# PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

## Bài giảng điện tử

TS. Lê Xuân Đại

**Trường Đại học Bách Khoa TP HCM**
**Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng**
**Email: ytkadai@hcmut.edu.vn**

TP. HCM — 2013.

- Phương trình vi phân đóng vai trò quan trọng của việc ứng dụng toán học trong những lĩnh vực khoa học khác vì nhiều quá trình thực tế được mô tả bằng phương trình vi phân 1 cách dễ dàng và đầy đủ.
- Tuy nhiên, để hiểu được những ứng dụng của phương trình vi phân, chúng ta cần nắm vững những kiến thức về khoa học tự nhiên (vật lý, hóa học, sinh học,v.v), kỹ thuật, v.v.

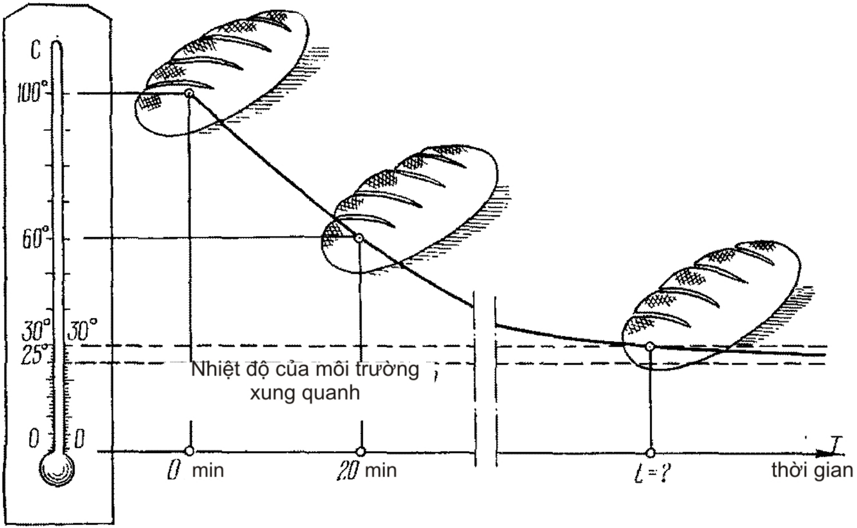
## Định nghĩa

*Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 1* $f(x, y, y') = 0$ *là biểu thức tổng quát của tập hợp vô hạn các hàm, thỏa mãn phương trình vi phân. Nó có thể được xác định ở dạng tường minh* $y = F(x, C)$ *hoặc dạng ẩn* $\Phi(x, y, C) = 0$, *trong đó* $C$ *là hằng số tùy ý.*

# Bài toán làm lạnh vật thể

## Ví dụ

*Nhiệt độ của bánh mỳ mới ra lò sẽ giảm từ* $100^o C$ *xuống* $60^o C$ *trong vòng* $20\boldsymbol{min}$. *Nhiệt độ của môi trường xung quanh là* $25^o C$. *Hỏi sau bao nhiêu phút từ lúc lấy bánh mỳ ra, nhiệt độ của bánh mỳ hạ xuống còn* $30^o C$?


C
100°
60°
30°
30°
25°
0
0
Nhiệt độ của môi trường
xung quanh
0 min
20 min
t = ?
T
thời gian

1. Tốc độ làm lạnh vật thể là sự giảm nhiệt độ $T$ trong 1 đơn vị thời gian $\tau$ và được biểu diễn bởi đạo hàm $\dfrac{dT}{d\tau}$.
2. Theo định luật Newton, tốc độ làm lạnh vật thể tỉ lệ với hiệu số nhiệt độ của vật thể $T$ và của môi trường xung quanh $t$. Phương trình vi phân quá trình làm lạnh bánh mỳ là

$$\frac{dT}{d\tau} = k(T - t), \quad \text{k-hệ số tỉ lệ}$$

# Giải phương trình vi phân

$$\frac{dT}{T-t} = kd\tau \Leftrightarrow \frac{dT}{T-25} = kd\tau$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T-25} = k\int d\tau \Rightarrow \ln|T-25| = k\tau + \ln C$$

$$\Rightarrow T - 25 = Ce^{k\tau}$$

Hằng số $C$ được tìm dựa vào điều kiện khi $\tau = 0min$ thì $T = 100^oC$. Khi đó $100 - 25 = Ce^{k.0} \Rightarrow C = 75$

Hệ số tỉ lệ $k$ được tìm dựa vào điều kiện khi $\tau = 20min$ thì $T = 60^o C$. Khi đó

$$60 - 25 = 75e^{k.20} \Rightarrow e^k = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}$$

