Chương 4:

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC

4.1 KHÁI NIỆM

4.2 CHUỖI FOURIER RỜI RẠC (DFS)

4.3 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT)

4.4 BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH (FFT)

4.1 KHÁI NIỆM

Biến đổi Fourier dãy x(n): $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- $X(e^{j\omega})$ có các hạn chế khi xử lý trên thiết bị, máy tính:
- ✓ Tần số ω liên tục
- ✓ Độ dài x(n) là vô hạn: n biến thiên $-\infty$ đến ∞

Khi xử lý $X(e^{j\omega})$ trên thiết bị, máy tính cần:

- ✓ Rời rạc tần số $\omega \to \omega_K$
- ✓ Độ dài x(n) hữu hạn là N: $n = 0 \div N-1$

⇒ *Biến đổi Fourier của dãy có độ dài hữu hạn theo tần số rời rạc, gọi tắt là biến đổi Fourier rời rạc – DFT (Discrete Fourier Transform)*

4.2 CHUỖI FOURIER RỜI RẠC CỦA TÍN HIỆU TUẦN HOÀN (DFS)

- Xét tín hiệu $\tilde{x}(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N:

$$\tilde{x}(n) = x(n + lN)$$

Khi đó tín hiệu tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ được biểu diễn bởi tổng các hàm mũ phức.

➢ Xét hàm mũ phức $e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ tuần hoàn với chu kỳ N:

$$e_k(n + rN) = e^{j\frac{2\pi}{N}(n+rN)k} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e_k(n)$$

$$e_{k+lN}(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e_k(n)$$

- Tín hiệu tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có thể biểu diễn bởi một chuỗi Fourier dưới dạng:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}\right]$$

- Do: $$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \begin{cases} 1: & k = m \\ 0: & k \neq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\tilde{X}}(k) \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} \right] = X(m)$$

➢ Hay ta có cặp phân tích và tổng hợp của chuỗi :

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{cases}$$

4.3 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT)

4.3.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC

- DFT của x(n) có độ dài N định nghĩa:

$$X(k)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & : 0\le k\le N-1\\ 0 & : k \text{ còn lại}\end{cases}$$

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad \Rightarrow \quad X(k)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} & : 0\le k\le N-1\\ 0 & : k \text{ còn lại}\end{cases}$$

- W_N tuần hoàn với độ dài N:

$$W_N^{(r+mN)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}(r+mN)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}r}=W_N^r$$

- X(k) biểu diễn dưới dạng modun & argument:

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

Trong đó: $\begin{cases} |X(k)| & \text{- phổ rời rạc biên độ} \\ \varphi(k) = arg[X(k)] & \text{- phổ rời rạc pha} \end{cases}$

- IDFT: $$x(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & : 0 \le n \le N-1 \\ 0 & : n \text{ còn lại} \end{cases}$$

- Cặp biến đổi Fourier rời rạc:

Đồng dạng

$$\boxed{\begin{cases} X(k) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & : 0 \le k \le N-1 \\ \Updownarrow & \\ x(n) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & : 0 \le n \le N-1 \end{cases}}$$

Ví dụ 4.3.1: Tìm DFT của dãy: $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{kn}$$

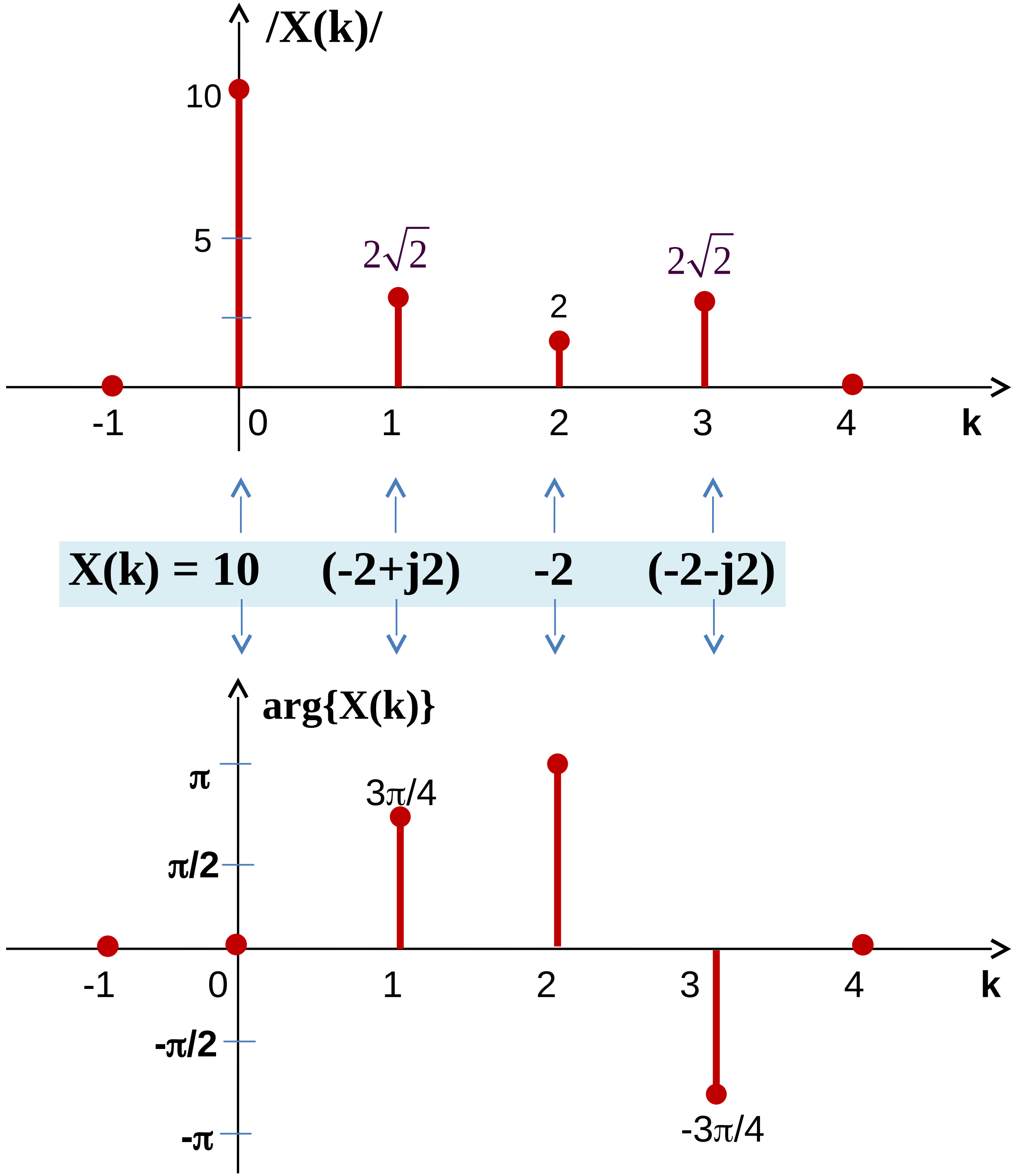
$$W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j; \quad W_4^2 = -1; \quad W_4^3 = j$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{0} = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 10$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{1n} = x(0) + x(1) W_4^1 + x(2) W_4^2 + x(3) W_4^3 = -2 + j2$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{2n} = x(0) + x(1) W_4^2 + x(2) W_4^4 + x(3) W_4^6 = -2$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{3n} = x(0) + x(1) W_4^3 + x(2) W_4^6 + x(3) W_4^9 = -2 - j2$$



/X(k)/
10
5
2√2
2
2√2
-1
0
1
2
3
4
k
X(k) = 10
(-2+j2)
-2
(-2-j2)
arg{X(k)}
π
3π/4
π/2
-1
0
1
2
3
4
k
-π/2
-3π/4
-π

Ví dụ: 4.3.2:

a) Tìm FT của dãy **x(n)=a^n u(n),** với /a/<1

b) Tìm DFT của dãy **x(n)=a^n rect$_N$(n)**

c) Vẽ phổ biên độ & pha của FT và DFT với a=3/4, N=16

- Biến đổi FT của x(n): $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

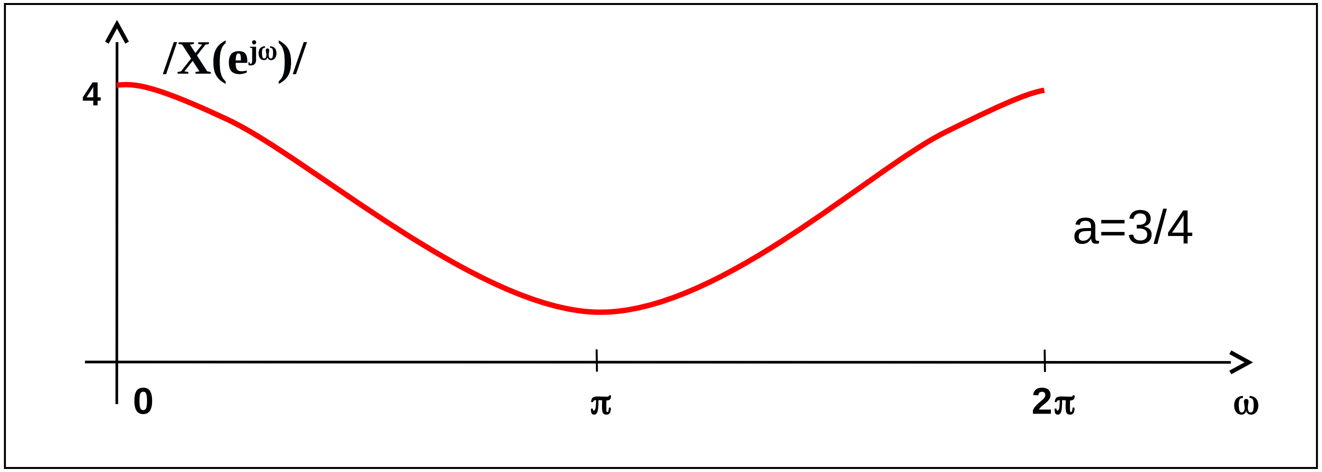
$$\Rightarrow \begin{cases} \left|X(e^{j\omega})\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}} \\ \arg\left[X(e^{j\omega})\right] = -\,arctg\,\dfrac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega} \end{cases}$$

