



Phần thứ nhất

LÝ THUYẾT TỔ HỢP Combinatorial Theory



Fall 2009

Nội dung

Chương 0. Mở đầu

Chương 1. Bài toán đếm

Chương 2. Bài toán tồn tại

Chương 3. Bài toán liệt kê tổ hợp

Chương 4. Bài toán tối ưu tổ hợp

Chương 2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet
4. Định lý Ramsey

1. Giới thiệu bài toán

- Trong chương trình, ta sẽ tiếp trung chú ý vào việc tìm sẽ các câu hình tæ híp. Trong những bài toán đã sử dụng tất cả các câu hình luận hiện nay về các việc chính luận tìm sẽ phần tổ hợp môn tính chất để ra.
- Tuy nhiên, trong rất nhiều bài toán tæ híp, việc cho sử dụng tất cả một câu hình tổ hợp môn các tính chất cho trước hết sức khả thi.
 - Chẳng hạn, khi một cú thử cần phải tính toán các níc để của mình để giải quyết, phải xem liệu đã không nên ngừng hay không,
 - Một người giải một môn cần tìm kiếm chưa bao giờ giải cho một bậc một môn anh ta không biết liệu có ý cả đúng luận bậc để trên thế để một môn hoặc là phải ngừng hay không, hay cho luận bậc một môn giải của để phải ngừng ra nhằm để bảo an toàn cho bậc để trên thế ...
- Trong tæ híp xuất hiện một vấn đề có hai rất quan trọng luận: Xét sử dụng tất cả các câu hình tæ híp với các tính chất cho trước - **bài toán sử dụng tất cả tæ híp.**
- Nhiều bài toán sử dụng tất cả tæ híp để tổng hợp thực trạng tuổ như là một môn luận để lúc đó sẽ sử dụng phần lớn của tæ híp này riêng về toán học này chung.

Bài toán về 36 sĩ quan

- Bài toán này là Euler's problem, nội dung của nó như sau:

"Có một lữ đoàn người ta triển khai 6 trung đội trong 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: thiếu úy, trung úy, thiếu tá, trung tá, và tham gia duyệt binh ở 6 trung đội. Hãy rằng cả 36 sĩ quan này thành một hình vuông sao cho trong mỗi hàng ngang cũng như mỗi cột dọc đều có 6 sĩ quan.""

Bài toán về 36 sĩ quan

- Sử dụng:
 - A, B, C, D, E, F ® Ó chØ c, c phiªn hiÖu trung ®oµn,
 - a, b, c, d, e, f ® Ó chØ c, c cÊp bÊc sÛ quan.
- Bµi to¸n nµy c¸ thÓ t¸ng qu¸t ho¸, nÕu thay con sè 6 bëi n .
- Trong trêng hîp $n = 4$, mét lªi gi¸i c¸a bµi to¸n 16 sÛ quan lµ

Ab	Dd	Ba	Cc
Bc	Ca	Ad	Db
Cd	Bb	Dc	Aa
Da	Ac	Cb	Bd

- Mét lªi gi¸i trong trêng hîp $n = 5$ lµ

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee
Cd	De	Ea	Ab	Bc
Eb	Ac	Bd	Ce	Da
Be	Ca	Db	Ec	Ad
Dc	Ed	Ae	Ba	Cb

Bài toán về 36 sĩ quan

- Do lời giải của bài toán đã trở nên bi đát đến nỗi 2 hình vuông với các cạnh là tính toán và tổng chẳng khác nhau nên bài toán trở nên quá rõ ràng và dễ dàng giải bài toán về hình vuông là tính toán giao.
- Euler đã một rất nhiều công sức để tìm lời giải cho bài toán 36 sĩ quan trở nên «ng » không thành công. Tổ «ng đã ra một giải thuyết toán luận: **Không tồn tại hình vuông là tính toán giao cấp $n = 4k + 2$.**
- Tarri, năm 1901 chứng minh giải thuyết đúng với $n = 6$, bằng cách duyệt tất cả mọi khả năng xảy ra.
- Năm 1960 ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker, Srikanda đã ra một lời giải với $n = 10$ và sau đó đã đưa ra phương pháp xây dựng hình vuông là tính toán giao cho mọi $n = 4k + 2$, với $k > 1$.

Bài toán về 36 sĩ quan

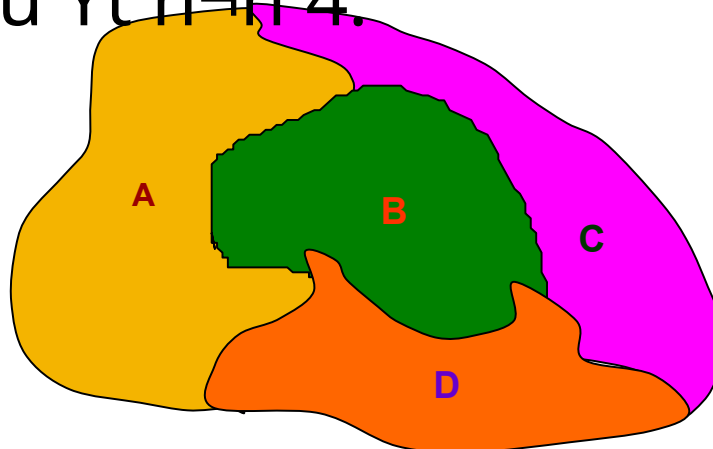
- Tổng chống bụi toán \mathbb{R} ra ch \emptyset cả ý nghĩa thực túy của một bụi toán \mathbb{R} là h ∞ hóa th ∞ tr ∞ tu ∞ con ng ∞ . Th ∞ nh ∞ g ∞ \mathbb{R} c ∞ ng ∞ ta \mathbb{R} ph ∞ hi ∞ nh ∞ ÷ng òng ð ∞ quan tr ∞ của v ∞ \mathbb{R} tr ∞ v ∞ :
 - Quy ho ∞ ch th ∞ c nghi ∞ m (Experimental Design),
 - S $\frac{3}{4}$ p x ∞ c ∞ l ∞ ch thi \mathbb{R} ð ∞ trong c ∞ gi ∞ c ∞ qu ∞ t ∞ ,
 - H ∞ nh h ∞ x ∞ \mathbb{R} nh (Projective Geometry),
 - ...

Bội tố, n 4 mụ

- Cả nh÷ng bội tố, n mụ néi dung của nã cả thÓ gi¶i thÝch cho bÊt kú ai, tuy nhiªn lêi gi¶i của nã th× ai còng cả thÓ thõ t×m, nhng mụ khã cả thÓ t×m ®íc. Ngoµi ®Þnh lý Fermat th× bội tố, n 4 mụ lụ mét bội tố, n nh vÿy.
- Bội tố, n cả thÓ ph¼t biÓu trùc quan nh sau: **Chøng minh r»ng mõi b¶n ®ã trªn mÆt ph¼ng ®Òu cả thÓ t« b»ng 4 mụ sao cho kh«ng cả hai níc l¼ng giÒng nµo l¼i bÞ t« bÿi cïng mét mụ.**
- Chó ý r»ng, ta xem nh mçi níc lụ mét vïng liªn th«ng vµ hai níc ®íc gãi lụ l¼ng giÒng nõu chóng cả chung biªn giúi lụ mét ®êng liªn t«c.

Bài toán 4 màu

- Con sẽ 4 kh«ng ph¶i lụ ngÉu nhiªn. Ngêi ta ®· chøng minh ®êc r»ng mãi b¶n ®ã ®Òu ®êc t« vớ sè mÇu lín h¬n 4, cßn vớ sè mÇu Ýt h¬n 4 th× kh«ng t« ®êc. Ch¼ng h¹n b¶n ®ã gãm 4 níc ë h×nh dãi kh«ng thÓ t« ®êc vớ sè mÇu Ýt h¬n 4.



Bài toán 4 màu

- Vấn đề này được đề cập trong bức thư của Augustus De Morgan gửi W. R. Hamilton năm 1852 (De Morgan biết sự kiện này từ Frederick Guthrie, còn Guthrie từ người anh trai của mình...)
- Trong 110 năm rất nhiều chứng minh được công bố nhưng đều có lỗi.
- Năm 1976, Appel và Haken đã đưa ra chứng minh ***bằng máy tính điện tử!***

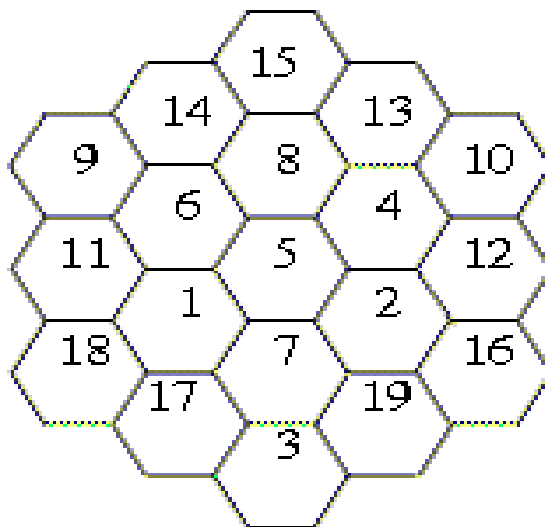
K. Appel and W. Hankin, "Every planar map is 4-colorable," Bulletin of the AMS, Volume 82 (1976), 711-712.

Bài toán 4 màu

- Trong ngôn ngữ toán học, bài toán 4 màu được phát biểu dưới dạng bài toán tô màu đồ thị phẳng.
- Việc giải quyết Bài toán 4 màu đóng góp phần quan trọng vào việc phát triển lý thuyết đồ thị.
- Bài toán tô màu đồ thị có nhiều ứng dụng thực tế quan trọng.

Hình lục giác thần bí

- Năm 1910 Clifford Adams đưa ra bài toán hình học lục giác thần bí sau: trên 19 « lục giác (xem hình vẽ dưới) hãy điền vào các số từ 1 đến 19 sao cho tổng theo 6 hướng của lục giác lại bằng nhau (vấn đề này bằng 38).



Hình lục giác thần bí

- Sau 47 năm trôi nổi trên biển cuối cùng «ng ta ®· tìm ®·c lên gi¶i.
- Sau ®ã v× s¶ ý ®·nh một b¶n th¶o «ng ta ®· tên th¶m 5 năm ®Ó kh¶i ph¶c l¶i. Năm 1962 Adams ®· c¶ng bè lên gi¶i ®ã.
- Th¶t kh¶ng thÓ ngê l¶ ®ã l¶ lên gi¶i duy nhất (nếu kh¶ng t¶nh ®¶n c¶c lên gi¶i sai kh¶c nhau bèi ph¶p bi¶n h¶nh ®¶n gi¶n).