Vậy $T = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25$. Do đó khi $T = 30^o C$ thì $30 = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25 \Rightarrow \tau = \dfrac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx 71min$

# Phương trình vi phân tách biến

## Định nghĩa

*Phương trình vi phân có dạng*

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \qquad (1)$$

*được gọi là phương trình vi phân tách biến.*

Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

## Ví dụ

*Tìm nghiệm tổng quát của phương trình*
$xdx + (y+1)dy = 0$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\int xdx + \int (y+1)dy = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = C$$

## Phương trình vi phân có dạng

$$f_1(x).g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

Nếu như $f_1(x), f_2(x), g_1(y), g_2(y) \neq 0$ thì ta chia 2 vế của phương trình đã cho cho $f_2(x)g_1(y)$. Khi đó

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

$$\Rightarrow \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

## Ví dụ

*Giải phương trình* $x(y^2-4)dx + ydy = 0.$

Chia 2 vế của phương trình đã cho cho $y^2-4 \neq 0$, ta được

$$xdx + \frac{ydy}{y^2-4} = 0.$$

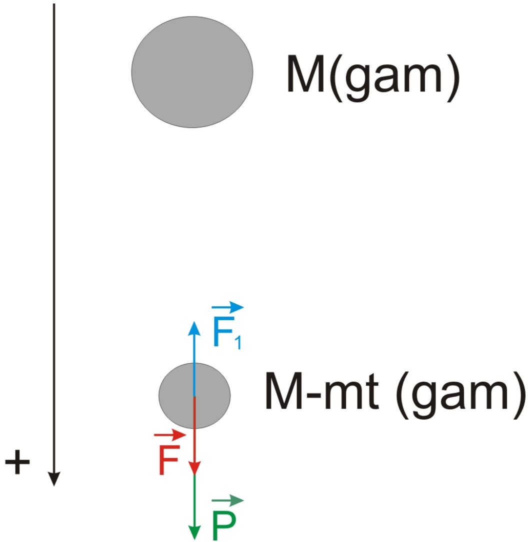
Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$x^2 + \ln|y^2-4| = \ln|C| \Rightarrow y^2 - 4 = Ce^{-x^2}$$

# Vật thể rơi với khối lượng thay đổi

## Ví dụ

*Quan sát hiện tượng mưa đá. Hạt mưa đá có khối lượng $M$ (gam), rơi tự do trong không trung, sẽ bị bốc hơi đều mỗi giây giảm $m$ (gam). Lực cản của không khí tỉ lệ với vận tốc rơi của hạt mưa. Hãy tìm mối quan hệ giữa vận tốc rơi của hạt mưa và thời gian rơi của hạt mưa, biết rằng tại thời điểm ban đầu vận tốc của hạt mưa là $0(m/s)$ và hệ số tỉ lệ $k \neq m$.*


M(gam)
$\vec{F}_1$
M-mt (gam)
$\vec{F}$
+
$\vec{P}$

- Hạt mưa đá bốc hơi đều nên tại thời điểm $t$ khối lượng của nó là $M - mt$ và trọng lực của nó là $(M - mt)g$, với $g = 9,8m/s^2$ là gia tốc trọng trường. Trọng lực tính theo chiều dương, tức là hướng xuống.
- Lực cản của không khí $F_1 = -k.v$ hướng lên trên. Lực tác động lên hạt mưa là $F = (M - mt)g - kv$ và theo định luật 2 Newton ta cũng có $F = (M - mt)\dfrac{dv}{dt}$

- Phương trình vi phân thu được

$$(M - mt)\frac{dv}{dt} = (M - mt)g - kv$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{M - mt}.v = g$$

- Giải phương trình này ta được
$v = \dfrac{g(M - mt)}{k - m} + C.(M - mt)^{\frac{k}{m}}$ với $C$ là hằng số tùy ý.

- Tìm $C$ theo điều kiện $t = 0$ thì $v = 0$ ta được $0 = \dfrac{gM}{k-m} + C.M^{\frac{k}{m}}$. Từ đó suy ra

$$C = \frac{gMM^{-\frac{k}{m}}}{m-k} = \frac{gM^{1-\frac{k}{m}}}{m-k}$$

-

$$v = \frac{g(M-mt)}{k-m} + C.(M-mt)^{\frac{k}{m}} =$$

$$= \frac{g(M-mt)}{k-m} + \frac{gM^{1-\frac{k}{m}}}{m-k}.(M-mt)^{\frac{k}{m}} =$$

$$= \frac{g}{m-k}\left(-M + mt + \left(1 - \frac{m}{M}t\right)^{\frac{k}{m}} M\right)$$

# Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

## Định nghĩa

*Phương trình vi phân có dạng*

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x) \qquad (2)$$

*gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.*

Nếu $Q(x) \equiv 0$ thì phương trình (2) được gọi là phương trình thuần nhất. Nếu $Q(x) \neq 0$ thì phương trình (2) được gọi là phương trình không thuần nhất.

