Lý thuyết lưu lượng

Nội dung

- Lý thuyết lưu lượng
- Erlang B
- Erlang B mở rộng
- Erlang C
- Hàng đợi M/M/n/k

Các mô hình lưu lượng

- Các loại
  - Không thay đổi
  - Ngẫu nhiên
  - Mật độ
  - Mật độ có thay đổi
  - Mô hình thông thường
  - Mô hình bất đối xứng

3

Không thay đổi

- Lưu lượng từ nút a đến nút b

  T(a,b) = C
- Không thực tế cho phần lớn các trường hợp

4

Ngẫu nhiên

- $T(a,b) = R$
- Trong đó R là một giá trị ngẫu nhiên được tạo ra trong khoảng $[T_{min}, T_{max}]$
- Mô hình đơn giản này thích hợp với một số ứng dụng
  - Lưu lượng loại WWW

Mật độ

- Nếu nút a và b có mật độ dân số P_a và P_b, và khoảng cách giữa 02 nút là $D_{a,b}$, khi đó

  $T(a,b) = \alpha*(p_a*p_b)^{\beta}/D_{a,b}^{\gamma}$

  trong đó α, β, γ là những hằng số được chọn phù hợp

Mô hình mật độ dân số có thay đổi

- Nút lớn và gần sẽ chiếm phần lớn mô hình mật độ dân số đơn giản.
- Sẽ không thực hiện nếu D = 0
- Sử dụng dung sai D_{off} và p_{off}

$$T(a,b) = \alpha^*(p_a{}^*p_b + p_{off})^{\beta}/(D_{a,b} + D_{off})^{\gamma}$$

7

Thông thường

- Chọn α để đưa ra mức lưu lượng mong muốn trên mạng theo
  - Tổng lưu lượng trong mạng
  - Lưu lượng từ một nút
  - Lưu lượng đến và đi từ 1 nút
  - Phải có Σ lưu lượng đến = Σ lưu lượng đi để có lưu lượng khả thi
  - Giải pháp thuật toán lặp có thể được sử dụng

8

Lưu lượng không đối xứng

- Các mô hình xem xét đến lúc này là đối xứng
  T(a,b) = T(b,a)
- Lưu lượng thực tế là không đối xứng
- Ví dụ truy nhập WWW
- Đưa ra khái niệm mức
  - Mỗi mức được ấn định tới mức L_i, i=1, … , n
- Ma trận $M(L_i, L_j)$

9

Lưu lượng không đối xứng (2)

- Nếu $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ thì lưu lượng từ nút mức 1 tới nút mức 2 sẽ bằng 1 phần 3 lưu lượng từ nút mức 2 sang nút mức 1
- Mô hình có sửa lại như sau:

$$T(a,b) = \alpha * M(L_a, L_b) * (p_a * p_b + p_{off})^{\beta} / (D_{a,b} + D_{off})^{\gamma}$$

10

Mô hình phức tạp hơn

- Đưa thêm các thông số ngẫu nhiên vào các mô hình trên
- Kết hợp nhiều thành phần sẽ biểu diễn các loại lưu lượng khác nhau
- Định nghĩa lại hàm khoảng cách

11

Lưu lượng

- Lưu lượng để biểu thị cường độ lưu lượng, tức là lưu lượng trong một đơn vị thời gian.
- Định nghĩa về cường độ lưu lượng: Là mật độ lưu lượng tức thời trong một nhóm tài nguyên dùng chung là số tài nguyên bận tại thời điểm đó.

$$Y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T n(t)dt$$

- n(t) :số tài nguyên sử dụng (số thiết bị được sử dụng tại thời điểm t)

12

Lưu lượng (2)

- Lưu lượng mang :
- Kí hiệu : Ac =Y =A' :Lưu lượng mang
- Là lưu lượng được thực hiện bởi một nhóm phục vụ trong khoảng thời gian t lớn .
- Chú ý :trong thực tế thuật ngữ cường độ lưu lượng thường có nghĩa là cường độ lưu lượng trung bình trong một khoảng thời gian.

FET

13

Lưu lượng (3)

- Đơn vị lưu lượng: Erlang (Erl)
- Khối lượng lưu lượng: Là tổng lưu lượng mang trong chu kì T và được đo bằng đơn vị . Ví dụ Erl giờ (Eh)
- Chú ý: Lưu lượng mang không thể vượt quá số lượng đường dây, một đường dây chỉ có thể mang nhiều nhất 1 Erl, và đơn vị Erl không có thứ nguyên

FET

14

Lưu lượng (4)

- Đối với điện thoại cố định thường
  - Tại nhà: Ac =0,01÷0,04 Erl
  - Đối với cơ quan : 0,04÷ 0,06 Erl
- Tổng đài cơ quan: 0,6 Erl
- Điện thoại trả tiền :0,7 Erl

FET

15

Lưu lượng (5)

