Đồ thị

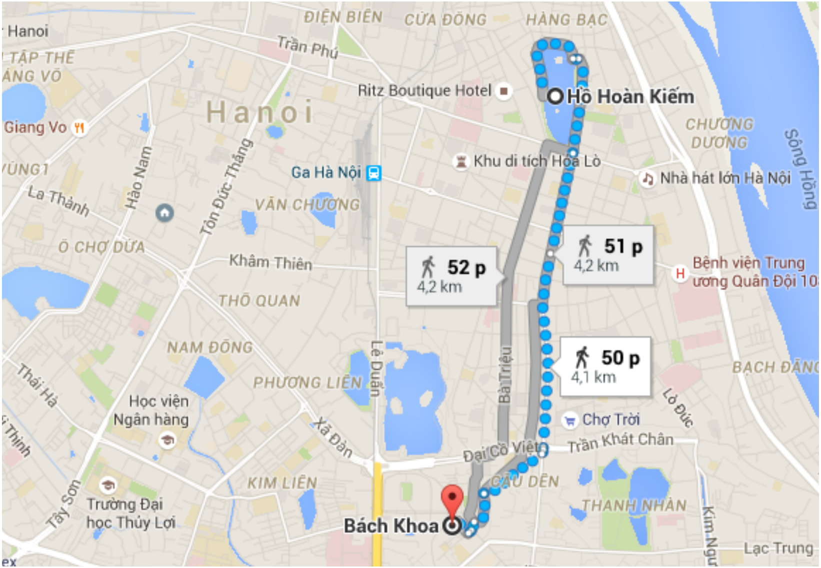
Trần Vĩnh Đức

HUST

Ngày 24 tháng 7 năm 2018

Tài liệu tham khảo

- Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2002.


Hanoi
TẬP THỂ
ĂNG VÕ
ĐIỆN BIÊN
CỬA ĐÔNG
HÀNG BẠC
Trần Phú
Ritz Boutique Hotel
Hồ Hoàn Kiếm
Hanoi
Giang Vo
CHƯƠNG DƯƠNG
Sông Hồng
Ga Hà Nội
Khu di tích Hỏa Lò
Nhà hát lớn Hà Nội
La Thành
Hào Nam
Tôn Đức Thắng
VĂN CHƯƠNG
Ô CHỢ DỪA
Khâm Thiên
52 p
4,2 km
51 p
4,2 km
Bệnh viện Trung ương Quân Đội 10
THỔ QUAN
NAM ĐỒNG
Lê Duẩn
Bà Triệu
50 p
4,1 km
BẠCH ĐẰNG
PHƯƠNG LIÊN
Thái Hà
Học viện Ngân hàng
Xã Đàn
Chợ Trời
Lò Đúc
Trần Khát Chân
Đại Cồ Việt
CẦU DỀN
KIM LIÊN
THANH NHÀN
Trường Đại học Thủy Lợi
Tây Sơn
Bách Khoa
Kim Ngư
Lạc Trung

Nội dung

Đồ thị và biểu diễn

Một số đồ thị đặc biệt

Đẳng cấu

Bậc

Đường đi và chu trình

Định nghĩa

Một ***đồ thị*** G là một cặp có thứ tự $G = (V, E)$, ở đây V là một tập, còn E là tập với các phần tử là các tập con hai phần tử của V.

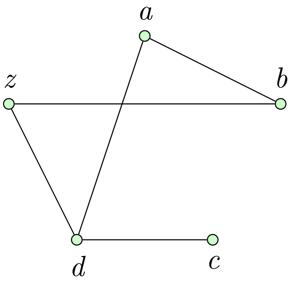
Các phần tử của V được gọi là các ***đỉnh***, còn các phần tử của E gọi là các ***cạnh*** của G.

