CƠ SỞ LOGIC

Lý thuyết tổ hợp

Nội dung

- Logic mệnh đề
- Các phương pháp chứng minh
- Suy diễn logic
- Vị từ và lượng từ

Logic mệnh đề

Một số khái niệm của logic mệnh đề

- **Mệnh đề**: là một câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai.
- Ví dụ:
  - Mặt trời quay quanh trái đất.
  - 1+1 = 2.
  - Hôm nay trời đẹp quá! (không là mệnh đề)
  - Học bài đi! (không là mệnh đề)
  - 3 là số chẵn phải không? (không là mệnh đề)
- Giá trị của một mệnh đề đúng được ký hiệu là T, giá trị mệnh đề sai được ký hiệu là F. Tập giá trị T, F còn được gọi là giá trị chân lý của một mệnh đề.

Bài tập làm nhanh

Kiểm tra các khẳng định sau có phải là mệnh đề không?

- Paris là thành phố của Mỹ.
- n là số tự nhiên.
- con nhà ai mà xinh thế!
- 3 là số nguyên tố.
- Bạn có khỏe không?
- $x^2 + 1$ luôn dương.

Mệnh đề

2. **Phân loại:** gồm 2 loại

a. **Mệnh đề sơ cấp** (nguyên thủy): thường là một mệnh đề khẳng định đơn.

b. **Mệnh đề phức hợp**: là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề sơ cấp nhờ liên kết bằng các liên từ (**và, hay, khi và chỉ khi**,…) hoặc trạng từ “**không**”.

Ví dụ:

- 2 **không** là số nguyên tố
- 2 là số nguyên tố (sơ cấp)
- **Nếu** trời đẹp **thì** tôi đi dạo
- An đang xem phim **hay** An đang học bài
- Lúc này trời đang mưa **và** trận đấu đang bị tạm hoãn

Các phép toán mệnh đề

a. <u>Phép phủ định:</u> phủ định của mệnh đề P được ký hiệu là $\neg$P hay $\overline{P}$("không" P hay "phủ định của" P).

Bảng chân trị :

P	$\neg$P
1	0
0	1

Mệnh đề cho giá trị đúng nếu *p* sai và cho giá trị sai nếu *p* đúng.

Ví dụ :

+ 2 là số nguyên tố

Phủ định: 2 **không** là số nguyên tố

+ 1 > 2

Phủ định : 1 ≤ 2

Các phép toán mệnh đề

b. Phép nối liền (hội, giao): của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \wedge Q$ (đọc là "P và Q"), là mệnh đề được định bởi : $P \wedge Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng.

Bảng chân trị

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Mệnh đề có giá trị đúng khi cả *p* và *q* có giá trị đúng, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại.

Ví dụ:

- 3 > 4 và Trần Hưng Đạo là một vị tướng
- 2 là số nguyên tố và 2 là số chẵn
- An đang hát và uống nước

Các phép toán mệnh đề

c. Phép nối rời (tuyển, hợp): của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là "P hay Q"), là mệnh đề được định bởi : $P \vee Q$ sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai.

Bảng chân trị

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Mệnh đề có giá trị sai khi cả *p* và *q* có giá trị sai, có giá trị đúng trong các trường hợp khác còn lại.

Ví dụ:

- $\pi > 4$ hay $\pi > 5$
- 2 là số nguyên tố hay 2 là số chẵn

Các phép toán mệnh đề

d. Phép tuyển loại: của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi P ⊕ Q (đọc là "hoặc P hoặc Q"), là mệnh đề được định bởi : P ⊕ Q đúng khi một trong P hoặc Q có giá trị đúng.

Bảng chân trị

P	*Q*	P ⊕ Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Mệnh đề có giá trị đúng khi một trong *p* hoặc *q* có giá trị đúng, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại.

Ví dụ:

- π > 4 hay π > 5
- 2 là số nguyên tố hay 2 là số chẵn

Các phép toán mệnh đề

Ví dụ

- “Hôm nay, An giúp mẹ lau nhà và rửa chén”
- “Hôm nay, cô ấy đẹp và thông minh ”
- “Ba đang đọc báo hay xem phim”

Các phép toán mệnh đề

e. Phép kéo theo: Mệnh đề P kéo theo Q của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi $P \rightarrow Q$ (đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P") là mệnh đề được định bởi:

$P \rightarrow Q$ sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai.

