Giải tích hàm nhiều biến
Chương 4: TÍCH PHÂN BỘI BA

Đậu Thế Phiệt

Ngày 5 tháng 4 năm 2014

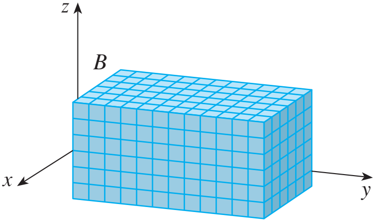
Nội dung

Định nghĩa và cách tính tích phân bội ba

Xây dựng

Tương tự định nghĩa tích phân hàm một biến và hàm hai biến, ta định nghĩa tích phân bội ba với một hàm số gồm ba biến. Trước tiên ta xét hàm f được định nghĩa trên một khối hình hộp chữ nhật

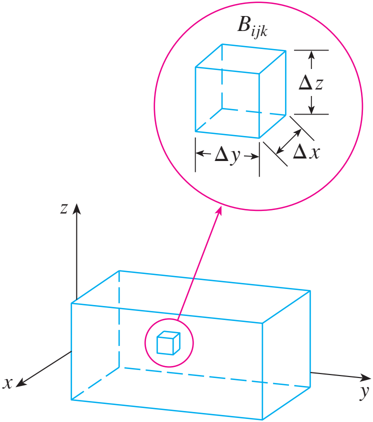
$$B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$



Bước đầu tiên, ta chia khối B thành các khối hình hộp con. Chia khoảng $[a, b]$ thành l khoảng con $[x_{i-1}, x_i]$ với độ lớn $\Delta x = \frac{a-b}{l}$; chia khoảng $[c, d]$ thành m khoảng con $[y_{j-1}, y_j]$ với độ lớn Δy; chia khoảng $[r, s]$ thành n khoảng con $[z_{k-1}, z_k]$ với độ lớn Δz.

Khi đó, khối hộp B được chia thành $l \times m \times n$ khối hộp con

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$



Mỗi khối hộp con như trên có thể tích $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Trong mỗi khối hộp ta chọn ngẫu nhiên điểm có toạ độ $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ Ta thiết lập tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

Ta định nghĩa tích phân bội ba của hàm số là giới hạn của tổng Riemann.
Định nghĩa. Tích phân bội ba của hàm f trên khối B là

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V.$$

Tính chất của tích phân bội ba

1) Hàm liên tục trên một khối đóng, bị chặn, có biên là các mặt trơn từng khúc thì khả tích trên khối này.

2) $V_E = \iiint\limits_E dxdydz.$

3) $\iiint\limits_E C.f(x,y,z)dV = C\iiint\limits_E f(x,y,z)dV.$

4) $\iiint\limits_E (f+g)(x,y,z)dV = \iiint\limits_E f(x,y,z)dV + \iiint\limits_E g(x,y,z)dV.$

5) Nếu E được chia thành hai khối rời nhau E_1 và E_2 thì

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{E_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{E_2} f(x,y,z)dV$$

6) $\forall (x,y,z) \in E,$
$f(x,y,z) \le g(x,y,z) \Rightarrow \iiint\limits_E f(x,y,z)dV \le \iiint\limits_E g(x,y,z)dV.$

Cách tính tích phân bội ba

Định lý Fubini

Để tính tích phân bội ba, ta sử dụng định lý Fubini để đưa tích phân cần tính về tích phân lặp.

Định lý. Nếu f là một hàm số liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ thì

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz.$$

Theo định lý Fubini, trước tiên ta tính tích phân của hàm f theo biến x với y, z được cố định; sau đó ta tính tích phân theo biến y với z được cố định; cuối cùng là lấy tích phân theo biến z. Ta đồng thời có thể tính tích phân trên theo thứ tự x, y, z (có 6 trường hợp) và thu được cùng một kết quả. Ví dụ

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)dzdydx.$$

Ví dụ 1.

