Chương 3:

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

3.0 MỞ ĐẦU

3.1 BIẾN ĐỔI FOURIER

3.2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

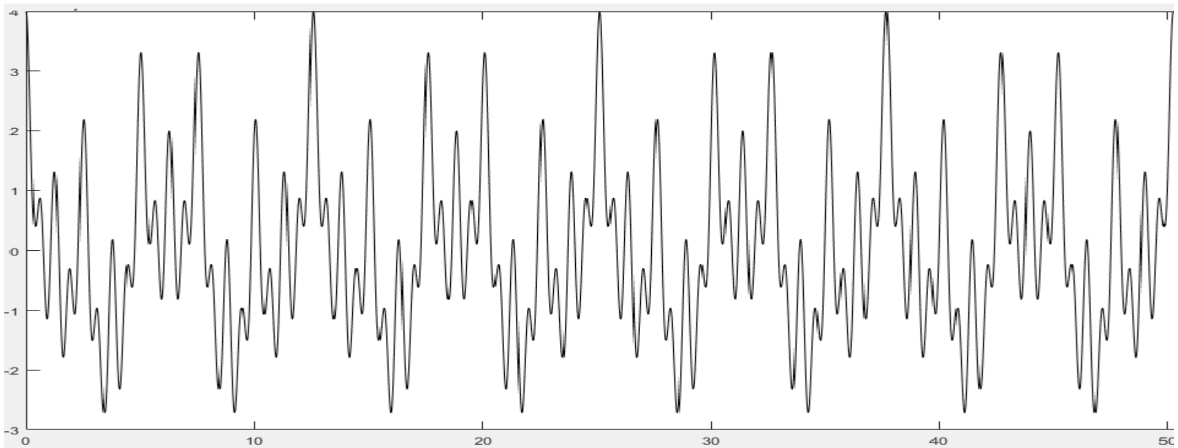
3.3 QUAN HỆ GIỮA ZT & FT

3.4 BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ

3.5 LẤY MẪU & KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

3.0 MỞ ĐẦU

a)



$\Omega_1 = 200\pi$

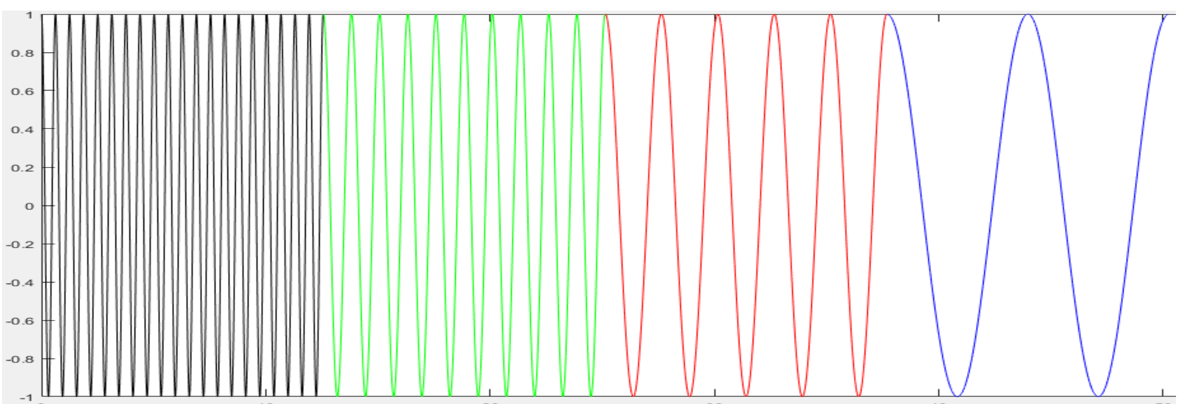
$\Omega_2 = 100\pi$

$\Omega_3 = 50\pi$

$\Omega_4 = 20\pi$

$$x(t)=\cos(\Omega_1 t)+\cos(\Omega_2 t)+\cos(\Omega_3 \mathrm{t})+\cos(\Omega_4 t)$$

b)



