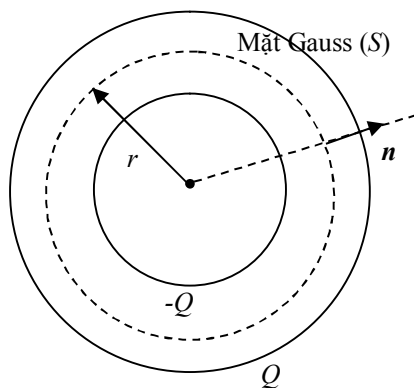


Bài 1 – Định luật Gauss

Hai vỏ cầu đồng tâm, tích điện đều, có điện tích $-Q$ và $+Q$, bán kính a và b . Hãy xác định điện trường theo khoảng cách tính từ tâm của hệ.



Trả lời:

Hệ có tính đối xứng cầu, vì thế chúng ta nghĩ ngay đến việc dùng định luật Gauss để xác định điện trường. Một điện trường có tính đối xứng cầu phải có những đặc điểm sau:

* Đường sức là các đường thẳng đi qua tâm đối xứng, ở đây là tâm chung của hai vỏ cầu tích điện.

* Trên một mặt cầu có tâm đặt tại tâm đối xứng thì điện trường có độ lớn không đổi. Hay nói cách khác thì độ lớn của điện trường E chỉ phụ thuộc vào khoảng cách r tính từ tâm của hệ.

Chọn mặt Gauss là mặt cầu có tâm đặt tại tâm đối xứng của hệ. Điện thông qua mặt Gauss (S) có bán kính r sẽ là:

$$\Phi_S = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_n \oint_{(S)} dS = E_n 4\pi r^2$$

Trong đó E_n là hình chiếu của điện trường trên phương pháp tuyến của mặt cầu (S). Tại sao chúng ta có thể đưa E_n ra ngoài tích phân theo mặt cầu?

Do đường sức điện trường cùng phương với pháp tuyến trên (S) nên $E_n = \pm E$, với E là độ lớn của điện trường. Vì E không đổi trên mặt cầu nên E_n cũng thế, và có thể được đưa ra ngoài tích phân.

Định luật Gauss cho ta:

$$\Phi_S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Với Q_{int} là điện tích chứa bên trong mặt Gauss (S). Đồng nhất hai biểu thức vừa rồi của điện thông qua mặt Gauss, ta suy ra:

$$E_n = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E} = kQ_{\text{int}} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Điện trường của một hệ đối xứng cầu có dạng giống như điện trường của một điện tích điểm Q_{int} đặt tại tâm của hệ. Với Q_{int} là điện tích toàn phần bên trong mặt cầu bán kính r .

Ta có ba trường hợp:

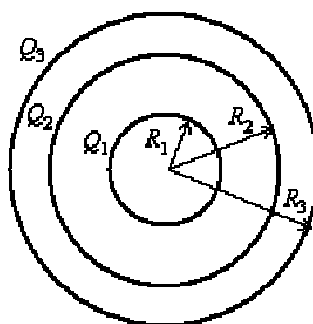
$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} 0 & r < a \\ -Q & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Vậy:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ -kQ \frac{\vec{r}}{r^3} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Bài 2 – Vật dẫn cân bằng, điện thế

Ba vỏ cầu dẫn điện mỏng, đồng tâm có bán kính và điện tích toàn phần như trên hình vẽ. Điện thế ở vô cùng là bằng không.



$R_1 = 2 \text{ cm}$
 $R_2 = 5 \text{ cm}$
 $R_3 = 7 \text{ cm}$
 $Q_1 = +3 \mu\text{C}$
 $Q_2 = +3 \mu\text{C}$
 $Q_3 = -5 \mu\text{C}$

- Tính điện thế trên vỏ cầu thứ ba.
- Tính hiệu điện thế $V_1 - V_2$ giữa vỏ cầu 1 và vỏ cầu 2.
- Tìm điện tích toàn phần ở trên mặt ngoài của vỏ cầu 2.
- Bây giờ nối liền vỏ cầu 1 và 2 bằng một dây dẫn mảnh để cho điện tích dịch chuyển tự do giữa chúng. Sau khi cân bằng, điện tích toàn phần trên vỏ cầu 2 là bao nhiêu?

Trả lời:

(a) Trước hết, hãy nhớ một tính chất quan trọng của vật dẫn cân bằng tĩnh điện (vật dẫn được gọi là cân bằng tĩnh điện khi các điện tích của nó thời không chuyển động thành dòng nữa):

Vật dẫn cân bằng tĩnh điện là một vật đẳng thế. Điện trường trong vật dẫn cân bằng tĩnh điện thì bằng không.