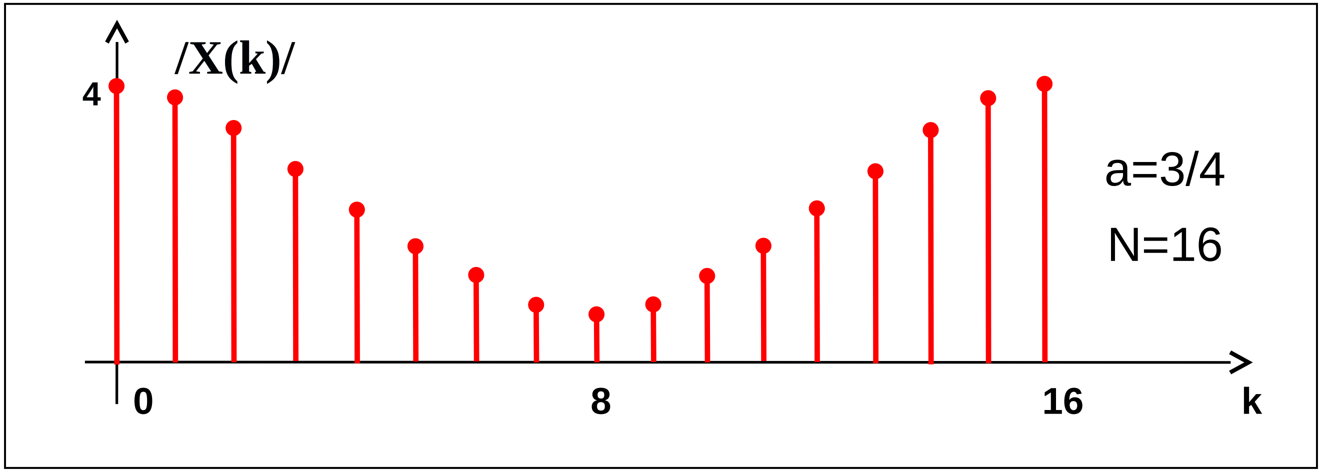
- Biến đổi DFT của **x(n):**

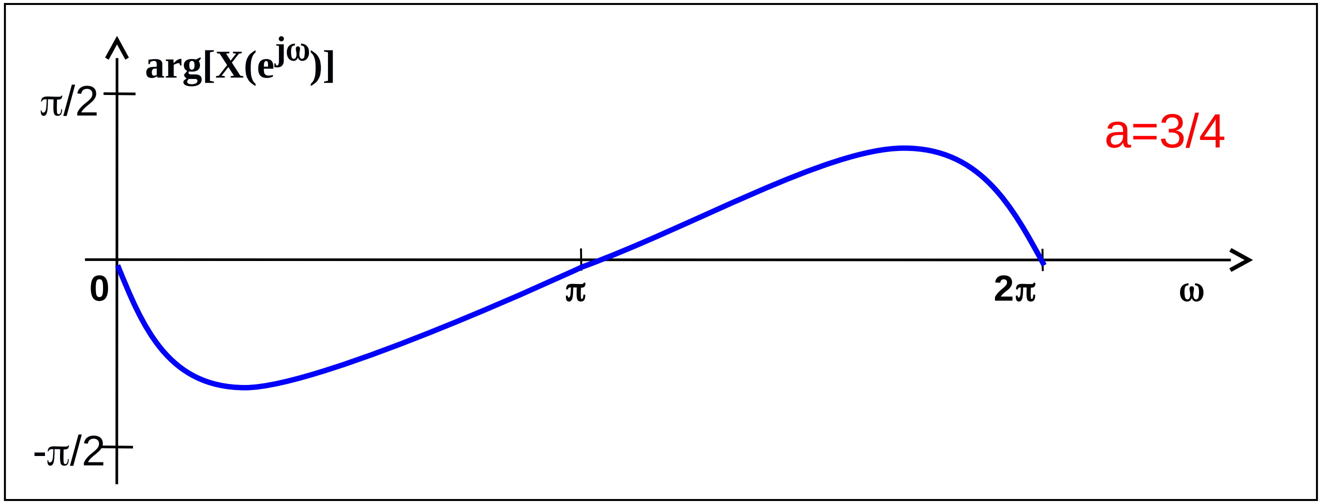
$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

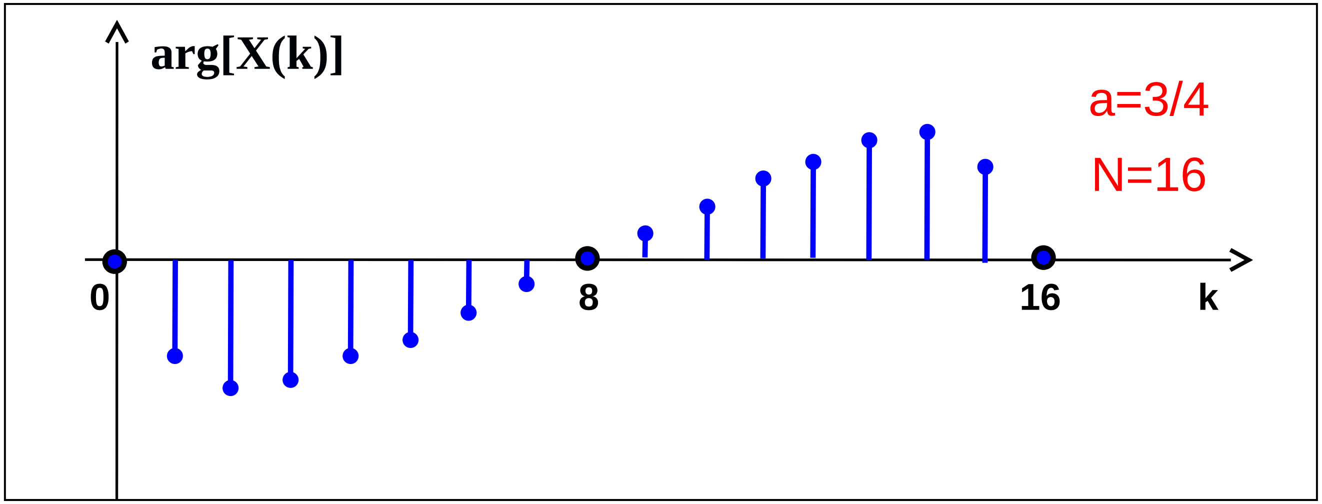
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(aW_N^k\right)^n = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |X(k)| = \dfrac{1-a^N}{\sqrt{1-2a\cos\frac{2\pi}{N}k + a^2}} \\ \arg\left[X(k)\right] = arctg\dfrac{a\sin\frac{2\pi}{N}k}{a\cos\frac{2\pi}{N}k - 1} \end{cases}$$


/X(e^jω)/
4
a=3/4
0
π
2π
ω


/X(k)/
4
a=3/4
N=16
0
8
16
k


arg[X(e^jω)]
π/2
-π/2
a=3/4
0
π
2π
ω


arg[X(k)]
a=3/4
N=16
0
8
16
k

4.3.2 CÁC TÍNH CHẤT CỦA DFT

a. Tuyến tính

- Nếu: $x_1(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)_N \qquad x_2(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)_N$

- Thì: $a_1x_1(n)_N + a_2x_2(n)_N \xleftrightarrow{DFT} a_1X_1(k)_N + a_2X_2(k)_N$

Nếu: $L_{x_1} = N_1 \neq N_2 = L_{x_2}$ Chọn: $N = max\{N_1, N_2\}$

b. Dịch vòng

- Nếu: $x(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X(k)_N$

- Thì: $x(n-n_0)_N \xleftrightarrow{DFT} W_N^{kn_0} X(k)_N$

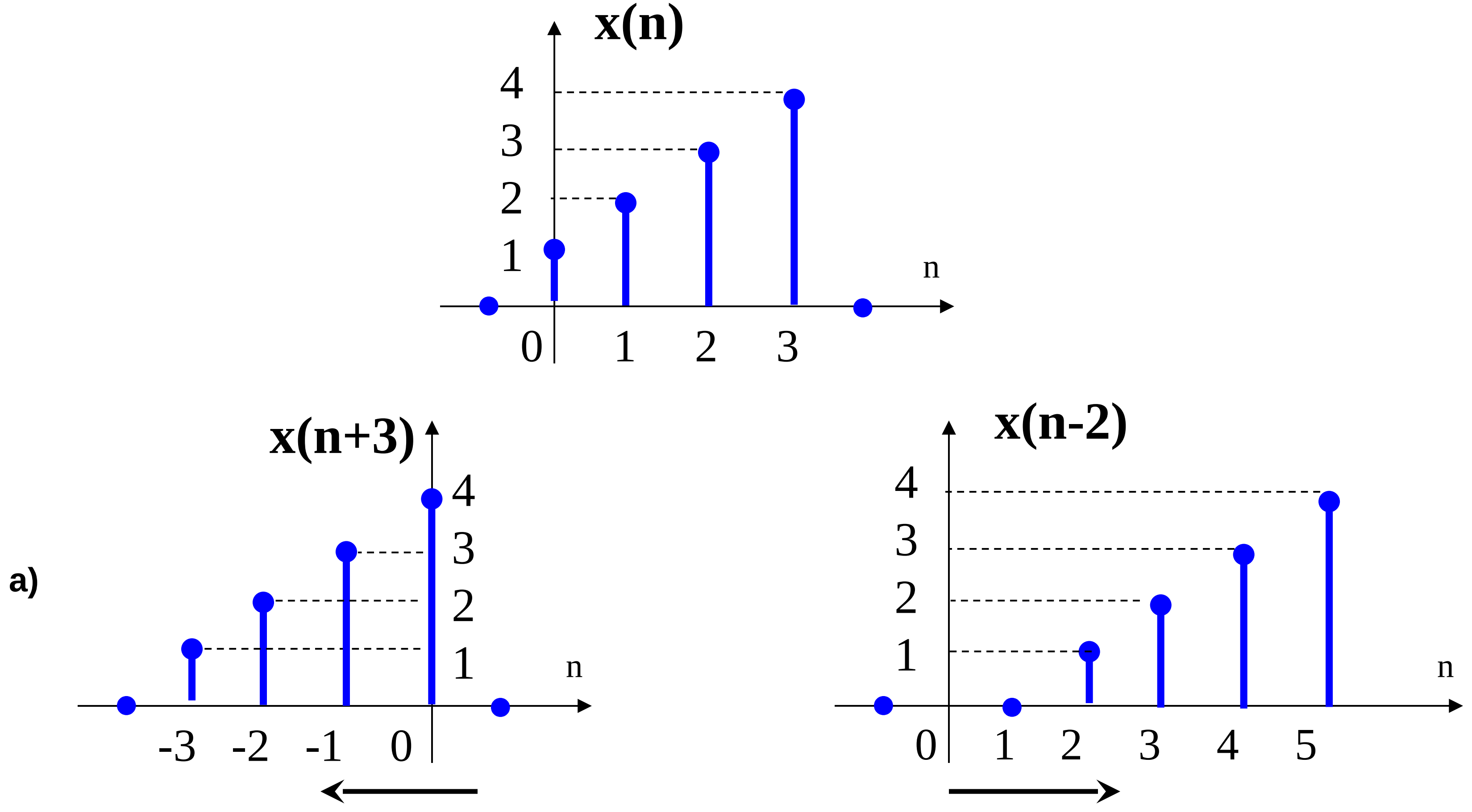
gọi là dịch vòng của $x(n)_N$ đi n_0 đơn vị