Giả thuyết $3x + 1$

- Giả thuyết $3x+1$ (conjecture)
 - Giả sử hàm $f(x)$ trả lại $x/2$ nếu x là số chẵn và $3x+1$ nếu x là số lẻ. Với mọi số nguyên dương x , luôn tồn tại n sao cho

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{n \text{ lần gọi hàm } f}$$

- là bằng 1.

$$f(13) = 3 \cdot 13 + 1 = 40$$

$$f(40) = 40 / 2 = 20$$

$$f(20) = 20 / 2 = 10$$

$$f(10) = 10 / 2 = 5$$

$$f(5) = 3 \cdot 5 + 1 = 16$$

$$f(16) = 16 / 2 = 8$$

$$f(8) = 8 / 2 = 4$$

$$f(4) = 4 / 2 = 2$$

$$f(2) = 2 / 2 = 1$$

Giả thuyết $3x + 1$

- **Giả thuyết $3x+1$:** Đoạn chương trình sau đây luôn kết thúc với mọi số nguyên dương x :


```
repeat  
    if  $x \bmod 2 = 0$  then  $x := x \div 2$   
    else  $x := 3*x + 1$   
until  $x=1$ ;
```
- Paul Erdős commented concerning the intractability of the $3x+1$ problem: *"Mathematics is not yet ready for such problems."*
- Đã chứng minh với mọi $x \leq 5.6 \cdot 10^{13}$

Một số vấn đề mở

Open problems

- **Goldbach's Conjecture**

- Mỗi số nguyên $n > 2$ đều là tổng của 2 số nguyên tố
- Đã chỉ ra là đúng với mọi n đến tận $4 \cdot 10^{14}$
- Nhiều người cho rằng giả thuyết là đúng

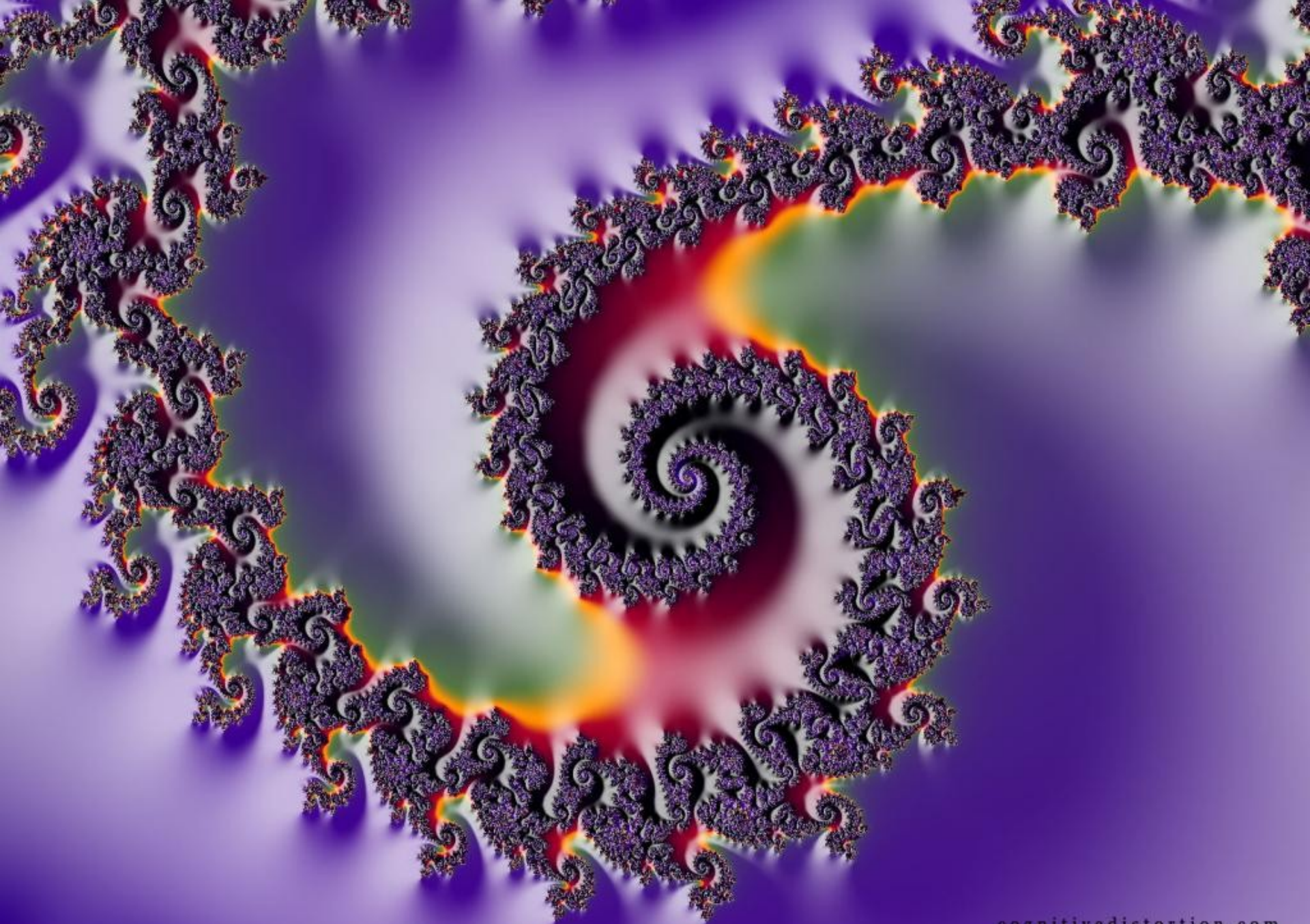
- **Cặp số nguyên tố sinh đôi (Twin prime conjecture)**

- Có vô số cặp số nguyên tố sinh đôi (nghĩa là chỉ chênh lệch nhau 2)
- Cặp sinh đôi lớn nhất: $318,032,361 \cdot 2^{107,001 \pm 1}$
 - Số này có 32,220 chữ số!
- Cũng được cho rằng là đúng

- **Không tồn tại số hoàn hảo lẻ (Odd perfect number)**

- **Nếu bạn giải quyết được một trong những vấn đề này**





A bit of humor: Computer terminology



Chương 2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet
4. Hệ đại diện phân biệt
5. Định lý Ramsey

2. Các kỹ thuật chứng minh

2.0. Mở đầu

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct Proof)

2.2. Chứng minh bằng phản chứng (Proof by Contradiction)

2.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học (Proof by Mathematical Induction)

2.0. Mở đầu

- Chứng minh là trái tim của toán học.
- Trong suốt quá trình học từ thuở nhỏ đến trưởng thành bạn đã và sẽ còn phải làm việc với chứng minh – phải đọc, hiểu và thực hiện chứng minh.
- Có bí quyết gì không? Có phép màu gì giúp được không? Câu trả lời là: Không có bí quyết, không có phép màu. Vấn đề quan trọng là cần biết tư duy, hiểu biết một số sự kiện và nắm vững một số kỹ thuật cơ bản

Cấu trúc của chứng minh

- Cấu trúc cơ bản của chứng minh rất đơn giản: Nó là dãy các mệnh đề, mỗi một trong số chúng sẽ
 - hoặc là giả thiết, hoặc là
 - kết luận được suy trực tiếp từ giả thiết hoặc suy ra từ các kết quả đã chứng minh trước đó.
 - Ngoài ra có thể có những giải thích – cần cho người đọc và không có ảnh hưởng đến cấu trúc của chứng minh.
- Một chứng minh cần được trình bày sao cho dễ theo dõi:
 - Mỗi bước trong chứng minh đều rõ ràng hoặc ít ra là được giải thích rõ ràng,
 - Người đọc được dẫn dắt đến kết luận mà không gặp những vướng mắc do những tình tiết không rõ ràng gây ra.

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Trước hết ta nhắc lại khái niệm số vô tỷ và một kết quả của số học:
- Một số thực được gọi là **số hữu tỷ** nếu nó có thể biểu diễn dưới dạng p/q , với p và q là các số nguyên. Một số thực không là số hữu tỷ được gọi là **số vô tỷ**.
- **Định lý cơ bản của số học**: Mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố mà ta sẽ gọi là phân tích ra thừa số nguyên tố (sẽ viết tắt là **PTNT**) của số đó.

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Ký hiệu $s = 2^{1/2}$. Theo định nghĩa, s thoả mãn phương trình $s^2 = 2$.

- Nếu s là số hữu tỷ, thì ta có thể viết

$$s = p/q$$

trong đó p và q là hai số nguyên. Bằng cách chia cho ước chung nếu cần, ta có thể **giả thiết là p và q không có ước chung nào ngoài 1**.

- Thay biểu diễn này vào phương trình đầu tiên, sau khi biến đổi một chút, ta thu được phương trình

$$p^2 = 2 q^2 .$$

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Thế nhưng, theo *định lý cơ bản của số học*, 2 là thừa số trong PTNT của p^2 . Do 2 là số nguyên tố, nên nó cũng là thừa số trong PTNT của p . Từ đó suy ra, 2^2 cũng xuất hiện trong PTNT của p^2 , và vì thế trong cả PTNT của $2q^2$. Bằng cách chia hai vế cho 2, ta suy ra 2 là thừa số trong PTNT của q^2 .
- Tương tự như trên (như đối với p^2) ta có thể kết luận 2 là thừa số nguyên tố của q . Như vậy, ta thấy p và q có chung thừa số 2. Điều đó là mâu thuẫn với giả thiết p và q không có ước chung nào ngoài 1.
- Khẳng định được chứng minh.

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct proofs)

- Chúng ta bắt đầu bằng ví dụ chứng minh tính bắc cầu của tính chất chia hết.
- **Định lý.** Nếu a chia hết b và b chia hết c thì a chia hết c .
- **Proof.** Theo giả thiết, và định nghĩa tính chia hết, ta suy ra tồn tại các số nguyên k_1 và k_2 sao cho

$$b = a k_1 \text{ và } c = b k_2.$$

- Suy ra

$$c = b k_2 = a k_1 k_2.$$

- Đặt $k = k_1 k_2$. Ta có k là số nguyên và $c = a k$, do đó theo định nghĩa về tính chia hết, a chia hết c .

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct proofs)

Nếu P, thì Q (If P, Then Q)

- Phần lớn các định lý (các bài tập hay bài kiểm tra) mà bạn cần chứng minh hoặc ẩn hoặc hiện có dạng “Nếu P, Thì Q”.
- Trong ví dụ vừa nêu, "P" là “Nếu a chia hết b và b chia hết c ” còn "Q" là “ a chia hết c ”.
- Đây là dạng phát biểu chuẩn của rất nhiều định lý.
- Chứng minh trực tiếp có thể hình dung như là một dãy các suy diễn bắt đầu từ “P” và kết thúc bởi “Q”.

$$P \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$$

- Phần lớn các chứng minh là chứng minh trực tiếp. Khi phải chứng minh, bạn nên thử bắt đầu từ chứng minh trực tiếp, ngoại trừ tình huống bạn có lý do xác đáng để không làm như vậy.

