

## Phần IV

### Hệ thức đệ quy

Biên soạn:  
TS. Nguyễn Viết Đông

1

### Tài liệu tham khảo



- [1] TS. Trần Ngọc Hội, Toán rời rạc
- [2] GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc, Nhà xuất bản giáo dục.
- [3] Nguyễn Viết Hưng's Slides

2

cuu duong than cong. com

### Định nghĩa



Một hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k là một hệ thức có dạng:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} + f_n \quad (1)$$

trong đó :

$a_k \neq 0, a_1, \dots, a_{k-1}$  là các hệ số thực  
 $\{f_n\}$  là một dãy số thực cho trước  
 $\{x_n\}$  là dãy ẩn nhận các giá trị thực.

3

### Định nghĩa



Trường hợp dãy  $f_n = 0$  với mọi n thì (1) trở thành:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} \quad (2)$$

Ta nói (2) là một hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất cấp k

4

## Nghiệm tổng quát



- Mỗi dãy  $\{x_n\}$  thỏa (1) được gọi là một nghiệm của (1).

Nhận xét rằng mỗi nghiệm  $\{x_n\}$  của (1) được hoàn toàn xác định bởi  $k$  giá trị ban đầu  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ .

- Họ dãy số  $\{x_n = x_n(C_1, C_2, \dots, C_k)\}$  phụ thuộc vào  $k$  họ tham số  $C_1, C_2, \dots, C_k$  được gọi là nghiệm tổng quát của (1) nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của (1)

5

## Nghiệm riêng

Cho  $\{x_n\}$  là nghiệm tổng quát của (1) và với mọi  $k$  giá trị ban đầu  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ , tồn tại duy nhất các giá trị của  $k$  tham số  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sao cho nghiệm  $\{x_n\}$  tương ứng thỏa:

$$x_0 = y_0, x_1 = y_1, \dots, x_{k-1} = y_{k-1} \quad (*)$$

Khi đó, nghiệm  $\{x_n\}$  tương ứng được gọi nghiệm riêng ứng với điều kiện ban đầu (\*).

6

cuu duong than cong. com

## Mục đích giải hệ thức đệ qui

*Giải một hệ thức đệ qui* là đi tìm nghiệm tổng quát của nó.

Nếu hệ thức đệ qui có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải tìm *nghiệm riêng* thỏa điều kiện ban đầu đó.

7



Fibonacci (1170-1250)

8

## Một số ví dụ

Ví dụ 1 (Dãy Fibonacci)

Bài toán: Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một đực và một cái), mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Tính  $F_n$  là số đôi thỏ có ở tháng  $n$ ?

9

## Một số ví dụ

Giải:

Tháng đầu tiên và tháng thứ 2 chỉ có một đôi thỏ. Sang tháng thứ 3 đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ, vì thế tháng này sẽ có hai đôi thỏ. Với  $n \geq 3$  ta có

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  Số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ  $n$ .

Do các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ  $n-1$  chưa đẻ con ở tháng thứ  $n$ , và ở tháng này mỗi đôi thỏ có ở tháng  $n-2$  sẽ đẻ ra được một đôi thỏ con nên số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ  $n$  chính bằng  $F_{n-2}$

10

cuu duong than cong. com

## Một số ví dụ

Như vậy việc giải bài toán Fibonacci dẫn ta tới việc khảo sát dãy số  $(F_n)$ , xác định bởi

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ với } n > 2.$$

11

## Một số ví dụ

Ví dụ 2: Một cầu thang có  $n$  bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi  $x_n$  là số cách đi hết cầu thang. Tìm một hệ thức đệ qui cho  $x_n$

12

## Một số ví dụ

Với  $n = 1$ , ta có  $x_1 = 1$ .

Với  $n = 2$ , ta có  $x_2 = 2$

Với  $n > 2$ , để khảo sát  $x_n$  ta chia thành hai trường hợp loại trừ lẫn nhau:

Trường hợp 1: Bước đầu tiên gồm 1 bậc.

Khi đó, cầu thang còn  $n-1$  bậc nên số cách đi hết cầu thang trong trường hợp này là  $x_{n-1}$ .

13

## Ví dụ

Trường hợp 2: Bước đầu tiên gồm 2 bậc.

