

BÀI TOÁN ĐẾM

Lý thuyết tổ hợp

Nội dung

- Các nguyên lý đếm cơ bản
- Nguyên lý bù trừ
- Hoán vị và tổ hợp
- Hệ thức truy hồi

Các nguyên lý đếm cơ bản

Nguyên lý cộng

- Nếu một công việc nào nó có thể thực hiện theo *n phương án khác nhau*, trong đó:
 - Phương án thứ 1 có m_1 cách thực hiện
 - Phương án thứ 2 có m_2 cách thực hiện
 -
 - Phương án thứ n có m_n cách thực hiện
- Khi đó, có: $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Qui tắc cộng

- Phát biểu dưới dạng **tập hợp**:

Nếu A và B là hai tập rời nhau ($A \cap B = \emptyset$) thì : $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$.

Nếu A_1, A_2, \dots, A_n là những tập hợp rời nhau thì:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_n).$$

Nguyên lý cộng: Ví dụ 1

- Giả sử cần chọn hoặc một cán bộ hoặc một sinh viên tham gia một hội đồng của một trường đại học.
 - Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu như có 37 cán bộ và 63 sinh viên.
- **Lời giải:**
 - Gọi việc thứ nhất là chọn 1 cán bộ từ tập cán bộ ta có 37 cách.
 - Gọi việc thứ hai là chọn 1 sinh viên từ tập sinh viên ta có 63 cách.
 - Vì tập cán bộ và tập sinh viên là rời nhau, theo nguyên lý cộng ta có tổng số cách chọn vị đại biểu này là $37 + 63 = 100$ cách chọn.

Nguyên lý cộng: Ví dụ 2

- Một đoàn VĐV gồm môn bắn súng và bơi được cử đi thi đấu.
 - Số VĐV nam là 10 người.
 - Số VĐV thi bắn súng kể cả nam và nữ là 14 người.
 - Số VĐV nữ thi bơi bằng số VĐV nam thi bắn súng.
 - Hỏi đoàn có bao nhiêu VĐV.
- **Lời giải:**
 - Chia đoàn thành hai tập, tập các VĐV nam và tập các VĐV nữ.
 - Tập nữ lại được chia thành hai: thi bắn súng và thi bơi.
 - Thay số nữ thi bơi bằng số nam thi bắn súng , ta được số nữ bằng tổng số vận động viên thi bắn súng.
 - Từ đó theo nguyên lý cộng toàn đoàn có $14 + 10 = 24$ VĐV.

Nguyên lý cộng: Ví dụ 3

- Giá trị của biến k sẽ bằng bao nhiêu sau khi thực hiện đoạn chương trình sau :

```
k := 0  
for i1 := 1 to n1
```

```
    k := k + 1
```

```
for i2 := 1 to n2
```

```
    k := k + 1
```

```
.....
```

```
for im := 1 to nm
```

```
    k := k + 1
```

- Lời giải:**
 - Coi mỗi vòng for là một công việc, do đó ta có m công việc T_1, T_2, \dots, T_m .
 - Trong đó T_i thực hiện bởi n_i cách ($i = 1, 2, \dots, m$).
 - Theo nguyên lý cộng tổng tất cả các cách để hoàn thành T_1, T_2, \dots, T_m là $k = n_1 + n_2 + \dots + n_m$.

Nguyên lý nhân

- Nếu một công việc nào đó phải hoàn thành qua *n giai đoạn liên tiếp*, trong đó:
 - Phương án thứ 1 có m_1 cách thực hiện
 - Phương án thứ 2 có m_2 cách thực hiện
 -
 - Phương án thứ n có m_n cách thực hiện
- Khi đó, có: $m_1 \cdot m_2 \dots m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Quy tắc nhân

- Phát biểu tổng quát bằng **tập hợp**:
 - Nếu A_1, A_2, \dots, A_m là những tập hợp hữu hạn,
 - khi đó số phần tử của tích đề-các các tập này bằng **tích số các phần tử của mỗi tập thành phần**.
 - Hay đẳng thức: $N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m) = N(A_1) N(A_2) \dots N(A_m)$.
 - Nếu $A_1 = A_2 = \dots = A_m$ thì $N(A^m) = N(A)^m$

Nguyên lý nhân: Ví dụ 1

- Giá trị của biến k sẽ bằng bao nhiêu sau khi thực hiện đoạn chương trình sau :

```
k:=0
for i1 = 1 to n1
  for i2 = 1 to n2
    .....
    .....
    for im=1 to nm
      k:=k +1
```

- Lời giải:**
 - Coi mỗi vòng **for** là một công việc, do đó ta có m công việc T_1, T_2, \dots, T_m .
 - Trong đó T_i thực hiện bởi n_i cách ($i= 1, 2, \dots, m$).
 - Theo nguyên lý cộng tổng tất cả các cách để hoàn thành T_1, T_2, \dots, T_m là $k= n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$

Nguyên lý nhân: Ví dụ 2

- Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế của một giảng đường bằng một chữ cái và sau đó là một số nguyên nhỏ hơn 100.
 - Bằng cách như vậy hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế có thể ghi nhãn khác nhau.
- **Lời giải:**
 - Có nhiều nhất là $26 \times 100 = 2600$ ghế được ghi nhãn.

