

Vật rắn

Lê Quang Nguyên

www4.hcmut.edu.vn/~leqnguyen

nguyenquangle59@yahoo.com

Nội dung

1. Vật rắn quay quanh trục cố định
 - a. Định luật 2 cho chuyển động quay
 - b. Momen quán tính đối với trục quay
 - c. Momen lực đối với trục quay
 - d. Động năng và công trong chuyển động quay
2. Chuyển động lăn không trượt
3. Bài tập

cuuduongthancong.com

1a. Định luật 2 cho chuyển động quay

Định lý momen động: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$

$L_z = I_z \omega$

I_z : momen quán tính của vật đối với z
 ω : vận tốc góc

$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z$ z: trục quay

$I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \iff I_z \alpha = \tau_z$

α : gia tốc góc (rad/s²)

Định luật 2 cho chuyển động quay quanh z

1b. Momen quán tính của vật đối với trục quay

$I_z = \sum_i m_i r_i^2$ (kg.m²)

tổng theo các chất điểm m_i thuộc vật

Khoảng cách từ m_i tới trục quay z

1c. Momen lực đối với trục quay

$$\tau_z = \sum_i \tau_{iz}$$
 tổng theo các momen lực τ_{iz}

Dấu + khi lực F_i quay vật theo chiều dương

$$\tau_{iz} = \pm l_i F_i \quad (\text{N.m})$$

Khoảng cách từ lực F_i tới trục quay z

Bài tập 1.1

Tìm momen quán tính của một vành tròn đồng nhất khối lượng M , bán kính R đối với:

- (a) trục đối xứng của vành,
- (b) trục song song với trục đối xứng, đi qua một điểm trên vành tròn.

cuu duong than cong . com

Trả lời bài tập 1.1

- Chia vành làm nhiều phần nhỏ khối lượng dm :

$$I_a = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

- Định lý Steiner:

$$I_b = I_{CM} + Md^2$$

 (b) // (CM)

- Suy ra:

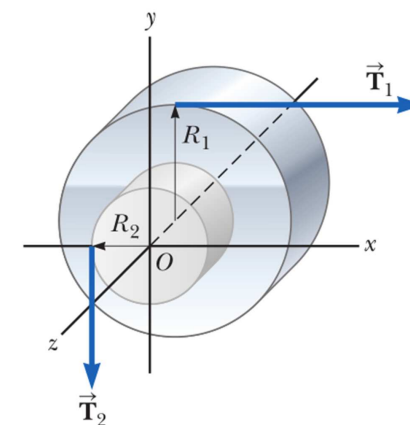
$$I_b = I_a + MR^2 = 2MR^2$$

Momen quán tính
 của một số vật
 thường gặp.

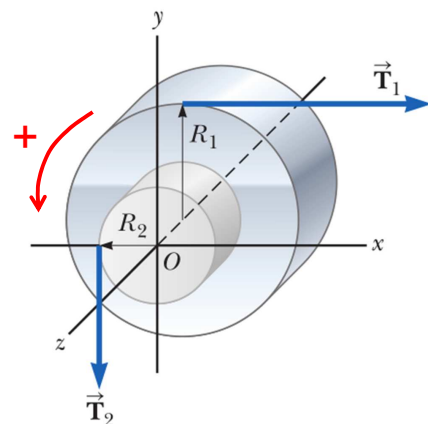
Bài tập 1.2

Xét hệ như hình vẽ.

- (a) Tìm momen lực toàn phần tác động lên ròng rọc đối với trục quay, cho $T_1 = 5 \text{ N}$, $R_1 = 1 \text{ m}$, $T_2 = 15 \text{ N}$ và $R_2 = 0,5 \text{ m}$.
- (b) Ròng rọc sẽ quay theo chiều nào?