- Lưu lượng phát sinh A: lưu lượng được mang đến
  - Lưu lượng phát sinh là một giá trị lí thuyết, không đo lường được và chỉ có thể ước lượng thông qua lưu lượng mang.
  - $A = \lambda.S$
  - λ: tốc độ đến của cuộc gọi (số cuộc gọi đến trong một đơn vị thời gian)
  - S :thời gian phục vụ trung bình
  - Ngoài ra có thể được tính :$A = \lambda/\mu$ (μ : tốc độ phục vụ)
-

FET

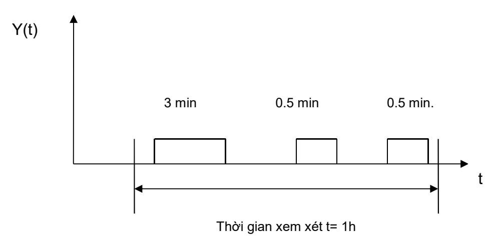
16

Lưu lượng (6)

- Lưu lượng tổn thất Ar :
  - Ar =A –Ac
  - Là sự chênh lệc giữa lưu lượng phát sinh và lưu lượng mang. Giá trị Ar giảm khi số kênh tăng

17

Ví dụ: lưu lượng

- Ví dụ : Cho một mạch và thời gian chiếm ứng dụng được biểu diễn.
- Thời gian xem xét t= 1h.
- 

- Ac = =(3+0,5 +0,5)/60 =1/15(Erlang)

18

Giờ bận (1)

- Lưu lượng viễn thông biến động theo các hoạt động xã hội,…
- Lưu lượng phát sinh từ các nguồn riêng lẻ và các thuê bao tạo cuộc gọi là hoàn toàn độc lập với nhau,
- →lưu lượng vừa có bản chất ngẫu nhiên vừa có bản chất tiền định

19

Giờ bận (2)

- Giờ bận (BH: Busy Hour): là 60 phút liên tục mà trong khoảng thời gian đó lưu lượng trung bình là cao nhất.
- Chú ý: Có thể có một số ngày xảy ra lưu lượng trong giờ bận nhất lớn hơn thời gian chờ bận nhất, nhưng trung bình trong nhiều ngày thì giá trị TCBH (Time-Consistent Busy Hour) là lớn nhất.

20

Giờ bận (3)

- Giờ bận (BH: Busy Hour)
  - Phụ thuộc TCBH:
  - Phụ thuộc vào khoảng thời gian 24 giờ.
  - Phụ thuộc ngày trong tuần
  - Phụ thuộc theo mùa (tháng)
  - Lưu lượng tăng theo hàng năm.

21

Cấp độ dịch vụ (GoS)

- Cấp độ dịch vụ (GoS): xác suất các cuộc gọi sẽ bị tắc nghẽn (blocking).
- hệ số tắc nghẽn P.xx trong đó xx là tỷ lệ phần trăm của các cuộc gọi bị tắc nghẽn.
- Yêu cầu GoS P.00 hiếm khi xảy ra.

22

Tắc nghẽn

- Khi xây dựng mạng, các nhà thiết kế mạng thường tính tới mục đích kinh tế và dựa trên điều kiện thực tế là hiếm khi có 100% thuê bao cùng thực hiện các kết nối.
- Vì vậy người ta xây dựng mạng chỉ đáp ứng được một phần nhất định của yêu cầu.
- Như vậy, các thuê bao phải chia sẻ với nhau về tài nguyên thì có thể không được kết nối ngay thì cuộc gọi lúc đó bị từ chối hay tắc nghẽn.

23

Erlang B

- Cấu trúc: Hệ thống có n kênh đồng nhất hoạt động song song và được gọi là 1 nhóm đồng nhất.
- Chiến lược:
  - Một cuộc gọi tới hệ thống được chấp nhận nếu có ít nhất 1 kênh rỗi.
  - Nếu tất cả các kênh đều bận thì cuộc gọi sẽ bị huỷ bỏ mà không gây một ảnh hưởng nào sau đó
- Lưu lượng: Giả sử khoảng thời gian phục vụ được phân bố theo hàm mũ và tiến trình sử dụng là tiến trình Poisson với tốc độ là λ.

24

Erlang B

- A:Lưu lượng phát sinh (A=λ.s)
- n: Số kênh

$$E_n(A) = E_{1,n}(A) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!}} = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{A^i}{i!}}$$

$$E_n(A) = \frac{A.E_{n-1}(A)}{n + A.E_{n-1}(A)}$$

FET

25

Ví dụ1 : Erlang B (1)

- Cho
  - Tốc độ gọi đến λ bằng một cuộc gọi trên 1 phút
  - Thời gian trung bình của 1 cuộc gọi thời gian là 3 phút
  - Số kênh phục vụ bằng 4.
  - Tính xác suất tắc nghẽn

FET

26

Ví dụ: Erlang B(2)

- Tốc độ gọi đến λ bằng một cuộc gọi trên 1 phút
- Thời gian trung bình của 1 cuộc gọi thời gian là 3 phút; n =4

• Lưu lượng phát sinh

$$A = \lambda.t = 1.3 = 3Erl$$

$$P(n) = \frac{\frac{3^4}{4!}}{1+3+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}} = 0{,}206$$

27

Ví dụ 2: Erlang B(1)