Tính tích phân $\iiint\limits_B xyz^2 dV$ với B là hình hộp chữ nhật cho bởi

$$B = \{(x, y, z)|0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

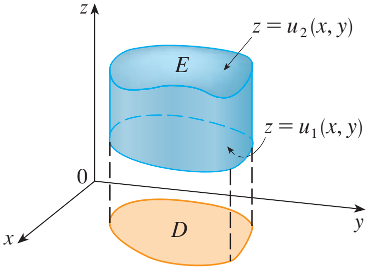
Giải. Ta có thể tính tích phân trên theo một trong sáu thứ tự lấy tích phân, ví dụ ta lấy tích phân lần lượt theo các biến x, y và z

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B xyz^2 dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dxdydz \\
&= \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dydz \\
&= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dydz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz \\
&= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \left.\frac{z^3}{4}\right|_0^3 = \frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

Định lý Fubini tổng quát

Dạng 1. E là khối tạo bởi phần nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục theo biến (x, y)

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



Miền D là hình chiếu đứng của E theo trục z xuống mặt phẳng Oxy.

Áp dụng định lý Fubini cho miền E, ta có công thức tính tích phân bội ba

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$$

Theo công thức trên, khi tính tích phân theo biến z, hai biến x, y được cố định, do đó $u_1(x,y)$ và $u_2(x,y)$ được xem như hằng số, hàm $f(x,y,z)$ được xem là một hàm theo biến z.
Đặc biệt, nếu miền D (hình chiếu của khối E xuống mặt phẳng Oxy) có dạng 1: $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ thì ta có công thức

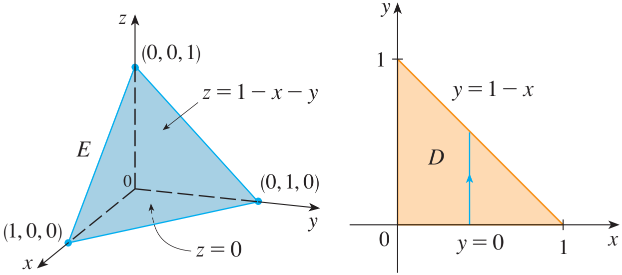
$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx.$$

Tương tự nếu D có dạng 2: $D = \{(x,y)|c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy.$$

Ví dụ 2.

Tính tích phân $\iiint\limits_E zdV$ với E là khối giới hạn bởi các mặt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, và $x + y + z = 1$.



Hình chiếu của khối E xuống mặt Oxy được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 0$ và $x + y = 1$. Khối E có mặt dưới là $z = 0$, mặt trên là $x + y + z = 1$, do đó ta có thể dùng $u_1(x, y) = 0$ và $u_2(x, y) = 1 - x - y$. Khối E được xác định bởi

$$E = \{(x, y, z)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Tích phân trên khối E được tính bởi

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_E zdV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} zdzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dydx = \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{6}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (1 - x)^3 dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Định lý Fubini tổng quát

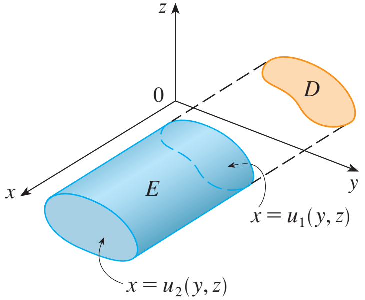
Tương tự như dạng 1, nếu E là khối có dạng 2

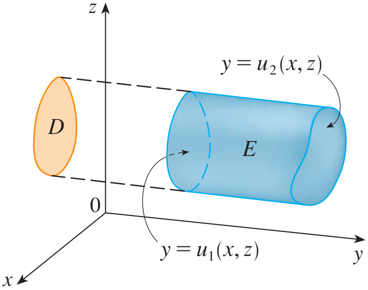
$$E = \{(x,y,z) | (y,z) \in D, u_1(y,z) \leq x \leq u_2(y,z)\}$$

và dạng 3

$$E = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z)\}.$$

Trong dạng 2 và dạng 3, miền D lần lượt là hình chiếu của khối E xuống mặt phẳng yz và xz.





