Chương 2: ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

Đậu Thế Phiệt

Ngày 24 tháng 10 năm 2014

Nội dung

ĐẠO HÀM RIÊNG

Định nghĩa

Định nghĩa (Đạo hàm riêng theo biến x)

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên tập con $M \in \mathbb{R}^2$ và một điểm cố định $(x_0, y_0) \in M$. Khi đó $f(x, y_0)$ là một hàm số theo biến x. Đạo hàm của hàm số này theo biến x tại x_0 được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm số $f(x, y)$ tại (x_0, y_0). Ta ký hiệu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Tương tự, ta định nghĩa được đạo hàm riêng theo biến y của hàm số $f(x, y)$ tại (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ví dụ

Quy tắc. Để tìm đạo hàm riêng theo biến x của hàm số $f(x, y)$, ta xem y là một hằng số và áp dụng tính đạo hàm của hàm số theo biến x.

Ví dụ

Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Tìm $f'_x(2, 1)$, $f'_y(2, 1)$.

Xem y là hằng số và lấy đạo hàm theo x, ta có

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

do đó $$f'_x(2, 1) = 3.2^2 + 2.2.1^3 = 16.$$

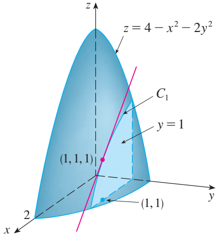
Tương tự, xem x là hằng số và lấy đạo hàm theo y, ta có

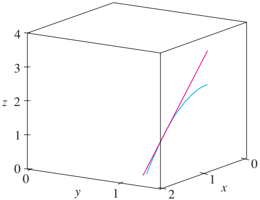
$$f'_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

do đó $$f'_x(2, 1) = 3.2^2.1^2 - 4.1 = 8.$$

Biểu diễn hình học của đạo hàm riêng

Xét paraboloid $z = 4 - x^2 - 2y^2$ có đồ t; mặt phẳng $y = 1$ cắt paraboloid theo một parabol $C_1 : z = 2 - x^2, y = 1$. Tính đạo hàm riêng theo biến x tại $(1, 1)$, ta có $f'_x(1, 1) = -2$. Chính là hệ số góc tạo bởi tiếp tuyến với parabol C_1 tại $(1, 1)$ và mặt phẳng Oxy.
Tương tự đối với đạo hàm riêng theo biến y tại $(1, 1)$.





Tính chất của đạo hàm riêng

Vì đạo hàm riêng theo biến x (tương tự theo biến y) là đạo hàm theo một biến, do đó nó mang đầy đủ các tính chất của đạo hàm theo một biến

i) $(\alpha f)'_x = \alpha f'_x$;

ii) $(f \pm g)'_x = f'_x \pm g'_x$;

iii) $(f.g)'_x = f'_x g + f g'_x$;

iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_x = \dfrac{f'_x g - f g'_x}{g^2}$ với $g \neq 0$.

Ví dụ

Ví dụ

Tính các đạo hàm riêng của hàm số $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$

Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{-x}{(1+y)^2}$$

Ví dụ

Ví dụ

Tính các đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y, z) = x^{xy} \ln z$

Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{xy}) \ln z = x^{xy} y(\ln x + 1) \ln z;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^{xy}) \ln z = x x^{xy} \ln x \ln z;$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{xy} \frac{\partial}{\partial z}(\ln z) = \frac{x^{xy}}{z}.$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Cho f là hàm số theo hai biến, các đạo hàm riêng f'_x và f'_y cũng là các hàm theo hai biến. Do đó, ta có thể tính đạo hàm riêng của các hàm này, đây được gọi là các đạo hàm riêng bậc hai của f.
Cho $z = f(x, y)$, ta sử dụng ký hiệu như sau

$$(f'_x)'_x = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};$$

$$(f'_x)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

$$(f'_y)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

$$(f'_y)'_y = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Tiếp tục quá trình tên, ta được được các đạo hàm bậc ba và cao hơn.

Trong các ký hiệu ở trên, với $f''_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ta lấy đạo hào riêng theo x, sau đó lấy đạo hàm riêng theo y; với $f''_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ta tính theo thứ tự ngược lại.

Chý ý. Nhìn chung, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, do đó thứ tự lấy đạo hàm của các đạo hàm bậc cao là quan trọng.

Định lý

Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ xác định và liên tục trong một lân cận của (x_0, y_0) thì ta có

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Ví dụ

Ví dụ

Tính $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial^2 x}$ với $f(z,y,z) = sin(3x + yz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\cos(3x + yz)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = -9\sin(3x + yz)$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial^2 x} = -9z\cos(3x + yz)$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial^2 x} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz)$$

VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên tập $M \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in M$ là một điểm cố định. Cho x_0 số gia Δx và y_0 số gia Δy, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in M$. Hiệu số $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của hàm số f tại (x_0, y_0) và được ký hiệu là $\Delta f(x_0, y_0)$.

