BÀI TOÁN TỒN TẠI

Lý thuyết tổ hợp

Nội dung

- Một số bài toàn tồn tại tổ hợp
- Phương pháp phản chứng
- Nguyên lý Dirichlet

Một số bài toàn tồn tại tổ hợp

Bài toán về 36 sĩ quan

- Có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn, mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: thiếu uý, trung uý, thượng uý, đại uý, thiếu tá, trung tá về tham gia duyệt binh ở sư đoàn bộ.
- Hỏi rằng, có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi hàng ngang cũng như mỗi hàng dọc đều có đại diện của cả sáu trung đoàn và của 6 cấp bậc.

Bài toán về 36 sĩ quan (tt)

- A, B, C, D, E, F: các trung đoàn
- a, b, c, d, e, f: các cấp bậc.

Một lời giải với n =4

Ab	Dd	Ba	Cc
Bc	Ca	Ad	Db
Cd	Bb	Dc	Aa
Da	Ac	Cb	Bd

Một lời giải với n = 5

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee
Cd	De	Ed	Ab	Bc
Eb	Ac	Bd	Ce	Da
Be	Ca	Db	Ec	Ad
Dc	Ed	Ae	Ba	Cb

Bài toán về 36 sĩ quan (tt)

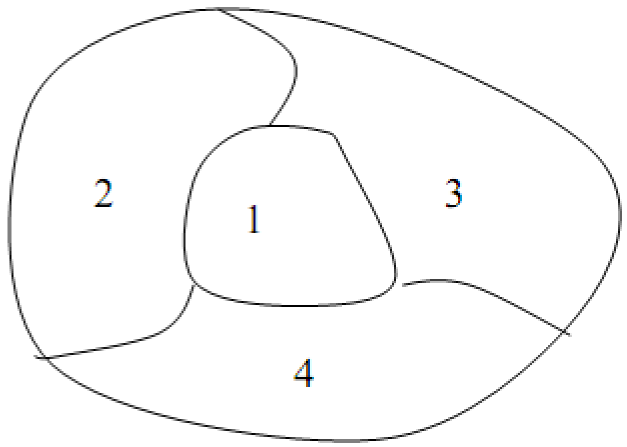
- Euler căn cứ vào sự không tồn tại lời giải khi n=2 và n = 6
  - Đề ra giả thuyết tổng quát hơn là **không tồn tại hình vuông trực giao cấp n=4k + 2**.
  - Giả thuyết này đã tồn tại hai thế kỷ.
- Năm 1960, ba nhà toán học Mỹ là Bore, Parker, Srikanda mới chỉ ra được một lời giải với n = 10
  - và sau đó chỉ ra phương pháp xây dựng hình vuông trực giao cho mọi **n = 4k + 2 với k > 1**.

Bài toán 4 màu

- Chứng minh rằng mọi bản đồ đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có hai nước láng giềng nào lại bị tô bởi cùng một màu.
- Trong đó,
  – mỗi nước trên bản đồ được coi là một vùng liên thông,
  – hai nước được gọi là láng giềng nếu chúng có chung đường biên giới là một đường liên tục.

Bài toán 4 màu (tt)