Bảng chân trị

P	*Q*	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	**0**
1	1	1

Mệnh đề có giá trị sai khi *p* đúng và *q* sai, có giá trị đúng trong các trường hợp khác còn lại.

Mệnh đề

Ví dụ:

- Nếu 1 = 2 thì Lenin là người Việt Nam

- Nếu trái đất quay quanh mặt trời thì 1 + 3 = 5

- $\pi > 4$ kéo theo $5 > 6$

- $\pi < 4$ thì trời mưa

- Nếu 2 + 1 = 0 thì tôi là chủ tịch nước

Mệnh đề

f. <u>Phép kéo theo hai chiều:</u> Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi $P \leftrightarrow Q$ (đọc là "P nếu và chỉ nếu Q" hay "P khi và chỉ khi Q" hay "P là điều kiện cần và đủ của Q" hay "P tương đương với Q"), là mệnh đề xác định bởi:

$P \leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

Bảng chân trị

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Mệnh đề có giá trị đúng khi *p* và *q* có cùng giá trị chân lý, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại.

Các phép toán mệnh đề

Ví dụ:

- 2=4 khi và chỉ khi 2+1=0
- 6 chia hết cho 3 khi và chi khi 6 chia hết cho 2
- London là thành phố nước Anh nếu và chỉ nếu thành phố

HCM là thủ đô của VN

- π>4 là điều kiện cần và đủ của 5>6

Dạng mệnh đề

1. **Định nghĩa: Dạng mệnh đề** là một biểu thức được cấu tạo từ:

- Các hằng mệnh đề
- Các biến mệnh đề *p, q, r, …,* tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó
- Các phép toán $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ và dấu đóng mở ngoặc ().

Dạng mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn lấy giá trị **1**

Dạng mệnh đề gọi là hằng sai (hay mâu thuẫn) nếu nó luôn lấy giá trị 0.

Ví dụ:

$E(p,q) = \neg(\neg p \wedge q)$

$E(p,q,r) = (p \rightarrow q) \wedge \neg(q \wedge r)$

Dạng mệnh đề

Bảng chân trị của dạng mệnh đề E(p,q,r): là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r.

Nếu có n biến, bảng này sẽ có 2^n dòng, chưa kể dòng tiêu đề.

Ví dụ:

$E(p,q,r) = (p \vee q) \rightarrow r$. Ta có bảng chân trị sau:

Dạng mệnh đề

Mệnh đề **E(p,q,r) =(p ∨q) →r** theo 3 biến p,q,r có bảng chân trị sau

p	q	r	p∨q	(p ∨q) →r
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Dạng mệnh đề

Bài tập: Lập bảng chân trị của những dạng mệnh đề sau

$A(p,q) = \neg(p \wedge q) \wedge p$

$B(p,q,r) = p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow \neg q$

Độ ưu tiên các phép toán

1. Ngoặc ()
2. Phủ định
3. Và
4. Hay
5. Kéo theo →
6. Kéo theo hai chiều

- Ví dụ:
  - $\mathbf{p \vee q \to r}$ hiểu là $\mathbf{(p \vee q) \to r}$
  - $\mathbf{p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow \neg q}$ hiểu là $(\mathbf{p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow (\neg q)}$

Bài tập làm nhanh

- Lập bảng chân lý cho các mệnh đề sau:

$$\neg p \rightarrow (p \vee q)$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

Bảng giá trị chân lý của các phép toán mệnh đề

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

Các phép toán cấp bít ứng dụng trong ngôn ngữ LT				
Giá trị của A	Giá trị của B	A **and** B	A **or** B	A **xor** B
A = 13 =1101	B = 8=1000	1000	1101	0101

Tương đương logic

Nhắc lại về Dạng mệnh đề (mệnh đề phức hợp)

- Một mệnh đề phức hợp luôn đúng với bất kể các giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần được gọi là *hằng đúng*.
- Một mệnh đề phức hợp luôn sai với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần được gọi là *mâu thuẫn*.