Khi đó, cầu thang còn  $n-2$  bậc nên số cách đi hết cầu thang trong trường hợp này là  $x_{n-2}$ .

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là  $x_{n-1} + x_{n-2}$ . Do đó ta có:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

14

cuu duong than cong. com

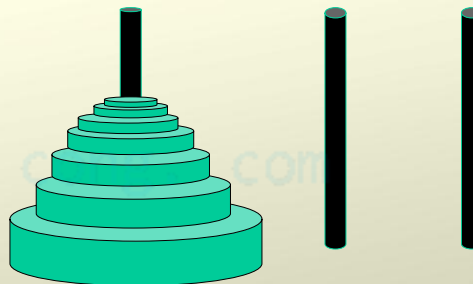
## Một số ví dụ

Vậy ta có hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp 2:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_1 = 1, x_2 = 2. \end{cases}$$

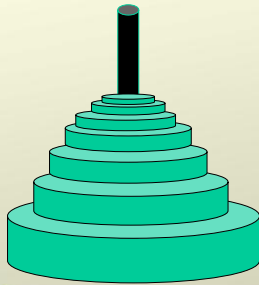
15

**Example3:** The tower of Hanoi puzzle consists of three pegs mounted on a board and disks with different sizes.



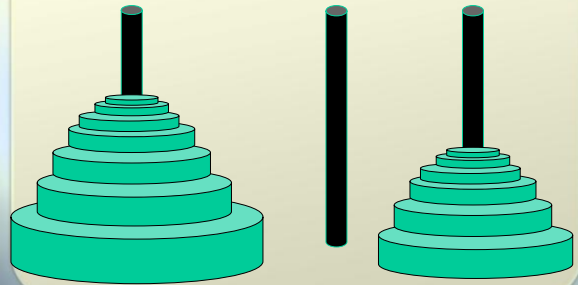
How can we move the disks to the 2nd peg, following the rule: **larger disks are never placed on top of smaller ones?**

How can we move the disks to the 2<sup>nd</sup> peg, one in a time, following the rule: **larger disks are never placed on top of smaller ones?**



17

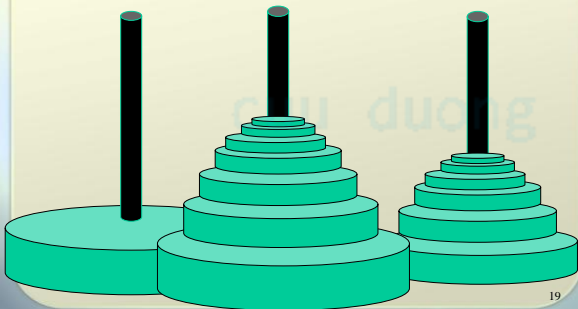
■ Let  $H_n$  be the minimum number of moves to complete the puzzle. First we must move the top  $(n - 1)$  disks to the 3<sup>rd</sup> peg, using at least  $H_{n-1}$  moves



18

cuu duong than cong . com

- We need one more move to take the largest disk to peg 2
- Then carry  $(n - 1)$  smaller disks from 3<sup>rd</sup> peg to the 2<sup>nd</sup> peg, using at least  $H_{n-1}$  moves .



19

## Modeling with Recurrence Relations

- First, move the top  $(n - 1)$  disks to the 3<sup>rd</sup> peg, using at least  $H_{n-1}$  moves
- one more move to take the largest disk to peg 2
- carry  $(n - 1)$  smaller disks from 3<sup>rd</sup> peg to the 2<sup>nd</sup> peg, using at least  $H_{n-1}$  moves .

Thus

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

- In fact we can prove by induction that

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

20

- We can prove by induction that

$$H_n = 2 H_{n-1} + 1$$

- To solve this recurrence relation, we write

$$H_n + 1 = 2 H_{n-1} + 2 = 2(H_{n-1} + 1)$$

- This is a geometric progression, so the solution is:

$$H_n + 1 = C 2^n$$

Since  $H_1 = 1$ , we have  $C = 1$  and

$$H_n = 2^n - 1$$

E.g.  $H_{64} = 18,446,744,073,709,551,615$ :

It takes 500 billion years to solve the puzzle !!

