Giải tích hàm nhiều biến
Chương 3: TÍCH PHÂN BỘI

Đậu Thế Phiệt

Ngày 31 tháng 10 năm 2014

Nội dung

1. Định nghĩa và tính chất tích phân kép (bội 2)
2. Cách tính tích phân kép
3. Tích phân kép trong toạ độ cực
4. Công thức đổi biến tổng quát tích phân kép
5. Ứng dụng của tích phân kép

Định nghĩa và tính chất tích phân kép (bội 2)

Nhắc lại

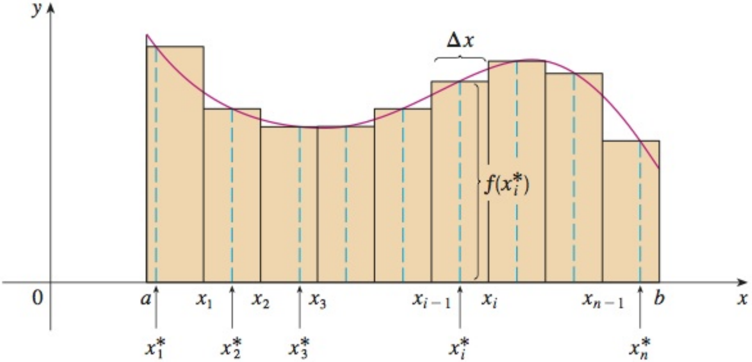
Trong giải tích hàm 1 biến, nếu hàm $f(x)$ được định nghĩa với $a \leq x \leq b$, ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ với chiều dài $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sau đó chọn 1 điểm x_i^* bất kì trong từng đoạn con. Khi ấy ta có tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Lấy giới hạn của tổng khi $n \to \infty$, ta có định nghĩa tích phân hàm f từ a đến b:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Trong trường hợp $f(x) \geq 0$, ta có tích phân $\int_a^b f(x)dx$ biểu diễn diện tích miền tạo bởi đường cong $y = f(x)$ và trục hoàng $y = 0$ từ a đến b.

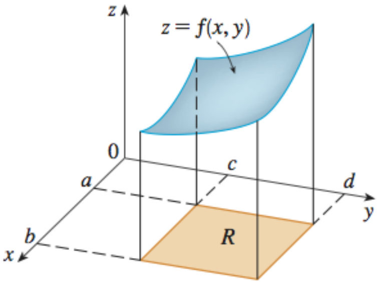


Tích phân kép

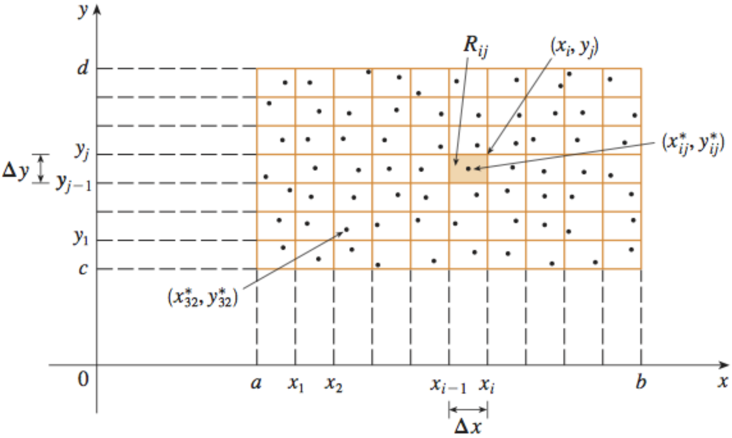
Tương tự, khi ta khảo sát hàm hai biến số $f(x, y)$ được định nghĩa trên một miền D (đóng và bị chặn).
1) Ta chia miền D thành n phần $D_1, D_2, \ldots, D_n$ không đè lên nhau (các phần trong của D_k không có điểm chung).
2) Gọi ΔS_k là diện tích của D_k.
3) Trên mỗi miền D_k, ta chọn một điểm bất kì $M_k(x_k, y_k) \in D_k$.
4) Thiết lập tổng