Thông thường thì điện thế tại các vị trí khác nhau trên một vật có giá trị khác nhau. Nhưng đối với vật dẫn cân bằng thì điện thế bằng nhau tại mọi vị trí trên nó. Vì vậy người ta có thể nói tới *điện thế của cả vật dẫn*, và để tính nó chúng ta chỉ cần tính điện thế tại một *điểm M bất kỳ* trên vật dẫn là đủ.

Điện thế tại điểm M được xác định bởi:

$$V_M = \int_M^{M_0} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

với M_0 là gốc tính điện thế. Như chúng ta đã biết, tích phân trên được thực hiện theo một *đường cong bất kỳ* nối liền M và M_0 , với $d\vec{r}$ hướng theo chiều dịch chuyển từ M tới M_0 .

Ở đây ta chọn gốc điện thế M_0 là ở vô cùng, còn M là một điểm trên mặt ngoài của vỏ cầu bán kính R_3 . Đường tích phân là đường thẳng đi qua M và tâm của hệ, kéo dài ra tới vô cùng.

Lưu ý rằng dù vỏ cầu là mỏng thì nó cũng bao gồm hai mặt có bán kính xấp xỉ nhau: mặt trong và mặt ngoài. Tại sao ta không chọn M ở giữa hai mặt hay nằm trên mặt trong của vỏ cầu? Khi ấy đường tích phân sẽ có thêm một đoạn nhỏ đi bên trong vỏ cầu (tức là giữa hai mặt trong và ngoài). Theo tính chất của vật dẫn cân bằng thì điện trường bên trong vỏ cầu là bằng không và sẽ không có đóng góp gì vào tích phân trên.

Dọc theo đường tích phân này điện trường có dạng (xem bài 1):

$$\vec{E} = kQ_{\text{int}} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (r \geq R_3)$$

với Q_{int} là điện tích toàn phần bên trong mặt cầu bán kính r . Vì không còn điện tích nào khác ngoài điện tích trên ba vỏ cầu nên với mọi $r \geq R_3$ Q_{int} chỉ có một giá trị:

$$Q_{\text{int}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (r \geq R_3)$$

Như vậy điện thế trên vỏ cầu thứ ba là:

$$V_3 = \int_M^{M_0} kQ_{\text{int}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = kQ_{\text{int}} \int_{R_3}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{kQ_{\text{int}}}{R_3}$$

Hay:

$$V_3 = k \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{R_3}$$

Áp dụng bằng số ta có:

$$V_3 = 1,29 \times 10^5 \text{ V}$$

(b) Hiệu điện thế giữa hai điểm M_1 và M_2 được xác định theo công thức:

$$V_{M_1} - V_{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Để tính hiệu thế giữa hai vỏ cầu 1 và 2, ta chọn M_1 là một điểm *trên mặt ngoài* của vỏ cầu thứ nhất, còn M_2 là một điểm *trên mặt trong* của vỏ cầu thứ hai. Sở dĩ chúng được chọn như thế là vì điện trường bên trong các vỏ cầu bằng không, như đã phân tích trong câu (a). Đường tích phân cũng là đường qua tâm, đi từ M_1 tới M_2 .

Điện trường dọc theo đường tích phân trên là:

$$\vec{E} = kQ_{\text{int}} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

Chính vì đường tích phân dừng lại ở ngay mặt trong của vỏ cầu thứ hai nên Q_{int} chỉ bao gồm điện tích của vỏ cầu thứ nhất:

$$Q_{\text{int}} = Q_1 \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

Suy ra hiệu thế giữa hai vỏ cầu 1 và 2:

$$V_1 - V_2 = kQ_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = kQ_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Áp dụng bằng số:

$$V_1 - V_2 = 8,1 \times 10^5 \text{ V}$$

(c) Chúng ta hãy ghi nhận thêm một tính chất nữa của vật dẫn cân bằng:

Điện tích của một vật dẫn cân bằng chỉ tập trung trên mặt ngoài của nó. Khi vật dẫn là rỗng cũng thế, mặt bên trong của nó không hề tích điện. Mặt bên trong của một vật dẫn rỗng chỉ tích điện do điện hưởng, khi ta đặt trong phần rỗng một điện tích nào đó.