$x_1(t)$ $x_2(t)$ $x_3(t)$ $x_4(t)$

$x_1(t)=\cos(\Omega_1 t)$

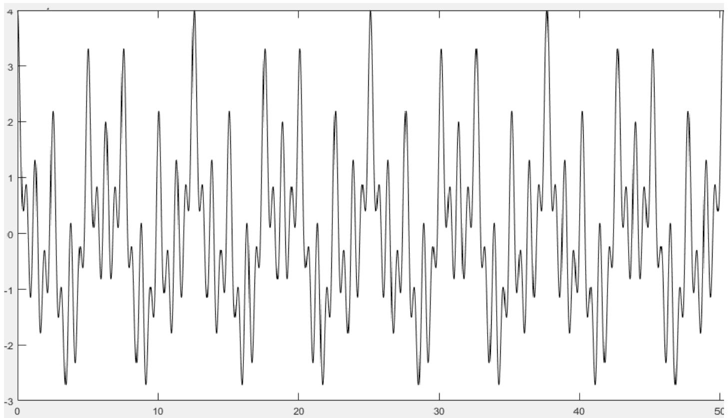
$x_2(t)=\cos(\Omega_2 t)$

$x_3(t)=\cos(\Omega_3 t)$

$x_4(t)=\cos(\Omega_4 t)$

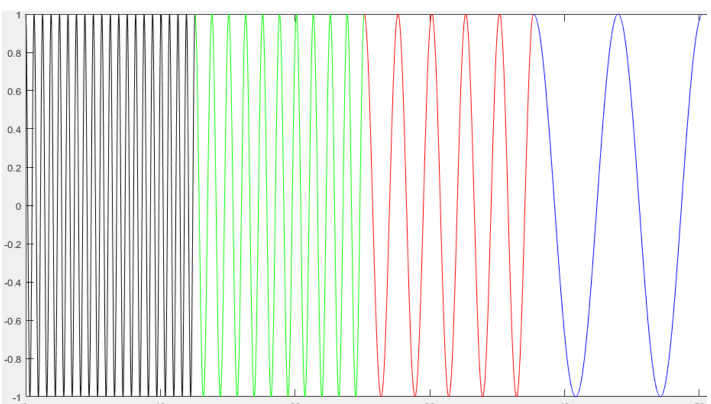
Phổ biên độ của 2 tín hiệu

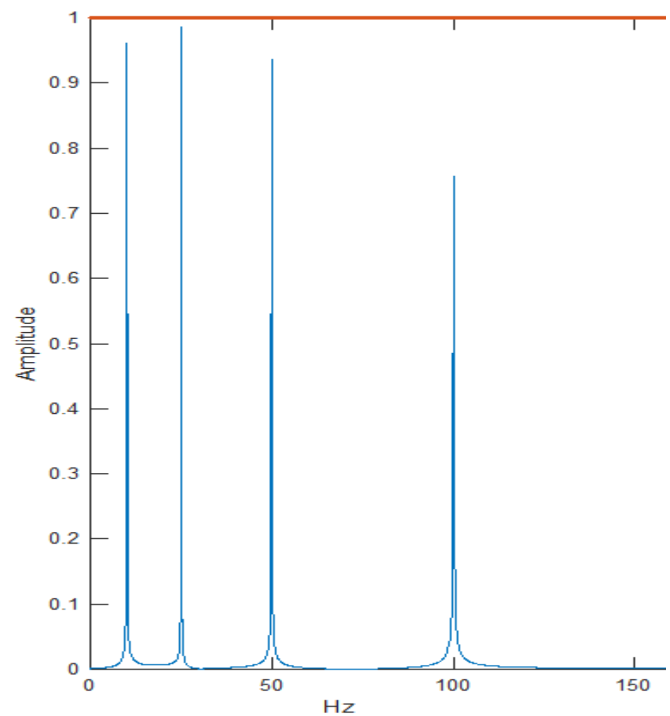
a)



- Hai tín hiệu khác nhau, nhưng phổ giống nhau?

b)





❖ **Ưu điểm của biến đổi Fourier:**

- Biểu diễn tín hiệu trong miền tần số: phổ biên độ & pha
- Cho biết thông tin về tần số có trong tín hiệu;
- Thích hợp phân tích các tín hiệu tĩnh (có tần số không thay đổi theo thời gian).

❖ **Nhược điểm của biến đổi Fourier:**

- Không cho biết các tần số có trong tín hiệu xuất hiện ở thời điểm nào, không có thông tin về ***thời gian*** – ***tần số***;
- Không thích hợp phân tích các tín hiệu có tần số thay đổi theo thời gian.

3.1 BIẾN ĐỔI FOURIER TÍN HIỆU RỜI RẠC

3.1.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI FOURIER:

- Biến đổi Fouririer của dãy x(n):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Trong đó: ω - tần số của tín hiệu rời rạc

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg X(e^{j\omega})} \quad \begin{cases} |X(e^{j\omega})| \text{ - phổ biên độ} \\ \arg X(e^{j\omega}) \text{ - phổ pha} \end{cases}$$

- *Ký hiệu:*

$x(n) \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$ hay $X(e^{j\omega}) = FT\{x(n)\}$

$X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{FT^{-1}} x(n)$ hay $x(n) = FT^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$

- Nhận thấy X(e$^{j\omega}$) tuần hoàn với chu kỳ 2π, thật vậy:

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega l} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} e^{j\omega l} d\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(l-n)} d\omega$$

Áp dụng kết quả:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi : l = n \\ 0 : l \neq n \end{cases}$$

$\Rightarrow$

Biến đổi Fourier ngược:

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega}$$

<u>Ví dụ 3.1.1</u>: Tìm biến đổi Fourier các dãy:

$x_1(n) = a^n u(n) : |a| < 1 \qquad x_2(n) = -a^n u(-n-1) : |a| > 1$

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n \boxed{= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \left(a^{-1} e^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1} e^{j\omega}\right)^m = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} e^{j\omega}\right)^m + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} \boxed{= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}}$$

3.1.2 ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI BIẾN ĐỔI FOURIER

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|\left|e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$

Vậy, để X(ω) hội tụ thì điều kiện cần là: $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty}$

Các tín hiệu thỏa điều kiện hội tụ là tín hiệu năng lượng, thậy vậy**:**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \le \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|\right]^2$$

Nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad \Rightarrow \quad E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$

Ví dụ 3.1.2: Xét sự tồn tại biến đổi F của các dãy:

$$x_1(n) = 0.5^n u(n);\ x_2(n) = 2^n u(n);\ x_3(n) = u(n);\ x_4(n) = rect_N(n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(0.5)^n u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |2^n u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \infty$$ $\Rightarrow$ $X_2(e^{j\omega})$ không tồn tại

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| = \infty$$ $\Rightarrow$ $X_3(e^{j\omega})$ không tồn tại

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_4(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |rect_N(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} |rect_N(n)| = N$$

3.2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

3.2.1 Tuyến tính

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{FT} X_1(e^{j\omega})$ $\quad x_2(n) \xleftrightarrow{FT} X_2(e^{j\omega})$

Thì: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{FT} a_1 X_1(e^{j\omega}) + a_2 X_2(e^{j\omega})$

3.2.2 Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$

Thì: $x(n - n_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

Ví dụ 3.2.1: Tìm biến đổi F của dãy $\delta(n)$ và $\delta(n\text{-}2)$

$$x(n) = \delta(n) \xleftarrow{FT} \xrightarrow{} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = 1$$

Áp dụng tính chất dịch theo thời gian:

$$\delta(n-2) = x(n-2) \xleftarrow{FT} \xrightarrow{} e^{-j2\omega} X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}$$

3.2.3 Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftarrow{FT} \xrightarrow{} X(e^{j\omega})$