Áp dụng định lý Fubini, ta lần lượt có công thức tính tích phân bội ba ứng với từng trường hợp.
Dạng 2 $E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$

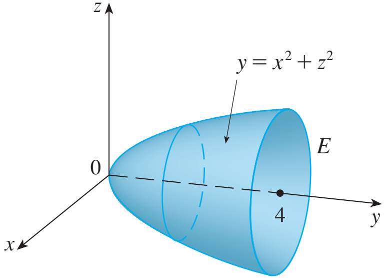
$$\iiint\limits_E f(x, y, z) dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

và dạng 3 $E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$

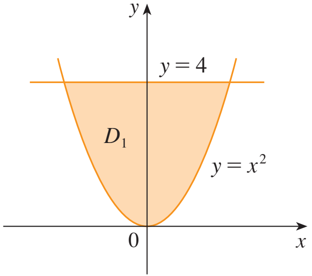
$$\iiint\limits_E f(x, y, z) dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

Ví dụ 3

Tính tích phân $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}dV$ với E là miền giới hạn bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.



Nếu ta xét khối E dưới dạng 1, ta cần xác định hình chiếu D_1 xuống mặt Oxy, ta thu được parabol $y = x^2$.



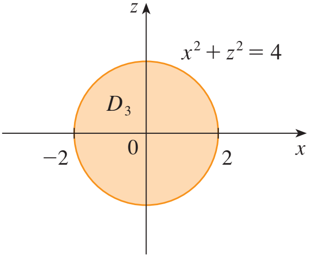
Từ phương trình $y = x^2 + z^2$, ta có $z = \pm\sqrt{y - x^2}$. Do đó miền dưới dạng 1 được xác định bởi

$$E = \left\{(x, y, z) | -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\right\}$$

Áp dụng định lý Fubini, tích phân trên trở thành

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}\,dzdydx.$$

Ta thấy, biểu diễn tích phân bội ba theo công thức trên là hoàn toàn đúng, nhưng tích phân lặp thu được rất khó tính.
Do đó ta sẽ xét khối E dưới dạng 3, miền D_3 là hình chiếu xuống mặt phẳng xz chính là đĩa $x^2+z^2=4$.



Dưới dạng 3, miền E được xác định bởi

$$E = \left\{(x, y, z) | (x, z) \in D_3, x^2 + z^2 \le y \le 4\right\}.$$

Tích phân bội ba được viết thành

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}dV = \iint\limits_{D_3} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}dy\right] dA$$
$$= \iint\limits_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2+z^2}dA.$$

Trên mặt phẳng xz, ta chuyển sang toạ độ cực $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)rrdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)dr$$
$$= 2\pi\left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{5}$$

Bài tập I

1) Tính $\iiint\limits_E 2xdV$ với
$E = \left\{(x,y,z) | 0 \le y \le 2, 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}, 0 \le z \le y\right\}$.
2) Tính $\iiint\limits_E yz\cos(x^5)dV$ với
$E = \{(x,y,z) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, x \le z \le 2x\}$.
3) $\iiint\limits_E 6xydV$ với E nằm dưới mặt phẳng $z = x + y$ và nằm trên mặt phẳng Oxy, được giới hạn bởi các đường cong $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 1$.
4) Tính $\iiint\limits_T xyzdV$ với T là tứ diện với các đỉnh $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0)$ và (1,0,1).

Bài tập II

5) Tính $\iiint\limits_E x dV$ với E giới hạn bởi paraboloid $x = 4y^2 + 4z^2$ và mặt phẳng $x = 4$.
6) Tính $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \sin y dy dz dx$.
7) Tính $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z e^y dx dz dy$.
8) Tính $\iiint\limits_E (x+z) dx dy dz$ trong đó E được giới hạn bởi $y = 2 - x^2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 3x$.

