Chương 2:

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN PHỨC Z

2.0 MỞ ĐẦU

❖ Hệ thống liên tục:

➢ **Biến đổi Fourier:**

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(j\omega)t}dt$$

$$j\omega \Rightarrow s = \sigma + j\omega$$

➢ **Biến đổi Laplace:**

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

❖ Hệ thống rời rạc:

➢ **Biến đổi Fourier:**

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(e^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$e^{j\omega} \Rightarrow z = re^{j\omega}$$

➢ **Biến đổi Z:**

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}}$$

2.1 BIẾN ĐỔI Z

2.1.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z:

- **Biến đổi Z của dãy x(n):**

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}} \qquad (*)$$

Trong đó z – biến số phức

Biểu thức (*) còn gọi là biến đổi Z hai phía

Biến đổi Z 1 phía dãy x(n):

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}} \qquad (**)$$

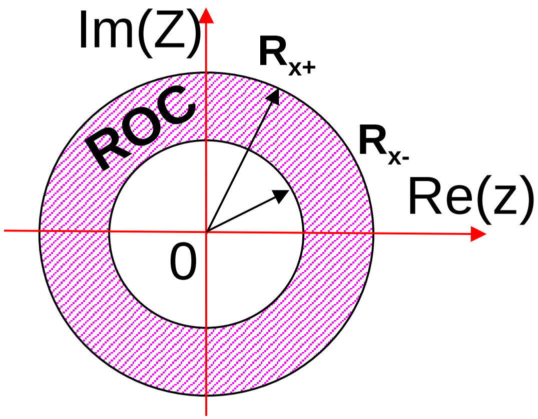
- Nếu x(n) nhân quả [$x(n)=0$ với $n<0$] thì: (*) $\equiv$ (**)
- Ký hiệu:

$x(n) \xleftrightarrow{ZT} X(z)$ hay $X(z) = ZT\{x(n)\}$

$X(z) \xleftrightarrow{ZT^{-1}} x(n)$ hay $x(n) = ZT^{-1}\{X(z)\}$

2.1.2 MIỀN HỘI TỤ CỦA BIẾN ĐỔI Z (ROC)

- **Miền hội tụ của biến đổi Z -** ROC (Region Of Convergence) *là tập hợp tất cả các giá trị Z nằm trong mặt phẳng phức sao cho X(z) hội tụ.*



- Để tìm ROC của X(z) ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy
- **<u>Tiêu chuẩn Cauchy</u>:**

Một chuỗi có dạng: $$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + \cdots$$

hội tụ khi: $$\lim_{n \to \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} < 1$$

- *Nếu có dạng x(n)=a^n , hội tụ:* $$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$ *khi /a/<1*

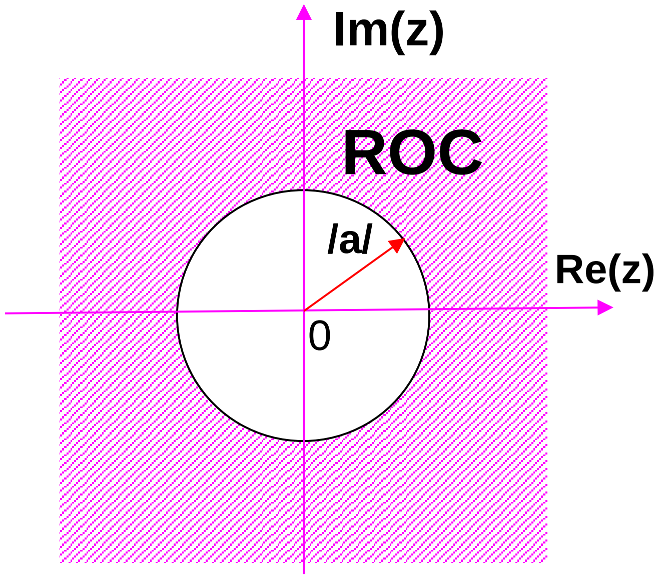
Ví dụ 2.1.1: Tìm biến đổi Z & ROC của **x(n)=aⁿu(n)**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a^n u(n)\right]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n.z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$



Nếu: $$\lim_{n\to\infty}\left(\left|az^{-1}\right|^n\right)^{1/n}<1\Leftrightarrow |z|>|a|$$

Vậy: $$\boxed{X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}};\mathrm{ROC}:|z|>|a|}$$

Ví dụ 2.1.2: Tìm biến đổi Z & ROC của **x(n)=-a^{n}u(-n-1)**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-a^{n}u(-n-1)\right]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(a^{-1}z\right)^{-n}$$

$-n=m$

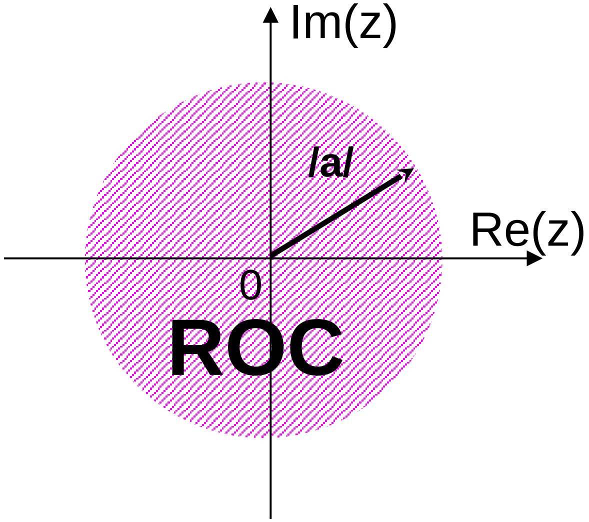
$$=-\sum_{m=1}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^{m}=-\sum_{m=0}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^{m}+1$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:

$$X(z)=-\sum_{m=0}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^{n}+1=\boxed{\frac{1}{1-az^{-1}}}$$

Nếu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|a^{-1}z\right|^{n}\right)^{1/n}<1\iff\boxed{|z|<|a|}$