Ví dụ

- **Ví dụ 1.** Mỗi số nguyên lẻ đều là hiệu của hai số chính phương.
- **CM.** Giả sử $2a+1$ là số nguyên lẻ, khi đó

$$2a+1 = (a+1)^2 - a^2.$$

- **Ví dụ 2.** Số $100\dots 01$ (với $3n-1$ số không, trong đó n là số nguyên dương) là hợp số.
- **CM.** Ta có thể viết $100\dots 01 = 10^{3n} + 1$, trong đó n là số nguyên dương. Sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ với $a = 10^n$ và $b = 1$, ta thu được

$$(10^n)^3 + 1 = (10^n + 1)(10^{2n} - 10^n + 1).$$

- Do $(10^n + 1) > 1$ và $(10^{2n} - 10^n + 1) > 1$ khi n là nguyên dương nên ta có đpcm.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Trong chứng minh bằng phản chứng ta sử dụng các giả thiết và mệnh đề phủ định kết quả cần chứng minh và từ đó cố gắng suy ra các điều phi lý hoặc các mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.
- Nghĩa là nếu phải chứng minh “Nếu P, Thì Q”, ta giả thiết rằng P và Not Q là đúng. Mâu thuẫn thu được có thể là một kết luận trái với một trong những giả thiết đã cho hoặc điều phi lý, chẳng hạn như $1 = 0$.
- Chứng minh căn bậc hai của 2 là số vô tỷ trong ví dụ mở đầu là một ví dụ chứng minh như vậy.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- **VÝ DỤ 1.** Cho 7 số nguyên cả số dương lẫn âm lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 số nguyên khác nhau cả thảy gấp thành một tam giác.
- **Giả sử:**
- Chú ý rằng, cần tìm 3 số nguyên cả thảy gấp thành một tam giác là tổng của 2 số nguyên nhỏ nhất lớn hơn số nguyên lớn nhất.
- Sắp các số nguyên khác cho theo thứ tự tăng dần của số nguyên, ta có:
$$10 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_7 < 100.$$

Cần chứng minh rằng trong dãy số xếp luôn tồn tại 3 số nguyên liên tiếp sao cho tổng của 2 số nguyên nhỏ nhất lớn hơn số nguyên cuối.
- Giả thiết ngược lại không xảy ra.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Tổ giả thiết phẫn chứng suy ra rằng thôi xẩy ra c,c bất 1/4ng thộc:

$$a_1 + a_2 \leq a_3,$$

$$a_2 + a_3 \leq a_4,$$

$$a_3 + a_4 \leq a_5,$$

$$a_4 + a_5 \leq a_6,$$

$$a_5 + a_6 \leq a_7.$$

- Tổ giả thiết a_1, a_2 cả gi, trb lín h-n 10, ta nhĒn 1/4c $a_3 > 20$. Tổ $a_2 > 10$ vµ $a_3 > 20$, ta nhĒn 1/4c $a_4 > 30$, ..., cø nh vĒy ta nhĒn 1/4c $a_5 > 50$, $a_6 > 80$ vµ $a_7 > 130$.
- BĒt 1/4ng thộc cuĒi cĒng mĒu thuĒn vĒi gi 1/4 thiĒt c,c 1/4c dĒi nhá h-n 100 vµ 1/4iĒu 1/4 chĒng minh kĒt luĒn cĒa VÝ dĒ 1.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- VÍ DỤ 2.** Các số nguyên của một tập hợp gì đó đều là số nguyên từ 0, 1, ..., 9 một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba số nguyên liên tiếp cả tổng của chúng sẽ lớn hơn 13.
- Giải:** Giải x_1, x_2, \dots, x_{10} là các số nguyên cho các số nguyên của 1, 2, ..., 10 của tập hợp gì đó. Giả sử ngược lại là không tồn tại ba số nguyên liên tiếp mà tổng của chúng sẽ lớn hơn 13. Khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 13,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 13,$$

.....

$$x_9 + x_{10} + x_1 \leq 13,$$

$$x_{10} + x_1 + x_2 \leq 13,$$

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Cúng vĩa vĩa tĩt c¶ c, c bĩt 14ng thøc trªn ta suy ra

$$3(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) \leq 130.$$

- Mĩt kh, c do

$$\begin{aligned} & 3(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) \\ &= 3(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \\ &= 135, \end{aligned}$$

- suy ra

$$135 = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) \leq 130.$$

- Mũu thuĩn thu ĩc ẽ chøng tá khĩng ẽnh trong vĩ dũ ĩng.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng không thể nối 31 máy vi tính thành một mạng sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác.
- **Giải:** Giả sử ngược lại là tìm được cách nối 31 máy sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác. Khi đó số lượng kênh nối là
$$5 \times 31 / 2 = 75,5 \text{ ?!}$$
- Điều phi lý thu được đã chứng minh khẳng định trong ví dụ là đúng.

2.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

- Chứng minh bằng phản đề sử dụng sự tương đương của hai mệnh đề "P kéo theo Q" và "Phủ định Q kéo theo phủ định P".

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

- Ví dụ, khẳng định “Nếu đó là xe của tôi thì nó có màu mận” là tương đương với “Nếu xe đó không có màu mận thì nó không phải của tôi”.
- Do đó, để chứng minh “Nếu P, Thì Q” bằng phương pháp phản đề, ta chứng minh “Nếu phủ định Q thì có phủ định P” ("If Not Q, Then Not P").

2.3. Chứng minh bằng phản đề

- **Ví dụ 1.** Nếu x và y là hai số nguyên sao cho $x+y$ là số chẵn, thì x và y có cùng tính chẵn lẻ.
- **CM.** Mệnh đề phản đề của khẳng định đã cho là “Nếu x và y là hai số nguyên không cùng chẵn lẻ, thì tổng của chúng là số lẻ.”
- Vì thế ta giả sử rằng x và y không cùng chẵn lẻ. Không giảm tổng quát, giả sử rằng x là chẵn còn y là lẻ. Khi đó ta tìm được các số nguyên k và m sao cho $x = 2k$ và $y = 2m+1$. Bây giờ ta tính tổng $x+y = 2k + 2m + 1 = 2(k+m) + 1$, mà rõ ràng là số lẻ.
- Từ đó suy ra khẳng định của ví dụ là đúng.

2.3. Chứng minh bằng phản đề

- **Ví dụ 2.** Nếu n là số nguyên dương sao cho $n \bmod 4$ là bằng 2 hoặc 3, thế thì n không là số chính phương.
- **CM.** Ta sẽ chứng minh mệnh đề phản đề: “Nếu n là số chính phương thì $n \bmod 4$ phải bằng 0 hoặc 1.”
- Giả sử $n = k^2$. Có 4 tình huống có thể xảy ra.
 - Nếu $k \bmod 4 = 0$, thì $k = 4q$, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16 q^2 = 4(4 q^2)$, suy ra $n \bmod 4 = 0$.
 - Nếu $k \bmod 4 = 1$, thì $k = 4q + 1$, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16 q^2 + 8 q + 1 = 4(4 q^2 + 2 q) + 1$, suy ra $n \bmod 4 = 1$.
 - Nếu $k \bmod 4 = 2$, thì $k = 4q + 2$, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16 q^2 + 16 q + 4 = 4(4 q^2 + 4 q + 1)$, suy ra $n \bmod 4 = 0$.
 - Nếu $k \bmod 4 = 3$, thì $k = 4q + 3$, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16 q^2 + 24 q + 9 = 4(4 q^2 + 6 q + 2) + 1$, suy ra $n \bmod 4 = 1$.

2.3. Chứng minh bằng phản đề

- Chứng minh bằng phản đề khác chứng minh phản chứng ở chỗ nào? Ta xét việc áp dụng chúng vào việc chứng minh "If P, Then Q".
- Chứng minh bằng phản chứng: Giả sử có P và Not Q ta cố gắng chỉ ra điều mâu thuẫn.
- Chứng minh bằng phản đề: Giả sử có Not Q và ta phải chứng minh not P.
- Phương pháp chứng minh bằng phản đề có ưu điểm là bạn có mục đích rõ ràng là: Chứng minh Not P. Trong phương pháp phản chứng, bạn phải cố gắng chỉ ra điều mâu thuẫn mà ngay từ đầu bạn chưa thể xác định được đó là điều gì.

2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học

- Đây là kỹ thuật chứng minh rất hữu ích khi ta phải chứng minh mệnh đề $P(n)$ là đúng với mọi số tự nhiên n .
- Tương tự như nguyên lý “hiệu ứng domino”.
- Sơ đồ chứng minh:

$P(0)$

$\forall n \geq 0 (P(n) \rightarrow P(n+1))$

Kết luận: $\forall n \geq 0 P(n)$

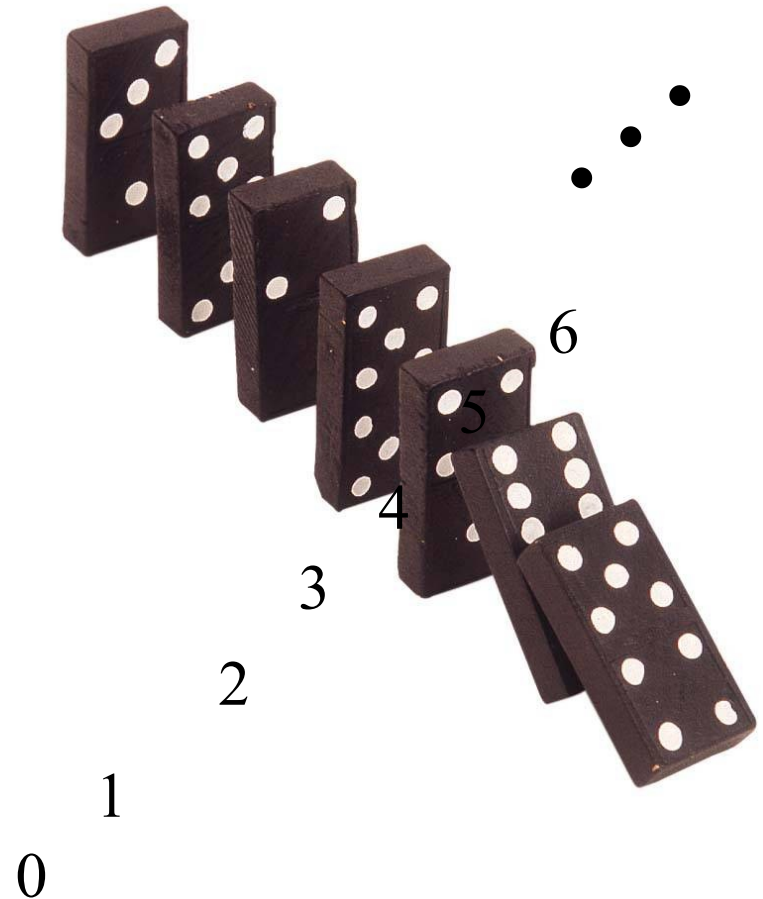
*“Nguyên lý qui nạp toán học
thứ nhất”*

*“The First Principle
of Mathematical Induction”*

The “Domino Effect”

- **Bước #1:** Domino #0 đổ.
- **Bước #2:** Với mọi $n \in \mathbf{N}$, nếu domino # n đổ, thì domino # $n+1$ cũng đổ.
- **Kết luận:** Tất cả các quân bài domino đều đổ!

Chú ý:
điều này xảy ra
ngay cả khi
có vô hạn
quân bài domino!



Tính đúng đắn của qui nạp (The Well-Ordering Property)

- Tính đúng đắn của chứng minh qui nạp là hệ quả của “*well-ordering property*”:
 - Mỗi tập con khác rỗng các số nguyên không âm đều có phần tử nhỏ nhất”.
- $$\forall \emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N} : \exists m \in S : \forall n \in S : m \leq n$$
- Từ đó suy ra tập $\{n | \neg P(n)\}$ (nếu khác rỗng) có phần tử nhỏ nhất m , thế nhưng điều đó là trái với điều đã chứng minh: Ta có $P(m-1)$ là đúng, suy ra $P((m-1)+1)$ là đúng?!

Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp yếu

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(m)$ là đúng.
- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(n)$ là đúng
- **Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

Qui nạp mạnh

(Second Principle of Induction – Strong Induction)

- Sơ đồ chứng minh:

P là đúng trong *mọi* tình huống trước

- $P(0)$ $\underbrace{\hspace{10em}}$
 $\forall n \geq 0: (\forall 0 \leq k \leq n \ P(k)) \rightarrow P(n+1)$
Kết luận $\forall n \geq 0: P(n)$

- Sự khác biệt với sơ đồ qui nạp “yếu” ở chỗ:
 - Bước chuyển qui nạp sử dụng giả thiết *mạnh* hơn: $P(k)$ là đúng cho *mọi* số nhỏ hơn $k < n+1$, chứ không phải chỉ riêng với $k=n$ như trong nguyên lý qui nạp thứ nhất.