Với: $x(n-n_0)_N = \tilde{x}(n-n_0)_N \, \mathrm{rect}_N(n)$

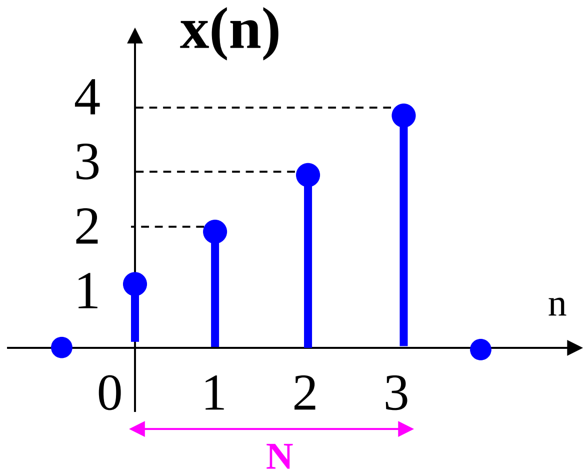
<u>Ví dụ 4.3.1</u>: Cho: $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$

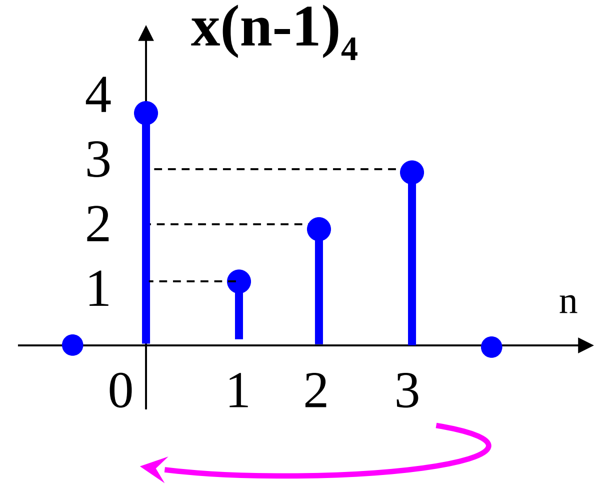
a) Tìm dịch tuyến tính: **x(n+3), x(n-2)**

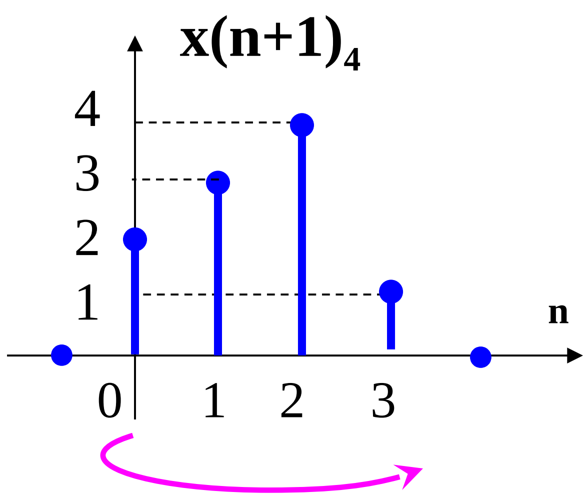
b)Tìm dịch vòng: **$x(n+3)_4$, $x(n-2)_4$**



b)







$$x(n-2)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{3},4,1,2 \right\}$$

$$x(n+3)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{4},1,2,3 \right\}$$

c. Chập vòng

- Nếu: $x_1(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)_N$ $\quad x_2(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)_N$
- Thì: $x_1(n)_N \otimes x_2(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)_N X_2(k)_N$

Với: $\boxed{x_1(n)_N \otimes x_2(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2(n-m)_N}$

Chập vòng 2 dãy $x_1(n)$ & $x_2(n)$

Và: $\boxed{x_2(n-m)_N = \tilde{x}_2(n-m)_N rect_N(n)}$

Dịch vòng dãy $x_2(-m)$ đi n đ/vị

Chập vòng có tính giao hoán:

$$x_1(n)_N \otimes x_2(n)_N = x_2(n)_N \otimes x_1(n)_N$$

Nếu: $L_{x_1} = N_1 \neq N_2 = L_{x_2}$ Chọn: $N = max\{N_1, N_2\}$

Ví dụ 4.3.2: Tìm chập vòng 2 dãy $x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4\}$ $x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$

$$\boxed{x_3(n)_N = x_1(n)_N \otimes x_2(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N\, x_2(n-m)_N}$$ *với N-1 ≥ n ≥0*

- Chọn độ dài N: $N_1=3, N_2=4 \Rightarrow N=max\{N_1,N_2\}=4$

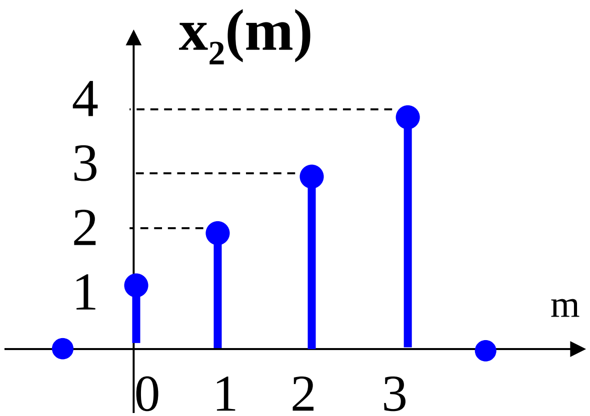
$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 \otimes x_2(n)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4\, x_2(n-m)_4 : 0 \le n \le 3$$

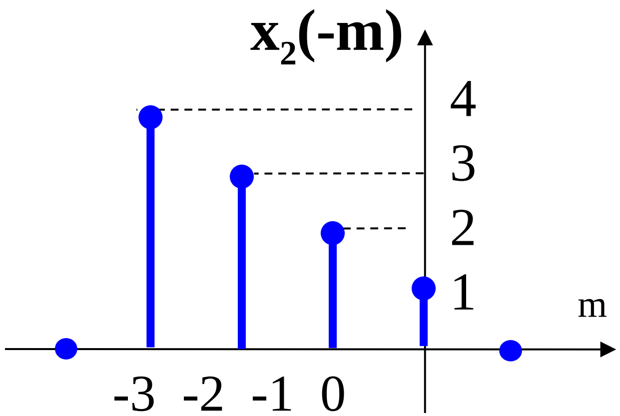
- Đổi biến n->m: $x_1(m)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4,0\}$ $x_2(m)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$

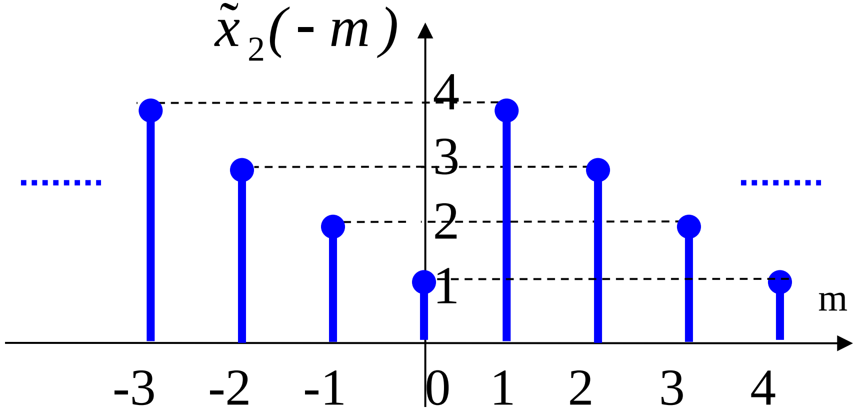
- Xác định $x_2(-m)_4$: $x_2(-m)_4 = \tilde{x}_2(-m)_4\, rect_4(n) = \{\underset{\uparrow}{1},4,3,2\}$

$$x_2(m) \Rightarrow x_2(-m)_4 = \tilde{x}_2(-m)_4 rect_4(n) \qquad \boxed{rect_4(n)}$$

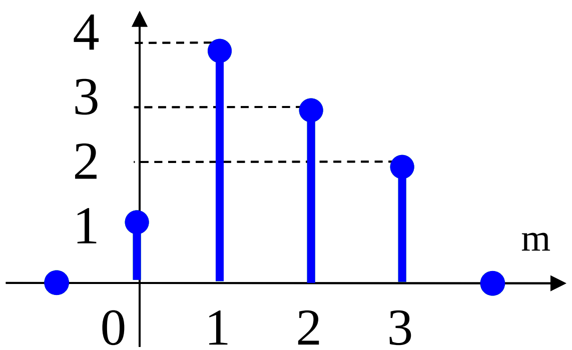
$$x_2(m) \xrightarrow{Gâp} x_2(-m) \xrightarrow{TH} \tilde{x}_2(-m)_4 \rightarrow \otimes \rightarrow x_2(-m)_4$$