Nguyên lý nhân: Ví dụ 3

- Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 7?.
- **Lời giải:**
 - Một xâu nhị phân có độ dài 7 gồm 7 bit
 - Mỗi bit có hai cách chọn (hoặc giá trị 0 hoặc giá trị 1)
 - Theo qui tắc nhân ta có $2.2.2.2.2.2.2 = 2^7 = 128$ xâu bit nhị phân độ dài 7.

Nguyên lý nhân: Ví dụ 4

- Số điện thoại gồm 10 chữ số:
 - nhóm mã vùng (3 chữ số), nhóm mã chi nhánh (3 chữ số), nhóm mã máy (4 chữ số).
- Một số hạn chế đối với một số con số:
 - X biểu thị một số có thể nhận các giá trị từ 0..9
 - N là số có thể nhận các chữ số từ 2..9
 - Y là các số có thể nhận các chữ số 0 hoặc 1.
 - Hỏi theo hai dự án đánh số NYX NNX XXXX và NXX NXX XXXX có bao nhiêu số điện thoại được đánh số khác nhau?
- Lời giải:
 - Đánh số theo dự án NYX NNX XXXX được nhiều nhất là:
$$8 \times 2 \times 10 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 8^3 \times 10^6 = 1024 \cdot 10^6$$
 - Đánh số theo dự án NXX NXX XXXX được nhiều nhất là:
$$8 \times 10 \times 10 \times 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 8^2 \times 10^8 = 64 \cdot 10^8$$

Nhận xét

- Nếu *bỏ 1 giai đoạn nào đó mà ta không thể hoàn thành được công việc* (không có kết quả) thì lúc đó ta cần phải sử dụng quy tắc **nhân**.
- Nếu *bỏ 1 giai đoạn nào đó mà ta vẫn có thể hoàn thành được công việc* (có kết quả) thì lúc đó ta sử dụng quy tắc **cộng**.

Một vài ví dụ

- **VD1**: Người ta có thể đi từ TP.HCM đến Đà Nẵng bằng một trong ba phương tiện: tàu hoả, tàu thuỷ và máy bay. Nếu có 3 cách đi bằng tàu hoả, 4 cách đi bằng tàu thuỷ, và 2 cách đi bằng máy bay, thì sẽ có mấy cách đi từ TP.HCM đến Đà Nẵng?
- **VD2**: Để đi từ thành phố HCM đến thành phố Phan Rang người ta phải đi lần lượt qua hai thành phố Biên Hòa và Phan Thiết. Nếu có 3 cách đi từ TP.HCM đến TP. Biên Hòa, 4 cách đi từ TP. Biên Hòa đến TP. Phan Thiết và 2 cách đi từ TP. Phan Thiết đến TP. Phan Rang, thì sẽ có mấy cách đi từ TP. HCM đến TP. Phan Rang?

Một vài ví dụ

- **VD3**: Có 10 người tham gia vào việc chụp ảnh đám cưới (có cả cô dâu và chú rể). Bức ảnh chỉ có 6 người trong số họ.
 - a) Có bao nhiêu bức ảnh có mặt cô dâu?
 - b) Có bao nhiêu bức ảnh có mặt cả cô dâu và chú rể?
 - c) Có bao nhiêu bức ảnh chỉ có hoặc cô dâu hoặc chú rể?

Nguyên lý bù trừ

- Nếu không có giả thiết gì về sự rời nhau giữa hai tập A và B thì:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 1

- Lớp toán học rời rạc có 25 sinh viên giỏi tin học, 13 sinh viên giỏi toán và 8 sinh viên giỏi cả toán và tin học.
 - Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên nếu mỗi sinh viên giỏi toán hoặc học giỏi tin học hoặc giỏi cả hai?
- Lời giải:
 - Tập các sinh viên giỏi tin học: A
 - Tập các sinh viên giỏi toán: B
 - Khi đó $A \cap B$ là tập sinh viên giỏi cả toán học và tin học.
 - Vì mỗi sinh viên trong lớp hoặc giỏi toán, hoặc giỏi tin học hoặc giỏi cả hai nên ta có tổng số sinh viên trong lớp là $N(A \cup B)$.
 - Do vậy: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 25 + 13 - 8 = 30$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 2

- Có bao nhiêu số nguyên **không lớn hơn** 1000 chia hết cho 7 hoặc 11.