21

## Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là phương trình bậc k định bởi:

$$\lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - \dots - a_k = 0 \quad (*)$$

22

cuu duong than cong. com

## Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Trường hợp  $k = 1$

Phương trình đặc trưng (\*) trở thành

$$\lambda - a_1 = 0$$

nên có nghiệm là  $\lambda_0 = a_1$

Khi đó, (2) có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = C \lambda_0^n$$

23

## Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Ví dụ: Hệ thức đệ qui

$$\begin{cases} 2x_n - 3x_{n-1} = 0; \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

là một hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp 1

24

### Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Phương trình đặc trưng:  $2\lambda - 3 = 0$  có nghiệm là  $\lambda_0 = 3/2$

Do đó nghiệm tổng quát là:

$$x_n = C \left( \frac{3}{2} \right)^n$$

25

### Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Từ điều kiện ban đầu  $x_1 = 1$ , ta có :

$$\text{Suy ra: } C * \frac{3}{2} = 1$$

$$C = \frac{2}{3}$$

Do đó nghiệm của hệ thức đệ qui đã cho là:

$$x_n = \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

26

cuu duong than cong. com

### Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Trường hợp  $k = 2$ :

Phương trình đặc trưng (\*) trở thành:

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0 \quad (*)$$

a) Nếu (\*) có hai nghiệm thực phân biệt  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

27

### Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

b) Nếu (\*) có nghiệm kép thực  $\lambda_0$  thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = (A + nB)\lambda_0^n$$

28

### Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

c) Nếu (\*) có hai nghiệm phức liên hợp được viết dưới dạng lượng giác :

$$\lambda = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$$

thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = r^n (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi)$$

29

### Ví dụ:

Giải các hệ thức đệ qui sau:

**Ví dụ 1**  $2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0$

**Ví dụ 2**  $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2; x_1 = 4. \end{cases}$

**Ví dụ 3**  $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0; \\ x_1 = 4; x_2 = 4. \end{cases}$

30

cuu duong than cong. com

### Một số ví dụ

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \quad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad (*)$$

có hai nghiệm thực là  $\lambda_1 = 1$  và  $\lambda_2 = 1/2$ .

Do đó nghiệm tổng quát của (1) là:

$$x_n = A + B(1/2)^n$$

31

### Một số ví dụ

$$\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 2; x_1 = 4. \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$$

có nghiệm thực kép là  $\lambda_0 = 3/2$ . Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = (A + nB)(3/2)^n$$

32



### Một số ví dụ

Từ điều kiện ban đầu  $x_0 = 2; x_1 = 4$  ta suy ra:

$$\begin{cases} A = 2 \\ \frac{3}{2}(A + B) = 4 \end{cases}$$

Suy ra  $A = 2$  và  $B = 2/3$

Vậy nghiệm của (2)

là:

$$x_n = (3 + n)(3/2)^{n-1}$$



### Một số ví dụ

$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0 \\ x_1 = 4; x_2 = 4 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình đặc trưng của (3) là:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \quad (*)$$

có hai nghiệm phức liên hợp là  $\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$

Ta viết hai nghiệm trên dưới dạng lượng giác:

$$\lambda = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

34

cuu duong than cong. com

Do đó nghiệm tổng quát của (3) là

$$x_n = 2^n \left( C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

Từ điều kiện ban đầu  $x_1 = 4; x_2 = 4$  ta suy ra:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2\right) = 4 \\ 4\left(-\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2\right) = 4 \end{cases} \quad \text{Suy ra: } C_1 = 1, C_2 = \sqrt{3}$$

Vậy nghiệm của (3) là:  $x_n = 2^n \left( \cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3} \right)$

35



36

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} + f_n \quad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - \dots - a_k = 0(*)$$

37

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Nghiệm tổng quát của (1) = +

Nghiệm tổng quát của (2)

Một nghiệm riêng của (1)

38

cuu duong than cong. com

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Cách tìm một nghiệm riêng của (1) khi vế phải  $f_n$  của (1) có dạng đặc biệt như sau:

- ➡ Dạng 1:  $f_n = \beta^n P_r(n)$ , trong đó  $P_r(n)$  là một đa thức bậc  $r$  theo  $n$ ;  $\beta$  là một hằng số
- ➡ Dạng 2:  $f_n = P_m(n) \cos n\varphi + Q_l(n) \sin n\varphi$ , trong đó  $P_m(n)$ ,  $Q_l(n)$  lần lượt là các đa thức bậc  $m$ ,  $l$  theo  $n$ ;  $\varphi$  là hằng số ( $\varphi \neq k\pi$ ).
- ➡ Dạng 3:  $f_n = f_{n1} + f_{n2} + \dots + f_{ns}$ , trong đó các  $f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{ns}$  thuộc 2 dạng đã xét ở trên

39

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Dạng 1:  $f_n = \beta^n P_r(n)$ ,

Khi đó ta xét 3 trường hợp nhỏ:

**Trường hợp 1**  $\beta$  không là nghiệm của phương trình đặc trưng

**Trường hợp 2**  $\beta$  là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng

**Trường hợp 3**  $\beta$  là nghiệm kép của phương trình đặc trưng

40

### Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Trường hợp 1.  
Nếu  $\beta$  không là nghiệm của phương trình đặc trưng (\*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = \beta^n Q_r(n)$$

### Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Trường hợp 2.  
Nếu  $\beta$  là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (\*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n\beta^n Q_r(n)$$

cuu duong than cong. com

### Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Trường hợp 3.  
Nếu  $\beta$  là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (\*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n^2 \beta^n Q_r(n)$$

### Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

#### Chú ý:

$Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \dots + A_0$  là đa thức tổng quát có cùng bậc  $r$  với  $P_r(n)$ , trong đó  $A_r, A_{r-1}, \dots, A_0$  là  $r+1$  hệ số cần xác định.

Các hệ số xác định như thế nào?

Để xác định các hệ số trên ta cần thế  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-r}$  vào (1) và cho  $n$  nhận  $r+1$  giá trị nguyên nào đó hoặc đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế để được một hệ phương trình. Các hệ số trên là nghiệm của hệ phương trình này

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Dạng 2:  $f_n = P_m(n)\cos n\varphi + Q_l(n)\sin n\varphi$

Khi đó ta xét  $\lambda_0 = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ . Có 2 trường hợp nhỏ:

**Trường hợp 1**  $\lambda_0 = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$  không là nghiệm của phương trình đặc trưng

**Trường hợp 2**  $\lambda_0 = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$  là nghiệm của phương trình đặc trưng

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Trường hợp 1.

Nếu  $\lambda_0 = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$  không là nghiệm của phương trình đặc trưng (\*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = R_k(n)\cos n\varphi + S_k(n)\sin n\varphi$$

cuu duong than cong. com

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Trường hợp 2.

Nếu  $\lambda_0 = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$  là nghiệm của phương trình đặc trưng (\*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n(R_k(n)\cos n\varphi + S_k(n)\sin n\varphi)$$

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

**Ghi chú:**

$R_k(n)$ ,  $S_k(n)$  là các đa thức tổng quát theo  $n$  có bậc  $k = \max\{m, l\}$  với  $2k+2$  hệ số cần xác định:

$$R_k(n) = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \dots + A_0$$

$$S_k(n) = B_k n^k + B_{k-1} n^{k-1} + \dots + B_0$$

## Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Dạng 3 :  $f_n = f_{n1} + f_{n2} + \dots + f_{ns}$

Bằng cách như trên ta tìm được nghiệm riêng  $x_{ni}$  ( $1 \leq i \leq s$ ) của hệ thức đệ qui:

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} = f_{ni}$$

Khi đó  $x_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{ns}$  là một nghiệm riêng của (1)

49

## Ví dụ:

a)  $2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1.$

b)  $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2; x_1 = 0. \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}; \\ x_0 = 1; x_1 = -2. \end{cases}$

d)  $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = \cos \frac{n\pi}{4} - (3 - 3\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4}$

e)  $x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2 - n)2^{n-2} + 3.4^n$

50

cuu duong than cong. com

## Ví Dụ 1

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1 \quad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad (*)$$

có hai nghiệm thực là  $\lambda_1 = 1$  và  $\lambda_2 = 1/2$

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = C_1 + C_2(1/2)^n$$

51

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là  $f_n = 4n + 1$  có dạng  $P_1(n)$  là đa thức bậc  $r = 1$  theo  $n$ .