Thì: $x^*(n) \xleftarrow{FT} \xrightarrow{} X^*(e^{-j\omega})$

3.2.4 Đảo biến số

Nếu: $$x(n) \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

Thì: $$x(-n) \xleftrightarrow{FT} X(e^{-j\omega})$$

Ví dụ 3.2.2: Tìm biến đổi F của dãy $y(n)=2^n u(-n)$

Theo ví dụ 3.1.1, có kết quả:

$$\boldsymbol{x(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u(n)} \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-(1/2)e^{-j\omega}}$$

$$\boldsymbol{y(n)} = \boldsymbol{x(-n)} = 2^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u(-n)} \xleftrightarrow{FT} X(e^{-j\omega}) = \boxed{\frac{1}{1-(1/2)e^{j\omega}}}$$

3.2.5 Vi phân trong miền tần số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{FT} j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

Ví dụ 3.2.3: Tìm biến đổi F của *g(n)=naⁿu(n); /a/<1*

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}; |a| < 1$$

$$g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{FT} G(e^{j\omega}) = j\frac{dX(e^{j\omega}\omega)}{d\omega} = \boxed{\frac{ae^{-j\omega}}{\left(1 - ae^{-j\omega}\right)^2}}$$

3.2.6 Dịch theo tần số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$

Thì: $e^{j\omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{FT} X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$

Ví dụ 3.2.4: Tìm biến đổi F của *y(n)=a^n cos(ω₀n)u(n); /a/<1*

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\boldsymbol{y(n) = a^n u(n)\cos(\omega_0 n) = a^n u(n)\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]}$$

$$\boldsymbol{y(n) = \frac{1}{2} x(n)\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]}$$

$$\xleftrightarrow{FT} \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{X[e^{j(\omega-\omega_0)}] + X[e^{j(\omega+\omega_0)}]\right\}$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-ae^{-j(\omega-\omega_0)})} + \frac{1}{(1-ae^{-j(\omega+\omega_0)})}\right]}$$

3.2.7 Tích 2 dãy

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{FT} X_1(e^{j\omega}) \qquad x_2(n) \xleftrightarrow{FT} X_2(e^{j\omega})$

Thì: $x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{FT} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega'})X_2[e^{j(\omega-\omega')}]d\omega'$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega'})X_1[e^{j(\omega-\omega')}]d\omega'$$

3.2.8 Tổng chập 2 dãy

Nếu: $x_1(n) \xleftarrow{FT} \longrightarrow X_1(e^{j\omega})$ $\quad x_2(n) \xleftarrow{FT} \longrightarrow X_2(e^{j\omega})$

Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xleftarrow{FT} \longrightarrow X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega})$

<u>Ví dụ 3.2.5</u>: Tìm y(n)=x(n)*h(n) biết *x(n)=h(n)=δ(n+2)+δ(n-2)*

Theo ví dụ 3.2.1, có kết quả:

$$X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) = e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) = (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})^2 = e^{j4\omega} + 2 + e^{-j4\omega}$$

$$\Rightarrow y(n) = x(n) * h(n) = F^{-1}[Y(\omega)]$$

$$\boxed{y(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n) + \delta(n-4)}$$

3.2.9 Quan hệ Parseval

Nếu: $x_1(n) \xleftarrow{FT} \longrightarrow X_1(e^{j\omega})$ $\quad x_2(n) \xleftarrow{FT} \longrightarrow X_2(e^{j\omega})$

Thì: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega})d\omega \quad (*)$$

Biểu thức (*) còn gọi là quan hệ Parseval

Nhận xét:

Nếu: $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$

Theo quan hệ Parseval, ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Với: $S_{xx}(\omega) = |X(e^{j\omega})|^2$ - *gọi là phổ mật độ năng lượng*

3.2.10 Tương quan các tín hiệu

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{FT} X_1(e^{j\omega})$ $\quad x_2(n) \xleftrightarrow{FT} X_2(e^{j\omega})$

Thì: $FT\left[r_{x_1x_2}\right] = R_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{-j\omega})$

Nhận xét:

Nếu: $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$

$\Rightarrow$ $R_{xx}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})X(e^{-j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2 = S_{xx}(e^{j\omega})$

- Vậy biến đổi Fourier của hàm tự tương quan sẽ bằng phổ mật độ năng lượng, quan hệ này còn được gọi là định lý Weiner-Khintchine

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

x(n)	X(ω)
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(e^{j\omega})+a_2X_2(e^{j\omega})$
$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n0}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$Xe^{j(\omega-\omega 0)}$
$nx(n)$	$jdX(e^{j\omega})/d\omega$
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega'})X_2\left(e^{j(\omega-\omega')}\right)d\omega'$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega})d\omega$

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

x(n)	X(ω)
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\| x(n) \right\|^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| X(e^{j\omega}) \right\|^2 d\omega$
$r_{x_1x_2}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(m-n)$	$X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{-j\omega})$
$r_{x_1x_2}(n)$	$R_{xx}(e^{j\omega}) = \left\| X(e^{j\omega}) \right\|^2 = S_{xx}(e^{j\omega})$

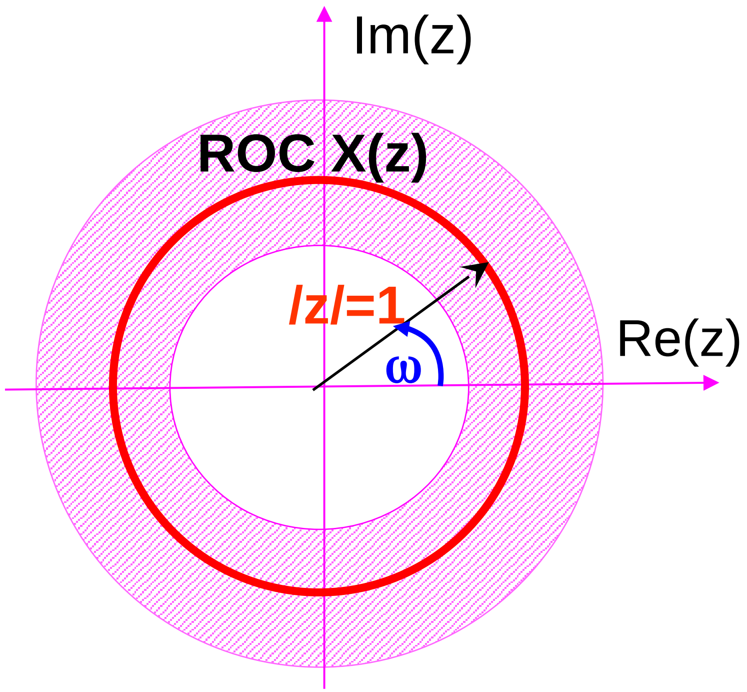
3.3 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & Z