Tích phân bội ba trong toạ độ trụ

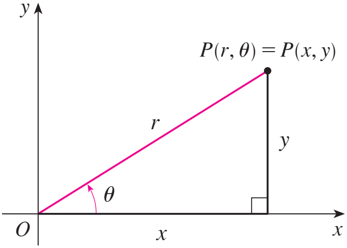
Tích phân bội ba trong toạ độ trụ

Khi biểu diễn miền phẳng D được giới hạn bởi các đường cong (đường tròn, ellipse) trong không gian Oxy, ta có thể chuyển sang toạ độ cực bởi phép đổi biến

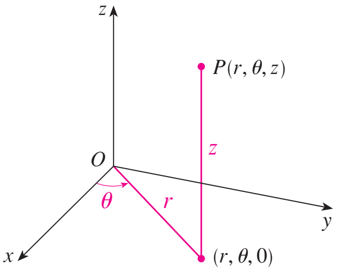
$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

với

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



Trong không gian ba chiều, chúng ta cũng sử dụng một hệ trục toạ độ, toạ độ trụ. Tương tự như toạ độ cực để biểu diễn những khối, vật thể có hình trụ, khuyên.
Trong toạ độ trụ, một điểm P trong không gian ba chiều được biểu diễn bởi (r, θ, z), trong r và θ là toạ độ cực của mặt phẳng chiếu theo chiều z xuống Oxy và z là khoảng cách từ mặt phẳng Oxy và điểm P.



Mối liên hệ giữa hệ toạ độ trụ và hệ toạ độ vuông góc $Oxyz$ được cho bởi

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Và công thức để chuyển từ hệ toạ độ vuông góc $Oxyz$ sang toạ độ trụ cho bởi

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad z = z.$$

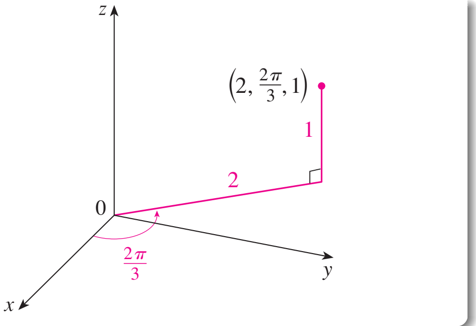
Ví dụ.

Xét điểm trong toạ độ trụ cho bởi $(2, 2\pi/3, 1)$. Trong toạ độ $Oxyz$, ta có

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1.$$



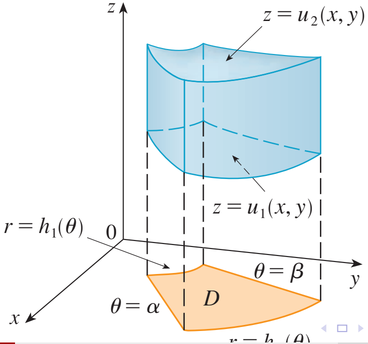
Biểu diễn tích phân bội ba theo toạ độ trụ

Giả sử khối E được xác định theo dạng 1, D là hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy theo chiều z. Khối D có thể được biểu diễn theo toạ độ cực.

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

với miền D trong toạ độ cực cho bởi

$$D = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$



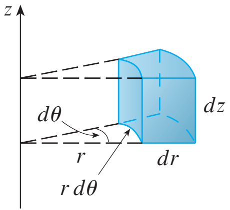
Tích phân bội ba của hàm f trên khối E cho bởi

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\right] dA$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dzdrd\theta.$$

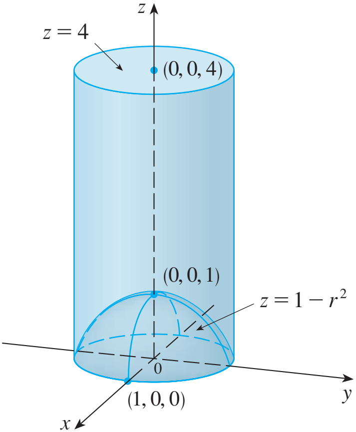
Ta thấy rằng, đơn vị thể tích trong toạ độ trụ được tính bởi

$$dV = r\, dzdrd\theta$$



Ví dụ 1.