Ví dụ

Xét đồ thị $G = (V, E)$ trong đó

$V = \{a, b, c, d, z\}$

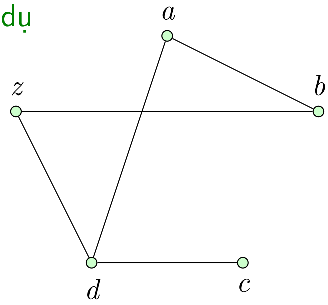
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}$.



Định nghĩa

- Hai đỉnh x và y gọi là ***kề nhau*** (hay ***hàng xóm***) nếu $\{x, y\}$ là một cạnh của đồ thị.
- Ta biểu diễn đồ thị $G = (V, E)$ bởi ***danh sách kề***, trong đó mỗi đỉnh v giữ một danh sách các đỉnh kề với v.

Ví dụ



a	b	c	d	z
b	a	d	a	b
d	z		c	d
			z	

Bài tập

Có ba ngôi nhà A, B, C, mỗi ngôi nhà đều kết nối với cả ba nhà cung cấp ga, nước, và điện: G, W, E.

1. Hãy viết danh sách kề cho đồ thị biểu diễn bài toán này và vẽ nó.
2. Liệu bạn có thể vẽ đồ thị này trên mặt phẳng để không có cạnh cắt nhau không?

Ví dụ

- GS Mc Brain và vợ là bà April tới một bữa tiệc ở đó có 4 đôi vợ chồng khác.
- Có một vài cặp bắt tay nhau nhưng không ai bắt tay với vợ hoặc chồng mình.
- GS hỏi mọi người khác xem họ bắt tay bao nhiêu người và ông ấy nhận được 9 con số khác nhau.
- Hỏi có bao nhiêu người đã bắt tay April?

Nội dung

Đồ thị và biểu diễn

Một số đồ thị đặc biệt

Đẳng cấu

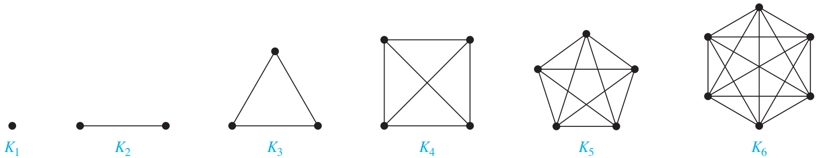
Bậc

Đường đi và chu trình

Đồ thị đầy đủ

Định nghĩa

Đồ thị đầy đủ gồm n đỉnh, ký hiệu là K_n là đồ thị có đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt.



Câu hỏi

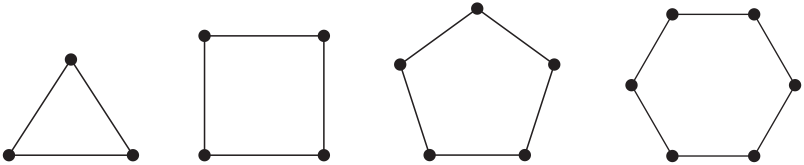
Đồ thị K_n có bao nhiêu cạnh?

Đồ thị vòng

Định nghĩa

Đồ thị vòng C_n, với $n \geq 3$ là một đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và các cạnh

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \cdots, \{v_{n-1}, v_n\}, \text{ và } \{v_n, v_1\}$$



C_3 C_4 C_5 C_6

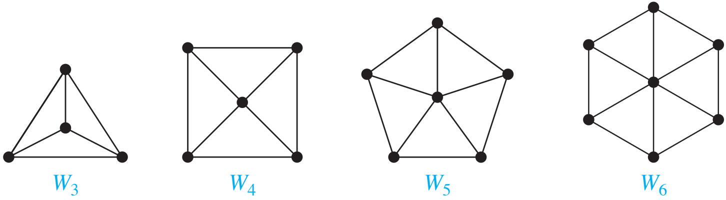
Câu hỏi

Đồ thị C_n có bao nhiêu cạnh?

Đồ thị bánh xe

Định nghĩa

Khi thêm một đỉnh vào vòng C_n với $n \geq 3$ và nối đỉnh này với mỗi đỉnh trong C_n bằng một cạnh mới ta sẽ nhận được đồ thị bánh xe W_n.