• Cho
  - Tốc độ gọi đến λ bằng 20 cuộc gọi trên giờ
  - Thời gian trung bình của 1 cuộc gọi thời gian là 3 phút
  - Hãy tính số lượng đường dây điện thoại để trung tâm dịch vụ đạt được mức độ dịch vụ GoS 0.01

28

Ví dụ 2: Erlang B(2)

- Cho
  - Tốc độ gọi đến λ bằng 20 cuộc gọi trên giờ
  - Thời gian trung bình của 1 cuộc gọi thời gian là 3 phút
  - GoS 0.01

Lưu lượng phát sinh $A = \lambda t = \frac{20}{60} 3 = 1Erl$

Tính các giá trị E1,n(A)

29

Ví dụ 2: Erlang B(3)

Lưu lượng phát sinh $A = \lambda t = \frac{20}{60} 3 = 1Erl$

Tính các giá trị E_n(A)

$$E_n(A) = E_{1,n}(A) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!}} = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{A^i}{i!}}$$

N=1, E_1(A) =$\frac{A}{1+A} = \frac{1}{1+1}$ =0.5 >0.01

N=2, E_2(A) =$\frac{\frac{1}{2}}{1+1+\frac{1}{2}}$ =0.2 >0.01

30

Ví dụ 2: Erlang B(4)

N=3, $E_3(A) = \dfrac{\frac{1}{3!}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}} = 0.063 > 0.01$

N=4, $E_4(A) = \dfrac{\frac{1}{4!}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}} = 0.015 > 0.01$

N=5, $E_5(A) = \dfrac{\frac{1}{5!}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}} = 0.003 < 0.01$

Vậy cần có 5 đường dây điện thoại để trung tâm dịch vụ đạt được mức độ dịch vụ GoS 0.01

Ví dụ 2: Erlang B(5)

Cách 2:

Lưu lượng phát sinh $A = \lambda t = \frac{20}{60}3 = 1Erl$

Tính các giá trị $E_n(A)$

$$E_n(A) = \frac{A.E_{n-1}(A)}{n + A.E_{n-1}(A)}$$

Ví dụ 2: Erlang B(6)

Cách 2 (cont.):

$$E_n(A) = \frac{A.E_{n-1}(A)}{n + A.E_{n-1}(A)}$$

N=0, $E_0(A)=1$

N=1, $E_1(A) = \frac{A}{1+A} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.5 > 0.01$

N=2, $E_2(A) = \frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} = 0.2 > 0.01$

N=3, $E_3(A) = \frac{\frac{1}{5}}{3+\frac{1}{5}} = \frac{1}{16} = 0.0625 > 0.01$

33

Ví dụ 2: Erlang B(7)

Cách 2 (cont.):

$$E_n(A) = \frac{A.E_{n-1}(A)}{n + A.E_{n-1}(A)}$$

N=3, $E_3(A) = \frac{\frac{1}{5}}{3+\frac{1}{5}} = \frac{1}{16} = 0.0625 > 0.01$

N=4, $E_4(A) = \frac{\frac{1}{16}}{4+\frac{1}{16}} = \frac{1}{65} = 0.015 > 0.01$

N=5, $E_5(A) = \frac{\frac{1}{65}}{5+\frac{1}{65}} = \frac{1}{326} = 0.003 < 0.01$

34

Ví dụ 3: Erlang B(2)

- Cho
  - Tốc độ gọi đến λ bằng 30 cuộc gọi trên giờ
  - Thời gian trung bình của 1 cuộc gọi thời gian là 4 phút
  - Hãy tính số lượng đường dây điện thoại để trung tâm dịch vụ đạt được mức độ dịch vụ GoS 0.03

35

Ví dụ 3: Erlang B(2)

Cách 2:

Lưu lượng phát sinh $A = \lambda t = \frac{30}{60} 4 = 2Erl$

Tính các giá trị $E_n(A)$

$$E_n(A) = \frac{A.E_{n-1}(A)}{n + A.E_{n-1}(A)}$$

36

Ví dụ 3: Erlang B(3)

Cách 2 (cont.):

$$E_n(A) = \frac{A.E_{n-1}(A)}{n + A.E_{n-1}(A)}$$

N=0, $E_0(A)=1$

N=1, $E_1(A) = \frac{A}{1+A} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = 0.67 > 0.03$

N=2, $E_2(A) = \frac{\frac{2}{3}*2}{2+\frac{2}{3}*2} = \frac{2}{5} = 0.4 > 0.03$

N=3, $E_3(A) = \frac{\frac{1}{5}}{3+\frac{1}{5}} = \frac{1}{16} = 0.0625 > 0.01$

Ví dụ 2: Erlang B(7)

Cách 2 (cont.):

$$E_n(A) = \frac{A.E_{n-1}(A)}{n + A.E_{n-1}(A)}$$

N=3, $E_3(A) = \frac{\frac{2}{5}*2}{3+\frac{2}{5}*2} = \frac{4}{19} = 0.21 > 0.03$

N=4, $E_4(A) = \frac{\frac{4}{19}*2}{4+\frac{4}{19}*2} = \frac{2}{21} = 0.095 > 0.03$

