Giải tích hàm nhiều biến
Chương: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Đậu Thế Phiệt

Ngày 24 tháng 4 năm 2014

Nội dung

1. Tích phân đường loại một
2. Tích phân đường loại hai
3. Một số tính chất của tích phân đường
4. Định lý Green

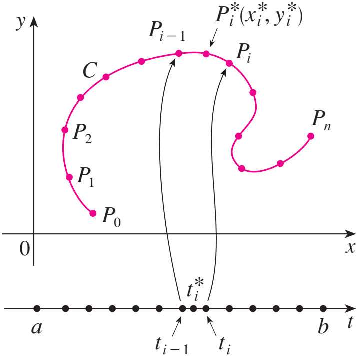
Tích phân đường loại một

Định nghĩa

Tương tự tích phân hàm một biến trên đoạn $[a, b]$, ta xây dựng tích phân trên đường cong C, tích phân đó được gọi là *tích phân đường*.
Xét đường cong C cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

hay trong không gian $\mathbb{R}^2$, ta có vector $r(t) = x(t)i + y(t)j = (x(t), y(t))$.
Ta giả sử C là một đường cong trơn (đạo hàm r' liên tục và $r'(t) \neq 0$).
Ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ đều nhau $[t_{i-1}, t_i]$, tương ứng các điểm $P_i(x(t_i), y(t_i))$ chia đường cong C thành n đường cong con.
Ta gọi chiều dài của các đường cong con này tương ứng là $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$.



Trên mỗi đường cong con ta chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ (tương ứng với điểm t_i^* trên đoạn $[a, b]$).

Cho f là hàm theo hai biến (x, y) xác định trên miền chứa đường cong C, ta tính tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

Ta thấy tổng trên có dạng tương tự tổng Riemann, lấy giới hạn khi n tiến tới vô cùng, ta có tích phân đường tương tự tích phân một biến

Định nghĩa

Nếu f được định nghĩa trên đường cong trơn C cho bởi phương trình tham số $(x(t), y(t))$ với $a \leq t \leq b$, thì tích phân đường của f theo C cho bởi

$$\int_C f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

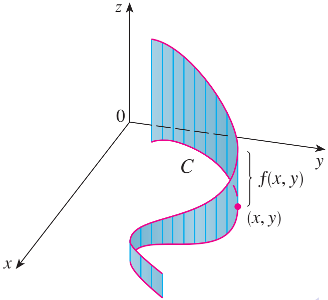
nếu giới hạn trên tồn tại.

Ta đã biết, độ dài đường cong C cho bởi

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Do đó, nếu f là hàm số liên tục thì giới hạn trong Định nghĩa trên luôn tồn tại, đồng thời ta có thể tính tích phân trên bởi công thức

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$



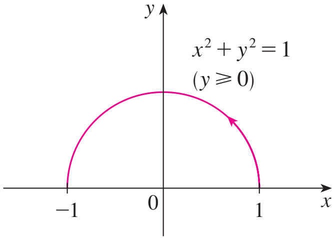
Ví dụ

Tính tích phân $\int_C (2 + x^2 y)ds$ với C là nửa trên của vòng tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Ta viết phương trình tham số cho đường cong C

$$x = \cos t \quad y = \sin t$$

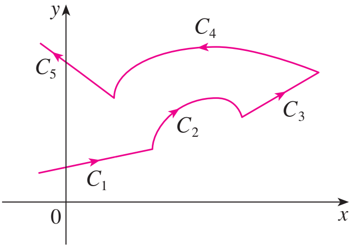
Do C là nửa trên của vòng tròn đơn vị, $0 \leq t \leq \pi$.



$$
\begin{aligned}
\int_C (2 + x^2 y) ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_0^\pi (2 \cos^2 t \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\
&= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt \\
&= \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\
&= 2\pi + \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Ta chú ý rằng đường cong C được giả thiết là trơn. Xét trường hợp C là đường cong trơn từng khúc (C là hợp hữu hạn các đoạn đường cong trơn $C_1, \ldots, C_n$), ta có thể định nghĩa tích phân đường của f trên đường cong C là tổng các tích phân đường của f trên các đường cong C_i

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_i} f(x,y)ds + \ldots + \int_{C_i} f(x,y)ds$$



Ví dụ

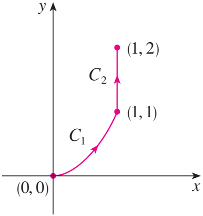
Tính tích phân $\int_C 2xds$ với C là đường cong chứa parabol $y = x^2$ từ $(0,0)$ tới $(1,1)$, và đoạn thẳng C_2 từ $(1,1)$ tới $(1,2)$.