2.2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

2.2.1 Tuyến tính

- Nếu: $$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

- Thì: $$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

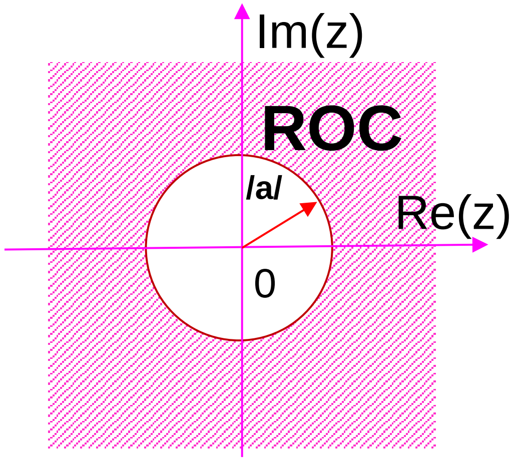
ROC chứa **$R_1 \cap R_2$**

Ví dụ 2.2.1: Tìm biến đổi Z & ROC của

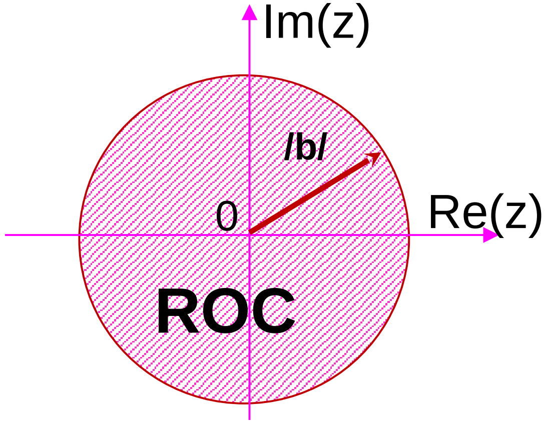
$x(n)=a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ với $|a|<|b|$

Theo ví dụ 2.1.1 và 2.1.2, ta có:

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad R_1 : |z| > |a|$$



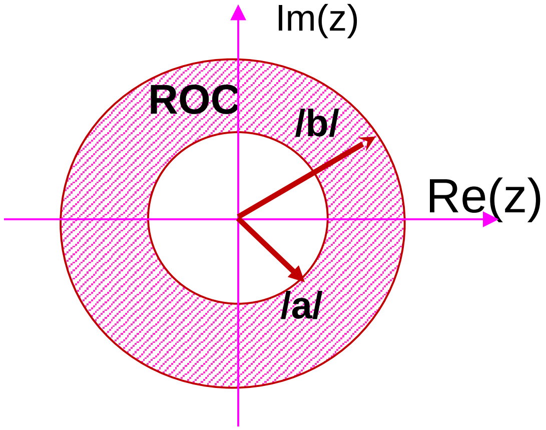
$$-b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - bz^{-1}} \qquad R_2 : |z| < |b|$$



Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$a^n u(n) - b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \boxed{\frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}}}$$

$$\boxed{R = R_1 \cap R_2 : |a| < |z| < |b|}$$



2.2.2 Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$: ROC = R

Thì: $x(n-n_0) \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z)$: ROC = R'

Với: $R' = \begin{cases} R \text{ trừ giá trị } z=0, \text{ khi } n_0>0 \\ R \text{ trừ giá trị } z=\infty, \text{ khi } n_0<0 \end{cases}$

<u>Ví dụ 2.2.2</u>: Tìm biến đổi Z & ROC của $\mathbf{x(n)=a^n u(n-1)}$

Theo ví dụ 2.1.1: $a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{1-az^{-1}}$; ROC : $|z| > |a|$

$x(n)=a^n u(n-1) = a.a^{n-1}u(n-1)$ $\boxed{\xleftrightarrow{Z} \dfrac{az^{-1}}{1-az^{-1}} : |z| > |a|}$

2.2.3 Nhân với hàm mũ a^n

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $a^n x(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) \quad : \mathrm{ROC} = |a|\mathrm{R}$

Ví dụ 2.2.3: Xét biến đổi Z & ROC của

$x_1(n)=u(n)$ và ***$x_2(n)=a^n u(n)$***

$$x(n) = u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} ; R: |z| > 1$$

$$\Rightarrow \quad a^n x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(az^{-1}) = \frac{1}{1-az^{-1}} ; R': |z| > |a|$$

2.2.4 Đạo hàm X(z) theo z

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz} \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Ví dụ 2.2.4: Tìm biến đổi Z & ROC của ***g(n)=na^n u(n)***

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow \quad g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{Z} G(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} \boxed{= \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} : |z| > |a|}$$

2.2.5 Đảo biến số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \;:\mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \;:\mathrm{ROC} = 1/R$

Ví dụ 2.2.5: Tìm biến đổi Z & ROC của ***y(n)=(1/a)ⁿu(-n)***

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow\; y(n) = (1/a)^n u(-n) = a^{-n} u(-n) = x(-n)$$

Áp dụng tính chất đảo biến số:

$$\mathrm{Y(z)} = \mathrm{X(z^{-1})} = \frac{1}{1 - \mathrm{a}(z^{-1})^{-1}} = \boxed{\frac{1}{1 - \mathrm{az}}; \mathrm{ROC}: |z| < 1/|a|}$$

2.2.6 Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)\ :\mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)\ :\mathrm{ROC} = R$

2.2.7 Tích 2 dãy

Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) & :\mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) & :\mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$

Thì: $x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{2\pi}\oint_c X_1(\nu)X_1\left(\dfrac{z}{\nu}\right)\nu^{-1}\,\mathrm{d}\nu : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$

2.2.8 Định lý giá trị đầu

Nếu x(n) nhân quả thì: $x(0) = \lim_{Z\to\infty} \mathrm{X(z)}$

<u>Ví dụ 2.2.6</u>: Tìm **x(0)**, biết **X(z)=e^1/z** và x(n) nhân quả

Theo định lý giá trị đầu:

$$x(0) = \lim_{Z\to\infty} \mathrm{X(z)} = \lim_{Z\to\infty} \mathrm{e}^{1/z} = 1$$

2.2.9 Tổng chập 2 dãy

Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) & :\mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) & :\mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$

Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$:ROC có chứa $R_1 \cap R_2$

<u>Ví dụ 2.2.7</u>: Tìm **y(n) = x(n)*h(n),** biết

x(n)=(0.5)ⁿu(n) và ***h(n)=-2ⁿu(-n-1)***

$$x(n) = (0.5)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}; ROC: |z| > 0.5$$

$$h(n) = -2^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}; ROC: |z| < 2$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})} \cdot \frac{1}{(1-2z^{-1})}; ROC: 0,5 < |z| < 2$$

Z^{-1} ↕

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-0.5z^{-1})} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1-2z^{-1})}; ROC: 0,5 < |z| < 2$$

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = -\frac{1}{3}(0.5)^n u(n) - \frac{4}{3} 2^n u(-n-1)}$$

