Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Công nghệ thông tin và truyền thông

Môn Toán rời rạc

BÁO CÁO

BÀI TẬP LỚN

HÀM SINH và ứng dụng

Nhóm nghiên cứu:

Kim Đình Sơn	20102089
Nguyễn Hữu Trung	20102767
Hoàng Lê Chung	20101172
Giảng viên hướng dẫn:	TS Đỗ Phan Thuận

HÀ NỘI, 4/17/2012

Mục lục

Chương 1 Tổng quan về hàm sinh

1.1. Giới thiệu

Xét dãy số $(a_n)_{n\geq 0}$ và hàm số:

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots + a_nx^2 + \cdots$$

Khi đó $G(x)$ được gọi là hàm sinh bởi dãy $(a_n)_{n\geq 0}$ và ta nói hàm $G(x)$ mang đầy đủ thông tin về dãy (a_n), hệ số của x^n chính là số hạng a_n của dãy. Nếu ta biết đặc điểm của hàm $G(x)$ ta hoàn toàn có thể biết được mọi số hạng của dãy a_n một cách tổng quát. Ví dụ về dãy số thỏa mãn phương trình sai phân: $a_{n+1} + Ua_n + Va_{n-1} = 0$. Ta có hàm sinh cho dãy thỏa mãn phương trình:

$$(G(x) - a_0 - a_1x) + Ux(G(x) - a_0) + Vx^2G(x) = 0$$

Hay

$$G(x) = \frac{a_0 + (Ua_0 + Va_1)x}{1 + Ux + Vx^2}$$

Nếu r_1, r_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng $X^2 + UX + V = 0$ khi đó:

$$G(x) = \frac{a_0 + (Ua_0 + Va_1)x}{(1 - r_1x)(1 - r_2x)} = \frac{\alpha}{1 - r_1x} + \frac{\beta}{1 - r_2x} = \sum_{i=0}^{\infty}(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)\, x^n$$

Từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy là : $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$. Trong đó, xác định theo a_0 và a_1 .

1.2. Các phép biến đổi trên hàm sinh

Cho dãy $x_0, x_1, \ldots$ và $G(x)$ là hàm sinh bởi dãy số trên. Khi đó hàm sinh cho dãy số $Cx_0, Cx_1, \ldots$, (C là hằng số) là $\sum_{n=0}^{\infty} Ca_nx^n = C\sum_{n=0}^{\infty} x_nx^n = CG(x)$. Vậy ta có ***phép nhân với hằng số.***

Nếu thêm đằng trước dãy số trên k số 0 thì ta có hàm sinh cho dãy $\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k\ phần\ tử}, x_0, x_1, \ldots$ chính là $\sum_{n=k}^{\infty} x_nx^n = x^kG(x)$. Vậy ta có ***phép lùi phải*** k vị trí.

Tiếp theo, giả sử hai dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$ và $\{b_n\}_{n\geq 0}$ có hai hàm sinh tương ứng là $A(x)$ và $B(x)$. Xét dãy số $\{a_n + b_n\}_{n\geq 0}$, khi đó, hàm sinh tương ứng là: $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = A(x) + B(x)$. Vậy ta có ***phép cộng***.

Ngoài ra, ta xét hàm $C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_nx^n$.

Khai triển tích $A(x) \cdot B(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-i}b_i)\, x^n$.

Như vậy: $c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-i}b_i, \forall n \geq 0$. Ta gọi phép biến đổi này là ***phép chập.***(hay xoắn)

VÍ DỤ 1 . *(Số Catalan). Hỏi số cách chèn dấu $*$ vào tích của $n+1$ nhân tử là số Catalan :*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Giải. Nhận xét : Số cách chèn dấu $*$ vào giữa tích gồm $i+1$ phần tử đầu tiên là C_i và số cách chèn dấu $*$ vào $n-i$ phần tử còn lại là C_{n-i}, cho i chạy từ 0 đến n, ta rút ra được công thức :

$$C_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-i}C_i$$

Xét hàm sinh : $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$, khi đó $G(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$, sử dụng công thức lùi phải và chập ta suy ra

$$G(x) - 1 = xG(x)^2$$
$$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Ta có :

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n \ (Khai\ triển\ nhị\ thức\ Newton)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n$$

Suy ra :

$$G(x) = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

-Vậy ta có điều phải chứng minh.

Để ý rằng, nếu ta lấy :

$$\frac{d(G(x))}{dx} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n x_n x^n$$

Nghĩa là hàm sinh cho dãy $(x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$ chính là $\frac{d(G(x))}{dx}$. Vậy ta có phép ***đạo hàm.***

1.3. Xây dựng hàm sinh

Để biết thông tin về một dãy số ta xét hàm sinh cho dãy số đó. Đối với các bài toán đòi hỏi công thức tường minh cho số hạng của dãy hoặc chứng minh đẳng thức về dãy tức là ta chỉ cần "*nắm bắt về một thông tin*"(quan trọng) về dãy, khi đó ta chỉ cần xét hàm sinh cho một biến. Vậy thế nào là "*thông tin*"? Ta sẽ gán cho mỗi một thông tin ứng với một biến. Ví dụ, với một phần tử của dãy ta có hai lựa chọn là hoặc được chọn hoặc là nó không được chọn, do đó biểu diễn hàm sinh cho phần tử đó là $x^0 + x^1 = 1 + x$ như vậy ta có hàm sinh cho dãy gồm n phần tử được chọn là $(1+x)^n$. Ở đây *thông tin* là *sự xuất hiện* của phần tử trong dãy

VÍ DỤ 2. *(IMO 1995 Pro 6) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con $\mathcal{A}$ của tập $\{1,2,3,\ldots\}$ thỏa mãn (i) $\mathcal{A}$ có đúng phần tử và (ii) Tổng tất cả các phần tử của $\mathcal{A}$ chia hết cho p.*