Trả lời bài tập 1.2



$$\tau_z = -R_1 T_1 + R_2 T_2$$

$$= -1 \times 5 + 0,5 \times 15 = 2,5 \text{ N.m}$$

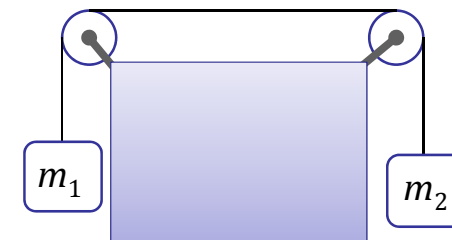
$$\tau_z > 0 \Rightarrow \alpha > 0 \quad \text{Vật quay theo chiều dương}$$

Bài tập 1.3

Xét hệ như hình vẽ.

Mỗi ròng rọc có momen quán tính I và bán kính R .

Tìm gia tốc của mỗi vật và các sức căng dây.



Trả lời bài tập 1.3 - 1

- Định luật 2 Newton cho m_1 trên y và m_2 trên y' :

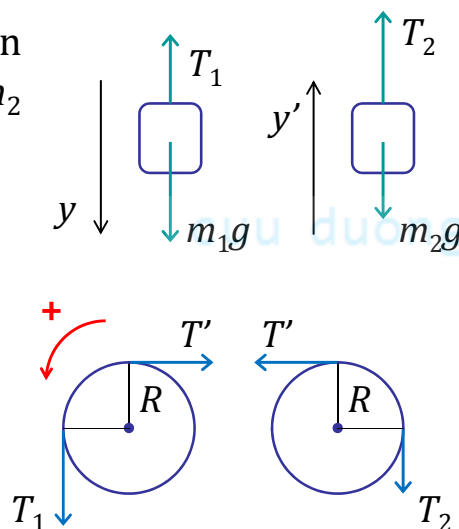
$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g$$

- cho hai ròng rọc:

$$I \alpha = R(T_1 - T')$$

$$I \alpha = R(T' - T_2)$$



Trả lời bài tập 1.3 - 2

- Hai vật có gia tốc bằng nhau:
 $a_1 = a_2 \equiv a$
- Dây **không trượt** nên vận tốc của một điểm trên vành ròng rọc = vận tốc vật:
 $\omega R = v \Rightarrow \alpha R = a$

- Ta có hệ phương trình sau:

$$m_1 a = m_1 g - T_1 \quad (1)$$

$$m_2 a = T_2 - m_2 g \quad (2)$$

$$I a / R^2 = T_1 - T' \quad (3)$$

$$I a / R^2 = T' - T_2 \quad (4)$$

Trả lời bài tập 1.3 - 3

- Lấy tổng các pt (1) – (4) ta được:

$$\left(m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}\right)a = (m_1 - m_2)g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}}$$

- Thế gia tốc a vào (1), (2) và (3) ta có các sức căng.

1d. Động năng và công

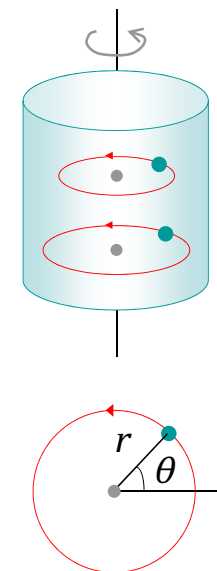
- Động năng:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

- Công và công suất:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta$$

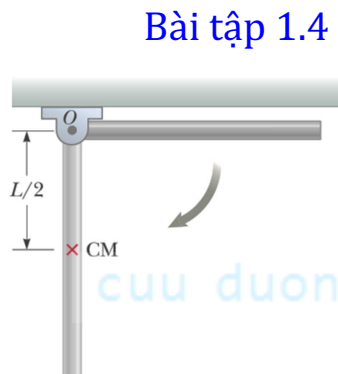
$$P = \tau_z \omega$$



cuu duong than cong . com

Một thanh dài L , khối lượng m có thể quay không ma sát quanh một trục ngang đi qua O . Thanh được thả không vận tốc đầu khi đang nằm ngang. Tìm:

- vận tốc góc khi thanh ở vị trí thẳng đứng,
- vận tốc khối tâm ở vị trí đó.