Định nghĩa

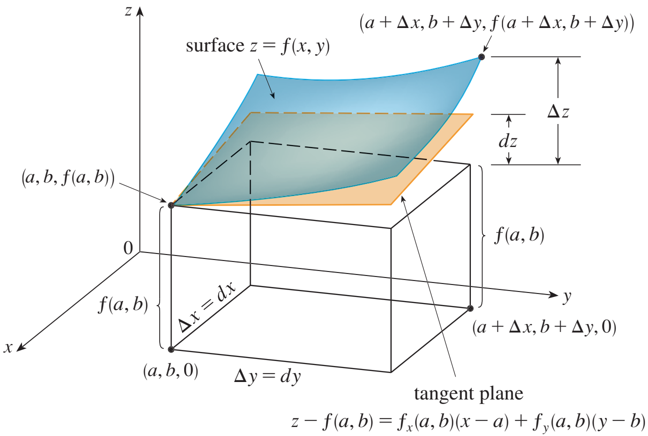
Hàm số $f(x, y)$ được gọi là khả vi tại điểm $(x_0, y_0) \in M$ nếu số gia toàn phần của nó tại điểm (x_0, y_0) có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \omega_1(\Delta x) + \omega_2(\Delta y) \end{aligned}$$

trong đó $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ và $\omega_1(\Delta x), \omega_2(\Delta y) \to 0$ khi $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Định nghĩa

Đại lượng $df(x_0, y_0) = A_1dx + A_2dy$ được gọi là vi phân của hàm số f tại (x_0, y_0).



Điều kiện cần và đủ

Định lý

Nếu hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì

1. *f liên tục tại (x_0,y_0);*
2. *f có các đạo hàm riêng cấp một tại (x_0,y_0) và $A_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $A_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.*

Định lý

Nếu hàm số $f(x,y)$ xác định trong một lân cận của (x_0,y_0) và có các đạo hàm riêng cấp một $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại (x_0,y_0) thì hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0).

Ứng dụng vi phân

Ví dụ (Tính gần đúng)

Cho hàm số $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$
Tính vi phân dz và tính gần đúng giá trị của biểu thức $f(2.05, 2.96)$.

Ta có

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$$

Chọn $x_0 = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y_0 = 3$, $dy = \Delta y = -0.04$, ta có

$$\begin{aligned} f(2.05, 2.96) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &\simeq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &= f(2, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)\Delta y \\ &= 13 + 13(0.05) + 0(-0.04) = 13.65 \end{aligned}$$

Vi phân cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm số khả vi $f(x, y)$, vi phân cấp 1 $df(x, y)$ cũng là một hàm hai biến x, y. Vi phân (nếu có) của vi phân cấp 1 này được gọi là vi phân cấp 2

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= d(df(x, y)) = d(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy)) \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \end{aligned}$$

Tiếp tục quá trình trên (nếu được) ta có vi phân cấp cao hơn của hàm f.

ĐẠO HÀM RIÊNG - VI PHÂN HÀM HỢP

Đạo hàm riêng hàm hợp

Ta xét một số trường hợp hàm hợp cơ bản

1. $$\begin{cases} f = f(u); \\ u = u(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

2. $$\begin{cases} f = f(u); \\ u = u(x,y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

3. $$\begin{cases} f = f(u,v); \\ u = u(x); \\ v = v(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

4. $$\begin{cases} f = f(u,v); \\ u = u(x,y); \\ v = v(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Ví dụ

Ví dụ

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u, v) = e^{uv} \\ u(x, y) = x^2 + 2y^3 \\ v(x, y) = 3x \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} f = f(x,y) \\ y = y(x) \end{cases}}$$

Xét $f = f(x,y)$ là hàm theo hai biến (x,y), do đó ta có đạo hàm riêng của f theo biến x

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Xét $y = y(x)$, thì ta thấy $f = f(x, y(x))$ là hàm theo một biến x, và có đạo hàm thường

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Ví dụ

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{df}{dx}$ với $f = f(x,y) = e^{xy} + x^2 y; \quad y = y(x) = \arctan x$

Vi phân hàm hợp

$$\boxed{\begin{cases} f = f(u, v) \\ u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}}$$

$$\begin{aligned} df = \boxed{f'_x dx + f'_y dy} &= (f'_u u'_x + f'_v v'_x)dx + f'_u u'_y + f'_v v'_y)dy \\ &= f'_u(u'_x dx + u'_y dy) + f'_v(v'_x dx + v'_y dy) \\ &= \boxed{f'_u du + f'_v dv} \end{aligned}$$

Ví dụ

Tính df của hàm hợp $f = f(u, v) = e^{uv^2}, u(x, y) = 2x + y, v(x, y) = x^2 y$

Ví dụ

Ví dụ

Tính d^2f của hàm hợp $f = \sin(x^2 + 3y)$.

ĐẠO HÀM RIÊNG - VI PHÂN HÀM ẨN

Hàm ẩn

Ta xét phương trình $F(x, y) = 0$ xác định trong miền mở D chứa điểm (x_0, y_0). Giả thiết với mỗi x trong lân cận của x_0, tồn tại duy nhất một giá trị y sao cho $(x, y) \in D$ và $F(x, y) = 0$.
Khi đó y là một hàm theo biến x xác định trong lân cận của x_0 và thoả $F(x, y(x)) = 0$.

Ta nói phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn $y = y(x)$. Áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

Điều kiện tồn tại hàm ẩn

Cho hàm số $F(x, y)$ thoả các điều kiện

1. Xác định và liên tục trong lân cận U của (x_0, y_0)
2. $F(x_0, y_0) = 0$
3. Tồn tại trong lân cận U các đạo hàm riêng liên tục $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$
4. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

thì khi đó phương trình $F(x, y) = 0$ xác định trong một lân cận của x_0 một hàm ẩn $y = y(x)$ sao cho $y_0 = y(x_0)$ và $F(x, y(x)) = 0$.

Ví dụ

Ví dụ

Tìm y'_x tại $x = 1, y = -1$ biết $x^2 + y^3 + 2x^2y + 3x^4 - y - 1 = 0$.

Ví dụ

Tìm y'_x, y''_x của hàm ẩn $xy - e^x \sin y = \pi$.

