

Hệ chất điểm

Lê Quang Nguyên
www4.hcmut.edu.vn/~leqnguyen
nguyenquangle59@yahoo.com

Nội dung

1. Khối tâm
2. Định luật 2 Newton cho hệ chất điểm
3. Momen động lượng

cuu duong than cong . com

1a. Chuyển động của hệ chất điểm

- Ví dụ 1: cây thước.
- Ví dụ 2: vận động viên vượt rào.



Chuyển động của mỏ lết

1b. Khối tâm

- Trong các ví dụ : cây thước, vận động viên vượt rào...
- Có một vị trí chuyển động theo định luật 2 Newton: khối tâm của hệ

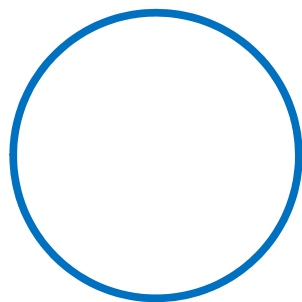
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N)$$

CM: center of mass Khối lượng hệ

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

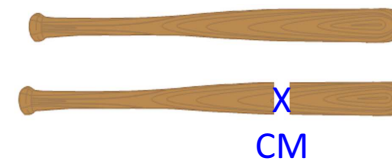
Câu hỏi 1

Khối tâm của vành tròn?



Câu hỏi 2

Một cây gậy bóng chày được cưa tại vị trí khối tâm làm hai phần như trên hình vẽ. Phần nào có khối lượng lớn hơn?

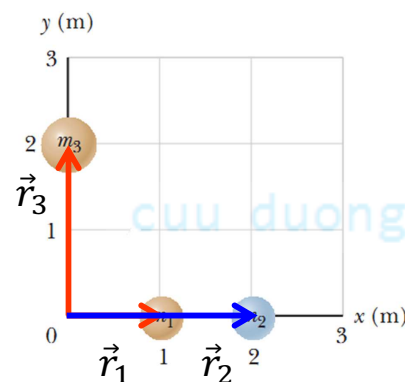


- (a) Phần bên phải.
- (b) Phần bên trái.
- (c) Hai phần bằng nhau.
- (d) Không xác định được.

cuu duong than cong . com

Bài tập 1

Một hệ gồm ba chất điểm có vị trí như trên hình vẽ, với $m_1 = m_2 = 1,0 \text{ kg}$ và $m_3 = 2,0 \text{ kg}$. Hãy tìm khối tâm của hệ.



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

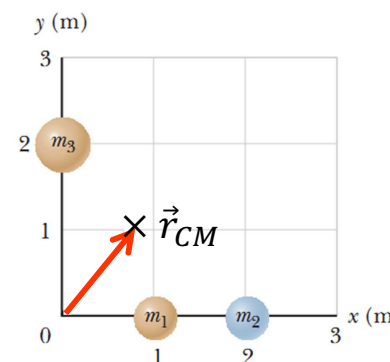
Trả lời bài tập 1

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{CM} = \frac{1 + 2 + 2 \times 0}{1 + 1 + 2} = \frac{3}{4} = 0,75(m)$$

$$y_{CM} = \frac{1 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 2}{1 + 1 + 2} = \frac{4}{4} = 1,0(m)$$

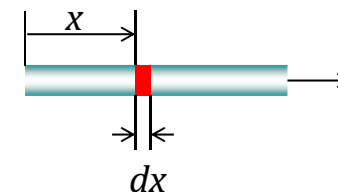


Bài tập 2

Hãy chứng tỏ rằng khối tâm của một thanh có khối lượng M và chiều dài L nằm ở trung điểm của nó. Giả sử khối lượng trên một đơn vị dài của thanh là hằng số.

Trả lời bài tập 2

- Chọn trục x theo chiều dài thanh. Đoạn vi phân dx ở vị trí x có
- khối lượng $dm = \lambda dx$.
- λ là khối lượng trên một đơn vị dài.
- Khối tâm có tọa độ cho bởi:



$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm$$

cuu duong than cong . com

Trả lời bài tập 2 (tt)

- Suy ra:

$$x_{CM} = \frac{\lambda}{M} \int_0^L x dx = \frac{1}{L} \int_0^L x dx \quad \lambda = \frac{M}{L}$$

- Tích phân trên cho ta:

$$x_{CM} = \frac{1}{2L} \left[x^2 \right]_0^L = \frac{L}{2}$$

- Vật đối xứng: khối tâm trùng với tâm đối xứng.