Ví dụ về mệnh đề hằng đúng & mệnh đề mâu thuẫn			
p	$\overline{p}$	$\boxed{p \vee \overline{p}}$	$\boxed{p \wedge \overline{p}}$
T	F	T	F
F	T	T	F

Hai dạng mệnh đề **tương đương logic**

- **Ký hiệu**: A≡B, hoặc A⇔B, hoặc A=B
  - – khi và chỉ khi các cột cho giá trị chân lý của chúng giống nhau.
- **Ví dụ:** 2 mệnh đề phức hợp sau là tương đương loggic

Bảng giá trị chân lý đối với $\overline{(p \vee q)}$ *và* $\overline{p} \wedge \overline{q}$						
p	q	p∨q	$\boxed{\overline{(p \vee q)}}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\boxed{\overline{p} \wedge \overline{q}}$
T	T	T	**F**	F	F	**F**
T	F	T	**F**	F	T	**F**
F	T	T	**F**	T	F	**F**
F	F	F	**T**	T	T	**T**

Định lý: *Hai dạng mệnh đề A và B tương đương logic với nhau khi và chỉ khi A↔B là hằng đúng.*

Chứng minh được sự tương đương logic

- Bằng phương pháp bảng chân lý, dễ dàng chứng minh được sự tương đương logic của các dạng mệnh đề dưới đây:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$$

Các luật tương đương logic

1. Phủ định của phủ định

$$\neg \neg p \Leftrightarrow p$$

2. Luật De Morgan

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

3. Luật giao hoán $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

4. Luật kết hợp $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$$(p \wedge q) \wedge r <=> p \wedge (q \wedge r)$$

Các luật tương đương logic

5. Luật phân phối

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

6. Luật lũy đẳng $p \vee p \Leftrightarrow p$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

7. Luật trung hòa $p \vee 0 \Leftrightarrow p$

$$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$

Các luật tương đương logic

8. Luật về phần tử bù

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$$

9. Luật thống trị

$$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

10. Luật hấp thụ

$$\mathbf{p} \vee (\mathbf{p} \wedge q) \Leftrightarrow \mathbf{p}$$

$$\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee q) \Leftrightarrow \mathbf{p}$$

Các luật tương đương logic

11. Luật về phép kéo theo:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$
$$\Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

Ví dụ: Nếu trời mưa thì đường trơn $\Leftrightarrow$ nếu đường không trơn thì trời không mưa

Bài tập làm nhanh

- Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng:

  - $(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$

Bài tập làm nhanh

$$\overline{p \vee (\overline{p} \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q} \ ?$$

Dạng chuẩn tắc hội

- Một mệnh đề tuyển là tuyển của các mệnh đề nguyên thủy
  - Mệnh đề tuyển có dạng $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ trong đó p_i là các *mệnh đề nguyên thủy*
- Một công thức ở dạng chuẩn tắc hội nếu nó là hội của các mệnh đề tuyển

$$(a \vee e \vee f \vee g) \wedge (b \vee c \vee d)$$

Dạng chuẩn tắc hội

- Có thể biến đổi một công thức bất kỳ về dạng chuẩn tắc hội bằng cách biến đổi theo nguyên tắc sau:
  - Khử các phép tương đương: $a \leftrightarrow b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
  - Khử các phép kéo theo: $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
  - Chuyển các phép phủ định vào sát các ký hiệu mệnh đề bằng cách áp dụng luật De Morgan
  - Khử phủ định kép: $\neg(\neg a) \equiv a$
  - Áp dụng luật phân phối: $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Ví dụ: chuẩn tắc hội

- Chuẩn hóa về dạng chuẩn tắc hội:

$$(p \to q) \vee \neg(r \vee \neg s)$$

Bài tập 1

- Chứng minh các mệnh đề sau là *hằng đúng*.

a) $(p \wedge q) \rightarrow p$

b) $p \rightarrow (p \vee q)$

c) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

d) $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

e) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$

f) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

g) $\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$

h) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

i) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

j) $((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$

Bài tập 2

- Chứng minh các *tương đương logic* sau:

1) $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

2) $\neg p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \neg q$

3) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg p \leftrightarrow q$

Một số phương pháp chứng minh toán học

Phép chứng minh đảo đề

- Ứng dụng luật về phép kéo theo
  - **$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$**
  - **Để CM $p \rightarrow q$ đúng, ta CM $\neg q \rightarrow \neg p$ đúng.**
- Ví dụ:
  - **Cho n là số tự nhiên. CM nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn.**
  - **Ta CM nếu n là số lẻ thì n^2 là số lẻ.**

Phép chứng minh phản ví dụ

- Ứng dụng luật về phép kéo theo kết hợp luật De Morgan
  - $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
  - $\neg (p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.
  - **Để CM $p \to q$ sai, ta CM p đúng, q sai.**
  - **“Phản ví dụ” = “trường hợp làm MĐ sai”**
- Ví dụ:
  - Cho n là số tự nhiên. “Nếu n^2 chia hết cho 4 thì n cũng chia hết cho 4”.
  - Để CM phát biểu trên sai ta tìm 1 số n nào đó không thoả. (chẳng hạn n = 6).