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

x(n)	***X(z)***	***R***
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	Chứa $R_1 \cap R_2$
$x(n-n_0)$	$Z^{-n0}X(z)$	R'
$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	R
$nx(n)$	$-z\, dX(z)/dz$	R
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	1/R
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_1 \cap R_2$
$x(n)$ nhân quả	$x(0)=\lim X(z \to \infty)$	
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Chứa $R_1 \cap R_2$

BIẾN ĐỔI Z MỘT SỐ DÃY THÔNG DỤNG

x(n)	***X(z)***	***ROC***
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$/z/ > 1$
$-u(-n-1)$		$/z/ < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$/z/ > /a/$
$-a^n u(-n-1)$		$/z/ < /a/$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$/z/ > /a/$
$-na^n u(-n-1)$		$/z/ < /a/$
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$(1-z^{-1}\cos\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	$/z/ > 1$
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$(z^{-1}\sin\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	$/z/ > 1$

2.3 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

2.3.1 CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (*)$$

Với **C** - đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ trong mặt phẳng phức, nằm trong miền hội tụ của X(z), theo chiều (+) ngược chiều kim đồng hồ

- ✓ Trên thực tế, biểu thức (*) ít được sử dụng do tính chất phức tạp của phép lấy tích phân vòng
- *<u>Các phương pháp biến đổi Z ngược:</u>*
- ➢ *Thặng dư*
- ➢ *Khai triển thành chuỗi luỹ thừa*
- ➢ *Phân tích thành tổng các phân thức tối giản*

2.3.2 PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

a) Khái niệm thặng dư của 1 hàm tại điểm cực:

- Thặng dư tại điểm cực $\mathbf{Z_{pi}}$ bội **r** của **F(z)** được định nghĩa:

$$\boxed{\operatorname{Res}\left[F(z)\right]_{Z=Z_{pi}} = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}}\left[F(z)(z-z_{pi})^{r}\right]_{Z=Z_{pi}}}$$

- Thặng dư tại điểm cực đơn $\mathbf{Z_{pi}}$ của **F(z)** được định nghĩa:

$$\boxed{\operatorname{Res}\left[F(z)\right]_{Z=Z_{pi}} = \left[F(z)(z-z_{pi})\right]_{Z=Z_{pi}}}$$

b) Phương pháp:

- Theo lý thuyết thặng dư, biểu thức biến đổi Z ngược theo tích phân vòng (*) được xác định bằng tổng các thặng dư tại tất cả các điểm cực của hàm $\mathbf{X(z)z^{n-1}}$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_i Res\left[X(z) z^{n-1}\right]_{Z = Z_{pi}} \quad \textbf{(*)}$$

Trong đó:

- **Z_{pi}** – các điểm cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm trong đường cong C
- **$Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=z_{pi}}$** - thặng dư của $X(z)z^{n-1}$ tại điểm cực z_{Pi}

➢ *Tổng cộng các thặng dư tại tất cả các điểm cực, ta được* x(n)

<u>Ví dụ 2.3.1</u>: Tìm biến đổi Z ngược của $X(z) = \frac{z}{(z-2)}$

Thay X(z) vào (*), ta được

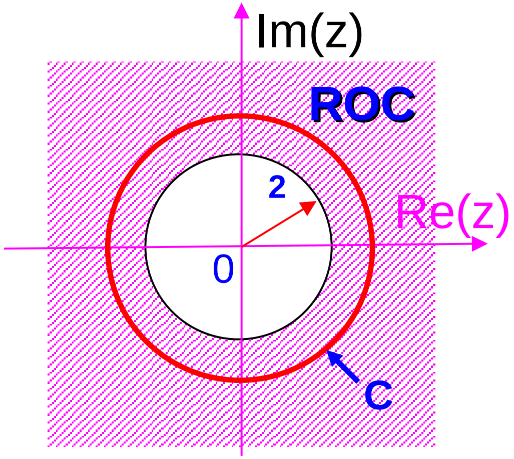
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z}{(z-2)} z^{n-1} dz = \sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]$$

- **Chọn C là đường cong khép kín nằm bên ngoài vòng tròn có bán kính là 2**

- **n≥0:** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{z^n}{(z-2)}$ có 1 điểm cực đơn Z_{p1}=2

Thặng dư tại Z_{p1}=2:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]_{Z=2} = \left[\frac{z^n}{(z-2)}(z-2)\right]_{Z=2} = 2^n$$



- **n<0:** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{1}{(z-2)z^{-n}} = \dfrac{1}{(z-2)z^m}$

Z_{p1}=2 đơn,

Z_{p2}=0 bội m

Với: Z_{p1}=2: $$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=2} = \left[\frac{1}{(z-2)z^m}(z-2)\right]_{Z=2} = \frac{1}{2^m}$$

Với: $Z_{p2}=0$ bội m:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=0}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}z^m\right]_{Z=0}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{(m-1)!(-1)^{m-1}}{(-2)^m}\right]\boxed{=-\frac{1}{2^m}}$$

Vậy, với **n<0:** $\sum\operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^m}=0$

suy ra $\boxed{x(n)=2^n : n\geq 0}$ hay $\boxed{x(n)=2^n u(n)}$

2.3.3 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN CHUỖI LUỸ THỪA

Giả thiết **X(z)** có thể khai triển: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$$

Theo định nghĩa biến đổi Z $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Đồng nhất 2 biểu thức: $$\boxed{x(n) = a_n}$$

<u>Ví dụ 2.3.2</u>:

Tìm x(n), $X(z) = z^2 + 2z + 3 - 4z^{-1} - 5z^{-2}$ ROC: $0 < |z| < \infty$

$$X(z) = \sum_{n=-2}^{2} x(n) z^{-n} = x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2}$$

Suy ra: $x(n) = \left\{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, -4, -5\right\}$

<u>Ví dụ 2.3.3</u>: Tìm x(n) biết: $X(z)=\dfrac{1}{1-2z^{-1}}: |z|>2$

Do ROC của X(z) là ***/z/>2***, nên **x(n)** sẽ là dãy nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}=a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots \qquad (*)$$

Để có dạng (*), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$+2z^{-1}+2^2 z^{-2}+\cdots$$

$$\boxed{\Rightarrow X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n)=2^n : n\geq 0 \equiv 2^n u(n)}$$

<u>Ví dụ 2.3.4:</u> Tìm x(n) biết: $X(z)=\dfrac{1}{1-2z^{-1}}:|z|<2$

Do ROC của X(z) là ***/z/<2***, nên **x(n)** sẽ là dãy phản nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n z^{-n}=a_{-1}z^1+a_{-2}z^2+a_{-3}z^3+\cdots \qquad (**)$$