Ví dụ

Tìm y'_x, y''_x của hàm ẩn $x - y + \arctan y = 0$.

Hàm ẩn nhiều biến

Cho hàm số $F(x, y, z)$ thoả các điều kiện

1. Xác định và liên tục trong lân cận U của (x_0, y_0, z_0)
2. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
3. Tồn tại trong lân cận U các đạo hàm riêng liên tục $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$
4. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

thì khi đó phương trình $F(x, y, z) = 0$ xác định trong một lân cận của (x_0, y_0) một hàm ẩn $z = z(x, y)$ sao cho $z_0 = z(x_0, y_0)$ và $F(x, y, z(x, y)) = 0$.

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_x}{F'_z}} \qquad \boxed{\frac{dz}{dy} - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_y}{F'_z}}$$

Ví dụ

Ví dụ

Tính dz với $xyz = x + y + z$.

Ví dụ

Cho $x + y + z = e^z$, tính $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Bài tập

Tính các đạo hàm riêng

1. $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}; \quad f''_{xy}$
2. $f(x,y) = e^{xy^2}; \quad f''_{xy}, f''_{yy}$
3. $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}; \quad f''_{xy}, f''_{xx}$
4. $f(x,y) = \log(x^2+y^2); \quad f''_(xy)(0,1), f''_{xx}(1,0)$
5. $f(x,y) = \log(2x+3y); \quad \dfrac{\partial^10 f}{\partial x^10}$

Tính

1. $f(u,v) = \dfrac{u}{v} + e^{uv}, u = x^2y + 2x, v = ye^{xy}$. Tính f'_x, f'_y.
2. $f(u) = \arctan(\sqrt{u}), u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$. Tính f'_x, d'_y
3. $f = f(3x+4y, xy+e^y)$. Tính f'_x, f'_y.
4. $f(2x+y)$. Tính f''_{xx}, f''_{xy}.
5. $f(u) = u^3 + sinu, \quad u = 2xy + e^x$. Tính $f''_x x, f''_y y$

Bài tập

Tính đạo hàm hàm ẩn

1. $e^{x+y} + x^2 = y^2 + 2x$. Tính y'_x.
2. $\cos(xy) + 2x - y^2 = 2$. Tính $x'(y)$
3. $e^{x+y+z} + 2x - 3y = z^2 + 1$. Tính z'_x, z'_y.
4. $xy + x - 2y = e^{2x+3y}$. Tính y''_x.
5. $xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3$. Tính z''_{xy}

ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

Khái niệm

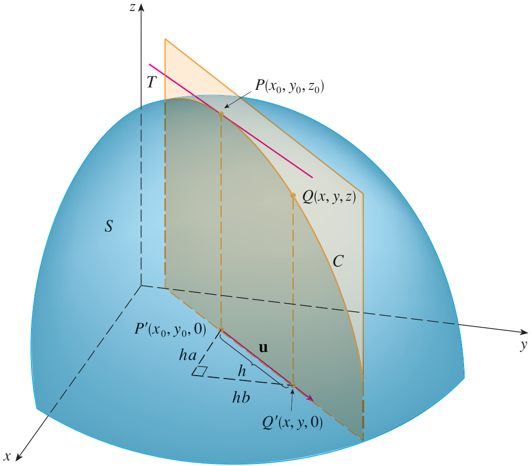
Cho hàm $f(x, y)$, các đạo hàm riêng $f'_x(x-0, y_0)$ và $f'_y(x_0, y_0)$ đặc trưng cho tốc độ thay đổi của hàm số $f(x, y)$ lần lượt theo hướng trục Ox và Oy.
Để tính tốc độ thay đổi theo một hướng bất kỳ, ta cần khái niệm tổng quá hơn đạo hàm riêng

Định nghĩa (Đạo hàm theo hướng)

Cho $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j}$ là một **vector đơn vị**. Đạo hàm của hàm số f theo hướng $\overrightarrow{u}$ tại (x_0, y_0) được ký hiệu bởi $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0)$ hoặc $D_{\overrightarrow{u}}f(x_0, y_0)$ cho bởi giới hạn

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Ta thấy đạo hàm riêng là trường hợp đặc biệt của đạo hàm theo hướng, khi hướng vector $\overrightarrow{u}$ lần lượt song song với các trục toạ độ.



Cách tính

Để tính đạo hàm theo hướng, ta sử dụng kết quả của định lý sau

Định lý

Nếu $f(x,y)$ là một hàm khả vi thì f có đạo hàm theo mọi hướng với vector đơn vị $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ và

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x,y) = D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)u_2$$

Ví dụ

Tính đạo hàm của $f(x,y) = xy^2 - 3x^4y^5$ tại điểm $M(1,2)$ theo hướng vector $\overrightarrow{u} = (1,-2)$

Vector Gradient

Từ định lý trên, đạo hàm theo hướng có thể được viết lại dưới dạng tích vô hướng của hai vector

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) u_2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) . (u_1, u_2) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) . \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Ta gọi vector $\text{grad} f(x,y) = \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$