$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}}$$

Hay biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được lấy trên vòng tròn đơn vị theo biến số ω



- Nếu ROC[X(z)] có chứa /z/=1 $\Rightarrow X(e^{j\omega}) = X(z)$ với $z = e^{j\omega}$
- Nếu ROC[X(z)] không chứa /z/=1 $\Rightarrow X(e^{j\omega})$ không hội tụ

<u>Ví dụ 3.3.1</u>: Tìm biến đổi ZT & FT của các dãy:

$x_1(n)=(0.5)^n u(n)$ $x_2(n)=2^n u(n)$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}; |z| > 0.5$$

Do ROC[X_1(z)] có chứa /z/=1, nên:

$$X_1(e^{j\omega}) = X_1(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}; |z| > 2$$

Do ROC[X_2(z)] không chứa /z/=1, nên $X_2(e^{j\omega})$ không tồn tại

3.4 BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TTBB RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

3.4.1 Định nghĩa đáp ứng tần số

Miền n: $x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)=x(n)*h(n)$

$\Big\updownarrow FT$

Miền ω: $X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

$h(n) \xleftrightarrow{FT} H(e^{j\omega})=Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$: gọi là đáp ứng tần số

Nếu $H(e^{j\omega})$ biểu diễn dạng môdun và pha:

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)} \begin{cases} \left|H(e^{j\omega})\right| & \text{- Đáp ứng biên độ} \\ \varphi(\omega) & \text{- Đáp ứng pha} \end{cases}$$

Ví dụ 3.4.1: Cho *h(n)=b.a^n.u(n),* với /a/<1

Tìm H(e^{jω}), /H(e^{jω})/ và arg{H(e^{jω})}

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{b}{1 - a(\cos\omega - j\sin\omega)} = \frac{b}{(1 - a\cos\omega) + ja.\sin\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b}{\sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + (a.\sin\omega)^2}.e^{j\mathrm{arc}tg\frac{a\sin\omega}{(1 - a\cos\omega)}}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left|H(e^{j\omega})\right| = \dfrac{|b|}{\sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + (a.\sin\omega)^2}} \\ arg\{H(e^{j\omega})\} = \begin{cases} -\mathrm{arc}tg\dfrac{a\sin\omega}{(1 - a\cos\omega)} : & b \geq 0 \\ \pi - \mathrm{arc}tg\dfrac{a\sin\omega}{(1 - a\cos\omega)} : & b < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ví dụ 3.4.2: Tìm $H(e^{j\omega})$, vẽ đáp ứng biên độ & pha, biết:

$h(n)=rect_4(n)$

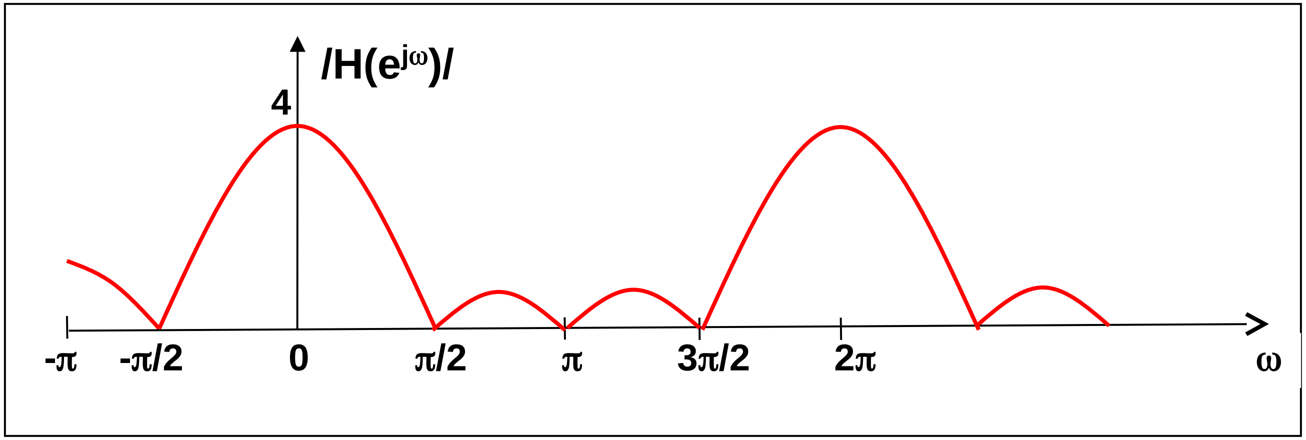
Biến đổi Fourier của h(n):

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect_4(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

