Kỹ thuật Hàm sinh

Trần Vĩnh Đức

HUST

Ngày 24 tháng 7 năm 2018

Nội dung

Định nghĩa

Ta ký hiệu $[x^n]G(x)$ là hệ số của x^n trong hàm sinh

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots .$$

Có nghĩa rằng $[x^n]G(x) = g_n$.

Bài tập

Tìm hệ số của x^n trong hàm sinh

$$\frac{1}{(1-x)^c}.$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{(1-x)^c} = (1 + x + x^2 + \cdots)^c.$$

Hệ số của x^n trong hàm sinh trên chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_c = n.$$

Lời giải (tiếp)

Xét song ánh giữa các nghiệm của phương trình

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_c = n$$

với

$$\text{"các dãy nhị phân gồm } n \text{ số } 1 \text{ và } c-1 \text{ số } 0\text{"}$$

như sau:

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_c = n \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{11\cdots1}_{e_1}\ 0\ \underbrace{11\cdots1}_{e_2}\ 0\ \cdots 0\ \underbrace{11\cdots1}_{e_c}$$

Lời giải (tiếp)

Theo luật BOOKEEPER thì

"số dãy nhị phân gồm n số 1 và $c-1$ số 0"

bằng

$$\binom{n+c-1}{n} = \frac{(n+c-1)!}{n!(c-1)!}.$$

Dãy hệ số tổ hợp

Vậy ta có

$$\left\langle\ 1,\ c,\ \binom{c+1}{2},\ \binom{c+2}{3},\ \binom{c+3}{4},\ \cdots\ \right\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^c}.$$

Bài tập

Tìm hệ số của x^n trong hàm sinh

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5.$$

Hệ số này chính là số cách chọn n chiếc kẹo từ 5 loại kẹo, mỗi loại lấy ít nhất hai chiếc.

Bài tập

Tìm hệ số của x^n trong hàm sinh

$$(1+x)^c.$$

Bài tập

- Ta cần $\$15$ để đóng góp cứu trợ đồng bào vùng bão lụt.
- Có 20 sinh viên tham gia đóng góp.
- Biết rằng 19 người đầu tiên sẽ góp $\$1$ hoặc không, người thứ 20 sẽ góp $\$1$ hoặc $\$5$ (hoặc không góp).
- Hãy dùng hàm sinh để tính số cách quyên góp $\$15$.

Bài tập

Hãy tính số cách để lấy 25 quả bóng giống nhau từ 7 chiếc hộp biết rằng hộp đầu tiên có không nhiều hơn 10 quả, còn các hộp khác có số quả tuỳ ý.

Bài tập

Có bao nhiêu cách chọn n quả với các rằng buộc sau?

- Số táo phải chẵn.
- Số chuối phải chia hết cho 5.
- Có nhiều nhất bốn quả cam.
- Có nhiều nhất một quả đào.

Ví dụ

Chứng minh đẳng thức sau dùng hàm sinh.

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Chứng minh.

Hệ số của x^n trong hàm sinh $F(x) = (1+x)^{2n}$ là

$$\binom{2n}{n}.$$

Đặt $G(x) = H(x) = (1+x)^n$. Vậy hệ số x^r trong $G(x) = H(x)$ là

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Theo luật tích, hệ số x^n trong hàm sinh $G(x)H(x) = F(x)$ là

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$
$$= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

Nội dung

Tính các hệ số của hàm sinh

Dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci

$$\langle 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots \rangle$$

được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (\text{với } n \geq 2). \end{aligned}$$

Bài tập

Hãy tìm hàm sinh $F(x)$ cho dãy Fibonacci.

$$\langle 0,\ 1,\ f_1 + f_0,\ f_2 + f_1,\ f_3 + f_2,\ \cdots \rangle$$

Lời giải

$$\begin{array}{rlllllllll}
 & \langle & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, \cdots \rangle & \longleftrightarrow & x \\
 & \langle & 0, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, \cdots \rangle & \longleftrightarrow & xF(x) \\
+ & \langle & 0, & 0, & f_0, & f_1, & f_2, \cdots \rangle & \longleftrightarrow & x^2F(x) \\
\hline
 & \langle & 0, & 1+f_0, & f_1+f_0, & f_2+f_1, & f_3+f_2, \cdots \rangle & &
\end{array}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}
F(x) &= x + xF(x) + x^2F(x) \\
&= \frac{x}{1-x-x^2}.
\end{aligned}$$

Bài tập

Hãy viết ra công thức tường minh cho dãy sinh bởi hàm sinh

$$F(x) := \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Lời giải

Đầu tiên, ta phân tích mẫu số

$$1 - x - x^2 = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x).$$

Ta được

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Lời giải (tiếp)

Sau đó, ta tìm A_1, A_2 thoả mãn

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{A_2}{1-\alpha_2 x}.$$

bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính. Ta được

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ A_2 &= \frac{-1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Lời giải (tiếp)

Bây giờ ta đã có

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x} - \frac{1}{1-\alpha_2 x}\right).$$

Theo công thức hàm sinh ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha_1 x} &= 1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \alpha_1^3 x^3 + \cdots \\
\frac{1}{1-\alpha_2 x} &= 1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \alpha_2^3 x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Lời giải (tiếp)

Vậy thì

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x} - \frac{1}{1-\alpha_2 x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((1+\alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \cdots) - (1+\alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \cdots)\right) \end{aligned}$$

Lời giải (tiếp)

Cuối cùng ta được công thức lạ cho số Fibonacci thứ n:

$$
\begin{aligned}
f_n &= \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).
\end{aligned}
$$

Phân thức đơn giản

Bổ đề

- Xét $p(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn n với $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ là các nghiệm khác 0 đôi một phân biệt.
- Khi đó tồn tại các hằng số $c_1, \cdots, c_n$ thỏa mãn

$$\frac{p(x)}{(1-\alpha_1 x)\cdots(1-\alpha_n x)} = \frac{c_1}{1-\alpha_1 x} + \cdots + \frac{c_n}{1-\alpha_n x}.$$