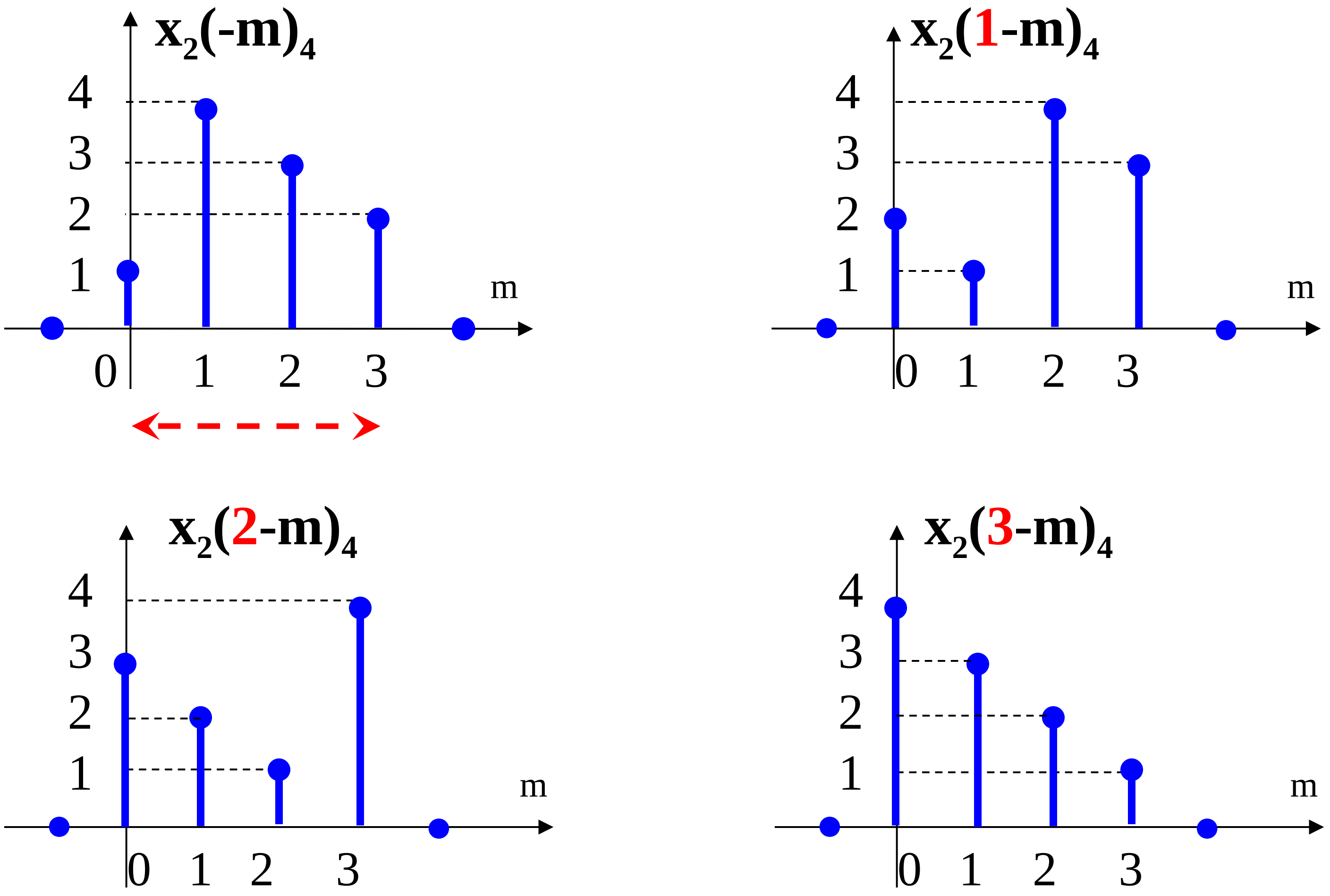




$$x_2(-m)_4 = \tilde{x}_2(-m) rect_4(n)$$



- Xác định $\boldsymbol{x_2(n\text{-}m)}$ là dịch vòng của $\mathbf{x_2(\text{-}m)}$ đi n đơn vị với $\boldsymbol{3 \geq n \geq 0}$



- Nhân các mẫu **x_1(m)** & **x_2(n-m)** và cộng lại:

$$x_3(n)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(n-m)_4 : 0 \le n \le 3$$

$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 \otimes x_2(n)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{26},23,16,25 \right\}$$

$$x_1(m)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{2},3,4,0 \right\}$$

$$x_2(0-m)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{1},4,3,2 \right\}$$

$$n=0:\ x_3(0)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(0-m)_4 = 26$$

$$x_2(1-m)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{2},1,4,3 \right\}$$

$$n=1:\ x_3(1)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(1-m)_4 = 23$$

$$x_2(2-m)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{3},2,1,4 \right\}$$

$$n=2:\ x_3(2)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(2-m)_4 = 16$$

$$x_2(3-m)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{4},3,2,1 \right\}$$

$$n=3:\ x_3(3)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(3-m)_4 = 25$$

Ví dụ 4.3.3: Tìm chập vòng 2 dãy $x_1(n)=x_2(n)=rect_N(n)$

- Biến đổi DFT: $$X_1(k)=X_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn}$$

$$k=0: \quad X_1(0)=\sum_{n=0}^{N-1} W^0 = N$$

$$k\neq 0: \quad X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{1-W_N^{kN}}{1-W_N^{k}} = 0$$

$$X_1(k)=\begin{cases} N: & k=0 \\ 0: & k\neq \end{cases}$$

$$X_3(k)=X_1(k)X_2(k)=\begin{cases} N^2: & k=0 \\ 0: & k\neq \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)W_N^{-kn}=\begin{cases} N: & \mathrm{n}=0 \\ 0: & \mathrm{n}\neq \end{cases}$$

d. Tính đối xứng

- Nếu: $x(n)_N \xleftarrow{DFT} \xrightarrow{} X(k)_N$

- Thì: $x^*(n)_N \xleftarrow{DFT} \xrightarrow{} X^*(-k)_N$

e. Quan hệ Parseval

- Nếu: $x(n)_N \xleftarrow{DFT} \xrightarrow{} X(k)_N$

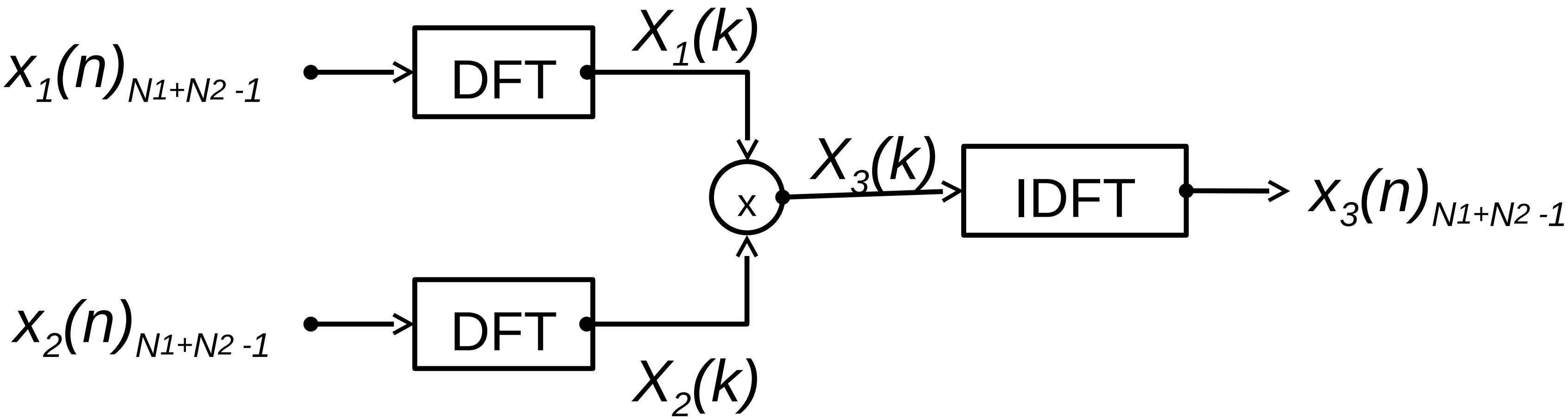
- Thì: $$\sum_{n=0}^{N-1} \left| x(n)_N \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| X(k)_N \right|^2$$

f. Chập tuyến tính sử dụng DFT

- Kết quả phép *chập tuyến* tính của 2 dãy $x_1(n)_{N1}$ và $x_2(n)_{N2}$ sẽ giống với *chập vòng* nếu thêm các mẫu 0 vào sau các dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ để có chiều dài tối thiểu là $N_1+N_2 - 1$:

$$\boxed{x_1(n)_{N1} * x_2(n)_{N2} = x_1(n)_{N1+N2-1} \otimes x_2(n)_{N1+N2-1}}$$

- Lưu đồ phép chập tuyến tính thông qua DFT được mô tả:



Ví dụ 4.3.4: Cho 2 dãy $x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4\};\ x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3\}$

Hãy tìm $x_3(n)=x_1(n)*x_2(n)$ và $x_3(n)=x_1(n)_5 \otimes x_2(n)_5$

- Chập tuyến tính của 2 dãy:

$$x_3(n)=x_1(n)\star x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{2},7,16,17,12\}$$

- Kết quả sẽ tương tự đối với phép chập vòng nếu thêm vài mẫu 0 vào sau 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ để có độ dài tối thiểu là 5:

$$x_1(n)_5=\{\underset{\uparrow}{2},3,4,0,0\} \text{ và } x_2(n)_5=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,0,0\}$$

$$x_3(n)_5=x_1(n)_5\otimes x_2(n)_5=\{\underset{\uparrow}{2},7,16,17,12\}$$

4.3.3 KHÔI PHỤC BIẾN ĐỔI Z & FT TỪ DFT

a. Khôi phục biến đổi Z

- Biến đổi Z của dãy ***x(n)$_N$***: $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$

- Biến đổi IDFT của X(k) là: $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad =\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}\right] z^{-n}$$

$$X(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \sum_{n=0}^{N-1}\left(W_N^{-k} z^{-1}\right)^n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \frac{1-\left(W_N^{-k} z^{-1}\right)^N}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(z)=\frac{(1-z^{-N})}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)_N}{(1-W_N^{-k} z^{-1})}}$$

b. Khôi phục biến đổi Fourier

- Mối quan hệ giữa biến đổi Z & FT: $\boxed{X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}}$
- Theo mối quan hệ giữa ZT & DFT:

$$X(z) = \frac{(1-z^{-N})}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{(1-W_N^{-k}z^{-1})}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{(1-e^{-j\omega N})}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)_N}{(1-e^{j(\frac{2\pi}{N}k-\omega)})}$$

- Do: $1-e^{-jx} = e^{-j\frac{x}{2}}(e^{j\frac{x}{2}} - e^{-j\frac{x}{2}}) = j2e^{-j\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)_N\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k)}e^{-j\left(\omega\frac{N-1}{2}+\frac{\pi}{N}k\right)}}$$

4.4 BiẾN ĐỔI FOURIER NHANH FFT

4.4.1 KHÁI NIỆM BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH FFT

- Vào những năm thập kỷ 60, khi công nghệ vi xử lý phát triển chưa mạnh thì thời gian xử lý phép tóan DFT trên máy tương đối chậm, do số phép nhân phức tương đối lớn.

- DFT của x(n) có độ dài N: $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} : \ 0 \le k \le N-1$$

- Để tính X(k), ứng với mỗi giá trị k cần có N phép nhân và (N-1) phép cộng, vậy với N giá trị k thì cần có N^2 phép nhân và N(N-1) phép cộng.

- Để khắc phục về mặt tốc độ xử lý của phép tính DFT, nhiều tác giả đã đưa ra các thuật tóan riêng dựa trên DFT gọi là FFT (Fast Fourier Transform).

4.4.2 THUẬT TOÁN FFT CƠ SỐ 2

a. Thuật toán FFT cơ số 2 phân chia theo thời gian

- Giả thiết dãy x(n) có độ dài $N=2^M$, nếu không có dạng lũy thừa 2 thì thêm vài mẫu 0 vào sau dãy x(n).
- Thuật tóan dựa trên sự phân chia dãy vào x(n) thành các dãy nhỏ, do biến ***n*** biểu thị cho trục thời gian nên gọi là phân chia theo thời gian.