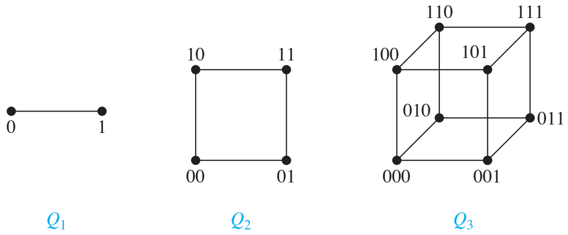
Câu hỏi

Đồ thị W_n có bao nhiêu cạnh?

Các khối n chiều

Định nghĩa

Các khối n chiều, ký hiệu Q_n, là các đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng xâu nhị phân độ dài n. Hai đỉnh liền kề nếu và chỉ nếu các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bit.



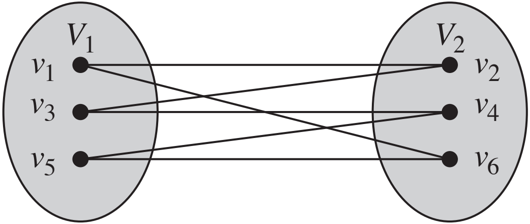
Câu hỏi

Đồ thị Q_n có bao nhiêu cạnh?

Đồ thị hai phần

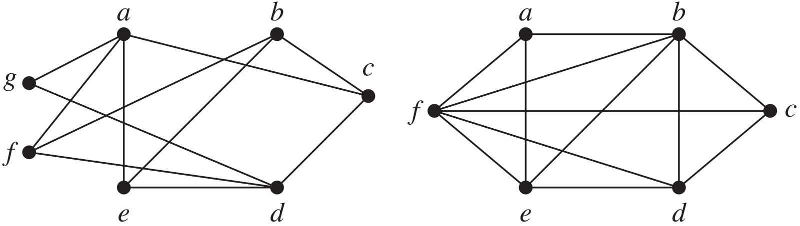
Định nghĩa

Một đồ thị được gọi là hai phần nếu tập đỉnh V có thể phân hoạch thành hai tập V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 tới một đỉnh của V_2.



Câu hỏi

Đồ thị nào dưới đây là đồ thị hai phần?



G H

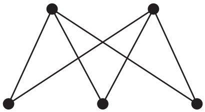
Câu hỏi

Đồ thị C_5 và C_6 có phải là những đồ thị hai phần?

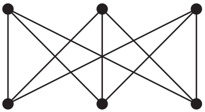
Đồ thị hai phần đầy đủ

Định nghĩa

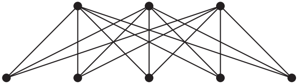
Đồ thị hai phần đầy đủ $K_{m,n}$ là đồ thị có tập đỉnh được phân hoạch thành hai tập con tương ứng có m đỉnh và n đỉnh và có một cạnh nối hai đỉnh nếu có một đỉnh thuộc tập này và một đỉnh thuộc tập kia.



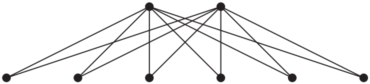
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

Câu hỏi

Đồ thị $K_{m,n}$ có bao nhiêu cạnh?

Bài tập

Hãy xây dựng một đồ thị với 5 đỉnh và 6 cạnh mà không chứa C_3 (tam giác) nào.

Nội dung

Đồ thị và biểu diễn

Một số đồ thị đặc biệt

Đẳng cấu

Bậc

Đường đi và chu trình

Định nghĩa

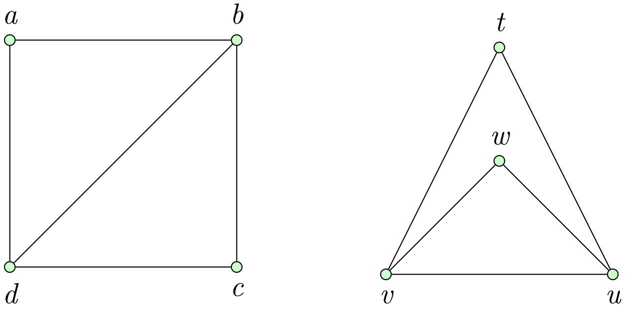
Hai đồ thị G_1 và G_2 được gọi là ***đẳng cấu*** nếu có một song ánh α từ tập đỉnh của G_1 đến tập đỉnh của G_2 sao cho $\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ là một cạnh của G_1 *nếu và chỉ nếu* $\{x, y\}$ là một cạnh của G_2.