- **Lời giải:**

- A: tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7
- B: tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 11.
- Khi đó tập số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc chia hết cho 11 là $N(A \cup B)$.
- Theo nguyên lý bù trừ ta có:

$$\begin{aligned} N(A \cup B) &= N(A) + N(B) - N(A \cap B) = \lfloor 1000/7 \rfloor + \lfloor 1000/11 \rfloor - \lfloor 1000/7 \cdot 11 \rfloor \\ &= 142 + 90 - 12 = 220. \end{aligned}$$

Số phần tử của hợp 3 tập A, B, C

- Ta nhận thấy $N(A) + N(B) + N(C)$ **đếm một lần** những phần tử **chỉ thuộc một trong ba** tập hợp.
 - số phần tử của $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ được đếm **hai lần** là $N(A \cap B)$, $N(A \cap C)$, $N(B \cap C)$,
 - Số phần tử của $A \cap B \cap C$ được đếm **ba lần** là $N(A \cap B \cap C)$
- Khi đó, biểu thức: $N(A \cup B \cup C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C)$ chỉ đếm **các phần tử chỉ thuộc một trong ba tập** hợp và loại bỏ đi **những phần tử được đếm hai lần**.
 - Như vậy, số phần tử được **đếm ba lần** chưa được đếm, nên ta phải cộng thêm với **giao của cả ba tập** hợp.
- Từ đó ta có công thức đối với 3 **tập không rời nhau**:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

Nguyên lý bù trừ tổng quát

- A_1, A_2, \dots, A_m là những tập hữu hạn. Khi đó:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = N_1 - N_2 + \dots + (-1)^{m-1} N_m$$

- Trong đó:

$$N_1 = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_m)$$

- $1 < k < m$, N_k là tổng phần tử của tất cả các **giao** của **k** tập lấy từ m tập đã cho,

$$N_m = N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m)$$

Nói cách khác:

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{1 \leq i \leq n} N(A_i) - \sum_{1 \leq i, j < n} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ & - \dots + (-1)^{n+1} N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 3

- Tìm công thức tính số phần tử của 4 tập hợp.
- **Lời giải:**
 - Từ nguyên lý bù trừ tổng quát ta có:

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = & N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) + N(A_4) - N(A_1 \cap A_2) - \\ & N(A_1 \cap A_3) - N(A_1 \cap A_4) - N(A_2 \cap A_3) - N(A_2 \cap A_4) - \\ & N(A_3 \cap A_4) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \\ & N(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + N(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \end{aligned}$$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 4

- Tập $X = \{1, 2, \dots, 10000\}$ có bao nhiêu số **không chia hết** cho **bất cứ** số nào trong các số 3, 4, 7?

- **Lời giải:**

- Gọi **A** là tập các số thuộc X chia hết cho 3, **B** là tập các số thuộc X chia hết cho 4, **C** là tập các số thuộc X chia hết cho 7.
- $N(ABC)$: tập các số trong X **chia hết cho ít nhất** một trong các số 3, 4, 7

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

trong đó :

$$\begin{aligned} N(A) + N(B) + N(C) &= [10\,000/3] + [10\,000/4] + [10\,000/7] \\ &= 3333 + 2500 + 1428 = 7261 \end{aligned}$$

$$N(A \cap B) = [10000/3 \times 4] = 833$$

$$N(A \cap C) = [10000/3 \times 7] = 476$$

$$N(B \cap C) = [10000/4 \times 7] = 357$$

$$N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C) = 833 + 476 + 357 = 1666$$

$$N(A \cap B \cap C) = [10000/(3 \times 4 \times 7)] = 119.$$

=> Số các số nhỏ hơn 10000 cần đếm là :

$$10000 - N(A \cup B \cup C) = 10000 - (7261 - 1666 + 119)$$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 5

- Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00 hoặc kết thúc bởi 11.

- **Lời giải:**

- A: số xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00,
- B: số xâu nhị phân độ dài 10 kết thúc bởi 11.
- Dễ dàng nhận thấy, $N(A) = N(B) = 2^8 = 256$, $N(A \cap B) = 2^6 = 64$.
- Theo nguyên lý bù trừ ta có:

$$\begin{aligned} N(A \cup B) &= N(A) + N(B) - N(A \cap B) \\ &= 256 + 256 - 64 = 448. \end{aligned}$$

Đếm các hoán vị và tổ hợp

Chỉnh hợp **lắp**

- Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là **bộ có thứ tự** gồm **k thành phần lấy từ n phần tử** của tập đã cho.
 - Như vậy, một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử có thể xem là phần tử của **tích đề các A^k** với A là tập đã cho.
- Theo nguyên lý nhân, số các tất cả các chỉnh hợp lặp chập k của n sẽ là **n^k** .
- **Ví dụ 1:** Tính số dãy **nhị phân** có độ dài k bit
 - $\Rightarrow n=2$; ví dụ $k=3$: ta có (000), (111): thành phần có thể lặp; (001), (110), (011), (101)...
 - $\Rightarrow 2^3$.