Bài toán trên có hai thông tin cần biết: số các phần tử của tập hợp và tổng các phần tử của tập hợp. Vì vậy ta giải quyết bài toán theo hướng sau:

Hướng 1: Rõ ràng với mỗi $i, 1 \le i \le 2p$ ta không thể góp vào nó với hàm $x^0 + x^i = 1 + x^i$ vì tích

$$\prod_{i=1}^{2p}(1+x^i)$$

không thể hiện được tập $\mathcal{A}$ có đúng p phần tử. Vì thế ta phải xét hàm sinh

$$G(t,x) = (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2p}) = \sum_{k,m} a_{k,m}t^k x^m$$

Trong đó $a_{k,m}$ là số các tập con $\mathcal{A}$ của $\{1,2,3,\ldots n\}$ thỏa mãn (i)$|\mathcal{A}| = 2p-k$ và (ii) $s(\mathcal{A}) = m$.

Vì vậy ta cần tính $A = \sum_{p|m} a_{p,m}$. Đặt $\xi = e^{2\pi i/p}$ là nghiệm nguyên thủy của *Unity* và

$$E = \{\xi, \xi^2, \ldots, \xi^{p-1}, \xi^p = 1\}$$

Ta sẽ tính tổng $\sum_{t\in E}\sum_{x\in E} G(t,x)$ theo hai cách.

Đầu tiên ta có $\sum_{x\in E} G(t,x) = G(t,1) + \sum_{x\in E\setminus\{1\}} G(t,x) = G(t,1) + \sum_{1\le j\le p-1} G\left(t,\xi^j\right)$.

Ta có $G(t,1) = (t+1)^{2p}$. Mặt khác với mọi $r \not\equiv 0 \mod p$ ta có $\{1,2,\ldots,p\} = \{1\cdot r, 2\cdot r, \ldots, p\cdot r\}$. Do đó

$$\prod_{j=1}^{p}\left(t+\xi^j\right) = \prod_{j=p+1}^{2p}\left(t+\xi^j\right)$$

Hay

$$\prod_{j=1}^{2p}\left(t+\xi^j\right) = \left(\prod_{j=1}^{p}\left(t+\xi^j\right)\right)^2$$

Xét $H(t) = (t-\xi)(t-\xi^2)\ldots(t-\xi^p) = t^p - 1$, ta có $H(-t) = (-1)^p(t+\xi)(t+\xi^2)\ldots(t+\xi^p) = -(t^p+1)$ suy ra

$$\sum_{x\in E} G(t,x) = (t+1)^{2p} + (p-1)(t^p+1)^2$$

$$\sum_{t\in E}\sum_{x\in E} G(t,x) = \sum_{t\in E}[(t+1)^{2p} + (p-1)(t^p+1)^2]$$

$$= \sum_{t\in E}(t+1)^{2p} + (p-1)\sum_{t\in E}(t^p+1)^2 = \sum_{t\in E}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}t^k + 4p(p-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\sum_{t\in E}t^k + 4p(p-1) = \sum_{k=0,p,2p}\binom{2p}{k}\sum_{t\in E}t^k + 4p(p-1)$$

$$= p\left(2 + \binom{2p}{k}\right) + 4p(p-1)$$

$$= p\left(\binom{2p}{k} + 4p - 2\right) \qquad (\dagger)$$

Bây giờ ta tính $\sum_{t\in E}\sum_{x\in E} G(t,x)$ theo cách khác. Để ý rằng

$$\sum_{x\in E} x^r = \begin{cases} 0 \ \text{nếu} \ p \nmid r \\ 1 \ \text{nếu} \ p|r \end{cases}$$

Do đó

$$\sum_{t\in E}\sum_{x\in E} G(t,x) = \sum_{t\in E}\sum_{x\in E}\sum_{k,m} a_{k,m}t^k x^m = \sum_{t\in E}\sum_{k,m} a_{k,m}t^k \sum_{x\in E} x^m = \sum_{t\in E}\sum_{\substack{k,m\\ p|m}} a_{k,m}t^k \cdot p$$

$$= p\cdot\sum_{\substack{k,m\\ p|m}} a_{k,m}\sum_{t\in E}t^k = p\cdot\sum_{\substack{k,m\\ p|m}} a_{k,m}\cdot p$$

$$= p^2\cdot(A+2) \ \ (do\ ta\ không\ tính\ trường\ hợp\ k=0\ và\ \ m=0) \qquad (\dagger\dagger)$$

Từ $(\dagger)$ và $(\dagger\dagger)$ suy ra

$$A = \frac{1}{p}\left[\binom{2p}{k} - 2\right] + 2$$

Chương 2 Các khái niệm mở rộng

2.1. Hàm sinh mũ

Như ở Chương 1 đã giới thiệu, khi ta cần biết chính xác công thức của dãy, thông thường ta chỉ tính được hệ số hoặc giá trị của hàm sinh tại điểm nào đó (như thế là quá đủ). Cũng vậy ta đưa số các đại lượng cần tính về việc tính hệ số của hàm sinh. Tuy nhiên đối với ví dụ sau đây lại khác. Đại lượng cần tính lại là tổng của vài số hạng nào đó của dãy, do đó loại hàm sinh ta cần xét là dãy các số mũ trong hàm sinh. Như vậy, ta có hai loại hàm sinh thường gặp(*ứng với một biến–một thông tin*) loại thứ hai là

$$\mathcal{G}(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots$$

Ngoài ra còn tồn tại một dạng hàm sinh có dạng như sau:

$$\mathcal{G}(x) = a_1 + a_2 2^k + a_3 3^k + a_4 4^k + \cdots$$

Chúng ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn ở **3.4.2**

VÍ DỤ 3. *Cho các số nguyên dương phân biệt* $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$, *với* $n \geq 2$ *thỏa mãn* $\{a_i + a_j | 1 \leq i < j \leq n\}$=$\{b_i + b_j | 1 \leq i < j \leq n\}$. *Chúng minh rằng* n *là một lũy thừa của 2.*