N=5, $E_5(A) = \frac{\frac{2}{21}*2}{5+\frac{2}{21}*2} = \frac{4}{109} = 0.0366 > 0.03$

Ví dụ 2: Erlang B(7)

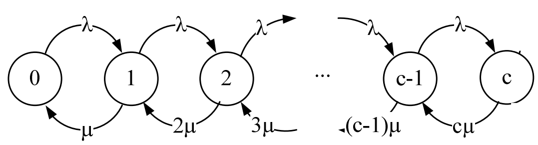
Cách 2 (cont.):

$$E_n(A) = \frac{A.E_{n-1}(A)}{n + A.E_{n-1}(A)}$$

N=6, $E_6(A) = \frac{\frac{4}{109}*2}{6+\frac{4}{109}*2} = \frac{4}{331}$=0.012 <0.03

39

Hàng đợi M/M/c/c (1)



- Tất cả các tốc độ đến đều là λ
- $p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0$
- $p_2 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) p_1 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$
- $\rightarrow\ p_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 \text{với } i \le c$

40

M/M/c/c(2)

- Mà $\sum_{i=0}^{c} p_i = 1$

$$\to\to p_0 \sum_{i=0}^{c} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1$$

$$\to p_0 = [\sum_{i=0}^{c} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i]^{-1}$$

41

M/M/c/c(3)

- Xác suất tắc nghẽn
- $P_{tắc\ nghẽn} = p_c = \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0$
- Thay giá trị $p_0 = [\sum_{i=0}^{c} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i]^{-1}$ vào ta có

$$P_{tắc\ nghẽn} = \frac{\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{\sum_{i=0}^{c} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \qquad \to P_{tắc\ nghẽn} = \frac{\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{1 + \sum_{i=1}^{c} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

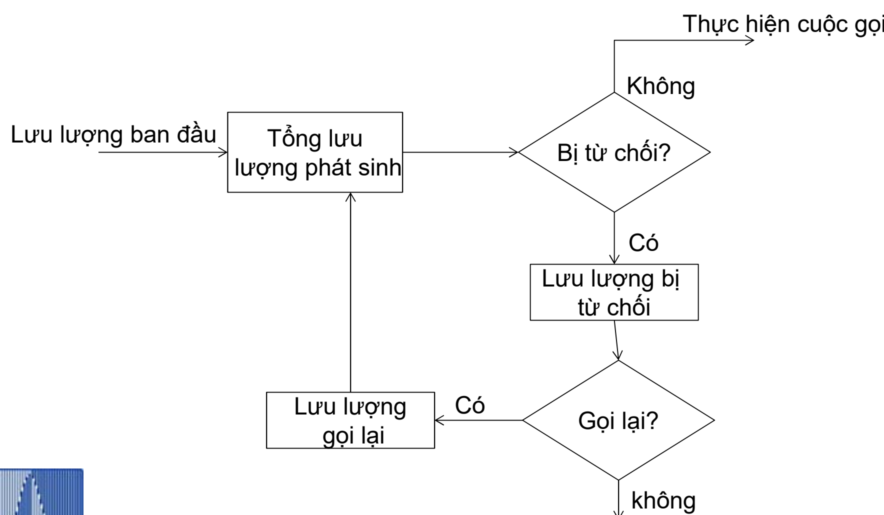
- Thay $A = \frac{\lambda}{\mu}$ thì Công thức Erlang B

42

Erlang B mở rộng(1)

- Giống mô hình Erlang B
- Tính đến các cuộc gọi bị từ chối sẽ thử gọi lại với một xác suất nhất định

Erlang B mở rộng (2)



Erlang B mở rộng(3)

- Lưu lượng tắc nghẽn Ar=A*Pb
- Lưu lượng tắc nghẽn quay lại B=Ar* P_{recall} quay lại
- A+B= Lưu lượng gốc + lưu lượng quay lại →Lưu lượng phát sinh của lần lặp sau.

45

Ví dụ 1 Erlang B mở rộng

- Một trung tâm cuộc gọi (call center) có 6 đường dây điện thoại, nhận được trung bình 360 cuộc gọi một ngày, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 6 phút.

Hệ thống có hệ thống có hệ số gọi lại =0,2 Hãy tính xác suất tắc nghẽn. (Giả sử xác suất tắc nghẽn được gọi là ổn định nếu như sai số giữa hai lần tính là 5%).

46

Ví dụ 1 Erlang B mở rộng (2)

- A=λxTs=$\frac{360}{60x24}x6 = 1.5\ (Erl)$
- Với n=6, P $_{recall=0,2}$
- P $_{b1}$=0,00353.
- $A_2 = A + P_{recall}.P_{b1}.A_1 = 1.501$

47

Ví dụ 1 Erlang B mở rộng (3)

- Thay A_2 vào công thức tính P(n) ta được
- P $_{b2}$=0,0035438
- Từ đó ta tính được
- $A_3 = A + P_{recall}.P_{b2}.A_2 = 1.50106$

48

Ví dụ 1 Erlang B mở rộng (4)

- Thay A_3 vào công thức tính P(n) ta được
- P_{b3}=0.0035438.
- Sai số giữa 2 lần tính là 5% vậy xác suất tắc nghẽn là 0.354%

Ví dụ 2 Erlang B mở rộng(1)

- Một trung tâm cuộc gọi (call center) có 6 đường dây điện thoại, nhận được trung bình 480 cuộc gọi một ngày, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 6 phút.
- b. Giả sử hệ thống có hệ thống có hệ số gọi lại =0,3. Hãy tính xác suất tắc nghẽn. (Giả sử xác suất tắc nghẽn được gọi là ổn định nếu như sai số giữa hai lần tính là 5%).