Đường cong C_1 là đồ thị của hàm số theo biến x, ta có thể chọn x là tham số, C_1 biểu diễn bởi

$$x = x \quad y = x^2 \quad 0 \le x \le 1$$

Trên đoạn thẳng C_2 ta chọn y là tham số, C_2 cho bởi

$$x = 1 \quad y = y \quad 1 \le y \le 2$$



$$\int_{C_1} 2xds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$
$$= \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}dx$$
$$= \frac{1}{4}\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

$$\int_{C_2} 2xds = \int_1^2 2\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}dy$$
$$= \int_1^2 2dy = 2$$

Vậy ta có

$$\int_C 2xds = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$$

Tích phân đường loại một trong không gian

Tương tự, ta định nghĩa tích phân đường trong không gian.
Xét $f(x, y, z)$ xác định trên đường cong trơn C trong không gian $Oxyz$.
Với C cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

Khi đó tích phân đường của f trên C cho bởi công thức

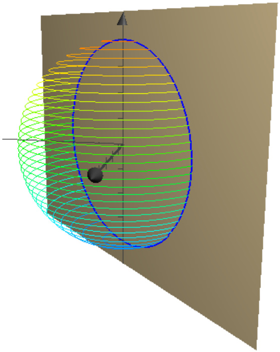
$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Ví dụ

Tính tích phân $\int_C (x+y)ds$ với C là đường tròn $x^2+y^2+z^2=4$, $x=y$

Phương trình tham số của đường cong C.
Ta thấy $2x^2+z^2=4$,(hình ellipse). Đặt

$$\begin{cases} x=y=\sqrt{2}r\cos\theta \\ z=2r\sin\theta \end{cases}$$



Vì $x^2+y^2+z^2=4$ nên $r=1$. Phương trình tham số của C

$$\begin{cases} x=y=\sqrt{2}\cos\theta \\ z=2\sin\theta \end{cases} \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\cos\theta)\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2d\theta}$$

Tích phân đường loại hai

Nếu ta thay vi phân Δs_i bằng $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ trong tích phân đường loại một, ta thu được hai tích phân đường. Các tích phân trên là tích phân đường của f trên đường cong C tương ứng với x và y

$$\int_C f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i$$

$$\int_C f(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i$$

Tích phân đường tương ứng với x và y có thể được biểu diễn dưới dạng tham số t như sau

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)dt$$

Định nghĩa tích phân đường loại hai

Định nghĩa

Giả sử trên đường C xác định hai hàm số $P(x,y)$ và $Q(x,y)$. Tích phân đường loại hai của $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ trên cung C xác định bởi công thức

$$I = \int\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Nếu đường cong C xác định theo phương trình tham số t trên đoạn $[a,b]$ thì tích phân đường loại hai được tính theo công thức

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \int\limits_{a}^{b} \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right) dt \end{aligned}$$

Tính chất

1. Tích phân đường loại hai phụ thuộc chiều lấy tích phân trên đường cong C

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy$$

2. Nếu đường cong $\overset{\frown}{AB}$ được chia thành $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$ và P, Q khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ thì ta có

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AC}} Pdx + Qdy + \int_{\overset{\frown}{CB}} Pdx + Qdy$$

Ví dụ 1.

Tính $I = \int\limits_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$ trong đó C là cạnh tam giác OAB với $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

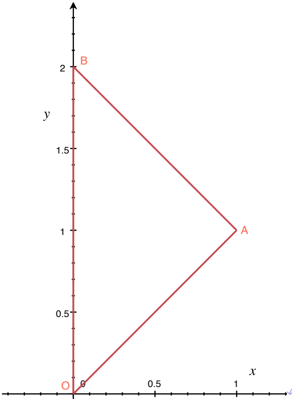
Ta có $I = \int\limits_C = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO}$.