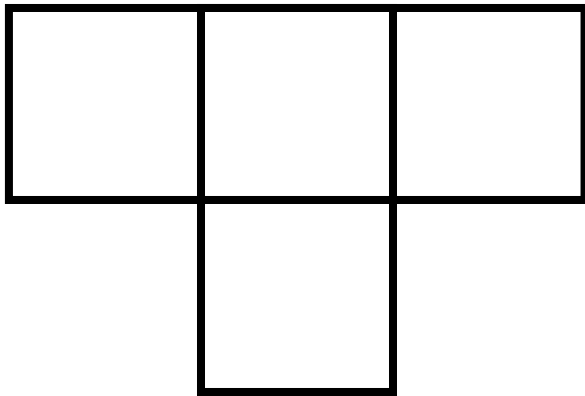
Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp mạnh

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq 0$.

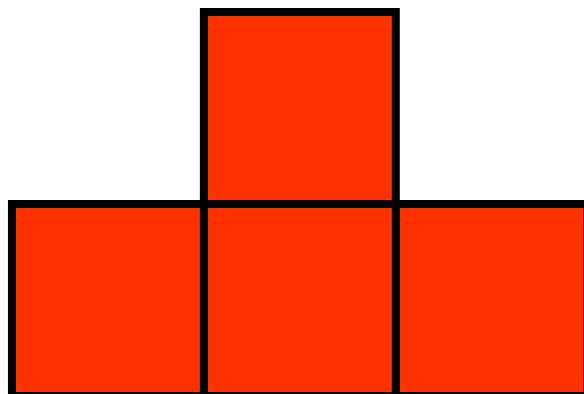
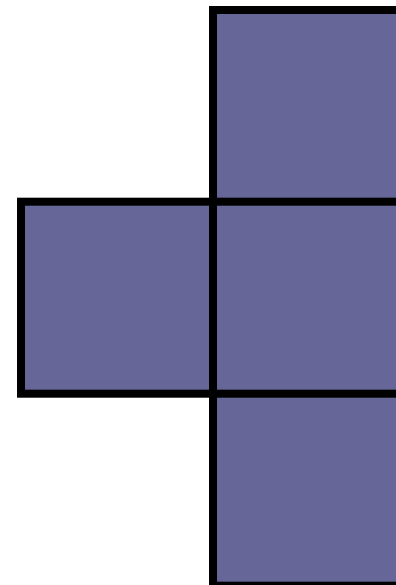
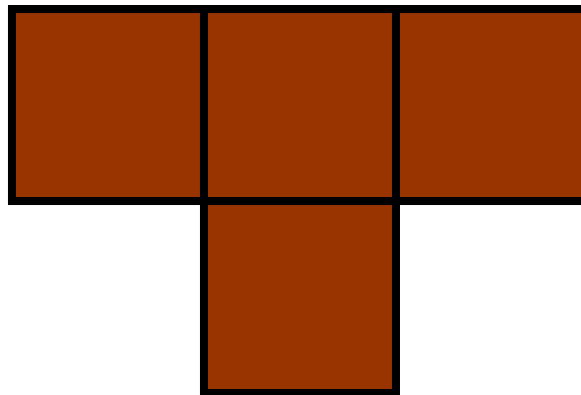
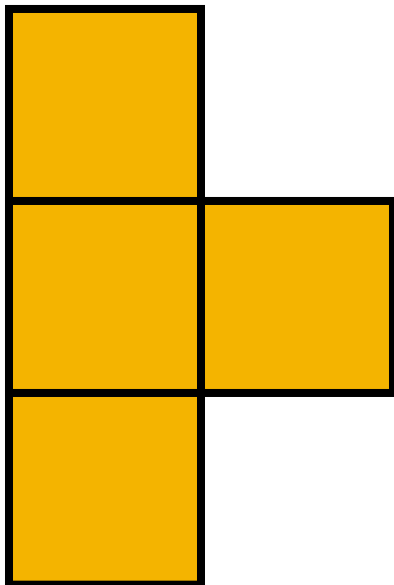
- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(0)$ là đúng.
- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(k)$ là đúng $\forall 0 \leq k \leq n$.
- **Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq 0$.

Ví dụ 1

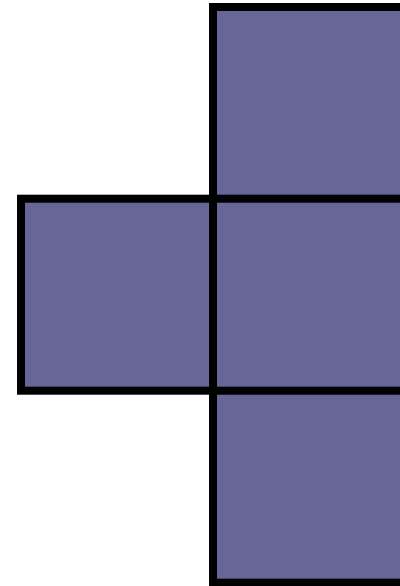
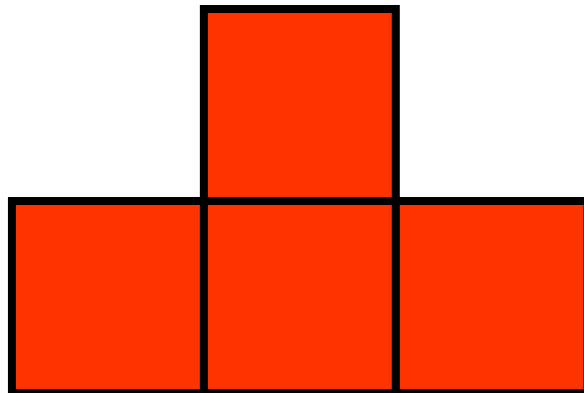
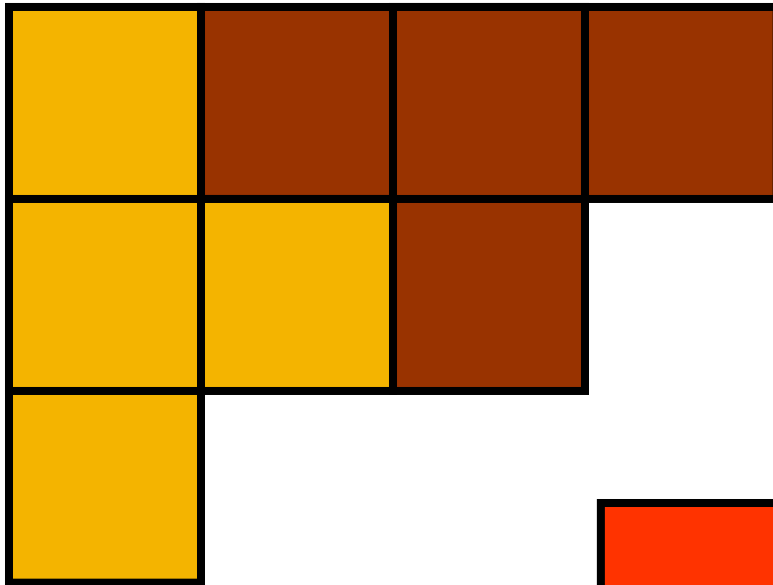
Chứng minh rằng luôn có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$ ($n > 1$) bởi các quân bài hình chữ T (T-omino).



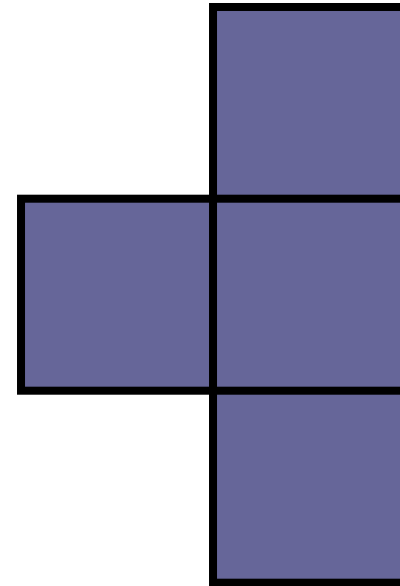
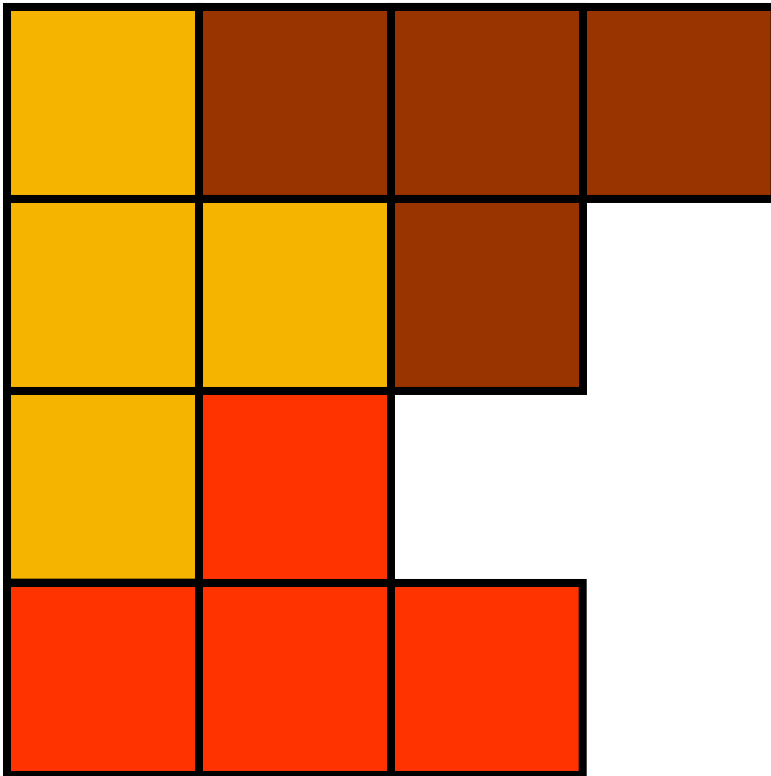
Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2 \times 2^2$



Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2 \times 2^2$



Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2 \times 2^2$



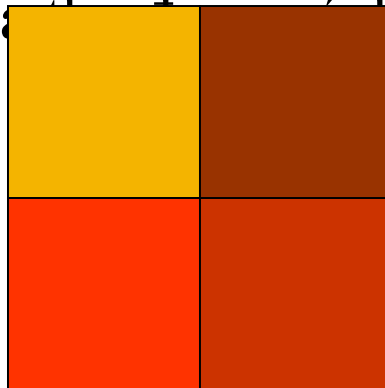
Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2 \times 2^2$

Yellow	Brown	Brown	Brown
Yellow	Yellow	Brown	Blue
Yellow	Red	Blue	Blue
Red	Red	Red	Blue

Bước chuyển qui nạp

Giả sử ta có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$. Ta phải chứng minh có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

Thực vậy, chia bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ra thành 4 phần, mỗi phần kích thước $2^n \times 2^n$. Theo giả thiết qui nạp mỗi phần này đều có thể phủ kín bởi các quân bài chữ T. Đặt chúng vào bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ta được một phủ cần tìm.