Tính tích phân hàm $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ trên khối E được giới hạn bên trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$, nằm dưới mặt phẳng $z = 4$ và trên paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.



Trong toạ độ trụ, hình trụ $x^2 + y^2 = 1$ biểu diễn bởi $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$. Do đó khối E được viết lại thành

$$E = \left\{(r, \theta, z) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\right\}.$$

Tích phân được tính bởi

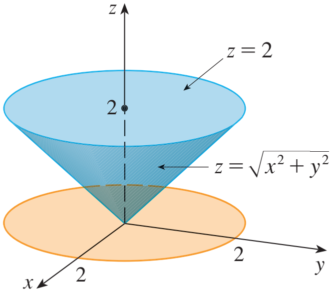
$$\begin{aligned}
\iiint\limits_E f(x, y, z) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 r\, r\, dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 [4 - (1 - r^2)] dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4) dr \\
&= 2\pi \left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.

Tính tích phân $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx$.

Giải. Khối E được xác định bởi

$$E = \{(x,y,z)| -2 \le x \le 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}.$$



Hình chiếu của khối E lên mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2+y^2 \leq 4$. Mặt dưới của E được xác định bởi hình nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và mặt trên của E là mặt phẳng $z=2$.
Khi chuyển sang toạ độ trụ, khối E được xác định bởi

$$E=\{(r,\theta,z)|0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq r\leq 2, r\leq z\leq 2\}.$$

Tích phân được tính bởi

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx=\iiint\limits_{E}(x^2+y^2)dV)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2 r\,dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3(2-r)dr$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{5}r^5\right]_0^2=\frac{16}{5}\pi.$$

Bài tập I

1. Tính tích phân $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}dV$ với E là miền nằm trong hình trụ $x^2+y^2=16$ và nằm giữa các mặt phẳng $z=-5$ và $z=4$.
2. Tính tích phân $\iiint\limits_E (x^3+xy^2)dV$ với E là khối nằm trong góc $1/8$ thứ nhất (ie. $x>0, y>0, z>0$) và nằm trong paraboloid $z=1-x^2-y^2$.
3. Tính tích phân $\iiint\limits_E e^z dV$ với E là khối giới hạn bởi paraboliod $z=1+x^2+y^2$, hình trụ $x^2+y^2=5$ và mặt phẳng Oxy.
4. Tính tích phân $\iiint\limits_E xdV$ với E được giới hạn bởi mặt phẳng $z=0$ và $z=x+y+5$ và hai hình trụ $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$.
5. Tính thể tích của khối được giới hạn bởi $x^2+y^2=1$ và quả cầu $x^2+y^2+z^2=4$.

Bài tập II

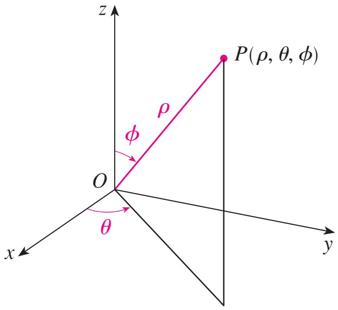
6. Tính tích phân $\iiint\limits_E \dfrac{1}{x^2+y^2} dV$ với E được giới hạn bởi $z=0$, $z=y$, $x^2+y^2=1$ và $y \leq 0$.
7. Tính tích phân $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xzdzdxdy$.
8. Tính tích phân $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}dzdydx$.

