

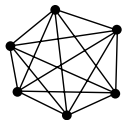
Định lý Ramsey

Trần Vĩnh Đức

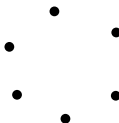
HUST

Khẳng định

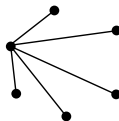
Trong số 6 người luôn có ba người đôi một *quen* nhau hoặc ba người đôi một *lạ* nhau.



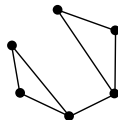
party 50 years
after graduation



lonely hearts
party



party of
admirers



meeting of two
mafia bosses

Bài tập

Hãy chứng minh rằng trong 9 người luôn có 3 người đôi một quen nhau hoặc 4 người đôi một không quen nhau.

Lý thuyết Ramsey



Lý thuyết Ramsey, theo tên của nhà toán học người Anh, Frank Plumpton Ramsey.

Hình: F. P. Ramsey (1903-1930)

Khẳng định

Trong sáu người bất kỳ luôn tồn tại ba người sao cho hoặc là họ quen nhau từng đôi một hoặc họ không quen nhau từng đôi một.

Viết lại khẳng định trên một cách ngắn gọn dùng ký hiệu "mũi tên" như sau:

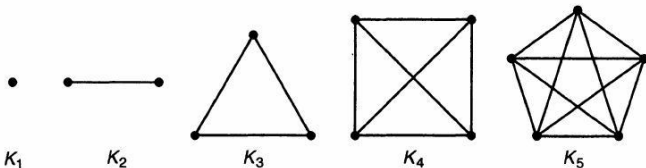
$$K_6 \rightarrow K_3, K_3$$

với ý nghĩa

- ▶ K_6 = "6 đối tượng và 15 cặp không thứ tự để thể hiện quan hệ (quen hoặc lạ) giữa các đối tượng này"
- ▶ K_3, K_3 = "Ba đối tượng quen nhau từng đôi một", "Ba đối tượng không quen nhau từng đôi một"

Ký hiệu K_n

K_n = “một tập n đối tượng và mọi cặp không thứ tự (cạnh) các đối tượng này”



Ký hiệu mũi tên

- ▶ Nếu ta xem mỗi cặp không thứ tự như một cạnh. Cặp đối tượng **quen nhau** xem như cạnh tô **màu xanh**. Cặp đối tượng **không quen nhau** như các cạnh tô **màu đỏ**.
- ▶ Vậy

$$K_6 \rightarrow K_3, K_3$$

có nghĩa là

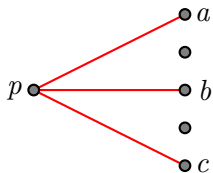
“Dù có tô xanh đỏ các cạnh của K_6 ta luôn tìm được một K_3 có toàn cạnh đỏ hoặc một K_3 toàn cạnh xanh”

Chứng minh $K_6 \rightarrow K_3, K_3$

- ▶ Xét một đối tượng p của K_6 . Vì có 5 cạnh liên quan đến p có màu đỏ hoặc xanh nên có ít nhất 3 cạnh cùng màu. Ta giả sử 3 cạnh này cùng màu đỏ. (Nếu màu xanh ta lập luận tương tự.) Có ba đối tượng a, b, c nối với p qua ba cạnh đỏ này.

- ▶ Bây giờ, nếu tồn tại một cạnh nối giữa $a - b$ hoặc $a - c$ hoặc $b - c$ có màu đỏ, vậy ta được một K_3 đỏ.

- ▶ Nếu không thì ta được K_3 xanh liên quan đến a, b, c .

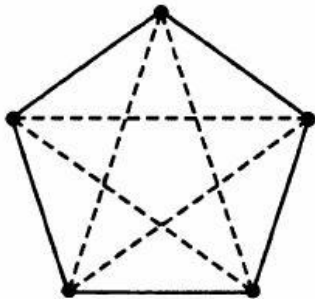


$$K_5 \not\rightarrow K_3, K_3$$

Khẳng định

$$K_5 \rightarrow K_3, K_3$$

là **sai** vì có cách tô màu cạnh K_5 không tạo ra K_3 đỏ hoặc K_3 xanh.