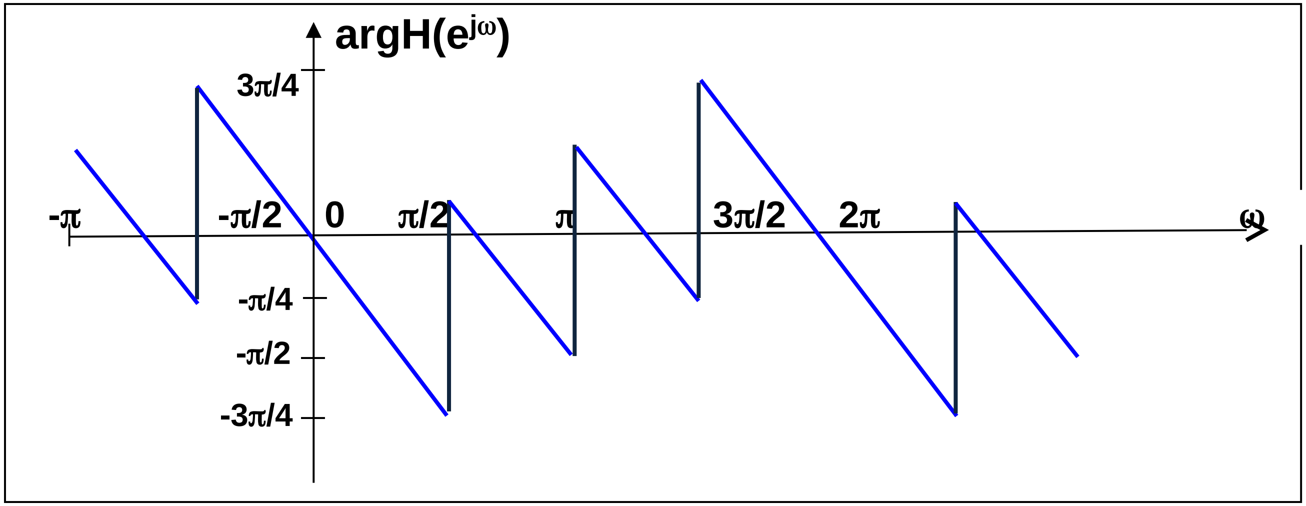
$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})} = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-j3\omega/2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\dfrac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right| \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} -3\omega/2 : A(\omega) > 0 \\ -3\omega/2 + \pi : A(\omega) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

với $A(\omega) = \dfrac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$



/H(e^jω)/
4
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
ω



argH(e^jω)
3π/4
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
ω
-π/4
-π/2
-3π/4

3.4.2 Đáp ứng tần số của các hệ thống ghép nối

a. Ghép nối tiếp:

- Miền n:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$\equiv$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)=h_1(n)*h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

Theo tính chất tổng chập: $h_1(n)*h_2(n) \xleftrightarrow{FT} H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$

- Miền ω :

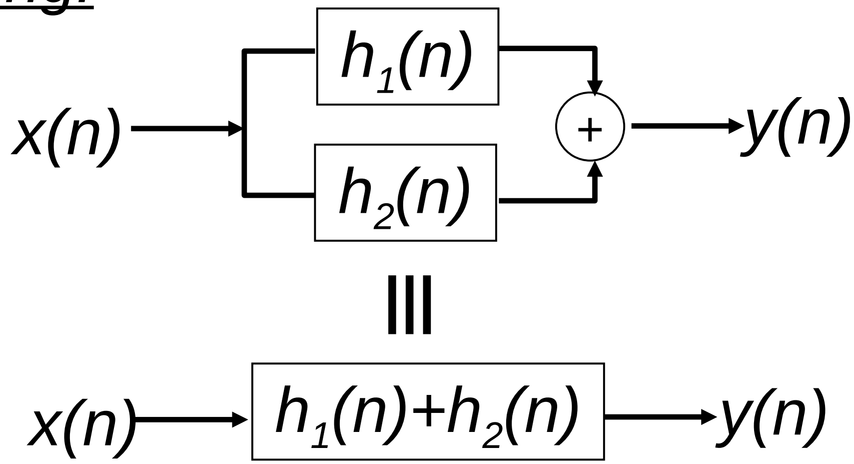
$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H_1(e^{j\omega})} \longrightarrow \boxed{H_2(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$\equiv$$

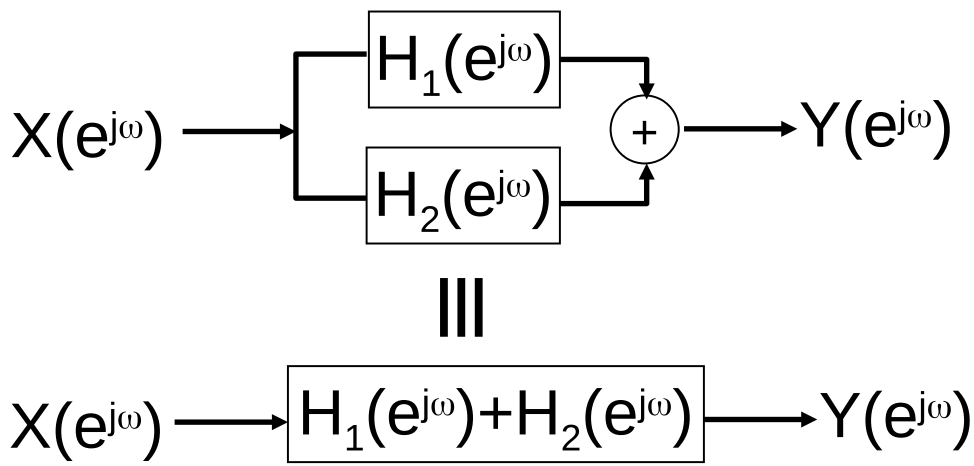
$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

b. Ghép song song:

- Miền n:



- Miền ω:



3.4.3 Đáp ứng ra hệ thống với tín hiệu vào hàm mũ phức

Xét tín hiệu vào có dạng mũ phức: $x(n)=Ae^{j\omega n}$

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)Ae^{j\omega(n-m)}=Ae^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega m}=x(n)H(e^{j\omega})$$

Ví dụ 3.4.3: Tìm y(n) biết $x(n)=2e^{jn\pi/3}$ và $h(n)=0.5^n u(n)$

$$y(n)=x(n)H(e^{j\omega})=2e^{j\frac{\pi}{3}n}\left(\frac{1}{1-0,5e^{-j\omega}}\right)\Bigg|_{\omega=\frac{\pi}{3}}=\frac{2.e^{j\frac{\pi}{3}n}}{1-0,5.e^{-j\frac{\pi}{3}}}$$