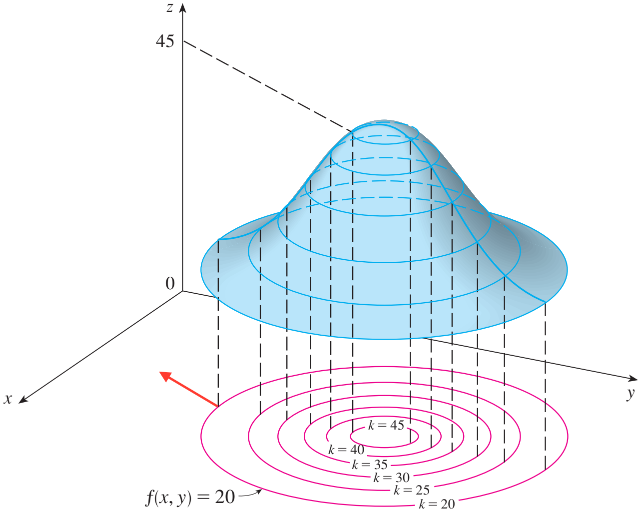
Tính chất

Từ công thức

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}} = (\nabla f, \overrightarrow{u}) = |\nabla f||u| \cos\varphi = |\nabla f| \cos\varphi$$

Do đó ta có

1. Đạo hàm có giá trị lớn nhất theo hướng của vector gradient, và giá trị đó bằng $|\nabla f(x, y)|$
2. Đạo hàm có giá trị nhỏ nhất theo hướng đối với vector gradient và giá trị nhỏ nhất bằng -$|\nabla f(x, y)|$.
3. Vector gradient $\nabla f(x_, 0, y_0)$ là vector pháp tại (x_0, y_0) đối với đường đẳng trị $f(x, y) = c$



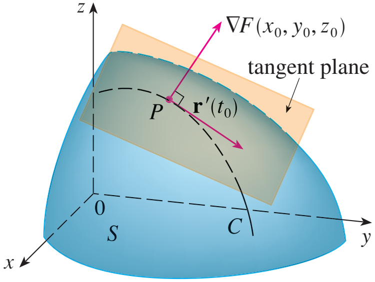
z
45
0
x
y
k = 45
k = 40
k = 35
k = 30
k = 25
k = 20
f(x, y) = 20

Đạo hàm theo hướng và vector gradient đối với hàm ba biến có định nghĩa và cách tính tương tự hàm hai biến

$$\text{grad}F(x,y,z) = \nabla F(x,y,z) = \left(F'_x(x,y,z), F'_y(x,y,z), F'_z(x,y,z)\right)$$

$$D_{\overrightarrow{u}}F(x,y,z) = \nabla F \,.\, \overrightarrow{u}$$

với $\overrightarrow{u}$ là vector đơn vị.



Ví dụ

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ Tìm tất cả các điểm là tốc độ thay đổi nhanh nhất của hàm f tại những điểm đó theo hướng của vector $(1,1)$

Giả sử điểm cần tìm là $M(a,b)$. Tốc độ thay đổi nhanh nhất của f nhanh nhất tại M theo hướng cùng phương với vector
$\nabla f(M) = \left(f'_x(a,b), f'_y(a,b)\right) = (2a-2, 2b-4)\right)$.
Vector $\nabla f(M)$ cùng phương với vector $(1,1)$ khi

$$(2a-2, 2b-4) = t(1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + t/2 \\ b = 2 + t/2 \end{cases}$$

Đây là tập hợp các điểm trên một đường thẳng.
Tuỳ theo $t > 0$ hay $t < 0$ và hướng của vector ∇f ta có hàm f **thay đổi** tăng hoặc giảm nhanh nhất.

Ví dụ

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$ và điểm $M(1,0)$. Tìm hướng mà đạo hàm của f theo hướng đó tại M có giá trị bằng 1.

Giả sử hướng cần tìm là vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$, $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Khi đó, đạo hàm của f tại M theo hướng u

$$D_{\vec{u}}(M) = f'_x(M)u_1 + f'_y(M)u_2 = 2u_1 + u_2 = 1$$

Do đó u_1, u_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 1 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u_1 = 4/5 \\ u_2 = -3/5 \end{cases}$$

Ví dụ

Viết phương trình mặt tiếp diện và phương trình pháp tuyến với mặt

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

tại điểm $P(-2, 1, -3)$.

Mặt Ellipsoid với mặt đẳng mức $F = 3$ của hàm $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9}$

$$F'_x(-2, 1, -3) = -1 \quad F'_y(-2, 1, -3) = 2 \quad F'_z(-2, 1, -3) = -2/3$$

Phương trình mặt phẳng tiếp tuyến

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - 2/3(z + 3) = 0$$

Phương trình đường pháp tuyến

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-2/3}$$

Bài tập

Tìm đạo hàm theo hướng

1. $f(x,y) = \sin(2x+3y), \quad P(-6,4), \quad u = 1/2(\sqrt{3},-1)$
2. $f(x,y) = y^2/x \quad P(1,2) \quad u = (2,\sqrt{5})$
3. $f(x,y) = \tan^{-}1(xy) \quad P(1,2), \quad u = (5,10)$
4. $f(x,y,z) = \sqrt{xyz} \quad P(3,2,6), \quad u = (-1,-2,2)$
5. $f(x,y,z) = (x+2y+3z)^{3/2} \quad P(1,1,2) \quad u = 2j-k$

Tìm hướng mà theo hướng đó hàm f tại điểm đã cho thay đổi lớn nhất

1. $f(x,y) = y^2/x \quad P(2,4)$
2. $f(x,y) = \sin(xy) \quad P(1,0)$
3. $f(x,y,z) = \tan(x^2y+3z) \quad P(-5,1,1)$

Tìm phương trình mặt tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến của mặt

1. $z+1 = xe^y\cos z$ tại $P(1,0,0)$
2. $yz = \ln(x+z)$ tại $P(0,0,1)$
3. $x-z = 4\arctan(yz)$ tại $P(1+\pi,1,1)$

CÔNG THỨC TAYLOR - MACLAURIN

CÔNG THỨC TAYLOR - MACLAURIN

Cho hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $(n+1)$ trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$.
Công thức Taylor của f đến cấp n tại điểm M_0 cho bởi

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta_y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f}{k!}(x_0, y_0) + R_n(\Delta x, \Delta y)$$

trong đó $R_n(\Delta x, \Delta y)$ là phần dư cấp n.
Khai triển Taylor tại điểm $M_0(0, 0)$ được gọi là khai triển Maclaurin.

