Hàm sinh

Trần Vĩnh Đức

HUST

Ngày 26 tháng 4 năm 2016

Nội dung

Đếm và đa thức

Định nghĩa hàm sinh

Các phép toán trên hàm sinh

Một bài toán đếm

Ký hiệu hình thức

- Có 2 quả táo, 3 quả mận, và 4 quả đào.
- Ta ký hiệu

$$T := \text{“lấy một quả táo”}$$
$$M := \text{“lấy một quả mận”}$$
$$D := \text{“lấy một quả đào”}.$$

- Lấy 1 quả táo, 2 quả mận, và 3 quả đào:

$$TMMDDD = TM^2D^3.$$

- Lấy 1 quả táo, 1 quả mận, và 1 quả đào hoặc lấy 1 quả táo, 1 quả đào, và 2 quả mận”:

$$TMD + TMD^2.$$

Câu hỏi

Xâu sau đây biểu diễn những lựa chọn gì?

$$TMD + TMD^2 + TM^2D + T^2MD + TM^2D^2 + \cdots + T^2M^3D^4$$
$$= (T + T^2)(M + M^2 + M^3)(D + D^2 + D^3 + D^4).$$

Lời giải

Đây như một *chuỗi hình thức* mô tả mọi khả năng chọn trong số 2 quả táo, 3 quả mận, và 4 quả đào, mỗi loại ít nhất một quả.

Bài tập

Có bao nhiêu cách chọn 6 quả trong số 2 quả táo, 3 quả mận, và 4 quả đào, mỗi loại ít nhất một quả?

Lời giải

- Ta chỉ cần thay thế mỗi T, M, D bằng biến hình thức x trong chuỗi

$$(T + T^2)(M + M^2 + M^3)(D + D^2 + D^3 + D^4).$$

- Vậy mọi số hạng có số mũ 6 ứng với số lần x^6 xuất hiện.
- Hệ số của x^6 chính là số cách chọn 6 quả.

Đa thức và đếm

- Khi thay thế T, M, D bằng x thì hệ số của x^k chính là số cách chọn đúng k quả.
- Ta có

$$
\begin{aligned}
&(x+x^2)(x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3+x^4)\\
&= x^3(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)\\
&= x^3(1+2x+2x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)\\
&= x^3+3x^4+5x^5+6x^6+5x^7+3x^8+x^9.
\end{aligned}
$$

- Vậy có 6 cách lựa chọn 6 quả, 5 cách chọn 7 quả ....

Câu hỏi

- Giả sử một quả mận có 20 calo, một quả đào có 40 calo, và một quả táo có 60 calo.
- Nếu ta thay thế

$$T \to x^{60}, \qquad M \to x^{40} \qquad D \to x^{20}$$

trong chuỗi hình thức

$$(T + T^2)(M + M^2 + M^3)(D + D^2 + D^3 + D^4).$$

thì hệ số của x^n là gì?

Lời giải

- Ta thay thế

$$T \to x^{60}, \qquad M \to x^{40} \qquad D \to x^{20}$$

- Vậy thì hệ số của x^n của đa thức là số cách chọn quả để có n calo.
- Vì khi chọn $T^i M^j D^k$ ta được $60i + 40j + 20k$ calo.

Ví dụ

- Từ đa thức

$$
\begin{aligned}
&(x^{60}+x^{120})(x^{40}+x^{80}+x^{120})(x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})\\
&\quad = x^{120}(1+x^{20}+2x^{40}+3x^{60}+3x^{80}+4x^{100}+3x^{120}\\
&\qquad\qquad +3x^{140}+2x^{160}+x^{180}+x^{200})\\
&\quad = x^{120}+x^{140}+2x^{160}+3x^{180}+\mathbf{3x^{200}}+4x^{220}+3x^{240}\\
&\qquad\qquad +3x^{260}+2x^{280}+x^{300}+x^{320}
\end{aligned}
$$

- Ta thấy có 3 cách chọn quả để có **200** calo.

Bài tập

- Biết rằng quả táo giá 60 đồng, quả mận giá 40 đồng, và đào giá 20 đồng.
- Có bao nhiêu cách chọn các quả giá 200 đồng, có thể có loại quả không được chọn?

Bài tập

Hãy tìm đa thức có hệ số x^k là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = k.$$

Câu hỏi

Ta có thể dùng kỹ thuật mô tả ở phần trước để lựa chọn các quả táo, đào và mận nhưng không hạn chế bao nhiêu quả cần lấy.

$$T^0M^0D^0 + TM^0D^0 + \cdots + TMD + TMD^2 + \cdots + T^iM^jD^k + \cdots$$

Tính toán hình thức

- Việc chọn không, một,... tới một số bất kỳ táo (mận, đào) có thể biểu diễn một cách hình thức là

$$T^0 + T^1 + T^2 + \cdots + T^i + \cdots$$
$$M^0 + M^1 + M^2 + \cdots + M^j + \cdots$$
$$D^0 + D^1 + D^2 + \cdots + D^k + \cdots$$

- Việc chọn táo, đào, mận với số lượng tùy ý có thể viết dưới dạng tích

$$\left(T^0 + T^1 + \cdots\right)\left(M^0 + M^1 + \cdots\right)\left(D^0 + D^1 + \cdots\right).$$

Ví dụ

Nếu thay thế T, M, D bởi x thì hệ số của x^n trong tích của ba chuỗi vô hạn sau chính là số cách chọn đúng n quả.