Giải. Xét hai hàm sinh

$$A(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n}$$

Và

$$B(x) = x^{b_0} + x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_n}$$

Suy ra $A(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x^{a_i+a_j}$ và $B(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x^{b_i+b_j}$. Vậy ta có

$$A(x)^2 - A(x^2) = B(x)^2 - B(x^2)$$

Hay $A(x)^2 - B(x)^2 = A(x^2) - B(x^2)$. Mặt khác $A(1) = B(1) = n$ nên ta có thể viết

$$A(x) - B(x) = (x-1)^k R(x), \qquad R(1) \neq 0$$

Dođó$(x-1)^k R(x)\big(A(x) + B(x)\big) = (x^2-1)^k R(x^2)$,i.e,

$$R(x)\big(A(x) + B(x)\big) = (x+1)^k R(x^2)$$

Với $x = 1$, ta có $2n = 2^k$ hay $n = 2^{k-1}$. Vậy n là một lũy thừa của 2

Đến đây ta đã phân biệt được hai loại hình thức hàm sinh bởi dãy số cho trước, một là các phần tử ở dạng **hệ số** và hai là ở dạng **số mũ** trong triển khai của hàm sinh. Ngoài ra, việc xây dựng hàm sinh không chỉ dựa trên một biến (vì một biến chỉ cho ta một thông tin duy nhất!). Đối với những bài toán đòi hỏi nhiều thông tin ta cần xét hàm sinh với nhiều biến biểu diễn hơn. Ở ví dụ 2 đã cho ta minh họa về trường hợp này.

2.2. Hàm sinh đa biến

Trước tiên ta xét bốn định lý cơ bản sau:

<u>**ĐỊNH LÝ 1**</u> Xác định $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ với n là một số nguyên dương. Khi đó mọi đa thức

$$\mathcal{F}(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$$

Trong đó f_k được xác định là $zero$ nếu $k > deg\mathcal{F}$. Ta có tổng

$$f_0 + f_n + f_{2n} + \cdots = \frac{1}{\mathrm{n}}\left(\mathcal{F}(1) + \mathcal{F}(\varepsilon) + \cdots + \mathcal{F}(\varepsilon^{n-1})\right)$$

<u>**ĐỊNH LÝ 2**</u> Đạo hàm của hàm số $\mathcal{H}(x) = \prod_{i=1}^{n} \hbar_i(x)$ (trong đó $\hbar_i(x)$ là các hàm khả vi với biến x) là

$$\mathcal{H}'^{(x)} = \mathcal{H}(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\hbar_i'(x)}{\hbar_i(x)}$$

<u>**ĐỊNH LÝ 3**</u> Giả sử m, k là các số nguyên dương , $m > 1$. Khi đó

$$\sum_{j=1}^{m-1} e^{-\frac{i2\pi kj}{m}} = \begin{cases} m-1 & \text{nếu } m|k \\ -1 & \text{nếu } m \nmid k \end{cases}$$

<u>**ĐỊNH LÝ 4**</u> Nếu $\varepsilon = e^{2\pi i/p}, p$ là một số nguyên tố khi đó

$$\sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{kj} = \begin{cases} p & \text{nếu } p|k \\ 0 & \text{nếu } p \nmid k \end{cases}$$

Việc chứng minh hoàn toàn không mấy khó khăn, các chứng minh chi tiết đều có trong [1,2] và [5]. Áp dụng ta giải quyết **ví dụ 2** theo một hướng khác.

Hướng 2 Từ giả thiết ta thấy đại lượng cần tính gồm "the side and the sum" của các tập con. Vì vậy hàm sinh có dạng

$$\mathcal{G}(x, y) = \sum_{n,k \geq 0} g_{n,k}\, x^n y^k$$

Trong đó $g_{n,k}$ là số các tập con **k** phần tử của $\{1,2,\ldots,2p\}$ với tổng các phần tử là **n.** Khi đó ta cần tính $A = g_{p,p} + g_{2p.p} + \cdots$ Để tìm dạng tổng quát cho $\mathcal{G}(x, y)$ ta cần xác định mỗi tập con gồm **k** phần tử và có tổng các phần tử là **n.** Với mỗi $1 \leq \boldsymbol{m} \leq 2p$ ta có **m** được chọn thì **m** cũng sẽ thuộc vào một tập con, ngược lại **m** không được chọn thì **m** cũng không thuộc vào tập con đó .Do đó hàm sinh cho **m** là $x^0y^0 + x^m y^1 = 1 + x^m y$. Suy ra

$$\mathcal{G}(x, y) = (1 + xy)(1 + x^2y)(1 + x^3y) \ldots (1 + x^{2p}y)$$

Đặt $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$ Khi đó theo **định lý 1**

$$\sum_{\substack{n,k\geq 0\\ p|n}} g_{n,k}\, y^k = \frac{1}{p}[\mathcal{G}(1,y)+\mathcal{G}(\varepsilon,y)+\cdots+\mathcal{G}(\varepsilon^{p-1},y)] \quad (\star)$$

Ta tính $\mathcal{G}(\varepsilon^k,y)$, với $0\leq k\leq p-1$. Xét $k=0$, $\mathcal{G}(1,y)=(1+y)^{2p}$. Với $1\leq k\leq p-1$. Ta có $\gcd(k,p)=1$ nên $\{1,2,\ldots,p\}=\{1\cdot k, 2\cdot k,\ldots,p\cdot k\}\ (mod\, p)$ Suy ra