Câu hỏi

Giả sử $K_n \rightarrow K_a, K_b$. Giải thích tại sao $K_p \rightarrow K_a, K_b$ với mọi $p > n$.

Câu hỏi

- ▶ Chứng minh rằng $K_b \rightarrow K_2, K_b$.
- ▶ Chứng minh rằng $K_{b-1} \not\rightarrow K_2, K_b$.

Câu hỏi

Chứng minh rằng $K_{11} \rightarrow K_3, K_4$.

Định lý (Ramsey)

Với hai số nguyên $m \geq 2$ và $n \geq 2$, luôn tồn tại một số nguyên dương p sao cho

$$K_p \rightarrow K_m, K_n.$$

Cho trước số nguyên m và n , luôn có số nguyên dương p sao cho, nếu tô màu xanh hoặc đỏ lên cạnh của K_p thì luôn tìm được hoặc một K_m đỏ hoặc một K_n xanh.

Rõ ràng, với mọi $q \geq p$ ta luôn có

$$K_p \rightarrow K_m, K_n \quad \Rightarrow \quad K_q \rightarrow K_m, K_n.$$

Số Ramsey

- ▶ Số nguyên p nhỏ nhất sao cho

$$K_p \rightarrow K_m, K_n$$

gọi là *số Ramsey*.

- ▶ Số Ramsey p này được ký hiệu là $r(m, n)$.

Ví dụ

Ta có $r(3, 3) = 6$ vì

$$K_6 \rightarrow K_3, K_3 \quad \text{và} \quad K_5 \not\rightarrow K_3, K_3.$$

Câu hỏi

Giải thích tại sao ta luôn có $r(a, b) = r(b, a)$.

Bài tập

Tính các số Ramsey sau

1. $r(2, n) = r(n, 2)$

2. $r(3, 4) = r(4, 3)$

3. $r(3, 5) = r(5, 3)$

Định lý (Ramsey, dạng đơn giản)

Với hai số nguyên $m \geq 2$ và $n \geq 2$, luôn tồn tại một số nguyên dương p sao cho

$$K_p \rightarrow K_m, K_n$$

Chứng minh định lý Ramsey

- ▶ Ta chỉ ra sự tồn tại của $r(m, n)$ bằng quy nạp theo cả m và n .
- ▶ Bước cơ sở:
 - ▶ Nếu $m = 2$ thì $r(2, n) = n$,
 - ▶ nếu $n = 2$ thì $r(m, 2) = m$.

Bước quy nạp

- ▶ Giả sử rằng $m \geq 3$ và $n \geq 3$ và tồn tại cả

$$r(m, n-1) \quad \text{và} \quad r(m-1, n)$$

.

- ▶ Đặt

$$p = r(m-1, n) + r(m, n-1)$$

- ▶ Ta sẽ chỉ ra rằng $K_p \rightarrow K_m, K_n$.

Chứng minh $K_p \rightarrow K_m, K_n$

- ▶ Xét một điểm x của K_p . Đặt R_x là tập điểm nối với x bằng một cạnh màu đỏ, và B_x là tập điểm nối với x bởi một cạnh màu xanh.
- ▶ Vậy

$$\begin{aligned}|R_x| + |B_x| &= p - 1 \\ &= r(m - 1, n) + r(m, n - 1) - 1\end{aligned}$$

chỉ ra rằng

1. $|R_x| \geq r(m - 1, n)$, hoặc
2. $|B_x| \geq r(m, n - 1)$.

- ▶ Nếu $|R_x| \geq r(m-1, n)$, ta đặt

$$q = |R_x|$$

vậy $q \geq r(m-1, n)$.