Để có dạng (**), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$-2^{-2}z^2-2^{-3}z^3+\cdots$$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty}-2^n z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n)=-2^n : n<0 \equiv -2^n u(-n-1)$$

2.3.4 PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH TỔNG CÁC PHÂN THỨC TỐI GIẢN

Xét X(z) là phân thức hữu tỉ có dạng:

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{d_K z^K + d_{K-1} z^{K-1} + \ldots + d_1 z + d_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

với: K, N >0

- Nếu **K>N**, thực hiện phép chia đa thức:

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = C(z) + \frac{A(z)}{B(z)} = C(z) + \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} \ldots + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

Ta được C(z) là đa thức và phân thức A(z)/B(z) có bậc **M≤N**

- Nếu **K≤N**, thì X(z) có dạng giống phân thức A(z)/B(z)

Việc lấy biến đổi Z ngược đa thức C(z) là đơn giản, vấn đề phức tạp là tìm biến đổi Z ngược A(z)/B(z) có bậc M≤N

Xét **X(z)/z** là phân thức hữu tỉ có bậc **M≤N** :

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{a_M z^M + a_{M-1}z^{M-1}\ldots + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1}z^{N-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

Xét đến các điểm cực của X(z)/z, hay nghiệm của B(z) là *đơn, bội và phức liên hiệp*

a) <u>Xét X(z)/z có các điểm cực đơn</u>: Z_{p1}, Z_{p2}, Z_{p3},…. Z_{pN}

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-z_{p1})(z-z_{p2})\cdots(z-z_{pN})}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_2}{(z-z_{p2})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-z_{pN})}=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{(z-z_{pi})}$$

Với hệ số $\mathbf{K_i}$ xác định bởi:

$$\boxed{K_i=\frac{X(z)}{z}(z-z_{pi})\bigg|_{Z=Z_{pi}}}$$

hay

$$\boxed{K_i=\frac{A(z)}{B'(z)}\bigg|_{Z=Z_{pi}}}$$

Suy ra **X(z)** có biểu thức:

$$X(z) = \frac{K_1}{(1 - z_{p1} z^{-1})} + \frac{K_2}{(1 - z_{p2} z^{-1})} + \cdots + \frac{K_N}{(1 - z_{pN} z^{-1})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{(1 - z_{pi} z^{-1})}$$

Xét: $X_i(z) = \dfrac{K_i}{(1 - z_{pi} z^{-1})}$

- Nếu ROC: ***/z/ > /z*** $_{pi}$ ***/*** $\Rightarrow x_i(n) = K_i (z_{pi})^n u(n)$
- Nếu ROC: ***/z/ < /z*** $_{pi}$ ***/*** $\Rightarrow x_i(n) = -K_i (z_{pi})^n u(-n-1)$
- **Vậy:** $\boxed{x(n) = \sum_{i=1}^{N} x_i(n)}$

<u>Ví dụ 2.3.5</u>: Tìm x(n) biết $X(z)=\dfrac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$

ROC : **a) /z/>3, b) /z/<2, c) 2</z/<3**

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-3)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1=\frac{X(z)}{z}(z-2)\Big|_{z=2}=\frac{2z-5}{(z-3)}\Big|_{z=2}=1$$

$$K_2=\frac{X(z)}{z}(z-3)\Big|_{z=3}=\frac{2z-5}{(z-2)}\Big|_{z=3}=1$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-2)}+\frac{1}{(z-3)}\Rightarrow X(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})}+\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Với các miền hội tụ:

a) /z/ > 3 >2: $\boxed{x(n) = 2^n u(n) + 3^n u(n)}$

b) /z/ < 2 <3: $\boxed{x(n) = -2^n u(-n-1) - 3^n u(-n-1)}$

c) 2</z/<3 : $\boxed{x(n) = 2^n u(n) - 3^n u(-n-1)}$

b) Xét X(z)/z có điểm cực Z_{p1} bội r và các điểm cực đơn: $Z_{p(r+1)},\dots,Z_{pN}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-z_{p1})^r(z-z_{p(r+1)})\cdots(z-z_{pN})}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_2}{(z-z_{p1})^2}+\cdots+\frac{K_r}{(z-z_{p1})^r}+$$

$$+\frac{K_{r+1}}{(z-z_{p(r+1)})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-z_{pN})}=\sum_{i=1}^{r}\frac{K_i}{(z-z_{p1})^i}+\sum_{l=r+1}^{N}\frac{K_l}{(z-z_{pl})}$$

Với hệ số $\mathbf{K_i}$ xác định bởi:

$$\boxed{K_i=\frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{(r-i)}}{dz^{(r-i)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-z_{c1})^r\right]\Bigg|_{Z=Z_{p1}}}$$

$$\boxed{K_l=\frac{X(z)}{z}(z-z_{pl})\Bigg|_{Z=Z_{pl}}}$$

Với giả thiết ROC của X(z): ***/z/ > max{/z*$_{pi}$*/}***: i=1÷N,

biến đổi Z ngược của thành phần **K$_i$/(z-z$_{pi}$)^r** sẽ là:

$$\frac{z}{(z-a)^i} \xleftarrow{\;Z^{-1}\;}\!\!\rightarrow \frac{n(n-1)...(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n)$$

Vậy ta có biểu thức biến đổi Z ngược là:

$$\boxed{x(n)=\sum_{i=1}^{r}K_i\frac{n(n-1)...(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n)+\sum_{l=r+1}^{N}K_l(z_{pl})^n u(n)}$$

<u>Ví dụ 2.3.6</u>: Tìm x(n) biết $X(z)=\dfrac{2z^3-5z^2+4z}{(z-2)^2(z-1)}, \mathrm{ROC}:|z|>2$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z^2-5z+4}{(z-2)^2(z-1)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-2)^2}+\frac{K_3}{(z-1)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\right]\Bigg|_{Z=2} = 1$$

$$K_2 = \frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{(2-2)}}{dz^{(2-2)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\Bigg|_{Z=2} = 2$$

$$K_3 = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Bigg|_{Z=1} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-2)^2}\Bigg|_{Z=1} = 1$$

Vậy **X(z)/z** có biểu thức là:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)} + \frac{2}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{1}{(1-z^{-1})} \qquad ROC: |z| > 2$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n u(n) + n2^n u(n) + u(n)}$$

c) *Xét X(z)/z có cặp điểm cực Z_{p1} và Z^*_{p1} phức liên hiệp, các điểm cực còn lại đơn: $Z_{p3},\ldots,Z_{pN}$*