Bài tập 3

Xét một thanh *không đồng nhất*, có khối lượng trên một đơn vị dài thay đổi theo vị trí x :

$\lambda = \alpha x$, α là hằng số

Tìm vị trí khối tâm theo chiều dài L của thanh.

cuu duong than cong . com

Trả lời bài tập 3

- Làm tương tự như bài tập 2 ta có:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx$$

- Tích phân cho ta:

$$x_{CM} = \frac{\alpha}{3M} \left[x^3 \right]_0^L = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

Trả lời bài tập 3 (tt)

- Khối lượng của thanh được xác định bởi:

$$M = \int dm = \int \lambda dx$$

- Thay thế biểu thức của λ ta có:

$$M = \alpha \int_0^L x dx = \frac{\alpha}{2} \left[x^2 \right]_0^L = \frac{\alpha L^2}{2}$$

- Do đó:
- $$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3M} = \frac{2}{3} L$$

cuu duong than cong . com

2a. Động lượng hệ chất điểm

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \Rightarrow \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

vận tốc khối tâm vận tốc chất điểm thứ i

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}_{system}$$

$$\vec{P}_{system} = M\vec{v}_{CM}$$

2b. Định luật 2 cho hệ

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

$$M\vec{a}_{CM} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_N \vec{a}_N = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$

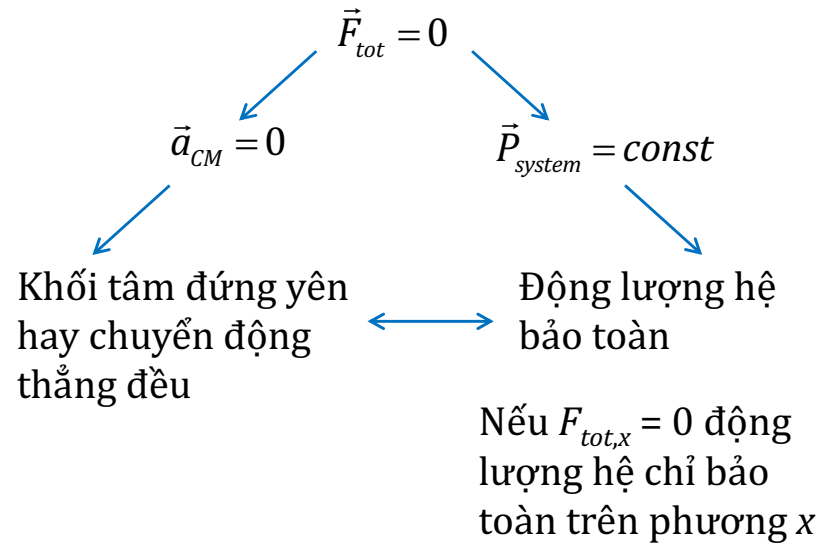
tổng các ngoại lực tác động lên hệ

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{tot}$$

$$M\vec{a}_{CM} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{CM})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{P}_{system}}{dt} = \vec{F}_{tot}$$

2b. Định luật 2 cho hệ (tt)



Câu hỏi 3

Hai vận động viên trượt băng đứng trên mặt băng không ma sát, nắm hai đầu của một thanh nhẹ nằm ngang. Sau đó họ dùng tay kéo để di chuyển lại gần nhau.

Khối tâm của họ sẽ chuyển động thế nào?

Câu hỏi 4

Hai vận động viên trượt băng đứng trên mặt băng không ma sát, nắm hai đầu của một thanh nhẹ nằm ngang. Sau đó họ dùng tay kéo để di chuyển lại gần nhau.

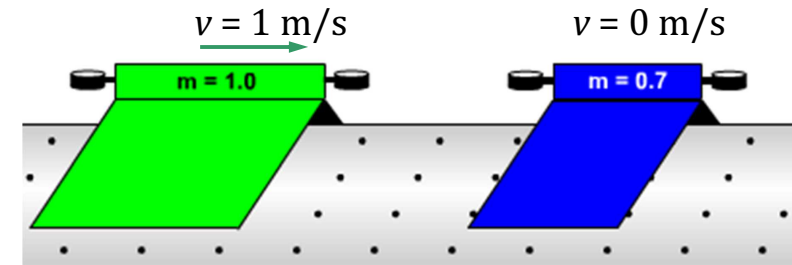
Họ sẽ gặp nhau ở đâu?

