

Định luật Gauss

Lê Quang Nguyên

www4.hcmut.edu.vn/~leqnguyen

nguyenquangle59@yahoo.com

Nội dung

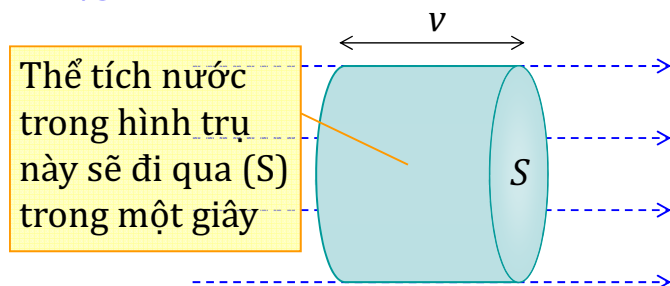
1. Thông lượng dòng nước
2. Thông lượng điện trường (điện thông)
3. Định luật Gauss
4. Dạng vi phân của định luật Gauss
5. Tìm điện trường bằng định luật Gauss

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

1. Thông lượng dòng nước – 1

- Xét dòng nước thẳng đều vận tốc v , và bề mặt diện tích S vuông góc dòng chảy.
- Thông lượng nước qua (S) = thể tích nước qua (S) trong một đơn vị thời gian:

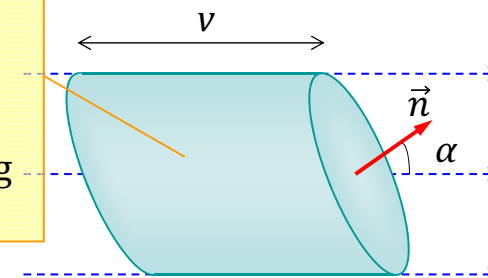
$$\Phi = vS$$



1. Thông lượng dòng nước – 2

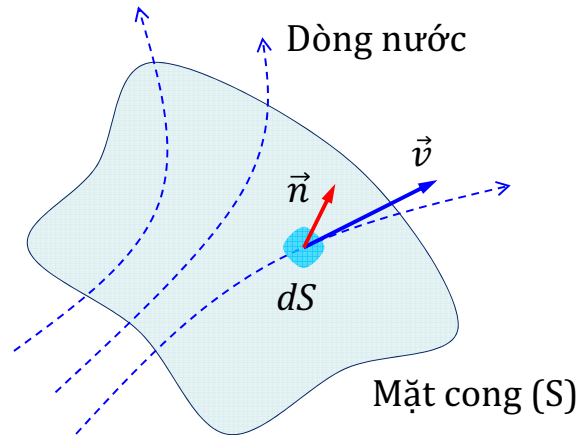
- Nếu (S) tạo một góc với dòng nước :
 $\Phi = vS \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{n}S$
- Φ có thể âm hay dương tùy theo góc α .

Thể tích nước trong hình trụ nghiêng này sẽ đi qua (S) trong một giây.



1. Thông lượng dòng nước – 3

- Dòng nước bất kỳ, mặt cong (S) bất kỳ.
- Chia (S) làm nhiều phần nhỏ diện tích dS .



cuu duong than cong . com

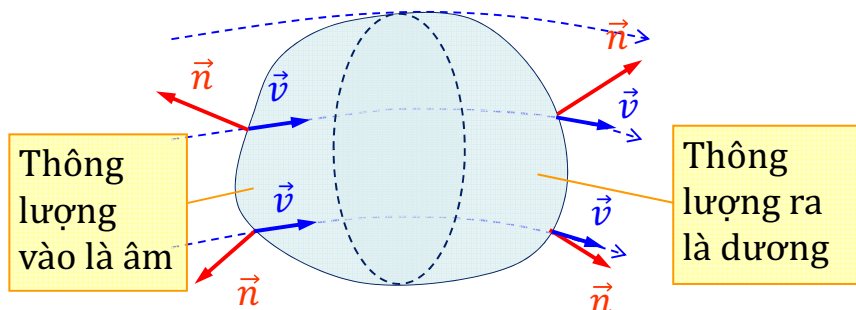
1. Thông lượng dòng nước – 4

- Có thể coi mỗi phần dS là phẳng, và dòng chảy qua đó là thẳng đều. Do đó,
- thông lượng qua dS là:
$$d\Phi = v dS \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$
- v, n là vector vận tốc và pháp vector trên dS .
- Thông lượng qua cả mặt cong (S) sẽ là tổng thông lượng qua tất cả các phần dS :