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0,2,4\ldots}^{N-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

- *Thay n=2r* với n chẵn và *n=2r+1* với n lẽ:

$$X(k)=\sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_N^{k(2r+1)}$$

Do: $$W_N^{k2r} = e^{j\frac{2\pi}{N}k2r} = e^{j\frac{2\pi}{N/2}kr} = W_{N/2}^{kr}$$

⇨ $$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} + W_N^k.\sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{kr}$$

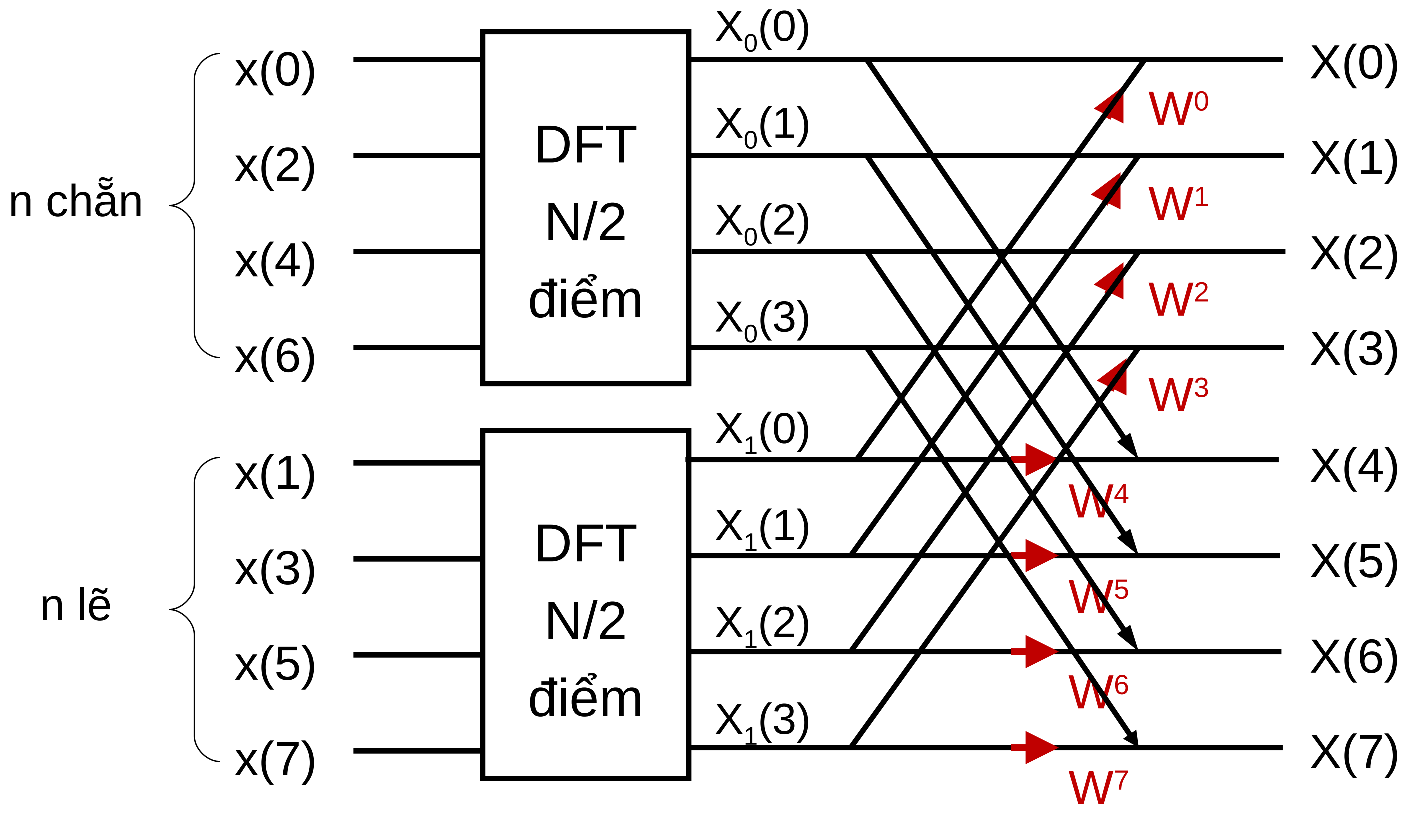
Đặt: $$X_0(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} \qquad X_1(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{kr}$$

⇨ $$\boxed{X(k) = X_0(k) + W_N^k.X_1(k)}$$

- $X_0(k)$ – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số n chẵn
- $X_1(k)$ – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số n lẽ

- Lấy ví dụ minh họa cho x(n) với N=8

- Phân chia DFT- N điểm -> 2 DFT- N/2 điểm;



- **Qui ước cách tính X(k) theo lưu đồ:**

- Nhánh ra của 1 nút bằng tổng các nhánh vào nút đó
- Giá trị mỗi nhánh bằng giá trị nút xuất phát nhân hệ số

- Sau đó đánh lại chỉ số theo thứ tự các mẫu x(n), tiếp tục phân chia DFT của N/2 điểm thành 2 DFT của N/4 điểm theo chỉ số n chẵn và lẽ và cứ thế tiếp tục phân chia cho đến khi nào còn DFT 2 điểm thì dừng lại.
- Ví dụ $X_0(k)$ được phân chia:

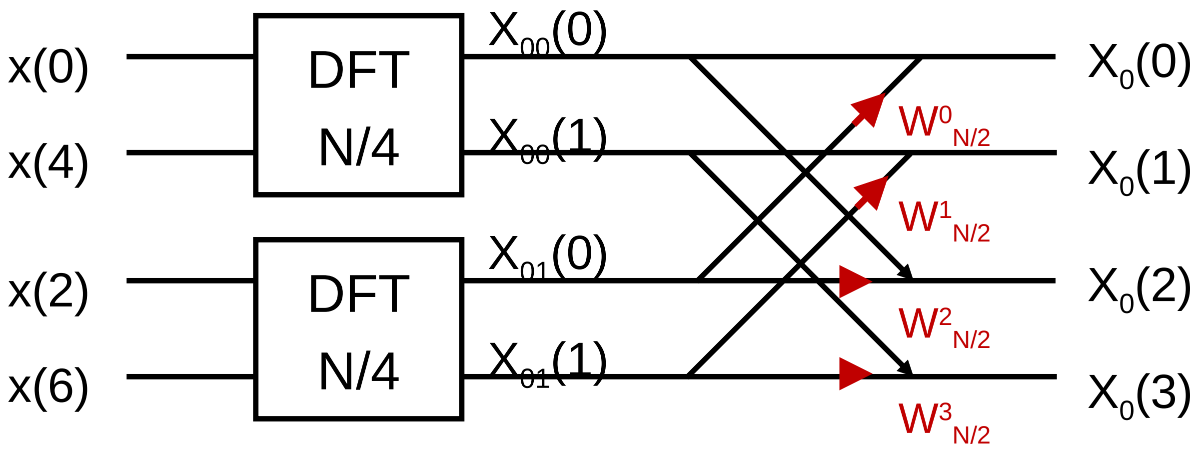
$$X_0(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr}$$

$$= \sum_{r=0,2,4...}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr} + \sum_{r=1,3,5...}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr}$$

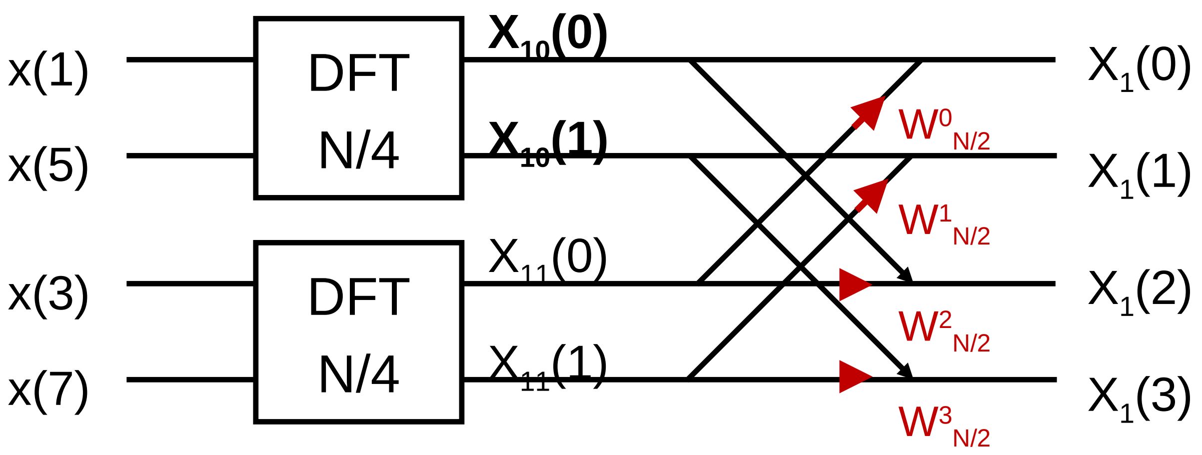
$$= \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l)W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^{k} \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l+1)W_{N/4}^{kl}$$

$$\boxed{X_0(k) = X_{00}(k) + W_{N/2}^{k}.X_{01}(k)}$$

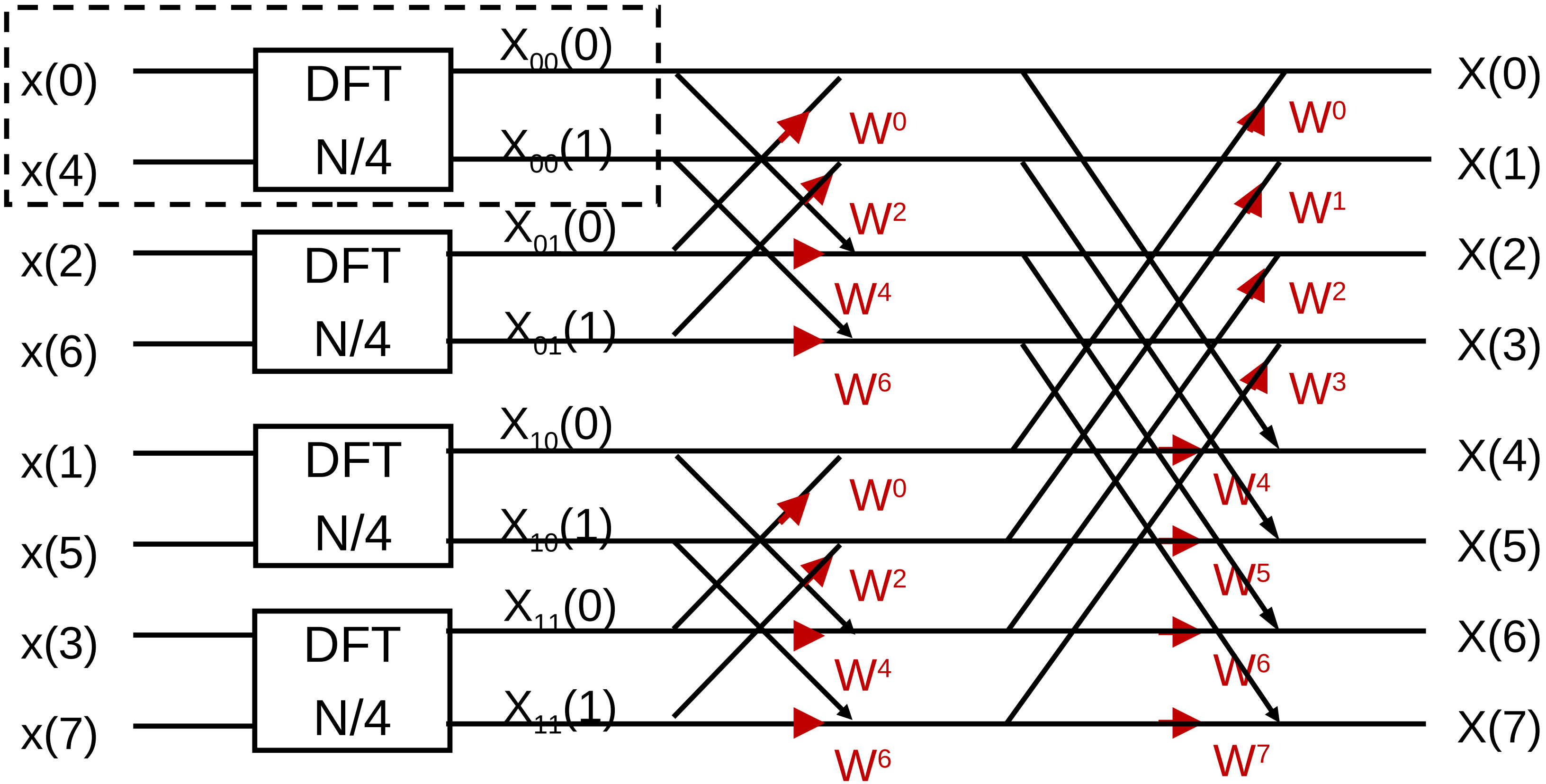
- Phân chia DFT- N/2 điểm -> 2 DFT- N/4 điểm của $X_0(k)$



