Chương 1: GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

Đậu Thế Phiệt

Ngày 18 tháng 10 năm 2014

Nội dung

1. HÀM NHIỀU BIẾN

2. CÁC MẶT BẬC HAI

HÀM NHIỀU BIẾN

Định nghĩa

Định nghĩa (Hàm nhiều biến)

Cho tập con $M \in \mathbb{R}^n$. Một quy tắc f cho tương ứng mỗi phần tử (điểm, vector) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ với một số thực $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là một hàm n biến số từ tập hợp M vào $\mathbb{R}$. Ta ký hiệu

$$\begin{array}{lccc} f: & M & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, x_n) \end{array}$$

hay $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Định nghĩa

Tập hợp tất cả các điểm trong $\mathbb{R}^n$ để hàm số f xác định được gọi là tập xác định của f, ký hiệu là D_f.

Để đơn giản ký hiệu, ta phát biểu một số định nghĩa và định lý trên không gian R^2, việc mở rộng với không gian có số chiều lớn hơn là tương tự

Định nghĩa (Giới hạn kép)

Số $a \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x,y)$ khi (x,y) tiến tới (x_0,y_0) nếu với mọi dãy số $\{(x_n,y_n)\} \subset M \setminus \{(x_0,y_0)\}$ sao cho $x_n \to x_0$ và $y_n \to y_0$ khi $n \to \infty$, ta đều có $f(x_n,y_n) \to a$. Ký hiệu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = a$.

Tương tự giới hạn của hàm một biến số, ta cũng có các tính chất sau. Cho hai hàm f,g thoả $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = a$ và $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = b$ ta có

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f \pm g)(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \pm \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = a \pm b.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f.g)(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y). \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = a.b.$

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{f}{g}(x,y) = \dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)} = \dfrac{a}{b}$ với $b \neq 0$

Định lý (Nguyên lý kẹp)

Cho các hàm số f, g, h trong một lân cận điểm (x_0, y_0) thoả

$$g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y) \qquad \text{với mọi } (x,y) \text{ thuộc lân cận của } (x_0,y_0)$$

và $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,y) = a$ *thì ta có*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = a$$

Ví dụ

Ví dụ

Tính giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\cos x + y}{x^2 + 2y^2}$.

Với mỗi dãy $\{(x_n, y_n)\} \to (0,1)$ bất kỳ, ta luôn có

$$f(x_n, y_n) = \frac{\cos x_n + y_n}{x_n^2 + 2y_n^2} \to \frac{\cos 0 + 1}{0^2 + 2.1^2} = 1.$$

Vậy ta có $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\cos x + y}{x^2 + 2y^2} = 1$

Ví dụ

Ví dụ

Tính giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}$.

Xét dãy số $(x_n, y_n) = \left\{ \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2} \right) \right\} \to (0,0)$ thì ta có

$$f(x_n, y_n) = \frac{2\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{(n^2)^2}} = 1.$$

Mặt khác, nếu xét dãy số $(x_n, y_n) = \left\{ \left(\dfrac{1}{n}, 0 \right) \right\} \to (0,0)$ thì $f(x_n, y_n) = 0$.

Ta tìm được hai dãy số $\{(x_n, y_n) \to (0,0)\}$ sao cho $f(x_n, y_n)$ tiến đến hai giá trị khác nhau, do đó hàm số không có giới hạn tại $(0,0)$.

Ví dụ

Ví dụ

Tính giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Ta thấy $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x^2}{x^2}\right| |y| = |y| \to 0$ khi $y \to 0$. Do đó theo nguyên lý kẹp

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Định nghĩa

Định nghĩa (Giới hạn lặp)

Xét hàm số $f(x,y)$. Cố định $y \neq y_0$, xem hàm số $f(x,y)$ như hàm một biến số x. Giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = g(y)$. Nếu $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = a$ thì a được gọi là giới hạn lặp $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = a$.

Tương tự, ta có giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = b$.

Tổng quát thì các giới hạn lặp này không bằng nhau, thật vậy, xét ví dụ

Ví dụ. Tính các giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}$ và $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}$ của hàm số

$f(x,y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$.

Dễ dàng ta có

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} = -1$$

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Hàm số $f(x,y)$ được gọi là liên tục tại điểm (x_0,y_0), nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Định lý

Cho hàm số $u=\varphi(x,y)$ liên tục tại điểm (x_0,y_0), với hàm số $f=g(u)$ liên tục tại điểm tương ứng $u_0(x_0,y_0)$. Khi đó hàm hợp $f(x_0,y_0)=g(\varphi(x_0,y_0))$ cũng liên tục tại điểm (x_0,y_0).