Bài tập 5

Hai xe trượt trên đệm khí đến va chạm *hoàn toàn đàn hồi*.

(a) Tìm vận tốc của chúng sau va chạm.

(b) Tìm vận tốc khối tâm của hệ hai xe trước và sau va chạm.



Trả lời bài tập 5(a)

$$F_{tot, x} = 0 \rightarrow P_x = \text{const}$$

- **Động lượng trên x bảo toàn:**

$$m_1 v = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \Rightarrow 1 = v_1 + 0,7v_2$$

- Va chạm hoàn toàn đàn hồi \Leftrightarrow **động năng bảo toàn:**

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \Rightarrow 1 = v_1^2 + 0,7v_2^2$$

$$v_1 = 0,18 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 1,18 \text{ m/s}$$

- **Minh họa**

cuu duong than cong . com

Trả lời bài tập 5(b)

$$F_{tot, x} = 0 \rightarrow v_{CM, x} = \text{const}$$

$$M v_{CM, x} = P_x$$

- Trước va chạm:

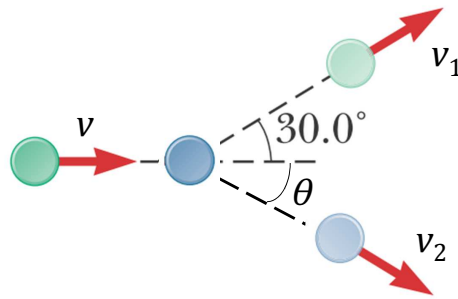
$$P_x = 1$$

$$\Rightarrow v_{CM, x} = 1/1,7 = 0,59 \text{ m/s}$$

- Sau va chạm vận tốc khối tâm không thay đổi.

Bài tập 6

Một banh bi-da có vận tốc 5 m/s va chạm với một trái banh đứng yên cùng khối lượng. Sau đó nó có vận tốc 4,33 m/s lệch một góc 30° so với phương ban đầu. Va chạm là hoàn toàn đàn hồi, tìm vận tốc trái banh thứ hai sau va chạm.

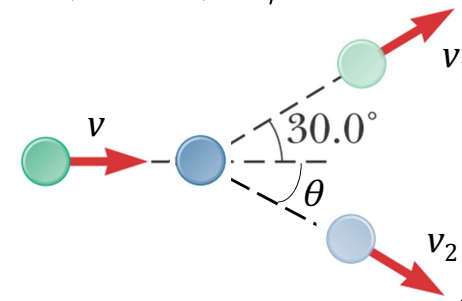


Trả lời bài tập 6

- Vì va chạm hoàn toàn đàn hồi nên động năng hệ bảo toàn:

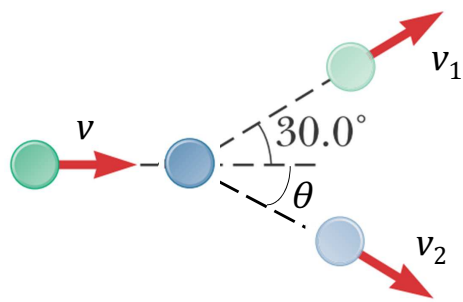
$$mv^2/2 = mv_1^2/2 + mv_2^2/2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{v^2 - v_1^2}$$

$$v_2 = \sqrt{5^2 - 4,33^2} = 2,5 \text{ m/s}$$



Bài tập 6 – mở rộng

Tìm góc lệch của trái banh thứ hai sau va chạm.



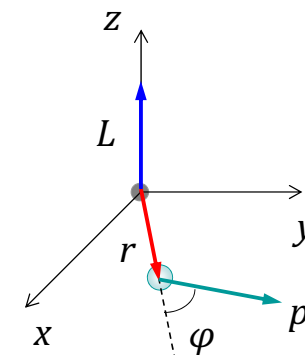
3a. Momen động lượng của chất điểm

- Momen động của chất điểm *đối với gốc O*

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = rps \sin \varphi$$

$$\text{kg.m}^2/\text{s}$$

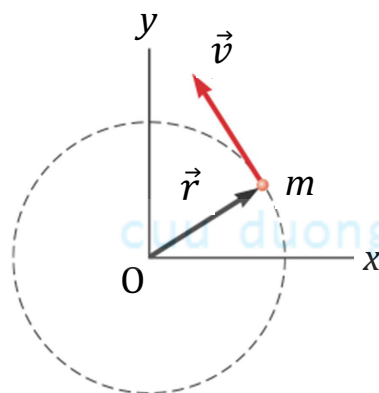


- \perp mặt phẳng (\vec{r}, \vec{p}) .
- chiều: quy tắc bàn tay phải.
- đặc trưng cho chuyển động quay.

