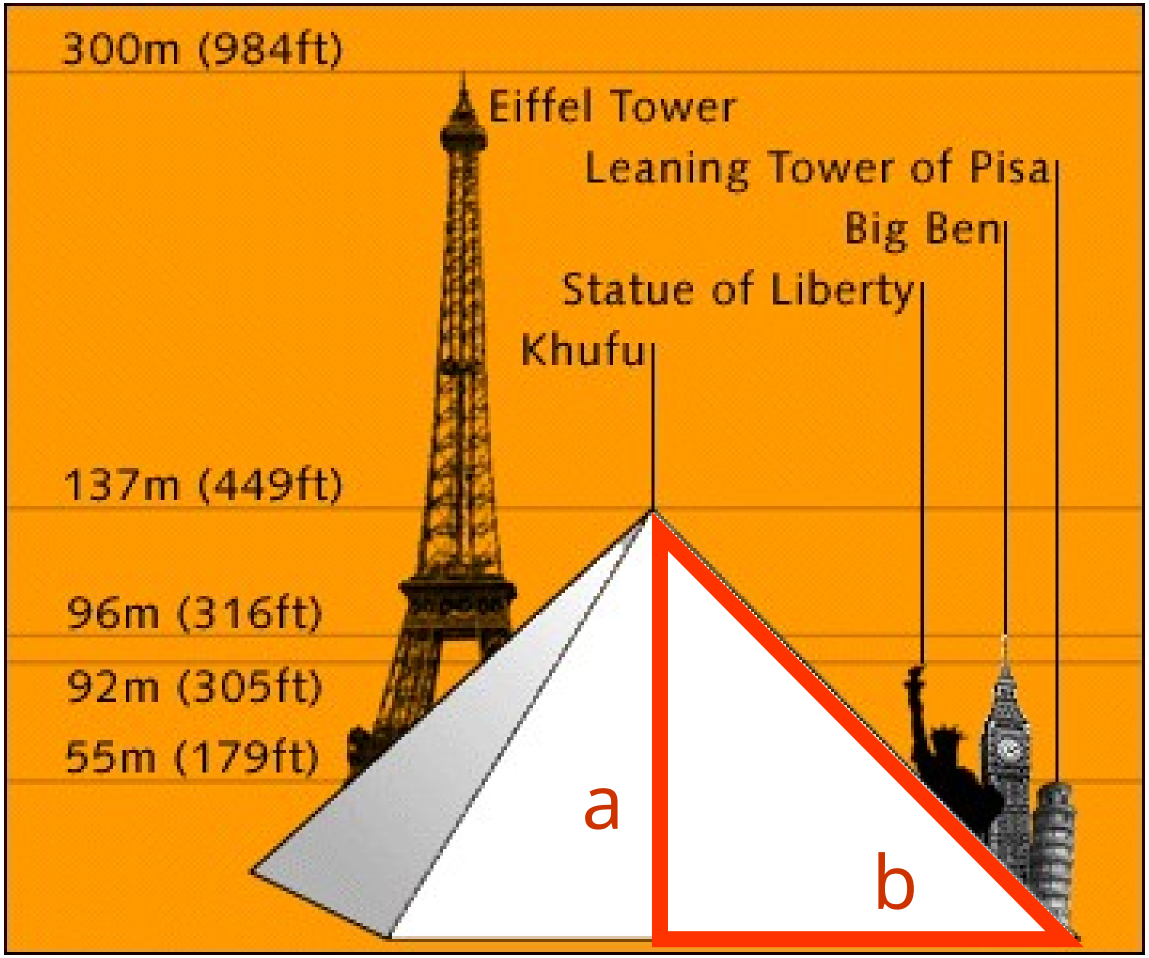
vµ tõ ®ã thu ®îc

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \geq 0.$$

Great Pyramid at Gizeh

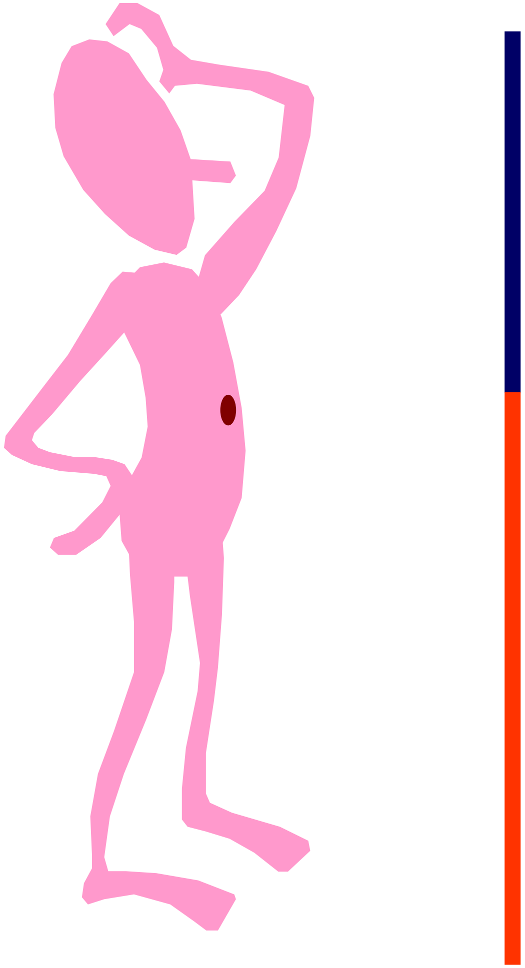


$$\frac{a}{b} = 1.618$$



300m (984ft)
Eiffel Tower
Leaning Tower of Pisa
Big Ben
Statue of Liberty
Khufu
137m (449ft)
96m (316ft)
92m (305ft)
55m (179ft)
a
b

Tỷ lệ giữa chiều cao và lưng



Định nghĩa tỷ lệ vàng φ (Euclid)

- Tỷ lệ thu được khi chia đoạn thẳng ra 2 phần không bằng nhau sao cho tỷ lệ giữa đoạn thẳng đã cho và đoạn con lớn hơn là bằng tỷ lệ giữa đoạn lớn hơn và đoạn nhỏ hơn.

$$\phi = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\phi^2 = \frac{AC}{BC}$$

$$\phi^2 - \phi = \frac{AC}{BC} - \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

$$\boxed{\phi^2 - \phi - 1 = 0}$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

1

□

Trường hợp nghiệm kép

- **§Þnh lý 2.** *Cho c_1, c_2 lµ c¸c h»ng sè thùc, $c_2 \neq 0$. Gi¶ sö ph¬ng tr×nh $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ cã nghiÖm kÐp r_0. Khi ®ã d·y sè $\{a_n\}$ lµ nghiÖm cña c«ng thøc ®Ö qui*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi vµ chØ khi

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$$

$n = 0, 1, \ldots$, trong ®ã α_1, α_2 lµ c¸c h»ng sè.