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\varepsilon^k,y) &= (1+\varepsilon^k y)(1+\varepsilon^{2k}y)(1+\varepsilon^{3k}y)\ldots(1+\varepsilon^{2pk}y)\\ &= \left((1+\varepsilon^k y)(1+\varepsilon^{2k}y)(1+\varepsilon^{3k}y)\ldots(1+\varepsilon^{pk}y)\right)^2\\ &= \left((1+\varepsilon y)(1+\varepsilon^2 y)(1+\varepsilon^3 y)\ldots(1+\varepsilon^p y)\right)^2 = (1+y^p)^2\end{aligned}$$

Vậy

$$\sum_{\substack{n,k\geq 0\\ p|n}} g_{n,k}\, y^k = \frac{1}{p}((1+y)^{2p}+(p-1)(1+y^p)^2)$$

Ta cần tính

$$A=\sum_{\substack{n\geq 0\\ p|n}} g_{n,p} = [x^p]\frac{1}{p}((1+y)^{2p}+(p-1)(1+y^p)^2) = \frac{1}{p}\left[\binom{2p}{k}+2(p-1)\right]$$

Đó là đáp số cần tính.

<u>VÍ DỤ 4</u> *(USA MO 1989) Cho một phân hoạch π của $n\geq 1$ là một số nguyên, nghĩa là n có thể biểu diễn thành tổng của một hoặc nhiều số nguyên dương nhưng biểu diễn tổng phải theo một thứ tự không giảm (ví dụ $n=4$ khi đó phân hoạch π là $1+1+1+1, 1+1+2, 1+3, 2+2,$ và 4). Với mỗi phân hoach π xác định $A(\pi)$ là số các số 1 xuất hiện trong π và $B(\pi)$ xác định là số các số nguyên dương phân biệt xuất hiện trong π (ví dụ $n=13$ và π là phân hoạch $1+1+2+2+2+5$, khi đó $A(\pi)=2$ và $B(\pi)=3$).*

Chứng minh rằng với mỗi n cố định , ta có

$$\sum_{\pi \text{ là phân hoạch của } n} A(\pi) = \sum_{\pi \text{ là phân hoạch của } n} B(\pi)$$

Giải

Đặt $\sum_{\pi \text{ là phân hoạch của } n} A(\pi)=a_n$ và $\sum_{\pi \text{ là phân hoạch của } n} B(\pi)=b_n$. Xét $\mathcal{A}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\mathcal{B}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{A}(x)=\mathcal{B}(x)$, từ đó suy ra $a_n=b_n, \forall n$.

Với $m\geq 2$ hàm sinh cho m là $1+x^m+x^{2m}+\cdots$ Với $m=1$, nếu 1 được chọn k lần thì ứng với k ta có x^k, tuy nhiên để biết thêm về số lần 1 xuất hiện trong π ta gán thêm biến y, nếu 1 được chọn k lần thì cũng xuất hiện k lần trong π, do đó hàm sinh cho $n=1$ là $1+xy+x^2y^2+\cdots$ Xét

$$\mathcal{F}(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} f_{n,k}\, x^n y^k$$
$$= (1 + xy + x^2y^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\ldots$$

Trong đó ta dùng biến x cho tổng của mỗi phân hoạch và y là số lần 1 xuất hiên trong phân hoạch, $f_{n,k}$ là số các phân hoạch của n có k số 1. Chú ý rằng nếu 1 xuất hiện k lần thì ta có $kf_{n,k}$ lần số 1 xuất hiện trong các phân hoạch của n. Do đó

$$a_n = f_{n,1} + f_{n,2} + f_{n,3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{n,k}$$

Do đó

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{n,k} x^n$$

Ta có

$$\frac{d\mathcal{F}}{dy} = \sum_{n,k\geq 0} kf_{n,k}\, x^n y^{k-1}$$

Khi đó chọn $y = 1$, ta có

$$\left.\frac{d\mathcal{F}}{dy}\right|_{y=1} = \sum_{n,k\geq 0} kf_{n,k}\, x^n = \mathcal{A}(x)$$

Mà

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{(1-xy)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$$

Do đó

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x}{1-x}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m} \qquad (\star)$$

Ta cũng thiết lập hàm $\mathcal{B}(x)$ một cách tương tự. Xét

$$\mathcal{G}(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} g_{n,k}\, x^n y^k$$
$$= (1 + xy + x^2y + \cdots)(1 + x^2y + x^4y + \cdots)(1 + x^3y + x^6y + \cdots)\ldots$$
$$= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^m y}{1-x^m}\right)$$

Trong đó $g_{n,k}$ là số các phân hoạch π của n với k phần tử phân biệt. Biến x biểu diễn cho tổng các phần tử trong phân hoạch và biến y là số lần xuất hiện của phần tử nào đó trong phân hoạch. Tương tự ta suy ra

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k g_{n,k} = \frac{d\mathcal{G}}{dy}\bigg|_{y=1}$$

Ta có

$$\frac{d\mathcal{G}}{dy} = \mathcal{G}(x, y) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i'(y)}{g_i(y)}$$

Với $g_i(y) = 1 + \frac{x^i y}{1-x^i}$ $, \longrightarrow g_i'(y) = \frac{1}{1-x^i}$ vậy ta có

$$\frac{g_i'(y)}{g_i(y)} = x^i$$

Suy ra

$$\mathcal{B}(x) = \frac{d\mathcal{G}}{dy}\bigg|_{y=1} = \mathcal{G}(x, 1)\frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2(1-x^2)\ldots} \qquad (\star\star)$$

Từ $(\star)$và $(\star\star)$ suy ra $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$, do đó $a_n = b_n, \forall n$.