Song ánh α được gọi là một ***đẳng cấu***.

Ví dụ

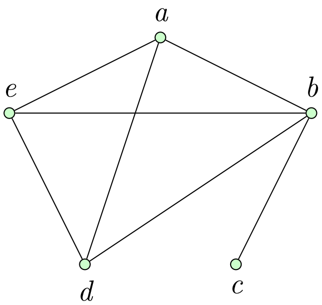
Hai đồ thị sau đây đẳng cấu với nhau và đẳng cấu α định nghĩa bởi:

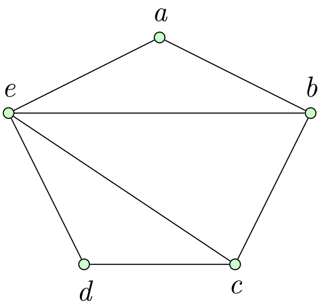
$$\alpha(a) = t, \quad \alpha(b) = v, \quad \alpha(c) = w, \quad \alpha(d) = u.$$



Ví dụ

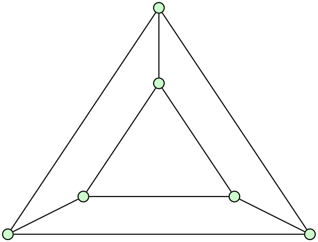
Hai đồ thị sau có đẳng cấu không?

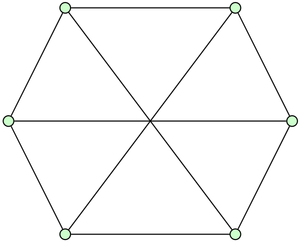




Bài tập

Hãy chứng minh rằng hai đồ thị sau không đẳng cấu.





Nội dung

Đồ thị và biểu diễn

Một số đồ thị đặc biệt

Đẳng cấu

Bậc

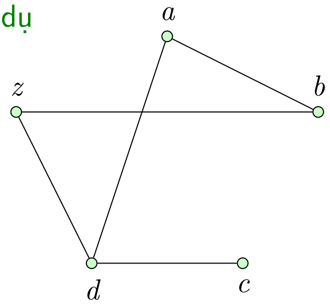
Đường đi và chu trình

Định nghĩa

Bậc của một đỉnh v trong đồ thị $G = (V, E)$ là số cạnh của G chứa v. Ta ký hiệu $\deg(v)$ là bậc của đỉnh v. Có nghĩa rằng

$$\deg(v) = |D_v| \qquad \text{với} \qquad D_v = \{ e \in E \mid v \in e \}.$$

Ví dụ



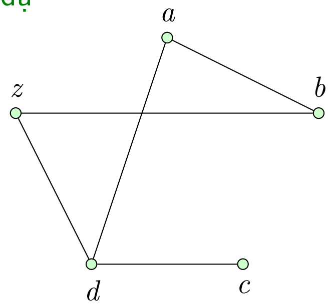
đỉnh	deg
a	2
b	2
c	1
d	3
z	2

Định lý

Tổng các bậc $\deg(v)$, lấy trên mọi đỉnh v của đồ thị $G = (V, E)$, bằng hai lần số cạnh:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Ví dụ



đỉnh	thuộc vào cạnh
a	$\{a, b\},\ \{a, d\}$
b	$\{a, b\},\ \{b, z\}$
c	$\{c, d\}$
d	$\{a, d\},\ \{c, d\},\ \{d, z\}$
z	$\{b, z\},\ \{d, z\}$

Một đỉnh của đồ thị G là ***lẻ*** nếu bậc của nó là lẻ, và là ***chẵn*** nếu bậc của nó là chẵn.