Chỉnh hợp lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 2:** Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài k ?
 - **Lời giải:** Bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 kí tự ['A'..'Z'], số các xâu có độ dài k được chọn từ 26 chữ cái chính là **chỉnh hợp lặp k của 26 phần tử** và bằng **26^k** .

Chỉnh hợp lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 3:** Tính xác suất lấy ra liên tiếp được 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả đỏ, 7 quả xanh nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại bỏ nó trở lại bình?
- **Lời giải:**
 - Số kết cục có lợi để ta lấy ra liên tiếp 3 quả bóng đỏ là 5^3 (là chỉnh hợp **lặp** vì có 5 quả đỏ ta phải lấy 3 quả và **có hoàn lại**).
 - Toàn bộ kết cục có thể để lấy ra 3 quả bóng bất kỳ trong 12 quả bóng là 12^3 .
 - Như vậy, xác suất để có thể lấy ra 3 quả bóng đỏ liên tiếp là $5^3/12^3$.

Chỉnh hợp **không lặp**

- Chỉnh hợp **không lặp** chập k của n phần tử là **bộ có thứ tự** gồm k **thành phần lấy ra từ n phần tử** đã cho.
 - Các phần tử **không được lặp lại**.
- Để xây dựng một chỉnh hợp không lặp:
 - Xây dựng từ thành phần đầu tiên. Thành phần này có n khả năng chọn.
 - Mỗi thành phần tiếp theo, những khả năng chọn giảm đi **1** (vì **không được lấy lặp lại**).
 - Tới thành phần thứ k có **$n-k+1$** khả năng chọn.
 - Theo nguyên lý nhân ta có số **chỉnh hợp không lặp** chập k của tập hợp n phần tử ký hiệu là **$P(n, k)$** được tính theo công thức:

$$P(n, k) = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chỉnh hợp không lặp – Ví dụ

- **Ví dụ 1:** Tìm số hàm đơn ánh có thể xây dựng được từ tập k phần tử sang tập n phần tử?
- **Lời giải:**
 - Số hàm đơn ánh từ tập k phần tử sang tập n phần tử chính là $P(n,k)$.
- **Ví dụ 2:** Có bao nhiêu cách chọn 4 cầu thủ khác nhau trong đội bóng gồm 10 cầu thủ để tham gia các trận đấu đơn.
- **Lời giải:**
 - Có $P(10,4) = 10.9.8.7 = 5040$ cách chọn.

Chỉnh hợp không lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 3:** Có 8 vận động viên chạy thi. Người về nhất sẽ được nhận huân chương vàng, người về nhì nhận huân chương bạc, người về ba nhận huy chương đồng.
 - Hỏi có bao nhiêu cách trao huy chương nếu tất cả các kết cục đều có thể xảy ra?
- **Lời giải:** Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập 3 **không lặp** của tập hợp 8 phần tử.
 - Vì thế có $P(8,3) = 8.7.6 = 336$ cách trao huy chương.

Hoán vị

- Các hoán vị của n phần tử là một **cách xếp có thứ tự** các phần tử đó.
 - Số các hoán vị của tập n phần tử có thể coi là **trường hợp riêng của chỉnh hợp không lặp** với $k = n$.
 - Ta cũng có thể đồng nhất một hoán vị với một **song ánh từ tập n phần tử lên chính nó**.
 - Số hoán vị của tập gồm n phần tử là **$P(n,n) = n!$** (hoặc P_n)
- **Ví dụ 1:** Có 6 người xếp thành hàng để chụp ảnh. Hỏi có thể bố trí chụp được bao nhiêu kiểu khác nhau?
- **Lời giải:** Mỗi kiểu ảnh là một hoán vị của 6 người.
 - Do đó có **$6! = 720$** kiểu ảnh khác nhau có thể chụp.