3.4.4 Đáp ứng ra hệ thống với tín hiệu vào hàm cos,sin

Xét tín hiệu vào có dạng hàm cos:

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n) = \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$

Biểu diễn đáp ứng tần số dưới dạng môđun & pha:

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\phi(\omega)}$$

$$y(n) = x(n)H(e^{j\omega_0}) = \frac{A}{2}\left[H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$y(n) = \frac{A}{2}\left[H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} + H^*(e^{j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}\right] = A.\mathrm{Re}\left\{H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}\right\}$$

$$\boxed{y(n) = A.\mathrm{Re}\left\{H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}\right\} = A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\left[\omega_0 n + \phi(\omega_0)\right]}$$

Tương tự với tín hiệu vào có dạng hàm sin:

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n) = \frac{A}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right)$$

Ta cũng được kết quả:

$$\boxed{y(n) = A.\operatorname{Im}\left\{H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}\right\} = A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\sin\left[\omega_0 n + \phi(\omega_0)\right]}$$

Tổng quát:

$$x(n) = A_0 + A_1\cos\left(\omega_1 n + \varphi_1\right) + A_2\sin\left(\omega_2 n + \varphi_2\right)$$

$$\Rightarrow \; y(n) = A_0 H\left(e^{j0}\right) + A_1\left|H\left(e^{j\omega_1}\right)\right|\cos\left[\omega_1 n + \varphi_1 + \phi\left(\omega_1\right)\right] +$$
$$+ A_2\left|H\left(e^{j\omega_2}\right)\right|\sin\left[\omega_2 n + \varphi_2 + \phi\left(\omega_2\right)\right]$$

Ví dụ 3.4.4: Tìm y(n) biết: *h(n)=(0.5)ⁿu(n)*

x(n)=10 + 20sin(nπ/2) - 30cos(πn + π/4)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

Tín hiệu vào chứa 3 thành phần tần số: $\omega = 0$, $\pi/2$ và π

- $\omega = 0$: $$H(e^{j0}) = \frac{1}{1-0.5} = 2$$
- $\omega = \pi/2$: $$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{1-0,5.e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{1+j0,5} = 0.894e^{-j26,6^0}$$
- $\omega = \pi$: $$H(e^{j\pi}) = \frac{1}{1-0,5.e^{-j\pi}} = \frac{1}{1+0,5} = \frac{2}{3}e^{j0}$$

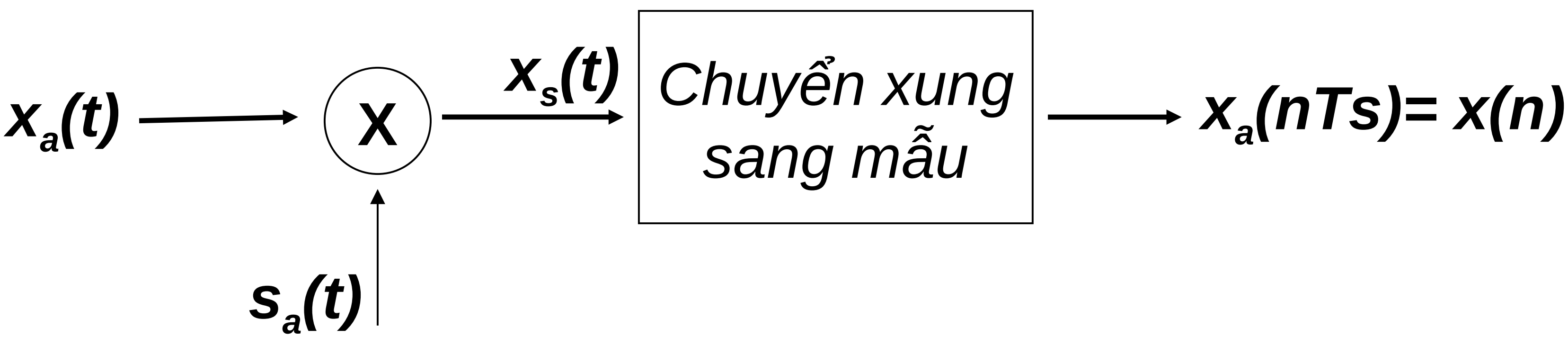
$$\Rightarrow\ y(n) = 20 + 17.88\sin\left(n\frac{\pi}{2} - 26,6^0\right) - 20\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

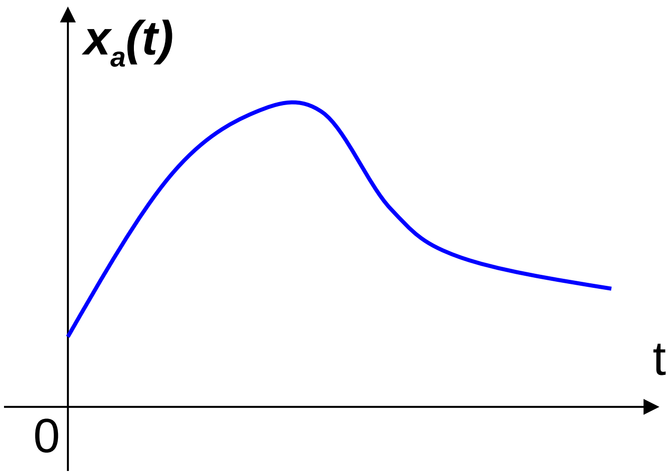
3.5 LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HiỆU