Hệ quả

Số đỉnh lẻ của đồ thị là số chẵn.

Chứng minh.

$$\sum_{v \in V_{\text{lẻ}}} \deg(v) \; + \; \sum_{v \in V_{\text{chẵn}}} \deg(v) = 2|E|$$

$\square$

Bậc và đẳng cấu

- Nếu $\alpha : V_1 \to V_2$ là một đẳng cấu giữa G_1 và G_2 và $\alpha(v) = w$, vậy
$$\deg(v) = \deg(w).$$
  Tại sao?
- Nếu trong G_1 có đỉnh x với $\deg(x) = \delta_0$ và trong G_2 không có đỉnh nào có bậc δ_0, vậy thì G_1 và G_2 không đẳng cấu.

Bài tập

Các dãy số sau đây có thể là các bậc của mọi đỉnh của đồ thị nào đó không? Nếu có hãy vẽ một đồ thị như vậy.

1. $2, 2, 2, 3$
2. $1, 2, 2, 3, 4$
3. $2, 2, 4, 4, 4$
4. $1, 2, 3, 4$.

Bài tập

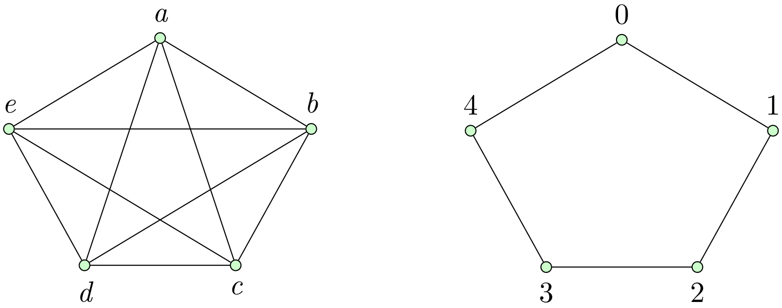
- Xét đồ thị $G = (V, E)$, ***phần bù*** $\overline{G}$ của G là đồ thị có cùng tập đỉnh là V và tập cạnh là tất cả các cặp đỉnh phân biệt không kề nhau trong G.
- Giả sử G có n đỉnh và các bậc của nó là

  $$d_1, d_2, \ldots, d_n.$$

  Các bậc của $\overline{G}$ là gì?

Đồ thị chính quy

- Đồ thị mà trong đó mọi đỉnh đều có cùng bậc r được gọi là ***chính quy***. Khi đó $r|V| = 2|E|$.
- Đồ thị K_n là đồ thị chính quy bậc $n-1$.
- Đồ thị vòng C_n là đồ thị chính quy bậc 2.
- Đồ thị Q_n là đồ thị chính quy bậc mấy ?



Hình: Đồ thị đầy đủ K_5 và đồ thị chu trình C_5

Bài tập

Liệt kê các đồ thị chính quy bậc 4 (đôi một không đẳng cấu) với bảy đỉnh.

Bài tập

Chứng minh rằng trong mọi đồ thị với ít nhất hai đỉnh luôn có hai đỉnh cùng bậc.

Nội dung

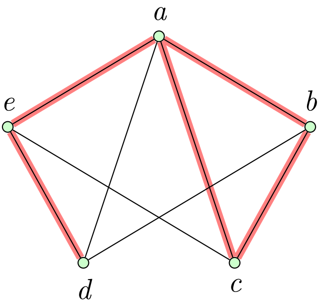
- Đồ thị và biểu diễn
- Một số đồ thị đặc biệt
- Đẳng cấu
- Bậc
- Đường đi và chu trình

Định nghĩa

Một ***hành trình*** trong đồ thị G là một dãy đỉnh

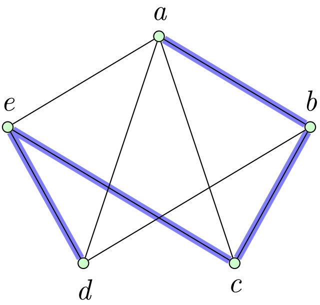
$$v_1, v_2, \ldots, v_k,$$

thỏa mãn v_i và v_{i+1} kề nhau (với $1 \leq i \leq k-1$).