Hoán vị - Ví dụ

- **Ví dụ 2:** Cần bố trí thực hiện n chương trình trên một máy tính. Hỏi có bao nhiêu cách bố trí khác nhau?
- **Lời giải:** Số chương trình được đánh số từ 1, 2, ..., n . Như vậy, số chương trình cần thực hiện trên một máy tính là **số hoán vị của 1, 2, ..., n . ($n!$)**
- **Ví dụ 3:** Một thương nhân đi bán hàng tại 8 thành phố. Cô ta có thể bắt đầu hành trình của mình tại một thành phố nào đó nhưng phải qua 7 thành phố kia theo bất kỳ thứ tự nào mà cô ta muốn. Hỏi có bao nhiêu lộ trình khác nhau mà cô ta có thể đi?
- **Lời giải:** Vì thành phố xuất phát đã được xác định. Do vậy thương nhân có thể **chọn tùy ý 7 thành phố** còn lại để hành trình.
 - Như vậy, tất cả số hành trình của thương nhân có thể đi qua là $7! = 5040$ cách.

Hoán vị **lắp**

- **Hoán vị lắp** : Cho n phần tử, trong đó có n_1 phần tử x_1 , n_2 phần tử x_2 , ..., n_k phần tử x_k với $n_1+n_2+...+n_k=n$.
 - Mỗi cách sắp xếp n phần tử đó vào n vị trí gọi là **một hoán vị lắp của n phần tử** đã cho.
- *Số tất cả các hoán vị lắp của n phần tử ở trên là :*
$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = n! / (n_1! n_2! \dots n_k!)$$

Tổ hợp

- Một tổ hợp chập k của n phần tử là một bộ **không kể thứ tự** gồm **k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử** đã cho.
- Có thể coi một tổ hợp chập k của n phần tử là một **tập con** k phần tử lấy trong n phần tử.
- Số tổ hợp chập k của n phần tử ký hiệu là $C(n,k)$.

$$P(n,k) = C(n,k).P(k,k) \Rightarrow C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Số tổ hợp chập k của n phần tử: $C(n,k)$

- Có thể tính được trực tiếp $C(n,k)$ thông qua **chỉnh hợp không lặp** của k phần tử.
- Xét tập hợp tất cả các chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử.
 - Sắp xếp chúng thành những **lớp** sao cho ***hai chỉnh hợp thuộc cùng một lớp chỉ khác nhau về thứ tự***.
 - Mỗi lớp như vậy là một tổ hợp chập k của n phần tử **$C(n,k)$** .
 - Số chỉnh hợp trong mỗi lớp đều bằng nhau và bằng **$k!$** (là số hoán vị k phần tử **$P(k,k)$**).
 - Số các lớp bằng **số chỉnh hợp không lặp** chập k của n **$P(n,k)$** .
 - Từ đó ta có:

$$P(n,k) = C(n,k).P(k,k) \Rightarrow C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tổ hợp – Ví dụ

- **Ví dụ 1:** Cho $S = \{a,b,c,d\}$, tìm $C(4,2)$?
- **Lời giải:**
 - $C(4,2) = 6$ tương ứng với 6 tập con: $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$.
- **Ví dụ 2:** Có n đội bóng thi đấu vòng tròn. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu.
- **Lời giải:**
 - Cứ hai đội bóng thì có một trận,
 - Số trận đấu sẽ bằng số cách chọn 2 trong n đội,
 - $C(n, 2) = n! / 2!(n-2)! = n(n-1)/2$ trận đấu.

Tổ hợp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 3:** Chứng minh

a) $C(n,k) = C(n, n-k)$

b) $C(n, 0) = C(n,n)= 1$

c) $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$

Lời giải:

a) $C(n,n-k) = n!/(n-k)! (n-n+k)! = n!/k!(n-k)! = C(n,k).$

Hoặc $C(n, k) = n!/k!(n-k)! = n!/ (n-k)! (n-(n-k))! = C(n, n-k);$

b) Chú ý $0!=1 \Rightarrow$ b hiển nhiên đúng

c) $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$

$$\begin{aligned} C(n-1, k-1) + C(n-1, k) &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(n-1)! \cdot n}{(k-1)!k(n-k-1)!(n-k)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C(n,k) \end{aligned}$$

Tổ hợp lặp

- Mỗi cách chọn ra k **vật** từ n **loại vật** khác nhau (*trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần*) được gọi là **tổ hợp lặp** chập k của n .
- Số các **tổ hợp lặp** chập k của n được ký hiệu là:

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k \quad \text{Hay } C(n+k-1, k)$$

Lưu ý: $C(n+k-1, k) = C(n+k-1, n-1)$

Tổ hợp lặp – Ví dụ

- **Ví dụ 1:** Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?
- **Giải:**
 - Ta có mỗi cách chọn là mỗi *tổ hợp lặp* chập 2 của 3.
 - Cụ thể: AA, AB, AC, BB, BC, CC