Phép chứng minh phản chứng

- Để CM p đúng ta CM nếu p sai thì suy ra điều vô lý hay mâu thuẫn.
- VD:
  - CM căn bậc hai của 2 là số vô tỷ.
- Giải:
  - Giả sử căn 2 là số hữu tỷ, tức là $2^{1/2} = m/n$ (dạng tối giản) với m,n là các số nguyên và UCLN(m,n)=1.
  - $(m/n)^2 = 2$. Hay $m^2 = 2n^2$. Nên m chẵn
  - Khi đó m=2k. Suy ra $n^2 = 2k^2$. Nên n cũng chẵn.
  - Như vậy UCLN(m,n)>1 (mâu thuẫn).

Quy nạp

Chứng minh $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$ với $n \geq 1$

1. Phương pháp

Với những bài toán chứng minh tính đúng đắn của một biểu thức mệnh đề có chứa tham số n, như P(n). Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh P(n) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq N_0$.

- Quá trình chứng minh quy nạp bao gồm 2 bước:

  - *Bước cơ sở:* Chỉ ra $P(N_0)$ đúng.
  - *Bước quy nạp:* Chứng minh nếu P(k) đúng thì P(k+1) đúng. Trong đó P(k) được gọi là giả thiết quy nạp.

Quy nạp

Ví dụ. Chứng minh $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$ với mọi số nguyên dương n.

Gọi P(n) = “$1+3+\ldots(2n-1)=n^2$ “

+ Bước cơ sở:

Hiển nhiên P(1) đúng vì $1= 1^2$.

Quy nạp

+ Bước quy nạp:

- Giả sử P(k) đúng, tức là

$$1+3+5+...+(2k-1)=k^2$$

- Ta phải chỉ ra rằng P(k+1) đúng, tức là

$$1+3+5+...+(2k+1)=(k+1)^2$$

Từ giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned}1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1) &= k^2+(2k+1)\\ &=(k+1)^2\end{aligned}$$

- Suy ra, P(k+1) đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp P(n) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài tập về nhà

$$CM\ \ 1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}\ \ \forall n\geq 1$$

Suy diễn logic

Hệ quả logic

Định nghĩa: Y được gọi là **hệ quả logic** của X nếu $X \to Y$ là hằng đúng.

Ký hiệu $X \Rightarrow Y$

Ví dụ: $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p$

Trong phép tính mệnh đề người ta không phân biệt những mệnh đề tương đương logic với nhau. Do đó đối với những dạng mệnh đề có công thức phức tạp, ta thường biến đổi để nó tương đương với những mệnh đề đơn giản hơn.

Để thực hiện các phép biến đổi ta sử dụng qui tắc thay thế và quy luật logic.

Hệ quả logic

Qui tắc thay thế: Trong dạng mệnh đề X, nếu ta thay thế biểu thức con Y bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với X.

Ví dụ. $\neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$

Qui tắc suy diễn

Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng p, q, r…(tiền đề), ta áp dụng các qui tắc suy diễn để suy ra chân lí của một mệnh đề h mà ta gọi là kết luận.

Nói cách khác, dùng các qui tắc suy diễn để chứng minh: $(p \wedge q \wedge r \wedge \ldots)$ có hệ quả logic là h.

Ta thường mô hình hóa phép suy luận đó dưới dạng:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ r \\ \underline{\ldots} \\ \therefore h \end{array}$$

Các qui tắc suy diễn

1. Qui tắc khẳng định (Modus Ponens)

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \to q) \wedge p\right] \Rightarrow q$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Ví dụ

- Nếu An học chăm thì An học tốt.
- Mà An học chăm

Suy ra An học tốt.

- Trời mưa thì đường ướt.
- Mà chiều nay trời mưa.

Suy ra Chiều nay đường ướt.

2. Quy tắc phủ định

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \to q) \wedge \neg q\right] \Rightarrow \neg p$$

❖ **Hoặc dưới dạng sơ đồ**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Ví dụ

Nếu An đi học đầy đủ thì An đậu toán rời rạc.
An không đậu toán rời rạc.