Phương trình đoạn OA:

$x = t, y = t \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int\limits_{OA} = \int\limits_0^1 (t^2 + 3t).1.dt + 2t.1.dt$$

$$= \int\limits_0^1 (t^2 + 5t)dt = \frac{17}{6}$$



Ví dụ 1. (cont)

Phương trình đoạn AB: $x = 1 - t, y = 1 + t \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_{AB} = \int_0^1 ((1-t)^2 + 3(1+t)).(-1).dt + 2(t+1).1.dt$$

$$= \int_0^1 (-t^2 + t - 2)dt = -\frac{11}{6}$$

Phương trình đoạn BO: $x = 0, y = 2 - t \quad 0 \leq t \leq 2$

$$\int_{BO} = \int_0^2 ((0)^2 + 3(2-t)).0.dt + 2(2-t).(-1).dt = \int_0^2 2(t-2)dt = -4$$

Vậy $I = \frac{17}{6} - \frac{11}{6} - 4 = -3$

Ví dụ 1.(cách 2)

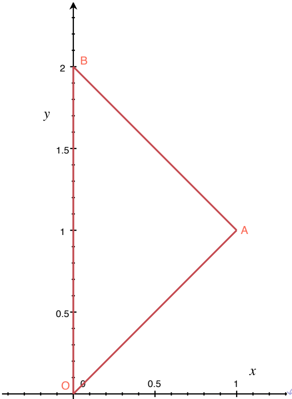
Tính $I = \int\limits_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$ trong đó C là cạnh tam giác OAB với $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Ta có $I = \int\limits_C = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO}$.

Phương trình đoạn OA: $y = x \quad x$ từ 0 đến 1

$$\int\limits_{OA} = \int\limits_0^1 (x^2 + 3x).1.dx + 2x.1.dx$$

$$= \int\limits_0^1 (x^2 + 5x)dx = \frac{17}{6}$$



Ví dụ 1. (cách 2)

Phương trình đoạn AB: $y = 2 - x \quad x$ từ 1 đến 0

$$\int_{AB} = \int_1^0 (x^2 + 3(2-x))dx + 2(2-x).(-1).dx = -\frac{11}{6}$$

Phương trình đoạn BO: $x = 0.y \quad y$ từ 2 đến 0

$$\int_{BO} = \int_0^2 ((0)^2 + 3y).0.dy + 2ydy = -4$$

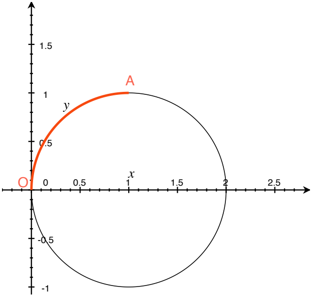
Vậy $I = \dfrac{17}{6} - \dfrac{11}{6} - 4 = -3$

Ví dụ 2.

Tính $I = \int\limits_C ydx + xdy$ trong đó C là cung $x^2 + y^2 = 2x$ từ $O(0,0)$ đến $A(1,1)$ theo chiều kim đồng hồ.

Cung C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \text{ từ } \pi \text{ tới } \frac{\pi}{2}$$



$$I = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} (\sin t)(-\sin t)dt + (1+\cos t)\cos t dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

Bài tập

Tính tích phân đường loại 1.

1. $\int\limits_C y^3 ds,\ C : x = t^3, y = t, 0 \leq t \leq 2.$
2. $\int\limits_C xyds,\ C : x = t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1.$
3. $\int\limits_C xy^4 ds$, C là nửa bên phải của đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.
4. $\int\limits_C x \sin y ds$, C là đoạn thẳng nối $(0, 3)$ tới $(4, 6)$.
5. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ với C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và $x \leq 1$.
6. $\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds$ với C có phương trình tham số $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$.
7. $\int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$ với C là đường xoắn ốc $x = a\cos t,\ y = a\sin t,$ $z = bt,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ a, b$ dương

Bài tập

Tính tích phân đường loại hai

1. $\int\limits_C (x^2y^3 - \sqrt{x})dy$ với C là đường cong $y = \sqrt{x}$ từ $(1,1)$ tới $(4,2)$.
2. $\int\limits_C xydx + (x-y)dy$ với C là chứa các đường thẳng từ $(0,0)$ đến $(2,0)$ và từ $(2,0)$ đến $(3,2)$.
3. $\int\limits_C \sin xdx + \cos ydy$ với C là nửa dưới đường tròn $x^2+y^2=1$ từ $(1,0)$ đến $(-1,0)$ và đoạn thẳng từ $(-1,0)$ đến $(-2,3)$.
4. $\int\limits_C ydx - (x+y)^2dy$ với C là cung parabol $y = 2x - x^2$ nằm phía $y \geq 0$ và theo chiều ngược kim đồng hồ.
5. $\int\limits_C xydx + ydy - yzdz$ trong đó C là đường cong cho bởi phương trình $x = t$, $y = t^2$, $z = t$ với t từ 0 đến 1.