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$$

Tổ hợp lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 2:** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm **nguyên không âm**?
- **Giải:**
 - **Mỗi nghiệm** nguyên không âm của phương trình ứng với **một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại**,
 - sao cho có x_1 phần tử loại 1 được chọn, x_2 phần tử loại 2 được chọn, x_3 phần tử loại 3 được chọn.
 - Số này chính bằng số **tổ hợp lặp** chập 11 từ tập có 3 phần tử.
 - Vì vậy, số nghiệm nguyên không âm của phương trình là:
$$C(3 + 11 - 1, 11) = C(13, 11) = (13 \cdot 12) / 2 = 78.$$

Tổ hợp lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 3:** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm **nguyên không âm** thỏa mãn $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$?
- **Giải:**
 - Mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại,
 - sao cho có x_1 phần tử loại 1 được chọn, x_2 phần tử loại 2 được chọn, x_3 phần tử loại 3 được chọn.
 - Trong đó, có **ít nhất một phần tử loại 1, hai phần tử loại 2 và ba phần tử loại 3.**
 - Vì thế ta chọn **một** phần tử loại 1, **hai** phần tử loại 2, **ba** phần tử loại 3 **sau đó chọn thêm 5 phần tử nữa.**
 - Số này chính bằng số **tổ hợp lặp chập 5 từ tập có 3 loại** phần tử.
 - Vì vậy, số nghiệm nguyên không âm của phương trình là:
$$C(3 + 5 - 1, 5) = C(7, 5) = (7.6) / 2 = 21.$$

Hệ thức truy hồi

- Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức **biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước** của dãy, cụ thể là a_1, a_2, \dots, a_{n-1} với mọi $n \geq n_0$ nguyên dương.
- Dãy số được gọi là **nghiệm** của hệ thức truy hồi nếu ***các số hạng của nó thoả mãn hệ thức truy hồi.***

Ví dụ 1 - Lãi kép

- Giả sử một người gửi 10000\$ vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Hỏi sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?
- **Lời giải:**
 - Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm.
 - Vì số tiền có trong tài khoản sau n năm bằng số tiền có được trong $n-1$ năm cộng với lãi suất năm thứ n .
 - Nên dãy $\{P_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi:

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$$

Ví dụ 1 - Lãi kép (tt)

- Dùng phương pháp **lặp** để tìm nghiệm cho P_n :

$$P_0 = 10000$$

$$P_1 = 1.11 P_0$$

$$P_2 = 1.11 P_1 = (1.11)^2 P_0$$

.....

$$P_n = 1.11 P_{n-1} = (1.11)^n P_0$$

Thay $P_0 = 10000$, và $n = 30$ ta được:

$$P_{30} = (1.11)^{30} 10000 = 228922,97 \$$$

Ví dụ 2 - Họ nhà thỏ và số Fibonacci

- Một cặp thỏ sinh đôi (một con đực và một con cái) được thả lên một hòn đảo.
- Giả sử rằng cặp thỏ sẽ **chưa sinh sản được trước khi đầy hai tháng tuổi**.
- Từ khi chúng đầy hai tháng tuổi, mỗi tháng chúng **sinh thêm được một cặp thỏ**.
- Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau **n** tháng với giả sử các cặp thỏ là trường thọ.

Ví dụ 2 - Họ nhà thỏ và số Fibonacci (tt)

- **Lời giải:**

- Giả sử f_n là số **cặp** thỏ sau n tháng. Ta sẽ chỉ ra rằng f_1, f_2, \dots, f_n ($n=1, 2, \dots, n$) là các số của dãy fibonacci.
- Cuối tháng thứ nhất số **cặp** thỏ trên đảo là $f_1 = 1$.
- Vì tháng thứ hai cặp thỏ vẫn chưa đến tuổi sinh sản được nên trong tháng thứ hai $f_2 = 1$.
- Vì mỗi cặp thỏ chỉ được sinh sản sau ít nhất hai tháng tuổi, nên ta tìm số cặp thỏ sau tháng thứ n bằng cách cộng số cặp thỏ sau tháng $n-2$ và tháng $n-1$ hay $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.
- Do vậy, dãy $\{f_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi **$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$** với **$n \geq 3$** và **$f_1 = 1, f_2 = 1$** .

Ví dụ 2 - Họ nhà thỏ và số Fibonacci (tt)

Số tháng	Số cặp sinh sản	Số cặp thỏ con	Tổng số cặp thỏ
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
.....