3.5.1 Khái niệm lấy mẫu tín hiệu

- Quá trình biến đổi tín hiệu tương tự -> tín hiệu số

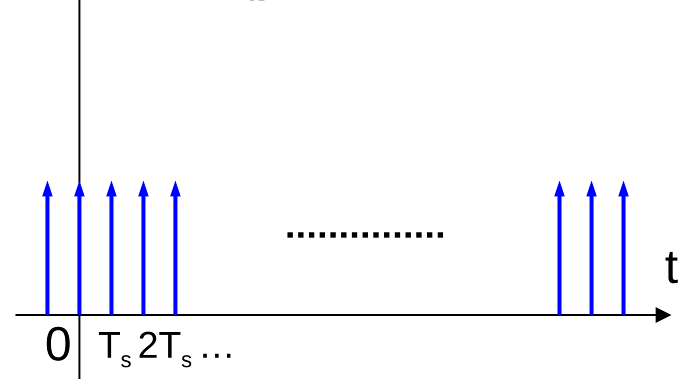
- Quá trình lấy mẫu tín hiệu





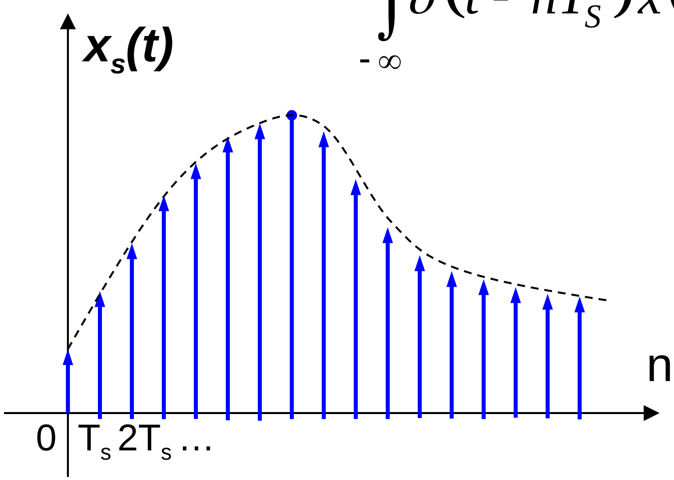
Tín hiệu tương tự

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

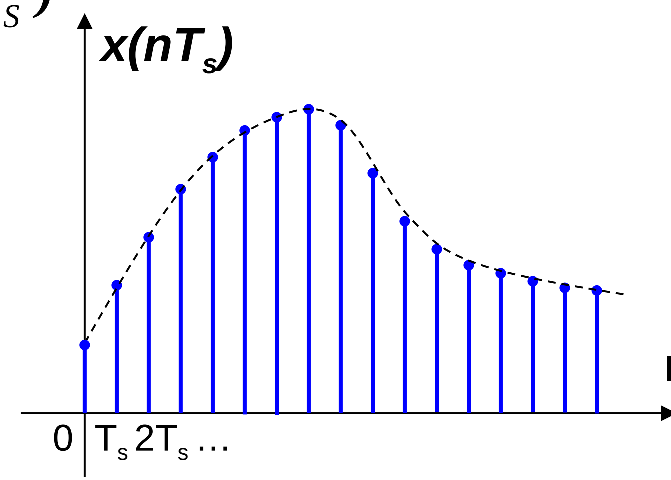


Chuỗi xung lấy mẫu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)\, x(t)\, dt = x(nT_S)$$



Tín hiệu được lấy mẫu



Tín hiệu rời rạc

3.5.2 Quan hệ giữa tần số tín hiệu rời rạc và tương tự

$$x_a(t) = A\cos\Omega t \xrightarrow[t = nT_s]{\text{Lấy mẫu}} x_a(nT_s) = A\cos(n\Omega T_s)$$

$$x(n) = x_a(nT_s) = A\cos(n\Omega T_s) = A\cos(\omega n) \quad \Rightarrow \boxed{\omega = \Omega T_s}$$

$$\boxed{f = \frac{F}{F_s}}$$

Trong đó: $\omega = 2\pi f$ - tần số của tín hiệu rời rạc

$\Omega = 2\pi F$ - tần số của tín hiệu tương tự

$T_s = \dfrac{1}{F_s}$ - chu kỳ lấy mẫu

3.5.3 Quan hệ giữa phổ tín hiệu rời rạc & tương tự

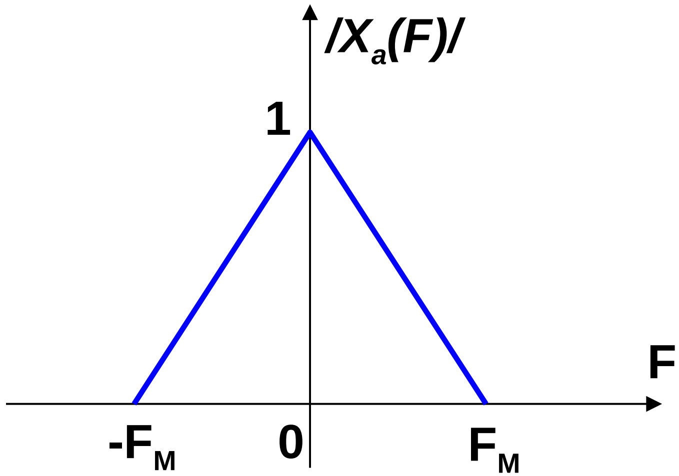
$$\boxed{X(f) = X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_a(F - mF_s)}$$