# Phương pháp Lagrange

1. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng $y = Ce^{-\int P(x)dx}$
2. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất có dạng $y = C(x).e^{-\int P(x)dx}$, với $C(x)$ là hàm khả vi liên tục (phương pháp Lagrange). Thay nghiệm này vào (2) ta được

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\Rightarrow C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C$$

## Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp một

$$y = e^{-\int P(x)dx}.\left(\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C\right).$$

# Phương pháp Euler

Nhân 2 vế của phương trình (2) cho $e^{\int P(x)dx}$ ta được

$$y'e^{\int P(x)dx} + P(x)y.e^{\int P(x)dx} = Q(x).e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow \left(y.e^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x).e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow y.e^{\int P(x)dx} = \int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx + C$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}.\left[\int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

# Ví dụ

*Giải phương trình* $y' + \dfrac{1}{x}y = 3x$ *với điều kiện* $y(1) = 1$.

$$P(x) = \frac{1}{x},\ Q(x) = 3x.$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}.\left[\int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

$$= e^{-\int \frac{1}{x}dx}.\left[\int 3x.e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right] = \frac{1}{x}(x^3 + C)$$

Với điều kiện đầu

$x = 1, y = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{1}(1^3 + C) \Rightarrow C = 0$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $y = x^2$

## Ví dụ

*Giải phương trình* $2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0$

$$2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{y}{2}$$

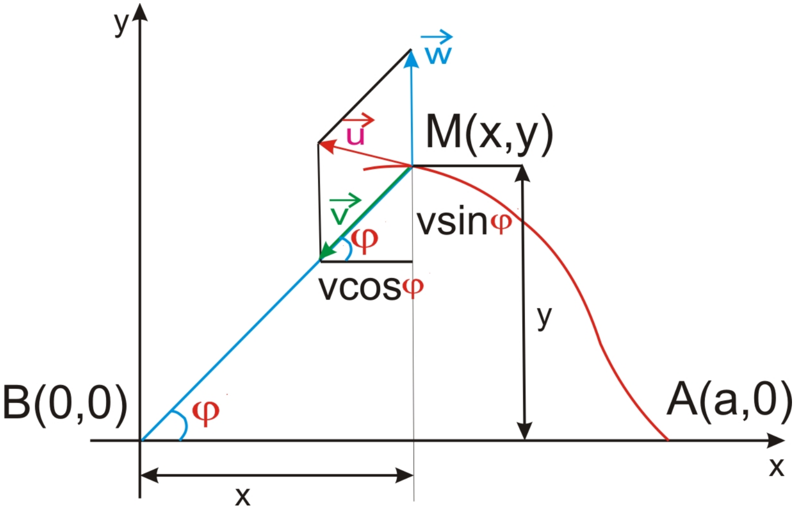
$$\Rightarrow x = e^{\int \frac{1}{y}dy}.\left[\int -\frac{y}{2}.e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy + C\right] =$$

$$= y\left(-\frac{y}{2} + C\right)$$

# Quỹ đạo bay của máy bay

## Ví dụ

*Phi công lái máy bay từ thành phố* $A$ *đến thành phố* $B$, *nằm về hướng Tây theo ngang so với thành phố* $A$. *Hãy tìm phương trình quỹ đạo bay của máy bay, biết vận tốc của nó là* $\mathbf{v(km/h)}$ *và vận tốc gió thổi từ hướng Nam với vận tốc* $\mathbf{w(km/h)}$. *Khoảng cách từ thành phố* $A$ *đến thành phố* $B$ *theo phương ngang là* $\mathbf{a(km)}$



y
w
M(x,y)
u
v
vsinφ
φ
vcosφ
y
B(0,0)
φ
A(a,0)
x
x

- Hướng thật sự của véc-tơ vận tốc của máy bay tại thời điểm $t$ là $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Véc-tơ $\overrightarrow{u}$ là véc-tơ tiếp tuyến với quỹ đạo bay của máy bay tại điểm $M$
- Chiếu véc-tơ vận tốc $\overrightarrow{u}$ xuống trục $Ox$ ta được

