# Đồ thị có hướng

Trần Vĩnh Đức

Ngày 24 tháng 7 năm 2018

# Tài liệu tham khảo


- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- Ngô Đắc Tân, *Lý thuyết Tổ hợp và Đồ thị*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.
- Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. 2nd Edition, 2000.

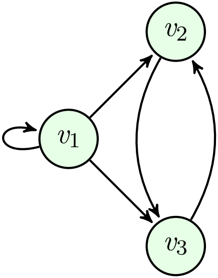
# Nội dung

## Định nghĩa

Một đồ thị có hướng là một cặp có thứ tự $G = (V, E)$, ở đây $V$ là một tập, còn $E$ là một tập con của tích đề các $V \times V$, tức $E$ là một quan hệ hai ngôi trên $V$.

- Các phần tử của $V$ thường được gọi là các ***đỉnh***.
- Các phần của $E$ gọi là các ***cung***.
- Cụ thể hơn, nếu $(a, b) \in E$ thì $(a, b)$ được gọi là cung của $G$ với ***đỉnh đầu*** là $a$ và ***đỉnh cuối*** là $b$,
- và ta viết $a \to b$

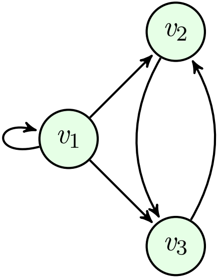
# Đồ thị có hướng




Đồ thị có hướng $G = (V, E)$:

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$
$$E = \{v_1 \to v_1, v_1 \to v_2, v_1 \to v_3, v_2 \to v_3, v_3 \to v_2\}$$

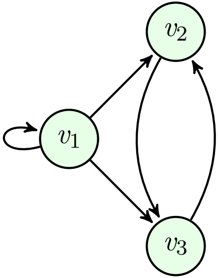
# Bậc vào & bậc ra




| Đỉnh | indeg | outdeg |
|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 3 |
| $v_2$ | 2 | 1 |
| $v_3$ | 2 | 1 |
| | 5 | 5 |

## Mệnh đề

$$\sum_{v\in V} \mathrm{indeg}(v) = \sum_{v\in V} \mathrm{outdeg}(v) = |E|$$



# Hành trình có hướng và đường đi có hướng

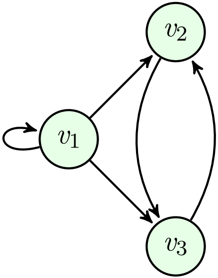
| | *Hành trình* | *Hành trình đơn* | *Đường đi* |
|---|---|---|---|
| *Lặp cạnh* | ✓ | ✗ | ✗ |
| *Lặp đỉnh* | ✓ | ✓ | ✗ |

## Định nghĩa

Xét $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng với $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
***Ma trận kề*** $A = (a_{ij})$ của $G$ định nghĩa bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } v_i \to v_j \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

## Ví dụ




$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Định lý

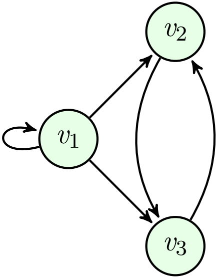
Xét $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng với $n$ đỉnh

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

và $A = (a_{ij})$ là ma trận kề của $G$. Xét $(p_{ij}^{(k)})$ là số hành trình có hướng từ $v_i$ tới $v_j$. Khi đó

$$A^k = (p_{ij}^{(k)}).$$

## Ví dụ




$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Chứng minh

- Bằng quy nạp theo độ dài hành trình.
- Ta ký hiệu $a_{ij}^{(k)}$ là phần tử ở hàng $i$ cột $j$ của ma trận $A^k$.
- Ta đặt

$$P(k) := \forall i, j \quad a_{ij}^{(k)} = p_{ij}^{(k)}$$

- Bước cơ sở: $k = 1$. ✓ Tại sao?

# Chứng minh: Bước quy nạp

- Giả sử $P(k)$ ✓
- Hành trình độ dài $k+1$ từ $v_i$ đến $v_j$ có thể tách thành

$$v_i \overset{k}{\rightsquigarrow} v_h \rightarrow v_j$$

- với $v_i \overset{k}{\rightsquigarrow} v_h$ là một hành trình độ dài $k$ từ $v_i$ tới $v_h$
- và $h : v_h \rightarrow v_j$ là một cạnh trong $G$.

# Chứng minh: Bước quy nạp (tiếp)

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(k+1)} = \sum_{h:\ v_h \to v_j} p_{ih}^{(k)} &= \sum_{h=1}^{n} p_{ih}^{(k)} \cdot a_{hj} \\
&= \sum_{h=1}^{n} a_{ih}^{(k)} \cdot a_{hj} && \text{(giả thiết quy nạp)} \\
&= a_{ij}^{(k+1)} && \text{(quy tắc nhân ma trận)}
\end{aligned}
$$

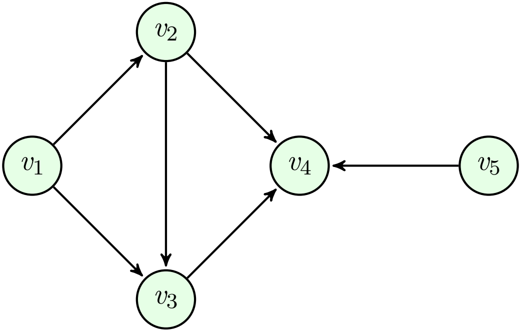
✓

Định nghĩa

Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là ***liên thông mạnh*** nếu với mọi $u, v \in V$, tồn tại một đường đi có hướng từ $u$ tới $v$ trong $G$.