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

1. Thông lượng dòng nước – 5

- Nếu (S) là mặt kín thì ta quy ước **chọn n hướng ra ngoài mặt (S)**.
- Do đó thông lượng nước qua một mặt kín = **thông lượng ra – thông lượng vào**.



2. Thông lượng điện trường – Định nghĩa

- Tương tự, ta định nghĩa thông lượng điện trường qua một mặt (S) bất kỳ:

$$\Phi_S = \int_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

Đơn vị $V.m$

- với \vec{E}, \vec{n} là vector điện trường và pháp vector trên dS .
- Điện thông có thể âm hay dương tùy theo góc giữa \vec{E} và \vec{n} .
- Đối với mặt (S) kín, pháp vector cũng được chọn hướng ra ngoài.

2. Thông lượng điện trường – Ý nghĩa

- Điện thông qua $dS \perp$ điện trường: $d\Phi = EdS$
- EdS = số đường sức đi qua dS .
- Do đó điện thông Φ qua (S) bằng số đường sức qua (S).
- $\Phi > 0$ khi các đường sức đi theo chiều của pháp vector,
- $\Phi < 0$ khi chúng theo chiều ngược lại.
- Φ qua một mặt kín = số đường sức ra – số đường sức vào.

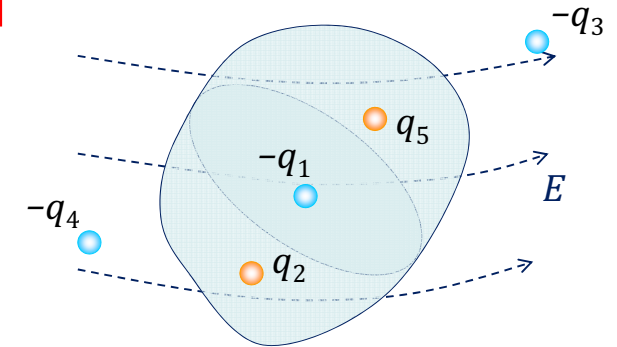
E = mật độ đường
sức trên bề mặt $\perp E$

3a. Định luật Gauss – 1

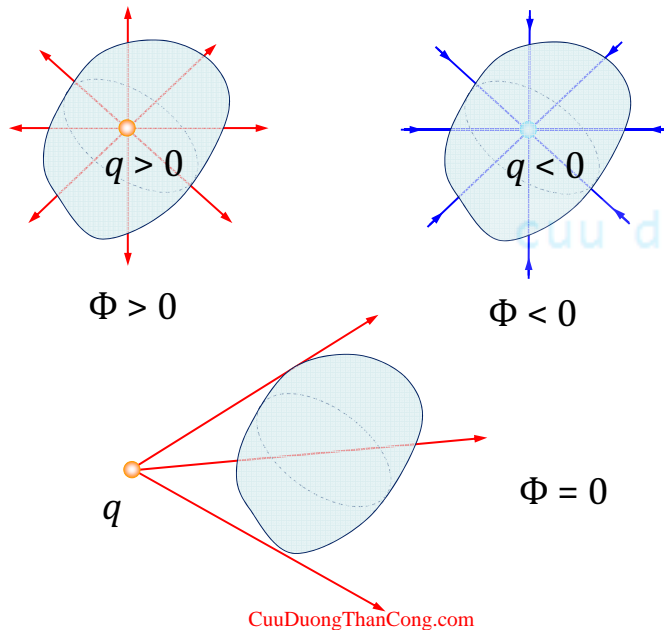
- Điện thông qua mặt kín (S) bằng tổng các điện tích trong (S) chia cho ϵ_0 :