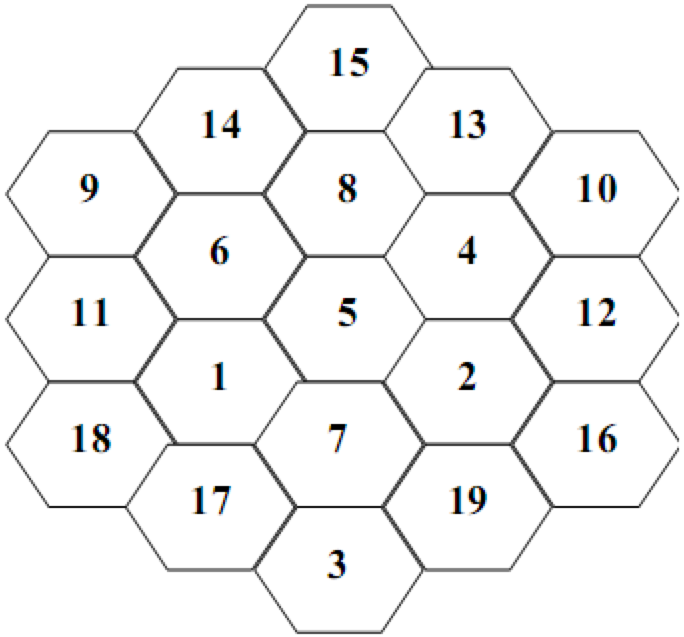
- Năm 1850 từ một lái buôn người Anh là Gazri khi tô bản đồ hành chính nước Anh đã cố gắng chứng minh rằng nó có thể tô bằng 4 màu.
- Năm 1976 hai nhà toán học Mỹ là K. Appel và W. Haken mới chứng minh được nó nhờ máy tính điện tử.



Bản đồ tô bởi ít nhất bốn màu

Hình lục giác thần bí

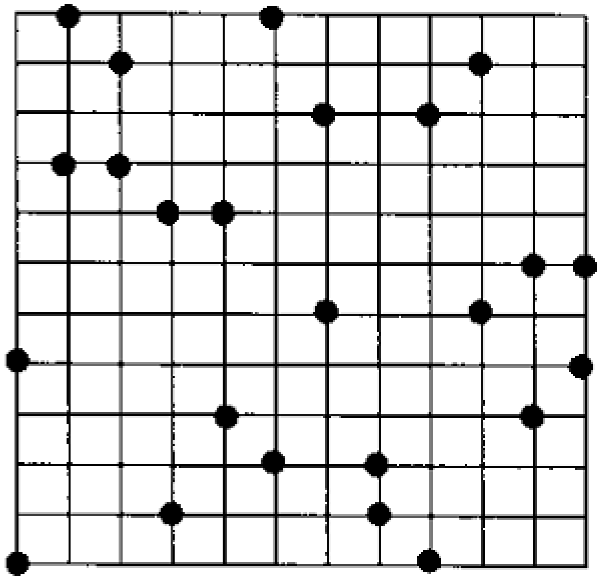
- Trên 19 ô lục giác (như hình) hãy điền các số từ 1 đến 19 sao cho tổng theo 6 hướng của lục giác là bằng nhau (và đều bằng 38).



Lời giải duy nhất

Bài toán chọn 2n điểm trên lưới n x n điểm

- Cho một lưới gồm n x n điểm. Hỏi có thể chọn trong số chúng 2n điểm sao cho không có ba điểm nào được chọn là thẳng hàng?
- Hiện nay người ta mới biết được lời giải của bài toán này khi $n \leq 15$.



Một lời giải bài toán của bài toán với $n = 12$

Phương pháp phản chứng

- **Ví dụ 1**. Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng ta luôn luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép lại thành một tam giác.
- **Giải:** sắp các đoạn thẳng theo thứ tự tăng dần của độ dài $a_1, a_2, \ldots, a_7$
  - Chứng minh rằng dãy đã xếp luôn tìm được 3 đoạn mà tổng của hai đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối.
  - Giả sử không tìm được ba đoạn nào mà tổng của hai đoạn nhỏ hơn một đoạn, nghĩa là:

$$a_1 + a_2 \le a_3 \quad \Rightarrow a_3 \ge 20 \text{ (vì } a_1, a_2 \ge 10\text{)}$$

$$a_2 + a_3 \le a_4 \quad \Rightarrow a_4 \ge 30 \text{ (vì } a_2 \ge 10, a_3 \ge 20\text{)}$$

$$a_3 + a_4 \le a_5 \quad \Rightarrow a_5 \ge 50 \text{ (vì } a_3 \ge 20, a_4 \ge 30\text{)}$$

$$a_4 + a_5 \le a_6 \quad \Rightarrow a_6 \ge 80 \text{ (vì } a_4 \ge 30, a_5 \ge 50\text{)}$$

$$a_5 + a_6 \le a_7 \quad \Rightarrow a_7 \ge 130 \text{ (vì } a_5 \ge 50, a_6 \ge 80\text{)}$$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn (bài toán được giải quyết).