VÍ DỤ 2

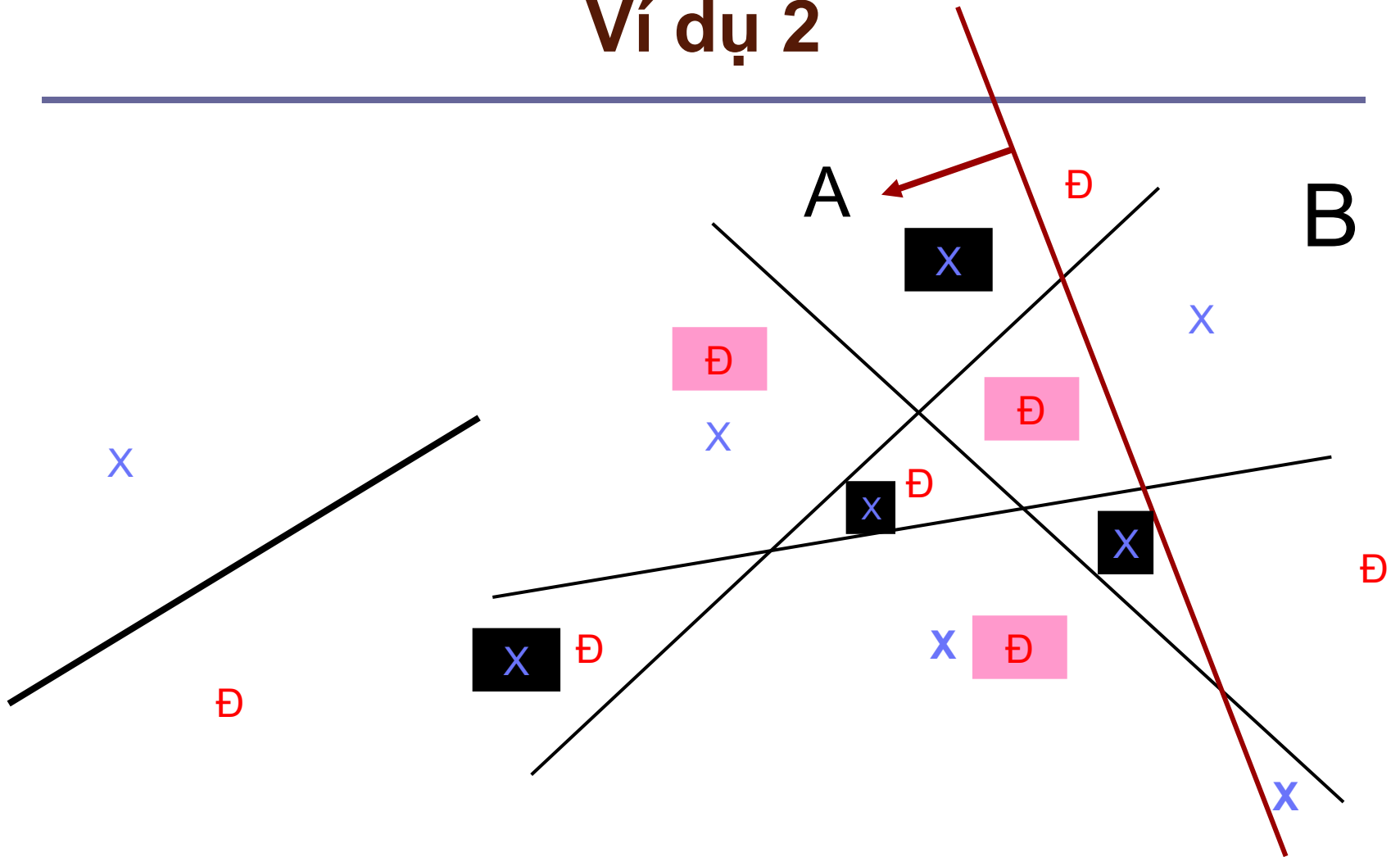
- Trên mặt phẳng vẽ n đường thẳng ở vị trí tổng quát. Hỏi ít nhất phải sử dụng bao nhiêu màu để tô các phần bị chia bởi các đường thẳng này sao cho không có hai phần có chung cạnh nào bị tô bởi cùng một màu?
- $P(n)$: Luôn có thể tô các phần được chia bởi n đường thẳng vẽ ở vị trí tổng quát bởi 2 màu xanh và đỏ sao cho không có hai phần có chung cạnh nào bị tô bởi cùng một màu.

Ví dụ 2

- Cơ sở qui nạp: Khi $n = 1$, mặt phẳng được chia làm hai phần, một phần sẽ tô màu xanh, phần còn lại tô màu đỏ.
- Giả sử khẳng định đúng với $n-1$, ta chứng minh khẳng định đúng với n .
- Thực vậy, trước hết ta vẽ $n-1$ đường thẳng. Theo giả thiết qui nạp có thể tô màu các phần sinh ra bởi hai màu thoả mãn điều kiện đặt ra. Bây giờ ta vẽ đường thẳng thứ n . Đường thẳng này chia mặt phẳng ra làm hai phần, gọi là phần A và B. Các phần của mặt phẳng được chia bởi n đường thẳng ở bên nửa mặt phẳng B sẽ giữ nguyên màu đã tô trước đó. Trái lại, các phần trong nửa mặt phẳng A mỗi phần sẽ được tô màu đảo ngược xanh thành đỏ và đỏ thành xanh. Rõ ràng:
 - Hai phần có chung cạnh ở cùng một nửa mặt phẳng A hoặc B là không có chung màu.
 - Hai phần có chung cạnh trên đường thẳng thứ n rõ ràng cũng không bị tô cùng màu (do màu bên nửa A bị đảo ngược).
- Vậy $P(n)$ đúng. Theo qui nạp khẳng định đúng với mọi n .



Ví dụ 2



Ví dụ 3

- Kết thúc một giải vô địch bóng chuyền gồm n đội tham gia, trong đó các đội thi đấu vòng tròn một lượt người ta mời các đội trưởng của các đội ra đứng thành một hàng ngang để chụp ảnh.
- $P(n)$: Luôn có thể xếp n đội trưởng ra thành một hàng ngang sao cho ngoại trừ hai người đứng ở hai mép, mỗi người trong hàng luôn đứng cạnh một đội trưởng của đội thắng đội mình và một đội trưởng của đội thua đội mình trong giải.

Ví dụ 3

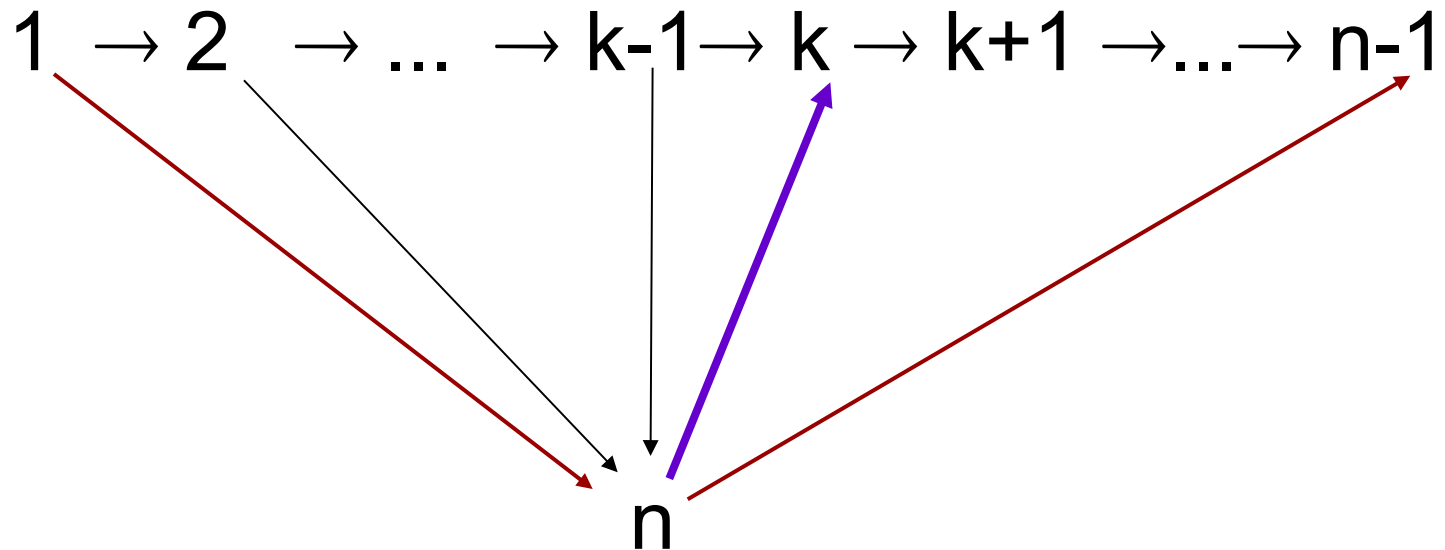
- **Chứng minh.** Ta chứng minh bằng qui nạp toán học.
- Cơ sở qui nạp: Rõ ràng $P(1)$ là đúng.
- Giả sử $P(n-1)$ là đúng, ta chứng minh $P(n)$ là đúng.
- Trước hết, ta xếp $n-1$ đội trưởng của các đội $1, 2, \dots, n-1$. Theo giả thiết qui nạp, luôn có thể xếp họ ra thành hàng ngang thoả mãn điều kiện đầu bài. Không giảm tổng quát ta có thể giả thiết hàng đó là:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1.$$

Ví dụ 3

- Bây giờ ta sẽ tìm chỗ cho đội trưởng của đội n . Có 3 tình huống:
 - Nếu đội n thắng đội 1, thì hàng cần tìm là:
$$n \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1.$$
 - Nếu đội n thua đội $n-1$, thì hàng cần tìm là:
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow n.$$
 - Nếu đội n thua đội 1 và thắng đội $n-1$.
 - Gọi k là chỉ số nhỏ nhất sao cho đội n thắng đội k .
 - Rõ ràng tồn tại k như vậy.
 - Hàng cần thu được từ hàng gồm $n-1$ đội đã xếp bằng cách chen đội trưởng đội n vào vị trí giữa đội trưởng của đội $k-1$ và đội k .

Ví dụ 3



Hàng cần tìm:

$1 \rightarrow \dots \rightarrow k-1 \rightarrow n \rightarrow k \rightarrow k+1 \rightarrow \dots \rightarrow n-1$

Paradox

Định lý: Tất cả các con ngựa có cùng một màu.

Proof: Qui nạp theo n

Giả thiết qui nạp:

$P(n) ::=$ n con ngựa bất kỳ luôn có cùng một màu

Cơ sở qui nạp ($n=1$):

Chỉ có 1 con tất nhiên là chỉ có một màu!

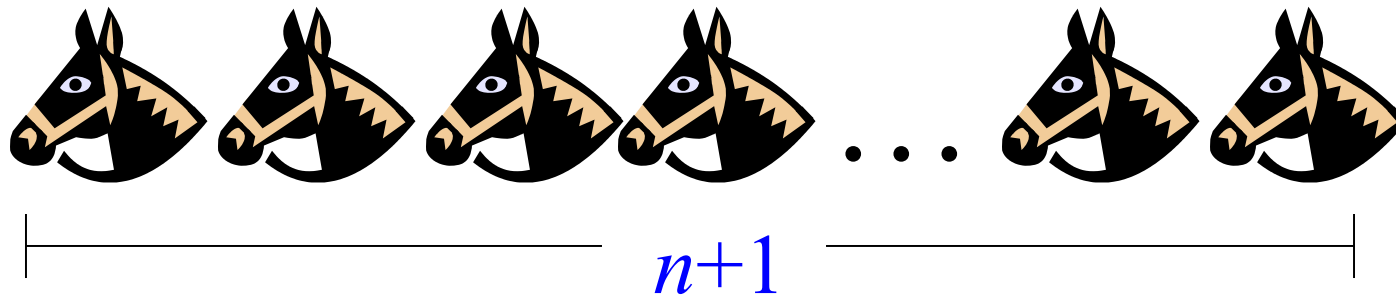


Paradox

Bước chuyển qui nạp

Giả sử n con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh $n+1$ con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.