Ở ví dụ sau đây chúng ta xét đến một sự mở rộng ở cấp cao hơn, đó là bài toán **số Fuß-*Catalan đa biến*** [1] (Multivariate Fuss-Catalan numbers)(một dạng tổng quát cho số Catalan). Xác định bởi công thức:

$$C_p(n) = \frac{1}{(p-1)n+1}\binom{pn}{n}$$

Để tìm hiểu kĩ hơn về số Fuß-Catalan đa biến, chúng ta có thể tham khảo ở [9], trong khuôn khổ báo cáo , chúng tôi xin được phép không nêu chi tiết từng phần ở đây,.

Trước hết xin nhắc lại một số thông tin liên quan đến **số Fuß-*Catalan đa biến***

Ta xác định dãy $B_3(n, k, l)$ [2],n, k, l là các số nguyên không âm, như sau:

- $B_3(1,0,0) = 1$
- $\forall n > 1, k + l < n, B_3(n, k, l) = \sum_{0 \le i \le k, 0 \le j \le l} B_3(n-1, i, j)$
- $\forall k + l \ge n, B_3(n, k, l) = 0$

  Ta rút ra các đẳng thức sau [3]:
  - $B(n, k, l) = B(n, l, k)$
  - $B_3(n, k, l) = B_3(n-1, k, l) + B_3(n, k-1, l) + B_3(n, k, l) - 1 - B_3(n, k-1, l-1)$
  - $B(n, k, l) = \binom{n+k-1}{k}\binom{n+l-1}{l}\frac{n-k-l}{n}$

[1] [2] [3] Xem thêm ở [9]: *Multivariate Fuss-Catalan numbers, J.-C AVAL*

Ta sẽ chứng minh $\sum_{k,l} B_3(n,k,l) = C_3(n) = \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}$ $(\star)$ (số Fuß-Catalan bậc 3)
Xét hàm sinh:

$$\mathcal{F}(t,x,y) = \sum_{0\le k+l<n} B_3(n,k,l)\, t^n x^k y^l$$

Cũng tương tự, ta xét

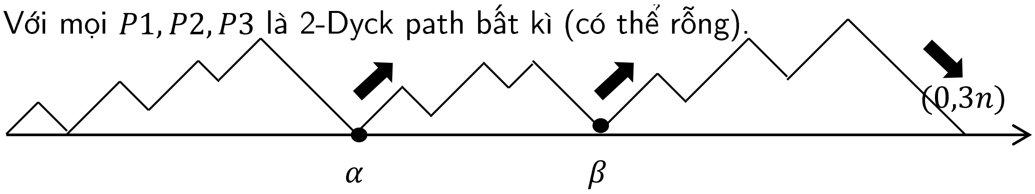
$$\mathcal{G}(t,x,y) = \sum_{0\le k+l<n} B_3(n,k,l)\, t^n x^{n-l} y^l$$

Chú ý rằng $\mathcal{G}$ chính là hàm sinh cho dãy độ dài của đường đi Dyck Paths [4] tuân theo chiều dài, số bước xuống ở độ cao chẵn và số bước xuống ở độ cao lẻ

Tiếp theo để tính $\mathcal{F}$ và $\mathcal{G}$, ta chia thành các 2-Dyck Paths không rỗng, ta xét hai điểm α (được xác định là điểm quay lại cuối cùng nằm trên trục, trừ điểm cuối $(0,3n)$) và β (là điểm có độ cao 1 sau α) trên trục đường đi như hình vẽ dưới minh họa Rõ ràng

$$P = P_1(up)P_2(up)P_3(down)$$

Với mọi $P1, P2, P3$ là 2-Dyck path bất kì (có thể rỗng).



Do đó:

$$\mathcal{F}(t,x,y) = 1 + \mathcal{G}(t,x,y) \times \mathcal{G}(t,y,x) \times t.\mathcal{G}(t,x,y)$$

Tương tự.

$$\mathcal{G}(t,x,y) = 1 + \mathcal{G}(t,x,y) \times \mathcal{G}(t,y,x) \times t\mathcal{G}(t,x,y).$$
$$\mathcal{G}(t,y,x) = 1 + \mathcal{G}(t,y,x) \times \mathcal{G}(t,x,y) \times t.\mathcal{G}(t,y,x)$$

Đến đây, ta rút ra được :

$$F(t,x,y) = \frac{1}{1 - t\mathcal{G}(t,x,y)\mathcal{G}(t,y,x)}$$

Với $\mathcal{G}(x)$ là nghiệm đại số của phương trình :
$tx^2\mathcal{G}^3 + (y - x)\mathcal{G}^2 + (x - 2y)\mathcal{G} + y = 0.$ $(\star\star)$
Sau khi giải Phương trình $(\star\star)$ ta thu được

$$F(t,x,y) = \frac{t - x - y + 2xy}{1 - t - x - y + xy}$$

Sau khi khai triển lần lượt theo t, x, y, ta sẽ thu được đẳng thức $(\star)$.

2.3. Hàm sinh xác suất

2.3.1. Khái niệm

Xét biến ngẫu nhiên X có thể nhận các giá trị $0,1,2,\dots$ với xác suất tương ứng là $p_0, p_1, p_2, \dots$ với $p_i \ge 0$ và $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ thì hàm $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ là hàm sinh bởi biến ngẫu nhiên X.
Ta có hàm sinh của một vài phân phối thông dụng :

- Phân phối Bernoulli: nếu $p_0 = p; p_0 = 1; p = q; p_k = 0; k \neq 0$ hoặc 1, thì $GX(s) = q + ps$.