$$u'_x = \frac{dx}{dt} = -v.\cos\varphi$$

- Chiếu véc-tơ vận tốc $\overrightarrow{u}$ xuống trục $Oy$ ta được

$$u'_y = \frac{dy}{dt} = -v.\sin\varphi + w$$

Theo hình vẽ, ta có

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-v.x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-v.y}{\sqrt{x^2+y^2}} + w$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-vy + w\sqrt{x^2+y^2}}{-vx} = \frac{y - \frac{w}{v}\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y}{x} - \frac{w}{v}\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

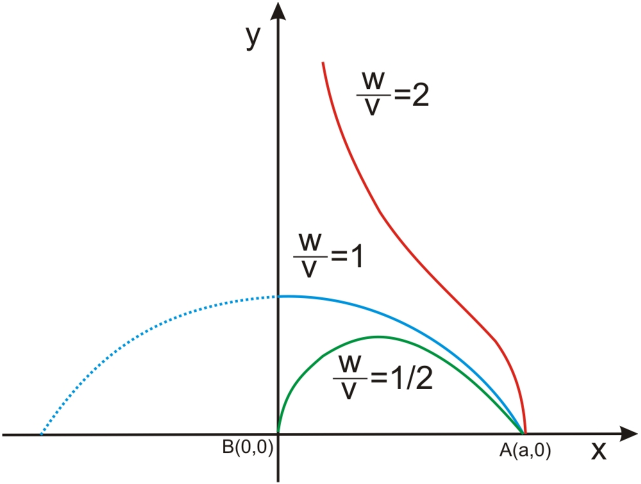
Giải phương trình vi phân với điều kiện khi $t = 0$ thì $x = a, y = 0$ ta được

$$y = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{w}{v}} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{w}{v}}\right]$$

**Biện luận:** Khi $w = v$ thì $y = \dfrac{a}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Do đó khi $x \to 0$ thì $y \to \dfrac{a}{2}$ và máy bay sẽ không đến được $B$.

Khi $\dfrac{w}{v} > 1$ thì với $x \to 0$ ta có $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{1-\frac{w}{v}} \to \infty$. Do đó khi $x \to 0$ thì $y \to \infty$ và máy bay cũng sẽ không đến được $B$.

Khi $\dfrac{w}{v} < 1$ thì với $x \to 0$ ta có $y \to 0$ và máy bay sẽ đến được thành phố $B$.


y
w/v=2
w/v=1
w/v=1/2
B(0,0)
A(a,0)
x

# Phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

## Định nghĩa

*Phương trình vi phân có dạng*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

*được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp cấp một.*

# Phương pháp giải

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$. Đưa phương trình (3) về dạng phương trình tách biến

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

## Ví dụ

*Giải phương trình* $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$ *với điều kiện đầu* $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'.x + u$. Khi đó phương trình đã cho viết lại

$$u'.x + u = u + \sin u \Rightarrow \frac{du}{dx}.x = \sin u \Rightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln C$$

$$\Rightarrow \tan\frac{u}{2} = Cx.$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát

$\tan\dfrac{y}{2x} = Cx.$

Với điều kiện đầu $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$, ta thay $x = 1, y = \dfrac{\pi}{2}$ ta có

$$\tan\frac{\pi}{4} = C.1 \Rightarrow C = 1.$$

Vậy nghiệm thỏa điều kiện ban đầu: $\tan\dfrac{y}{2x} = x.$

Phương trình có dạng

$$y' = f(x, y),$$

trong đó $f(x, y)$ là hàm đẳng cấp bậc 0, có nghĩa là $f(tx, ty) = t^0.f(x, y) = f(x, y)$

## Ví dụ

*Giải phương trình* $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

Phương trình đã cho viết lại

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy} = f(x, y).$$

$f(x, y)$ là hàm đẳng cấp bậc 0 vì $f(tx, ty) = -\frac{t^2x^2 + 2t^2xy}{t^2xy} = -\frac{x^2 + 2xy}{xy} = f(x, y).$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u.$

Như vậy phương trình đã cho viết lại

$$u'x + u = -\frac{1}{u} - 2 \Rightarrow x.\frac{du}{dx} = -\frac{1+2u+u^2}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{udu}{(u+1)^2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{udu}{(u+1)^2} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{u+1-1}{(u+1)^2}du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ ta có kết quả cuối cùng

$$\ln|x| + \ln\left|\frac{y+x}{x}\right| + \frac{x}{x+y} = C \Rightarrow \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C.$$

Phương trình vi phân có dạng

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

**Trường hợp 1.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Khi đó hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 & = & 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 & = & 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất là $(x_0, y_0)$.

