

· Định nghĩa:

Cho A là một tập hợp khác rỗng. Giả sử, ứng với mỗi $x = a \in A$ ta có một mệnh đề p(a). Khi đó, ta nói p = p(x) là một vị từ theo một biến (xác định trên A)

2

cuu duong than cong. com

Vị từ và lượng từ

· Định nghĩa:

Tổng quát, cho A_1 , A_2 , A_3 ...là n tập hợp khác trống. Giả sử rằng ứng với mỗi $(x_1,x_2,...x_n)=(a_1,a_2,...a_n)\in A_1\times A_2\times ... \times A_n$, ta có một mệnh đề $p(a_1,a_2,...a_n)$. Khi đó ta nói $p=p(x_1,x_2,...x_n)$ là một vị từ theo n biến(xác định trên $A_1\times A_2\times ... \times A_n$)

3

Predicates and Quantifiers

Propositional functions or predicates are propositions which contain variables

Example Let P denote the Predicate "is greater than 0" and P(x) denote "x > 0" x is called a variable

The predicate become a proposition once the variable x has been assigned a value.

What is the truth value of p(5), p(0) and p(-2)?

"5>0" is true, "0>0" is false and "-2>0" is false

4

• Ví du 1:

Xét p(n) = "n > 2" là một vị từ một biến xác định trên tập các số tự nhiên \mathbb{N} .

Ta thấy với n = 3; 4 ta được các mệnh đề đúng p(3), p(4), còn với n = 0,1 ta được mệnh đề sai p(0), p(1).

5

Vị từ và lượng từ

Ví dụ 2

Xét $p(x,y) = "x^2 + y = 1"$ là một vị từ theo hai biến xác định trên \mathbb{R}^2 , ta thấy p(0,1) là một mệnh đề đúng, trong khi p(1,1) là một mệnh đề sai.

6

cuu duong than cong. com

Examples

Example:

Let Q(x,y) denote the statement "y =x + 2". What is the truth value of Q(2,4,) and Q(4,1) "4 = 2+2" is true and "1 = 4+2" is false

Q(2,y) $\vee \neg$ Q(0,3) is a proposition??? Q(1,3) $\vee \neg$ Q(0,1) is a proposition ???

 $Q(2,y) \vee \neg Q(0,3)$ is not a proposition: y is not bounded $Q(1,3) \vee \neg Q(0,1)$ is a proposition which is true

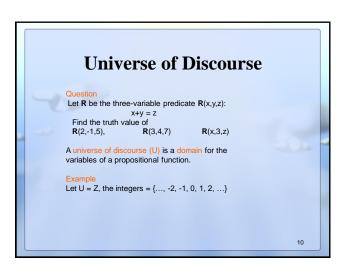
7

Vị từ và lượng từ

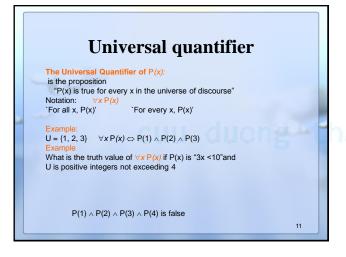
- Định nghĩa: Cho trước các vị từ p(x), q(x) theo một biến x ∈ A. Khi ấy,
 - Phủ định của vị từ p(x) kí hiệu là ¬p(x) là vị từ mà khi thay x bởi một phần tử cố định của A thì ta được mệnh đề ¬(p(a))
 - Phép nối liền(tương ứng nối rời, kéo theo...) của p(x) và q(x) được ký hiệu bởi p(x) ∧ q(x)(tương ứng là p(x)√q(x), p(x)→q(x)) là vị từ theo biến x mà khi thay x bởi phần tử cố định a của A ta được mệnh đề p(a)∧ q(a) (tương ứng là p(a) ∨ q(a), p(a)→q(a))

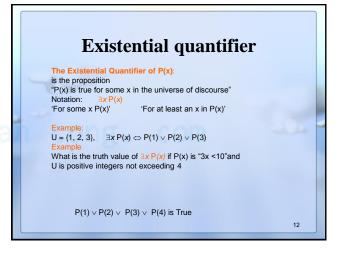
8

Vị từ và lượng từ Định nghĩa: Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) như sau: Mệnh đề "Với mọi x thuộc A,p(x)", kí hiệu bởi "∀x ∈ A, p(x)", là mệnh đề dược định bởi "∀x ∈ A, p(x)" dúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị a ∈ A. Mệnh đề "Tôn tại(it nhất) (hay có (ít nhất) một x thuộc A, p(x))" kí hiệu bởi :"∃x ∈ A, p(x)", là mệnh đề được định bởi "∃x ∈ A, p(x)" đúng, khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị x = a₀ nào đó sao cho mệnh đề p(a₀) đúng. Chú ý: Các mệnh đề lượng từ hóa ở trên đều là các mệnh đề có chân trị xác định chứ không còn là các vị từ theo biến x nữa.