[4] Xem thêm về Dyck Paths tại: http://mathworld.wolfram.com/DyckPath.html và [9]

- Phân phối Nhị thức: $G_X(s) = (q + ps)^n$ với $q = 1 - p$
- Phân phối hình học: GX(s)= $\frac{ps}{1-qs}$ với $|s| < q^{-1}$
- Phân phối Poisson :$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{\lambda k} s^k = e^{\lambda(s-1)}$

ĐỊNH LÝ : Cho X là biến ngẫu nhiên độc lập và $G(x)_X^r(1)$ là đạo hàm cấp r của hàm sinh xác suất $G_X(s)$ tại $s = 1$. Khi đó

$$G_X^{(r)}(1) = E[(X(X-1)\dots(X-r+1)]$$

HỆ QUẢ :

$$G_X^{(r)}(1) = E(X)$$

$$G_X^{(2)}(1) = E([X(X-1)] = E[X^2] - E[X] = Var(X) + (E[X])^2 - E[X]$$

Suy ra $Var(X) = G_X^{(2)}(1) - \left(G_X^{(1)}(1)\right)^2 + G_X^{(1)}(1)$

2.3.2. Hàm sinh của tổng các biến ngẫu nhiên

Xét X, Y là hai biến rời rạc không phụ thuộc vào nhau, có hàm sinh xác suất tương ứng là $G_X(s)$ và $G_Y(s)$, khi đó biến $Z = X + Y$ có hàm sinh là $G_Z(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$

Chứng minh

Ta có X có thể nhận các giá trị $0,1,2, \dots$ do đó hàm sinh xác suất cho X là $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k$. Khi ấy $G_X(s) = E(s^X)$, tương tự, ta có :

$$G_Z(s) = E(s^Z) = E(s^{X+Y}) = E(s^X) \cdot E(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$$

VÍ DỤ 5 *Tìm kì vọng của tổng n biến ngẫu nhiên độc lập có tuân theo luật phân phối Poisson.*

Giải

Tacó:

$$G_{X_i}(s) = e^{\lambda(s-1)} \Longrightarrow G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} e^{s-1} = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)(s-1)},$$

$$\Longrightarrow E(X_1 + \dots + X_n) = G_X^{(1)}(1) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

Chương 3 Ứng dụng

3.1, Bài toán tính đếm

Trong các bài toán đếm, phương pháp hàm sinh tỏ ra khá hiệu quả. Kết hợp với kiến thức tổ hợp ta xây dựng được công thức truy hồi hoặc mô tả được số cần đếm mà bài toán yêu cầu từ đó áp dụng phương pháp hàm sinh ta truy được công thức tổng quát. Điển hình như các ví dụ trong Chương 1 và Chương 2 đã minh họa, ta xét thêm vài ví dụ dưới đây để thấy sự đa dạng của các bài toán ứng dụng hàm sinh để giải.

VÍ DỤ 6 *Có bao nhiêu cách chọn 25 đồ chơi đồ chơi từ bảy loại đồ chơi khác nhau sao cho mỗi loại đồ chơi có từ 2 đến 6 đồ chơi được chọn.*

Giải Hàm sinh cho số cách chọn r đồ chơi từ bảy loại đồ chơi cho trước mà mỗi loại đồ chơi có từ 3 đến 6 đồ được chọn là:

$$G(x) = (x^2 + x^3 + \cdots + x^6)^7 = x^{14}\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^7$$

Đặt $A(x) = (1-x^5)^7$ và $B(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^7 = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+6}{r}\, x^r$. Khi ấy $G(x) = x^{14}A(x)\cdot B(x)$, do đó ta chỉ cần tìm hệ số của x^{11} trong khai triển $A(x)\cdot B(x)$, do đó ta chỉ quan tâm đén các hệ số của $A(x)$ nhỏ hơn hoặc bằng 11, nên chỉ có a_0, a_5, a_{10} là các hệ số khi khia triển thỏa mãn. Khi ấy $b_r = \binom{r+6}{r}$, thì hệ số của x^{11} cần tìm là : $a_0b_{11} + a_5b_6 + a_{10}b_1 = \binom{17}{11} - \binom{7}{1}\binom{12}{6} + \binom{7}{2}\binom{7}{1} = 6055$

VÍ DỤ 7 ($Romania\ MO$ 2003) *Có bao nhiêu số có n chữ số từ tập hợp* $\{2,3,7,9\}$ *và chia hết cho 3?*

Giải Ta có một số chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Như vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm số các số có n chữ số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Ta có mỗi chữ số của số thỏa mãn có giả trị là một trong các số 2,3,7 $hoặc$ 9. Do đó hàm sinh cho mỗi chữ số sẽ là $x^2 + x^3 + x^7 + x^9$. Xét hàm sinh [1]

$$\mathcal{F}(x) = (x^2 + x^3 + x^7 + x^9)^n = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_{9n}x^{9n}$$

Trong đó f_k là số các số có n chữ số từ $\{2,3,7,9\}$ mà có tổng các chữ số là k.