Bài tập 8

Một chất điểm chuyển động trong mặt phẳng xy trên một đường tròn bán kính r tâm O.

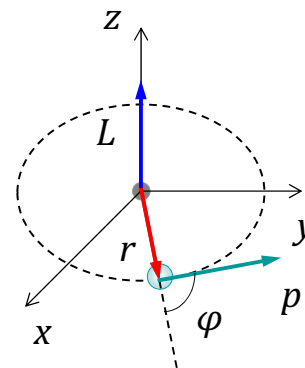
Tìm độ lớn và chiều *momen động của chất điểm đối với tâm O*, nếu vận tốc chất điểm là v .



Trả lời bài tập 8

- $L \perp$ mặt phẳng xy và hướng theo chiều dương trục z.
- Trong chuyển động tròn động lượng vuông góc với vector vị trí, do đó ta có:

$$L = rps \sin \varphi = rp = rmv$$

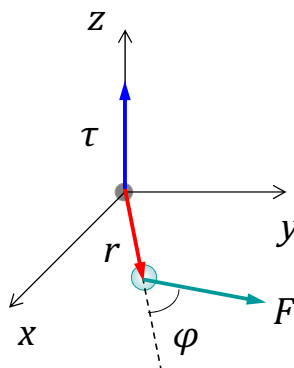


3b. Momen lực

- Momen của lực F đối với gốc O

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} \quad \tau = rF \sin \varphi$$

$N.m$

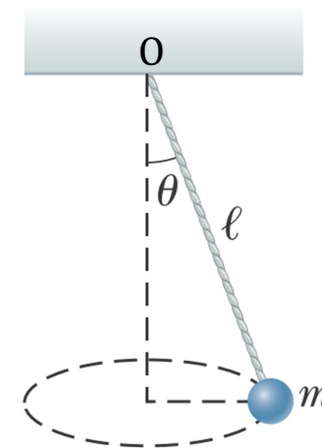


- \perp mặt phẳng (\vec{r}, \vec{F}) .
- chiều: quy tắc bàn tay phải.
- đặc trưng cho chuyển động quay.

Bài tập 9

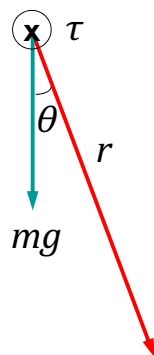
Một con lắc gồm một vật khối lượng m chuyển động trên một quỹ đạo tròn nằm ngang. Trong suốt chuyển động dây treo chiều dài l hợp một góc không đổi θ với phương thẳng đứng.

Tìm momen của trọng lực đối với điểm treo O .

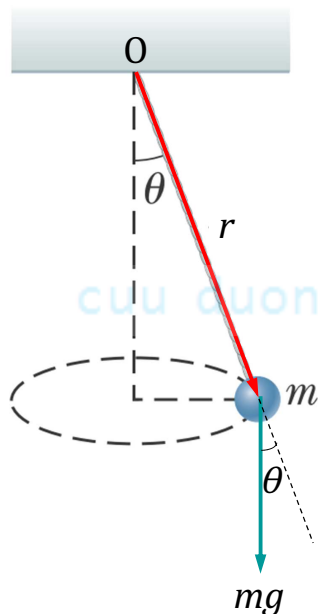


cuu duong than cong . com

Trả lời bài tập 9



$$\tau = rmgsin\theta = lmgsin\theta$$



cuu duong than cong . com

3c. Định lý momen động

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{Hệ chất điểm}$$

Momen ngoại lực

$$\boxed{\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{system}}{dt}}$$

3c. Định lý momen động (tt)

- Minh họa: bánh xe quay, con quay.
- Khi tổng momen ngoại lực bằng không thì momen động của hệ được bảo toàn.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com