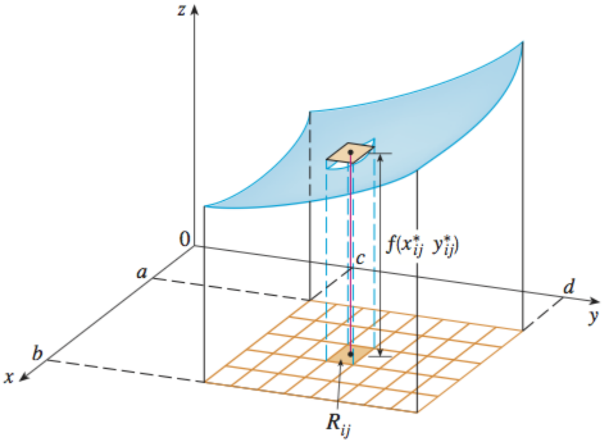
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.$$

Xét hàm hai biến $z = f(x, y)$ trên hình chữ nhật giới hạn bởi $a \leq x \leq b$ và $c \leq y \leq d$

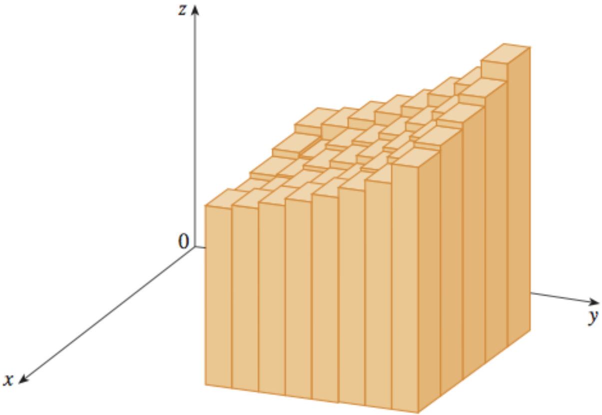


Ta chia miền D thành cách miền hình chữ nhật nhỏ hơn, và chọn toạ độ từng điểm M_i trong từng miền





z
0
a
b
x
c
d
y
f(x*ij y*ij)
Rij



z
0
y
x

Định nghĩa tích phân kép

Cho hàm $f(x,y)$ xác định trên miền đóng và bị chặn D. Tích phân kép của hàm f trên miền D là giới hạn (nếu có)

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i\right)$$

Ở công thức trên, $f(x,y)$ là hàm dưới dấu tích phân; D là miền lấy tích phân; ds là đơn vị diện tích.
Nếu giới hạn trên tồn tại, ta bảo hàm f khả tích trên miền D.
Nếu f khả tích trên miền D, ta có thể chia D thành cách hình chữ nhật với cạnh Δx_k, Δy_k. Khi ấy diện tích mỗi miền con $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$. Do đó, ta thường dùng ký hiệu

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Tính chất của tích phân kép

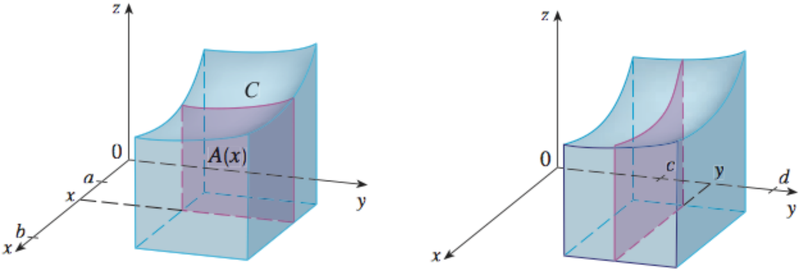
1. Hàm liên tục trên một miền đóng và bị chặn, có biên trơn từng khúc thì khả tích trên miền này.
2. $S_D = \iint\limits_D 1dxdy$ - diện tích của miền D.
3. $\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.
4. $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.
5. Nếu D được chia thành hai miền D_1 và D_2 không đè lên nhau
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$
6. Nếu $f(x,y) \le g(x,y)$ trong D thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

Cách tính tích phân kép

1- Định lý Fubini:

Nếu f là một hàm liên tục trên hình chữ nhật
$R = \{(x, y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, thì

$$\iint\limits_R f(x,y)dS = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$



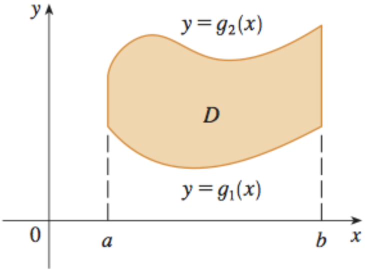
2- Định lý Fubini tổng quát

Dạng 1: Nếu f là một hàm liên tục trên miền D tạo bởi

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

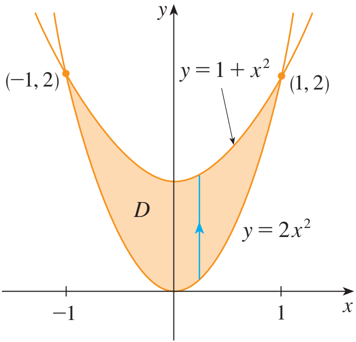
thì

$$\iint\limits_D f(x, y) dS = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$



Ví dụ 1.