Ví dụ

- T×m nghiÖm cho c«ng thøc ®Ö qui

$$a_n = 6\, a_{n-1} - 9\, a_{n-2}$$

  víi ®iÒu kiÖn ®Çu $a_0 = 1$ vµ $a_1 = 6$.
- **Gi¶i:** PT§T $r^2 - 6r + 9 = 0$ cã nghiÖm kÐp $r = 3$. Do ®ã nghiÖm cña hÖ thøc cã d¹ng:

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2\, n\, 3^n.$$

- §Ó t×m α_1, α_2, sö dông ®iÒu kiÖn ®Çu ta cã

$$a_0 = 1 = \alpha_1,$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 . 3 + \alpha_2 . 3.$$

- Gi¶i hÖ nµy ta t×m ®îc $\alpha_1 = 1$ *vµ* $\alpha_2 = 1$. Tõ ®ã nghiÖm cña hÖ thøc ®· cho lµ:

$$\boldsymbol{a_n = 3^n + n\, 3^n}.$$

Trường hợp tổng quát

- **§Þnh lý 3.** *Cho c_1, c_2, ..., c_n lµ c¸c sè thùc. Gi¶ sö ph¬ng tr×nh ®Æc trng*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

cã k nghiÖm ph©n biÖt r_1, r_2, ..., r_k . Khi ®ã d·y sè $\{a_n\}$ lµ nghiÖm cña c«ng thøc

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

khi vµ chØ khi

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$$

víi $n = 0, 1, 2, \dots,$ *trong ®ã α_1, α_2, ..., α_k lµ c¸c h»ng sè.*

Ví dụ

- T×m nghiÖm cña công thức đệ qui

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 11\,a_{n-2} + 6\,a_{n-3}$$

víi ®iÒu kiÖn ®Çu

$$a_0 = 2,\ \ a_1 = 5,\ \ a_2 = 15.$$

- **Gi¶i:** Ph¬ng tr×nh ®Æc trng

$$r^3 - 6\,r^2 + 11\,r - 6 = 0$$

cã 3 nghiÖm $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. V× vËy, nghiÖm cã d¹ng

$$a_n = \alpha_1\,1^n + \alpha_2\,2^n + \alpha_3\,3^n.$$

Ví dụ

- Sö dông c¸c ®iÒu kiÖn ®Çu ta cã hÖ ph¬ng tr×nh sau ®©y ®Ó x¸c ®Þnh c¸c h»ng sè α_1, α_2, α_3:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2.2 + \alpha_3.3$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2.4 + \alpha_3.9.$$

- Gi¶i hÖ ph¬ng tr×nh trªn ta thu ®îc

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1\ v\mu\ \ \alpha_3 = 2.$$

- VËy nghiÖm cña c«ng thøc ®· cho lµ

$$a_n = 1 - 2^n + 2.\ 3^n\ .$$

Trường hợp tổng quát

- Xét CTĐQ TTTNHSH bậc *k*: $a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$
- PTĐT của nó là:

$$r^k - \sum_{i=1}^{k} c_i r^{k-i} = 0$$

- **Định lý 4:** Nếu PTĐT có t nghiệm $r_1,\ldots,r_t$ với bội tương ứng là $m_1,\ldots,m_t$ ($m_1+\ldots+m_t=k$). Khi đó:

$$a_n = \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} n^j \right) r_i^n$$

với $n \geq 0$, và α_{ij} là các hằng số.

Ví dụ

Giải công thức đệ qui:

$$c_n = -4c_{n-1} + 3c_{n-2} + 18c_{n-3}\ , \quad n \geq 3,$$

$$c_0 = 1;\ c_1 = 2;\ c_2 = 13.$$

Ph¬ng trình ®Æc trng:

$$r^3 + 4r^2 - 3r - 18 = (r-2)(r+3)^2 = 0$$

VËy nghiÖm tæng qu¸t cña c«ng thøc:

$$c_n = a_{10}2^n + (a_{20} + a_{21}n)(-3)^n$$

trong đó a_{10}, a_{20}, a_{21} là các h»ng sè

Ví dụ

Các hằng số được xác định từ các điều kiện đầu:

$$0 = c_0 = a_{10}2^0 + (a_{20} + a_{21} \cdot 0)(-3)^0 = a_{10} + a_{20}$$

$$2 = c_1 = a_{10}2^1 + (a_{20} + a_{21} \cdot 1)(-3)^1 = 2a_{10} - 3a_{20} - 3a_{21}$$

$$13 = c_2 = a_{10}2^2 + (a_{20} + a_{21} \cdot 2)(-3)^2 = 4a_{10} + 9a_{20} + 18a_{21}$$

Rút gọn ta thu được hệ

$$0 = a_{10} + a_{20}$$

$$2 = 2a_{10} - 3a_{20} - 3a_{21}$$

$$13 = 4a_{10} + 9a_{20} + 18a_{21}$$

Giải hệ ta nhận được: $a_{10} = 1, a_{20} = -1, a_{21} = 1$

Cuối cùng nghiệm của công thức là:

$$c_n = 2^n + (-1 + n)(-3)^n$$

Công thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

- Công thức đệ qui tuyến tính *không thuần nhất* hệ số hằng (Linear *nonhomogeneous* Recurrence Relation with constant coefficients) có chứa số hạng không thuần nhất $F(n)$ phụ thuộc vào n (và không phụ thuộc vào bất cứ a_i nào) :

$$\underbrace{a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}}_{\text{CTĐQ TTTNHSH tương ứng với công thức không thuần nhất}} + F(n)$$

Phần không thuần nhất

Giải công thức không thuần nhất (CTKTN)

- Kết quả sau đây là cơ sở để giải công thức không thuần nhất:
  - Nếu $a_n = p(n)$ là một nghiệm riêng của CTKTN:

$$a_n = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i} \right) + F(n)$$

  - Khi đó mọi nghiệm của CTKTN đều có dạng:

$$a_n = p(n) + h(n),$$

    trong đó $a_n = h(n)$ là nghiệm tổng quát của CTĐQ TTTNHSH tương ứng

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$$

Giải công thức không thuần nhất

- Từ đó ta có cách giải CTKTN sau đây:

(a) Tìm nghiệm tổng quát $h(n)$ của công thức thuần nhất tương ứng.

(b) Tìm nghiệm riêng $p(n)$ của CTKTN.