Suy ra: An không đi học đầy đủ

3. Qui tắc tam đoạn luận

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \Rightarrow (p \to r)$$

❖ Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\ p \to r \end{array}$$

Ví dụ

- Nếu trời mưa thì đường ướt.
- Nếu đường ướt thì đường trơn

Suy ra nếu trời mưa thì đường trơn.

- Một con ngựa rẻ là một con ngựa hiếm
- Cái gì hiếm thì đắt

Suy ra một con ngựa rẻ thì đắt (☺)

4. Qui tắc tam đoạn luận rời

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[\left(p \vee q\right) \wedge \neg q\right] \rightarrow p$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore p \end{array}$$

Ý nghĩa của qui tắc: nếu một trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có một trường hợp không xảy ra thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ xảy ra.

Ví dụ

Chủ nhật, An thường lên thư viện hoặc về quê
Chủ nhật này, An không về quê

Suy ra: Chủ nhật này, An lên thư viện

5. Quy tắc nối liền

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{r} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Ví dụ

Hôm nay An học bài.
Hôm nay An phụ mẹ nấu ăn.

Suy ra: Hôm nay An học bài và phụ mẹ nấu ăn.

6. Quy tắc đơn giản

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{r} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Ví dụ

Hôm nay An đi học Toán rời rạc và học Anh văn.

Suy ra: Hôm nay An học Toán rời rạc.

7. Qui tắc mâu thuẫn

(chứng minh bằng phản chứng)

Ta có tương đương logic

$$\left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n\right) \rightarrow h\right] \Leftrightarrow \left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg h\right) \rightarrow 0\right]$$

Để chứng minh vế trái là một hằng đúng, ta chứng minh nếu thêm phủ định của *h* vào các tiền đề thì được một mâu thuẫn.

Ví dụ. Cho a, b, c là 3 đường thẳng phân biệt và a//c và b//c chứng minh a//b.

7. Qui tắc mâu thuẫn

$$\left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n\right) \rightarrow h\right] \Leftrightarrow \left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg h\right) \rightarrow 0\right]$$

Dạng sơ đồ

$$\begin{array}{r} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \\ \hline \therefore h \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \\ \neg h \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

7. Qui tắc mâu thuẫn

Hãy chứng minh:

$$
\begin{array}{l}
p \to r \\
\neg p \to q \\
q \to s \\
\hline
\therefore \neg r \to s
\end{array}
$$

Cm bằng phản chứng.

$$
\begin{array}{l}
p \to r \\
\neg p \to q \\
q \to s \\
\neg r \\
\neg s \\
\hline
\therefore 0
\end{array}
$$

8. Qui tắc chứng minh theo trường hợp

Dựa trên hằng đúng:

$$\left[(p \to r) \wedge (q \to r)\right] \to \left[(p \vee q) \to r\right]$$

Ý nghĩa: nếu p suy ra r và q suy ra r thì p hay q cũng có thể suy ra r.

- Chứng minh rằng: $f(n)=n^3+2n$ luôn chia hết cho 3.

9. Phản ví dụ

Để chứng minh một phép suy luận là sai hay

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$$

không là một hằng đúng.

Ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ.

Suy luận sau có đúng ko?

Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe.

Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc.

Nhưng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ.

Giải

p: ông Minh được tăng lương.

q: ông Minh nghỉ việc.

r: vợ ông Minh mất việc.

s: gia đình phải bán xe.

t: vợ ông hay đi làm trễ.

$$\neg p \to q$$
$$q \wedge r \to s$$
$$t \to r$$
$$\frac{p}{\therefore \neg s \to \neg t}$$

Suy luận trên không đúng

Phản ví dụ

s=0
t=1
p=1
q=0
r=1

Ví dụ

Chứng minh suy luận sau:

$$p \to (q \to r)$$

$$p \vee s$$

$$t \to q$$

$$\overline{s}$$

$$\therefore\ \overline{r} \to \overline{t}$$

Áp dụng các Qui tắc suy diễn

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \bar{s} \\ \hline \therefore\ \bar{r} \to \bar{t} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p \vee s \\ \bar{s} \\ \hline \therefore\ p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \\ \hline \therefore\ q \to r \end{array} \qquad \begin{array}{c} t \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\ t \to r \end{array}$$

Theo luật logic, ta có

$$t \to r \Leftrightarrow \bar{r} \to \bar{t}$$

Ví dụ khác

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{r} \vee s \\ p \vee r \\ \hline \therefore \overline{q} \to s \end{array}$$

Ví dụ khác

Kiểm tra suy luận sau:

$$
\begin{array}{l}
p \\
p \to r \\
p \to (q \lor \overline{r}) \\
\overline{q} \lor \overline{s} \\
\hline
\therefore s
\end{array}
$$

Bài tập

- Dùng quy tắc thay thế để kiểm tra dạng mệnh đề sau là hằng đúng.