Đổi biến $X = x - x_0$, $Y = y - y_0 \Rightarrow y' = Y'$.
Phương trình đã cho được viết lại

$$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) \Rightarrow Y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right)$$

là phương trình đẳng cấp.

**Trường hợp 2.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = K.$

Đổi biến $u = a_2x + b_2y \Rightarrow u' = a_2 + b_2y'.$

Phương trình đã cho viết lại

$$\Rightarrow b_2y' = b_2f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow u' - a_2 = b_2.f\left(\frac{Ku + c_1}{u + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = a_2 + b_2.f\left(\frac{Ku + c_1}{u + c_2}\right)$$

là phương trình vi phân tách biến.

## Ví dụ

*Giải phương trình*

$(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0$

Phương trình đã cho viết lại

$$y' = -\frac{2x+y+1}{x+2y-1}$$

và $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Giải hệ $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$
tìm được nghiệm $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

Đổi biến $X = x + 1$, $Y = y - 1 \Rightarrow Y' = y'$. Phương trình đã cho viết lại

$$Y' = \frac{2(X-1)+(Y+1)+1}{(X-1)+2(Y+1)-1} = \frac{2X+Y}{X+2Y} = \frac{2+\frac{Y}{X}}{1+2\frac{Y}{X}}.$$

Đặt $u = \dfrac{Y}{X} \Rightarrow Y = u.X \Rightarrow Y' = u'.X + u.$

$$\Rightarrow u'.X + u = -\frac{2+u}{1+2u} \Rightarrow \frac{(1+2u)du}{u^2+u+1} = -2\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow X^2.(u^2+u+1) = C.$$

Thay $u = \dfrac{Y}{X}$ ta được $Y^2 + XY + X^2 = C$ hay $(y-1)^2 + (x+1)(y-1) + (x+1)^2 = C$

## Ví dụ

*Giải phương trình*

$(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$

Phương trình đã cho viết lại

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y + 2}{2x + 2y - 1}$$

có $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ nên đặt $u = x + y \Rightarrow u' = 1 + y'$

$$\Rightarrow u' - 1 = -\frac{u+2}{2u-1} \Rightarrow u' = \frac{u-3}{2u-1}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u-3}{2u-1} \Rightarrow \frac{(2u-1)du}{u-3} = x$$

$$\Rightarrow \int \frac{2u-1}{u-3} du = \int x dx + C$$

$$\Rightarrow 2u + 5\ln|u-3| = x + C$$

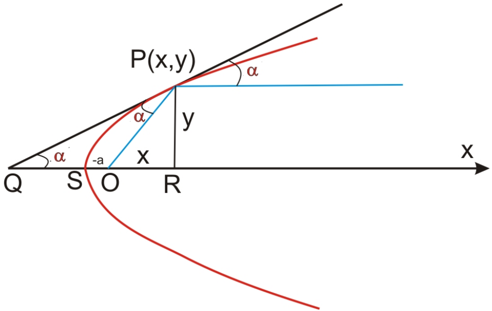
Thay $u = x + y$ ta được

$$x + 2y + 5\ln|x+y-3| = C$$

# Gương parabol

## Ví dụ

*Điểm phát sáng đặt tại điểm* 0. *Hỏi hình dạng của gương phải như thế nào để ảnh của tia sáng khi đi qua gương song song với trục* $Ox$*?*



- Xét đường cong mặt cắt của gương bởi mặt phẳng $xOy$. Góc tới sẽ bằng góc ra gương nên $\triangle OPQ$ là tam giác cân, $OP = OQ = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan\alpha = \dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} =$
$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \Rightarrow \dfrac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$
$\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^2+y^2}) = 1$
$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x + C \Rightarrow y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right)$

Cho $OS = a$. Khi đó với điều kiện $x = -a$ thì $y = 0$ ta được $C = 2a$. Vậy phương trình parabol cần tìm là

$$y^2 = 4a(x + a)$$

# Phương trình vi phân toàn phần

## Định nghĩa

*Phương trình vi phân có dạng*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{4}$$

*trong đó* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, *được gọi là phương trình vi phân toàn phần.*

Nghiệm tổng quát của vi phân toàn phần là

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C,$$

hay

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx = C,$$

trong đó $(x_0, y_0)$ là điểm tùy ý mà $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục tại đó.