$$\Phi_S = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

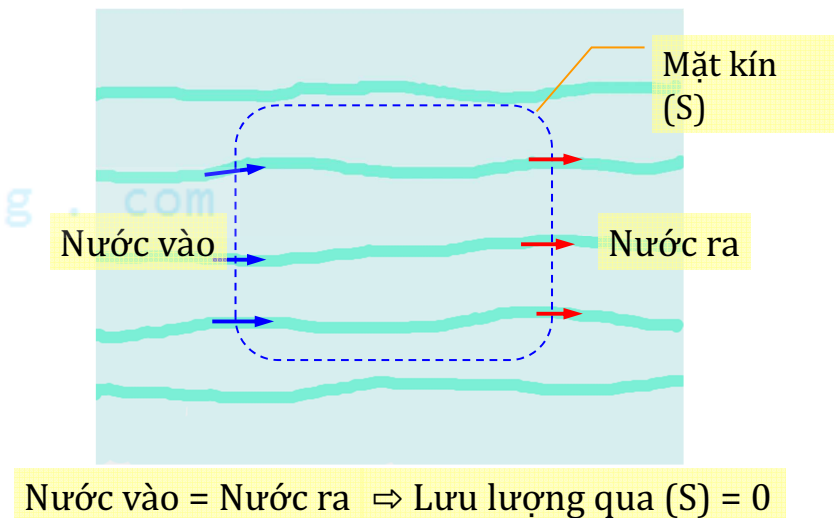
$$Q_S = q_2 + q_5 - q_1$$



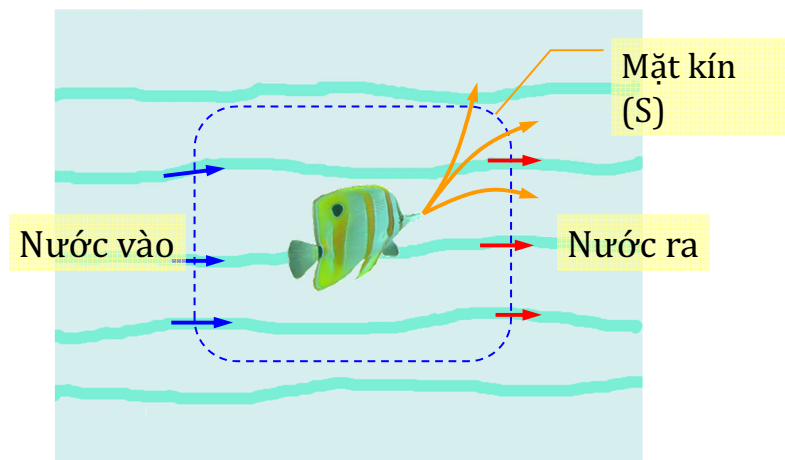
3a. Định luật Gauss – 2



3b. Định luật Gauss & dòng nước – 1

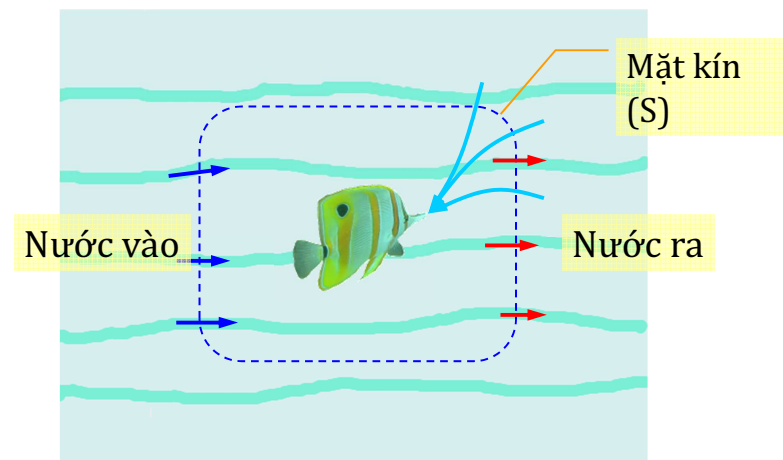


3b. Định luật Gauss & dòng nước – 2



Nước vào < Nước ra \Rightarrow Lưu lượng qua (S) > 0
Cá phun nước ~ điện tích dương