Tính $\iint\limits_D (x+2y)dS$ với D là miền giới hạn bởi các parabol $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$



Các parabol cắt nhau khi $2x^2 = 1 + x^2$, khi ấy $x = \pm 1$. Khi ấy, miền D được xác định bởi

$$D = \left\{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\right\}.$$

Áp dụng định lý Fubini, ta có

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x + 2y) dS &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[x(1 + x^2) + (1 + x)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2\right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) dx \\
&= \left(-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}.
\end{aligned}$$

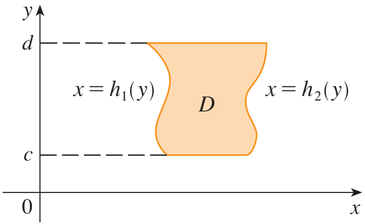
2- Định lý Fubini tổng quát

Dạng 2: Nếu f là một hàm liên tục trên miền D tạo bởi

$$D = \{(x, y) | c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

thì

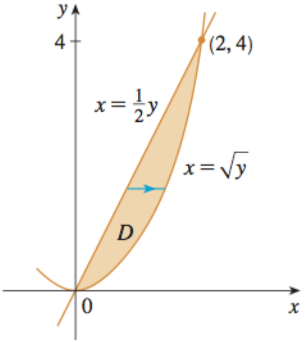
$$\iint\limits_D f(x, y) dS = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$



Ví dụ 2.

Tính $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dS$ với D xác định bởi

$$D = \left\{(x, y)|0 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\right\}.$$



$$V = \iint\limits_D (x^2+y^2)dS = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{2}{15}y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} - \frac{13}{96}y^4\right)\Bigg|_0^4 = \frac{216}{35}.$$

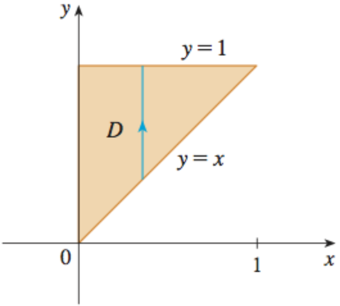
Ví dụ 3.

Tính $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx$.

Tích phân không phải là một tích phân hàm cơ bản. Áp dụng định lý Fubini, ta có

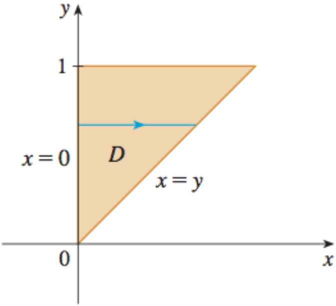
$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx = \iint\limits_D sin(y^2)dS$$

với $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$



Miền D ở trên đồng thời được xác định bởi

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$



Ta có thể tính tích phân kép như sau

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx &= \iint\limits_D \sin(y^2)dS \\ &= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)dxdy \\ &= \int_0^1 \left(x\sin(y^2)\right)\Big|_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y\sin(y^2)dy = -\frac{1}{2}\cos(y^2)|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos 1).\end{aligned}$$

Bài tập

Tính các tích phân kép sau

1) $I = \iint\limits_D xdxdy$, với D là tam giác OAB: $O(0,0), A(1,1), B(0,1)$.

2) $I = \iint\limits_D (xy + 2y)dxdy$, với D là tam giác OAB: O(0,0), A(1,1), B(2,0).

3) $I = \iint\limits_D x\cos ydxdy$, với D được giới hạn bởi $y = 0, y = x^2$ và $x = 1$.

4) $I = \iint\limits_D (x + y)dxdy$ với D được giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và $y = x^2$.

5) $I = \iint\limits_D ye^x dxdy$, với D là tam giác có các đỉnh (0,0), (2,4) và (6,0).

6) $I = \iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, với D giới hạn bởi $x = y^2$ và $x = y^3$.