Bài tập 1.4

Trả lời bài tập 1.4 - 1

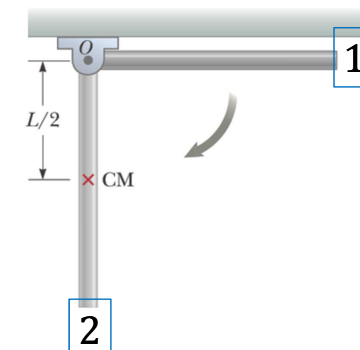
- Vì không có ma sát nên cơ năng thanh bảo toàn:

$$\Delta E = \Delta(K + U_g) = 0$$

$$\Delta K = K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

- Thế năng trọng trường của thanh:

$$U_g = mgy_{CM}$$



Thế năng trọng trường của một vật rắn:
 $U_g = mgy_{CM}$

4b. Trả lời bài tập 4.1 - 2

- Với trục y hướng lên:

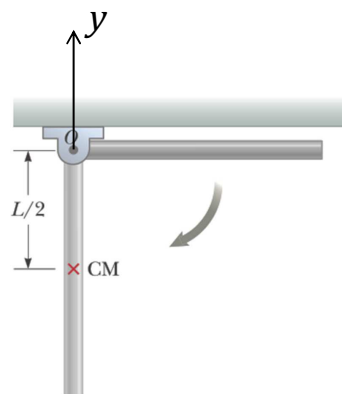
$$\Delta U_g = mg\Delta y_{CM} = -mgL/2$$

- Do đó:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mgL = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

$$I = \frac{mL^2}{3} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$



4b. Trả lời bài tập 4.1 - 3

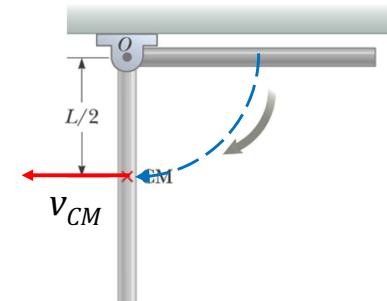
- Giữa vận tốc dài của một chất điểm của vật rắn quay và vận tốc góc có hệ thức:

$$v = \omega r$$

- r là khoảng cách từ chất điểm đến trục quay.

- Với khối tâm thì $r = L/2$:

$$v_{CM} = \omega \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

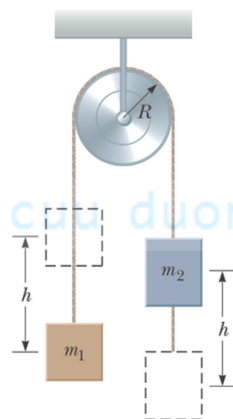


cuu duong than cong . com

Bài tập 1.5

Ròng rọc có bán kính R và momen quán tính I đối với trục quay. Lúc đầu hệ được thả không vận tốc.

Tìm vận tốc dài của hai vật vào lúc vật 2 xuống được một khoảng h .



Trả lời bài tập 1.5

- Cơ năng bảo toàn:

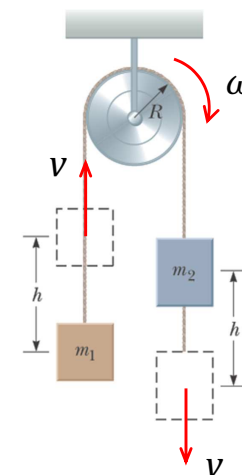
$$\Delta E = \Delta(K + U_g) = 0$$

- Độ biến thiên động năng:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2$$



Trả lời bài tập 1.5 (tt)

- Độ biến thiên thế năng của hệ là:

$$\Delta U_g = m_1 gh - m_2 gh$$

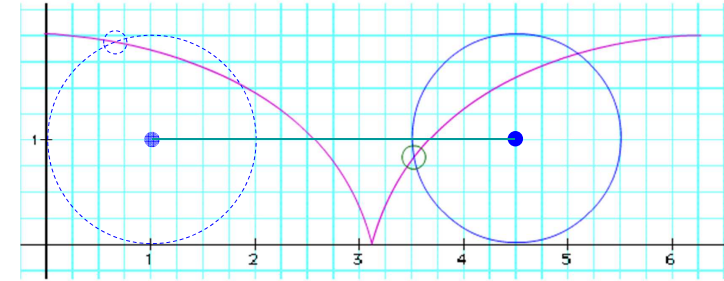
- Suy ra:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + I/R^2 \right) v^2 + (m_1 - m_2) gh = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}}$$