Ví dụ 3 - Tính hệ số tổ hợp $C(n,k)$

- **Lời giải**

- Chọn phần tử cố định a trong n phần tử đang xét.
- Chia số cách chọn tập con k phần tử này thành hai lớp (lớp chứa a và lớp không chứa a).
- Nếu a được chọn thì ta cần bổ xung $k-1$ phần tử từ $n-1$ phần tử còn lại, từ đó lớp chứa a gồm $C(n-1, k-1)$ cách.
- Nếu a không được chọn, thì ta phải chọn k phần tử từ $n-1$ phần tử còn lại, từ đó lớp không chứa a gồm $C(n-1, k)$ cách.
- Theo nguyên lý cộng ta được công thức truy hồi: $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$
 - với các giá trị biên được suy ra trực tiếp: $C(n, 0) = C(n, n) = 1$.

Giải công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

- Một **hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất** bậc **k** với **hệ số hằng số** là hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (1)$$

trong đó c_1, c_2, \dots, c_k là các số thực và $c_k \neq 0$

- Tìm **công thức trực tiếp** cho số hạng a_n của dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn công thức (1):

– Theo phương pháp **qui nạp toán học** thì dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn công thức (1) được xác định duy nhất nếu như nó **thoả mãn k điều kiện đầu**:

$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$, trong đó C_0, C_1, \dots, C_{k-1} là các hằng số.

Ví dụ

- Hệ thức truy hồi $P_n = (1.11)P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc **1**.
- Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc **2**.
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-5}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc **5**.
- Hệ thức truy hồi $B_n = nB_{n-1}$ **không** phải là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất
 - vì nó **không có hệ số hằng số**.

Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- Tìm **nghiệm** dưới **dạng** $a_n = r^n$ của (1), r là hằng số, nếu và chỉ nếu:

$$a_n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}.$$

Chia cả hai vế cho r^{n-k} ta nhận được

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0 \quad (2)$$

- Vậy dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$ là **nghiệm** nếu và chỉ nếu r là **nghiệm của (2)**.

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc **hai**

(Định lý 1)

- Cho c_1, c_2 là các hằng số thực.
- Giả sử $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ có **hai nghiệm phân biệt** r_1, r_2 .
- Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n$ với $n = 0, 1, 2, \dots$; α_1, α_2 là các hằng số.

Chứng minh - Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai

1. **Chiều thuận**, cần chỉ ra rằng **nếu** r_1, r_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng và α_1, α_2 là hai hằng số **thì** dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi.
2. **Ngược lại**, cần phải chứng minh rằng **nếu** $\{a_n\}$ là nghiệm **thì** $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với α_1, α_2 là các hằng số nào đó.

Chứng minh chiều thuận- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai (tt)

(\Rightarrow): Giả sử r_1 và r_2 là hai nghiệm phân biệt của $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, khi đó $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$; $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$ đồng thời ta thực hiện dãy các phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned}c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\&= \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2) \\&= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\&= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Chứng minh chiều ngược Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai (tt)

(\Leftarrow): Để chứng minh ngược lại, ta giả sử dãy $\{a_n\}$ là một nghiệm bất kỳ của hệ thức truy hồi. Ta chọn α_1, α_2 sao cho dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ thoả mãn các điều kiện đầu $a_0 = C_0, a_1 = C_1$. Thực vậy,

$$a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$$

Từ phương trình đầu ta có $\alpha_2 = C_0 - \alpha_1$ thế vào phương trình thứ hai ta có:

$$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_0 - \alpha_1) r_2 = \alpha_1 (r_1 - r_2) + C_0 r_2; \text{ Từ đây suy ra:}$$

$$\alpha_1 = \frac{(C_1 - C_0 r_2)}{r_1 - r_2}; \alpha_2 = C_0 - \alpha_1 = C_0 - \frac{(C_1 - C_0 r_2)}{r_1 - r_2} = \frac{(C_0 r_1 - C_1)}{r_1 - r_2}.$$

Như vậy, khi chọn những giá trị trên cho α_1, α_2 dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ thoả mãn các điều kiện đầu. Vì hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu được xác định duy nhất nên $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Định lý được chứng minh.

Ví dụ 1

- Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ với } a_0 = 2, a_1 = 7$$

Lời giải. Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi có dạng $r^2 - r - 2 = 0$. Nghiệm của nó là $r_1 = 2$ và $r_2 = -1$. Theo định lý 1, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu và chỉ nếu :

$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$ với α_1, α_2 là các hằng số nào đó. Từ các điều kiện đầu suy ra:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 2 + \alpha_2 (-1)$$

Giải ra ta được $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$. Vậy nghiệm của biểu thức truy hồi với điều kiện đầu là dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$.

Ví dụ 2 - Tìm công thức f_n của các số fibonacci

Giải: Các số fibonacci thỏa mãn hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ và các điều kiện đầu $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Các nghiệm của phương trình đặc trưng $r^2 - r - 1 = 0$ là:

$$r_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right); \quad r_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \text{ theo định lý 1 ta suy ra số fibonacci được cho bởi công}$$

thức sau:

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \text{ với } \alpha_1, \alpha_2 \text{ là hai hằng số. Các điều kiện đầu } f_0 = 0,$$

$f_1 = 1$ được dùng để xác định các hằng số α_1, α_2 .