Ví dụ 3 Erlang B mở rộng(1)

- Một trung tâm cuộc gọi (call center) có 5 đường dây điện thoại, nhận được trung bình 360 cuộc gọi một ngày, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 12 phút.
- Với số lượng đường dây đã tính ở câu trên, giả sử hệ thống có hệ thống có hệ số gọi lại =0,3. Hãy tính xác suất tắc nghẽn. (Giả sử xác suất tắc nghẽn được gọi là ổn định nếu như sai số giữa hai lần tính là 5%).

51

Ví dụ 2 Erlang B mở rộng(2)

- 6 đường dây điện thoại, nhận được trung bình 480 cuộc gọi một ngày, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 6 phút.
- A=λxTs=$\frac{480}{60x24}x6 = 2\ (Erl)$
- $$P(n) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!}} = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!}}$$

P_{b1}=0,012.

52

Ví dụ 2 Erlang B mở rộng(3)

- $A_2 = A + A_1 P_{recall} \cdot P_{b1} = 2.0072$
- Thay A_2 vào công thức tính P(n) ta được P_{b2}=0,01226
- Từ đó ta tính được
- $A_3 = A + A_2 P_{recall} \cdot P_{b2} = 2.0073563$
- Thay A_3 vào công thức tính P(n) ta được P_{b3}=0,0122643.
- Sai số giữa 2 lần tính là 0.05% vậy xác suất tắc nghẽn là 1,22643%

53

Erlang C

- Lưu lượng với tiến trình poisson (Không giới hạn về tài nguyên).
- Phân bố thời gian phục vụ là theo poisson. Hệ thống hàng đợi này có tên là hệ thống trễ Erlang.
- Trong hệ thống này thì lưu lượng mang sẽ bằng lưu lượng phát sinh
- Không có khách hàng nào bị nghẽn.

54

Erlang C (2)

- w : Là biến ngẫu nhiên của thời gian đợi thì ta có xác xuất để biến

$$E_{2,n}(A) = P(w>0) = \frac{\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}{1+A+\frac{A^2}{2!}+\ldots+\frac{A^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}$$

- Xác xuất cuộc gọi đến hệ thống thì nó phải bị xếp vào hàng đợi (do số kênh giới hạn).
- Với A>n thì chắc chắn phải vào hàng đợi.

55

Erlang C (3)

$$E_{2,n}(A) = P(w>0) = \frac{\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}{1+A+\frac{A^2}{2!}+\ldots+\frac{A^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}$$

$$\frac{1}{E_{2,n}(A)} = \frac{1}{E_{1,n}(A)} - \frac{1}{E_{1,n-1}(A)}$$

56

Ví dụ : Erlang C

- Cho hệ thống trễ tốc độ các cuộc gọi đến λ=20 cuộc/giờ,
- Thời gian chiếm kênh của cuộc gọi là 6 phút.
- Tính lưu lượng mang, lưu lượng phát sinh. Xác suất cuộc gọi bất kỳ phải vào hàng đợi, xác suất cuộc gọi đi được phục vụ ngay

FET

57

Ví dụ : Erlang C

- Cho hệ thống trễ tốc độ các cuộc gọi đến λ=20 cuộc/giờ,
- Thời gian chiếm kênh của cuộc gọi là 6 phút.
- A=λxTs=$\frac{20}{60}x6 = 2\ (Erl)$

FET

58

Ví dụ: Erlang C (2)

- Xác suất cuộc gọi vào hàng đợi

$$E_{2,n}(A) = \frac{\frac{2}{3!}\cdot\frac{3}{3-2}}{1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\cdot\frac{3}{3-2}} = \frac{4}{9}$$

- Xác suất cuộc gọi được phục vụ :

$$S_n(A) = 1 - E_{2,n}(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

59

Ví dụ 2 : Erlang C

- Cho một hệ thống trễ có N đường dây điện thoại, nhận được trung bình 60 cuộc gọi mỗi giờ, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- Hãy tính số lượng đường dây điện thoại nhỏ nhất để xác suất cuộc gọi đến được trả lời ngay là lớn hơn 0.8.