(c) Nghiệm của công thức không thuần nhất có dạng:

$$a_n = h(n) + p(n).$$

(d) Xác định các hằng số từ hệ phương trình thu được bởi đòi hỏi a_n thoả mãn các điều kiện đầu

Giải công thức không thuần nhất

- Tìm nghiệm riêng bằng cách nào?
- Để tìm nghiệm riêng có thể căn cứ vào dạng của phần không thuần nhất $F(n)$:
  - Nếu $F(n) = P(n) \times s^n$, trong đó $P(n)$ là đa thức của n còn s là hằng số và không là nghiệm đặc trưng, thì hãy tìm nghiệm riêng có dạng giống như $F(n)$.
  - Nếu $F(n) = P(n) \times s^n$, trong đó $P(n)$ là đa thức của n còn s là nghiệm đặc trưng với bội là m, thì hãy tìm nghiệm riêng dưới dạng $\boldsymbol{n^m \times Q(n) \times s^n}$

Ví dụ

- **Giải công thức đệ qui**

  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n,\ n \geq 2,$

  $a_0 = 0;\ a_1 = 1$

- PT đặc trưng $r^2 - 5r + 6 = 0$ có nghiệm

  $r_1 = 3,\ r_2 = 2.$

- Do đó nghiệm tổng quát của CTĐQ thuần nhất tương ứng là: $h(n) = c_1 3^n + c_2 2^n.$

- Do $F(n) = 7^n$ và 7 không là nghiệm đặc trưng nên nghiệm riêng tìm dưới dạng

  $p(n) = C.7^n.$

Ví dụ

- Nghiệm riêng tìm dưới dạng

$$p(n) = C.7^n.$$

- Thay vào công thức ta có

$$C7^n = 5C7^{n-1} - 6C7^{n-2} + 7^n$$

- Từ đó tìm được

$$C = 49/20.$$

- Vậy

$$p(n) = (49/20)7^n.$$

Ví dụ

- Nghiệm tổng quát có dạng:

  $a_n = p(n) + h(n) = (49/20)7^n + c_1 3^n + c_2 2^n$.

- Các hằng số c_1, c_2 xác định từ hệ phương trình:

  $$a_0 = c_1 + c_2 + 49/20 = 0$$

  $$a_1 = 3c_1 + 2c_2 + (49/20).7 = 1$$

- ...

Ví dụ

- **Giải công thức đệ qui**

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 1;$$

$$a_1 = 1.$$

- PTĐT $r - 2 = 0$ có nghiệm $r=2$. Nghiệm tổng quát của CTĐQ thuần nhất tương ứng là: $h(n) = c_1 2^n$.
- Do $F(n) = 1$, nên nghiệm riêng tìm dưới dạng

$$p(n) = C.$$

- Thay vào công thức đã cho ta được: $C = 2C+1$. Từ đó tìm được $C = -1$. Vậy nghiệm riêng là

$$p(n) = -1.$$

Ví dụ

- Nghiệm tổng quát của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = c_1 2^n - 1.$$

- Hệ số c_1 xác định từ điều kiện đầu:

$$a_1 = c_1 2 - 1 = 1$$

- Do đó $c_1 = 1.$
- Vậy nghiệm của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = 2^n - 1, n \geq 1.$$

Ví dụ

- **Giải công thức đệ qui**

$$a_n = a_{n-1} + n, n \geq 1; \; a_1 = 2.$$

- PTĐT $r - 1 = 0$ có nghiệm $r=1$. Nghiệm tổng quát của CTĐQ thuần nhất tương ứng là: $h(n) = c_1 1^n$.
- Do $F(n) = n \times 1^n$, và 1 là nghiệm đặc trưng bội 1, nên nghiệm riêng tìm dưới dạng

$$p(n) = (C_2 + C_3 n).n.$$

- Thay vào công thức đã cho ta được:

$$(C_2 + C_3 n).n = [C_2 + C_3(n-1)].(n-1) + n.$$

- Từ đó tìm được $C_2 = ½$ và $C_3 = ½$. Vậy nghiệm riêng là

$$p(n) = (n+1)n/2.$$

Ví dụ

- Nghiệm tổng quát của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = c_1 + (n+1)n/2\,.$$

- Hệ số c_1 xác định từ điều kiện đầu:

$$a_1 = c_1 + 1 = 2$$

- Do đó $c_1 = 1$.
- Vậy nghiệm của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = 1 + (n+1)n/2,\ n \geq 1.$$

Nhận xét

- Phương pháp giải công thức đệ qui TTTNHSH trình bày ở trên cho phép qui dẫn việc tìm nghệm của nó về việc tìm tất cả các nghiệm của đa thức bậc k.
- Việc tìm tất cả các nghiệm của một đa thức bậc tuỳ ý là vấn đề không đơn giản:
  - Ta có công thức để tìm nghiệm của đa thức bậc $k \leq 4$.
  - Nhưng không có công thức để tìm tất cả các nghiệm của đa thức bậc $k \geq 5$ (Định lý Aben).

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

5. Hàm sinh (Generating Function)

- Giả sử $\{h_n \mid n = 0, 1, 2, ...\}$ là một dãy số. Ta viết dãy này như là dãy vô hạn phần tử, tuy nhiên ta coi rằng nó bao gồm cả trường hợp dãy hữu hạn. Nếu $h_0, h_1, ..., h_m$ là dãy hữu hạn, thì ta sẽ biến nó thành dãy vô hạn bằng cách đặt $h_i = 0, i > m$.
- ***Định nghĩa.*** *Hàm sinh* $g(x)$ *của dãy số* $\{h_n \mid n = 0, 1, 2, ...\}$ *là chuỗi vô hạn*

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i .$$

- Như vậy hàm $g(x)$ sinh ra dãy số đã cho như là dãy các hệ số của nó.
- Nếu dãy là hữu hạn thì sẽ tìm được m sao cho $h_i = 0, i > m$. Trong trường hợp này $g(x)$ là một đa thức bậc m.

Ví dụ

- **Ví dụ 1.** Một trong những nguồn gốc dẫn đến định nghĩa hàm sinh chính là định lý về khai triển nhị thức: Hàm $g(x) = (1 + x)^m$ sinh ra dãy các hệ số tổ hợp

$$\{h_k = C(m, k), k=0, 1,\ldots, m\}.$$

Bởi vì

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C(m,k)x^k$$

- **Ví dụ 2.** Hàm

$$g(x) = 1/(1-x)$$

sinh ra dãy

1, 1, 1, ...

- Dễ dàng chứng minh điều đó bằng cách thực hiện phép chia:

$$1/(1- x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Ví dụ 3

- **Ví dụ 3.** Với $k > 0$, hàm

  $$g(x) = 1/(1-x)^k$$

  sinh ra dãy

  $$\{C(n+k-1, n): n = 0, 1, 2, ...\}.$$

- Như vậy hệ số thứ n sẽ là số khả năng chọn n vật từ k loại đồ vật.
- **Chứng minh.** Thực vậy, ta có

  $$1/(1-x)^k = [\,1/(1-x)]^k = (1 + x + x^2 + ...)^k.$$

- Nếu ta khai triển biểu thức này bằng cách thực hiện nhân phá ngoặc, thì số lần xuất hiện số hạng x^n sẽ bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình

  $$t_1 + t_2 + ... + t_k = n,$$

  mà như đã biết là bằng $C(n+k-1, n)$.