Một số tính chất của tích phân đường

Liên hệ giữa tích phân đường loại một và loại hai

Xét đường cong $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \leq t \leq b$$

Khi đó vector $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ là vector tiếp tuyến với đường cong $\overset{\frown}{AB}$ và $\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ là vector tiếp tuyến đơn vị.
Gọi $F = (P, Q, R) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ là trường vector xác định trên đường cong C

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \left(P(r(t))x'(t) + Q(r(t))y'(t) + R(r(t))z'(t)\right) dt$$
$$= \int_a^b \left(P(r(t))\frac{x'(t)}{|r'(t)|} + Q(r(t))\frac{y'(t)}{|r'(t)|} + R(r(t))\frac{z'(t)}{|r'(t)|}\right) |r'(t)|dt$$
$$= \int_C F \cdot T(t)ds$$

Định lý căn bản

Trong tích phân hàm một biến, ta có tính chất

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

với F' liên tục trên $[a, b]$. Trong không gian hữu hạn chiều, ta dùng vector gradient ∇f thay cho F' và có định lý sau

Định lý

Cho C là đường cong trơn cho bởi hàm vector $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Cho f là hàm khả vi với vector gradient ∇f liên tục trên C. Khi đó

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Từ định lý trên, ta có thể tính tích phân đường loại 2 của ∇f, ta chỉ quan tâm đến giá trị của f tại điểm đầu và điểm cuối của đường cong C.

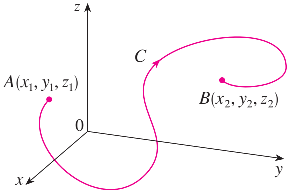
Chứng minh.

Từ định nghĩa ta có

$$\int_C \nabla f \cdot dr = \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(r(t))dt = f(r(b)) - f(r(a))$$



$\square$

Ví dụ

Tính $\int_C y^2 dx + x dy$ với
a) $C = C_1$ là đoạn thẳng từ $(-5, -3)$ đến $(0, 2)$
b)$C = C_2$ là đường cong parabol $x = 4 - y^2$ từ $(-5, -3)$ đến $(0, 2)$.

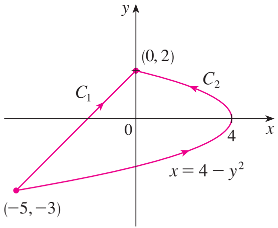
a) Phương trình tham số của đoạn thẳng

$$x = -5 + 5t, y = -3 + 5t, 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_1} y^2 dx + x dy = \int_0^1 (5t-3)^2(5dt) + (5t-5)(5dt)$$

$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)dt$$

$$= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right] = -\frac{5}{6}$$



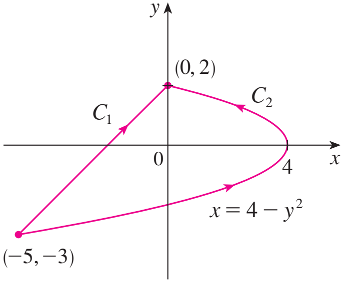
b) Parabol C_2 là hàm theo biến y, ta xem y là tham số

$$x = 4 - y^2, y = y, -3 \leq y \leq 2$$

$$\int_{C_2} y^2 dx + x dy = \int_{-3}^{2} y^2(-2y dy) + (4 - y^2) dy$$

$$= \int_{-3}^{2} (-2y^3 - y^2 + 4) dy$$

$$= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right] = 40\frac{5}{6}$$



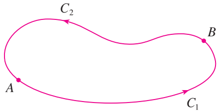
Không phụ thuộc vào đường đi

Giả sử C_1 và C_2 là hai đường cong trơn từng khúc với điểm đầu là A và điểm cuối là B.
Tổng quát, (như ví dụ trên) ta thấy $\int_{C_1} F.dr \neq \int_{C_2} F.dr$. Tuy nhiên

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot dr = \int_{C_2} \nabla f \cdot dr$$

với ∇f là trường vector liên tục.
Cho F là trường vector liên tục trên miền D, ta nói tích phân đường $\int_C F \cdot dr$ **không phụ thuộc vào đường đi** nếu $\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$ với mọi đường cong C_1, C_2 bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối.