7) $I = \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$.

8) $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)dxdy$.

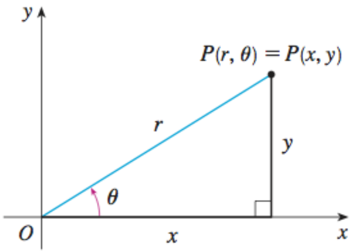
9) $I = \int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dydx$.

Tích phân kép trong toạ độ cực

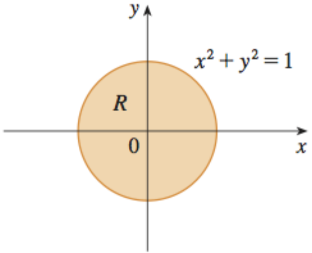
Nhắc lại

Mối quan hệ giữa toạ độ cực (r, θ) và toạ độ Descarte (x, y) được xác định theo công thức

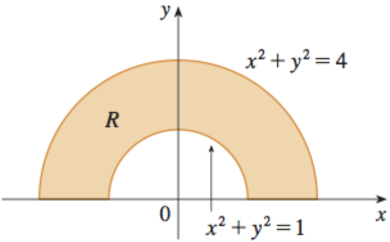
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta.$$



Ví dụ



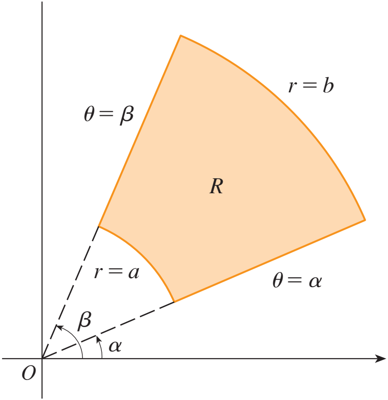
(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$



(b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Hai ví dụ trên là trường hợp đặc biệt của miền R được xác định trong toạ độ cực bởi công thức

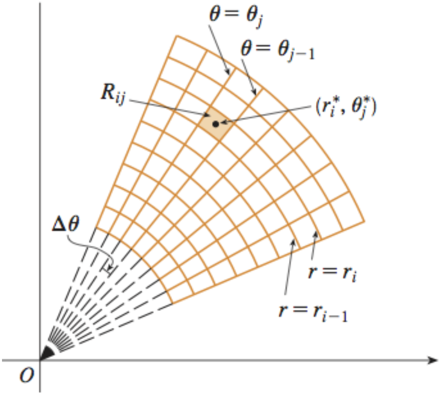
$$R = \{(r, \theta) | a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$



Để tính tích phân kép $\iint\limits_R f(x,y)dS$ trên miền R như trên, ta chia đoạn $[a,b]$ thành m phần nhỏ bằng nhau $[r_{i-1}, r_i]$, $\Delta r = \frac{b-a}{m}$, chia đoạn $[\alpha, \beta]$ thành n phần nhỏ bằng nhau $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, $\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$.

Khi đó hình quạt R được chia thành $n \times m$ miền con

$$R = \{(r,\theta) | r_{i-1} \le r \le r_i, \theta_{j-1} \le \theta_j\}$$

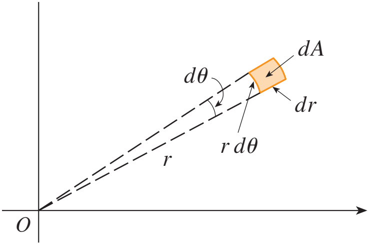


Trên mỗi miền con, ta chọn điểm tại tâm, có toạ độ (r_i^*, θ_j^*) với

$$r_i^* = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}, \quad \theta_j^* = \frac{\theta_j + \theta_{j-1}}{2},$$

Để tính diện tích mỗi phần con, ta nhớ rằng: diện tích của hình quạt với bán kính r và góc θ cho bởi công thức $\frac{1}{2}r^2\theta$. Do đó diện tích mỗi phần con R_{ij} bằng hiệu diện tích hai hình quạt với bán kính lần lượt là r_i và r_{i-1} với góc $\Delta\theta = \theta j - \theta_{j-1}$. Khi ấy diện tích R_{ij} cho bởi

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta$$
$$\frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta.$$



Với cách chia miền R như trên, trong mỗi phần nhỏ ta chọn điểm có toạ độ (r^*, θ^*) tương ứng. Thiết lập tổng Riemann ta có