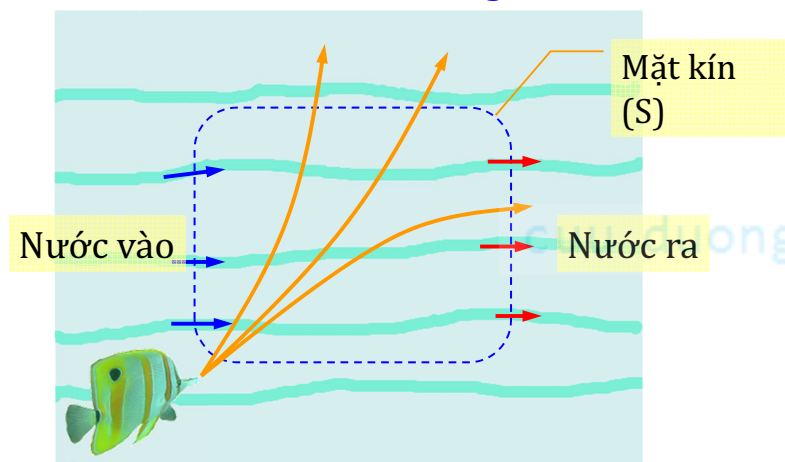
3b. Định luật Gauss & dòng nước – 3



Nước vào > Nước ra \Rightarrow Lưu lượng qua (S) < 0
Cá uống nước ~ điện tích âm

cuu duong than cong . com

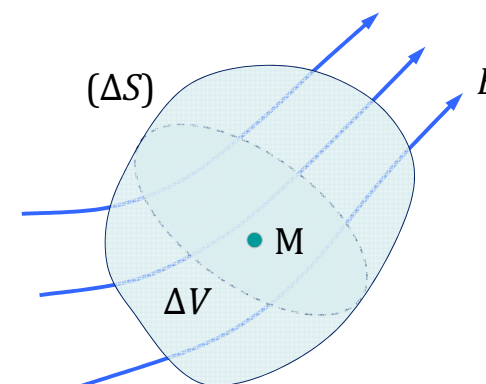
3b. Định luật Gauss & dòng nước – 4



Nước vào = Nước ra \Rightarrow Lưu lượng qua (S) = 0
Cá ở ngoài không thể thay đổi lưu lượng.

4a. Divergence (div)

- (ΔS) là mặt kín nhỏ bao quanh M.
- Thể tích giới hạn trong (ΔS) là ΔV ,
- điện thông qua (ΔS) là $\Delta \Phi$.



4a. Divergence (div) (tt)

- divergence của điện trường tại M:

$$\text{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$$

- Ý nghĩa: $\text{div}E$ là điện thông tính trên một đơn vị thể tích.
- Trong tọa độ Descartes $\text{div}E$ có biểu thức:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

4b. Dạng vi phân của định luật Gauss

- Áp dụng định luật Gauss cho (ΔS) , trong đó có chứa điện tích ΔQ :

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{div}E = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad \text{Mật độ điện tích } \rho$$

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

cuu duong than cong . com

Bài tập 1

Một mặt cầu tâm O bán kính R được đặt trong điện trường

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r}$$

với \vec{r} là vector vị trí vẽ từ O, ρ là một hằng số dương. Điện tích chứa trong mặt cầu bằng:

(a) $q = -2\pi\rho R^2$

(b) $q = 2\pi\rho R^2$

(c) $q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$

(d) $q = \frac{1}{2}\pi\rho R^2$

Trả lời BT1 - 1

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r}$$

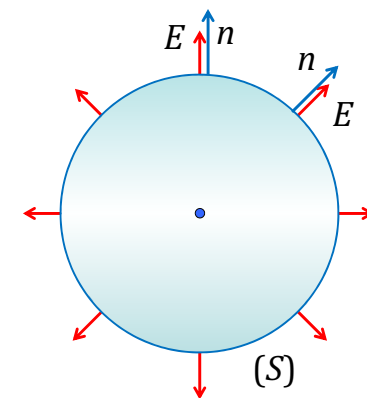
- \vec{E} song song \vec{n} :

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E = \frac{\rho}{2\epsilon\epsilon_0}$$

- Điện thông qua (S):

$$\Phi_S = \int_{(S)} E dS = E \cdot 4\pi R^2$$

$$\Phi_S = \frac{2\pi\rho R^2}{\epsilon\epsilon_0}$$



Trả lời BT1 - 2

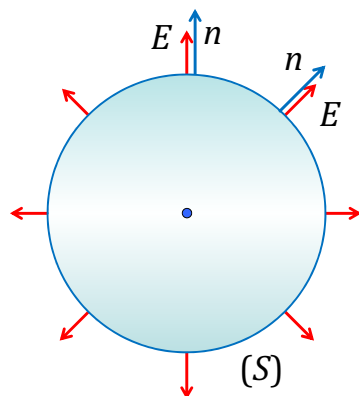
- Định luật Gauss trong điện môi:

$$\Phi_S = \frac{Q_S}{\epsilon\epsilon_0}$$

- Suy ra điện tích trong mặt cầu:

$$Q_S = \epsilon\epsilon_0\Phi_S = 2\pi\rho R^2$$

- Câu trả lời đúng là (b).



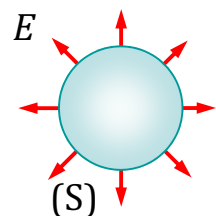
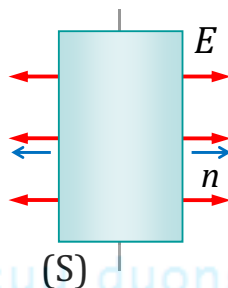
5a. Dây tích điện dài vô hạn

Cho một dây không dẫn điện, dài vô hạn, tích điện đều với mật độ $\lambda > 0$. Tìm điện trường ở khoảng cách r tính từ trục của dây.

cuu duong than cong . com

5a.1

- Điện trường có tính đối xứng trụ.
- Vẽ mặt trụ (S) đồng trục với dây,
- $E \perp$ mặt bên của (S) và,
- có độ lớn không đổi trên đó:
- $\Phi_S = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = ES_{\text{mặt bên}}$



Nhìn từ trên xuống

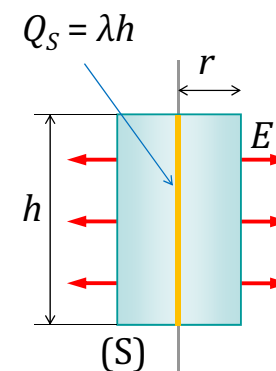
5a.2

- Điện thông qua (S):
 $\Phi_S = E \cdot 2\pi rh$
- Theo định luật Gauss:

$$\Phi_S = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

- Suy ra:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

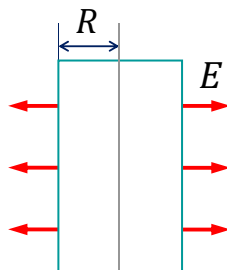


- Phương pháp:
- Chọn **mặt Gauss** (S) có tính đối xứng của hệ, sao cho:
- $\Phi_S = ES$