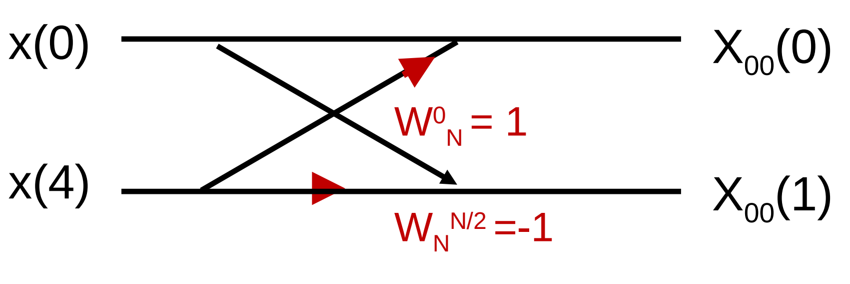
- Phân chia $X_1(k)$ tương tự: $\boxed{X_1(k) = X_{10}(k) + W_{N/2}^{k}.X_{11}(k)}$



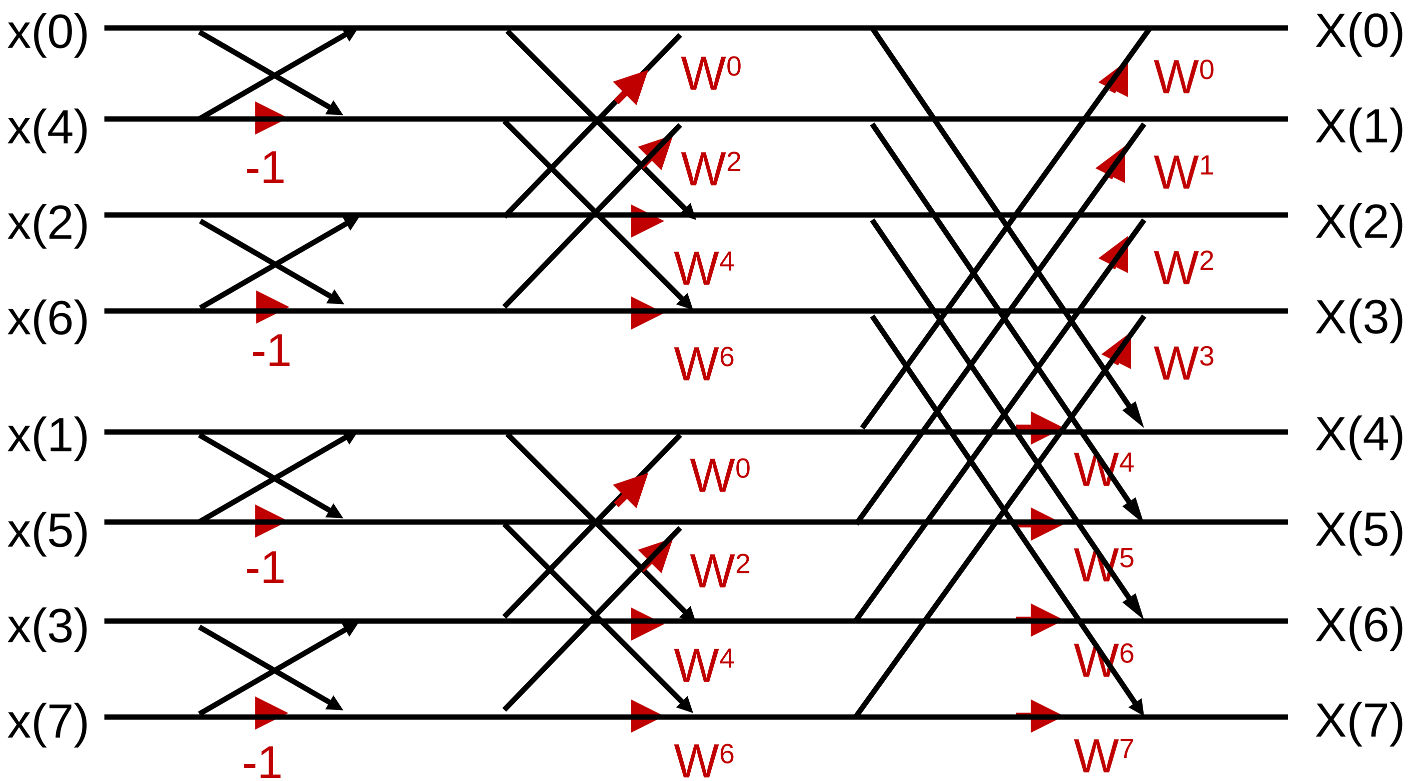
- Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 2 lần phân chia với N=8

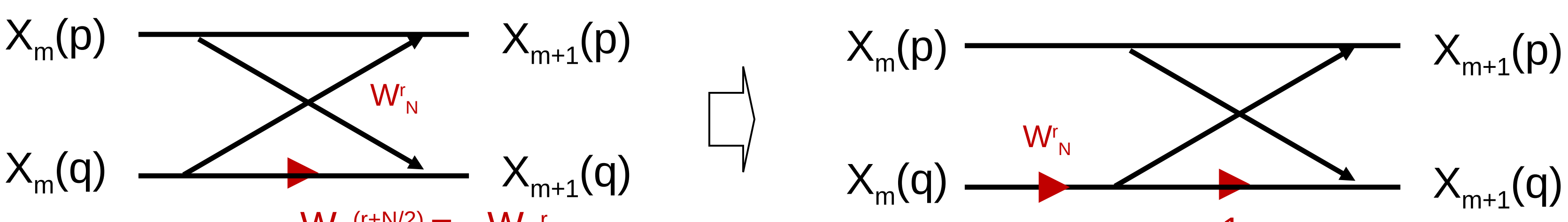


- Lưu đồ DFT 2 điểm:



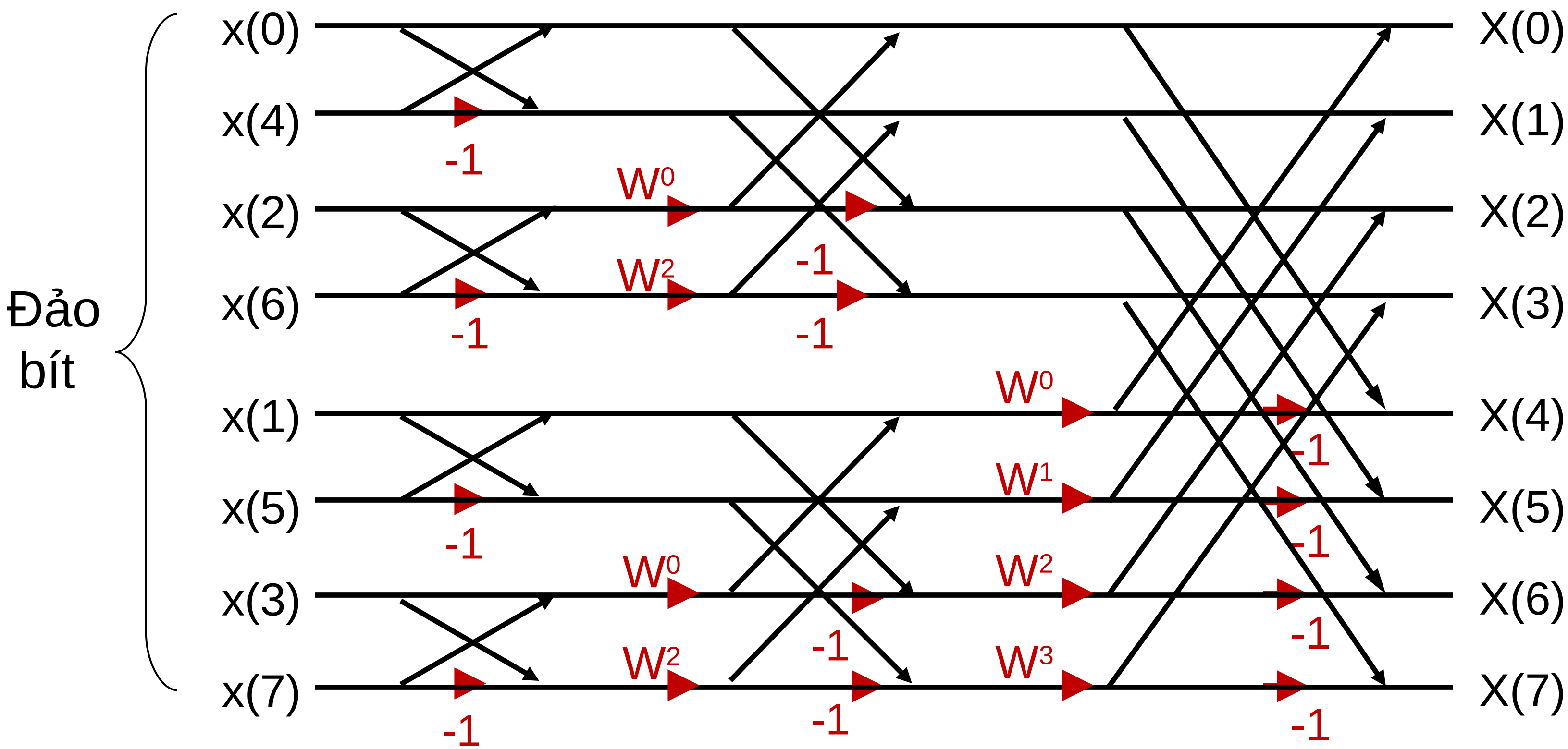
- Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8