Xác định $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$ là nghiệm nguyên thủy bậc ba của Unity (phương trình $x^3 = 1$), ta có $\varepsilon \neq 1$ $và$ $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = (\varepsilon^3 - 1)/(\varepsilon - 1) = 0$. Khi đó

$$\mathcal{F}(1) = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots$$

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = f_0 + f_1\varepsilon + f_2\varepsilon^2 + f_3 + f_4\varepsilon + \cdots$$

$$\mathcal{F}(\varepsilon^2) = f_0 + f_1\varepsilon^2 + f_2\varepsilon + f_3 + f_4\varepsilon^2 + \cdots$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(1)+\mathcal{F}(\varepsilon)+\mathcal{F}(\varepsilon^2) &= 3f_0+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)f_1+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)f_2+3f_3+\cdots \\ &= 3(f_0+f_3+f_6+\cdots)=3A\end{aligned}$$

Vậy ta có các số cần tính là

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{3}\left(\mathcal{F}(1)+\mathcal{F}(\varepsilon)+\mathcal{F}(\varepsilon^2)\right) \\ &= \frac{1}{3}((1+1+1+1)^n+(\varepsilon^2+1+\varepsilon+1)^n+(\varepsilon+1+\varepsilon^2+1)^n) \\ &= \frac{1}{3}(4^n+2)\end{aligned}$$

3.2. Bài toán tính tổng

Đối với các bài toán tính tổng, ta biết trước được dạng công thức của hệ số trong hàm sinh bởi dãy số tương ứng, tuy nhiên việc phát triển một dãy số tương ứng cũng tương tự như việc xây dựng hàm sinh từ một dãy số cho trước. Để áp dụng kỹ thuật hàm sinh ta có hai hướng sau:

- Nếu coi tổng cần tính là một hệ số a_n thì hàm sinh tương ứng là $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, ta rút gọn $G(x)$ rồi khai triển lại nó theo tổng chuỗi khác với hệ số rút gọn là b_n từ đó ta có $a_n=b_n$.

- Nếu coi mỗi số hạng trong tổng là một hệ số x_n (tức là các số hạng trong tổng được biểu diễn bởi công thức tổng quát x_n), khi đó ta xét hàm sinh tương ứng là $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x_nx^n$, sau đó hoặc tổng cần tính có giá trị lấy tại $x=1$ hoặc ta tổng cần tính bằng một kết thúc xử lý khác.

VÍ DỤ 8 *Chúng minh đẳng thúc sau đúng với mọi số nguyên dương m,n,k*

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

(Công thức Vandermonde)

- Sử dụng phép chập ta so sánh hàm sinh của hai dãy là cùng một hàm

VÍ DỤ 9 .(*China MO*) *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\binom{n-k}{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}=\binom{2n+1}{n}$$

Ta có $\binom{n-k}{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}$ là hệ số tự do trong khai triển hàm sô $(x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-k}$, do đó

$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}2^k\binom{n-k}{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}$ là hệ số tự do trong khai triển:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k(x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-k}=(1+x)\left(\frac{1}{x}+x+2\right)^n=\frac{(x+1)^{2n+1}}{x^n}$$

Suy ra :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\binom{n-k}{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}=\binom{2n+1}{n}$$

3.3. Tính số phép toán trung bình của thuật toán

Đối với mỗi thuật toán, ta cần đưa ra thời gian tính số phép toán trung bình để đánh giá độ phức tạp. Do ứng với mỗi giá trị đầu vào (input), thời gian tính của thuật toán sẽ là khác nhau, vì thế ta quan tâm đến xác suất mà thời gian tính của thuật toán có thể nhận được, vì thế ta có thể sử dụng hàm sinh trong xác suất để giải quyết vấn đề này.

VÍ DỤ 10. *Xét chương trình tìm phần tử lớn nhất trên dãy $\mathcal{A}$ gồm n phần tử phân biệt:*

```
Begin:
        j:=1;m=:X[1];
        for i:=2 to n do
              if x[i]>m then
                  m:=x[i];
                  j:=i;
              end if
        end for
End
```

Nếu coi thời gian thực hiện phép so sánh là hằng số α, thời gian thực hiện một phép gán là β. Khi đí thời gian thực hiện bài toán với kích thước n là:

$$T(n)=2\beta+(n-1)\alpha+2A_n\beta$$

Trong đó A_n *là số lần mà điều kiện* $a[i]>\mathrm{m}$ *đuợc thỏa trong vòng lặp* for. Nói cách khác A_n số những giá trị i thỏa điều kiện sau đây: $a[i]=Max\{a[k],1\le k\le i\}$

Rõ ràng $Max\,A_n=n-1, Min\,A_n=0$, tìm cách tính trung bình của A_n. Trước hết ta có nhận xét(i) Các phần tử của $\mathcal{A}$ là đôi một phân biệt(ii) Phân bố của phép hoán vị là đồng đều, nghĩa là xác suất xảy ra các giá trị là như nhau và bằng $\frac{1}{n!}$.

Ta áp dụng kĩ thuật sử dụng hàm sinh để tính trị trung bình của A_n. Ký hiệu $p_{n,k}$ là xác suất để $A_n=k$.

Xét hàm $G_n(z) = \sum_k p_{n,k} z^k$ là hàm sinh xác suất của A_n. Gọi B là biến cố có một phép gán tại vị trí cuối cùng của dãy. $P(B) = \frac{1}{n}$ là xác suất ở vị trí cuối mà $a[i] > m$ và $P(B) = \frac{n-1}{n}$ là xác suất ở vị trí cuối cùng mà $a[i] < m$. từ đó ta suy ra:

$$P_{n,k} = P_{n-1,k-1} + P_{n-1,k} (k > 0)$$

Tại bước thứ n có 1 lần $a[i] > m$ thì $n-1$ bước trước đó có $k-1$ lần $a[i] > m$. Tại bước thứ n không có $a[i] > m$ thì $n-1$ bước trước đó có k lần $a[i] > m$.

$$G_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k\geq 1} p_{n-1,k-1} z^k + \frac{n-1}{n}\sum_{k\geq 0} p_{n-1,k} z^k = \frac{z}{n}\sum_{k\geq 0} p_{n-1,k} z^k + \frac{n-1}{n}\sum_{k\geq 0} p_{n-1,k} z^k$$
$$= \frac{z+n-1}{n} G_{n-1}(z)$$

Truy hồi: $G_n(z) = \left(\frac{z+n-1}{n}\right)\left(\frac{z+n-2}{n-1}\right)\left(\frac{z+n-3}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}\right)$, $n \geq 1$.Tính trị trung bình của A_n : chú ý rằng $G_n(1) = 1$ nên $A_n = G'(1) = \left(ln\, G_n(z)\right)'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=2}^{n-1} 1/k$

Vậy thời gian trung bình thực hiện thuật toán trên là

$$T = 2\beta + (n-1)\alpha + 2\beta \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

3.4. Các ứng dụng khác

Dưới đây là một số ứng dụng của hàm sinh trong các bài toán cụ thể (xin được phép giới thiệu, phần chứng minh nằm ở các tài liệu đi kèm), qua đó ta thấy sự đa dạng trong việc sử dụng kĩ thuật hàm sinh cũng như tính "*tổng quát*" của phương pháp này.