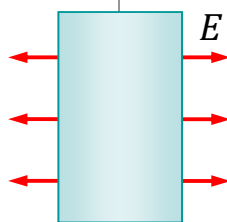
5b. Vỏ trụ và hình trụ dài vô hạn

Vỏ trụ mật độ điện dài λ

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$



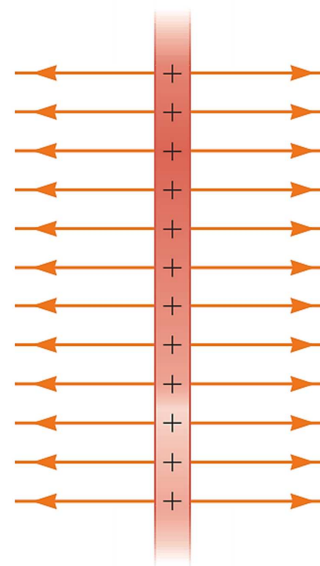
Nhìn ngang



Hình trụ đặc mật độ điện dài λ , mật độ điện khối ρ

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & r \geq R \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0} r & r < R \end{cases}$$

5c. Mặt phẳng vô hạn tích điện đều



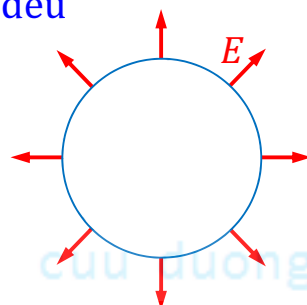
Điện trường đều:

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$$

5d. Vỏ cầu và quả cầu tích điện đều

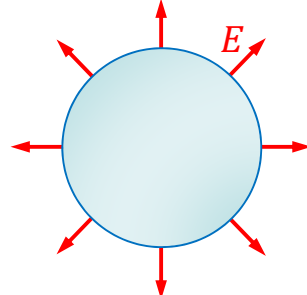
Vỏ cầu điện tích Q

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$



Quả cầu đặc điện tích Q , mật độ ρ

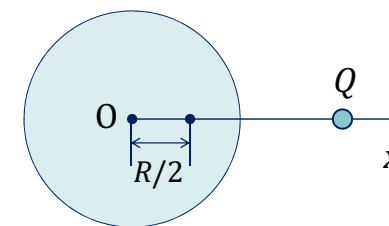
$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & r < R \end{cases}$$



Bài tập 2

Điện tích $Q > 0$ được phân bố đều trong quả cầu bán kính R , tâm O . Đặt một điện tích điểm Q ở vị trí $x = 2R$ trên trục x . Điện trường ở $x = R/2$ là:

- $Q/4\pi\epsilon_0 R^2$
- $Q/8\pi\epsilon_0 R^2$
- $Q/72\pi\epsilon_0 R^2$
- $17Q/72\pi\epsilon_0 R^2$



$$E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R}{2} \quad \rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

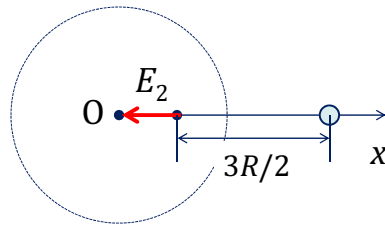
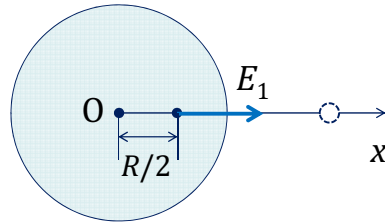
$$E_1 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (3R/2)^2}$$

$$E_2 = \frac{Q}{9\pi\epsilon_0 R^2}$$

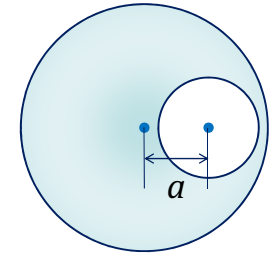
$$E = E_1 - E_2 = \frac{Q}{72\pi\epsilon_0 R^2}$$