Paradox

Bước chuyển qui nạp

Giả sử n con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh $n+1$ con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

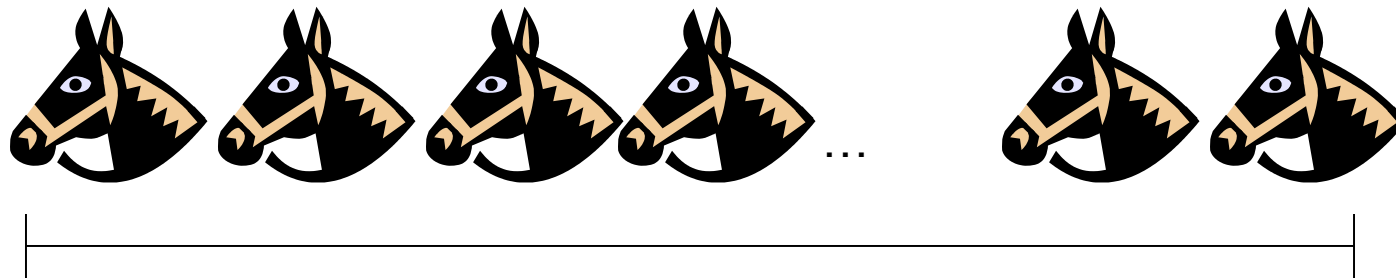


Paradox

Bước chuyển qui nạp

Giả sử n con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh $n+1$ con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.



Suy ra $n+1$ con ngựa có cùng một màu!

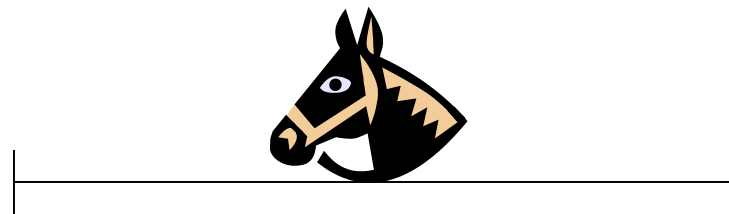
Paradox

Lỗi ở đâu?

$n = 1$

Chứng minh $P(n) \rightarrow P(n+1)$

là **false** nếu $n = 1$, bởi vì hai nhóm ngựa
là không giao nhau.



Tập thứ nhất gồm $n=1$ con ngựa

Tập thứ hai gồm $n=1$ con ngựa



A bit of humor...



Chương 2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet
4. Định lý Ramsey

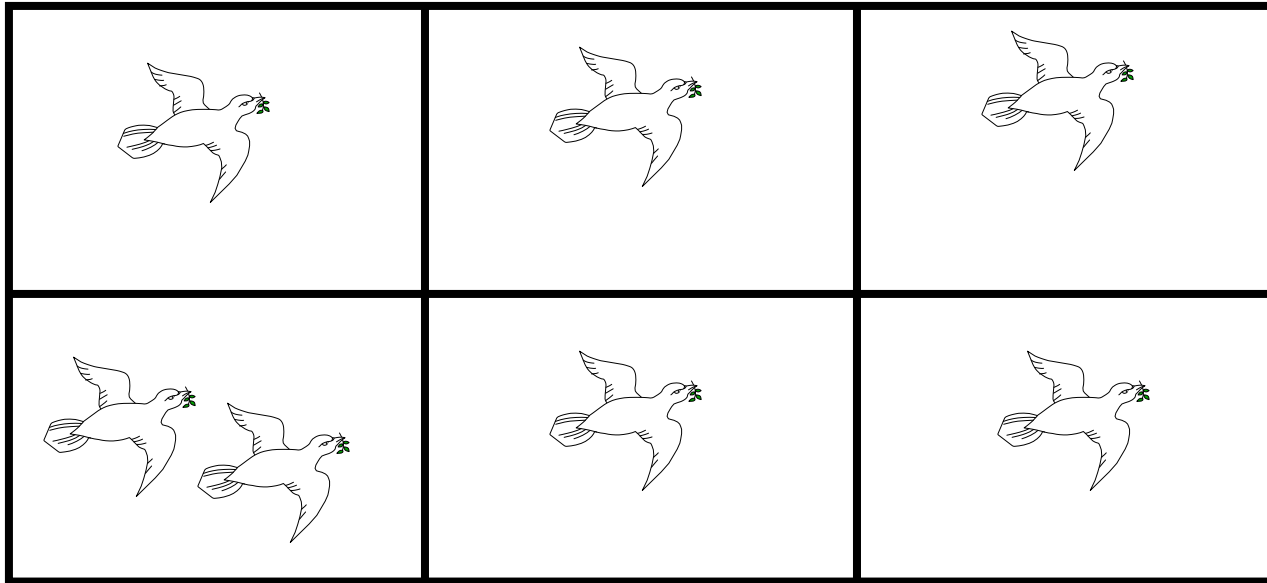
3. Nguyên lý Dirichlet

3.1. Phát biểu nguyên lý

3.2. Các ví dụ ứng dụng

3.1. Phát biểu nguyên lý (Pigeonhole Principle)

Nếu xếp nhiều hơn n đối tượng vào n cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa ít ra là hai đối tượng.



3.1. Phát biểu nguyên lý (Pigeonhole Principle)

Chứng minh.

Việc chứng minh nguyên lý trên chỉ là một lập luận phản chứng đơn giản. Giả sử ngược lại là không tìm được cái hộp nào chứa không ít hơn 2 đối tượng. Điều đó có nghĩa là mỗi cái hộp chứa không quá một đối tượng. Từ đó suy ra tổng số đối tượng xếp trong n cái hộp là không vượt quá n , trái với giả thiết là có nhiều hơn n đối tượng được xếp trong chúng.

3.1. Phát biểu nguyên lý (Pigeonhole Principle)

Lập luận trên đã được nhà toán học người Đức là Dirichlet vận dụng thành công vào việc giải quyết rất nhiều bài toán tồn tại tổ hợp.

Trong lập luận của Dirichlet, các đối tượng được xét là các quả táo còn các cái hộp được thay bởi các cái giỏ: “Nếu đem bỏ nhiều hơn n quả táo vào n cái giỏ thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái giỏ chứa ít ra là 2 quả táo”.

3.1. Phát biểu nguyên lý (Pigeonhole Principle)

Trong tài liệu tiếng Anh lập luận đó lại được trình bày trong ngôn ngữ của các con chim bồ câu:

“Nếu đem nhốt nhiều hơn n con chim bồ câu vào n cái lồng thì bao giờ cũng tìm được ít nhất 1 cái lồng chứa ít ra là 2 con chim bồ câu”.

Vì thế nguyên lý còn có tên gọi là “Nguyên lý về các lồng chim bồ câu”.

Trong ngôn ngữ của lý thuyết tập hợp, nguyên lý có thể phát biểu như sau:

“Nếu tập X gồm nhiều hơn n phần tử được phân hoạch thành n tập con, thì bao giờ cũng tìm được một tập con trong phân hoạch đó có lực lượng ít ra là 2”

Ví dụ

- **VÝ DŨ 1.** Trong sè 367 ngêi bao giê còng t×m ®íc hai ngêi cũ nguy sinh nhÊt giềng nhau bời v× chØ cũ tÊt c¶ 366 nguy sinh nhÊt kh, c nhau.
- **VÝ DŨ 2.** Trong kú thi hăc sinh giái ®iÓm búi thi ®íc ®, nh gi, bời mét sè nguy^an trong kho¶ng tĩ 0 ®ĩn 100. Hái r»ng Ýt nhÊt ph¶i cũ bao nhi^au hăc sinh dù thi ®Ó cho ch³/₄c ch³/₄n t×m ®íc hai hăc sinh cũ kĩt qu¶ thi nh nhau?
- **Gi¶i.** Theo nguy^an lý Dirichlet, sè hăc sinh cũn t×m lụ 102, v× ta cũ 101 kĩt qu¶ ®iÓm thi kh, c nhau.

Ví dụ

- **VÍ DỤ 3.** Trong số những ngôi nhà trên thị trường hiện tại có hai ngôi nhà hùn cùng nhau.

- **Giải:** Tất cả chỉ có

$$2^{32} = 4\,294\,967\,296$$

hùn cùng khác nhau mà số ngôi nhà hiện tại có thể tính toán được như vậy, 5 tỷ.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Generalized Pigeonhole Principle

- Khi số lượng quả táo bỏ vào k cái giỏ vượt quá số lượng cái giỏ nhiều lần thì rõ ràng khẳng định trong nguyên lý về sự tồn tại cái giỏ chứa ít ra là 2 quả táo là quá ít. Trong trường hợp như vậy ta sử dụng nguyên lý Dirichlet tổng quát sau đây:
- “*Nếu đem bỏ n quả táo vào k cái giỏ thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái giỏ chứa ít ra là $\lceil n/k \rceil$ quả táo*”.
- Ở đây ký hiệu $\lceil \alpha \rceil$ gọi là phần nguyên già của số thực α - theo định nghĩa là số nguyên nhỏ nhất còn lớn hơn hoặc bằng α .

Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Generalized Pigeonhole Principle

- Chứng minh nguyên lý tổng quát: Giả sử khẳng định của nguyên lý là không đúng. Khi đó mỗi cái giỏ chứa không quá $\lceil n/k \rceil - 1$ quả táo. Từ đó suy ra tổng số quả táo bỏ trong k cái giỏ không vượt quá

$$k(\lceil n/k \rceil - 1) < k((n/k + 1) - 1) = n.$$

Mâu thuẫn thu được đã chứng minh nguyên lý.

Ví dụ

- **VÝ DÔ 4.** Trong 100 ngôi cả Ýt nhất 9 ngôi sinh cùng mét th_{ng}.
- **Gi¶i:** XÕp nh÷ng ngôi cùng sinh mét th_{ng} vµo mét năm. Cả 12 th_{ng} tÊt c¶. VÊy theo nguyªn lý Dirichlet, tån t'í Ýt nhất mét năm cũ kh«ng Ýt h-n $\lceil 100/12 \rceil = 9$ ngôi.
- **VÝ DÔ 5.** Cũ n' m lo'í hác bæng kh, c nhau. Háí r»ng ph¶i cũ Ýt nhất bao nhiªu sinh viªn ®Ó ch^{3/4}c ch^{3/4}n r»ng cũ Ýt ra lµ s, u ng êi cùng nhËn hác bæng nh nhau?
- **Gi¶i:** Sè sinh viªn Ýt nhất cũn cũ ®Ó ®¶m b¶o ch^{3/4}c ch^{3/4}n cũ 6 sinh viªn cùng nhËn hác bæng nh nhau lµ sè nguyªn nhá nhất n sao cho $\lceil n/5 \rceil = 6$. Sè nguyªn nhá nhất ®ã lµ $n = 5 \times 5 + 1 = 26$. VÊy 26 lµ sè lĩng sinh viªn nhá nhất ®¶m b¶o ch^{3/4}c ch^{3/4}n lµ cũ s, u sinh viªn cùng hẽng mét lo'í hác bæng.

Ví dụ

- **VÝ DŨ 6.** Hái Ýt nhÊt ph¶i cũ bao nhiªu ngêi cũ mÆt trªn tr¶i ®Êt ®Ó luªn t×m ®Êc ba ngêi cũ hµm rªng giềng nhau?

- **Giải:** Tất cả chỉ có

$$2^{32} = 4\,294\,967\,296$$

hµm rªng kh¶c nhau. Ta cũn t×m sè n nhá nhÊt ®Ó $\lceil n/2^{32} \rceil = 3$. Tõ ®ã sè ngêi cũn t×m lµ $2 \times 2^{32} + 1 = 8\,589\,934\,593$.