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta.$$

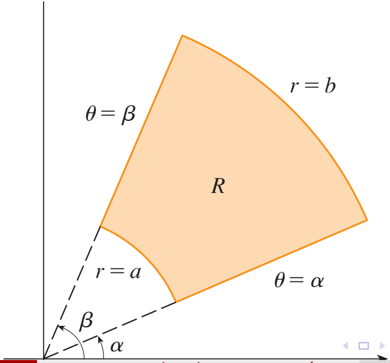
Do đó, khi lấy giới hạn $m\to\infty$, $n\to\infty$, ta thu được tích phân kép

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)dA &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\Delta A_{ij}\\ &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta\\ &= \int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta.\end{aligned}$$

Tích phân kép trong toạ độ cực

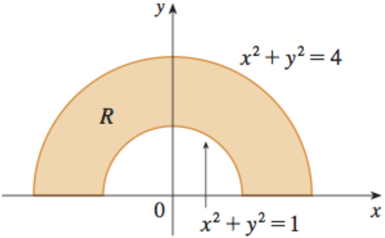
Nếu f là một hàm liên tục trong miền R trong toạ độ cực cho bởi $0 \leq a \leq r \leq b$ và $\alpha \leq \theta \leq \beta$ với $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ thì

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$



Ví dụ 1.

Tính tích phân $\iint\limits_R (3x + 4y^2)dA$ với R là miền nữa trên mặt phẳng giới hạn bởi hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.



Miền R trong hệ trục toạ độ Descarte được xác định như sau

$$R = \{(x, y)|y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

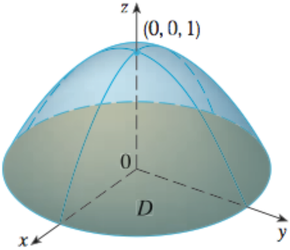
Trong toạ độ cực, miền R được xác định bởi $1 \leq r \leq 2$ và $0 \leq \theta \leq \pi$.

Tích phân trên được tính như sau

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_R (3x+4y^2)dA &= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)drd\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right]\Big|_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (7\cos\theta + 15\sin^2\theta)d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[7\cos\theta + \frac{15}{2}(1-\cos 2\theta)\right] d\theta \\
&= 7\sin\theta + \frac{15}{2}\theta - \frac{15}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2.

Tính thể tích khối V tạo bởi mặt $z = 0$ và paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.
Giải. Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ cắt mặt phẳng $z = 0$ tại hình tròn $x^2 + y^2 = 1$. Do đó, khối V sẽ nằm dưới paraboloid và nằm phía trên đĩa D cho bởi: $x^2 + y^2 \leq 1$.



Trong toạ độ cực, miền (đĩa) D cho bởi $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Vậy, thể tích được tính bởi

$$
\begin{aligned}
V = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr \\
&= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Nếu tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descarte,

$$
V = \int\limits_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx.
$$

Rất khó tính toán vì sau khi tích phân theo biến y ta thu được tích phân

$$
\int (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.
$$

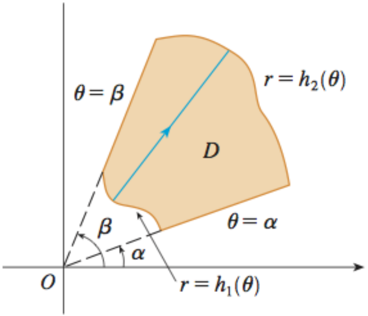
Tích phân kép trong toạ độ cực (cont)

Nếu f là một hàm liền tục trên miền có dạng

$$D = \{(r,\theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

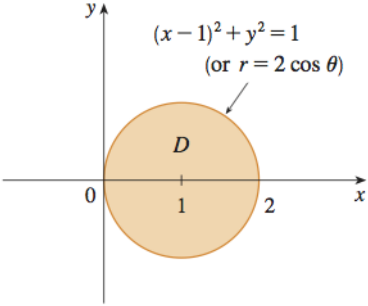


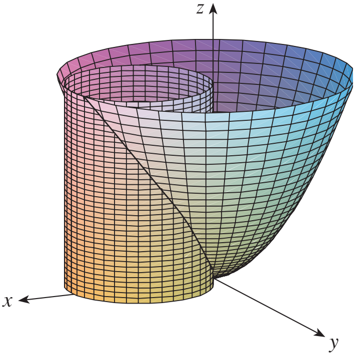
Ví dụ 3.