cuu duong than cong, com





1) Mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 1 \le 0$ " là một mệnh đề sai hay đúng?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 1 \in \mathbb{R}$ mà $x_0^2 + 3x_0 + 1 > 0$

2) Mênh đề " $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \le 0$ " là một mênh đề đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì tồn tại $x_0 = -1 \in \mathbb{R}$ mà $x_0^2 + 3x_0 + 1 \le 0$.

Vị từ và lượng từ

Mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \ge 2x$ " là một mệnh đề đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với $\forall x \in \mathbb{R}$, , ta luôn luôn có

$$x^2 - 2x + 1 \ge 0$$

Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ " là một mệnh đề đúng hay sai?

Vị từ và lượng từ

· Định nghĩa:

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên A×B. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x,

" $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ " = " $\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$ " " $\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$ " = " $\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$ "

" $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ " = " $\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$ "

" $\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$ " = " $\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$ "

Vị từ và lượng từ

Xét vị từ p(x, y) = "x + 2y < 1" theo hai biến x, y xác định trên

Mệnh đề " $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0$, $y_0 = 1 \in \mathbf{R}$ mà $x_0 + 2y_0 \ge 1$.

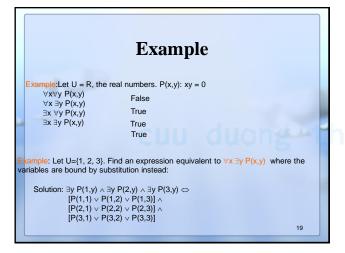
Mệnh đề " $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai?

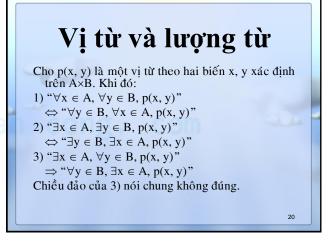
Mệnh đề đúng vì với mỗi $x = a \in \mathbf{R}$, tồn tại $y_a \in \mathbf{R}$ như $y_a = -a/2$, sao cho $a + 2y_a < 1$.





cuu duong than cong, com





• Chứng minh 3)

Giả sử " $\exists x \in A$, $\forall y \in B$, p(x, y)" là đúng. Khi đó, tồn tại $a \in A$ sao cho " $\forall y \in B$, p(x, y)" là đúng, nghĩa là nếu thay $y = b \in B$ bất kỳ thì p(a,b) đúng. Như vậy, $y = b \in B$ tuỳ chọn thì ta có thể chọn x = a để " $\exists x \in A$, p(x, y)" là đúng. Do đó, " $\forall y \in B$, $\exists x \in A$, p(x, y)" là mệnh đề đúng.

2

Ví dụ thể hiện chiều đảo của 3 là chưa chắc đúng:

• Gọi p(x,y) là vị từ theo 2 biến thực

$$p(x,y) = "x + y = 1",$$

- Nếu thay y tuỳ ý thì x = 1 y để cho x + y = 1
 nên mệnh đề ∃x ∈ A, p(x, y) là đúng.
 Nên mệnh đề "∀y∈ B, ∃x ∈ A, p(x, y)" là đúng.
- Ngược lại, nếu chọn x = a tuỳ ý, ta có thể chọn y = -a để "∀y ∈ B, p(x, y)" là sai.
 Điều này chứng tỏ, "∃x ∈ A, ∀y ∈ B, p(x, y)" là sai.
- Do đó, phép kéo theo sau là sai: " $\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$ " -> " $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ "

22

cuu duong than cong. com

Vị từ và lượng từ

- Trong một mệnh đề lượng từ hoá từ một vị từ theo nhiều biến độc lập, nếu ta hoán vị hai lượng từ đứng cạnh nhau thì:
 - Mệnh đề mới vẫn còn tương đương logic với mệnh đề cũ nếu hai lượng từ này cùng loại.
 - Mệnh đề mới này sẽ là một hệ quả logic của mệnh đề cũ nếu hai lượng từ trước khi hoán vị có dạng ∃ ∀

23

Vị từ và lượng từ

Định lý:

 a) Với p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A, ta có:

$$\frac{\forall x \in A, p(x)}{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\frac{\exists x \in A, p(x)}{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

b) Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ có được bằng cách thay lượng từ \forall bằng lượng từ \exists và ngược lại, và thay vị từ $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ bằng vị từ .

$$p(x_1, x_2, ..., x_n)$$





cuu duong than cong, com



Vị từ và lượng từ Qui tắc đặc biệt hoá phổ dụng: Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hoá trong đó một biến x ∈ A bị buộc bởi lượng từ phổ dụng ∀, khi ấy nếu thay thế x bởi a ∈ A ta sẽ được một mệnh đề đúng.