Ví dụ 3

- Ví dụ này có thể gợi ý cho ta cách giải nhiều bài toán đếm. Chẳng hạn xét hàm sinh

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)\,(1 + x + x^2)\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4).$$

- Giả sử x^a, x^b, x^c tương ứng là các số hạng lấy từ các thừa số thứ nhất, hai, ba của vế phải, điều đó có nghĩa là $0 \le a \le 3$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 4$. Khi khai triển vế phải, các thừa số này sẽ cho ta số hạng x^n, với $n = a + b + c$.
- Như vậy hệ số của x^n trong $g(x)$ sẽ là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$n=a + b + c \text{ thoả mãn } 0 \le a \le 3,\ 0 \le b \le 2,\ 0 \le c \le 4.$$

- Suy ra hệ số này cũng cho ta số cách chọn n bông hoa từ 3 bông cúc, 2 bông layơn và 4 bông hồng.

Ví dụ 3

- Tất nhiên việc sử dụng hàm sinh để giải bài toán đếm sẽ đòi hỏi nhiều tính toán khi thực hiện phép nhân các đa thức, và không thích hợp cho việc tính tay. Tuy nhiên, việc đó lại có thể thực hiện nhanh chóng trên máy tính, và vì thế hàm sinh sẽ là một công cụ hữu hiệu để giải nhiều bài toán đếm trên máy tính.
- Ta dẫn ra một số khai triển đại số rất hay sử dụng trong việc sử dụng hàm sinh:
  - $x^k/(1-x) = x^k (1 + x + x^2 + \ldots) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \ldots$
  - $(1-x^{k+1})/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k.$
  - $1/(1-x^2) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$
  - $x/(1-x^2) = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots$

Ví dụ 4

- **Ví dụ 4.** Có bao nhiêu cách chọn ra *n* quả từ 4 loại quả: táo, chuối, cam và đào (mỗi loại đều có số lượng ít ra là *n*) mà trong đó có một số chẵn quả táo, số lẻ quả chuối, không quá 4 quả cam và ít ra 2 quả đào?
- **Giải.** Hàm sinh để giải bài toán này là

$$g(x) = (1+ x^2+x^4+x^6+\ldots)\ (x+x^3+x^5+x^7+\ldots)\ (1+x+x^2+x^3+x^4)\ (x^2+x^3+x^4+\ldots).$$

- Trong công thức trên có 4 thừa số để đếm số quả táo (các số mũ chẵn), chuối (số mũ lẻ), cam (chỉ có đến số mũ 4) và đào (số mũ bắt đầu từ 2). Từ đó

$$g(x) = [1/(1-x^2)]\ \ [x/(1-x^2)]\ \ [(1-x^5)/(1-x)]\ \ [x^2/(1-x)]$$
$$= [x^3(1-x^5)]/[(1-x^2)^2(1-x)^2].$$

- **Câu trả lời là:** Số cách cần đếm là hệ số thứ *n* trong khai triển $g(x)$ dưới dạng chuỗi luỹ thừa. Tuy là chúng ta không có câu trả lời bằng số, nhưng sử dụng hàm xây dựng được ta có thể lập trình trên máy tính để đưa ra bảng đáp số cho các giá trị của *n* mong muốn.

Ví dụ 5

- **Ví dụ 5.** Tìm hàm sinh cho h_n là số cách chọn ra n quả từ 4 loại quả: táo, chuối, cam và đào (mỗi loại đều có số lượng ít ra là n) mà trong đó có một số chẵn quả táo, số lượng chuối chia hết cho 5, không quá 4 quả cam và không quá 1 quả đào?
- **Giải.** Hàm sinh có dạng

$$g(x)=(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$$

$$= [1/(1-x^2)]\ [1/(1-x^5)]\ [(1-x^5)/(1-x)]\ (1+x)$$

$$= [1/((1-x)(1+x)]\ [1/(1-x)]\ (1+x) = 1/(1-x)^2$$

- Từ đó ta có thể tìm công thức hiện cho lời giải, bởi vì, theo ví dụ 3, ta có

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2-1}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

- Vậy $h_n = n + 1$.

Hàm sinh và công thức đệ qui

- Hàm sinh có thể sử dụng để tìm công thức dưới dạng hiện cho số hạng tổng quát của dãy số $\{h_n\ , n=0,1,2,...\}$ xác định bởi công thức đệ qui. Nội dung của phương pháp có thể trình bày như sau:

  i) Xây dựng hàm sinh $g(x)$ của dãy số này theo công thức

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i$$

  ii) Tìm công thức giải tích cho hàm sinh $g(x)$. (Sử dụng các tính chất của dãy số suy từ công thức đệ qui xác định nó).

  iii) Theo công thức tìm được, tìm khai triển hàm $g(x)$ dưới dạng chuỗi luỹ thừa (chuỗi Maclaurin).

  iv) So sánh hệ số ở các số hạng với cùng số mũ của x ta tìm được công thức cho h_n.

Phép toán với hàm sinh

- Trước hết ta đưa ra một số phép toán đối với hàm sinh. Giả sử

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,\ g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

  là hai hàm sinh còn α là số thực, khi đó

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i, \quad \alpha f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha a_i x^i$$

- Tích Côsi của hai hàm sinh $g(x)$ *và* $f(x)$:

$$f(x) g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

  trong đó

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Chuỗi Maclaurin

- Từ giải tích ta biết rằng nếu chuỗi

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i$$

hội tụ ở lân cận điểm 0 thì tổng $g(x)$ luôn là hàm giải tích trong lân cận này và

$$h_k = g^{(k)}(0)/k!\ ,\ k = 0, 1, \ldots$$

- Khi đó chuỗi

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i$$

chính là khai triển Maclaurin của hàm $g(x)$. Như vậy có một tương ứng 1-1 giữa một hàm giải tích và một chuỗi hội tụ trong lân cận 0.