3.4.1. Bài toán đếm số cây khung

ĐỊNH LÝ *(Caylay) Số cây khung của đồ thị đầy đủ với n-đỉnh là* n^{n-2}.

Trong [10], Phần *3.12 Counting labeled trees* nêu khá chi tiết cho chứng minh của định lý trên, tư tưởng sử dụng **công thức lũy thừa** (*The Exponential Formula*)

3.4.2. Hàm sinh chuỗi Dirichlet

Cho trước dãy $\{a_n\}_1^\infty$, khi ấy ta gọi chuỗi dạng :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = a_1 + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_4}{4^s} + \cdots$$

Được gọi là hàm sinh chuỗi Dirichlet *(Dirichlet series generating function - Dsgf)* của dãy, ta viết : $f(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} \{a_n\}_1^\infty$

Giả sử $g(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} \{b_n\}_1^\infty$, khi đó :

$$g(s) \cdot f(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} \left\{\sum_{d\backslash n} a_d b\_(\tfrac{n}{d})\right\}_1^\infty$$

(khi khai triển tích fg, hệ số của n^{-s} bằng tổng tích chập giữa các hệ số trong f và g mà tích hai chỉ số phải bằng n)

Từ đó suy ra

$$f(s)^k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right)^k = \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k \geq 1} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_k} (n_1 n_2 \ldots n_k)^{-s}$$
$$= \sum_{n \geq 1} n^{-s} \left\{ \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_k} \right\}$$

Hàm zeta Riemann *(Riemann zeta function)* : là chuỗi Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots$$

Khi đó, hệ số của n^{-s} trong khai triển $\zeta(s)^2$ là :

$$[n^{-s}]\zeta(s)^2 = \sum_{d \backslash n} 1 \cdot 1 = d(n) \ \ (\textit{số các ước của } n)$$

3.4.3. Tính số các bảng dự phòng bởi các số nguyên không âm (*contingency tables* [1])

Giả sử bảng có r hàng và c cột, tổng các hàng là $t_1, t_2, \ldots, t_r$ và tổng các cột là $s_1, s_2, \ldots, s_c$. Khi đó số các bảng dự phòng là hệ số của $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_r^{t_r} y_1^{s_1} y_2^{s_2} \ldots x_c^{s_c}$ trong khai triển :

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{c} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

[1] Xem thêm về *contingency tables tại: http://en.wikipedia.org/wiki/Contingency_tables*

Kết luận

Như chúng ta đã biết, việc đối tượng hóa các yêu cầu, các tính chất trong giải quyết các vấn đề hiện nay là việc làm hết sức cần thiết, không chỉ trong lĩnh vực toán học nói riêng mà còn trong các ngành khoa học nói chung. Sử dụng hàm sinh để tìm hiểu các thông tin, diễn biến các đối tượng ấy như là một kĩ thuật, một phương pháp vô cùng hiệu quả. Hơn nữa,trong thời đại "công nghệ số", mọi thông tin cần được "số hóa". Rõ ràng hàm sinh là một công cụ hữu ích trong việc này. Vì thế tìm hiểu về hàm sinh cũng là một công việc mang nhiều ý nghĩa, do đó nhóm nghiên cứu quyết định khai thác đề tài này. Ở mức độ nào đó, đề tài đã tổng quan được các vấn đề cơ bản và các ứng dụng, các bài toán cụ thể có thể sử dụng hàm sinh. Tuy nhiên, chắc chắn rằng ở phạm vi bài báo cáo, mọi vấn đề về hàm sinh chưa được làm rõ hết ở đây. Bản báo còn nhiều thiếu sót cần được hoàn thiện, mong sự góp ý của bạn đọc quan tâm!

Nhóm nghiên cứu

Liên hệ:

Trưởng nhóm: Kim Đình Sơn, CNTT4, K55, viện Công nghệ thông tin và truyền thông, ĐHBK HN

Email: kimdinhson.hust.k55@gmail.com

Tài liệu tham khảo

[1] *A path to Combinatorics for Undergraduates, Counting Strategies*, Andreescu,T.; Feng. Z. , Bikhauser, 2004

[2] *Chuyên đề chọn lọc, Tố hợp và toán rời rạc*, NXBGD 2008

[3] *Hàm sinh*, Trần Nam Dũng, nguồn http://forum.mathscope.org

[4] *Hàm sinh và áp dụng (topic), Biến phức và áp dụng*, Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên)

[5] *Multivariate Generating Function and Other Tidbits*, Zachary R Abel, Mathematical Reflections, vol 2, 2006

[6] *Shortlisted IMO 2007*/ IMO Group, www://imomath.com

[7] *Putnam and Beyond*, Andreescu,T.

[8] *102 Problems in Algebrafrom the Training of the USA IMO Team*, Andreescu,T.; Feng. Z. , Bikhauser, 2002

[9] *Multivariate Fuss-Catalan numbers*, J.-C AVAL

[10] *generatingfunctionology*, HerbertS.Wilf