Vì  $\beta = 1$  là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (\*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n(an + b) \quad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được:

$$2n(an+b) - 3(n-1)[a(n-1)+b] + (n-2)[a(n-2) + b] = 4n + 1.$$

Cho  $n$  lần lượt nhận hai giá trị  $n = 0$ ;  $n = 1$  ta được hệ:

$$\begin{cases} a + b = 1; \\ 3a + b = 5. \end{cases}$$

52

Giải hệ trên ta được  $a = 2$ ;  $b = -1$ . Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là:

$$x_n = n(2n - 1) \quad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$x_n = C_1 + C_2(1/2)^n + n(2n - 1)$$

53



54

cuu duong than cong. com

## Ví Dụ 2

$$\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2; x_1 = 0. \end{cases}$$

Xét hệ thức đệ qui:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n. \quad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad (*)$$

có một nghiệm thực kép là  $\lambda = 3$ .

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = (C_1 + nC_2) \cdot 3^n. \quad (3)$$

55

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là  $f_n = (18n + 12)3^n$  có dạng  $\beta^n P_r(n)$  với  $\beta = 3$  và  $P_r(n)$  là đa thức bậc  $r = 1$  theo  $n$ .

Vì  $\lambda_0 = 3$  là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (\*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n^2(an + b)3^n \quad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được:

$$(n+1)^2[a(n+1) + b]3^{n+1} - 6n^2[an + b]3^n + 9(n-1)^2[a(n-1) + b]3^{n-1} = (18n+12)3^n$$

Cho  $n$  lần lượt nhận hai giá trị  $n = 0$ ;  $n = 1$  ta được hệ:

$$\begin{cases} 6b = 12; \\ 54a + 18b = 90. \end{cases}$$

56

Giải hệ trên ta được  $a = 1; b = 2$ . Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là:

$$x_n = n^2(n+2)3^n$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)3^n + n^2(n+2)3^n$$

Thay điều kiện  $x_0 = 2; x_1 = 0$  vào (6) ta được:

$$\begin{cases} C_1 = 2; \\ 3C_1 + 3C_2 + 9 = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có:

$$C_1 = 2; C_2 = -5.$$

Thế vào (6) ta có nghiệm riêng cần tìm của (1) là:

$$x_n = (n^3 + 2n^2 - 5n + 2)3^n$$

57

### Ví Dụ 3

$$\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1} \\ x_0 = 1; x_1 = -2 \end{cases}$$

Xét hệ thức đệ quy:

$$4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1} \quad (1)$$

Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất là:

$$4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0 \quad (*)$$

Có một nghiệm thực kép là  $\lambda = 3/2$ .

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là

$$x_n = (C_1 + nC_2)(3/2)^n \quad (3)$$

58

cuu duong than cong. com

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}$$

Có dạng  $\beta^n P_r(n)$  với  $\beta = 2$  và  $P_r(n)$  là đa thức bậc  $r = 2$  theo  $n$ .

Vì  $\beta = 2$  không là nghiệm của phương trình đặc trưng (\*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = (an^2 + bn + c)2^n \quad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được:

$$4[a(n+1)^2 + b(n+1) + c]2^{n+1} - 12[an^2 + bn + c]2^n + 9[a(n-1)^2 + b(n-1) + c]2^{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}$$

59

Cho  $n$  lần lượt nhận ba giá trị  $n = -1; n = 0; n = 1$  ta được hệ:

$$\begin{cases} 3a + \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}c = \frac{29}{4}; \\ \frac{25}{2}a + \frac{7}{2}b + \frac{1}{2}c = 28; \\ 40a + 8b + c = 87. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được  $a = 2; b = 1; c = -1$ . Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là

$$x_n = (2n^2 + n - 1)2^n \quad (5)$$

60

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)(3/2)^n + (2n^2 + n - 1) 2^n \quad (6)$$

Thay điều kiện  $x_0 = 1; x_1 = -2$  vào (6) ta được:

$$\begin{cases} C_1 - 1 = 1; \\ \frac{3}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 + 4 = -2. \end{cases}$$

Từ đó ta có:  $C_1 = 2; C_2 = -6$ .

Thế vào (6) ta có nghiệm riêng cần tìm của (1) là:

$$x_n = (2 - 6n)(3/2)^n + (2n^2 + n - 1) 2^n$$

61

#### Ví Dụ 4

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = \cos \frac{n\pi}{4} - (3 - 3\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4} \quad (1)$$

Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất là:

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (*)$$

có hai nghiệm thực phân biệt là  $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$ .