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\neg r \rightarrow \neg(p \vee q)]$$

Vị từ và lượng từ
(Logic vị từ)

Logic vị từ

1. Định nghĩa Vị từ là một khẳng định p(x,y,..), trong đó x,y...là các biến thuộc tập hợp A, B,… cho trước sao cho:

- Bản thân p(x,y,..) không phải là mệnh đề.
- Nếu thay x,y,… thành giá trị cụ thể thì p(x,y,..) là mệnh đề.

Ví dụ. Các phát biểu sau là vị từ (chưa là mệnh đề)

- p(n) = "n +1 là số nguyên tố".
- q(x,y) = "$x^2 + y = 1$" .
- r(x,y,z) = "$x^2 + y^2 > z$".

Khi thay các giá trị cụ thể của n,x,y,z thì chúng là các MĐ.

Vị từ (Hàm mệnh đề)

- Ví dụ:
  - Cho Q(x, y) là hàm mệnh đề xác định câu x= y+3. Hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề Q(1,2) và Q(3,0)?
  - Q(1,2) là sai. Q(3,0) là đúng.

2. Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ $p(x)$, $q(x)$ theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề

- *Phủ định* $\neg p(x)$
- *Phép nối liền* $p(x) \wedge q(x)$
- *Phép nối rời* $p(x) \vee q(x)$
- *Phép kéo theo* $p(x) \to q(x)$
- *Phép kéo theo hai chiều* $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Logic vị từ

Khi xét một mệnh đề p(x) với x $\in$ A. Ta có các trường hợp sau

- TH1. Khi thay x bởi 1 phần tử a tùy ý$\in$ A, ta có p(a) đúng.
- TH2. Với một số giá trị a $\in$ A, ta có p(a) đúng.
- TH3. Khi thay x bởi 1 phần tử a tùy ý$\in$ A, ta có p(a) sai.

Ví dụ. Cho các vị từ p(x) sau với x$\in$**R**

- p(x) = "x^2 +1 >0" đúng với x tuỳ ý (với mọi x).
- p(x) = "x^2 -2x+1=0" chỉ đúng với x = 1.
- p(x) = "x^2 -2x+3=0" sai với x tuỳ ý (với mọi x).

Lượng từ

- Là phương pháp để biến một vị từ (hàm mệnh đề) thành một mệnh đề mà *không cần phải kiểm chứng mọi giá trị chân lý* của hàm mệnh đề tương ứng với các giá trị của biến thuộc miền đang xét.
- Hai lượng từ quan trọng:
  – lượng từ với mọi ($\forall$),
  – lượng từ tồn tại ($\exists$).

Lượng từ

Định nghĩa. Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) như sau:

- Mệnh đề *"Với mọi x thuộc A, p(x)"*, kí hiệu bởi

"$\forall x \in A, p(x)$",

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$.

- Mệnh đề "*Tồn tại (ít nhất) hay có (ít nhất) một x thuộc A, p(x)*" kí hiệu bởi **:**

"$\exists x \in A, p(x)$" ,

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị $x = a_0$ nào đó sao cho mệnh đề $p(a_0)$ đúng.

Lượng từ

∀**:** *được gọi là lượng từ* ***phổ dụng (với mọi)***

∃ **:** *được gọi là lượng từ* ***tồn tại***

Ví dụ. Các mệnh đề sau đúng hay sai

- "$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$"
- "$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$"
- "$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \geq 2x$"
- "$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 < 0$"

Mệnh đề lượng từ hoá

Định nghĩa. Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Ví dụ 1

- Mệnh đề "**$\forall x \in R, \forall y \in R, x + 2y < 1$**" đúng hay sai?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0$, $y_0 = 1 \in R$ mà $x_0 + 2y_0 \geq 1$.