Một đường cong được gọi là **kín** nếu điểm đầu và điểm cuối của nó trùng nhau ($r(b) = r(a)$).



Nếu $\int_C F \cdot dr$ không phụ thuộc đường đi trong D thì với mỗi đường cong kín C trong D, chọn hai điểm bất kỳ A, B trên C và chia C thành hai đường cong C_1 từ A đến B và C_2 từ B đến A. Ta có

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{-C_2} F \cdot dr = 0$$

Nếu $\int_C F \cdot dr = 0$ với C là đường cong kín thì

$$0 = \int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + int_{-C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr$$

Định lý

Tích phân $\int_C F \cdot dr$ *không phụ thuộc vào đường đi trong* D *nếu và chỉ nếu* $\int_C F \cdot dr = 0$ *với mọi đường cong kín* C *trong* D

Ta sẽ chỉ ra rằng

Định lý

Giả sử F *là trường vector liên tục trên miền* D. *Nếu tích* $\int_C F \cdot dr$ *không phụ thuộc vào đường đi thì tồn tại hàm số* f *sao cho* $\nabla f = F$.

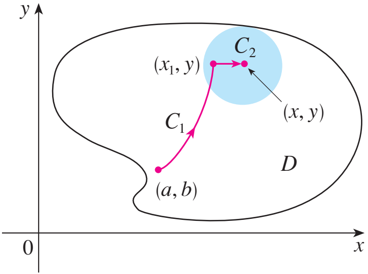
Chứng minh

Cho $A(a,b)$ là điểm cố định trong D. Ta xây dựng hàm f bởi

$$f(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} F \cdot dr.$$

Do $\int_C F \cdot dr$ không phụ thuộc đường đi, ta có thể chọn đường C chứa: C_1 từ (a,b) đến (x_1,y) với $x_1 < x$ và C_2 là đoạn thẳng nối nối (x,y). Khi đó

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr \\ &= \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr \end{aligned}$$



$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} F \cdot dr$$

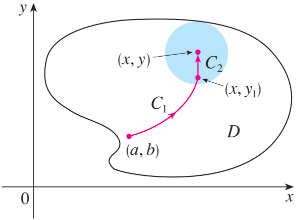
Nếu $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$ thì $\int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_2} Pdx + Qdy$.

Trên C_2, y là hằng số do đó $dy = 0$, xét tham số t với $x_1 \leq t \leq x$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} Pdx + Qdy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t,y) = P(x,y)$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = Q(x,y)$$



Vậy $F = P\vec{i} + Q\vec{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \nabla f$.

Ta thấy: Nếu tích phân $\int_C Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi, và giả sử P, Q liên tục và có các đạo hàm riêng bậc nhất. Khi đó, tồn tại hàm f sao cho $(P, Q) = \nabla f$

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ngoài ra ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Định lý

Cho $F = P\vec{j} + Q\vec{j}$ là trường vector trên miền liên thông đơn D. Giả sử P, Q có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{trên } D$$

thì tích phân $\int_C Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D.

Ví dụ

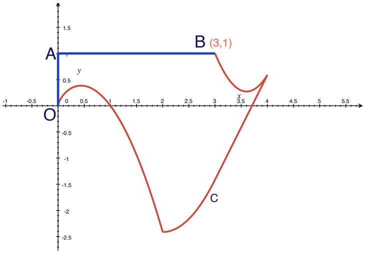
Tính tích phân $I = \int_C ydx + xdy$.

Ta thấy $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, tích phân trên không phụ thuộc vào đường đi.

Cách 1.

Ta chọn đường đi khác từ O đến B là đường gấp khúc OAB. Khi đó

$$I = \int_{OA} + \int_{AB} = \int_0^1 0dy + \int_0^3 1dx = 3$$



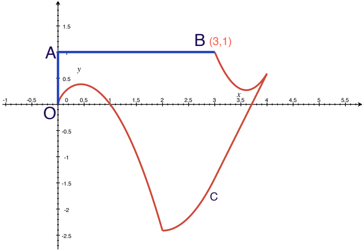
Ta thấy $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, tích phân trên không phụ thuộc vào đường đi.