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-z_{p1})(z-z_{p1}^*)(z-z_{p3})\cdots(z-z_{pN})}$$

X(z)/z được phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_2}{(z-z_{p1}^*)}+\frac{K_3}{(z-z_{p3})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-z_{pN})}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_2}{(z-z_{p1}^*)}+\sum_{i=3}^{N}\frac{K_i}{(z-z_{pi})}$$

Với các hệ số **K_1, K_i** được tính giống điểm cực đơn:

$$K_i=\frac{X(z)}{z}(z-z_{pi})\Big|_{Z=Z_{pi}} \quad : i=1\div N$$

Do các hệ số **A(z), B(z)** là thực, nên $\mathbf{K_2=K_1^*}$

Xét : $$\frac{X_1(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_1^*}{(z-z_{p1}^*)}$$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{K_1}{(1-z_{p1}z^{-1})}+\frac{K_1^*}{(1-z_{p1}^*z^{-1})}$$ Nếu gọi: $$\begin{cases} K_1=|K_1|e^{j\beta} \\ z_{p1}=|z_{p1}|e^{j\alpha} \end{cases}$$

Và giả thiết ROC: **/z/>max{/z_{pi}/}**:

$$\Rightarrow x_1(n)=\left[K_1(z_{p1})^n+K_1^*(z_{p1}^*)^n\right]u(n)$$

$$=2|K_1||z_{p1}|^n cos(n\alpha+\beta)u(n)$$

Vậy: $$\boxed{x(n)=\left\{2|K_1||z_{p1}|^n cos(n\alpha+\beta)+\sum_{i=3}^{N}K_i(z_{pi})^n\right\}u(n)}$$

Ví dụ 2.3.7: Tìm x(n) biết: $X(z)=\frac{-z}{(z^2-2z+2)(z-1)} : |z|>\sqrt{2}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-1}{(z^2-2z+2)(z-1)}=\frac{-1}{[z-(1+j)][z-(1-j)](z-1)}$$

$$=\frac{K_1}{[z-(1+j)]}+\frac{K_1^*}{[z-(1-j)]}+\frac{K_3}{(z-1)}$$

$$K_1=\left.\frac{-1}{[z-(1-j)](z-1)}\right|_{Z=1+j}=\frac{1}{2} \qquad K_3=\left.\frac{-1}{(z^2-2z+2)}\right|_{Z=1}=-1$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1/2}{[1-(1+j)z^{-1}]}+\frac{1/2}{[1-(1-j)z^{-1}]}+\frac{-1}{(1-z^{-1})} \qquad |z|>\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x(n)=(\sqrt{2})^n\cos(n\frac{\pi}{4})u(n)-u(n)$$

2.4 BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

2.4.1 ĐỊNH NGHĨA HÀM TRUYỀN ĐẠT

Miền n: $x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)=x(n)*h(n)$

$\updownarrow ZT$

Miền Z: $X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)=X(z)H(z)$

$h(n) \xleftrightarrow{ZT}$ ***H(z):*** gọi là hàm truyền đạt $\qquad H(z)=Y(z)/X(z)$

- Trong miền phức Z, ***H(z)*** đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống

2.4.2 HÀM TRUYỀN ĐẠT ĐƯỢC BIỂU DIỄN THEO CÁC HỆ SỐ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

- Phương trình sai phân TTHSH có dạng:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_k x(n-r)$$

- Lấy biến đổi Z 2 vế PTSP & áp dụng tính chất dịch theo t/g:

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_k z^{-r}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

Ví dụ 2.4.1: Tìm H(z) và h(n) của hệ thống nhân quả cho bởi:

y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n) - 5x(n-1)

Lấy biến đổi Z hai vế PTSP và áp dụng tính chất dịch theo t/g:

$$Y(z)\left[1-5z^{-1}+6z^{-2}\right]=X(z)\left[2-5z^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2-5z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-3)}$$

$$K_1=\left.\frac{2z-5}{(z-3)}\right|_{z=2}=1 \qquad K_2=\left.\frac{2z-5}{(z-2)}\right|_{z=3}=1$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})}+\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Do hệ thống nhân quả nên: **h(n) = (2^n + 3^n) u(n)**

2.4.3 ĐIỂM CỰC & ĐIỂM KHÔNG CỦA HÀM TRUYỀN ĐẠT

- Xét hàm truyền đạt H(z) có dạng:

$$H(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0} = K\frac{(z-z_{01})(z-z_{02})\ldots(z-z_{0m})}{(z-z_{p1})(z-z_{p2})\ldots(z-z_{pn})}$$

- z_{0i} là điểm không của H(z) $\Leftrightarrow$ $H(z)\big|_{z=z_{0i}}=0$
- z_{pi} là điểm cực của H(z) $\Leftrightarrow$ $H(z)\big|_{z=z_{pi}}=\infty$

$\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{z_{01}, z_{02}, \ldots, z_{0m}} \text{ : là các điểm không của H(z)} \\ \boldsymbol{z_{p1}, z_{p2}, \ldots, z_{pn}} \text{ : là các điểm cực của H(z)} \end{array}\right.$

<u>Ví dụ 2.4.2</u>: Cho hệ thống nhân quả có các điểm 0 & cực:

z_{01}=-1; z_{02}=-1/2 và z_{p1}=1/2; z_{p2}=1/3.

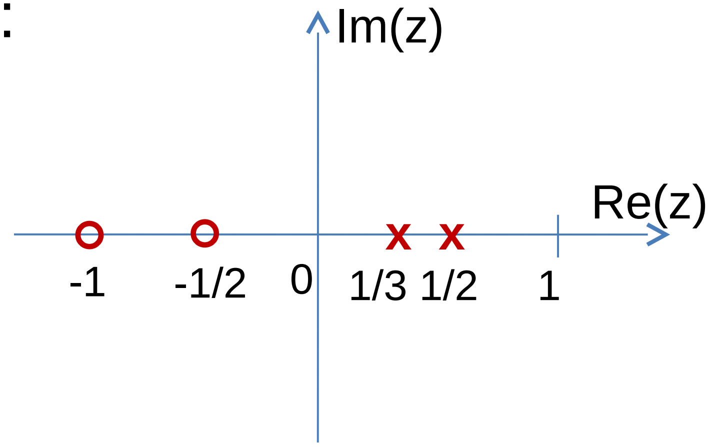
a)Biểu diễn các điểm không & cực trên mặt phẳng phức

b)Viết biểu thức H(z), biết H(0)=6

c)Viết phương trình sai phân mô tả hệ thống

d)Vẽ SĐ thực hiện HT, chuyển sơ đồ sang dạng chuẩn tắc

a) Biểu diễn các điểm cực & không:



b) Biểu thức H(z) có dạng:

$$H(z) = K\frac{(z+1)(z+1/2)}{(z-1/2)(z-1/3)}$$

$$H(0) = K\frac{1/2}{(-1/2)(-1/3)} = 6 \qquad \Rightarrow K = 2$$

$$\Rightarrow H(z) = 2\frac{(z+1)(z+1/2)}{(z-1/2)(z-1/3)}$$

c) Phương trình sai phân:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=2\frac{(z+1)(z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}=2\frac{(z^2+\frac{3}{2}z+\frac{1}{2})}{(z^2-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6})}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2(1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2})}{(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2})}$$