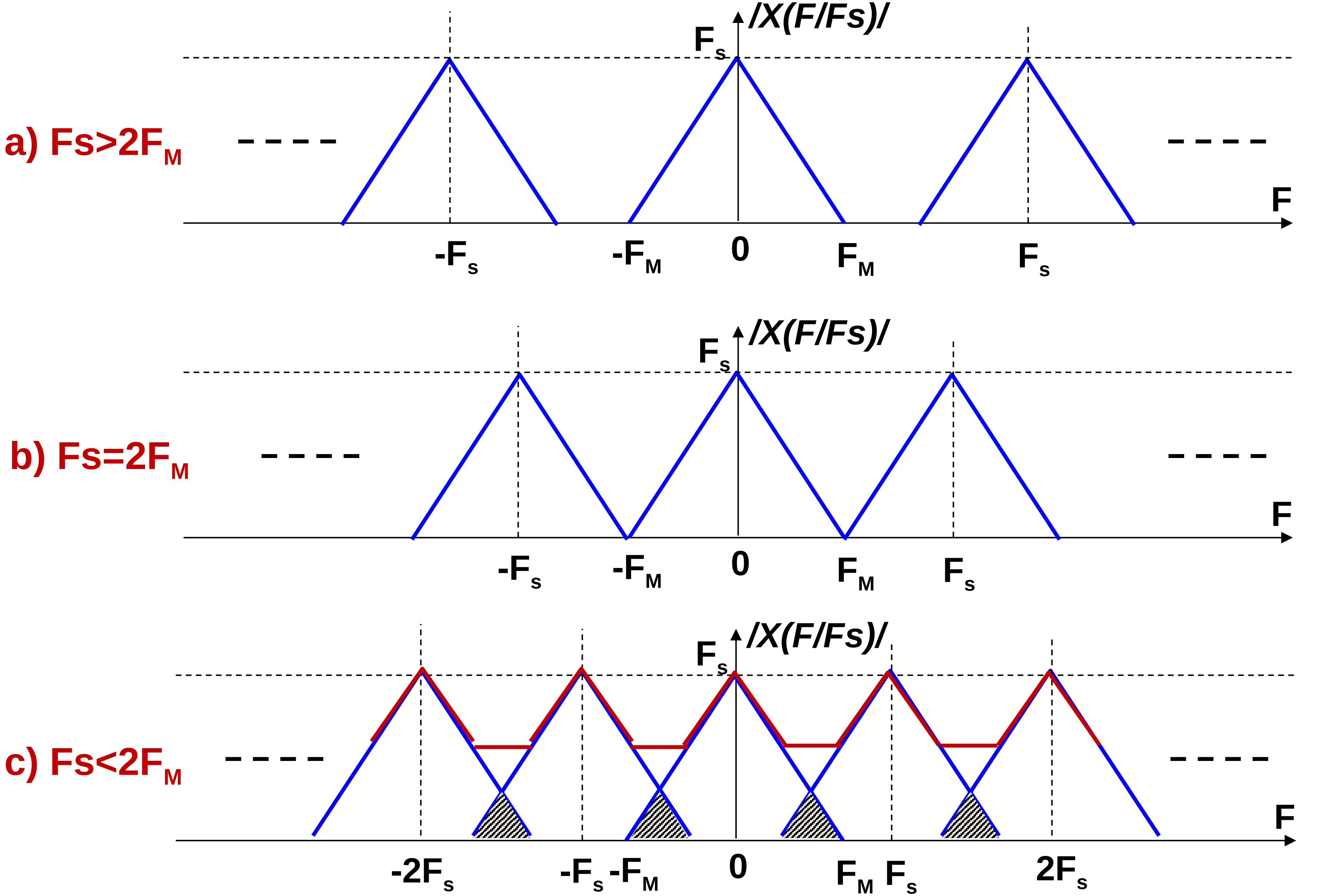
Trong đó: ***X(f)*** – *phổ của tín hiệu rời rạc*

X_a(F) – *phổ của tín hiệu tương tự*

<u>Ví dụ 3.5.1</u>: Hãy vẽ phổ biên độ tín hiệu rời rạc, biết phổ biên độ tín hiệu tương tự cho như hình vẽ, với các tốc độ lấy mẫu:

a)$F_s>2F_M$ b) $F_s=2F_M$ c) $F_s<2F_M$




a) Fs>2FM
/X(F/Fs)/
Fs
F
-Fs
-FM
0
FM
Fs
b) Fs=2FM
/X(F/Fs)/
Fs
F
-Fs
-FM
0
FM
Fs
c) Fs<2FM
/X(F/Fs)/
Fs
F
-2Fs
-Fs
-FM
0
FM
Fs
2Fs

3.5.4 Định lý lấy mẫu

"Tín hiệu tương tự $x_a(t)$ có dải phổ hữu hạn $(-F_M, F_M)$ chỉ có thể khôi phục 1 cách chính xác từ các mẫu $x_a(nT_s)$ nếu tốc độ lấy mẫu thỏa $F_s \geq 2F_M$"

- $\boldsymbol{F_s = 2F_M = F_N}$: Tốc độ (tần số) Nyquist

Ví dụ 3.5.2: Xác định tốc độ Nyquist của tín hiệu tương tự

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$$

Tín hiệu có các tần số: $\mathbf{F_1}$=1 kHz, $\mathbf{F_2}$=3 kHz, $\mathbf{F_3}$=6 kHz

$\mathbf{F_M} = \max\{\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_3}\} = 6$ kHz $\Rightarrow$ $\mathbf{F_N} = 2F_M = 12$ kHz

3.5.5 Khôi phục lại tín hiệu tương tự

- Để khôi phục lại tín hiệu tương tự $\boldsymbol{x_a(t)}$ thì phổ của tín hiệu được khôi phục phải giống với phổ ban đầu của $\boldsymbol{x_a(t)}$.

- Vì phổ của tín hiệu lấy mẫu là sự lặp lại vô hạn của phổ tín hiệu tương tự, nên cần phải giới hạn lại bằng cách người ta cho các mẫu $\boldsymbol{x_a(nT_s)}$ đi qua mạch lọc thông thấp lý tưởng trong điều kiện thỏa định lý lấy mẫu có đáp ứng tần số:

$$H_{lp}(f) = \begin{cases} 1/F_s : & -\dfrac{f_s}{2} \le f \le \dfrac{f_s}{2} \\ 0 : & \text{ở các tần số khác} \end{cases}$$

$$h_{lp}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{lp}(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} H_{lp}(f)e^{j2\pi ft}df = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t}$$

$x_a(nTs)$ → *Low pass Filter $h_{lp}(t)$* → ***$x_a(t)=x_a(nT_s)*h_{lp}(t)$***

$$\boxed{x_a(t) = x_a(nT_s)\star h_{lp}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\frac{\sin[\pi F_s(t - nT_s)]}{\pi F_s(t - nT_s)}}$$

Công thức nội suy, cho phép khôi phục ***$x_a(t)$ từ $x_a(nT_s)$***