Cách 2.

Tồn tại hàm khả vi $U(x, y)$ sao cho vi phân $dU = Pdx + Qdy$

$$\begin{cases} U'_x = P \\ U'_y = Q \end{cases} \Rightarrow U(x, y) = xy$$

$$I = \int_{0,0}^{(1,3)} ydx + xdy = U(x, y)\Big|_{(0,0)}^{(1,3)} = 3$$



Ví dụ

Tính $I = \int_C \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ với C là một đường cong tuỳ ý từ $A(1, 0)$ đến $B(2, 0)$.
a) Không bao quanh gốc toạ độ;
b) Bao quanh gốc toạ độ.

a) Ta kiểm tra rằng $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, do đó tích phân không phụ thuộc đường đi từ A đến B. Ta chọn đó là đoạn thẳng nối AB.

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln |x||_1^2 = \ln 2$$

b) Tích phân không phụ thuộc vào đường đi, tuy nhiên ta không thể tính tích phân theo đường từ A đến B. Ta thấy không tồn tại miền D chứa các đường cong kín bao quanh gốc O sao cho P và Q là các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên D

Ta tìm hàm $U(x, y)$ sao cho vi phân $dU(x, y) = Pdx + Qdy$

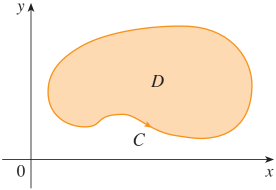
$$\begin{cases} U'_x = P = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow U(x, y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2)}{2} + g(y) \\ U'_y = Q = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow g(y) = C \end{cases}$$

$$U(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} + C$$

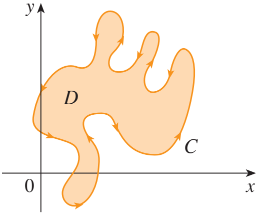
$$I = U(x, y)\Big|_{(1,0)}^{(2,0)} = \frac{\ln 4 - \ln 1}{2} = \ln 2$$

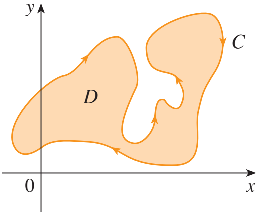
Định lý Green

Cho miền D được giới hạn bởi đường cong đơn liên C



Ta định nghĩa chiều dương của đường cong là chiều ngược chiều kim đồng hồ. Do đó nếu C cho bởi phương trình tham số $r(t), a \leq t \leq b$ thì miền D luôn nằm bên trái của điểm $r(t)$ khi chạy trên C. Tương tự ta có chiều âm





Định lý Green

Định lý

Cho là đường cong đóng C đơn liên theo hướng dương, trơn từng khúc. Nếu P, Q là các hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên miền D thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

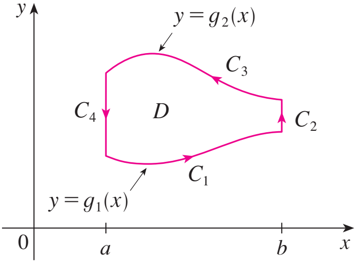
Chứng minh

Ta chứng minh

$$\int_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad \text{và} \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

Ta biểu diễn miền D dưới dạng

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



Ta tính tích phân trên các đường cong C_1, C_2, C_3, C_4.
Trên C_1, ta xem x là tham số: $x = x, y = g_1(x)$, $a \leq x \leq b$.

$$\int_{C_1} P(x,y) = \int_a^b P(x, g_1(x))dx$$

Trên C_3, x là tham số và đi từ b đến a, do đó

$$\int_{C_3} P(x,y) = -\int_a^b P(x, g_2(x))dx$$

Trên C_2, C_4, x là hằng số do đó $dx = 0$, ta có

$$\int_{C_2} P(x,y)dx = 0 = \int_{C_4} P(x,y)dx = 0$$

Vậy

$$\int_C P(x,y)dx = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \int_{C_4} P(x,y)dx$$
$$= \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx$$

Ta lại có

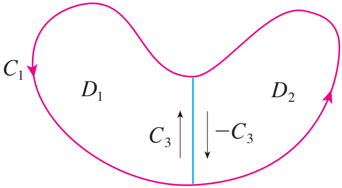
$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]dx$$