Tính thể tích tạo bởi phần dưới của paraboloid $z = x^2 + y^2$, bên trên mặt phẳng $0xy$ và xác định bên trong hình trụ $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Giải. Miền $D = \left\{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}$ xác định trong toạ độ cầu bởi

$$D = \{(r, \theta) | -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\}.$$





Thể tích được tính bởi

$$V = \iint\limits_D (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \, r \, dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + 2\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} [1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)] d\theta$$

$$= 2 \left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = 2 \frac{3}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Bài tập

1) Tính $\iint\limits_D xydA$ với miền D là đĩa tâm tại gốc toạ độ và bán kính bằng 3.

2) Tính $\iint\limits_D (x+y)dA$ với D là miền nằm bên phải trục tung và được giới hạn bởi hai đường tròn $x^2+y^2=1$ và $x^2+y^2=4$.

3) Tính $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dA$ với $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4, x\geq 0\}$.

4) Tính $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dA$ với miền D giới hạn bởi $x=\sqrt{4-y^2}$ và trục tung.

5) Tính $\iint\limits_D ye^x dA$ với D là góc $\frac{1}{4}$ thứ nhất được giới hạn bởi $x^2+y^2=25$.

6) Tính $\iint\limits_D \arctan(y/x)dA$ với $R=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 4, 0\leq y\leq x\}$.

7) Tính diện tích miền giới hạn bởi đường cong $r=4+3\cos\theta$.

8) Tính $\int_0^1\int_y^{\sqrt{2-y^2}}(x+y)dxdy$.

9) Tính $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dydx$.

10) Tính $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x} xydydx$.

Công thức đổi biến tổng quát tích phân kép

Công thức đổi biến tổng quát tích phân kép

Trong giải tích hàm 1 biến, chúng ta đã sử dụng phương pháp đổi biến để tính nguyên hàm và tích phân của một hàm số. Bằng cách thay thế vai trò của biến x và biến u, ta có thể chuyển tích phân theo biến x thành tích phân theo biến u với qui tắc sau

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

với $x = g(u)$ và $a = g(c), b = g(d)$.

Phương pháp đổi biến vẫn có thể được sử dụng trong tích phân kép. Khi khảo sát hàm số trong toạ độ cưc, chúng ta đã thực hiện phép đổi biến (x, y) thành r, θ bởi

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta.$$

Với qui tắc đổi biến như trên, tích phân kép có thể được viết lại thành

$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \iint\limits_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

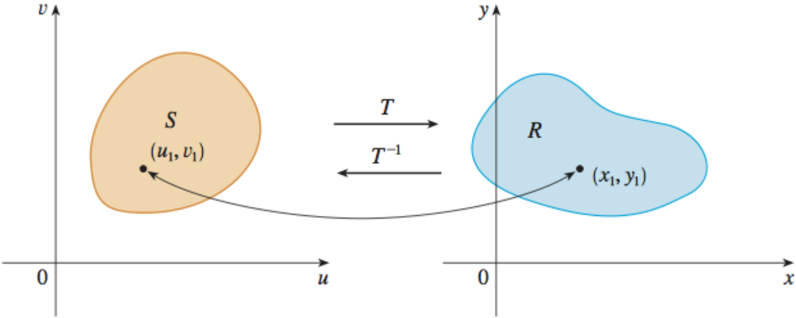
Với S là miền trong toạ độ cực (r, θ) tương ứng với R trong toạ độ (x, y).

Tổng quát hơn, thực hiện phép đổi biến T từ hệ toạ độ (u, v) thành hệ toạ độ (x, y)

$$T(u, v) = (x, y)$$

cho bởi hệ phương trình

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v).$$



Định thức Jacobi của phép đổi biến T được tính bởi

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Công thức đổi biến

Giả sử T là một phép đổi biến với định thức Jacobi khác 0, biến miền S trong toạ độ uv thành miền R trong toạ độ x, y. Giả sử f là một hàm số liên tục trên R. Khi ấy ta có

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dA = \iint f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

Ví dụ 1.