Trả lời BT 2



Bài tập 3

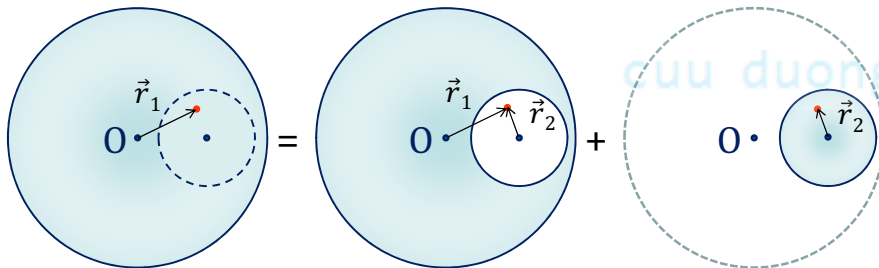
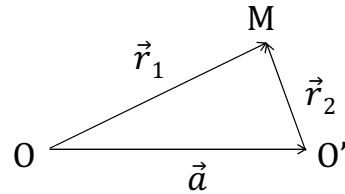
Cho một quả cầu tâm O, tích điện đều với mật độ khối ρ , trong đó có một phần rỗng hình cầu, có tâm O' cách O một đoạn a .



Hãy tìm điện trường trong phần rỗng.

cuu duong than cong . com

Trả lời BT 3 - 1



$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \vec{E}_2$$

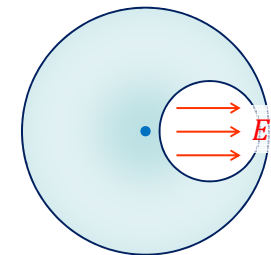
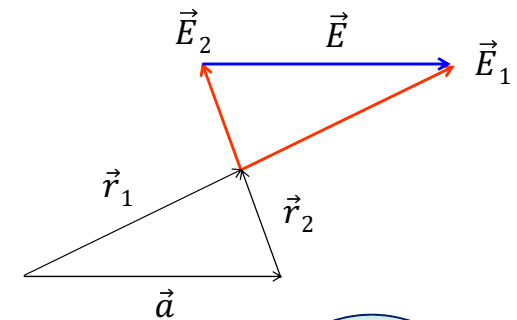
Trả lời BT 3 - 2

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_2$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a} \quad \text{Điện trường đều}$$



Bài tập 4

Một không gian mang điện với mật độ điện khối $\rho = \rho_0/r$, ρ_0 là một hằng số dương, r là khoảng cách tính từ gốc tọa độ. Biểu thức của điện trường theo vị trí r có dạng:

$$(a) \vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$(b) \vec{E} = \frac{2\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

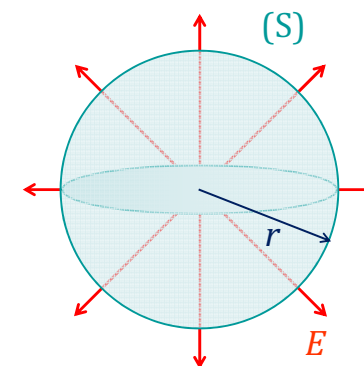
$$(b) \vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

(d) Kết quả khác.

Trả lời BT 4 - 1

- ρ có tính đối xứng cầu nên \vec{E} cũng thế.
- Chọn mặt Gauss là mặt cầu tâm O bán kính r .
- Điện thông qua (S):
 $\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = Q / \varepsilon_0$
- Q là điện tích trong (S).
- Vậy:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



cuu duong than cong . com

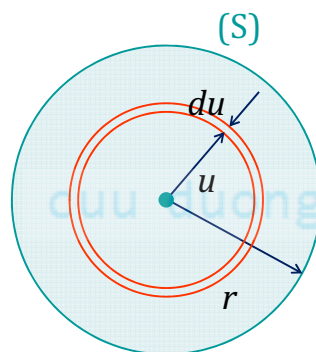
Trả lời BT 4 - 2

- Xét lớp cầu có bán kính từ u đến $u + du$.
- Mỗi lớp có thể tích:
 $dV = 4\pi u^2 du$
- và điện tích:

$$dQ = \frac{\rho_0}{u} (4\pi u^2 du) = 4\pi\rho_0 u du$$

- Suy ra điện tích trong (S):

$$Q = 4\pi\rho_0 \int_0^r u du = 2\pi\rho_0 r^2$$



cuu duong than cong . com

Trả lời BT 4 - 3

- Vậy:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2\pi\rho_0 r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

- Câu trả lời đúng là (a).