$W_N^{(r+N/2)} = - W_N^{r}$

- Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8



- Với $N=2^M$ -> M lần phân chia
- Số phép nhân = số phép cộng = $NM/2=(N/2)\log_2 N$

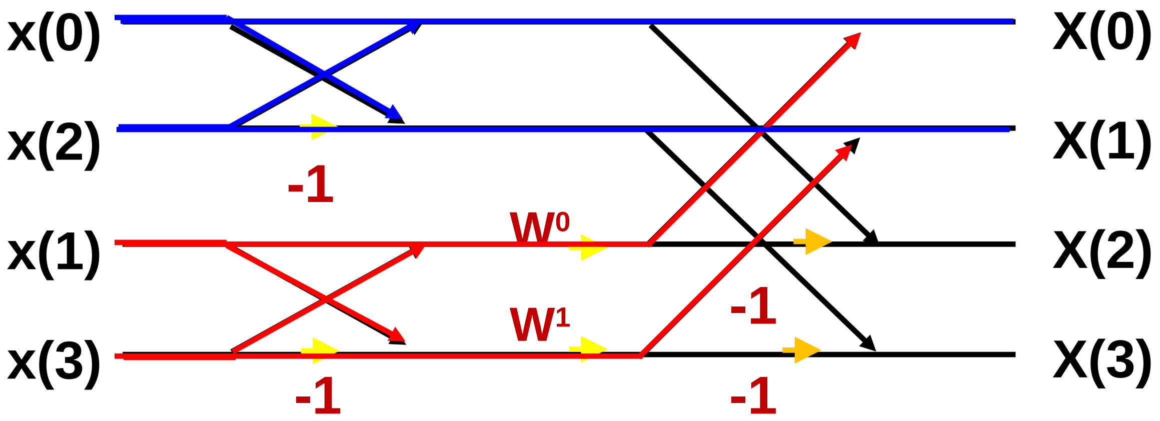
…	$W_{N/4}^{k}=W_N^{4k}$	$W_{N/2}^{k}=W_N^{2k}$	W_N^k
	Lần 3	Lần 2	Lần 1

- Bảng mô tả qui luật đảo bit:

Chỉ số tự nhiên	Số nhị phân chưa đảo (n_2,n_1,n_0)	Số nhị phân đảo (n_0,n_1,n_2)	Chỉ số đảo
0	**0 0 0**	**0 0 0**	**0**
1	**0 0 1**	**1 0 0**	**4**
2	**0 1 0**	**0 1 0**	**2**
3	**0 1 1**	**1 1 0**	**6**
4	**1 0 0**	**0 0 1**	**1**
5	**1 0 1**	**1 0 1**	**5**
6	**1 1 0**	**0 1 1**	**3**
7	**1 1 1**	**1 1 1**	**7**

<u>Ví dụ 4.4.1</u>: Hãy vẽ lưu đồ và tính FFT cơ số 2 phân theo t/g

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$$



- k=0: $X(0) = [x(0) + x(2)] + W^0[x(1) + x(3)] = 10.$
- k=1: $X(1) = [x(0) - x(2)] + W^1[x(1) - x(3)] = -2 + j2.$
- k=2: $X(2) = [x(0) + x(2)] - W^0[x(1) + x(3)] = -2.$
- k=3: $X(3) = [x(0) - x(2)] - W^1[x(1) - x(3)] = -2 - j2.$

b. Thuật toán FFT cơ số 2 phân chia theo tần số

- Thuật tóan dựa trên sự phân chia dãy ra X(k) thành các dãy nhỏ, do biến k biểu thị cho trục tần số nên gọi là phân chia theo tần số.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n+N/2) W_N^{k(n+N/2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) W_N^{kn} + W_N^{kN/2} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n+N/2) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + (-1)^k x(n+N/2) \right] W_N^{kn}$$

- Với k chẵn, thay k=2r:

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[x(n)+x(n+N/2)\right]W_{N/2}^{rn}$$

- Với k lẽ, thay k=2r+1:

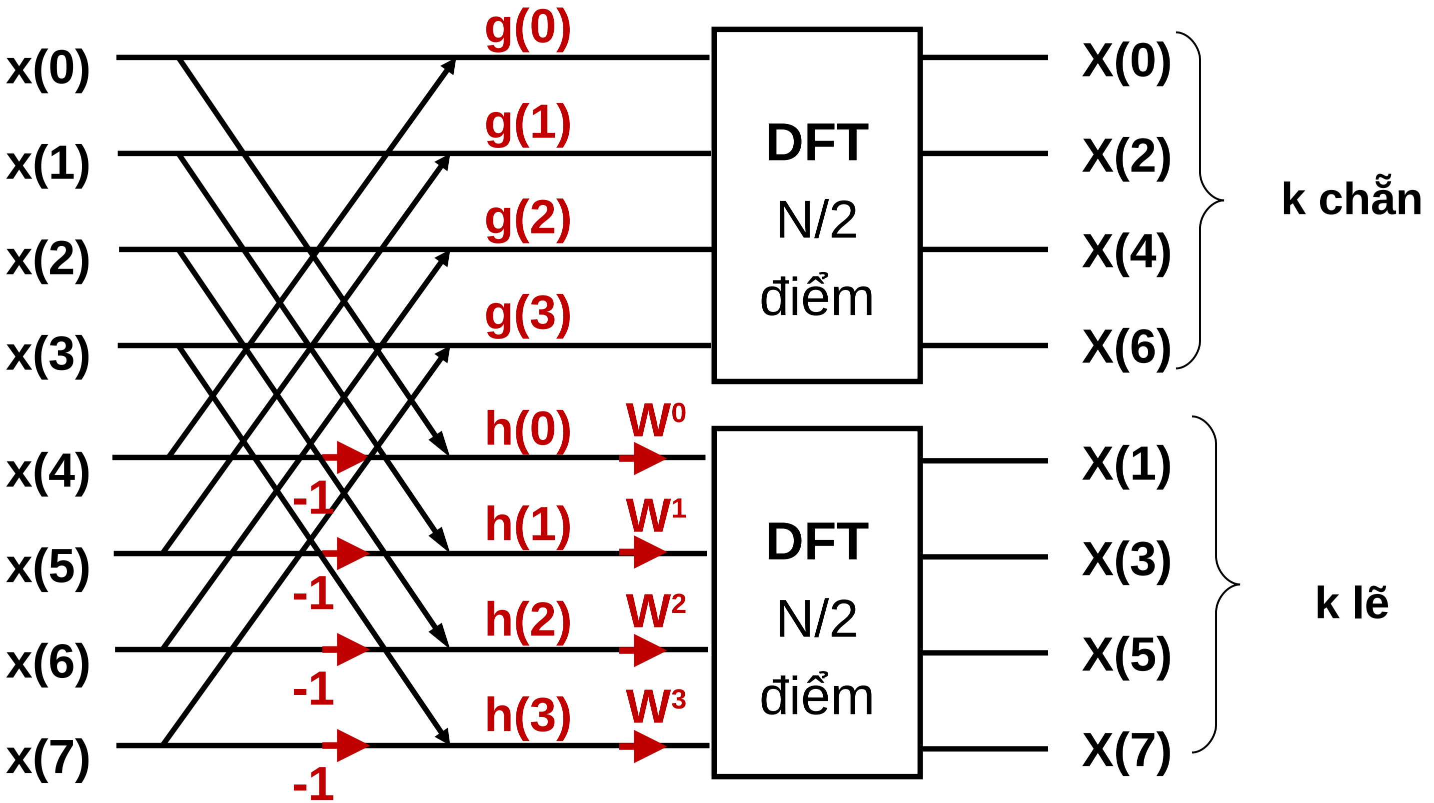
$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left\{\left[x(n)-x(n+N/2)\right]W_N^{n}\right\}W_{N/2}^{rn}$$

- Đặt: $g(n)=x(n)+x(n+N/2)$; $h(n)=x(n)-x(n+N/2)$

$$\Rightarrow \boxed{X(2r)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}g(n)W_{N/2}^{rn}} \qquad \boxed{X(2r+1)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[h(n)W_N^{n}\right]W_{N/2}^{rn}}$$

- **X(2r)** – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số k chẵn
- **X(2r+1)** – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số k lẽ