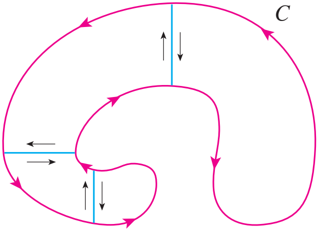
Do đó

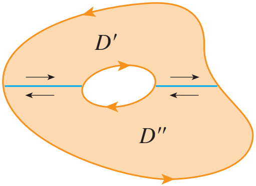
$$\int_C P(x,y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Tương tự ta có

$$\int_C P(x,y)dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$


C_1
D_1
D_2
C_2
C_3
$-C_3$


C


D'
D''

Ví dụ

Tính tích phân $\int_C x^4dx + xydy$ với C là các cạnh tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ theo chiều dương.

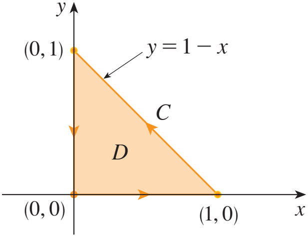
Áp dụng định lý Green ta có

$$\int_C x^4dx + xydy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y-0)dydx$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^2dx = \frac{1}{6}$$

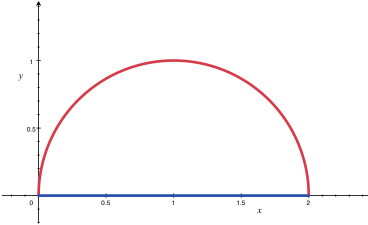


Ví dụ

Tính $I = \int_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$ trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2+y^2 = 2x$ theo hướng cùng chiều kim đồng hồ.

Cung C không kín, ta thêm vào đoạn AO để được miền D là nửa hình tròn.

$$I = \int_C = \int_{C\cup AO} - \int_{AO}$$



$$\int_{C\cup AO} = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= -\iint_D 2\left((x+y) + 2(x-y)\right) dxdy$$
$$= -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} 4r\cos\varphi r dr = -2\pi$$

Trên cung AO ta có phương trình tham số

$$x = 2 - t \quad y = 0 \quad \text{với } 0 \leq t \leq 2$$

$$\int\limits_{AO} = -\int_0^2 (2-t)^2 dt = \left.\frac{(2-t)^3}{3}\right|_0^2 = -\frac{8}{3}$$

Vậy ta có

$$I = \int_{C \cup AO} - \int_{AO} = -2\pi + \frac{8}{3}$$

Bài tập 1.

Tính tích phân $\int_C F \cdot dr$ trên đường cong C với

1. $F(x,y) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$, C là đường parabol $y = 2x^2$ từ $(-1,2)$ đến $(2,8)$.
2. $F = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ với $C : r(t) = \left\langle t + \sin\frac{1}{2}\pi t, t + \cos\frac{1}{2}\pi t \right\rangle 0 \leq t \leq 1$.
3. $F(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x^2}\vec{i} + 2y\arctan x\vec{j}$ với $C : r(t) = t^2\vec{i} + 2t\vec{j}, 0 \leq t \leq 1$.
4. Tính $\int_C (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$ với C là đường cong từ $(0,1)$ đến $(1,2)$.
5. Tính công sinh ra khi tác dụng trường lực F khi di chuyển vật từ P đến Q với
   a) $F(x,y) = 2y^{3/2}\vec{i} + 3x\sqrt{y}\vec{j}$; $P(1,1)$ và $Q(2,4)$;
   b) $F(x,y) = e^{-y}\vec{i} - xe^{-y}\vec{j}$; $P(0,1)$ và $Q(2,0)$.

Bài tập 2.

1. Tính $\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy$ với C là đường tròn tâm tại gốc toạ độ và bán kính 2 theo chiều âm.
2. Tính $\oint_C xydx + x^2y^3dy$ với C là tam giác với đỉnh $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ theo chiều dương.
3. Tính $\int_C xy^2dx + 2x^2ydy$ với C là tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(2,2$ và $(2,4)$ theo chiều dương.
4. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$ với C là biên của miền giới hạn với hai parabol $y = x^2$ và $x = y^2$ ngược chiều kim đồng hồ.
5. $\int_C \sin ydx + x\cos ydy$ với C là ellipse $x^2 + xy + y^2 = 1$ ngược chiều kim đồng hồ.