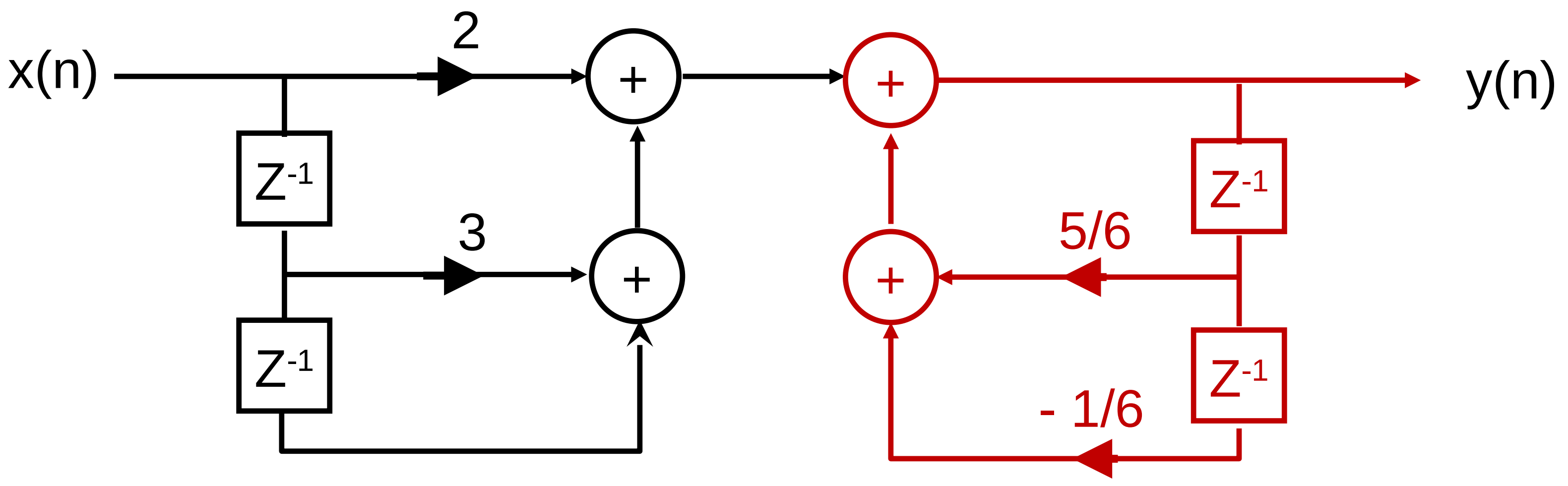
$$\Leftrightarrow \quad Y(z)(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2})=2X(z)(1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2})$$

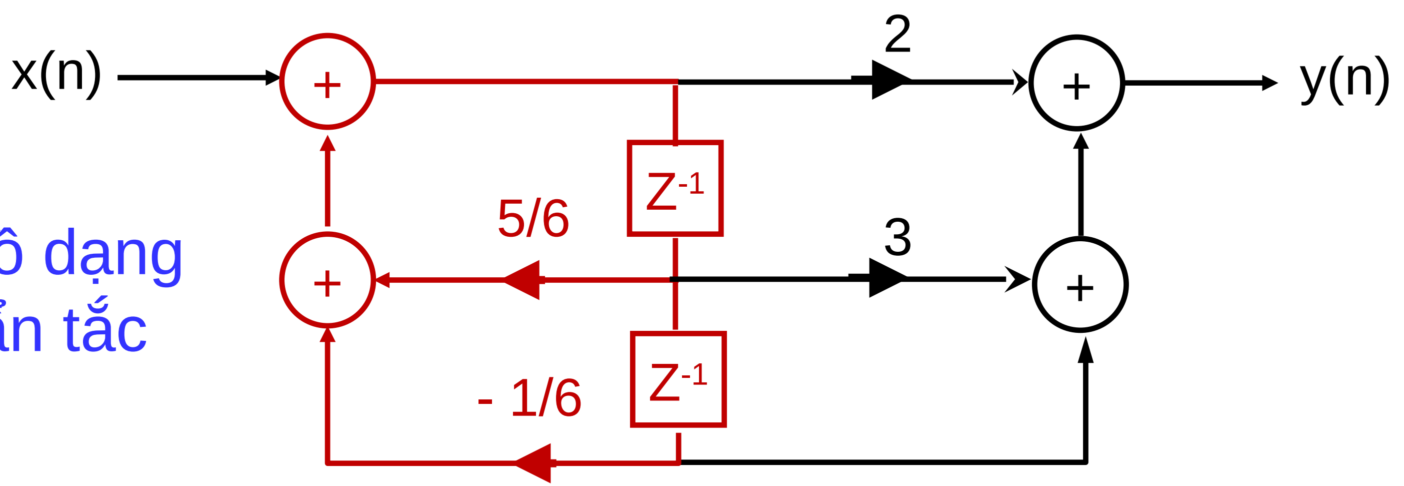
Áp dụng tính chất dịch theo thời gian, lấy biến đổi Z ngược:

$$\boxed{y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=2x(n)+3x(n-1)+x(n-2)}$$

d) Sơ đồ thực hiện hệ thống:

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + x(n-2) + \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2)$$