Ta có hai cách biểu diễn phần dư

1. Phần dư ở dạng Lagrange

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta.\Delta x, y_0 + \theta.\Delta y)$$

   với $\theta \in (0, 1)$.

2. Phần dư dạng Peano

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^n)$$

   với $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Ứng dụng

1. Xấp xỉ hàm đã cho với một đa thức trong một lân cận của điểm cho trước.
2. Tính đạo hàm cấp cao của f.
3. Tính giới hạn của hàm số.
4. Tính gần đúng với sai số cho trước.

Ví dụ

Ví dụ

TÌm khai triển Taylor của hàm

$$f(x,y) = x^2 + 2xy$$

tại $M(1,2)$ đến cấp 2.

Theo công thức, ta có

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0,y_0)}{2!} + R_2$$

$$= f(1,2) + \frac{1}{1!}(\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}(y-2)) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x^2}(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x \partial y}(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial y^2}(y-2)^2\right) + R$$

Như vậy, để tìm khai triển Taylor của hàm hai biến số theo định nghĩa đến bậc 2, ta cần tính $2+2^2$ đạo hàm riêng, và thế số vào. tốn rất nhiều thời gian. Do đó, để đơn giản cách tính và tận dụng các khai triển có sẵn, đa số trường hợp ta sẽ biến đổi như sau

1. Đặt $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$. Khi đó (X, Y) sẽ trong lân cận của $(0,0)$ khi (x, y) thuộc lân cận của (x_0, y_0),
2. Tìm khai triển Maclaurin của hàm $f(X, Y)$.
3. Đổi f(X,Y) thành f(x,y)

Nhắc lại một số khai triển Maclaurin căn bản

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n);$
2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$
3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m}}{(2m-1)!} + o(x^{2m+1})$
4. $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
5. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
6. $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{2m-1} + o(x^{2m})$

Ví dụ

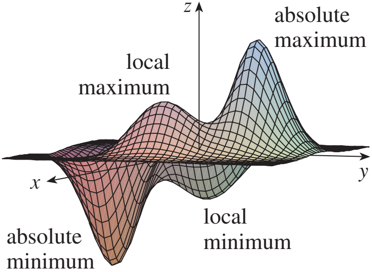
1. Tìm khai triển Taylor đến cấp hai của $f(x,y) = \dfrac{1}{2x+3y}$ tại $M(1,2)$.
2. Tìm khai triển Maclaurin đến bậc ba của $f(x,y) = e^x \sin y$.
3. Tìm khai triển Taylor đến cấp ba của $f(x,y) = \ln(x+y)$ tại $M(1,1)$.

CỰC TRỊ TỰ DO
CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

CÁC KHÁI NIỆM

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên M và điểm $(a, b) \in M$. Ta nói hàm $f(x, y)$ **đạt cực đại** (cực tiểu) **địa phương** tại (a, b) nếu $f(x, y) \leq f(a, b)$ ($f(x, y) \geq f(a, b)$) khi (x, y) thuộc một lân cận của điểm (a, b).



Nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu địa phương tại (a, b), ta nói f đạt **cực trị** (địa phương) tại (a, b).

Từ định nghĩa trên, nếu bất đẳng thức thoả với mọi $(x, y) \in M$ thì ta nói f đạt **giá trị lớn nhất** (nhỏ nhất) tại (a, b).

Định lý (Điều kiện cần)

Nếu hàm số f đạt cực trị tại (a, b) và tồn tại các đạo hàm riêng cấp một thì ta có $f'_x(a, b) = 0$ và $f'_y(a, b) = 0$.

Chứng minh.

Thật vậy, xét hàm $g(x) = f(x, b)$.
Nếu f đạt cực trị tại (a, b) thì g cũng đạt cực trị tại a, do đó $g'(a) = 0$.
Ngoài ra ta có $g'(a) = f'_x(a, b)$, do đó $f'_x(a, b) = 0$.
Tương tự ta có $f'_y(a, b) = 0$. $\square$

Điều ngược lại, nếu $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ thì ta **không** suy ra hàm f đạt cực trị tại (a, b).

Điểm (a, b) được gọi là **điểm dừng** nếu ta có $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$.
Điểm (a, b) được gọi là **tới hạn** nếu (a, b) là điểm dừng hoặc một đạo hàm riêng không tồn tại.

Ví dụ

Ví dụ

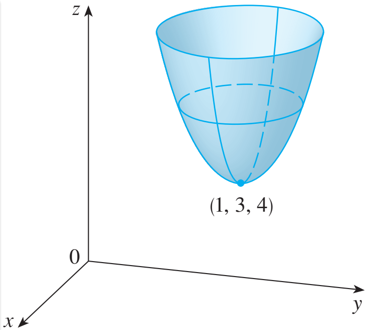
Cho hàm $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Ta có

$$f'_x = 2x - 2 \quad \text{và} \quad f'_y = 2x - 6.$$

Do đó $(1, 3)$ điểm dừng của f. Ta có thể viết

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

và dễ dàng thấy rằng $f(1, 3)$ là điểm cực tiểu. Đồng thời f cũng đạt giá trị bé nhất tại $(1, 3)$.