## Định nghĩa

Một đồ thị có hướng được là ***phi chu trình*** (DAG) nếu nó không chứa chu trình có hướng.



# Nội dung

## Định nghĩa

- Một ***đồ thị định hướng*** của một đồ thị (vô hướng) $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng thu được từ $G$ bằng cách chọn một hướng

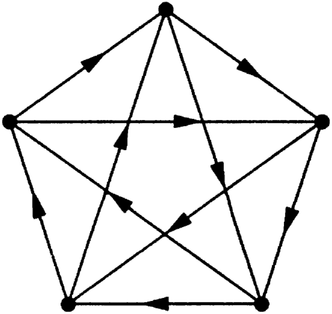
$$x \to y \quad \text{hoặc} \quad y \to x$$

cho mỗi cạnh $xy \in E$.
- ***Đồ thị thi đấu*** là một đồ thị định hướng của một đồ thị đầy đủ nào đó.

## Ví dụ

- Đồ thị định hướng của đồ thị đầy đủ cho phép mô hình hóa các giải đấu thể thao kiểu "round-robin".
- Giải đấu gồm $n$ đội và mỗi đội thi đấu với tất cả các đội khác.
- Với mỗi cặp $u, v$, ta có cạnh $u \to v$ nếu $u$ thắng $v$.
- Cuối giải ta có một đồ thị định hướng của $K_n$.
- "Điểm số" của mỗi đội chính là bậc ra của đội đó, là số lần thắng.

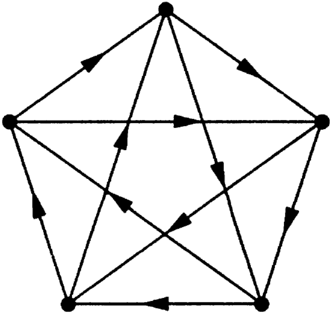
# Đội nào vô địch?



Định nghĩa

Một ***đường đi Hamilton*** có hướng là hành trình đi qua mỗi đỉnh của $G$ đúng một lần.

# Có phải mọi đồ thị thi đấu đều có đường Hamilton?



### Định lý

Mọi đồ thị thi đấu đều chứa một đường đi Hamilton.

## Chứng minh

- Bằng quy nạp theo số đỉnh $n$ của đồ thị. Đặt

  $P(n) :=$ "Mọi đồ thị thi đấu với $n$ đỉnh đều chứa đường đi Hamilton

- Bước cơ sở: $n = 1$ ✓
- Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng.
- Xét đồ thị thi đấu $n + 1$ đỉnh.
- Bỏ đi một đỉnh $v$ bất kỳ, ta còn đồ thị thi đấu $n$ đỉnh:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

- Theo quy nạp ta có đường đi

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n.$$

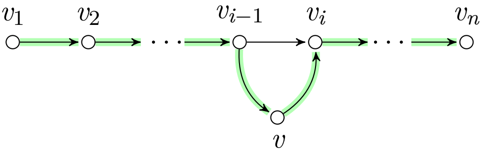
# Trường hợp 1

Nếu $v \to v_1$, vậy ta có đường Hamilton

$$v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$$

# Trường hợp 2

Nếu $v_1 \to v$ và tồn tại $i$ nhỏ nhất sao cho $v \to v_i$.



# Trường hợp 3

Nếu $v_1 \to v$ và với mọi $i$, $v_i \to v$. Vậy ta có đường Hamilton

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to v \qquad \checkmark$$

# Trò chơi chọi gà

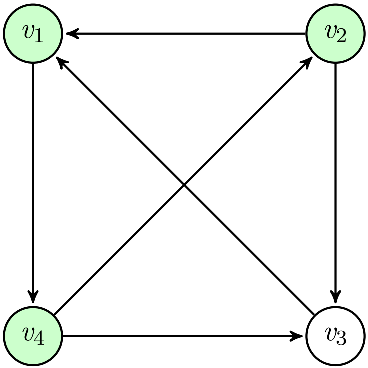
- Hoặc con gà $u$ thắng con gà $v$: $u \to v$
- Hoặc con gà $v$ thắng con gà $u$: $v \to u$
- Con gà $u$ gọi là ***gần thắng*** con gà $v$ nếu

$$u \to v \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} u \to w \\ w \to v \end{cases}$$

- Một ***vua gà*** là con gà gần thắng mọi con gà khác.

## Ví dụ

Hãy tìm các vua gà.



**Câu hỏi**

Có phải mọi đồ thị thi đấu đều có vua gà?

Định lý

Con gà với bậc ra cao nhất là một vua.

# Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Xét $u$ có bậc ra cao nhất và $u$ không là vua. Vậy tồn tại $v$ thỏa mãn:

1. $v \to u$, và
2. Với mọi $w$: $\underbrace{\neg(u \to w)}_{w \to u}$ hoặc $\underbrace{\neg(w \to v)}_{v \to w}$

Nhắc lại tương đương logic

$$\neg P \vee Q \qquad \equiv \qquad P \Rightarrow Q$$

# Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Xét $u$ có bậc ra cao nhất và $u$ không là vua. Vậy tồn tại $v$ thỏa mãn:

1. $v \to u$, và
2. Với mọi $w$: $\underbrace{\neg(u \to w)}_{w \to u}$ hoặc $\underbrace{\neg(w \to v)}_{v \to w}$

Khẳng định 2 tương đương với

*Nếu $u \to w$ vậy $v \to w$.*

Kết hợp với khẳng định 1 ta được

$$\mathrm{outdeg}(v) \geq \mathrm{outdeg}(u) + 1 \qquad ✗.$$