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n. \quad (3)$$

62

cuu duong than cong. com

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = \cos \frac{n\pi}{4} - (3 - 3\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4}$$

có dạng  $a \cos \varphi + b \sin \varphi$  với  $\varphi = n\pi/4$

Vì

$$\lambda_0 = \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4}$$

không là nghiệm của phương trình đặc trưng (\*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4} \quad (4)$$

63

Thế (4) vào (1) ta được:

$$a \cos \frac{(n+2)\pi}{4} + b \sin \frac{(n+2)\pi}{4} - 3[a \cos \frac{(n+1)\pi}{4} + b \sin \frac{(n+1)\pi}{4}] + 2(a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4}) = \cos \frac{n\pi}{4} - (3 - 3\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4}$$

Cho  $n$  lần lượt nhận hai giá trị  $n = 0; n = -1$ ; ta được hệ:

$$\begin{cases} (2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})a + (1 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})b = 1; \\ (3\frac{\sqrt{2}}{2} - 3)a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = 2\sqrt{2} - 3. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được  $a = 1; b = -1$ . Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là

$$x_n = \cos \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{4} \quad (5)$$

64



Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$x_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + \cos \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{4}$$

65

### Ví Dụ 5

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3 \cdot 4^n \quad (1)$$

Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất là:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0 \quad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad (*)$$

có hai nghiệm thực phân biệt là  $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$ .

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n. \quad (3)$$

66

cuu duong than cong. com

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3 \cdot 4^n$$

có dạng ở Trường hợp 4.

Xét các hệ thức đệ quy:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 \quad (1')$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = (2-n)2^{n-2} \quad (1'')$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3 \cdot 4^n \quad (1''')$$

67

Lý luận tương tự như trên ta tìm được:

$$\text{Một nghiệm riêng của } (1') \text{ là } x_{n1} = -10n$$

$$\text{Một nghiệm riêng của } (1'') \text{ là } x_{n2} = n2^n$$

$$\text{Một nghiệm riêng của } (1''') \text{ là } x_{n3} = 4^{n+2}$$

Suy ra một nghiệm riêng của (1) là:

$$x_{n1} = -10n + n2^n + 4^{n+2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}$$

68

Ví dụ (Bài 4 Đề thi 2007)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy:

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

b) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 5$  của hệ thức đệ quy:

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 50n \cdot 3^{n-1}$$

69

**Đáp án: 1,5đ**

a) Phương trình đặc trưng  $r^2 - r - 6 = 0$  có 2 nghiệm  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = -2$  nên nghiệm tổng quát có dạng:  $a_n = c \cdot 3^n + d \cdot (-2)^n$  **(0,5đ)**

b) Ta tìm nghiệm đặc biệt có dạng  $n(A(n+B))3^n$ :

$$(An^2 + Bn)3^n = (A(n-1)^2 + B(n-1))3^{n-1} + 6(A(n-2)^2 + B(n-2))3^{n-2} + 50n \cdot 3^{n-1}$$

$$10An - 50n + 5B - 9A = 0 \text{ hay } A = 5, B = 9 \text{ (0,5đ)}$$

Do đó nghiệm tổng quát có dạng:  $a_n = c \cdot 3^n + d \cdot (-2)^n + (5n^2 + 9n)3^n$

Các điều kiện ban đầu cho:

$$a_0 = c + d = 1,$$

$$a_1 = 3c - 2d + 42 = 5$$

giải hệ phương trình trên ta được  $c = -7, d = 8$  **(0,5đ)**

70

cuu duong than cong. com

**Ví dụ (Đề thi 2006).** Cho  $X = \{0, 1, 2\}$  Mỗi chuỗi ký tự có dạng  $a_1 a_2 \dots a_n$  với  $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$  ( $n$  nguyên dương) được gọi là một từ có chiều dài  $n$  trên  $X$ . Gọi  $L_n$  là số các từ có chiều dài  $n$  trên  $X$  không chứa 2 số 2 liên tiếp.

a) Tìm một công thức truy hồi cho  $L_n$ .

b) Tìm biểu thức của  $L_n$  theo  $n$ .