- Mệnh đề "**$\forall x \in R, \exists y \in R, x + 2y < 1$**" đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với mỗi $x = a \in R$, tồn tại $y_a \in R$ như $y_a = -a/2$, sao cho $a + 2y_a < 1$.

Ví dụ 2

- Mệnh đề "$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$" đúng hay sai

Mệnh đề sai vì không thể có $x = a \in R$ để bất đẳng thức $a + 2y < 1$ được thỏa với mọi $y \in R$ (chẳng hạn, $y = -a/2 + 2$ không thể thỏa bất đẳng thức này).

- Mệnh đề "$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$" **đúng hay sai?**

Mệnh đề đng vì tồn tại $x_0 = 0$, $y_0 = 0 \in$ **R** chẳng hạn thỏa $x_0 + 2y_0 < 1$.

Logic vị từ

Định lý. Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:

1) "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
2) "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
3) "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Chiều đảo của 3) nói chung không đúng.

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ p(x,y,..) có được bằng các thay ∀ thành ∃, thay ∃ thành ∀ và vị từ p(x,y,..) thành ¬ p(x,y,..).

Với vị từ theo 1 biến ta có :

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Với vị từ theo 2 biến.

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Ví dụ phủ định các mệnh đề sau

- "$\forall x \in A, 2x + 1 \leq 0$"

- "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R, |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$".

Đặc biệt hóa phổ dụng

Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng:

Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hóa trong đó một biến $x \in A$ bị buộc bởi lượng từ phổ dụng $\forall$, khi ấy nếu thay thế x bởi $a \in A$ ta sẽ được một mệnh đề đúng

Ví dụ:

“Mọi người đều chết”
“Socrate là người”
Vậy “Socrate cũng chết”

$$\begin{array}{l} \forall x \in A,\ p(x) \\ a \in A \\ \hline \therefore\ p(a) \end{array}$$

Nhắc lại lượng từ

Giá trị chân lý của lượng từ ∀, ∃

$\forall x\ P(x)$	P(x) đúng với mọi x	Có một giá trị của x để P(x) sai
$\exists x\ P(x)$	Có một giá trị của x để P(x) đúng	P(x) sai với mọi x

- **Ứng dụng:**
  - Dịch những câu thông thường thành biểu thức logic.

Dịch những câu thông thường thành biểu thức logic

- <u>Ví dụ 1</u>:
  - "*Bạn không được lái xe máy nếu bạn cao dưới 1.5 mét trừ phi bạn trên 18 tuổi*".
- <u>Lời giải</u>:
  - p : "Bạn được lái xe máy".
  - q : "Bạn cao dưới 1.5m".
  - r : "Bạn trên 18 tuổi".
  - => Câu hỏi trên được dịch là: $(q \wedge \overline{r}) \to \overline{p}$

Dịch những câu thông thường thành biểu thức logic

- Ví dụ 2:
  - "*Tất cả các sinh viên học tin học đều học môn toán học rời rạc*".
- Lời giải: Gọi
  - P(x) là câu "*x* cần học môn toán học rời rạc",
  - *x* được xác định trong miền không gian của các sinh viên học tin học.
  - Khi đó chúng ta có thể phát biểu: $\forall x\ P(x)$.

Dịch những câu thông thường thành biểu thức logic

- Ví dụ 3:
  - *"Có một sinh viên ở lớp này ít nhất đã ở tất cả các phòng của ít nhất một nhà trong ký túc xá".*
- Lời giải:
  - tập sinh viên trong lớp là không gian xác định sinh viên *x*,
  - tập các nhà trong ký túc xá là không gian xác định căn nhà *y*,
  - tập các phòng là không gian xác định phòng *z*.
  - P(z,y) là "*z thuộc y*", Q(x,z) là "*x đã ở z*".
  - Khi đó chúng ta có thể phát biểu:

$$\exists x \exists y \forall z \ (P(z,y) \rightarrow Q(x,z))$$

Bài tập

Dịch câu thành biểu thức logic

- BT1: "Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất“.
- BT2: "Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh con, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào khác“.
- BT3: Xét các câu sau. Hai câu đầu tiên là tiền đề và câu ba là kết luận. Toàn bộ tập hợp 3 câu này được gọi là một suy lý.
  - "Tất cả sư tử Hà Đông đều hung dữ".
  - "Một số sư tử Hà Đông không uống cà phê".
  - "Một số sinh vật hung dữ không uống cà phê".