Công thức truy hồi

Trần Vĩnh Đức

HUST

Ngày 24 tháng 7 năm 2018

Nội dung

Ví dụ

Một quần thể vi trùng có số lượng cá thể tăng gấp đôi sau mỗi giờ. Nếu thoạt đầu có 5 cá thể hỏi sau 5 giờ số lượng của chúng là bao nhiêu?

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Bài tập

Hãy tìm công thức tường minh cho dãy

$$\begin{cases} a_n = 2a_n \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Ví dụ

Xét một cầu thang với n bậc thang. Có bao nhiêu cách để đi lên cầu thang nếu chúng ta có thể leo lên 1 bậc hoặc 2 bậc trong mỗi bước?

$$
\begin{aligned}
&S_1 = 1 \\
&S_2 = 2 \\
&S_{n+2} = S_{n+1} + S_n \qquad \text{với} \qquad n \geq 1
\end{aligned}
$$

Ví dụ

Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n không chứa hai bit 0 liên tiếp?

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

Bài tập

Hãy dùng kỹ thuật hàm sinh để tìm công thức tường minh cho dãy

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

Ví dụ

Có bao nhiêu xâu tam phân độ dài n không chứa dãy con "012"?

$$\begin{cases} a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_n \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 9 \end{cases}$$

Nội dung

Công thức truy hồi

Định nghĩa

Công thức truy hồi đối với dãy số $\langle a_n \rangle$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy.

Ví dụ

Xét dãy số $\langle a_n \rangle$ thỏa mãn công thức

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_0 = 3 a_1 = 5 \end{cases}$$

Từ công thức truy hồi ta có

$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$
$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$

Định nghĩa

Một dãy số được gọi là nghiệm của công thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn công thức truy hồi này.

Ví dụ

- Xét công thức truy hồi

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \qquad \text{với } n \geq 2.$$

- Dãy số $\langle a_n \rangle$ với $a_n = 3n$ có phải là nghiệm của hệ thức truy hồi trên hay không?
- Còn dãy $a_n = 2^n$?
- Còn dãy $a_n = 5$?

Ví dụ

Giả sử một người gửi $10,000$ đô la vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi kép 11% mỗi năm. Hỏi sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản ngân hàng.

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1} \\ P_0 = 10,000 \text{ đô la.} \end{cases}$$

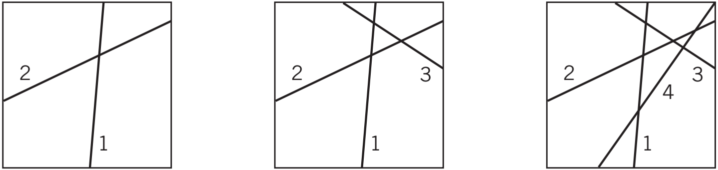
Ví dụ

- Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0.
- Chẳng hạn, 1230407869 là hợp lệ, còn 120987045608 là không hợp lệ.
- Giả sử a_n là số các từ mã độ dài n.
- Hãy tìm công thức truy hồi cho a_n.

$$\begin{aligned} a_n &= 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) \\ &= 8a_{n-1} + 10^{n-1}. \end{aligned}$$

Ví dụ

- Chúng ta vẽ n đường thẳng trên giấy sao cho mọi cặp đường thẳng đều cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy.
- Các đường thẳng này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?



(*a*) (*b*) (*c*)

Ví dụ (Chọn không lặp)

Đặt $a_{n,k}$ là số cách chọn tập con k phần tử từ tập n phần tử. Hãy tìm công thức truy hồi cho $a_{k,n}$.

$$a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1} \qquad \text{(Đẳng thức Pascal)}$$

Ví dụ (Bỏ bóng)

Hãy tìm công thức truy hồi cho số cách bỏ n quả bóng giống nhau và k chiếc hộp phân biệt sao cho mỗi hộp chỉ có 2 hoặc 3 hoặc 4 quả bóng.

$$a_{n,k} = a_{n-2,k-1} + a_{n-3,k-1} + a_{n-4,k-1}.$$

Ví dụ (Hệ thức truy hồi)

Tìm công thức truy hồi cho: Số xâu tam phân độ dài n với một số chẵn 0 và một số lẻ 1.

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1} + a_{n-1}$$
$$b_n = 3^{n-1} - c_{n-1}$$
$$c_n = 3^{n-1} - b_{n-1}$$

Nội dung

Ví dụ

Tìm hàm sinh cho dãy số là nghiệm của công thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + n$$
$$a_0 = 1$$

Ví dụ (Chọn không lặp)

Đặt $g_n(x)$ là họ các hàm sinh

$$g_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \cdots + a_{n,k}x^k + \ldots a_{n,n}x^n$$

thỏa mãn công thức truy hồi

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1} \\ a_{n,0} &= a_{n,n} = 1 \\ a_{n,k} &= 0 \qquad\qquad \text{với mọi } k > n \end{aligned}$$

Hãy tìm dạng đóng cho hàm sinh $g_n(x)$ và dùng nó để tìm công thức tường minh cho $a_{n,k}$.