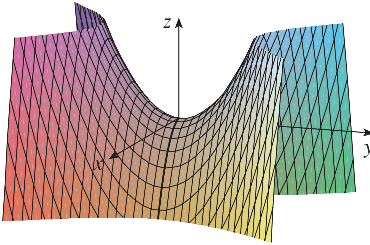
Ví dụ

Ví dụ

Cho hàm $f(x, y) = y^2 - x^2$. Ta có

$$f'_x = -2x \quad \text{và} \quad f'_y = 2y.$$

Do đó $(0, 0)$ điểm dừng duy nhất của f.
Trên trục hoành $(y = 0)$, $f(x, 0) = -x^2 < 0$ với $x \neq 0$.
Trên trục tung $(x = 0)$, $f(0, y) = y^2 > 0$ với $y \neq 0$.
Do đó trong mỗi lân cận của điểm $(0, 0)$ ta luôn tìm được các điểm làm $f(x, y) > 0$ và $f(x, y) < 0$. Do đó $f(0, 0)$ không phải điểm cực trị của f.



Hàm f không có điểm cực trị. Điểm $(0, 0)$ như trên được gọi là **điểm yên ngựa**.

Định lý (Điều kiện đủ)

Cho hàm hai biến f. Giả sử các đạo hàm riêng bậc hai xác định và liên tục trong một lân cận của (a, b) *và* $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ *(tức là* (a, b) *là điểm dừng của f).*

Đặt $D = f''_{xx}(a, b) f''_{yy}(a, b) - [f''_{xy}(a, b)]^2$.

1. *Nếu* $D > 0$ *và* $f''_{xx}(a, b) > 0$ *thì* $f(x, y)$ *đạt cực tiểu tại* (a, b)*;*
2. *Nếu* $D > 0$ *và* $f''_{xx}(a, b) < 0$ *thì* $f(x, y)$ *đạt cực đại tại* (a, b)*;*
3. *Nếu* $D < 0$ *thì* $f(x, y)$ *không là điểm cực trị (điểm yên ngựa).*

Nếu $D = 0$, ta chưa có kết luận từ định lý trên.

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

Cực trị tự do đối với hàm ba hay nhiều biến hơn

Định lý (Điều kiện đủ)

Cho hàm ba biến f. Giả sử các đạo hàm riêng bậc hai xác định và liên tục trong một lân cận của (a, b, c) và $f'_x(a, b, c) = f'_y(a, b, c) = f'_z(a, b, c) = 0$ (tức là (a, b, c) là điểm dừng của f).
Xét vi phân bậc hai d^2f tại (a, b, c), ta xem đây là một dạng toàn phương đối với các biến dx, dy, dz.

1. *Nếu $d^2f(a, b, c)$ là dạng toàn phương dương thì $f(x, y, z)$ đạt cực tiểu tại (a, b, c);*
2. *Nếu $d^2f(a, b, c)$ là dạng toàn phương âm thì $f(x, y, z)$ đạt cực đại tại (a, b, c);*
3. *Nếu $d^2f(a, b, c)$ không xác định được âm, dương thì $f(x, y, z$ không đạt cực trị trại (a, b, c).*

Ví dụ

Ví dụ

Tìm các điểm cực trị của

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Bước 1. Tìm các điểm tới hạn.
Ta có

$$f'_x = 4x^3 - 4y \quad \text{và} \quad f'_y = 4y^3 - 4x.$$

Các điểm dừng thoả hệ phương trình

$$\begin{aligned} &x^3 - y = 0 \quad \text{và} \quad y^3 - x = 0 \\ \Rightarrow &x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0 \\ \Rightarrow &x = 0, -1, 1. \end{aligned}$$

Vậy ta có các điểm dừng là $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$.

Ví dụ

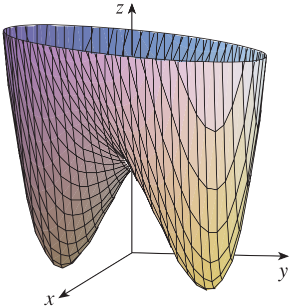
Bước 2. Kiểm tra điều kiện đủ.
Các đạo hàm riêng bậc hai

$$f''_{xx} = 12x^2; \quad f''_{xy} = 4; \quad f''_{yy} = 12y^2$$

$$D(x,y) = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Ta có

1. $D(0,0) = -16 < 0$ do đó $(0,0)$ là điểm yên ngựa;
2. $D(1,1) = D(-1,-1) = 128$ và $f''_{xx} > 0$ đó f đạt cực tiểu tại $(1,1)$ và $(-1,-1)$.



Ví dụ

Ví dụ

Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Bước 1. Tìm các điểm tới hạn.
Các đạo hàm riêng

$$f'_x = 20xy - 10x - 4x^3, \qquad f'_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x(10y - 5 - 2x^2) & = & 0 & (1) \\ 5x^2 - 4y - 4y^3 & = & 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $x = 0$ hoặc $10y - 5 - 2x^2 = 0$.