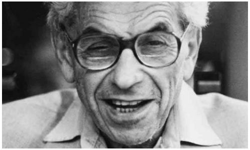


Định nghĩa

Hành trình mà trong đó mọi đỉnh đều khác nhau được gọi là ***đường đi***.



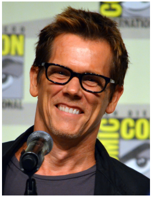
Đồ thị cộng tác



- Đỉnh: các tác giả
- Đỉnh a nối b nếu hai tác giả a và b viết chung bài báo.
- Số Erdös của nhà toán học m là đường đi ngắn nhất giữa m và Paul Erdös.

Erdős Number	*Number of People*
0	1
1	504
2	6,593
3	33,605
4	83,642
5	87,760
6	40,014
7	11,591
8	3,146
9	819
10	244
11	68
12	23
13	5

Đồ thị Hollywood



Bacon Number	Number of People
0	1
1	2,367
2	242,407
3	785,389
4	200,602
5	14,048
6	1,277
7	114
8	16

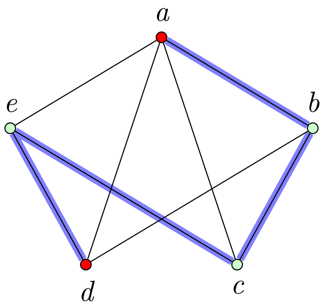
- Đỉnh: các diễn viên
- Diễn viên a nối với diễn viên b nếu a và b đóng chung một bộ phim
- Số Bacon của diễn viên c là đường đi ngắn nhất giữa c và Kevin Bacon.

Định nghĩa

Ta ký hiệu $x \sim y$ nếu hai đỉnh x và y trong G có thể nối với nhau bằng một đường đi. Có nghĩa rằng, tồn tại một đường đi

$$v_1, v_2, \cdots, v_k$$

trong G với $x = v_1$ và $y = v_k$.



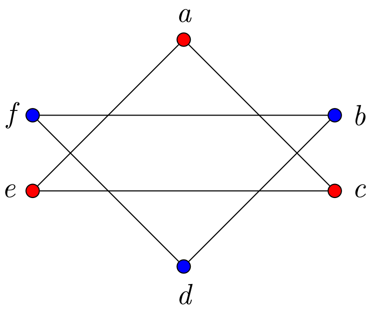
Dễ thấy, quan hệ $\sim$ là quan hệ tương đương trên tập đỉnh V của G. Vậy thì V được phân hoạch thành các lớp tương đương rời nhau.

Hai đỉnh nằm trong cùng một lớp nếu giữa chúng có đường đi, và trong hai lớp khác nhau nếu không có đường đi.

Ví dụ

Với đồ thị bên, ta có phân hoạch:

$$V = V_{\text{đỏ}} \cup V_{\text{xanh}}$$



Định nghĩa

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị và phân hoạch của V tương ứng với quan hệ tương đương $\sim$ là

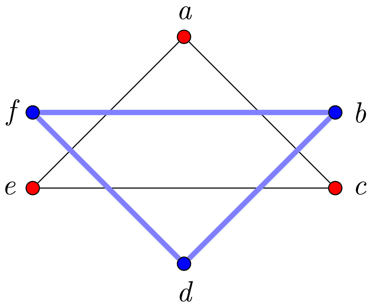
$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r.$$

Ký hiệu E_i (với $1 \leq i \leq r$) là các tập con của E bao gồm các cạnh với đầu mút nằm trong V_i. Vậy thì các đồ thị $G_i = (V_i, E_i)$ được gọi là các ***thành phần liên thông*** của G.