Giải

$$
\begin{aligned}
g_n(x) - 1 = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x^k &= \sum_{k=1}^{n} (a_{n-1,k} x^k + a_{n-1,k-1} x^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k} x^k + x \sum_{h=0}^{n-1} a_{n-1,h} x^k) \\
&= g_{n-1}(x) - 1 + x g_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

Vậy ta được

$$
g_n(x) = g_{n-1}(x) + x g_{n-1}(x) = (1 + x) g_{n-1}(x)
$$

Giải công thức truy hồi trên, ta được

$$
g_n(x) = (1 + x)^n g_0(x) = (1 + x)^n.
$$

Nội dung

Số Catalan

Có bao nhiêu cách đặt dấu ngoặc cho tổng n số để chỉ định trình tự thực hiện phép cộng?

Ví dụ

Với $n = 4$ ta có 5 khả năng:

$$\begin{gathered}
(((a+b)+c)+d) \\
((a+(b+c))+d) \\
((a+b)+(c+d)) \\
(a+((b+c)+d)) \\
(a+(b+(c+d)))
\end{gathered}$$

Công thức truy hồi cho các số Catalan

$$\begin{aligned} C_n &= C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i}. \end{aligned}$$

Công thức này suy ra từ các cách đặt dấu ngoặc:

$$\begin{aligned} (1 \ldots n) \; &= (1)(2 \ldots n), \\ & \quad (1\ 2)(3 \ldots n), \\ & \quad \ldots \\ & \quad (1 \ldots n-1)(n). \end{aligned}$$

Ta đặt $C_0 = 0$ và ta biết $C_1 = 1$.

Công thức truy hồi cho các số Catalan

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}. \end{aligned}$$

Hàm sinh của số Catalan

Xét hàm sinh của C_n:

$$\begin{aligned}
C(x) &= 0 + x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + \cdots \\
&= 0 + \sum_{n\geq 1} C_n x^n = \sum_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n} \left(C_i C_{n-i}\right) x^n
\end{aligned}$$

Theo luật tích

$$\begin{aligned}
C(x)^2 &= {C_0}^2 + (C_0 C_1 + C_1 C_0)x + (C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0)x^2 + \cdots \\
&= 0 + 0 + \sum_{n\geq 2} \left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \right) x^n \\
&= C(x) - x
\end{aligned}$$

Hàm sinh cho các số Catalan

Giải phương trình

$$C(x)^2 - C(x) + x = 0.$$

Ta được

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \\ &= \frac{1 \pm (1-4x)^{1/2}}{2}. \end{aligned}$$

Vì $C_0 = 0$, ta lấy nghiệm

$$C(x) = \frac{1 - (1-4x)^{1/2}}{2}.$$

Định lý nhị thức tổng quát

Với số thực q bất kỳ, khai triển của chuỗi

$$(1+y)^q = \binom{q}{0} + \binom{q}{1} y + \binom{q}{2} y^2 + \cdots + \binom{q}{n} y^n + \cdots$$

có hệ số $\binom{q}{n}$ của y^n được định nghĩa bởi

$$\binom{q}{n} := \frac{q(q-1)(q-2) \times \cdots \times [q-(n-1)]}{n!}.$$

(Công thức cho hệ số tổng quát $\binom{q}{n}$ xuất hiện từ chuỗi Taylor cho $(1+y)^q$.)

Bổ đề

Với mỗi $n \geq 1$,

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}}$$

Định lý

Hàm sinh của dãy số Catalan là

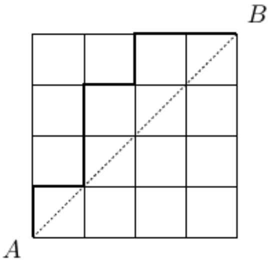
$$C(x) = \frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n.$$

Số Catalan

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Bài tập

Xét bàn cờ $n \times n$:



Xét đường đi ngắn nhất từ góc A tới góc B đi qua các cạnh (mỗi đường qua $2n$ cạnh).

1. Có bao nhiêu đường như vậy?
2. Chứng minh rằng số đường không xuống dưới đường chéo chính là số Catalan C_n.
3. Hãy tìm cách chứng minh số Catalan $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ mà không dùng hàm sinh.

Nội dung

Định nghĩa

Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng là hệ thức truy hồi có dạng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực và $c_k \neq 0$.

Ví dụ

- Công thức truy hồi

$$P_n = (1.11)P_{n-1}$$

  là tuyến tính thuần nhất bậc một.

- Công thức

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

  là tuyến tính thuần nhất bậc hai.

Định lý

Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử phương trình

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2. Khi đó dãy $\langle a_n \rangle$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1 {r_1}^n + \alpha_2 {r_2}^n$$

trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

Ví dụ

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

với $a_0 = 2, a_1 = 7$.

Bài tập

Hãy chứng minh định lý trước dùng hàm sinh.

Định lý

Cho c_1 và c_2 là hai số thực và $c_2 \neq 0$. Giả sử phương trình

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

có nghiệm kép r_0. Khi đó dãy $\langle a_n \rangle$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1 {r_0}^n + \alpha_2 n {r_0}^n$$

trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

Ví dụ

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

với $a_0 = 1, a_1 = 6$.

Bài tập

Hãy chứng minh định lý trước dùng hàm sinh.

Định lý

Cho $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực. Giả sử phương trình

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Khi đó dãy $\langle a_n \rangle$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1 {r_1}^n + \alpha_2 {r_2}^n + \cdots + \alpha_k {r_k}^n$$

trong đó α_i là các hằng số.

Ví dụ

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

với $a_0 = 2, a_1 = 5$ và $a_2 = 15.$