Phương pháp phản chứng

- **Ví dụ 2**. Các đỉnh của một thập giác đều được đánh số bởi các số nguyên 0, 1, . . , 9 một cách tuỳ ý. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh liên tiếp có tổng các số là lớn hơn 13.
- **Giải:** Gọi $x_1, x_2, . ., x_{10}$ là các số gán cho các đỉnh của thập giác đều.
  - Giả sử ngược lại ta không tìm được 3 đỉnh liên tiếp nào thoả mãn khẳng định trên. Khi đó:

$$k_1 = x_1 + x_2 + x_3 \le 13 \qquad k_6 = x_6 + x_7 + x_8 \le 13$$
$$k_2 = x_2 + x_3 + x_4 \le 13 \qquad k_7 = x_7 + x_8 + x_9 \le 13$$
$$k_3 = x_3 + x_4 + x_5 \le 13 \qquad k_8 = x_8 + x_9 + x_{10} \le 13$$
$$k_4 = x4 + x5 + x6 \le 13 \qquad k_9 = x_9 + x_{10} + x_1 \le 13$$
$$k_5 = x_5 + x_6 + x_7 \le 13 \qquad k_{10} = x_{10} + x_1 + x_2 \le 13$$

$$\Rightarrow 130 \ge k_1 + k_2 + . . . + k_{10} = 3\,(x_1 + + x_2 + . . . + x_{10})$$
$$= 3\,(0 + 1 + 2 + . . . + 9)$$
$$= 135$$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn. Khẳng định chứng minh.

Nguyên lý Dirichlet

- Nếu đem xếp nhiều hơn ***n*** đối tượng vào ***n*** hộp thì luôn tìm được một cái hộp chứa *không ít hơn 2* đối tượng.