- Sơ đồ dạng chuẩn tắc

2.4.4 HÀM TRUYỀN ĐẠT CÁC HỆ THỐNG GHÉP NỐI

a. Ghép nối tiếp

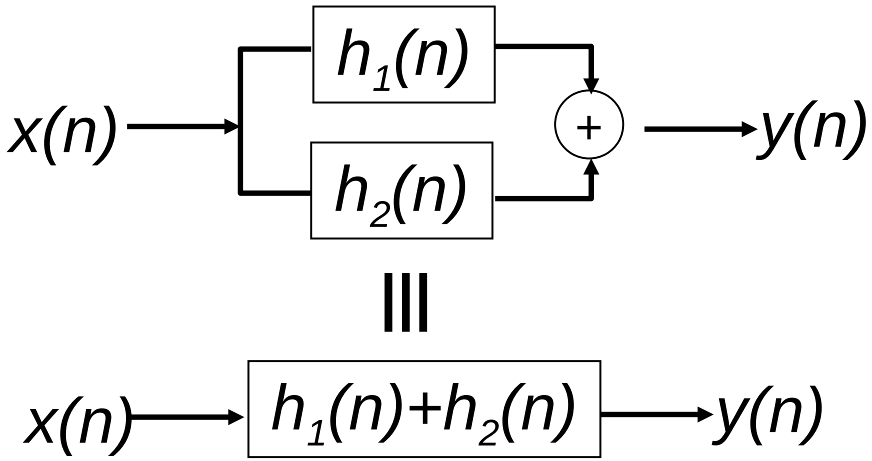
- Miền n: $\begin{cases} x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n) \\ \equiv \\ x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)=h_1(n)*h_2(n)} \longrightarrow y(n) \end{cases}$

Theo tính chất tổng chập: $h_1(n)*h_2(n) \xleftrightarrow{Z} H_1(z)H_2(z)$

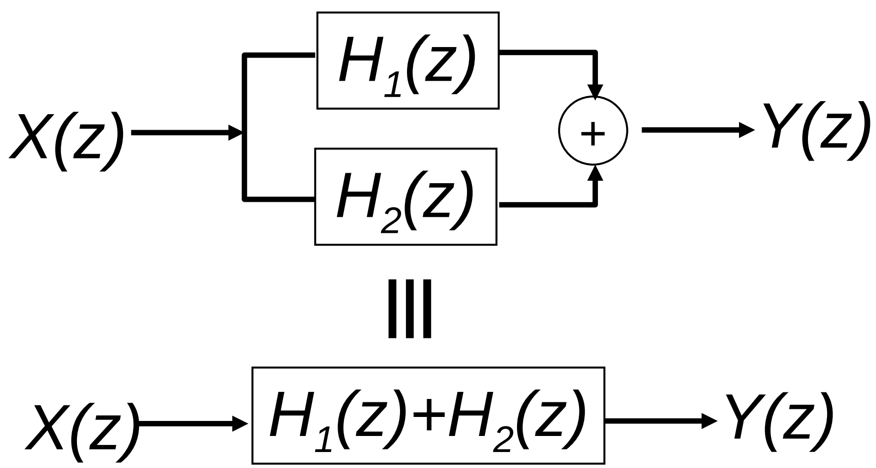
- Miền Z: $\begin{cases} X(z) \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow Y(z) \\ \equiv \\ X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)=H_1(z)H_2(z)} \longrightarrow Y(z) \end{cases}$

b. Ghép song song

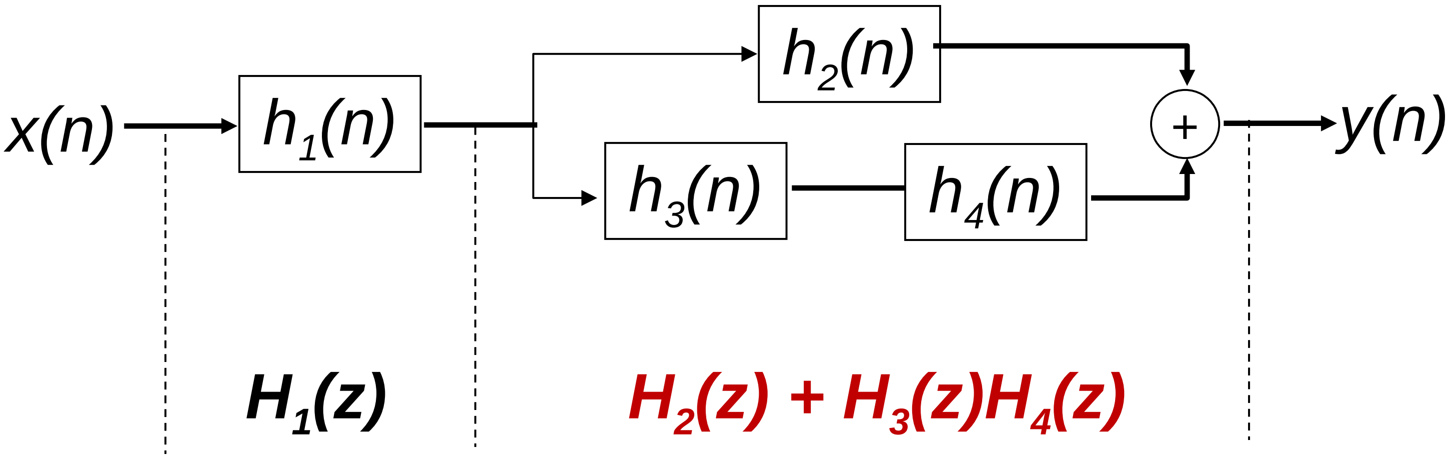
- <u>Miền n:</u>



- <u>Miền Z:</u>



<u>Ví dụ 2.4.3</u>: Tìm H(z) của hệ thống, biết h_1, h_2, h_3, h_4



<u>Giải</u>: $$H(z) = H_1(z).\left[H_2(z) + H_3(z)H_4(z)\right]$$

2.4.5 TÍNH NHÂN QUẢ & ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

a. Tính nhân quả

- Miền n: **Hệ thống TTBB là nhân quả ⇔ h(n) = 0 : n<0**
- Miền Z: $$H(z)=\frac{A(z)}{b_N(z-z_{p1})(z-z_{p2})\cdots(z-z_{pN})}$$

Do **h(n)** là tín hiệu nhân quả, nên miền hội tụ **H(z)** sẽ là:

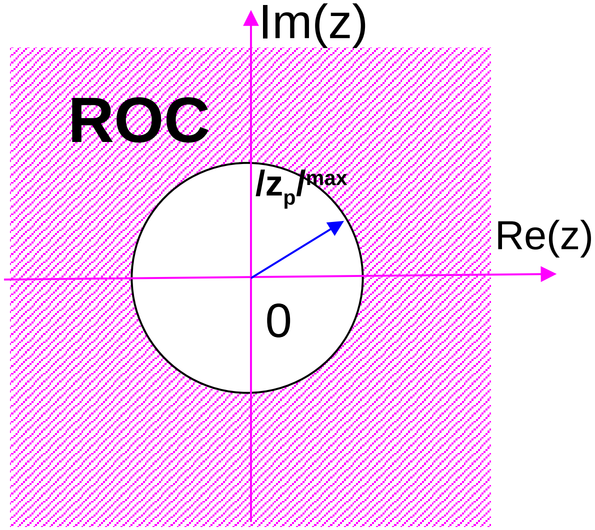
$$|z| > |z_p|^{max} = max\left\{|z_{p1}|,|z_{p2}|,\cdots,|z_{pN}|\right\}$$

Hệ thống TTBB là nhân quả

⇕

ROC của H(z) là:

$$|z| > |z_p|^{max} = max\left\{|z_{p1}|,|z_{p2}|,\cdots,|z_{pN}|\right\}$$



b. Tính ổn định

- Miền n: Hệ thống TTBB là ổn định $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ (*)
- Miền Z:

$$|H(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n) z^{-n}\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\right| \left|z^{-n}\right|$$

$$\Rightarrow |H(z)| \le \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\right| \text{ : khi } |z| = 1$$

Theo đ/k ổn định (*), nhận thấy **H(z)** cũng sẽ hội tụ với ***/z/=1***

Hệ thống TTBB là ổn định	$\Leftrightarrow$	**ROC của H(z) có chứa */z/*=1**

c. *Tính nhân quả và ổn định*

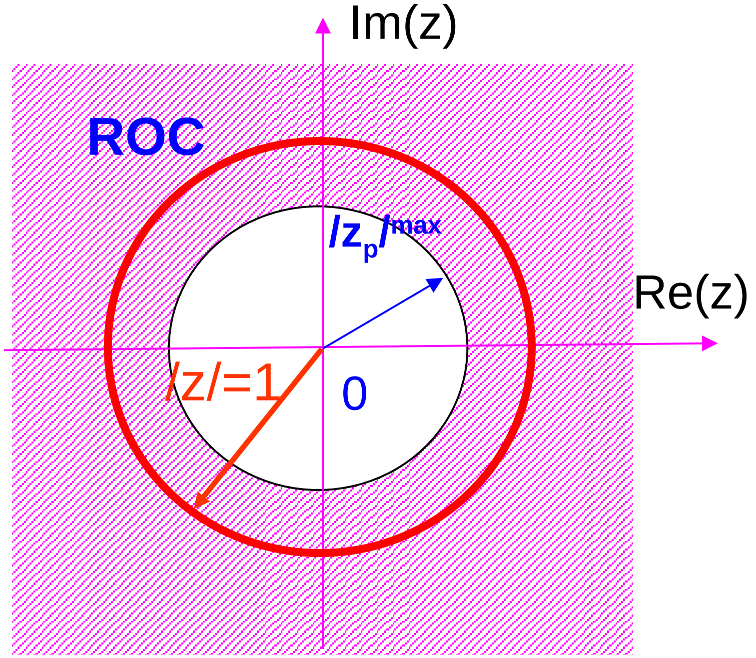
Hệ thống TTBB là nhân quả	⟺	**ROC của H(z) là:** $\left|z\right| > \left|z_p\right|^{max} = max\left\{\left|z_{p1}\right|, \left|z_{p2}\right|, \cdots, \left|z_{pN}\right|\right\}$
Hệ thống TTBB là ổn định	⟺	**ROC của H(z) có chứa *|z|*=1**

Hệ thống TTBB nhân quả là ổn định

⟺

ROC của H(z) là:

$$\left|z\right| > \left|z_p\right|^{max} \text{ và } \left|z_p\right|^{max} < 1$$



<u>Ví dụ 2.4.4</u>: Tìm h(n) của hệ thống, biết $H(z) = \dfrac{4z^2 - 5z}{2z^2 - 5z + 2}$

a. Để hệ thống là nhân quả

b. Để hệ thống là ổn định

c. Để hệ thống là nhân quả và ổn định

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{4z - 5}{2(z - 1/2)(z - 2)} = \frac{K_1}{(z - 1/2)} + \frac{K_2}{(z - 2)} = \frac{1}{(z - 1/2)} + \frac{1}{(z - 2)}$$

$$\Rightarrow H(z) = \left[\frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}}\right] + \frac{1}{(1 - 2z^{-1})}$$

a. Hệ thống nhân quả (/z/>2): **$h(n)=[(1/2)^n + 2^n]\,u(n)$**

b. Hệ thống ổn định (1/2</z/<2): **$h(n)=(1/2)^n u(n) - 2^n u(-n-1)$**

c. Hệ thống nhân quả và ổn định:
ROC: /z/>2 không thể chứa /z/=1 ⇒ không tồn tại h(n)

2.4.5 GIẢI PTSP DÙNG BIẾN ĐỔI Z 1 PHÍA

$$y(n-1) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{ZT} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n} = y(-1) + y(0)z^{-1} + y(1)z^{-2} + \cdots$$

$$= y(-1) + z^{-1}\left[y(0) + y(1)z^{-1} + \cdots\right]$$

$$\boxed{= y(-1) + z^{-1}Y(z)}$$

$$y(n-2) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{ZT} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-2)z^{-n} = y(-2) + y(-1)z^{-1} + y(0)z^{-2} + \cdots$$

$$= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}\left[y(0) + y(1)z^{-1} + \cdots\right]$$

$$\boxed{= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y(z)}$$

$$y(n-k) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{ZT} \boxed{z^{-k}Y(z) + \sum_{r=1}^{k} y(-r)z^{r-k}}$$

<u>Ví dụ 2.4.5</u>: Hãy giải PTSP dùng biến đổi Z 1 phía

$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) : n \geq 0$

biết: $x(n)=3^{n-2}u(n)$ và $y(-1)=-1/3$; $y(-2)= -4/9$

Lấy biến đổi Z 1 phía hai vế PTSP:

$Y(z) - 3[y(-1)+z^{-1}Y(z)] + 2[y(-2)+y(-1)z^{-1}+z^{-2}Y(z)] = X(z) \quad (*)$

Thay $y(-1)=-1/3$; $y(-2)= -4/9$ và $X(z)=3^{-2}/(1-3z^{-1})$ vào (*), rút ra:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-3)}$$

$$\Rightarrow Y(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$\boxed{\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2}\left[3^n - 1^n\right]u(n)}$$