## Ví dụ

*Giải phương trình* $(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0.$

Ta có $P(x,y)=x+y-1$, $Q(x,y)=e^y+x$ và $Q'_x=1=P'_y$. Phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.

Nghiệm được tìm theo công thức

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

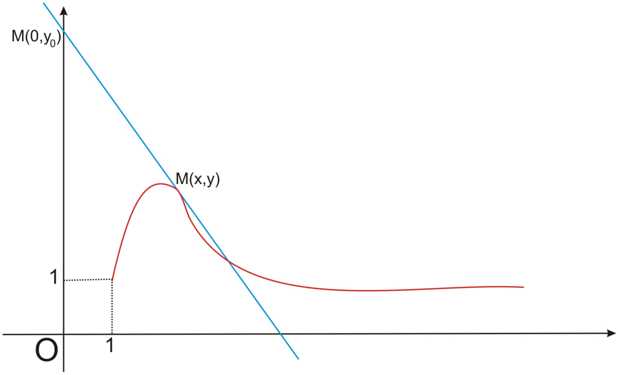
Chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$ ta được

$$\int_0^x (x + y - 1)dx + \int_0^y e^y dy = C$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}x^2 + xy - x\right]_0^x + e^y\Big|_0^y = C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + xy - x + e^y - 1 = C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + xy - x + e^y = C + 1 = C_1$$




Tìm phương trình đường cong đi qua điểm $(1, 1)$ thỏa điều kiện

$$\sqrt{xy} = \frac{y_0}{2y}$$

Giải phương trình vi phân

$$\sqrt{xy} = \frac{y - x.\frac{dy}{dx}}{2y}, \quad y(1) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$$

Nghiệm tổng quát là $x - y(x - C)^2 = 0$. Với điều kiện $y(1) = 1$, ta được $C = 0 \vee C = 2$. Vậy 2 phương trình đường cong cần tìm là $xy = 1$ và $x - y(x - 2)^2 = 0$.

# Phương trình vi phân Bernouli

## Định nghĩa

*Phương trình vi phân có dạng*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \qquad (5)$$

*được gọi là phương trình vi phân Bernouli*

Đặt $z = \frac{y}{y^{\alpha}} = y^{1-\alpha}$. Phương trình (5) trở thành phương trình tuyến tính cấp một

$$z' + (1-\alpha)P(x).z = (1-\alpha)Q(x).$$

## Ví dụ

*Giải phương trình* $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^4.$

Đặt $z = \frac{y}{y^4} = y^{-3}$. Phương trình đã cho trở thành phương trình tuyến tính cấp một

$$z' - 3\frac{1}{x}.z = -3x^2.$$

$$\Rightarrow z = e^{\int \frac{3}{x}dx}.\left(\int e^{\int -\frac{3}{x}dx}.(-3x^2)dx + C\right).$$

$$\Rightarrow z = x^3(-3\ln|x| + C) \Rightarrow y = \frac{1}{x\sqrt[3]{-3\ln x + C}}$$

# Giải phương trình vi phân tách biến

1. $x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0$. **ĐS.** $\frac{1}{3}\ln|x^3-1| + y - 2\ln|y+1| = C$.
2. $(xy-x)dx + (xy+x-y-1)dy = 0$. **ĐS.** $x + \ln|x-1| + y + 2\ln|y-1| = C$.

# Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một

1. $y' = y\cot x + \sin x.$
2. $(x^2+1)y' + 4xy = 3.$
3. $(1-x)(y'+y) = e^{-x}, y(2) = 1.$
4. $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}, y(1) = 0.$
5. $(x+3)y' = \arctan x.y + \sqrt{x^2+9}.$
6. $2y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{4x^2}{y}.$
7. $y' - 3y = 4e^{3x}\cos 5x.$

# Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một

1. $y' - 4y = (8x^3 - 12x^2 + 10x - 3)e^{4x}$.
2. $y' = \dfrac{3y}{x} + 2e^{2x}x^3$.
3. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{6\sin x}{x^3}$.

# Giải phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

1. $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0; y(0) = 2$
2. $(x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0$
3. $(x-y+4)dy + (x+y-2)dx = 0$

# Giải phương trình vi phân toàn phần

1. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0.$
**ĐS.** $e^x + xy + x\sin y + e^y = C.$

# Giải phương trình vi phân Bernouli

1. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 4\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\arctan x.$

# THANK YOU FOR ATTENTION