2a. Chuyển động lăn của vật rắn

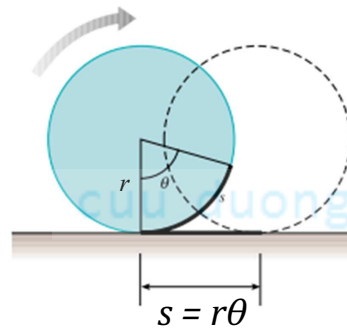
- Khối tâm của bánh xe lăn có chuyển động tịnh tiến.
- Nhưng mỗi điểm trên vành bánh xe lại có quỹ đạo cycloid.



cuu duong than cong . com

2b. Vận tốc của khối tâm

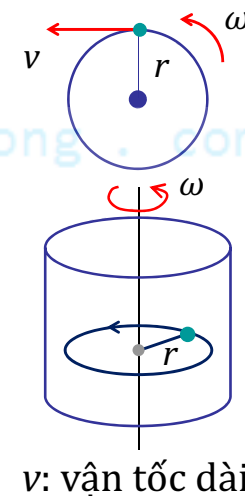
- Xét bánh xe lăn không trượt,
- Khi một điểm trên vành đi được một cung tròn có chiều dài $s = r\theta$,
- thì khối tâm cũng tịnh tiến được cùng một khoảng đó.
- Do đó ta có: $\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$



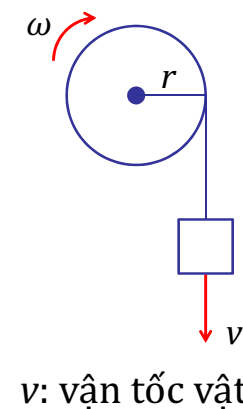
$$v_{CM} = r|\omega|$$

Lưu ý về hệ thức $v = \omega r$

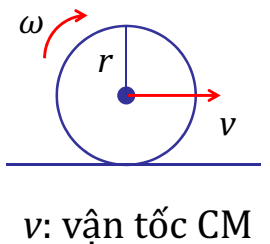
Vật rắn quay



Vật treo qua ròng rọc



Vật lăn không trượt



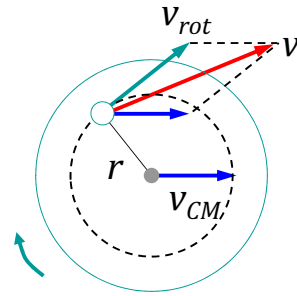
v: vận tốc vật treo

v: vận tốc dài

2c. Kết hợp tịnh tiến và quay

- Lăn không trượt là sự kết hợp của chuyển động tịnh tiến của khối tâm,
- và chuyển động quay quanh một trục đi qua khối tâm.
- Do đó một chất điểm thuộc vật có vận tốc cho bởi:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{rot}$$



2c. Kết hợp tịnh tiến và quay (tt)

- Mỗi điểm trên vành có vận tốc quay $v_{rot} = \omega r$.

- Ở vị trí thấp nhất:

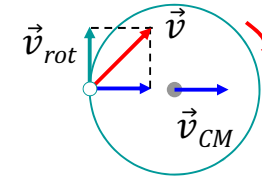
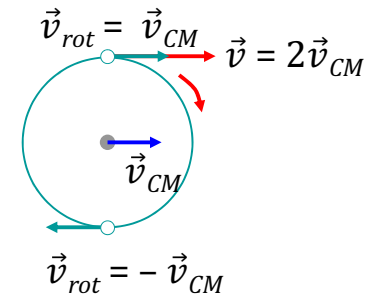
$$v = v_{CM} - v_{rot} = 0$$

- Ở vị trí giữa:

$$v = \sqrt{v_{CM}^2 + v_{rot}^2} = \omega r \sqrt{2}$$

- Ở vị trí cao nhất:

$$v = v_{CM} + v_{rot} = 2\omega r$$



2d. Động năng của chuyển động lăn

- Động năng của chuyển động lăn là tổng
- động năng tịnh tiến của khối tâm,
- và động năng quay quanh trục đi qua khối tâm.