Công thức hay dùng

- Trong việc áp dụng hàm sinh ta thường sử dụng công thức sau:

$$\frac{1}{(1-rx)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} r^k x^k$$

mà trường hợp riêng của nó là

$$1/(1 - rx) = 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots.$$

Dãy số Fibonaci

- **Dãy số Fibonaci.** Dãy số Fibonaci là dãy số được xác định bởi công thức đệ qui

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2,$$

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1.$$

- Ta sẽ tìm công thức cho số hạng tổng quát của dãy số nhờ phương pháp hàm sinh.
- Xét hàm sinh $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. Ta có

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n$$

$$= f_0 + f_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2}$$

$$= x + xF(x) + x^2 F(x).$$

Dãy số Fibonaci

- Từ đó suy ra

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

- Ta có $(1 - x - x^2) = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$, với

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

- Viết lại $F(x)$ dưới dạng

$$F(x) = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x},$$

Dãy số Fibonaci

- Từ đó tìm được

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

- Do đó

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right]$$

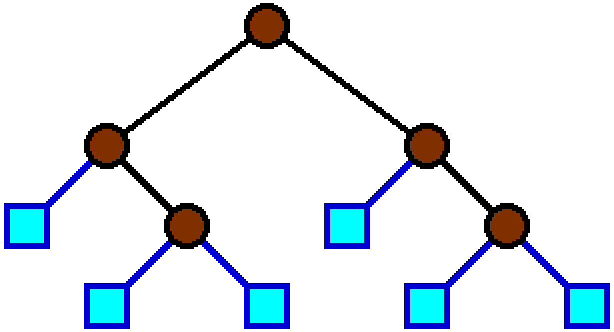
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)x^n.$$

- Suy ra

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n \geq 0.$$

6. Một số dãy số đặc biệt

- Dãy số Stirling
- Dãy số Bell
- Dãy số Catalan



Nhắc lại: Số lượng ánh xạ

Cho các tập hữu hạn $A = \{a_1,\ldots, a_m\}$ và $B = \{b_1,\ldots, b_n\}$.

Hỏi có bao nhiêu ánh xạ $f: A \to B$?

Như ta đã chứng minh:

- Tổng số ánh xạ có thể: $|B|^{|A|} = n^m$.
- Số lượng đơn ánh:

$$P(n,m) = n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1) = n!/(n-m)!.$$

- Số lượng song ánh là $P(n,n) = n!$ nếu $|A| = |B| = n$.
- Số lượng toàn ánh: với $m \geq n$:

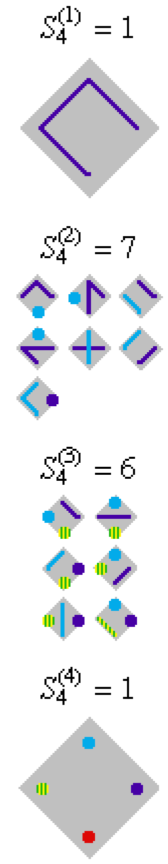
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^{n-k} (n-k)^m$$

Số Stirling loại 2

- Số lượng toàn ánh từ tập $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$ vào tập $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$ liên quan đến một con số tổ hợp nổi tiếng đó là số Stirling loại 2 (Stirling Numbers of the 2nd Kind).
- **Định nghĩa.** ***Số Stirling loại 2***, ký hiệu bởi $S_2(m,n)$, là số cách phân hoạch tập m phần tử thành n tập con ($m \geq n$).
- **Ví dụ:** Ta đếm số cách phân hoạch tập $\{1,2,3,4\}$ ra thành 2 tập con. Ta có thể kể ra tất cả các cách phân hoạch như vậy: $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$, $\{\{1,2,4\},\{3\}\}$, $\{\{1,3,4\},\{2\}\}$, $\{\{2,3,4\},\{1\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$.
- Vậy $S_2(4,2)=7$.

- Trong nhiều tài liệu, số Stirling còn được ký hiệu bởi

$$S_m^{(n)} \quad \text{hoÆc} \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$$



James Stirling
1692 – 1770
Scotland

Số Stirling loại 2

- Ta sẽ xây dựng công thức đệ qui để đếm số $S_2(m,n)$.
- Ta có:
  - $S_2(0,0)=1$.
  - Nếu $m > 0$, thì

    $S_2(m,0) = 0$,

    $S_2(m,1)=1$,

    và $S_2(m,m)=1$.

Định lý. Với m, $n > 1$,

$$S_2(m,n) = S_2(m-1,n-1) + n \cdot S_2(m-1,n).$$

Chứng minh.

Ta cần đếm số cách phân hoạch tập m phần tử $X = \{x_1, x_2, \ldots , x_m\}$ ra thành n tập con.

Công thức đệ qui

- Tập các cách phân hoạch như vậy có thể phân hoạch thành 2 tập:

  A = Tập các cách phân hoạch X ra thành n tập con trong đó có một tập con là $\{x_m\}$;

  B = Tập các cách phân hoạch X ra thành n tập con trong đó không có tập con nào là $\{x_m\}$ (tức là x_m không đứng riêng một mình!).
- Ta có:

  $|A| = S_2(m-1,n-1)$.

  $|B| = n \cdot S_2(m-1,n)$, bởi vì có $S_2(m-1,n)$ cách phân hoạch $X \setminus \{x_m\}$ ra thành n tập con và có n cách xếp x_m vào một trong số các tập con này.
- Từ đó

  $$S_2(m,n) = |A| + |B| = S_2(m-1,n-1) + n \cdot S_2(m-1,n).$$

Định lý được chứng minh.

Công thức tính số Stirling

- Từ công thức đệ qui có thể chứng minh bằng qui nạp toán học công thức sau đây:

$$S_2(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^m$$

- Nói chung để tính $S_2(m,n)$ người ta thường dùng công thức đệ qui, chứ không sử dụng công thức này. Điều này được giải thích tương tự như để tính hệ số tổ hợp người ta thường dùng tam giác Pascal.

Liên hệ giữa số lượng toàn ánh và số Stirling

- Ta xét mối liên hệ giữa số Stirling loại 2 với số lượng toàn ánh từ tập m phần tử A vào tập n phần tử B (ký hiệu là $S'(m,n)$).
- Giả sử cho f là toàn ánh từ A vào B. Đặt

$$A_i = \{a \in A \mid f(a) = b_i\},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

Rõ ràng các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tạo thành một phân hoạch của tập A.

- Ngược lại, cho một phân hoạch của tập A ra thành n tập con $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ là hoán vị của $1, 2, \ldots, n,$ thì ta có thể xây dựng được toàn ánh f từ A vào B theo qui tắc

$$f(a) = b_{\pi(i)},\ a \in A_{\pi(i)},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

- Như vậy mỗi phân hoạch cho ta $n!$ toàn ánh. Vì thế, số lượng toàn ánh từ tập m phần tử vào tập n phần tử là bằng $n!$ nhân với số cách phân hoạch tập m phần tử ra thành n tập con, nghĩa là bằng $n!S_2(m,n)$

Liên hệ giữa số lượng toàn ánh và số Stirling

- Như vậy ta có đẳng thức cho mối liên hệ giữa số toàn ánh từ tập m phần tử vào tập n phần tử $S'(m,n)$ và số Stirling loại 2 sau đây:

$$S'(m,n) = n!\, S_2(m,n)\,.$$

- Do đó từ công thức đã chứng minh ở mục trước

$$S'(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

Suy ra

$$S_2(m,n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

Bảng giá trị của số Stirling loại 2

	S2(n,k)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	1										
	1	0	1									
	2	0	1	1								
	3	0	1	3	1							
	4	0	1	7	6	1						
n	5	0	1	15	25	10	1					
	6	0	1	31	90	65	15	1				
	7	0	1	63	301	350	140	21	1			
	8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
	9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
	10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Số Bell