Với phép đổi biến T từ toạ độ cực (r, θ) thành toạ độ Descarte (x, y) cho bởi

$$x = x(r, \theta) = r\cos\theta \quad y = y(r, \theta) = r\sin\theta.$$

Định thức Jacobi được tính bởi

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r > 0.$$

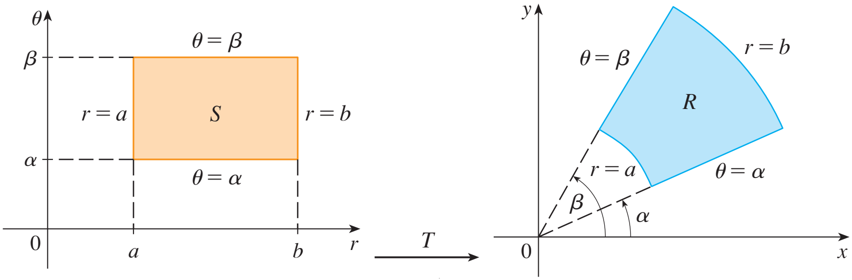
Khi ấy ta có công thức đổi biến

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy = \iint\limits_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| drd\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Qua phép đổi biến

$$T : (r, \theta) \to (x, y)$$



Toạ độ cực mở rộng

Trường hợp 1. Miền D là hình tròn tâm tại (x_0, y_0) bán kính là a

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2$$

Dùng phép đổi biến

$$\begin{cases} x - x_0 = r\cos\theta \\ y - y_0 = r\sin\theta \end{cases}$$

Tính định thức Jacobi, ta thu được

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Khi ấy cận trong toạ độ cực (r, θ) được dời về tâm hình tròn.

Trường hợp 2.

Miền D là ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, $a > 0, b > 0$. Dùng phép đổi biến

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = r\cos\theta \\ \dfrac{y}{b} = r\sin\theta. \end{cases}$$

Tính định thức Jacobi, ta thu được

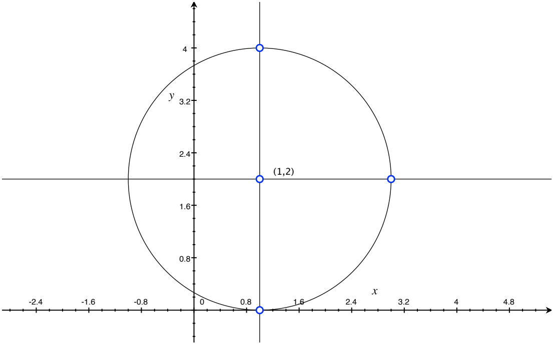
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= ab(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta) = abr.$$

Khi đó cận (r,θ) cho bởi $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$.

Ví dụ 2.

Tính tích phân $V = \iint\limits_D (2x + y)dA$ trong miền D giới hạn bởi $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4$ và $x \geq 1$.



Theo trường hợp 1, thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x - 1 = r\cos\theta \\ y - 2 = r\sin\theta \end{cases}$$

ta đồng thời chuyển gốc toạ độ về điểm $(1, 2)$ và chuyển sang toạ độ cực. Định thức Jacobi

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| = r$$

Trong hệ trục toạ độ mới, miền D được xác định bởi

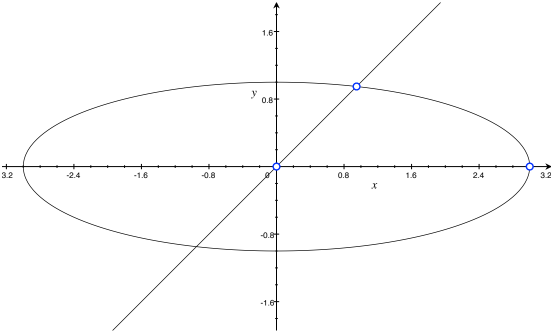
$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \le r \le 2. \end{cases}$$

Vậy tích phân được viết lại thành

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (2x+y)dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 (2(1+r\cos\theta)+(2+r\sin\theta))rdrd\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 (4r+r^2(2\cos\theta+\sin\theta))drd\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[2r^2+\frac{r^3}{3}(2\cos\theta+\sin\theta)\right]_0^2 d\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[8+\frac{8}{3}(2\cos\theta+\sin\theta)\right] d\theta\\ &= 8\pi+\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.

Tích tích phân $V = \iint\limits_D x dA$ với miền D được giới hạn bởi $\frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$ và $y \leq x$.



Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3}} & = r\cos\theta \\ y & = r\sin\theta \end{cases}$$

Định thức Jacobi

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \sqrt{3}r$$

Để xác định miền D trong hệ trục toạ độ mới, ta thấy, qua phép biến đổi,

$$0 \le r \le 1;$$

$$y = 0 \Rightarrow r\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$y = x \Rightarrow r\sin\theta = \sqrt{3}r\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Vậy miền D trong hệ toạ độ mới được xác định bởi

$$\begin{cases} 0 & \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 0 & \le r \le 1. \end{cases}$$

Tích phân được viết lại thành

$$\iint\limits_D x dA = \int_0^{\pi/3} \int_0^1 (\sqrt{3} r \cos\theta) \sqrt{3} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \int_0^1 3r^2 \cos\theta dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \cos\theta \ r^3\Big|_0^1 d\theta$$

$$= \sin\theta\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ứng dụng của tích phân kép

Ứng dụng

1. Tính thể tích

Từ định nghĩa tích phân kép, nếu V là hình trụ có đáy D nằm trong mặt phẳng Oxy, mặt trên S có phương trình $z = f(x, y)$ với $(x, y) \in D$ thì thể tích V là $V = \iint\limits_D f(x, y)dA$. Nếu $f(x, y) < 0$ thì ta thay bởi $|f(x, y)|$.

2. Tính diện tích hình phẳng

Nếu miền D có diện tích S thì ta có $S = \iint\limits_D dA$.

3. Diện tích mặt cong

Nếu mặt S có phương trình $z = f(x, y)$ với $(x, y) \in D$ và các đạo hàm riêng $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ tồn tại, liên tục trong D thì diện tích của mặt S được tính bởi công thức $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}dA$.

Ví dụ 1.

Tính diện tích mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Phương trình của mặt cần tính diện tích là $z = x^2 + y^2$ với $(x, y) \in D$, đường tròn tâm tại gốc toạ độ và bán kính bằng 1. Theo công thức ta có

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}dA = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy.$$

Chuyển sang toạ độ cực, ta có

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}rdrd\theta$$
$$= 2\pi \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Ngoài ra ta có thể áp dụng tích phân kép trong cơ học, xác suất, ...

Ứng dụng trong cơ học

a) Tính khối lượng của mảnh phẳng.
b) Tính mô men quán tính của mảnh phẳng.
c) Tính mô men tĩnh của mảnh phẳng.
d) Tìm trọng tâm của mảnh phẳng.

Ứng dụng trong xác suất

a) Tính hàm mật độ với hai biến ngẫu nhiên giao với miền D.
b) Tính kỳ vọng với hai biến ngẫu nhiên.

Bài tập

Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt sau
1) $2z = y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
2) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.
3)$z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = 4$.
4) $z = 2x^2 + y^2 + 1$, trên miền giới hạn bởi $x + y = 1$ và các trục toạ độ.
5) $y = x, y = 2x, x = 1, z = 2x^2 + y^2$
Tính các tích phân sau.
6) $\iint\limits_R \sin(9x^2 + 4y^2)dA$ với R là góc 1/4 thứ nhất giới hạn bởi ellipse $9x^2 + 4y^2 = 1$.
7)$\iint\limits_R e^{x+y}dA$ với R cho bởi bất phương trình $|x| + |y| \leq 1$.
8)$\iint\limits_D ydA$ với D là miền giới hạn bởi góc 1/4 thứ nhất và các parabol $x = y^2$ và $x = 8 - y^2$.

9) $\iint\limits_D xdA$ với D là miền giới hạn bởi hai đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và $x^2 + y^2 = 4$.
10) $\iint\limits_D (2x + y)dA$ với D là hình tròn $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.
11) Tính diện tích miền phẳng nằm ngoài đường tròn $r = 1$ và nằm trong đường tròn $r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\theta$.
12) $\iint\limits_D (4x + 2)dA$ với D giới hạn bởi $0 \leq x \leq 2$ và $x^2 \leq y \leq 2x$.
13) $\iint\limits_D xydA$ với D là hình tròn $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.
14) $\iint\limits_D xdA$ với D là tam giác với các đỉnh $A(2, 3), B(7, 2), C(4, 5)$.
15) $\iint\limits_D (12 - 3x^2 - 4y)dA$ với D là miền giới hạn bởi ellipse $x^2/4 + y^2 = 1$.

https://sites.google.com/site/thephiet251/