Với $x = 0$ ta có $4y_4^2y^3 = 4y(y^2 + 1) = 0$ nên $y = 0$ Với $x^2 = 5y - \frac{5}{2}$, thế vào (2) ta có

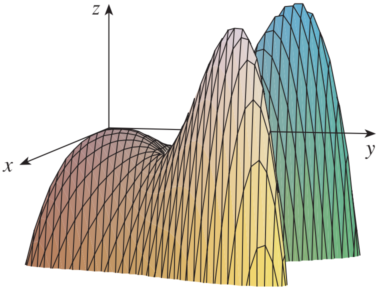
$$25y - \frac{25}{2} - 4y - 4y^3 = 0.$$

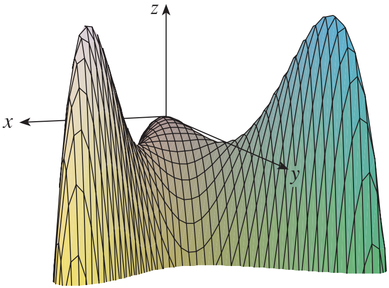
Phương trình bậc 3 có ba nghiệm là

$$y \approx -2.5452 \qquad y \approx 0.6468 \qquad y \approx 1.8984$$

Ta có $x = \pm\sqrt{5y - \frac{5}{2}}$

Điểm dừng	$f(x,y)$	f''_{xx}	D	Kết luận
(0,0)	0	-10	80	cực đại địa phương
$(\pm 2.64, 1.90)$	8.5	-55.93	2488.72	cực đại địa phương
$(\pm 0.86, 0.65)$	-1.48	-5.87	-187.64	điểm yên ngựa





Ta thấy f đạt giá trị lớn nhất $f(\pm 2.64, 1.90) \approx 8.5$.

Ví dụ

Ví dụ

Tìm khoảng cách từ điểm $(1, 0, -2)$ đến mặt phẳng $x + 2y + z = 4$.

Khoảng cách từ điểm (x, y, z) đến điểm $(1, 0, -2)$ là

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

do (x, y, z) thuộc mặt phẳng $x + 2y + z = 4$, do đó $z = 4 - x - 2y$.

$$d^2 = (x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Ta tìm điểm (x, y) sao cho d^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x &= 2(x-1) - 2(6-x-2y) = 4x + 4y - 14 = 0 \\ f'_y &= 2y - 4(6-x-2y) = 4x + 10y - 24 = 0. \end{cases}$$

Giải ra ta được $(x, y) = \left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Ta có

$$f''_{xx} = 4 \qquad f''_{xy} = 4 \qquad f''_{yy} = 10.$$

Do đó $D(x, y) = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 24 > 0$ và $f''_{xx} > 0$, nên $(x, y) = \left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$ là điểm cực tiểu.

Do đó khoảng cách $d = \frac{5}{6}\sqrt{6}$.

Cực trị có điều kiện

Định nghĩa

Hàm $f(x, y)$ đạt **cực đại** (chặt) tại $M(a, b)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ nếu trên một lân cận U của $M(a, b)$, tất cả điểm $N \in U$ thoả $\varphi(N) = 0$ thì $f(N) < f(M)$.

Tương tự ta định nghĩa cực tiểu có điều kiện.

Định nghĩa

Điểm $M(a, b)$ được gọi là điểm kỳ dị của đường cong $\varphi(x, y) = 0$ nếu $\varphi'_x(a, b) = \varphi'_y(a, b) = 0$.

Điều kiện cần

Định lý

Cho hàm số f và điểm $M(a,b)$ thoả các điều kiện

i) *M không là điểm kỳ dị của đường cong $\varphi(x,y)=0$;*

ii) *$f(x,y)$ $\varphi(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một lân cận của M;*

iii) *Hàm $f(x,y)$ đat cực trị tại M với điều kiện $\varphi(x,y)=0$.*

Khi đó tồn tại số λ thoả

$$\begin{cases} f'_x(a,b)+\lambda\varphi'_x(a,b) &= 0\\ f'_y(a,b)+\lambda\varphi'_y(a,b) &= 0\\ \varphi(a,b) &= 0\end{cases}$$

Số λ được gọi là **nhân tử Lagrange**.
Hàm $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ được gọi là **hàm Lagrange**.

Điều kiện đủ

Định lý

Giả sử $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ khả vi liên tục đến cấp 2 trong lân cận của $M(a, b)$ và M thoả

i) *M không là điểm kỳ dị của đường cong $\varphi(x, y) = 0$;*

ii) *$f(x, y)$ $\varphi(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một lân cận của M;*

iii) *Hàm $f(x, y)$ đat cực trị tại M với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.*

thì ta có

1. *$d^2L(a, b) > 0$ thì M là điểm cực tiểu có điều kiện;*
2. *$d^2L(a, b) < 0$ thì M là điểm cực đại có điều kiện;*
3. *$d^2L(a, b)$ không xác định dấu thì M không là điểm cực trị.*

Phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện

Khảo sát cực trị hàm số $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y)$.

Bước 1. Lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ và tìm các điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} L'_x(x, y) & = & 0 \\ L'_y(x, y) & = & 0 \\ \varphi(x, y) & = & 0 \end{cases} \Rightarrow P(a, b), \lambda$$

Bước 2. Tính tất cả các đạo hàm riêng cấp hai L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy}. Thế vào vi phân của $L(x, y, \lambda)$ tại P và λ

$$d^2L(a, b) = L''_{xx}(a, b)dx^2 + 2L''_{xy}(a, b)dxdy + L''_{yy}(a, b)dy^2.$$

Bước 3. Với điều kiện $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow \varphi'_x(a, b)dx + \varphi'_y(a, b)dy = 0$ ta xét tính xác định của vi phân d^2L và rút kết luận.