Tích phân bội ba trong toạ độ cầu

Toạ độ cầu

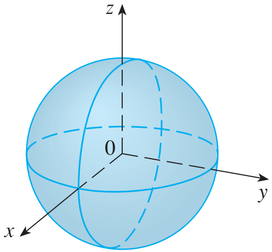
Toạ độ cầu (ρ, θ, ϕ) của 1 điểm P được xác định bởi $\rho = |OP|$- khoảng cách từ gốc toạ độ tới điểm P; θ- góc tạo bởi tia Ox và hình chiếu của cạnh OP xuống mặt phẳng Oxy; ϕ- góc tạo bởi tia Oz và đoạn thẳng OP.

$$\rho \leq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$



Toạ độ cầu thường được sử dụng đối với những vật thể đối xứng qua một điểm, và gốc toạ độ đặt tại điểm ấy.
Ví dụ, một quả cầu có tâm tại gốc toạ độ và bán kính c có phương trình

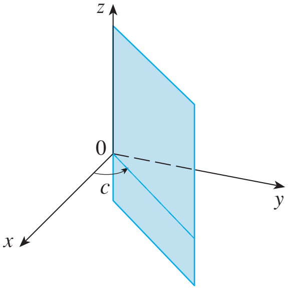
$$\rho = c$$



Đồ thị của phương trình

$$\theta = c$$

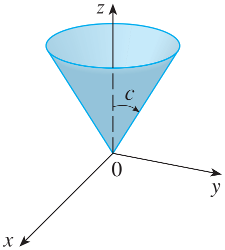
là một nửa mặt phẳng với trục Oz là biên



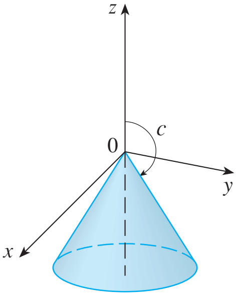
Đồ thị của phương trình

$$\phi = c$$

cho ta hình nón với trục Oz là trục đối xứng



$0 < c < \pi/2$



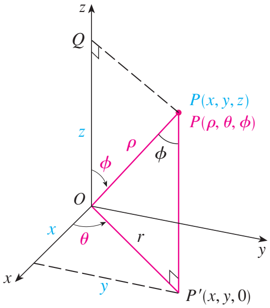
$\pi/2 < c < \pi$

Mối liên hệ giữa hệ toạ độ cầu và hệ trục toạ độ vuông góc *Oxyz* được tính bởi:
Trong mặt phẳng $OQPP'$, ta có

$$z = \rho \cos \phi \quad r = \rho \sin \phi.$$

Trong mặt phẳng *Oxy*, ta chuyển từ toạ độ cực sang toạ độ *Oxy* và thu được

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

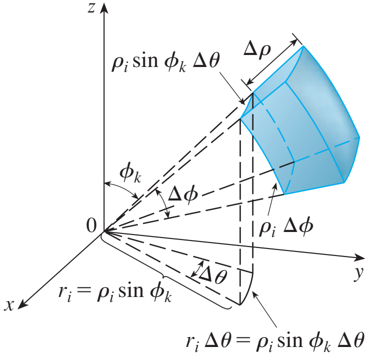


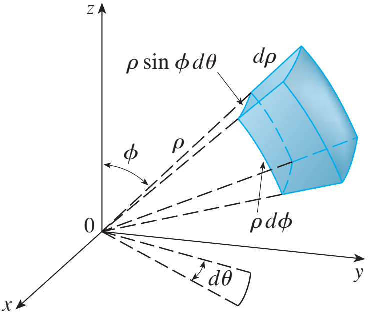
Tích phân bội ba trong toạ độ cầu

Để tính tích phân trong toạ độ cầu, trước tiên ta xây dựng tích phân trên một đơn vị thể tích E

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d$$

với $a \le 0$, $\beta - \alpha \le 2\pi$, $d - c \le \pi$.