60

Ví dụ 2 : Erlang C (2)

- hệ thống trễ có N đường dây điện thoại, 60 cuộc gọi mỗi giờ, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- Hãy tính số lượng đường dây điện thoại nhỏ nhất để xác suất cuộc gọi đến được trả lời ngay là lớn hơn 0.8.
-

61

Ví dụ 2 : Erlang C (3)

- hệ thống trễ có N đường dây điện thoại, 60 cuộc gọi mỗi giờ, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- Vì xác suất khách hàng đến được trả lời ngay là >0,8 nên xác suất khách hàng đến phải chờ <0,2.
- A=λxTs=$\frac{60}{60}x2 = 2\ (Erl)$

62

Ví dụ 2 : Erlang C (4)

- Xác suất khách hàng đến phải chờ theo công thức sau
-

$$E_{2,n}(A) = P(w>0) = \frac{\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}$$

63

Ví dụ 2 : Erlang C (5)

- hệ thống trễ có N đường dây điện thoại, 60 cuộc gọi mỗi giờ, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- Xác suất khách hàng đến phải chờ theo công thức sau
-

$$E_{2,n}(A) = P(w>0) = \frac{\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}$$

64

Ví dụ 2 : Erlang C (5)

$$E_{2,n}(A) = P(w>0) = \frac{\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}$$

- Thay giá trị A= 2Erl và giá trị n với n> 2.
- Với n= 3, P(w>0)=4/9
- n=4, P(w>0)=0.1739<0,2 .
- Vậy cần số lượng đường dây điện thoại nhỏ nhất là 4.

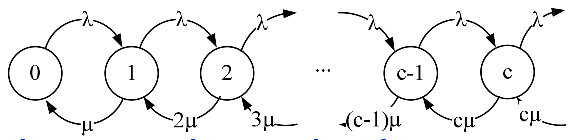
65

Ví dụ 3 : Erlang C (1)

- Cho một hệ thống trễ có N đường dây điện thoại, nhận được trung bình 120 cuộc gọi mỗi giờ, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- Hãy tính số lượng đường dây điện thoại nhỏ nhất để xác suất cuộc gọi đến được trả lời ngay là lớn hơn 0.7.
-

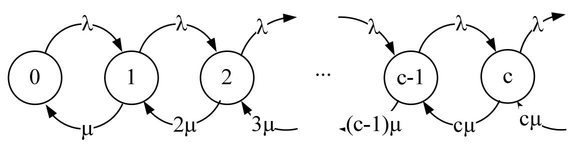
66

Hàng đợi M/M/c (1)



- Tất cả các tốc độ đến đều là λ
- $p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0$
- $p_2 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) p_1 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$
- $\rightarrow p_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 \, với \; i \leq c$

Hàng đợi M/M/c (2)



- $Khi \; i \geq c \; thì$
  - $p_{c+1} = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right) p_c = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0$
  - $\rightarrow p_i = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{i-c}\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0$
  - $\rightarrow p_i = \frac{1}{c!c^{i-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$

M/M/c(3)

- Mà ta có $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

$$\sum_{i=0}^{c-1} p_i + \sum_{i=c}^{\infty} p_i = 1\ (*)$$

- Thay $p_i = \frac{1}{c!c^{i-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$ vào $\sum_{i=c}^{\infty} p_i$ ta có

$$\sum_{i=c}^{\infty} p_i = \sum_{i=c}^{\infty} \frac{1}{c!\,c^{i-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$$

69

M/M/c(4)

$$Từ\ \sum_{i=c}^{\infty} p_i = \sum_{i=c}^{\infty} \frac{1}{c!\,c^{i-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0\ ta\ có$$

$$\rightarrow \sum_{i=c}^{\infty} p_i = \sum_{i=c}^{\infty} \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^i p_0$$

Đặt $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ $\rightarrow \sum_{i=c}^{\infty} p_i = \sum_{i=c}^{\infty} \frac{c^c}{c!}\rho^i p_0$ Thay $i = j + c$ $ta\ có$

$$\rightarrow \sum_{i=c}^{\infty} p_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c^c}{c!}\rho^{j+c} p_0 \quad \rightarrow \sum_{i=c}^{\infty} p_i = \frac{(c\rho)^c}{c!} p_0 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j$$

70

M/M/c(5)

- Mà ta có $\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \frac{1}{1-\rho}$ $với\ \rho < 1$

$$\rightarrow \sum_{i=c}^{\infty} p_i = \frac{(c\rho)^c}{c!\,(1-\rho)} p_0 \ (**)$$

- Thay p_i= $\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$ vào $\sum_{i=0}^{c-1} p_i$

$$\sum_{i=0}^{c-1} p_i = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 \ (***)$$

71

M/M/c(6)

- Thay (**) và (***) vào (*) ta có

$$\sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 + \frac{(c\rho)^c}{c!\,(1-\rho)} p_0 = 1$$

$$\rightarrow p_0 = [\sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{(c\rho)^c}{c!\,(1-\rho)}]^{-1}$$

72

M/M/c(7)

- Xác suất xuất hiện hàng đợi

$$P_Q = \sum_{i=c}^{\infty} p_i$$

- Từ (**) ta có $\rightarrow P_Q = \sum_{i=c}^{\infty} p_i = \frac{(c\rho)^c}{c!\,(1-\rho)} p_0$

$$\rightarrow P_Q = \sum_{i=c}^{\infty} p_i = \frac{1}{c!\,(1-\rho)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0$$

Công thức Erlang C

$$E_{2,n}(A) = P(w>0) = \frac{\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}$$