3.2. Các ví dụ ứng dụng

- Trong các ví dụ ứng dụng phức tạp hơn của nguyên lý Dirichlet, cái giở và quả táo cần phải được lựa chọn khôn khéo hơn rất nhiều.
- Trong phần này ta sẽ xét một số ví dụ như vậy.

Ví dụ 1

- **Ví dụ 1.** Trong một phòng họp bao gồm cùng $t \times m$ \mathbb{R} íc hai người cũ sẽ ngồi quen trong sẽ nh÷ng người dù họp lại bằng nhau.
- **Gi¶i:** Giải sẽ người dù họp lại n , khi \mathbb{R} ã sẽ người quen cũa một người nọ \mathbb{R} ã trong phòng họp chØ cũ thÓ nhËn cũc gi, trÞ tũ 0 \mathbb{R} ũn $n-1$. Rê rúng trong phòng kh«ng thÓ \mathbb{R} ảng thêi cũ người cũ sẽ người quen lại 0 (tức lại kh«ng quen ai cũ) vù cũ người cũ sẽ người quen lại $n-1$ (tức lại quen tÊt cũ). V× vËy, theo sẽ lĩng người quen ta chØ cũ thÓ ph©n n người ra thụnh $n-1$ nhãm. Theo nguyªn lý Dirichlet suy ra cũ Ýt nhÊt một nhãm ph¶i cũ kh«ng Ýt h÷n hai người, tức lại lu«n $t \times m$ \mathbb{R} íc Ýt ra lại hai người cũ sẽ người quen lại bằng nhau.

Ví dụ 2

- **VÍ DỤ 2.** Trong một tháng gồm 30 ngày một đội băng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất một trận, nhưng không quá 45 trận. Hãy chứng minh rằng phải tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tiếp nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.
- **Giải:** Gọi số a_j trận thắng sẽ trên thi đấu cho đến hết ngày thứ j của đội. Khi đó

$$a_1, a_2, \dots, a_{30}$$

là dãy tăng các số nguyên dương mà rằng thì $1 \leq a_j \leq 45$.
Suy ra dãy

$$a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14$$

là dãy tăng các số nguyên dương mà $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.

Ví dụ 2

- Tập các số nguyên dương

$$a_1, a_2, \dots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14,$$

trong đó tập các số nguyên dương khác nhau có 59.

- Với mọi tập theo nguyên lý Dirichlet, hai trong số các số nguyên dương phải có cùng nhau. Với các số a_1, \dots, a_{30} là các số khác nhau và các số $a_1+14, \dots, a_{30}+14$ cũng là các số khác nhau, nên suy ra phải tồn tại một số i và j sao cho $a_i = a_j+14$. Điều này cũng nghĩa là các số có cùng nhau trong giai đoạn tiếp theo của dãy số.

Ví dụ 3

- **VÝ dồ 3.** Chøng minh rằng, trong sè $n+1$ sè nguy^an d^ong, mçi sè kh^ong lín h^on $2n$, bao giê còng t^om ®íc hai sè sao cho sè n^oy chia h^ot cho sè kia.

- **Gi¶i:** Gäi c^oc sè ®íc cho l^op

$$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}.$$

- Vi^ot mçi mét sè a_j trong $n+1$ sè tr^an d^oi d^ong:

$$a_j = 2^{k(j)} q_j, j = 1, 2, \dots, n+1$$

- trong ®ã $k(j)$ l^op nguy^an kh^ong ®m, q_j l^op sè l^oi.

Ví dụ 3

- Các số q_1, q_2, \dots, q_{n+1} là các số nguyên lẻ, mọi số không lớn hơn $2n$.
- Do trong \mathbb{Z} tồn tại 1 số nguyên $2n$ cho cả n số lẻ, nên từ nguyên lý Dirichlet suy ra là hai trong số các số q_1, q_2, \dots, q_{n+1} bằng nhau, tức là tồn tại hai số i và j sao cho $q_i = q_j = q$.

- Khi đó

$$a_i = 2^{k(i)}q, a_j = 2^{k(j)}q.$$

- Suy ra nếu $k(i) < k(j)$ thì a_j chia hết cho a_i , còn nếu $k(i) \geq k(j)$ thì a_i chia hết cho a_j .

Ví dụ 4

- **Ví dụ 4.** Trên mặt phẳng cho 5 điểm có toạ độ nguyên $M_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \dots, 5$. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 điểm sao cho đoạn thẳng nối chúng, ngoài hai đầu mút, còn đi qua một điểm có toạ độ nguyên khác nữa.
- **Giải.** Ta sẽ chứng minh: Luôn tìm được 2 điểm sao cho điểm giữa của đoạn thẳng nối chúng có toạ độ nguyên. Theo tính chẵn lẻ của hai toạ độ, 5 điểm đã cho có thể phân vào nhiều nhất là 4 nhóm:
(Chẵn, Chẵn), (Chẵn, Lẻ), (Lẻ, Chẵn), (Lẻ, Lẻ).

Ví dụ 4

- Từ đó theo nguyên lý Dirichlet phải tìm được một nhóm chứa ít ra là 2 điểm, chẳng hạn đó là M_i , M_j . Khi đó điểm giữa G_{ij} của đoạn thẳng nối M_i và M_j có tọa độ

$$G_{ij} = ((x_i+x_j)/2, (y_i+y_j)/2).$$

- Do x_i và x_j cũng như y_i và y_j có cùng tính chẵn lẻ nên các tọa độ của G_{ij} là các số nguyên. Khẳng định của ví dụ được chứng minh.
- Khẳng định của ví dụ có thể tổng quát cho không gian n -chiều: “Trong không gian n -chiều cho $2^n + 1$ điểm có tọa độ nguyên. Khi đó luôn tìm được 2 điểm sao cho đoạn thẳng nối chúng, ngoài hai đầu mút, còn đi qua một điểm có tọa độ nguyên khác nữa”.

Ví dụ 5

Trước hết ta cần một số khái niệm.

- Cho a_1, a_2, \dots, a_n là dãy số thực.
- n được gọi là **độ dài** của dãy số đã cho.
- Ta gọi **dãy con** của dãy đã cho là dãy có dạng $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$, trong đó $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$
- Dãy số được gọi là **tăng ngặt** nếu mỗi số hạng đứng sau luôn lớn hơn số hạng đứng trước.
- Dãy số được gọi là **giảm ngặt** nếu mỗi số hạng đứng sau luôn nhỏ hơn số hạng đứng trước..
 - Ví dụ: Cho dãy số
1, 5, 6, 2, 3, 9.
 - 5, 6, 9 là dãy con tăng ngặt của dãy đã cho
 - 6, 3 là dãy con giảm ngặt của dãy đã cho

Ví dụ 5

- **Định lý:** Mỗi dãy gồm n^2+1 số *phân biệt* (nghĩa là các phân tử là khác nhau từng đôi) luôn chứa hoặc dãy con tăng ngặt độ dài $n+1$ hoặc dãy con giảm ngặt độ dài $n+1$.

- **Ví dụ:** Dãy

8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

gồm $10 = 3^2+1$ số hạng phải chứa hoặc dãy con tăng ngặt độ dài 4 phần tử hoặc dãy con giảm ngặt độ dài 4 phần tử.

1, 4, 6, 12

1, 4, 6, 7

11, 9, 6, 5

Ví dụ 5

- **Chứng minh:** Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ là dãy gồm n^2+1 số phân biệt. Gán cho mỗi số hạng a_k của dãy số cặp có thứ tự (i_k, d_k) , trong đó i_k là độ dài của dãy con tăng dài nhất bắt đầu từ a_k còn d_k là độ dài của dãy con giảm dài nhất bắt đầu từ a_k .

Ví dụ: 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

$$a_2 = 11, (2, 4)$$

$$a_4 = 1, (4, 1)$$

- Bây giờ giả sử không tồn tại dãy tăng cũng như dãy giảm có độ dài $n+1$. Khi đó i_k và d_k là các số nguyên dương $\leq n$, với $k = 1, 2, \dots, n^2+1$.

Ví dụ 5

- Do $1 \leq i_k, d_k \leq n$, nên theo qui tắc nhân có tất cả n^2 cặp có thứ tự dạng (i_k, d_k) khác nhau.
- Do ta có tất cả $n^2 + 1$ cặp (i_k, d_k) , nên theo nguyên lý Dirichlet, hai trong số chúng là trùng nhau.
- Tức là tồn tại hai số hạng a_s và a_t trong dãy đã cho với $s < t$ sao cho $i_s = i_t$ và $d_s = d_t$.
- Ta sẽ chỉ ra điều này là không thể xảy ra.
- Do các số hạng của dãy là phân biệt, nên hoặc là $a_s < a_t$ hoặc là $a_s > a_t$.

Ví dụ 5

- Nếu $a_s < a_t$, khi đó do $i_s = i_t$, ta có thể xây dựng dãy con tăng độ dài i_t+1 bắt đầu từ a_s , bằng cách nối đuôi nó bởi dãy con tăng độ dài i_t , bắt đầu từ a_t .

$\dots, a_s, \dots, a_t, \dots$

- Suy ra dãy con tăng dài nhất bắt đầu từ a_s có độ dài ít ra là $i_t + 1$, nghĩa là $i_s > i_t$. Mâu thuẫn với giả thiết $i_s = i_t$.
- Tương tự như vậy, nếu $a_s > a_t$, ta có thể chỉ ra d_s phải lớn hơn d_t , và cũng đi đến mâu thuẫn.
- Định lý được chứng minh.



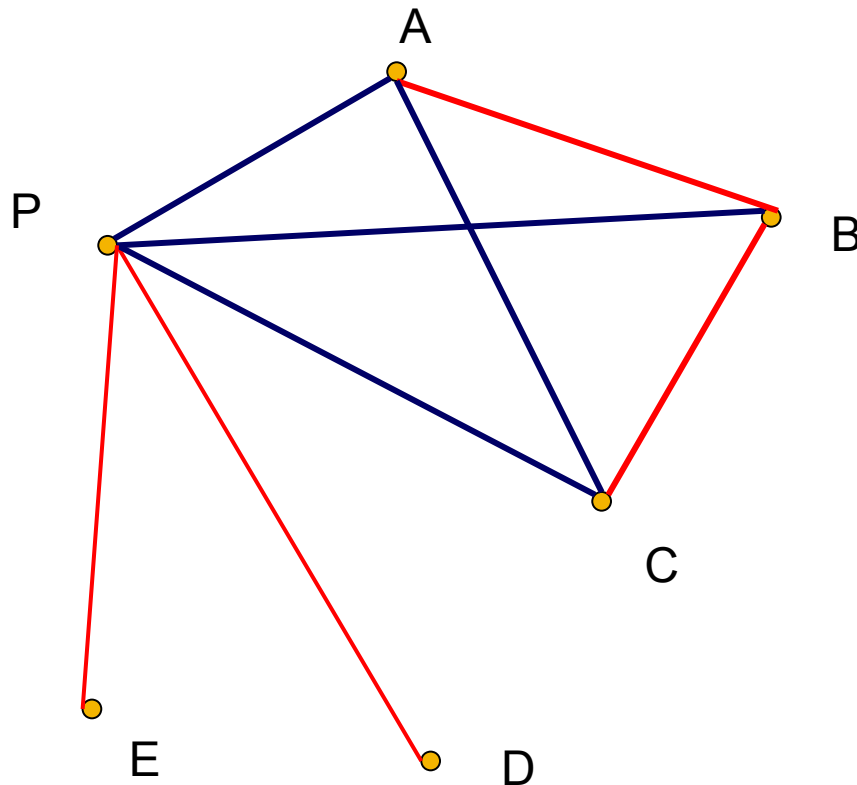
Chương 2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet
4. Định lý Ramsey