- ▶ Xét K_q trên các điểm của R_x , ta thấy rằng
 - ▶ hoặc $m-1$ điểm của K_q (cũng thuộc K_p) có toàn cạnh màu đỏ. Ta có K_{m-1} đỏ, và tất cả $m-1$ điểm này đều nối với x bằng cạnh màu đỏ. Vậy ta có K_m đỏ.
 - ▶ hoặc n điểm của K_q toàn cạnh màu xanh. Vậy ta có một K_n xanh.

Lập luận tương tự với $|B_x| \geq r(m, n - 1)$. Ta kết luận bằng quy nạp rằng số $r(m, n)$ tồn tại với mọi $m, n \geq 2$.

Cận trên của số Ramsey

- ▶ Chứng minh định lý Ramsey cũng chỉ ra rằng

$$r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1) \quad \text{với } m, n \geq 3. \quad (1)$$

- ▶ Xét

$$f(m, n) = \binom{m+n-2}{m-1}.$$

Dùng đẳng thức Pascal ta được

$$\binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2}$$

Vậy ta được công thức tương tự như (1):

$$f(m, n) = f(m-1, n) + f(m, n-1).$$

Cận trên của số Ramsey (tiếp)

Vì

$$r(2, n) = n = f(2, n)$$

và

$$r(m, 2) = m = f(m, 2),$$

ta có

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-2}{n-1}$$

Một vài số Ramsey

$$r(3, 3) = 6,$$

$$r(3, 4) = r(4, 3) = 9,$$

$$r(3, 5) = r(5, 3) = 14,$$

$$r(3, 6) = r(6, 3) = 18,$$

$$r(3, 7) = r(7, 3) = 23,$$

$$r(3, 8) = r(8, 3) = 28,$$

$$r(3, 9) = r(9, 3) = 36,$$

$$40 \leq r(3, 10) = r(10, 3) \leq 43,$$

$$r(4, 4) = 18,$$

$$r(4, 5) = r(5, 4) = 25,$$

$$35 \leq r(4, 6) \leq 49,$$

$$43 \leq r(5, 5) \leq 48,$$

$$58 \leq r(5, 6) = r(6, 5) \leq 87,$$

$$102 \leq r(6, 6) \leq 165.$$

Số Ramsey có khó tính không?

Số Ramsey khá gần đây người ta tính được là $r(4, 5) = 25$. Dưới đây là thời gian tìm số này:

- ▶ 1955: Chặn trên đầu tiên cho $r(4, 5) \leq 31$.
- ▶ 1965: Chặn dưới đầu tiên và cải thiện chặn trên $25 \leq r(4, 5) \leq 30$.
- ▶ 1968: Cải thiện chặn trên $r(4, 5) \leq 29$.
- ▶ 1971: Cải thiện chặn trên $r(4, 5) \leq 28$.
- ▶ 1991: Cải thiện chặn trên $r(4, 5) \leq 27$.
- ▶ 1992: Cải thiện chặn trên $r(4, 5) \leq 26$.
- ▶ 1993: Cải thiện chặn trên $r(4, 5) \leq 25$ và chứng minh $r(4, 5) = 25$.

Năm 2017, Vigleik Angelteit và Brendan D. McKay chứng minh rằng $43 \leq r(5, 5) \leq 48$.

Tổng quát hoá

- ▶ Nếu n_1, n_2 và n_3 là ba số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng hai, vậy có tồn tại số nguyên p sao cho

$$K_p \rightarrow K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}$$

Có nghĩa rằng nếu mỗi cạnh của K_p tô bởi xanh, đỏ, hoặc vàng thì có K_{n_1} tô màu xanh hoặc có K_{n_2} tô màu vàng hoặc K_{n_3} tô màu đỏ.

- ▶ Ví dụ

$$r(3, 3, 3) = 17.$$

- ▶ Mở rộng tự nhiên cho m màu

$$K_p \rightarrow K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_m}.$$