Ta nói G ***liên thông*** nếu nó chỉ có một thành phần liên thông.

Ví dụ

Đồ thị dưới đây không liên thông. Nó có hai thành phần liên thông.



Bài tập

Tìm số thành phần liên thông của đồ thị với danh sách kề là

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
f	c	b	h	c	a	b	d	a	a
i	g	e		g	i	c		f	f
j		g			j	e			

Bài tập

Đồ thị mô tả bữa tiệc của bà April có bao nhiêu thành phần liên thông?

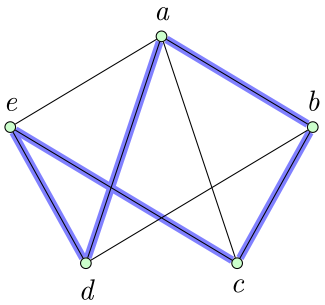
Định nghĩa

Một hành trình

$$v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{r+1}$$

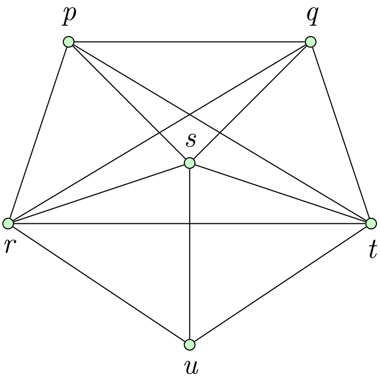
trong đó mọi đỉnh đều phân biệt ngoại trừ $v_1 = v_{r+1}$ được gọi là một ***chu trình***.

Vì nó có r đỉnh phân biệt và r cạnh nên ta cũng thường gọi nó là r-***chu trình***, hay chu trình ***độ dài*** r.



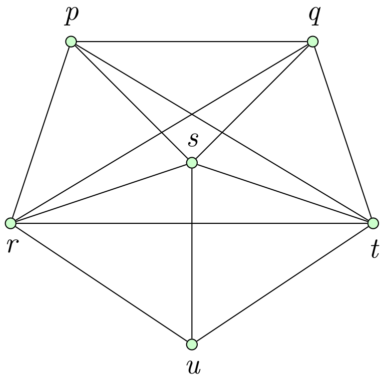
Bài tập

- Hình dưới đây thể hiện các địa điểm thú vị trên đảo Wanda và đường đi giữa chúng.
- Hãy tìm đường đi trên đảo để thăm mỗi địa điểm đúng một lần và trở về vị trí xuất phát.



Bài tập

Hãy tìm cách để đi hết các con đường, mỗi đường đúng một lần. Địa điểm bắt đầu và kết thúc có thể khác nhau.

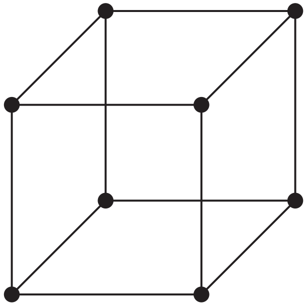


Định nghĩa

- Chu trình chứa mọi đỉnh của đồ thị gọi là ***chu trình Hamilton***.
- Hành trình dùng mỗi cạnh đúng một lần gọi là ***hành trình Euler***.

Bài tập

Tìm chu trình Hamilton của đồ thị tạo bởi các đỉnh và cạnh của khối lập phương.



Bài tập

Năm tới, Dr Chunner và Dr Dodder định đi thăm đảo Mianda. Các địa điểm hấp dẫn và đường đi nối giữa chúng được biểu diễn bởi đồ thị có danh sách kề là

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7

- Liệu họ có thể tìm đường đi trên đảo để thăm mỗi địa điểm đúng một lần và trở về vị trí xuất phát?
- Liệu họ có thể tìm cách để đi hết các con đường, mỗi đường đúng một lần; địa điểm bắt đầu và kết thúc có thể khác nhau?