- **Định nghĩa.** Số Bell (Bell numbers) là số cách phân hoạch tập n phần tử ra thành các tập con khác rỗng.
- Các phần tử đầu tiên của dãy số này là

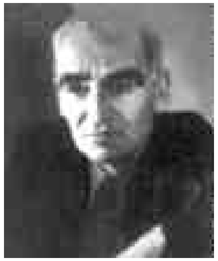
  1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, ...
- **Ví dụ:** Tập {1, 2, 3} có các cách phân hoạch sau đây:

  {{1}, {2}, {3}} , {{1, 2}, {3}}, {{1, 3}, {2}} ,

  {{1}, {2, 3}}, {{1, 2, 3}}.
- Số Bell thứ n được tính bởi công thức

$$\sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)$$

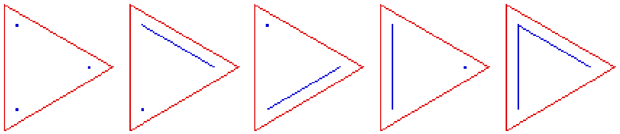
trong đó $S_2(n,k)$ là số Stirling loại 2.



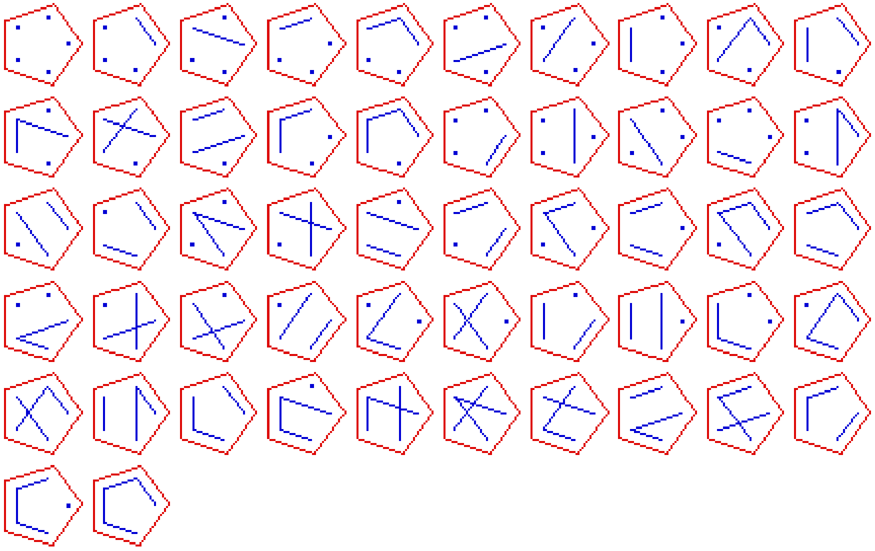
Eric Temple Bell
Born: 1883, Scotland
Died: 1960, USA

Số Bell

- Tập {1, 2, 3} có 5 cách phân hoạch:



- Tập {1, 2, 3, 4, 5} có 52 cách phân hoạch:



Số Catalan

- **Định nghĩa.** Số Catalan thứ *n*, ký hiệu là C_n , là số cách đặt dấu ngoặc để tổ chức thực hiện việc tính tích của *n*+1 thừa số:

$$P_{0..n} = x_0\, x_1\, x_2\, \ldots\, x_n.$$

- **Ví dụ:**
- Có 2 cách để tính $P_{0..2}$: $x_0*x_1*x_2 = (x_0*(x_1*x_2)) = ((x_0*x_1)*x_2)$
- Có 5 cách để tính $P_{0..3}$: 1*2*3*4 =

(1*(2*(3*4))) = (1*((2*3)*4)) = ((1*2)*(3*4)) = ((1*(2*3))* 4) = (((1*2)*3)*4)

- Có 14 cách để tính $P_{0..4}$: 1*2*3*4*5 =

(1 (2 (3 (4 5)))) = (1 (2 ((3 4) 5))) = (1 ((2 3) (4 5))) = (1 ((2 (3 4)) 5)) = (1 (((2 3) 4) 5)) = ((1 2) (3 (4 5))) = ((1 2) ((3 4) 5)) = ((1 (2 3)) (4 5)) = ((1 (2 (3 4))) 5) = ((1 ((2 3) 4)) 5) = (((1 2) 3) (4 5)) = (((1 2) (3 4)) 5) = (((1 (2 3)) 4) 5) = ((((1 2) 3) 4) 5)

Số Catalan

- Ta xây dựng công thức đệ qui để tính C_n.
- Rõ ràng

$$C_0 = 1 \text{ và } C_1 = 1.$$

- Giả sử $n > 1$. Sau khi đặt dấu ngoặc phân tách đầu tiên, tích $x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n$ được chia làm hai tích con.
- *Ví dụ:* $\mathrm{P}_{0..4} = \mathrm{P}_{0..2}\, \mathrm{P}_{3..4} = (x_0\, x_1 x_2)\, (x_3\, x_4)$
- Giả sử dấu ngoặc phân tách đầu tiên được đặt sau thừa số x_k:

$$\mathrm{P}_{0..n} = \mathrm{P}_{0..k}\, \mathrm{P}_{k+1..n} = (x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_k)\, (x_{k+1}\, x_{k+2} \ldots x_n)$$

- Khi đó ta có C_k cách tính $\mathrm{P}_{0..k}$, $C_{n\text{-}k\text{-}1}$ cách tính $\mathrm{P}_{k+1..n}$, và do đó việc tính $P_{0..n}$ có thể thực hiện bởi $C_k\, C_{n\text{-}k\text{-}1}$ cách .

Số Catalan

- Do dấu ngoặc phân tách đầu tiên có thể đặt vào sau bất cứ thừa số nào trong các thừa số $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$, suy ra tổng số cách tính $P_{0..n}$ là:

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + ... + C_{n-1} C_0 .$$

- Như vậy ta thu được công thức đệ qui:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \quad n > 1,$$

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1$$

- Sử dụng công thức này có thể chứng minh công thức sau:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}, n \ge 0.$$

Số Catalan

- Một số phần tử đầu tiên của dãy số Catalan:
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, …

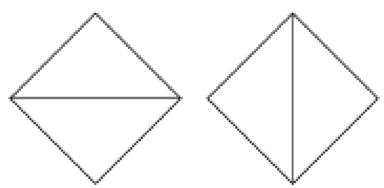
- Số Catalan là lời giải của rất nhiều bài toán tổ hợp.
- Ta sẽ kể ra dưới đây một số bài toán như vậy.