Ví dụ mở đầu

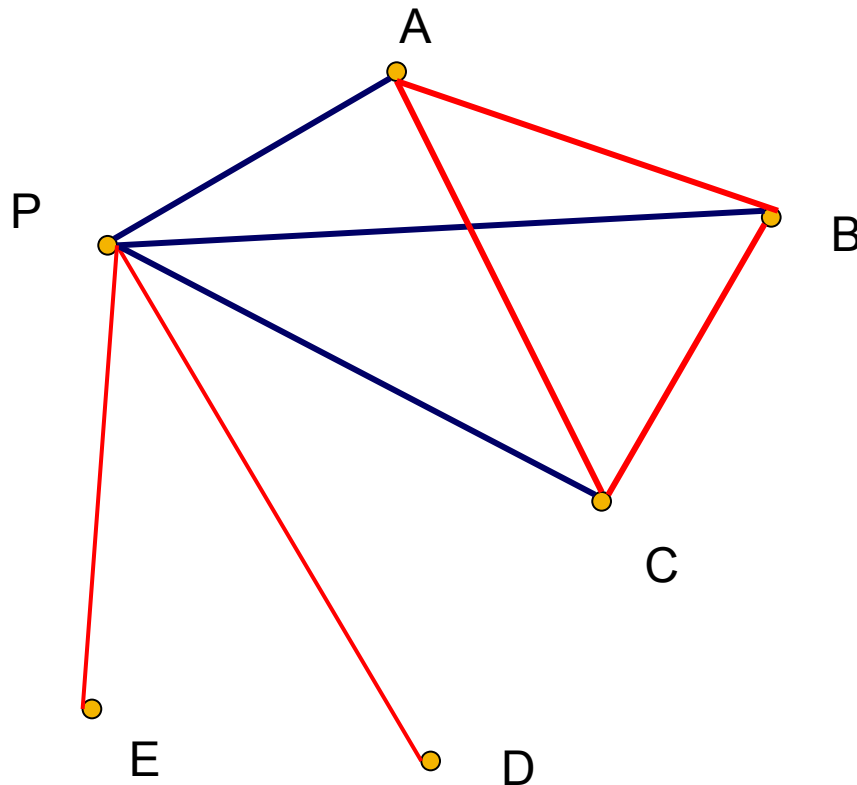
- Trong mặt phẳng cho 6 điểm khác nhau tổng đôi một bất kỳ cùng màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 điểm sao cho các cung nối chúng cả cùng một màu (ta sẽ cần bổ sung thêm tam giác xanh hoặc đỏ).
- **Giới:** Chọn điểm P vào đó. Tổng tất cả 5 cung nối với 5 điểm còn lại. Theo nguyên lý Dirichlet, cả 3 trong số 5 cung đó phải có cùng một màu, chẳng hạn là màu xanh. Gọi số đó là k và các cung PA, PB, PC.
- Nếu hai trong số 3 cung AB, AC, BC cả màu xanh thì tất cả cũng với hai trong số ba cung PA, PB, PC tạo thành một tam giác xanh. Nếu ngược lại thì tam giác ABC là một tam giác đỏ.

Ví dụ mở đầu



Nếu nh mét trong sè 3 cung AB , AC , BC cả mụu xanh thì nã cũng vớ hai trong sè ba cung PA , PB , PC t¹o thụn nh mét tam gi, c xanh.

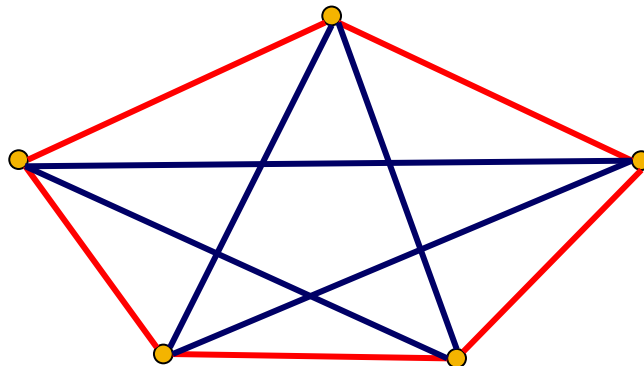
Ví dụ mở đầu



Nếu cả 3 cung
 AB , AC , BC có
màu đỏ thì chúng
tạo thành một tam
giác đỏ.

Phân tích ví dụ

- Một cách phát biểu khác của kết quả vừa chứng minh là: Trong 6 người thì một bạn thích luôn tất cả hoặc ba người thích một quen nhau hoặc ba người thích không quen nhau.
- Có thể thấy rằng nếu thay con số 6 bởi $n > 6$ thì khẳng định trong ví dụ vẫn đúng. Nhưng nếu thay con số 6 bởi 5 thì khẳng định trong ví dụ không còn đúng nữa như chỉ ra trong hình vẽ sau đây



Phân tích ví dụ

- Như vậy có thể thấy 6 là **giá trị n nhỏ nhất** để khẳng định trong ví dụ là đúng.
- Chúng ta cần tìm ra các câu hỏi tương tự như: Hai Ýt nhất phải có bao nhiêu người ở chỗ chỗ nào thì ít nhất 4 người ở chỗ chỗ nào đó quen nhau? Hai Ýt nhất phải có bao nhiêu người ở chỗ chỗ nào thì ít nhất 5 người ở chỗ chỗ nào đó quen nhau?
- Con sẽ nhận ra rằng ở chỗ chỗ nào đó trong các câu hỏi trên ít nhất sẽ có **số Ramsey**, mang tên như vậy của hai người Anh để chứng minh ít nhất phải có bao nhiêu người trong lý thuyết tập hợp để đảm bảo sự tồn tại của nguyên lý Dirichlet.

Các số Ramsey

- Số cần thiết biểu trưng cho kết quả tổng quát hơn chứng tỏ cần ít nhất một số khi nào.
- **Định nghĩa 1.** Gọi K_n là đồ thị gồm hai tập V, E , trong đó V là tập gồm n điểm và E là tập các cạnh nối giữa các cặp điểm trong V .
 - Ta sẽ ký hiệu $K_n = (V, E)$.
 - Các phần tử của V được gọi là các đỉnh, và V là tập đỉnh của K_n .
 - Mọi cặp hai đỉnh $u, v \in V$ sẽ được gọi là một cạnh của K_n và ký hiệu là (u, v) , và tập E được gọi là tập cạnh của K_n .

Các số Ramsey

- Ta cần một biểu thức kết quả trong ví dụ đồ thị sau: “Cho mọi đồ thị của K_6 đều có một tập con hai đỉnh cùng màu hoặc một tập con ba đỉnh cùng màu (tức là một tập con ba đỉnh cùng màu hoặc một tập con ba đỉnh cùng màu).” Khi nào K_6 luôn chứa một tập con ba đỉnh cùng màu hoặc một tập con ba đỉnh cùng màu (tức là một tập con ba đỉnh cùng màu hoặc một tập con ba đỉnh cùng màu)?
- Chúng ta sẽ thấy rằng số 6 là một số Ramsey (3,3)-Ramsey.
- **Định lý 2.** Cho i và j là hai số nguyên sao cho $i \geq 2, j \geq 2$. Số nguyên nhỏ nhất m là một số Ramsey (i,j) -Ramsey nếu K_m với mọi đồ thị đều có một tập con i đỉnh cùng màu hoặc một tập con j đỉnh cùng màu.

Các số Ramsey

- Tổ hợp phân tích dễ thấy 6 cả tính chất (3,3)-Ramsey, và mãi sẽ $n < 6$ không cả tính chất này. Vậy 6 là nhỏ nhất cả tính chất (3,3)-Ramsey.
- **Định nghĩa 3.** Số Ramsey $R(i, j)$ là nguyên dương nhỏ nhất cả tính chất (i, j)-Ramsey.
- Chẳng hạn, tổ hợp quật vừa trình bày dễ thấy, ta cả $R(3, 3) = 6$.
- **Ví dụ.** Tìm $R(2, 7)$ - số nguyên dương nhỏ nhất cả tính chất (2, 7)-Ramsey.
- **Giới:** Trích hỏi ta tìm số nguyên dương n sao cho với mọi cách tô các cạnh của K_n bởi hai màu xanh, luôn tìm được hoặc K_2 hoặc K_7 xanh. $R(2, 7)$ là nhỏ nhất cả tính chất này.

Các số Ramsey

- Xét một cách tô màu (tuyệt ý) các cạnh của K_7 . Rõ ràng hoặc là tìm được một tập nhỏ nhất các cạnh của K_7 là một tập đơn sắc, hoặc là tìm được một tập nhỏ nhất các cạnh của nó là một tập đơn sắc. Nếu cả hai tập đơn sắc đều có ít nhất 2 đỉnh thì ta có K_2 đơn sắc. Còn nếu tập đơn sắc chỉ có 1 đỉnh thì ta có K_1 đơn sắc. Vậy sẽ 7 cách tính chất (2,7)-Ramsey, và vì thế $R(2,7) \leq 7$.
- Nhưng $R(2,7)$ không nhỏ hơn 7, bởi vì nếu ta tô các cạnh của K_6 bằng hai màu xanh và đỏ thì không tìm được K_2 đơn sắc và cũng không tìm được K_7 đơn sắc.
- Vậy $R(2,7) = 7$.

Các số Ramsey

- Các tính chất cơ bản sau đây của số Ramsey $R(i, j)$ đã được chứng minh bằng các lập luận tương tự nhau trong các ví dụ đã trình bày:
 - $R(i, j) = R(j, i)$;
 - Nếu m là tính chất (i, j) -Ramsey, thì mãi sẽ $n > m$ cũng là tính chất Ramsey;
 - Nếu m không là tính chất (i, j) -Ramsey, thì mãi sẽ $n < m$ cũng không là tính chất Ramsey;
 - Nếu $i_1 \geq i_2$ thì $R(i_1, j) \geq R(i_2, j)$.

Các số Ramsey

- Việc xác định số Ramsey $R(i, j)$ là bài toán khó cho ta phải tìm số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất (i, j) -Ramsey. Liệu sẽ phụ thuộc vào i và j với mọi $i \geq 2, j \geq 2$ hay không? Định lý Ramsey cho ta khẳng định về sự tồn tại của các số này.
- **Định lý Ramsey.** Nếu $i \geq 2, j \geq 2$ là các số nguyên dương thì luôn tồn tại một số nguyên dương có tính chất (i, j) -Ramsey (tôi đã suy ra sẽ $R(i, j)$ là tồn tại).

Các số Ramsey

- Các số $R(i,j)$ vừa trình bày ở trên chỉ là một trong số nhiều dòng số Ramsey đã được nghiên cứu.
- Việc xác định $R(i,j)$ với những giá trị i, j cụ thể luôn là các bài toán tổ hợp không tầm thường. Hiện nay người ta mới biết giá trị của $R(i, j)$ với rất ít giá trị của (i,j) .

$i \setminus j$	2	3	4	5	6
2	2				
3	3	6			
4	4	9	18		
5	5	14	25 - 27	43 - 52	
6	6	18	34 - 43	57 - 94	102 - 169
7	7	23	≥ 49	≥ 76	
8	8	28	≥ 53	≥ 94	
9	9	36	≥ 69		