M/M/c(8)

- Số yêu cầu trung bình trong hàng đợi

$$N_Q = \sum_{i=c}^{\infty} (i-c) p_i$$

Thay $i = j + c$ ta có $N_Q = \sum_{j=0}^{\infty} j p_{j+c}$

- Từ $p_i = \frac{1}{c!\,c^{i-c}} (c\rho)^i p_0$ ta có $p_{j+c} = \frac{1}{c!\,c^j} (c\rho)^{j+c} p_0$
- $p_{j+c} = \frac{(c\rho)^c}{c!} \rho^j p_0$ $\rightarrow N_Q = \frac{(c\rho)^c}{c!} p_0 \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j$

M/M/c(9)

- Số yêu cầu trung bình trong hàng đợi (cont.)

$$Vì \sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \text{ với } \rho < 1 \text{ thay vào } \quad N_Q = \frac{(c\rho)^c}{c!} p_0 \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j \text{ ta có}$$

$$\rightarrow N_Q = \frac{(c\rho)^c}{c!} p_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\rightarrow N_Q = \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} p_0 \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

- Mà ta có $P_Q = \frac{(c\rho)^c}{c!\,(1-\rho)} p_0$

$$\rightarrow N_Q = P_Q \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

75

M/M/c (10)

- Thời gian trung bình của yêu cầu trong hàng đợi
- $T_Q = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)} = \frac{P_Q}{c\mu - \lambda}$
- Trễ trung bình của yêu cầu
- $T = \frac{1}{\mu} + T_Q = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{c\mu - \lambda}$

76

M/M/c (11)

- Số yêu cầu trung bình trong hệ thống
- $N = \lambda$T
- Thay T= $\frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{c\mu - \lambda}$ vào công thức trên ta có
- N= $\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda P_Q}{c\mu - \lambda}$= cρ $+ \frac{\rho P_Q}{1-\rho} = \mathrm{A} + \frac{A.P_Q}{n-A}$

Erlang C (4)

- $N_Q = \frac{A.P_Q}{n-A}$
- $N = N_Q + A$
- $T_Q = \frac{N_Q}{\lambda}$
- $T = \frac{L}{\lambda}$

Erlang C (5)

- Xác suất cuộc gọi phải chờ lâu hơn khoảng thời gian *t*
  - $P(w > t) = P_Q.e^{-(n\mu-\lambda)t}$
  - $P(w > t) = P_Q.e^{-\mu(n-A)t}$
  - $P(w > t) = P_Q.e^{-(n-A)\frac{t}{AHT}}$
    - AHT: Thời gian giữ cuộc gọi trung bình

F E T

79

Ví dụ 4 Erlang C

- Cho một hệ thống trễ có 5 đường dây điện thoại, nhận được trung bình 90 cuộc gọi mỗi giờ, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- Hãy tính số lượng trung bình cuộc gọi trong hệ thống và xác suất cuộc gọi sẽ được trả lời trong vòng 10 giây.

F E T

80

Ví dụ 4 Erlang C (2)

- hệ thống trễ có 5 đường dây điện thoại,
- 90 cuộc gọi mỗi giờ,
- mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- hãy tính số lượng trung bình cuộc gọi trong hệ thống và xác suất cuộc gọi sẽ được trả lời trong vòng 10 giây.
- A=λxTs=$\frac{90}{60}x2 = 3\ (Erl)$

81

Ví dụ 4 Erlang C (3)

$$E_{2,n}(A) = P(w>0) = \frac{\frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-A}}$$

- n=5, P(w>0)=0.236 .
- Số lượng cuộc gọi trung bình trong hệ thống
- N=N_{Q+}Ns=$\frac{AxP(w>0)}{n-A} + A = 3.354\ (\,cuộc\ gọi)$

82

Ví dụ 4 Erlang C (3)

$$P(w > t) = P_Q . e^{-(n-A)\frac{t}{AHT}}$$

- n=5, P(w>0)=0.236 .
- xác suất cuộc gọi sẽ được trả lời trong vòng 10 giây. mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- $P(w > 10s)$=0.2; $P(w \leq 10s)$=1-0,2=0.8

83

Ví dụ 5 Erlang C

- Cho một hệ thống trễ có 4 đường dây điện thoại, nhận được trung bình 60 cuộc gọi mỗi giờ, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- Tính thời gian trung bình cuộc gọi được trả lời và xác suất cuộc gọi sẽ được trả lời trong vòng 15 giây.