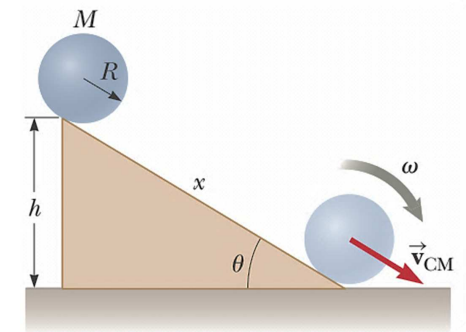
$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

- trong đó M , I là khối lượng và momen quán tính đối với trục qua CM của vật.

Bài tập 2.1

Một quả cầu khối lượng M và bán kính R lăn xuống một mặt phẳng nghiêng với vận tốc đầu bằng không.

Tìm vận tốc khối tâm quả cầu ở cuối mặt phẳng nghiêng.

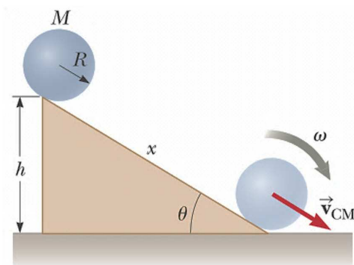


Trả lời bài tập 2.1 - 1

- Lăn không trượt: vận tốc tiếp điểm bằng không,
- vậy ma sát là tĩnh, không thực hiện công.
- Cơ năng bảo toàn:

$$\Delta E = \Delta(K + U) = 0$$
- Độ biến thiên động năng:

$$\Delta K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$



Trả lời bài tập 2.1 - 2

$$\omega = \frac{v_{CM}}{R} \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{I}{MR^2} \right) v_{CM}^2$$

- Độ biến thiên thế năng:

$$\Delta U = Mg \Delta y_{CM} = -Mgh$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{I}{MR^2} \right) v_{CM}^2 - Mgh = 0$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}} = \sqrt{\frac{10gh}{7}} \quad c = \frac{2}{5} : \text{quả cầu}$$

cuu duong than cong . com

Trả lời bài tập 2.1 - 3

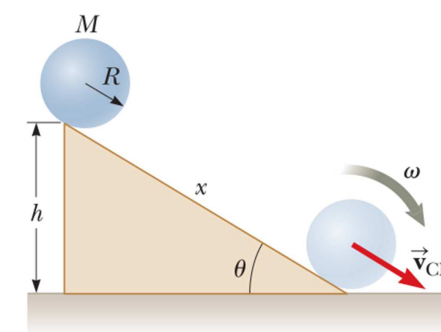
- Với mọi vật lăn ta có:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}} \quad c = \frac{I}{MR^2}$$

- Vận tốc không phụ thuộc M, R , chỉ phụ thuộc hằng số $c = I/MR^2$.
- Vật có c nhỏ sẽ lăn xuống nhanh hơn.

Bài tập 2.2

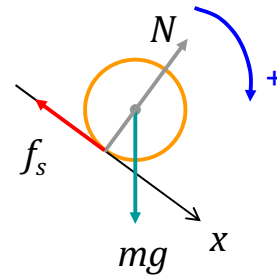
Trong bài tập 2.1, hãy tìm biểu thức của gia tốc khối tâm.



Trả lời bài tập 2.2 - 1

- Dùng định luật 2 Newton cho
- khối tâm trên trục x:
 $Ma_{CM} = Mg \sin \theta - f_s$
- và cho quả cầu quay:
 $I\alpha = f_s R$
- Do lăn không trượt:

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R}$$



Trả lời bài tập 2.2 - 2

- Suy ra hệ phương trình:

$$\begin{cases} Ma_{CM} = Mg \sin \theta - f_s \\ \frac{I}{R^2} a_{CM} = f_s \end{cases}$$

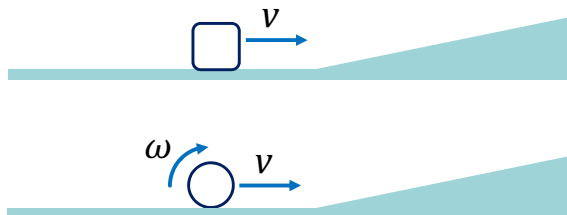
$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + c} = \frac{g \sin \theta}{1 + 2/5} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

cuu duong than cong . com

BT 3.1

Một khối vuông và một quả cầu có cùng khối lượng, chuyển động trên mặt ngang với cùng vận tốc đầu. Sau đó chuyển động lên hai mặt nghiêng có cùng độ nghiêng. Khối vuông trượt không ma sát, còn quả cầu lăn không trượt.