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$f_1 = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

Từ hai phương trình này ta suy ra $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ do đó các số fibonacci được cho như sau:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Định lý 2 – nghiệm kép

- Cho c_1, c_2 là các hằng số thực, $c_2 \neq 0$.
- Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ chỉ **có một nghiệm** r_0 (**ng nghiệm kép**)
- Dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi **$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$** khi và chỉ khi **$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$** với $n = 0, 1, 2, \dots$; α_1, α_2 là các hằng số.

Ví dụ

- Tìm nghiệm của công thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với các điều kiện đầu $a_0=1, a_1=6$

Giải: Phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = 0$ có nghiệm kép $r_0=3$. Do đó nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$ với α_1, α_2 là các hằng số nào đó. Từ các điều kiện đầu ta suy ra:

$$a_0 = 1 = \alpha_1$$

$a_1 = 6 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ vậy nghiệm của hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu đã cho là:

$$a_n = 3^n + n 3^n$$

Định lý 3: Nghiệm các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với các hệ số hằng số - **Tổng quát**

- Cho c_1, c_2, \dots, c_k là các số thực.
- Giả sử phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$ có **k nghiệm phân biệt** r_1, r_2, \dots, r_k .
- Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi **$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$** khi và chỉ khi **$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$** với $n = 0, 1, 2, \dots$; **$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k$** là các hằng số.

Ví dụ

- Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với điều kiện đầu $a_0=2, a_1=5, a_2=15$.

Giải: Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi là :

$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ có các nghiệm là $r_1=1, r_2=2, r_3=3$. Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng: $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$.

Để tìm các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ta dựa vào những điều kiện ban đầu:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \alpha_3 3$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 4 + \alpha_3 9$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$. Vì vậy nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi này và các điều đầu đã cho là dãy $\{a_n\}$ với:

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

Bài tập 1

- Cô dâu và chú rể mời 4 bạn đứng thành một hàng để chụp ảnh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng nếu:
 - a) Cô dâu đứng cạnh chú rể.
 - b) Cô dâu không đứng cạnh chú rể.
 - c) Cô dâu đứng ở phía bên phải chú rể

Bài tập 2

- Xét các chuỗi nhị phân 8 bit. Hỏi có bao nhiêu chuỗi **không** chứa 6 số 0 liên nhau?

Bài tập 3

- Đếm số byte
 - a) Bất kỳ
 - b) Có đúng hai bit 0.
 - c) Có ít nhất 2 bit 0
 - d) Bắt đầu 00 và kết thúc 00
 - e) Bắt đầu 11 và kết thúc không phải 11

Bài tập 4

- Đội bóng PTIT-HCM có 20 cầu thủ, chọn 11 cầu thủ ra sân thi đấu chính thức ứng với 11 vị trí trên sân.
Hỏi **có mấy cách chọn** nếu:
 - a) Ai cũng có thể chơi ở bất kỳ vị trí nào.
 - b) Chỉ có một cầu thủ làm thủ môn, các cầu thủ còn lại có thể chơi ở bất kỳ vị trí nào.
 - c) Có 3 cầu thủ có thể làm thủ môn, các cầu thủ còn lại có thể chơi ở bất kỳ vị trí nào.

Bài tập 5

Tìm số nghiệm nguyên không âm của:

a) Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad \text{với } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

b) Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \quad \text{với } x_1 \geq 6, x_2 \geq 3, x_3 \geq 9, x_4 \geq -2$$

c) Bất phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11 \quad \text{với } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Bài tập 6

- Giải các hệ thức truy hồi với các điều kiện đầu sau:

a) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}; a_0=0$ và $a_1=1$

b) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}; a_0=1$ và $a_1=6$

c) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}; a_0=0, a_1=-4$ và $a_2=8$

Bài tập 7

- Gọi a_n là số dãy bit độ dài n **không** có 2 bit 0 **liền nhau**.
 - a) Tìm hệ thức truy hồi cho a_n
 - b) Biết giá trị đầu $a_1=2$, $a_2=3$, giải hệ thức truy hồi trên.

Bài tập 8

- Cho biết dân số của Việt Nam năm 2020 là 100 triệu người. Giả sử tốc độ tăng dân số hằng năm là 0,2% mỗi năm. Gọi D_n là dân số của Việt Nam n năm sau kể từ 2020.
 - a) Lập hệ thức truy hồi tính D_n .
 - b) Dân số Việt Nam năm 2030 là bao nhiêu?