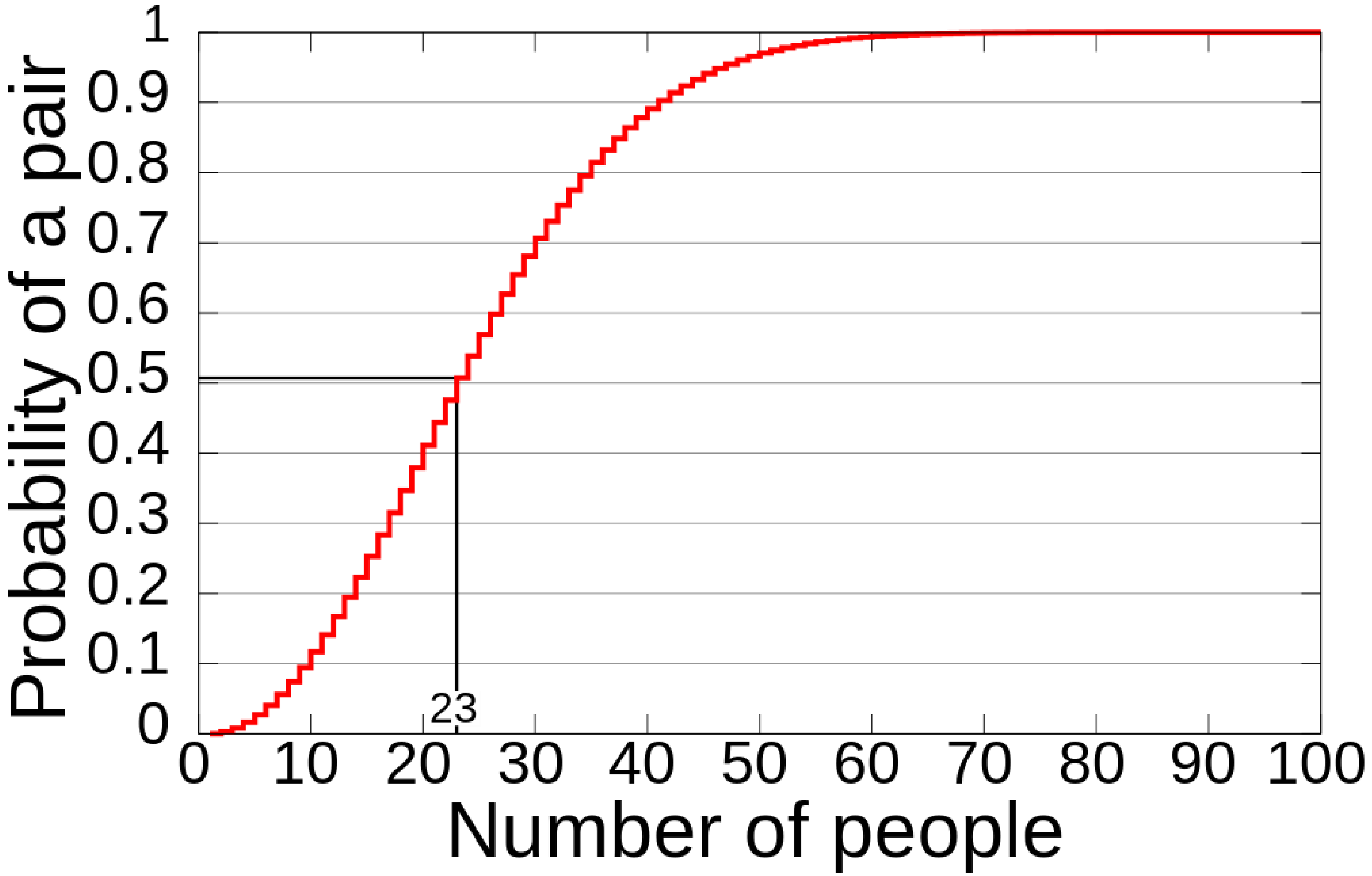
- **Ví dụ 1**. Trong bất kỳ một nhóm có 367 người thế nào cũng có ít nhất hai người có cùng ngày sinh.
- **Ví dụ 2**. Trong bất kỳ 27 từ tiếng Anh nào cũng đều có ít nhất hai từ cùng bắt đầu bằng một chữ cái.
- **Ví dụ 3**. Bài thi các môn học cho sinh viên được chấm theo thang điểm 100. Hỏi lớp phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để có ít nhất hai sinh viên được nhận cùng một điểm.

Nguyên lý Dirichlet **tổng quát**

- Nếu đem xếp **n** đối tượng vào ***k*** hộp thì luôn tìm được một hộp **chứa ít nhất** $\lceil$**n/k**$\rceil$ đối tượng.

- **Ví dụ 4**. Trong 100 người có ít nhất 9 người sinh nhật cùng một tháng.
- **Ví dụ 5**. Có 5 loại học bổng khác nhau để phát cho sinh viên. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn có 6 người được nhận học bổng như nhau.
- **Ví dụ 6**. Biển số xe máy phân khối lớn gồm 7 ký tự NN-NNN-XX. Trong đó 2 ký tư đầu là mã địa danh (0-9), 3 ký tự sau là số hiệu xe (0-9), 2 ký tự cuối là mã đăng ký (A-Z). Hỏi để có 2 triệu biển số xe máy khác nhau thì cần ít nhất bao nhiêu mã địa danh khác nhau?

Nghịch lý ngày sinh



Bài tập 1

- Trong mặt phẳng có 6 điểm được nối với nhau từng đôi một bởi các cung màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 điểm sao cho các cung nối chúng cùng một màu (tạo thành tam giác xanh hoặc đỏ).

Bài tập 2

- Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên)

Bài tập 3

- Trong một lưới ô vuông kích thước 5x5, người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị −1,0−1,0 hoặc 11, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng ; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.