E. C. Catalan
1814 -1894
Belgium

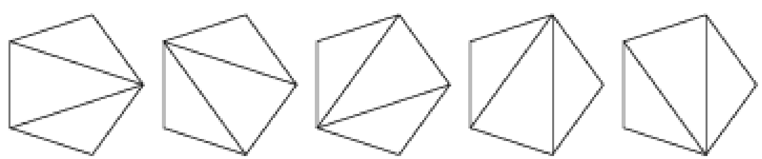
Tam giác phân đa giác

- C_n là số cách chia đa giác n+2 đỉnh ra thành các tam giác nhờ vẽ các đường chéo không cắt nhau ở trong đa giác:

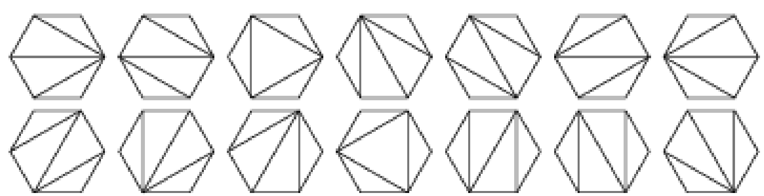
$C_2 = 2$

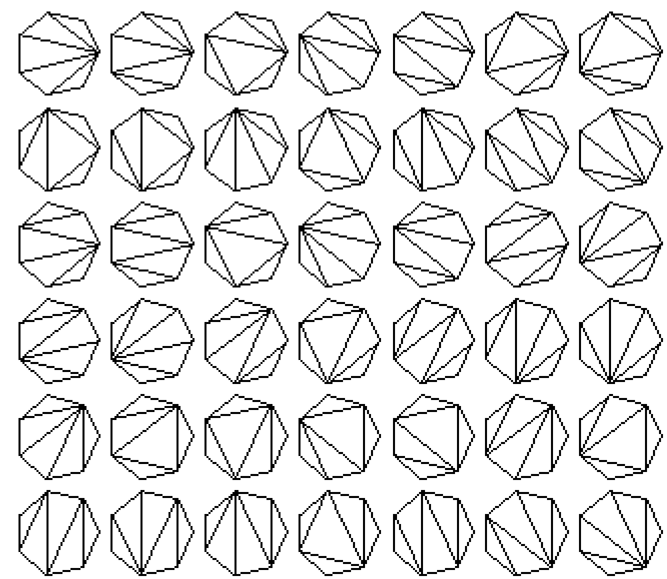


$C_3 = 5$



$C_4 = 14$

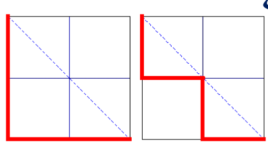




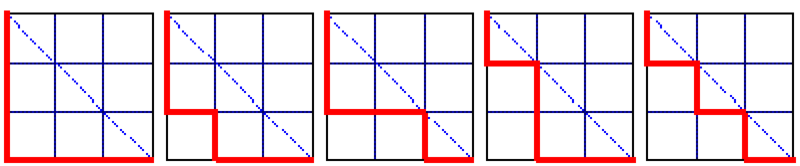
$C_5 = 42$

Đường đi trên lưới ô vuông

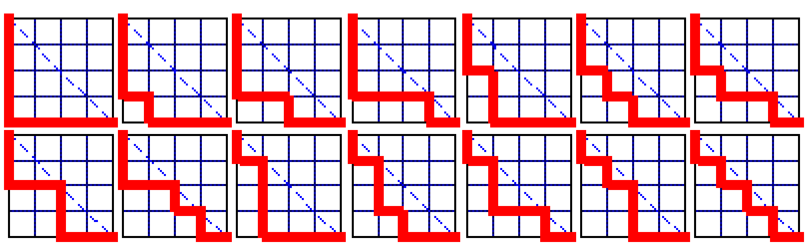
- ***C_n* là số lượng đường đi đơn điệu** (tức là đường đi xuất phát từ vị trí góc dưới-phải kết thúc ở góc trên-trái và chỉ đi sang trái hoặc lên trên) độ dài $2n$ trên lưới ô vuông kích thước $n \times n$ không vượt lên trên đường chéo.



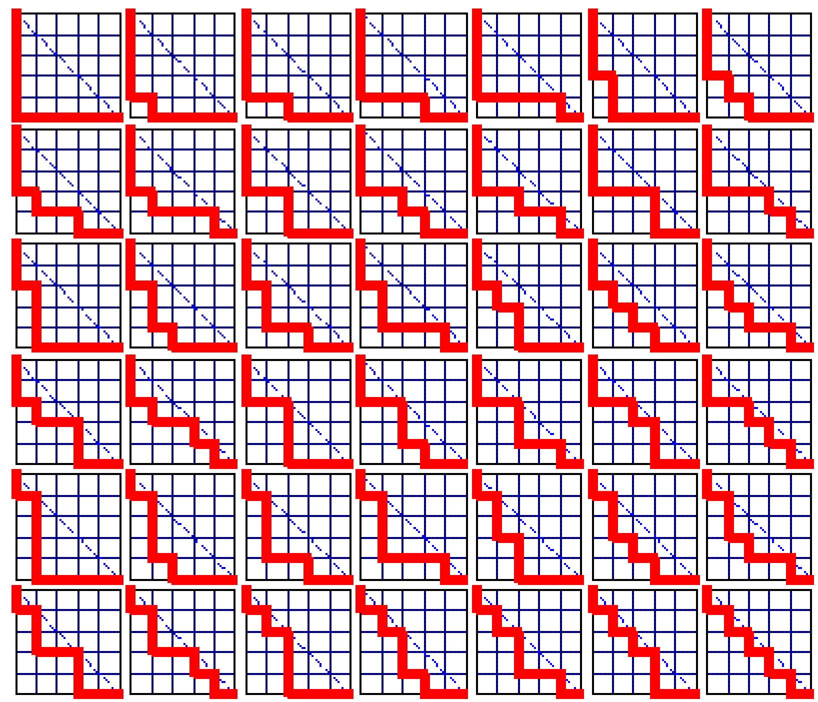
$C_2 = 2$



$C_3 = 5$



$C_4 = 14$



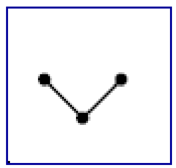
$C_5 = 42$

Cây nhị phân đầy đủ

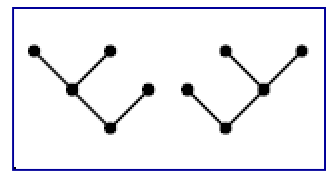
C_n là số lượng cây nhị phân đầy đủ không đẳng cấu có n đỉnh trong.

Cây nhị phân có gốc được gọi là đầy đủ nếu mỗi đỉnh của nó hoặc là không có con hoặc có đúng hai con. Đỉnh trong (internal vertice) là đỉnh có con.