Ví du:

"Mọi người đều chết"

"Socrate là người"

Vậy "Socrate cũng chết"

29

Vị từ và lượng từ

• Qui tắc tổng quát hoá phổ dụng:

Nếu trong một mệnh đề lượng từ hoá, khi thay một biến buộc bởi lượng từ \forall bằng một phần tử cố định nhưng tuỳ ý của tập hợp tương ứng mà mệnh đề nhận được có chân trị 1 thì bản thân mệnh đề lượng từ hoá ban đầu cũng có chân trị 1.

30

cuu duong than cong, com

Inference Rules for Quantifiers

- $\forall x P(x)$ Universal instantiation (substitute *any* object o)
- P(g) (for g a general element of u.d.) $\therefore \forall x P(x)$ Universal generalization
- $\exists x \ P(x)$ $\therefore P(c)$ Existential instantiation (substitute a *new constant c*)
- $\frac{P(o)}{\therefore \exists x P(x)}$ (substitute any extant object o) Existential generalization

Example

Every man has two legs, John Smith is a man.

Therefore, John Smith has two legs.

Predicates: M(x): x is a man

L(x): x has two legs

J: John Smith is a member of the universe

1. $\forall x[M(x) \rightarrow L(x)]$

2. M(J) ∴ L(J)

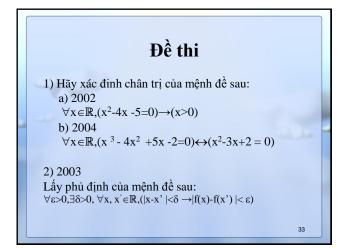
Proof 1. $\forall x[M(x) \rightarrow L(x)]$ Hypothesis 1

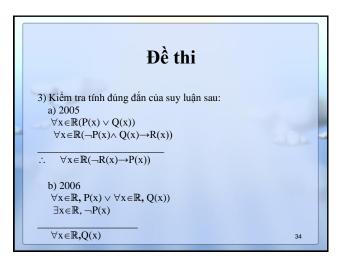
2. $M(J) \rightarrow L(J)$ Step 1 and UI

3. M(J) Hypothesis 24. L(J) Step 2 and 3 a

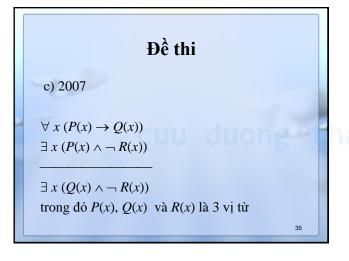
Step 2 and 3 and modus

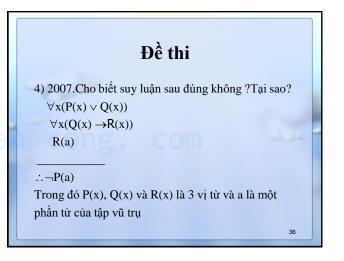
ponens





cuu duong than cong. com





Đề thi

- 5) 2009.
- a) Một dãy số thực $\{x_n\}$ được nói là thuộc O(n) nếu tồn tại số thực dương C và số tự nhiên m sao cho |x_n|< Cn mỗi khi n ≥ m. Hãy sử dụng mệnh đề lượng từ hóa để viết lại định
- b) Viết ra mệnh đề lượng từ hóa cho $\,$ một dãy số thực $\{x_n\}$ không thuộc O(n).

Đề thi

6) 2010. Kiểm tra tính đúng đắn của suy luận sau $\forall x (P(x) \lor Q(x))$

 $\forall x (\neg Q(x) \lor R(x))$

 $\exists x \neg P(x)$

∴ $\exists x R(x)$

Trong đó P(x), Q(x) và R(x) là 3 vị từ

Bài tập

7)

Xét chân trị và tìm phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \le 0;$

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \le 0;$

c) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0;$

d) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0;$

e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{N}, x + y \ge 0;$

f) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0$;

g) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0;$

h) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0;$

Tài liệu tham khảo

- [1]GS.TS Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc, NXB Giáo dục
- [2]TS. Trần Ngọc Hội, Toán rời rạc
- [3] Dr.Kossi Edoh, Department of Computer Science, Montclair State University
- [4] Michael P.Frank 's slides