71

**Đáp án. (2 điểm)**

a) 1 điểm

\_ Số các từ có chiều dài  $n$  mà  $a_1 = 0$  là  $L_{n-1}$

\_ Số các từ có chiều dài  $n$  mà  $a_1 = 1$  là  $L_{n-1}$

\_ Số các từ có chiều dài  $n$  mà  $a_1 = 2$ :

+ Có  $L_{n-2}$  từ mà  $a_2 = 0$

+ Có  $L_{n-2}$  từ mà  $a_2 = 1$

Vậy  $L_n = 2L_{n-1} + 2L_{n-2}$  ( $n > 3$ )

b) 1 điểm

Các từ có chiều dài 1 là: 0, 1, 2.  $L_1 = 3$ ;

Các từ có chiều dài 2 là: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21.  $L_2 = 8$ ;

Ta quy ước  $L_0 = 1$  thì hệ thức đệ quy thỏa với  $n > 1$

Phương trình đặc trưng  $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

72

Nghiệm tổng quát :

$$L_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ (1+\sqrt{3})A+(1-\sqrt{3})B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ B=\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$$

73

## Đề thi 2006

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui :

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

b) Tìm nghiệm của hệ thức đệ qui:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3 \cdot 2^{n+1}$$

thỏa điều kiện đầu:  $a_0=4, a_1=4$

74

cuu duong than cong. com

## Đề thi 2006

Đáp án

a) Phương trình đặc trưng  $x^2-4x+4=0$  có nghiệm kép  $x=2$  nên nghiệm tổng quát có dạng

$$a_n = (A+nB)2^n \quad (0,5đ)$$

b) Vì  $\beta=2$  là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng dưới dạng  $Cn^22^n$ .

$$\text{Ta có } Cn^22^n = 4C(n-1)^22^{n-1} - 4C(n-2)^22^{n-2} + 3 \cdot 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow C=3 \quad (0,5đ)$$

75

## Đề thi 2006

Do đó nghiệm tổng quát có dạng

$$a_n = A2^n + Bn2^n + 3n^22^n$$

Sử dụng ĐKĐ

$$a_0 = A = 4$$

$$a_1 = 2A + 2B + 6 = 4 \Rightarrow B = -5$$

76

### Đề thi 2006

Cho  $X=\{0,1,2\}$ . Gọi  $a_n$  là số các từ có chiều dài  $n$  trên  $X$  trong đó số 1 không xuất hiện liên tiếp và số 2 không xuất hiện liên tiếp.

a) Chứng minh rằng  $a_n$  thỏa hệ thức đệ quy:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \text{ với } n > 2.$$

b) Tìm biểu thức của  $a_n$  theo  $n$ .

77

### Đề thi 2006

Đáp án (2,5 điểm)

a) 1 điểm

Gọi  $b_n, c_n, d_n$  lần lượt là số từ  $x_1 x_2 \dots x_n$  ứng với  $x_1 = 0, x_1 = 1, x_1 = 2$ .

Ta có  $b_n = a_{n-1}$ ;  $c_n = b_{n-1} + d_{n-1}$ ;  $d_n = b_{n-1} + c_{n-1}$

Do đó  $a_n = b_n + c_n + d_n = a_{n-1} + b_{n-1} + d_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + (d_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-1}$$

$$= 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

78

cuu duong than cong. com

### Đề thi 2006

b) 1,5 điểm.

Các từ có chiều dài 1 là 0,1,2 nên  $a_1 = 3$ .

Các từ có chiều dài 2 thỏa yêu cầu là: 00,01,02,10,12,20,21 nên  $a_2 = 7$ . Ta qui ước  $a_0 = 1$  thì hệ thức đệ quy thỏa với  $n > 1$ . Phương trình đặc trưng  $x^2 - 2x - 1 = 0$  có hai nghiệm là

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

79

### Đề thi 2006

Do đó nghiệm tổng quát là

$$a_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n$$

Trong đó  $A$  và  $B$  xác định bởi

$$A + B = 1$$

$$A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 3$$

80

## Đề thi 2006

Suy ra

$$A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, B = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

81

## Đề thi 2008

- Tìm số các chuỗi ký tự chiều dài  $n$  chứa chuỗi con 11 hay 22, trong đó các ký tự được chọn trong  $\{0, 1, 2\}$ .