CÁC MẶT BẬC HAI

Các mặt bậc hai trong không gian $\mathbb{R}^3$ có phương trình tổng quá

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Lx + My + Nz + P = 0.$$

Trong đó ta thấy

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx = 0$$

là một dạng toàn phương. Bằng phép biến đổi trực giao, ta đưa dạng toàn phương về dạng chính tác, từ đó có thể xác định được dạng của mặt bậc hai.

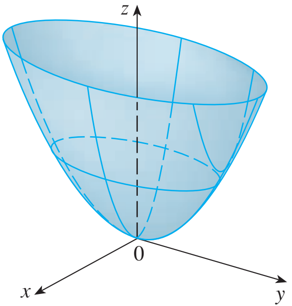
Xét đồ thị hàm số $z = f(x, y)$.

Tập hợp tất cả các điểm (x, y) của miền xác định D_f sao cho $f(x, y) = k$, được gọi là các đường mức, với k là hằng số cho trước.

Mặt elliptic parabolid

Là mặt bậc hai cho bởi phương trình dạng

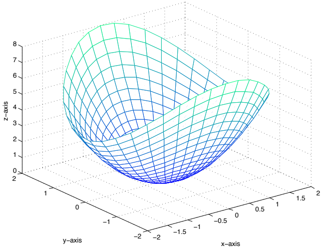
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

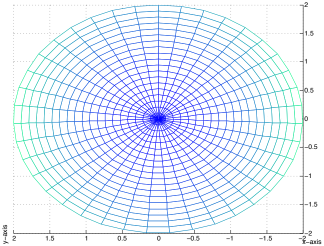


Ví dụ

Mặt bậc hai cho bởi phương trình

$$z = x^2 + 2y^2$$

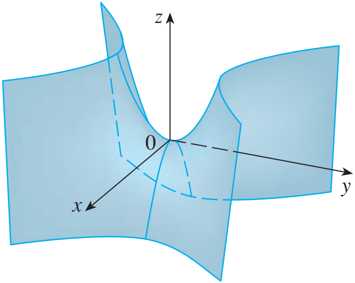




Mặt hyperbolic parabolid

Là mặt bậc hai cho bởi phương trình dạng

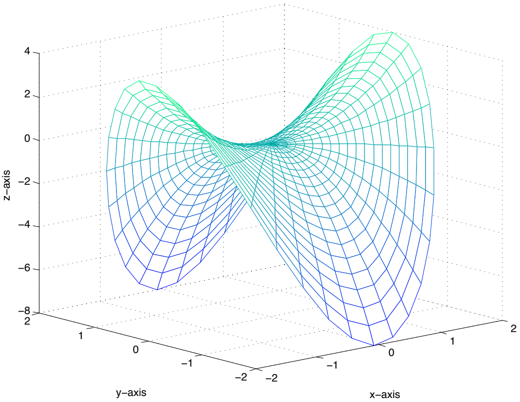
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



Ví dụ

Mặt bậc hai cho bởi phương trình

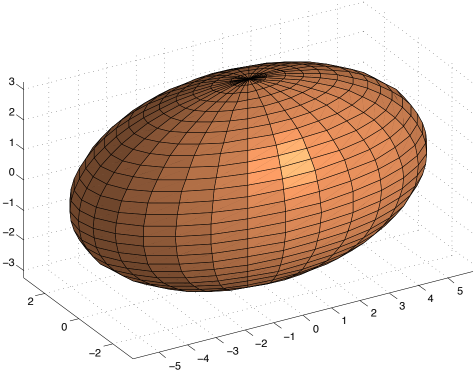
$$z = x^2 + 2y^2$$



Mặt Ellipsoid

Là mặt bậc hai cho bởi phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



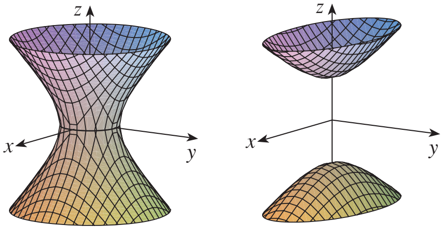
Mặt hyperboloid

Mặt Hyperboloid 1 tầng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Mặt Hyperboloid 2 tầng

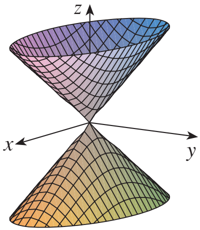
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Mặt nón

Là mặt bậc hai cho bởi phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



Mặt trụ

Trong phương trình thiếu x, y hoặc z Mặt trụ $z = x^2$ và $y^2 + z^2 = 1$