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^i + \cdots)^3.$$

Nội dung

Định nghĩa

Hàm sinh của dãy số $\langle g_0, g_1, g_2, \cdots \rangle$ là chuỗi vô hạn

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots .$$

Ta sử dụng ký hiệu mũi tên hai phía để chỉ tương ứng giữa một dãy số và hàm sinh của nó như sau:

$$\langle g_0, g_1, g_2, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots .$$

Định nghĩa

Ta ký hiệu $[x^n]G(x)$ là hệ số của x^n trong hàm sinh

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots .$$

Có nghĩa rằng $[x^n]G(x) = g_n$.

Ví dụ

Dưới đây là một vài dãy số và hàm sinh của chúng:

$$
\begin{aligned}
\langle 0, 0, 0, 0, \cdots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 0 \\
\langle 1, 0, 0, 0, \cdots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 1 \\
\langle 3, 2, 1, 0, \cdots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad 3 + 2x + 1x^2 + 0x^3 + \cdots = 3 + 2x + x^2
\end{aligned}
$$

Ví dụ

- Hàm sinh cho dãy vô hạn $\langle 1, 1, 1, \cdots \rangle$ là chuỗi hình học

$$G(x) := 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Ta có

$$\begin{array}{rcl} G(x) & = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ -xG(x) & = & \quad - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^n - \cdots \\ \hline G(x) - xG(x) & = & 1 \end{array}$$

- Vậy hàm sinh của dãy $1, 1, \ldots$ là

$$\frac{1}{1-x} = G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Bài tập

Hãy tìm công thức đóng cho hàm sinh của các dãy sau:

1. $\langle\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 6,\ -6,\ 6,\ -6,\ 6,\ \cdots\ \rangle$
2. $\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots \rangle$
3. $\langle 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \cdots \rangle$

Bài tập

Chứng minh rằng hàm sinh của dãy $\langle 1, 2, 3, \cdots \rangle$ là

$$\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Đạo hàm của chuỗi

Lời giải

- Lấy đạo hàm của chuỗi

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

ta được

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- Đây chính là hàm sinh của dãy

$$\langle 1, 2, 3, 4, \cdots \rangle.$$

Dịch phải bằng cách nhân với x

Xét hàm sinh

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots .$$

Vậy thì

$$xG(x) = 0 + g_0 x + g_1 x^2 + g_2 x^3 + \cdots$$

Có nghĩa rằng

$$[x^{n-1}]G(x) = [x^n]xG(x).$$

Bài tập

Tìm hàm sinh của dãy

$$\langle 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle$$

Lời giải

- Hàm sinh của dãy số $\langle 1, 2, 3, \cdots \rangle$ là

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- Vậy thì

$$xG(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots .$$

là hàm sinh của dãy $\langle 0, 1, 2, 3, \cdots \rangle$.

Bài tập

$$\langle 1, -1, 1, -1, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \quad = \quad \frac{1}{1+x}$$

Bài tập

$$\langle 1, a, a^2, a^3, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots \quad = \quad \frac{1}{1 - ax}$$

Bài tập

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots \quad = \quad \frac{1}{1 - x^2}$$

Nội dung

Đếm và đa thức

Định nghĩa hàm sinh

Các phép toán trên hàm sinh

Một bài toán đếm

Luật (nhân với hằng số)

Nếu

$$\langle f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad F(x),$$

thì

$$\langle cf_0,\ cf_1,\ cf_2,\ \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad c \cdot F(x).$$

Ví dụ

Ta biết rằng

$$\langle 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots \rangle \longleftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2}$$

Nhân hàm sinh này với 2 ta được

$$\frac{2}{1 - x^2} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \cdots$$

sinh dãy

$$\langle 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ \cdots \rangle$$

Luật (cộng)

Nếu

$$\begin{aligned}\langle f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad F(x),\\ \langle g_0,\ g_1,\ g_2,\ \cdots\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad G(x),\end{aligned}$$

thì

$$\langle f_0 + g_0,\ f_1 + g_1,\ f_2 + g_2,\ \cdots\rangle \quad\longleftrightarrow\quad F(x) + G(x).$$

Ý tưởng của luật cộng

$$
\begin{aligned}
\langle f_0 + g_0,\ f_1 + g_1,\ f_2 + g_2,\ \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) x^n \\
= \quad & \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) \\
= \quad & F(x) + G(x)
\end{aligned}
$$

Ví dụ

Xét hai hàm sinh:

$$
\begin{array}{rcl}
\langle 1, \quad 1, 1, \quad 1, \cdots \rangle & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1-x} \\
+ \; \langle 1, -1, 1, -1, \cdots \rangle & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1+x} \\
\hline
\langle 2, \quad 0, 2, \quad 0, \cdots \rangle & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2}{1-x^2}
\end{array}
$$

Luật (dịch phải)