Vỏ cầu 2 là một vật dẫn rỗng, trong phần rỗng lại có điện tích Q_1 . Do điện hưởng nên trên mặt bên trong của vỏ có điện tích bằng $-Q_1$. Còn điện tích trên mặt ngoài sẽ bằng điện tích toàn phần Q_2 của vỏ trừ đi điện tích ở mặt trong:

$$Q_2^{ext} = Q_2 - (-Q_1) = Q_2 + Q_1$$

Áp dụng bằng số:

$$Q_2^{ext} = 6\mu C$$

(d) Khi nối hai vỏ cầu 1 và 2 bằng một dây dẫn thì cả hai tạo thành một vật dẫn cân bằng duy nhất. Theo tính chất của vật dẫn cân bằng thì toàn bộ điện tích sẽ tập trung ở mặt ngoài, tức là mặt ngoài của vỏ cầu 2. Do đó điện tích toàn phần của vỏ cầu 2 là:

$$Q'_2 = Q_1 + Q_2 = 6\mu C$$

Bài 3 – Vật dẫn cân bằng

Hai quả cầu kim loại bán kính $a = 5\text{ cm}$ và $b = 2\text{ cm}$ được đặt cách xa nhau một khoảng lớn hơn nhiều so với a , chúng được nối với nhau bằng một dây dẫn nhỏ. Lúc đầu hai quả cầu không tích điện và công tắc trên dây nối được mở. Sau đó người ta chuyển một điện tích $Q = 70 \times 10^{-9}\text{ C}$ lên một trong hai quả cầu rồi đóng công tắc lại. Sau khi hai quả cầu đạt cân bằng tĩnh điện, tính điện tích Q_a và Q_b của chúng.

Trả lời:

Sau khi nối thì hai quả cầu tạo nên một vật dẫn cân bằng, điện tích Q sẽ phân bố trên bề mặt của chúng, do đó:

$$Q_a + Q_b = Q \quad (1)$$

Vì hai quả cầu ở cách xa nhau nên hiện tượng điện hưởng là không đáng kể, có thể coi chúng như hai quả cầu cô lập. Như vậy chúng có điện thế chung là:

$$V = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r_a} = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

Suy ra:

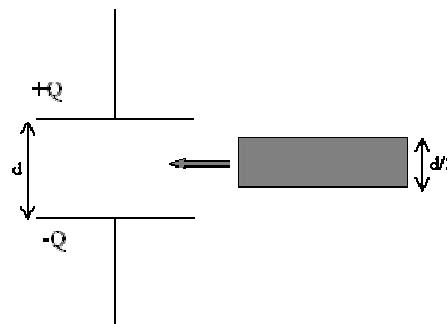
$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{r_a}{r_b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:

$$Q_a = 50 \times 10^{-9}\text{ C} \quad Q_b = 20 \times 10^{-9}\text{ C}$$

Bài 4 – Tụ điện phẳng

Khi đưa một bản kim loại không tích điện vào giữa hai bản của một tụ điện phẳng cô lập như trên hình vẽ, hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện sẽ thay đổi như thế nào?



Trả lời:

Chúng ta nhắc lại những tính chất sau đây của một tụ điện phẳng:

Điện trường giữa hai bản là đều, vuông góc với hai bản, hướng từ bản dương sang bản âm, có độ lớn cho bởi:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

trong đó σ là mật độ điện tích trên bản dương.

Chọn A và B là hai điểm nằm trên đường thẳng vuông góc với hai bản tụ điện, với A thuộc bản dương và B thuộc bản âm. Hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện cũng chính là hiệu thế giữa A và B:

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

trong đó ta chọn đường tích phân là đường AB.

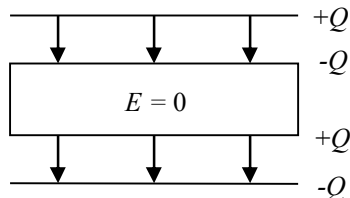
Trước khi đưa bản kim loại vào giữa hai bản tụ điện, do điện trường là đều và cùng chiều với đường tích phân, ta có:

$$\Delta V = \vec{E} \cdot \vec{AB} = Ed$$

Sau khi đưa bản kim loại vào giữa hai bản tụ điện, do hiện tượng điện hưởng nên ở mặt trên của bản kim loại có điện tích $-Q$, và ở mặt dưới có điện tích $+Q$. Vùng giữa hai bản tụ điện bây giờ được chia làm ba vùng. Trong vùng thứ nhất và thứ ba là hai tụ điện phẳng có điện tích không đổi $+Q$, do đó điện trường trong hai vùng này vẫn là E . Còn vùng thứ hai là phần bên trong của bản kim loại thì có điện trường bằng không. Vậy hiệu thế giữa hai bản tụ điện bây giờ là:

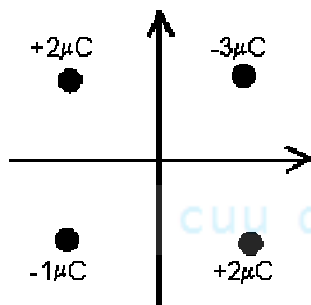
$$\Delta V' = E \frac{d}{4} + (0) \frac{d}{2} + E \frac{d}{4} = E \frac{d}{2}$$

Sau khi đưa bản kim loại vào thì hiệu thế giữa hai bản tụ điện giảm đi.