Thực hiện chia nhỏ khối E thành các khối nhỏ bằng cách chia $[a, b]$,$[\alpha, \beta]$,$[c, d]$ tương ứng thành l, m, n đoạn con, ta thu được các khối con có đơn vị thể tích tính bởi

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i\delta\Delta\phi)(\rho_i \sin\phi_k\Delta\theta) = \rho_i^2 \sin\phi_k\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

Lập tổng Riemann và tính giới hạn, ta có thể biểu diễn tích phân bội ba trong toạ độ cực bởi công thức

$$\iiint_E f(x, y, z)dV =$$

$$\int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi.$$

trong đó, E là khối trong toạ độ cầu cho bởi

$$E = \{(\rho, \theta, \phi)|a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}.$$

Trong định nghĩa tích phân trên, các tích phân lặp theo các biến ρ, θ, ϕ có thể tính độc lập với nhau. Do đó ta có thể mở rộng theo miền E tổng quát hơn.
Ví dụ

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

khi ấy tích phân theo biến ρ có các cận từ $g_1(\theta, \phi)$ đến $g_2(\theta, \phi)$.
Tương tự, ta có thể xét miền E như sau

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq \phi \leq h_2(\theta), g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

khi ấy, tích phân theo biến ρ có các cận từ $g_1(\theta, \phi)$ đến $g_2(\theta, \phi)$, tích phân theo biến ϕ có cận $h_1(\theta)$ đến $h_2(\theta)$. Thứ tự lấy tích phân lần lượt theo các biến ρ, ϕ, θ.

Ví dụ 1.

Tính tích phân $\iiint\limits_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ với B là quả cầu đơn vị

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Giải. Quả cầu đơn vị B trong toạ độ cầu cho bởi

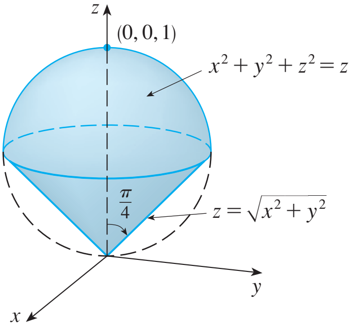
$$B = \{(\rho, \theta, \phi) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Đồng thời ta có $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Do đó

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 e^{\rho^3}) d\rho \\
&= [-\cos\phi]_0^{\pi} (2\pi) \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e-1).
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.

Tính thể tích của khối nằm trên nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$



Mặt cầu cho bởi công thức

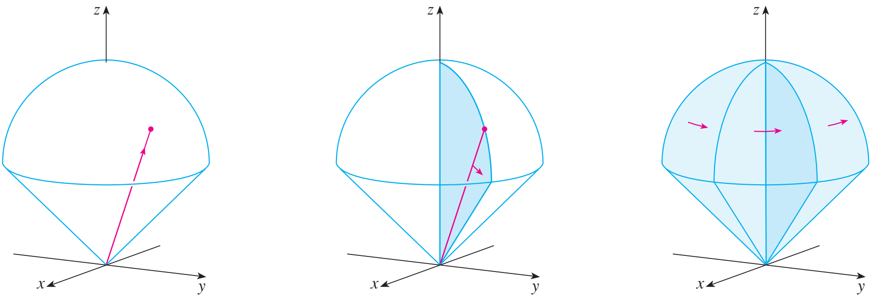
$$\rho^2 = \rho\cos\phi \Rightarrow \rho = \cos\phi$$

Phương trình mặt nón cho bởi

$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta} = \rho\sin\phi.$$

Do đó, $\sin\phi = \cos\phi \Rightarrow \phi = \pi/4$. Khối E trong toạ độ cầu cho bởi

$$E = \{(\rho,\theta,\phi)|0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \rho \le \cos\phi\}$$



Sau khi xác định khối E trong toạ độ cầu, thể tích khối E cho bởi

$$V(E) = \iiint\limits_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin\phi \cos^3\phi d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