Ví dụ

Ví dụ

Khảo sát cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Đặt hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.
Các điểm dừng thoả

$$L'_x = 0; \qquad L'_y = 0; \qquad \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x &= 0 \qquad (1) \\ 4y + 2\lambda y &= 0 \qquad (2) \\ x^2 + y^2 &= 1 \qquad (3) \end{cases}$$

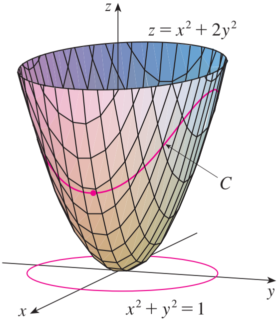
Từ (1) ta có $x = 0$ hoặc $\lambda = 1$. Với $x = 0$ ta có $y = \pm 1$ và $\lambda = -2$. Với $\lambda = 1$ ta có $y = 0$ và $x = \pm 1$

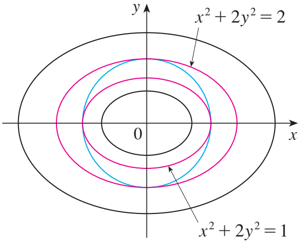
Ta có

$$d^2L = (2 + 2\lambda)dx^2 + (4 + 2\lambda)dy^2.$$

Từ điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ thì
$xdx + ydy = 0 \qquad (*)$.
Chú ý. dx và dy không đồng thời bằng 0.

$(x, y), \lambda$	$(*) \Rightarrow$	d^2L	Kết luận
$(0, 1), -2$	$dy = 0$	$-2dx^2$	cực đại
$(0, -1), 2$	$dy = 0$	$-2dx^2$	cực đại
$(1, 0), 1$	$dx = 0$	$8dx^2$	cực tiểu
$(-1, 0), 1$	$dx = 0$	$8dx^2$	cực tiểu





Ví dụ

Ví dụ

Khảo sát cực trị của hàm $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2$ với điều kiện $x^2 + 4y^2 = 25$

Ta đặt hàm Lagrange

$$L(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25).$$

$$\begin{cases} L'_x &= 4x + 12y + 2\lambda x = 0 \qquad (1) \\ L'_y &= 12x + 2y + 8\lambda y = 0 \qquad (2) \\ \varphi(x,y) &= x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có $(1+4\lambda)(2+\lambda)y - 36y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ hoặc $\lambda = 2, -\dfrac{17}{4}$

Với $\lambda = 2$ ta có $P_1(3,-2)$ $P_2(-3,2)$.

Với $\lambda = \dfrac{17}{4}$ ta có $P_3(\dfrac{20}{3}, -\dfrac{5}{2})$ $P_4(-\dfrac{20}{3}, \dfrac{5}{2})$.

Các đạo hàm riêng bậc hai: $L''_{xx} = 4 + 2\lambda$, $L''_x y = 12$, $L''_{yy} = 2 + 8\lambda$.
Ta khảo sát từng điểm dừng:
Với $P_1(3, -2)$, $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} dL^2(P_1) &= L''_{xx}(P_1)^2 dx^2 + 2L''_{xy}(P_1)dxdy + L''_{yy}dy^2 \\ &= 8dx^2 + 24dxdy + 18dy^2 \end{aligned}$$

Từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ ta có $6dx - 16dy = 0 \Leftrightarrow dx = \frac{8}{3}dy$. Ta có

$$d^2L(P_1) > 0 \quad \text{nên } P_1 \text{ là điểm cực tiểu}$$

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Định nghĩa

Số a được gọi là **giá trị lớn nhất** (giá trị nhỏ nhất) của hàm f trên một tập đóng và bị chặn D nếu với mọi $M \in D$ ta luôn có $f(M) \leq a$ ($f(M) \geq a$) và tồn tại $M_0 \in D$ sao cho $f(M_0) = a$.

Định lý (Weierstrass)

Hàm nhiều biến f liên tục trên tập đóng và bị chặn D thì đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D.

Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm nhiều biến f trên D ta cần

1. Tìm trong D.
   Ta tìm các điểm dừng của f nằm trong miền D.
2. Tìm trên biên D.
3. So sánh giá trị của f tại các điểm ở bước 1) và bước 2).

Khi tìm trên biên D: giả sử biên D cho bởi phương trình $\varphi(x, y) = 0$. Ta cần tìm cực trị của f với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
Trường hợp biên D là những đoạn thẳng, giả sử đoạn AB có phương trình $ax + by = c$, ta thế $y = y(x)$ (hoặc $x = x(y)$) vào $f(x, y)$ và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất với hàm một biến f.

Ví dụ

1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ trên miền $D : |x| + |y| \leq 1$
2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x, y) = (x - 6)^2 + (y - 8)^2$ trên miền $D : x^2 + y^2 \leq 25$
3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 - y^2$ trên miền $D : x^2 + y^2 \leq 2x$

Bài tập

Tìm cực trị tự do của các hàm sau

1. $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$.
3. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
4. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$
5. $f(x,y) = x^2y^2(6 - x - y)$
6. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 32\ln(xy)$ với $x > 0, y > 0$
7. $f(x,y) = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$

Bài tập

Tìm cực trị có điều kiện của các hàm sau

1. $f(x,y) = 4x + 6y$ với $x^2 + y^2 = 13$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ với $x^2 + y^2 = 1$
3. $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2$ với $x^2 + 4y^2 = 25$
4. $f(x,y) = 1 - 4x - 8y$ với $x^2 - 8y^2 = 8$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên miền D

1. $f(x,y) = 1 + 4x - 5y$ với D là tam giác với các đỉnh $(0,0), (2,0), (0,3)$.
2. $f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$ với D là tam giác với các đỉnh $(1,0), (5,0), (1,4)$.
3. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ với $D : |x| \leq 1, |y| \leq 1$
4. $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{1-x^2+y^2}$ với $D = x^2 + y^2 \leq 4$
5. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ với miền D xác định bởi $x \leq 0,\ y \leq 0$ và $x + y \geq -3$
6. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ với $D : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$