Bài 5 – Năng lượng tĩnh điện

Bốn điện tích được đặt ở các đỉnh của một hình vuông. Tâm của hình vuông trùng với gốc tọa độ trong mặt phẳng xy. Để đưa một điện tích thử dương từ vô cùng vào đến gốc tọa độ chúng ta phải thực hiện một công W bằng bao nhiêu?



Trả lời:

Do lực tĩnh điện tuân theo nguyên lý chồng chất, nên ta có thể tính công thực hiện khi chỉ có điện tích thứ nhất, thứ hai ... rồi cộng lại để tìm công toàn phần.

Ta đã biết, công thực hiện khi đưa điện tích q từ vô cùng đến vị trí cách điện tích q_1 một khoảng a chính bằng năng lượng tương tác tĩnh điện giữa chúng ở khoảng cách đó:

$$W_1 = k \frac{q_1 q}{a}$$

Trong trường hợp này a là một nửa đường chéo của hình vuông. Ta cũng có biểu thức tương tự đối với các công còn lại.

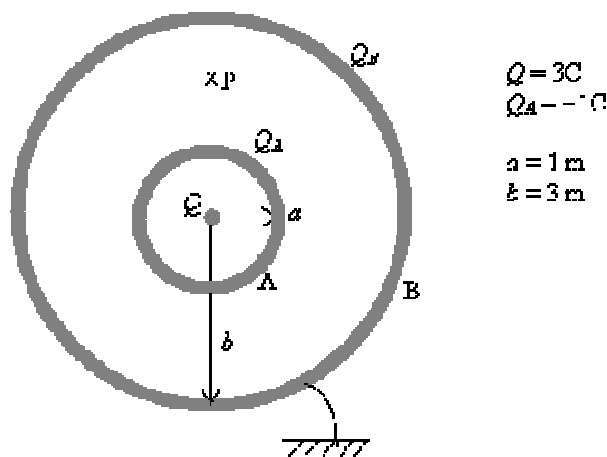
Công toàn phần thực hiện khi đưa q từ vô cùng đến tâm của hình vuông sẽ là:

$$W = k \frac{q}{a} (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = k \frac{q}{a} (2 - 3 + 2 - 1) = 0$$

Bài 6 – Vật dẫn cân bằng, điện thế

Một điện tích $Q = 3 \text{ C}$ được đặt ở tâm của hai vỏ cầu dẫn điện đồng tâm. Vỏ cầu bên ngoài có bán kính $b = 3 \text{ m}$ được nối đất. Vỏ cầu bên trong có bán kính $a = 1 \text{ m}$ và điện tích toàn phần $Q_A = -1 \text{ C}$. Xét điểm P ở cách tâm một khoảng 2 m .

- Tìm điện tích ở mặt ngoài của vỏ cầu A.
- Tìm điện tích toàn phần trên vỏ cầu B.
- Tìm hiệu điện thế $\Delta V = V_A - V_B$ giữa hai vỏ cầu.



Trả lời:

- Do điện hưởng, điện tích trên mặt trong của vỏ cầu A là $-Q$. Vậy điện tích trên mặt ngoài của vỏ cầu A là:

$$Q_A^{ext} = Q_A - (-Q) = Q_A + Q = 2 \text{ C}$$

- Mặt ngoài của vỏ cầu B không tích điện vì được nối đất. Vì vậy điện tích toàn phần của vỏ cầu B bằng chính điện tích trên mặt trong của nó. Mặt khác, do điện hưởng, điện tích ở mặt trong của B bằng và ngược dấu với điện tích trên mặt ngoài của A. Vậy:

$$Q_B = -Q_A^{ext} = -2 \text{ C}$$

- Làm tương tự như trong câu (b) của bài 2, ta có:

$$\Delta V = V_A - V_B = k Q_{int} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$Q_{int} = Q + Q_A$$

$$\Delta V = 1,2 \times 10^{10} \text{ V}$$