Vật nào lên cao hơn?



Trả lời BT 3.1

Bảo toàn cơ năng: $mgh = K \Rightarrow h = \frac{K}{mg}$

Khối vuông: $K_1 = \frac{1}{2}mv^2$

Quả cầu: $K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 > K_1$

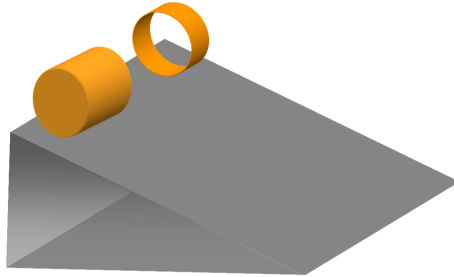
$K_2 > K_1 \Rightarrow h_2 > h_1$

Quả cầu lên cao hơn

BT 3.2

Một hình trụ đặc và một vành tròn có cùng khối lượng và bán kính, được thả cùng một lúc và lăn không trượt xuống một mặt nghiêng.

Vật nào lăn hết mặt nghiêng trước?



Trả lời BT 3.2

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

$$c_{\text{trụ}} = \frac{1}{2}$$

$$c_{\text{vành}} = 1$$

$$\Rightarrow v_{\text{trụ}} > v_{\text{vành}}$$

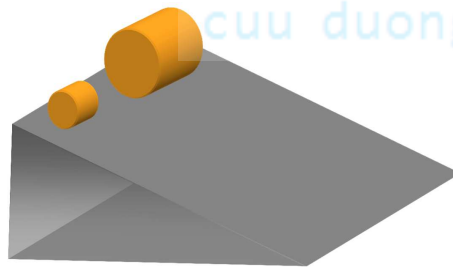
Hình trụ lăn xuống trước

cuu duong than cong . com

BT 3.3

Hai hình trụ đặc, một cái nhỏ hơn và nhẹ hơn cái kia, được thả cùng một lúc và lăn không trượt xuống một mặt nghiêng.

Hình trụ nào lăn hết mặt nghiêng trước?



Trả lời BT 3.3

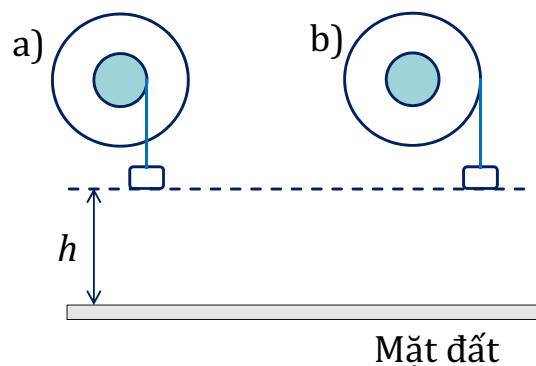
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

Mọi hình trụ đặc đều có $c = \frac{1}{2}$, không phụ thuộc khối lượng và bán kính vật lăn.

\Rightarrow cả hai xuống hết mặt nghiêng cùng lúc.

BT 3.4

Xét hai đĩa giống nhau. Hai vật nặng giống nhau được thả từ cùng một độ cao. Ngay trước khi hai vật nặng chạm đất, đĩa nào có động năng quay lớn hơn?



Trả lời BT 3.4

- Bảo toàn cơ năng cho hệ vật + đĩa:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad v = \frac{\omega}{R}$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 \left(\frac{mR^2}{I} + 1 \right) \Rightarrow K_{quay} = \frac{mgh}{mR^2/I + 1}$$

- m, h, I giống nhau trong hai trường hợp, nhưng $R_a < R_b$: động năng quay trường hợp a) lớn hơn.