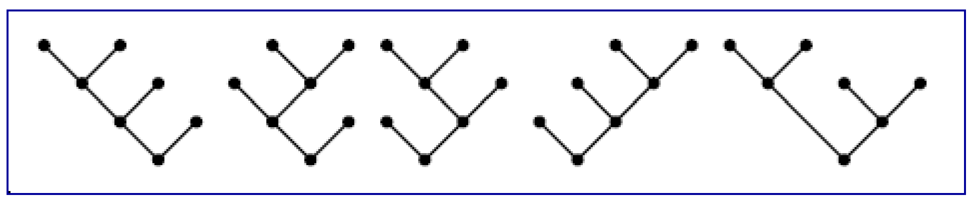
$n = 1$



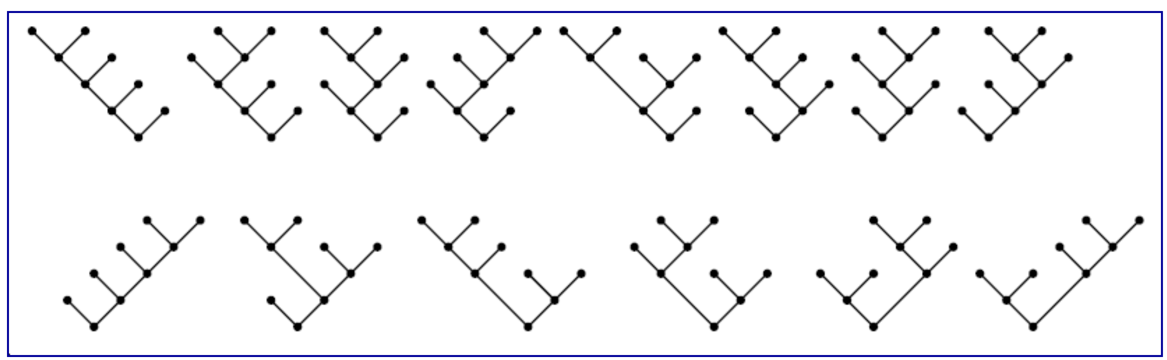
$n = 2$



$n = 3$

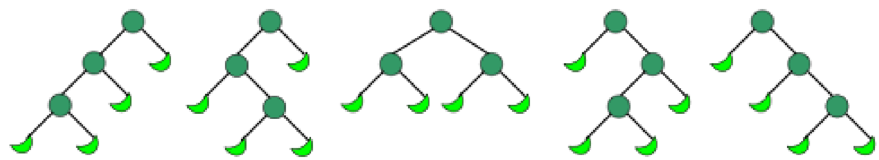


$n = 4$



Cây nhị phân đầy đủ với n lá

- ***C_n* là số cây nhị phân đầy đủ với *n* + 1 lá.**
- Có $C_3 = 5$ cây nhị phân đầy đủ với 4 lá:

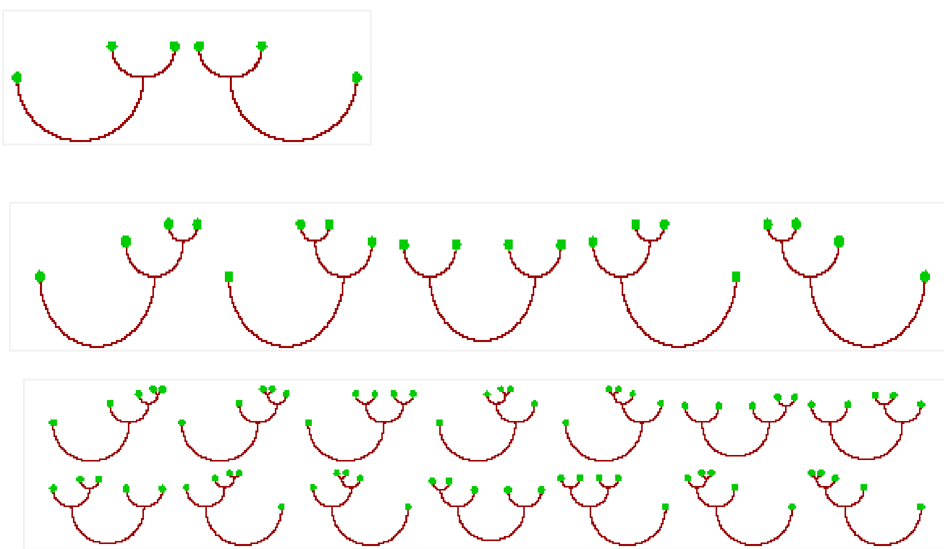


n

2

3

4



Ask questions!

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n,\ n \geq 2,$$

LiNoReCoCo Example

- Find all solutions to $a_n = 3a_{n-1}+2n$. Which solution has $a_1 = 3$?
  - Notice this is a 1-LiNoReCoCo. Its associated 1-LiHoReCoCo is $a_n = 3a_{n-1}$, whose solutions are all of the form $a_n = \alpha 3^n$. Thus the solutions to the original problem are all of the form $a_n = p(n) + \alpha 3^n$. So, all we need to do is find one $p(n)$ that works.

Trial Solutions

- If the extra terms $F(n)$ are a degree-t polynomial in n, you should try a general degree-t polynomial as the particular solution $p(n)$.
- This case: $F(n)$ is linear so try $a_n = cn + d$.

$cn+d = 3(c(n-1)+d) + 2n$ (for all n)

$(2c+2)n + (2d-3c) = 0$ (collect terms)

So $c = -1$ and $d = -3/2$.

So $a_n = -n - 3/2$ is a solution.

- **Check:** $a_{n\geq 1} = \{-5/2, -7/2, -9/2, \ldots\}$

Finding a Desired Solution

- From the previous, we know that all general solutions to our example are of the form:

  $$a_n = -n - 3/2 + \alpha 3^n.$$

  Solve this for α for the given case, $a_1 = 3$:

  $$3 = -1 - 3/2 + \alpha 3^1$$

  $$\alpha = 11/6$$

- The answer is $a_n = -n - 3/2 + (11/6)3^n$.

Double Check Your Answer!

- Check the base case, $a_1=3$:

$$a_n = -n - 3/2 + (11/6)3^n$$

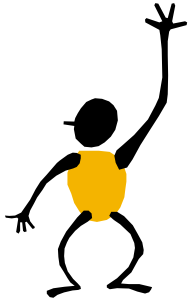
$$a_1 = -1 - 3/2 + (11/6)3^1$$

$$= -2/2 - 3/2 + 11/2 = -5/2 + 11/2 = 6/2 = 3$$

- Check the recurrence, $a_n = 3a_{n-1}+2n$:

$$-n - 3/2 + (11/6)3^n = 3[-(n-1) - 3/2 + (11/6)3^{n-1}]+2n$$
$$= 3[-n - 1/2 + (11/6)3^{n-1}] + 2n$$
$$= -3n - 3/2 + (11/6)3^n + 2n = -n - 3/2 + (11/6)3^n \blacksquare$$

Ask questions!



Ask questions!