- Cách giải 1. (Phương pháp đối lập).

Gọi  $a_n$  là số chuỗi không chứa chuỗi con 11 và 22. Giải như đề 2006 ta được

$$a_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

82

cuu duong than cong. com

## Đề thi 2008

Như vậy số chuỗi chứa chuỗi con 11 hay 22 là

$$3^n - a_n = 3^n - \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

Cách giải 2 (Trực tiếp)

Gọi  $b_n, c_n, d_n$  lần lượt là số từ  $x_1 x_2 \dots x_n$  ứng

với  $x_1 = 0, x_1 = 1, x_1 = 2$ . Khi đó:

$$a_n = b_n + c_n + d_n.$$

$$b_n = a_{n-1}.$$

$c_n = b_{n-1} + 3^{n-2} + d_{n-1}$  (vì khi ký tự thứ 2 là 1 thì kết hợp với mọi chuỗi  $n-2$  ký tự phía sau đều thỏa).

83

## Đề thi 2008

Tương tự :

$$d_n = b_{n-1} + c_{n-1} + 3^{n-2}. \text{ Do đó:}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + b_{n-1} + 3^{n-2} + d_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + 3^{n-2} \\ &= a_{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + a_{n-1} + a_{n-2} = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} + 2 \cdot 3^{n-2}. \end{aligned}$$

Vậy ta có hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} + 2 \cdot 3^{n-2}.$$

với  $a_0 = 0$  và  $a_1 = 0$ . Giải hệ thức đệ quy này ta có kết quả như cách 1.

84

### Đề thi 2005

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

b) Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2 \cdot 4^n$$

thoả điều kiện đầu  $a_0 = 12, a_1 = 8$

85

### Đề thi 2005

Một người gửi 100 triệu đồng vào một quỹ đầu tư vào ngày đầu của một năm. Ngày cuối cùng của năm người đó được hưởng hai khoản tiền lãi. Khoản thứ nhất là 20% tổng số tiền có trong tài khoản cả năm, khoản lãi thứ hai là 45% của tổng số tiền có trong tài khoản của năm trước đó. Gọi  $P_n$  là số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ  $n$ .

a) Tìm công thức truy hồi cho  $P_n$

b) Tìm biểu thức của  $P_n$  theo  $n$ .

86

cuu duong than cong. com

### Đề thi 2004

Một bãi giữ xe được chia thành  $n$  lô cạnh nhau theo hàng ngang để xếp xe đạp và xe máy. Mỗi xe đạp chiếm một lô còn mỗi xe máy chiếm hai lô. Gọi  $L_n$  là số cách xếp cho đầy  $n$  lô.

a) Tìm một công thức đệ quy thoả bởi  $L_n$

b) Tìm biểu thức của  $L_n$  theo  $n$ .

87

### Bài tập

Giải các hệ thức đệ quy sau:

$$1) \begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$$

88

## Bài tập

Giải các hệ thức đệ qui sau:

$$4) \quad \begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128 \cdot 8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$$

$$6) \quad x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = -\frac{3}{2} \cos \frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

89

## Bài tập

Giải các hệ thức đệ qui sau:

$$7) \quad \begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2 \cdot 5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$$

$$8) \quad \begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128 \cdot 8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$$

$$9) \quad x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 20 + n2^{n-2} + 3^n$$

90

cuu duong than cong. com

## Bài tập

10) Tìm hệ thức đệ qui cho  $x_n$ , trong đó  $x_n$  là số miền của mặt phẳng bị phân chia bởi  $n$  đường thẳng trong đó không có hai đường nào song song và không có ba đường nào đồng qui. Tìm  $x_n$ .

11) Đề thi 2009.

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui:

$$a_n = 6a_{n-2} - 9a_{n-1}.$$

b) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu  $a_0 = 1, a_1 = 3$  của hệ thức đệ qui:

$$a_n = 6a_{n-2} - 9a_{n-1} + n \cdot 3^{n+1}$$

91

## Bài tập

12) Đề thi 2010.

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui:

$$a_n = 6a_{n-2} + a_{n-1}.$$

b) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu  $a_0 = 8, a_1 = 3$  của hệ thức đệ qui:

$$a_n = 6a_{n-2} + a_{n-1} + 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1}$$

92