84

Ví dụ 5 Erlang C (2)

- Cho một hệ thống trễ có 4 đường dây điện thoại, nhận được trung bình 60 cuộc gọi mỗi giờ, mỗi cuộc gọi có thời gian trung bình là 2 phút.
- A=λxTs=$\frac{60}{60}x2 = 2\ (Erl)$
- P(w>0)=0.1739

85

Ví dụ 5 Erlang C (3)

- Xác suất để cuộc gọi sẽ được trả lời trong vòng 15giây
- =1- Xác suất phải chờ hơn 15s
- =$1 - P(w > 0).e^{-(\mu-\lambda)t} \approx 0{,}8645$
- Vậy xác suất để cuộc gọi sẽ được trả lời trong vòng 15 giây là 86.45%

86

Ví dụ 5 Erlang C (4)

- Thời gian trung bình cuộc gọi được trả lời:

$T_q = \frac{P(w>0)}{n\mu - \lambda} = \frac{0.1739}{4x30-60} = 0.002898(giờ) =$
$10.43(giây)$

87

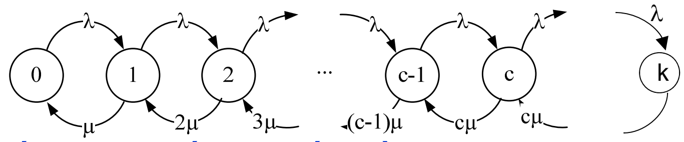
Ví dụ 5 Erlang C (5)

- Thời gian trung bình cuộc gọi được trả lời:

$T_q = \frac{P(w>0)}{n\mu - \lambda} = \frac{0.1739}{4x0.5-1} = 0.1739(phút) =$
$10.43(giây)$

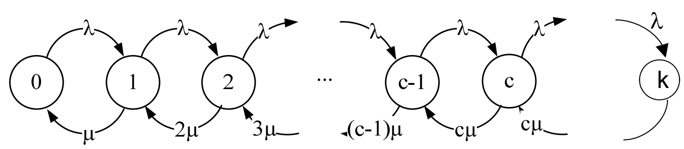
88

Hàng đợi M/M/c/k (1)



- Tất cả các tốc độ đến đều là λ
- $p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0$
- $p_2 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) p_1 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$
- $\rightarrow p_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 \, với \; i \leq c$

Hàng đợi M/M/c/k (2)



- $Khi \; i \geq c \; thì$
  - $p_{c+1} = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right) p_c = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right) \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0$
  - $\rightarrow p_i = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{i-c} \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0$
  - $\rightarrow p_i = \frac{1}{c! c^{i-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$

M/M/c/k(3)

- Mà ta có $\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$

$$\sum_{i=0}^{c-1} p_i + \sum_{i=c}^{k} p_i = 1\ (*)$$

- Thay $p_i = \frac{1}{c! c^{i-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$ vào $\sum_{i=c}^{\infty} p_i$ ta có

$$\sum_{i=c}^{\infty} p_i = \sum_{i=c}^{\infty} \frac{1}{c!\, c^{i-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$$

91

M/M/c/k(4)

$$Từ \sum_{i=c}^{k} p_i = \sum_{i=c}^{k} \frac{1}{c!\, c^{i-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0\ ta\ có$$

$$\rightarrow \sum_{i=c}^{k} p_i = \sum_{i=c}^{k} \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^i p_0$$

Đặt $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ $\rightarrow \sum_{i=c}^{k} p_i = \sum_{i=c}^{k} \frac{c^c}{c!} \rho^i p_0$ Thay $i = j + c\ ta\ có$

$$\rightarrow \sum_{i=c}^{k} p_i = \sum_{j=0}^{k-c} \frac{c^c}{c!} \rho^{j+c} p_0 \quad \rightarrow \sum_{i=c}^{k} p_i = \frac{(c\rho)^c}{c!} p_0 \sum_{j=0}^{k-c} \rho^j$$

92

M/M/c/k(5)

- Mà ta có $\sum_{j=0}^{k-c} \rho^j = \frac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho}$ $với\ \rho < 1$

$$\rightarrow \sum_{i=c}^{k} p_i = \frac{(c\rho)^c(1-\rho^{k-c+1})}{c!\,(1-\rho)} p_0\ (**)$$

- Thay $p_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$ vào $\sum_{i=0}^{c-1} p_i$

$$\sum_{i=0}^{c-1} p_i = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0\ (***)$$

93

M/M/c/k(6)

- Thay (**) và (***) vào (*) ta có

$$\sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 + \frac{(c\rho)^c(1-\rho^{k-c+1})}{c!\,(1-\rho)} p_0 = 1$$

$$\rightarrow p_0 = [\sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{(c\rho)^c(1-\rho^{k-c+1})}{c!\,(1-\rho)}]^{-1}$$

94

Ví dụ M/M/c/k

- Cho hệ thống hàng đợi **M/M/2/7**. Các bản tin đến hệ thống với tốc độ trung bình 125 bản tin/1 phút. Tốc độ phục vụ của 1 server là 250 bản tin/1 phút. Biểu diễn hệ thống và tính toán :
- Xác suất có **2** bản tin trong hệ thống
- Số lượng bản tin trung bình trong hệ thống

Ví dụ M/M/c/k(2)

- Xác suất có **2** bản tin trong hệ thống
- Số lượng bản tin trung bình trong hệ thống
- $p_0 = 0.6, p_1 = 0.3, p_2 = 0.075,$
- $p_3 = 0.01875, p_4 = 0.0046875, p_5 = 0.001171875$
- $p_6 = 0.0002929688, p_7 = 0.0000732422$
- $N = \sum_{i=0}^{7} i\, p_i \approx 0{,}53316$