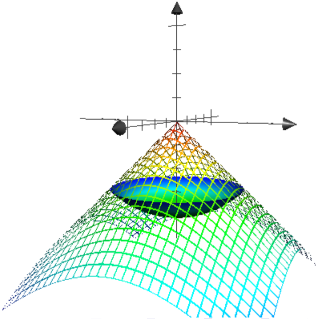
Ví dụ 3

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E zdxdydz$ với E là vật thể giới hạn bởi

$$z \leq -\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+z^2 = 1$$

Toạ độ cầu $\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\phi \\ y = \rho \sin\theta \sin\phi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$

Xác định các cận $\begin{cases} \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$



$$I = \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 \rho\cos\theta.\rho^2 \sin\theta d\rho = -\frac{\pi}{8}$$

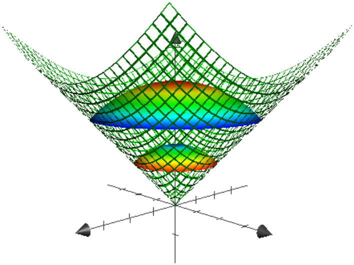
Ví dụ 4

Tính thể tích vật thể E giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Chuyển sang toạ độ cầu, ta xác định các cận

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 1 \leq \rho \leq 2 \end{cases}$$



$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^2 1.\rho^2 \sin\theta d\rho$$

$$= \frac{14}{3}\pi - \frac{7\sqrt{2}}{3}\pi$$

Bài tập I

1. Tính tích phân $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}dV$ với E là miền nằm trong hình trụ $x^2+y^2=16$ và nằm giữa các mặt phẳng $z=-5$ và $z=4$.
2. Tính tích phân $\iiint\limits_E (x^3+xy^2)dV$ với E là khối nằm trong góc $1/8$ thứ nhất (ie. $x>0, y>0, z>0$) và nằm trong paraboloid $z=1-x^2-y^2$.
3. Tính tích phân $\iiint\limits_E e^z dV$ với E là khối giới hạn bởi paraboliod $z=1+x^2+y^2$, hình trụ $x^2+y^2=5$ và mặt phẳng Oxy.
4. Tính tích phân $\iiint\limits_E xdV$ với E được giới hạn bởi mặt phẳng $z=0$ và $z=x+y+5$ và hai hình trụ $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$.
5. Tính thể tích của khối được giới hạn bởi $x^2+y^2=1$ và quả cầu $x^2+y^2+z^2=4$.

Bài tập II

6. Tính tích phân $\iiint\limits_E \dfrac{1}{x^2+y^2}dV$ với E được giới hạn bởi $z=0$, $z=y$, $x^2+y^2=1$ và $y\le 0$.
7. Tính tích phân $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xzdzdxdy$.
8. Tính tích phân $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}dzdydx$.

Bài tập I

1. Tính $\iiint\limits_B (x^2+y^2+z^2)^2 dV$ với B là quả cầu tâm tại gốc toạ độ, bán kính bằng 5.
2. Tính $\iiint\limits_E (9-x^2-y^2) dV$ với E là khối cho cho bởi $x^2+y^2+z^2 \le 9$ và $z \ge 0$.
3. Tính $\iiint\limits_E z dV$ với E là khối nằm giữa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ và $x^2+y^2+z^2=4$; trong góc $1/8$ thứ nhất (i.e. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$).
4. Tính $\iiint\limits_E x^2 dV$ với E được giới hạn bởi mặt phẳng Oxz và các nửa mặt cầu $y=\sqrt{9-x^2-z^2}$ và $y=\sqrt{16-x^2-z^2}$.
5. Tính thể tích khối nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$, bên trên mặt phẳng Oxy và nằm dưới nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Bài tập

1. Tính $I = \iiint\limits_E \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz$ trong đó E được giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 = 4$ và nằm ngoài $z = \sqrt{x^2+y^2}$
2. Tính $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} xydzdydx$.
3. Tinsh $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{4-x^2-y^2} (x^2z+y^2z+z^3)dzdxdy$.

https://sites.google.com/site/thephiet251/