- **Phân chia DFT N=8 điểm -> 2 DFT N/2= 4 điểm**

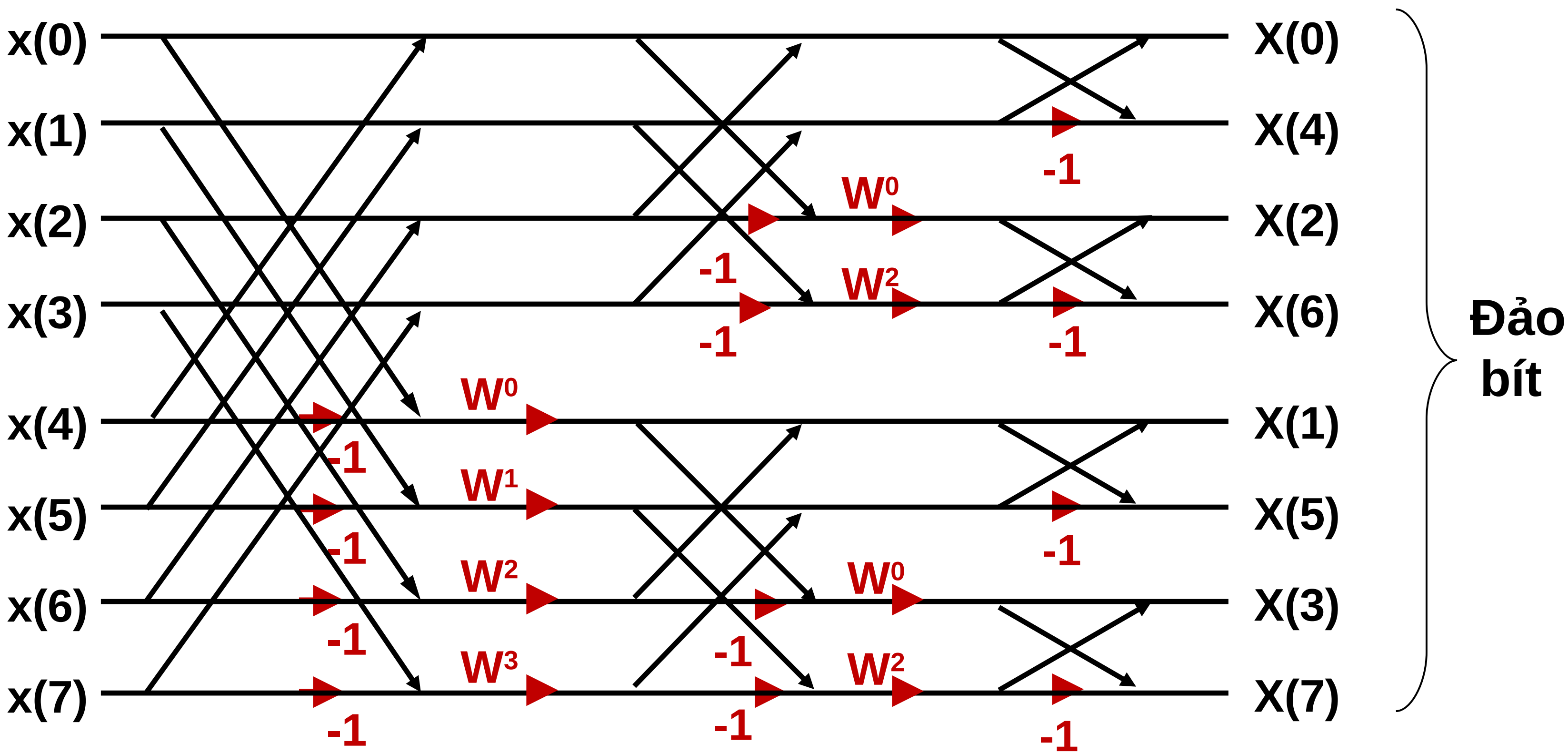


- Sau đó đánh lại chỉ số theo thứ tự các mẫu X(k), tiếp tục phân chia DFT của N/2 điểm thành 2 DFT của N/4 điểm theo chỉ số k chẵn và lẽ. Tiếp tục phân chia cho đến khi nào còn DFT 2 điểm thì dừng lại.

- Dữ liệu ra X(k) được sắp xếp theo thứ tự đảo bít, còn dữ liệu vào được sắp theo thứ tự tự nhiên.

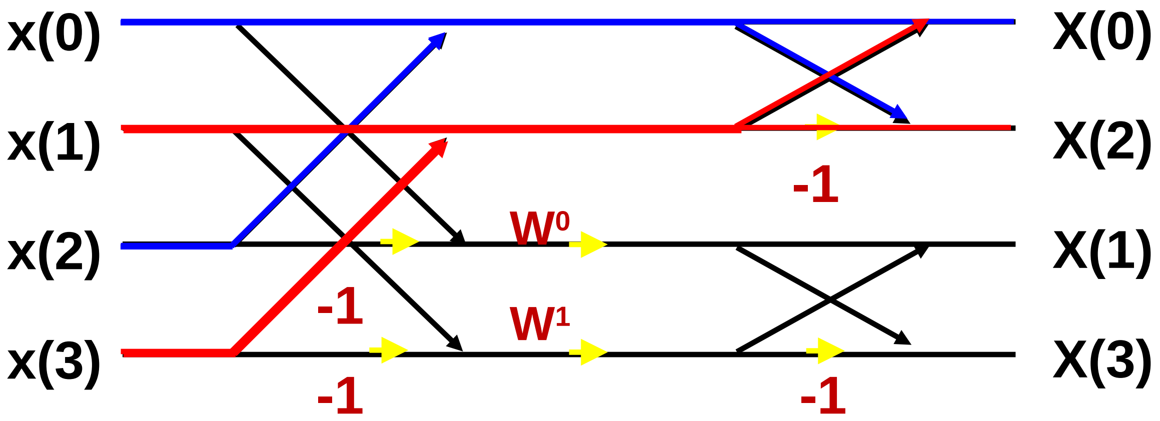
- Số phép nhân và phép cộng trong lưu đồ phân theo tần số bằng với số phép nhân và cộng trong lưu đồ phân theo thời gian.

- **Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8**



<u>Ví dụ 4.4.2</u>: Hãy vẽ lưu đồ và tính FFT cơ số 2 phân theo t/s

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$$



- k=0: X(0) = [x(0) + x(2)] + [x(1) + x(3)] = 10.
- k=2: X(2) = [x(0) + x(2)] - [x(1) + x(3)] = - 2.
- k=1: X(1) = [x(0) - x(2)] + W^1[x(1) - x(3)] = - 2 + j2.
- k=3: X(3) = [x(0) - x(2)] - W^1[x(1) - x(3)] = - 2 - j2.

4.4.3 THUẬT TOÁN FFT VỚI $N=N_1N_2$

- Giả thiết độ dài dãy x(n) có thể phân tích $\mathbf{N=N_1N_2}$, nếu độ dài không thể biểu diễn dưới dạng trên thì thêm vài mẫu 0 vào sau dãy x(n).
- Giả thiết dữ liệu vào được sắp xếp vào trong mảng theo thứ tự từng cột với số cột $\mathbf{N_1}$ và số hàng $\mathbf{N_2}$:

n_2 \ n_1	**0**	**1**	**…**	$\mathbf{N_1-1}$
0	$\mathbf{x(0)}$	$\mathbf{x(N_2)}$	**…**	$\mathbf{x[N_2(N_1-1)]}$
1	$\mathbf{x(1)}$	$\mathbf{x(N_2+1)}$	**…**	$\mathbf{x[N_2(N_2-1)+1]}$
…	**…**	**…**	**…**	**…**
$\mathbf{N_2-1}$	$\mathbf{x(N_2-1)}$	$\mathbf{x(2N_2-1)}$	**…**	$\mathbf{x[N_1N_2-1]}$

- Lấy ví dụ sắp xếp dãy x(n) với N=12, chọn N_1=3 và N_2=4

n_2 \ n_1	0	1	2
0	**x(0)**	**x(4)**	**x(8)**
1	**x(1)**	**x(5)**	**x(9)**
2	**x(2)**	**x(6)**	**x(10)**
3	**x(3)**	**x(7)**	**x(11)**

- Các chỉ số **n** của x(n), **k** của X(k) xác định:

- $\mathbf{n = n_1N_2 + n_2}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0 \le n_1 \le N_1} \\ \mathbf{0 \le n_2 \le N_2} \end{array} \right.$

- $\mathbf{k = k_1 + k_2N_1}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0 \le k_1 \le N_1} \\ \mathbf{0 \le k_2 \le N_2} \end{array} \right.$

- DFT N điểm dãy x(n) được phân tích:

$$X(k) = X(k_1 + k_2 N_1) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2 + n_1 N_2) W_N^{(k_1+k_2N_1)(n_2+n_1N_2)}$$

$$= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2 + n_1 N_2) W_N^{n_2k_1} W_N^{n_1k_1N_2} W_N^{n_2k_2N_1} W_N^{n_1k_2N_1N_2}$$

$$\text{Do:} W_N^{n_1k_1N_2} = W_{N_1}^{n_1k_1}; W_N^{n_2k_2N_1} = W_{N_2}^{n_2k_2}; W_N^{n_1k_2N_1N_2} = 1$$

$$\boxed{\Rightarrow X(k) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2 + n_1 N_2) W_{N_1}^{n_1k_1} \right] W_N^{n_2k_1} \right\} W_{N_2}^{n_2k_2}}$$

- Đặt:

$$\begin{cases} F(n_2,k_1) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2+n_1N_2)W_{N_1}^{n_1k_1} \\ G(n_2,k_1) = F(n_2,k_1).W_N^{n_2k_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(k) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} G(n_2,k_1)W_{N_2}^{n_2k_2}}$$

Các bước tiến hành theo thuật tóan:

- Sắp xếp dữ liệu vào theo thứ tự từng cột, mảng **x**
- Tính DFT theo từng hàng mảng **x**, được $\mathbf{F(n_2,k_1)}$
- Tính mảng hệ số $\mathbf{W_N^{n_2k_1}}$
- Nhân mảng $\mathbf{F(n_2,k_1)}$ với $\mathbf{W_N^{n_2k_1}}$, được $\mathbf{G(n_2,k_1)}$
- Tính DFT theo từng cột mảng $\mathbf{G(n_2,k_1)}$, được **X(k)**
- Đọc dữ liệu ra theo thứ tự từng hàng **X(k)**.

Ví dụ 4.4.3: Nêu các bước tính và vẽ lưu đồ thuật tóan FFT dãy x(n) với $N=N_1N_2=12$, chọn $N_1=3$ và $N_2=4$

- **Sắp xếp dữ liệu vào theo thứ tự từng cột như bảng:**

n_2 \ n_1	0	1	2
0	**x(0)**	**x(4)**	**x(8)**
1	**x(1)**	**x(5)**	**x(9)**
2	**x(2)**	**x(6)**	**x(10)**
3	**x(3)**	**x(7)**	**x(11)**

- Tính DFT theo từng hàng mảng x, được $F(n_2,k_1)$:

$$F(n_2,k_1)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2+n_1N_2)W_{N_1}^{n_1k_1}$$

$n_2 \backslash k_1$	0	1	2
0	**F(0,0)**	**F(0,1)**	**F(0,2)**
1	**F(1,0)**	**F(1,1)**	**F(1,2)**
2	**F(2,0)**	**F(2,1)**	**F(2,2)**
3	**F(3,0)**	**F(3,1)**	**F(3,2)**

- **Tính mảng hệ số $W_N^{n_2 k_1}$**

$n_2 \backslash k_1$	0	1	2
0	W_N^0	W_N^0	W_N^0
1	W_N^0	W_N^1	W_N^2
2	W_N^0	W_N^2	W_N^4
3	W_N^0	W_N^3	W_N^6

- Nhân các phần tử mảng $F(n_2,k_1)$ với các hệ số của mảng W_N^{n2k1} tương ứng, được $G(n_2,k_1)$:

Phần tử: $\mathbf{G(n_i,k_j) = F(n_i,k_j).\ W_N^{n_i k_j}}$

n_2 \ k_1	0	1	2
0	**G(0,0)**	**G(0,1)**	**G(0,2)**
1	**G(1,0)**	**G(1,1)**	**G(1,2)**
2	**G(2,0)**	**G(2,1)**	**G(2,2)**
3	**G(3,0)**	**G(3,1)**	**G(3,2)**

- **Tính DFT theo từng cột mảng $G(n_2,k_1)$, được $X(k)$:**

$$X(k) = X(k_1 + N_1 k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} G(n_2,k_1) W_{N_2}^{n_2 k_2}$$

$k_2 \backslash k_1$	0	1	2
0	**X(0)**	**X(1)**	**X(2)**
1	**X(3)**	**X(4)**	**X(5)**
2	**X(6)**	**X(7)**	**X(8)**
3	**X(9)**	**X(10)**	**X(11)**

- Đọc dữ liệu ra theo thứ tự từng hàng **X(k)**

- **Lưu đồ FFT dãy x(n) $N=N_1N_2$, với $N_1=3$, $N_2=4$:**