Nếu $\langle f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots \rangle \longleftrightarrow F(x)$, *vậy thì*

$$\langle \underbrace{0, \cdots, 0}_{k\times}, f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots \rangle \longleftrightarrow x^k \cdot F(x).$$

Luật (đạo hàm)

Nếu

$$\langle f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots \rangle \longleftrightarrow F(x)$$

vậy thì

$$\langle f_1,\ 2f_2,\ 3f_3,\ \cdots \rangle \longleftrightarrow F'(x).$$

Bài tập

Hãy tìm hàm sinh cho dãy số bình phương hoàn hảo

$$\langle 0 \cdot 0,\ 1 \cdot 1,\ 2 \cdot 2,\ 3 \cdot 3,\ \cdots \rangle = \langle 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ \cdots \rangle.$$

Luật (tích)

Nếu

$$\langle a_0, a_1, a_2, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad A(x)$$
$$\langle b_0, b_1, b_2, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad B(x),$$

vậy thì

$$\langle c_0, c_1, c_2, \cdots \rangle \longleftrightarrow A(x) \cdot B(x),$$

trong đó

$$c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

Luật tích

	$b_0 x^0$	$b_1 x^1$	$b_2 x^2$	$b_3 x^3$	$\cdots$
$a_0 x^0$	$a_0 b_0 x^0$	$a_0 b_1 x^1$	$a_0 b_2 x^2$	$a_0 b_3 x^3$	$\cdots$
$a_1 x^1$	$a_1 b_0 x^1$	$a_1 b_1 x^2$	$a_1 b_2 x^3$	$\cdots$	
$a_2 x^2$	$a_2 b_0 x^2$	$a_2 b_1 x^3$	$\cdots$		
$a_3 x^3$	$a_3 b_0 x^3$	$\cdots$			
$\vdots$	$\cdots$				

Nội dung

Bài tập

Có bao nhiêu cách để lấy n quả thỏa mãn ba yêu cầu sau đây?

- Nhiều nhất 2 quả cam.
- Số táo là tùy ý.
- Số chuối phải chia hết cho 3.

Với $n = 4$ quả

1. 0 quả cam, 1 quả táo, 3 quả chuối
2. 0 quả cam, 4 quả táo, 0 quả chuối
3. 1 quả cam, 0 quả táo, 3 quả chuối
4. 1 quả cam, 3 quả táo, 0 quả chuối
5. 2 quả cam, 2 quả táo, 0 quả chuối

Nhiều nhất hai quả cam

Hàm sinh cho dãy số $\langle c_k \rangle$ là "Số cách chọn k quả cam trong đó có nhiều nhất hai quả cam":

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 + x + x^2 \\ &= \frac{1 - x^3}{1 - x}. \end{aligned}$$

Số táo tùy ý

Hàm sinh cho dãy số $\langle t_k \rangle$ là "Số cách chọn k quả táo":

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} t_k x^k = 1 + x + x^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Thay thế x bởi x^k

$$\frac{1}{1-x} \quad \longleftrightarrow \quad \langle 1, 1, 1, \cdots \rangle$$

$$\frac{1}{1-x^k} \quad \longleftrightarrow \quad \langle 1, \underbrace{0, 0, \cdots 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, 0, \cdots 0}_{k-1}, 1, 0, \cdots \rangle$$

Số chuối chia hết cho 3

Hàm sinh cho dãy số $\langle b_k \rangle$ là "Số cách chọn k quả chuối thỏa mãn số chuối chia hết cho 3".

$$\begin{aligned} B(x) &\longleftrightarrow \langle 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \cdots \rangle \\ B(x) &= \frac{1}{1 - x^3}. \end{aligned}$$

Câu hỏi

Liệu ta có thể dùng các hàm sinh riêng để giải bài toán ban đầu?

$$C(x) = \frac{1-x^3}{1-x} \qquad \text{(nhiều nhất hai cam)}$$

$$T(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{(số táo tùy ý)}$$

$$B(x) = \frac{1}{1-x^3} \qquad \text{(số chuối chia hết cho 3)}$$

Luật tích chập cho hàm sinh

Hàm sinh cho số cách chọn từ hợp của các tập rời nhau là tích của các hàm sinh cho số cách chọn từ mỗi tập.

Tích các hàm sinh

- Hàm sinh cho số cách chọn quả

$$\begin{aligned} C(x) \cdot T(x) \cdot B(x) &= \frac{1 - x^3}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^3} \\ &= \frac{1}{(1 - x)^2} \end{aligned}$$

- Đây chính là hàm sinh cho dãy số

$$\langle 1, 2, 3, \cdots \rangle$$

Bài tập

Có bao nhiêu cách để lấy n quả thỏa mãn ba yêu cầu sau đây?

- Nhiều nhất 2 quả cam.
- Số táo là tùy ý.
- Số chuối phải chia hết cho 3.

Lời giải

Số cách chọn n quả chính là hệ số của x^n trong $F(x)$:

$$[x^n]\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = n + 1.$$

Bài tập

Có bao nhiêu cách chọn tám thanh kẹo gồm các thanh kẹo sôcôla hoặc kẹo cafe.