TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG CƠ SỞ II
BỘ MÔN KHOA HỌC CƠ BẢN

BÀI GIẢNG
LÍ THUYẾT XÁC SUẤT THỐNG KÊ TOÁN

PHẦN 1: XÁC SUẤT

Thành phố Hồ Chí Minh

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1.1. Bổ trợ về đại số tổ hợp

Quy tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó được chia thành k giai đoạn. Có n_1 cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, n_2 cách thực hiện giai đoạn thứ hai, ..., n_k cách thực hiện giai đoạn thứ k. Khi đó ta có

$$n = n_1.n_2....n_k$$

cách thực hiện công việc.

Chỉnh hợp

Chỉnh hợp chập k của n phần tử (k ≤n) là một nhóm (bộ) có thứ tự gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử kí hiệu là A_n^k, được tính:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

Chỉnh hợp lặp

Chỉnh hợp lặp chặp k của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử chọn ra từ n phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể có mặt 1, 2, ..., k lần trong nhóm.

Số chỉnh hợp lặp chặp k của n phần tử được kí hiệu B_n^k.

$$B_n^k = n^k$$

Hoán vị

Hoán vị của m phần tử là một nhóm có thứ tự gồm đủ mặt m phần tử đã cho. Số hoán vị của m phần tử được kí hiệu là P_m.

$$P_m = m!$$

Tổ hợp

Tổ hợp chặp k của n phần tử (k≤n) là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử khác nhau chọn ra từ n phần tử đã cho. Số tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu là C_n^k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Chú ý:

i) Quy ước 0! = 1.

ii) $C_n^k = C_n^{n-k}$

iii) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

1.2. Phép thử và biến cố

Phép thử và biến cố

Phép thử là việc thực hiện một nhóm các điều kiện xác định nào đó (chẳng hạn làm thí nghiệm) để quan sát một hiện tượng có xảy ra hay không. Hiện tượng có xảy ra hay không trong kết cục của phép thử gọi là *biến cố*.

Một phép thử được gọi là *ngẫu nhiên* nếu như ta không biết trước hay dự đoán chính xác kết quả của nó.

Ví dụ.

+ Tung một con xúc xắc xuống đất để quan sát lật lên mặt nào là một phép thử. Việc lật lên một mặt nào đó gọi là biến cố.
+ Muốn biết sản phẩm trong hộp là sản phẩm tốt hay xấu thì ta thực hiện phép thử: lấy ra từ hộp một sản phẩm và quan sát xem nó là sản phẩm tốt hay xấu; Hiện tượng: sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt, hoặc sản phẩm lấy ra là sản phẩm xấu là các biến cố.
+ Một hộp đựng 10 sản phẩm trong đó có 7 sản phẩm tốt, 3 sản phẩm xấu. Lấy ra một sản phẩm (tức là ta thực hiện một phép thử), gọi A = (Lấy được sản phẩm tốt) thì A là một biến cố.

Các loại biến cố

- *Biến cố chắc chắn* là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi thực hiện một phép thử. Biến cố chắc chắn được kí hiệu là Ω.
- *Biến cố không thể có* là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Biến cố không thể có kí hiệu là $\varnothing$.
- *Biến cố ngẫu nhiên* là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Các biến cố ngẫu nhiên được kí hiệu là A, B, C….

Ví dụ. Thực hiện phép thử G là tung một con xúc xắc thì có 6 biến cố sơ cấp là "xuất hiện 1 chấm", "xuất hiện 2 chấm", ...,"xuất hiện 6 chấm".

+ Biến cố "xuất hiện mặt có số chấm ≤ 6" là biến cố chắc chắn.
+ Biến cố "xuất hiện mặt có số chấm = 7" là biến cố không thể có.
+ Biến cố "xuất hiện mặt 1 chấm " là biến cố ngẫu nhiên.

1.3. Mối quan hệ giữa các biến cố

Quan hệ kéo theo

Biến cố A gọi là *kéo theo* biến cố B, kí hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì kéo theo biến cố B xảy ra khi thực hiện phép thử.

Ví dụ. "xuất hiện mặt 1 chấm " ⇒ "xuất hiện mặt có số chấm ≤ 6".

Quan hệ tương đương

Hai biến cố A và B được gọi là *tương đương*, kí hiệu $A = B$ nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

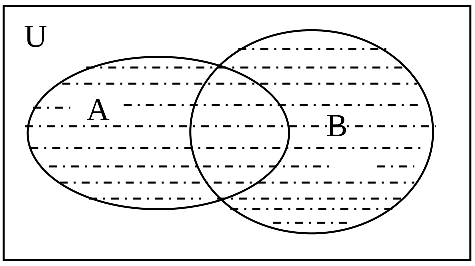
Ví dụ. "xuất hiện mặt có số chấm là chẵn" = "xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 2".

Biến cố tổng

Biến cố tổng (còn gọi là tổng) của hai biến cố A và B, ký hiệu $A + B$ hay $A \cup B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong hai biến cố A, B xảy ra.

Tổng quát: Tổng của n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ ký hiệu $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + ... + A_n$ hay $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, là biến cố xảy ra nếu ít nhất có 1 trong các biến cố A_k xảy ra trong phép thử.

Ví dụ. Hai thợ săn cùng bắn vào một con thú.



A = "Người thứ nhất bắn trúng"

B = "Người thứ hai bắn trúng"

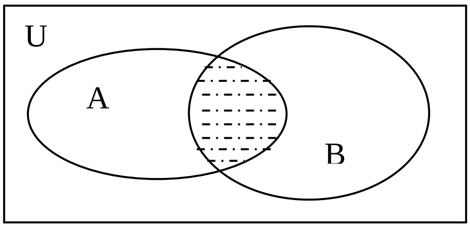
C = A + B = "Con thú bị bắn trúng"

Biến cố tích

Biến cố tích (hay còn gọi là tích) của hai biến cố A và B, kí hiệu $A.B$ hay $A \cap B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra và B xảy ra.

Tổng quát: Tích của n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$, ký hiệu $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1.A_2...A_n$ hay $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A_1 xảy ra và A_2 xảy ra …và A_n xảy ra trong phép thử.

Ví dụ. Hai người cùng bắn một con thú.



A = "Người thứ nhất bắn trượt"

B = "Người thứ hai bắn trượt"

C = AB = "Con thú không bị bắn trúng".

Biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B gọi là hai biến cố *xung khắc* nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra, tức là $A.B = \varnothing$.

Biến cố xung khắc từng đôi

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là *xung khắc từng đôi* nếu 2 biến cố bất kì trong nhóm xung khắc nhau. Nghĩa là $A_i.A_j = \varnothing (i \neq j)$

Biến cố đối lập

$\overline{A}$ được gọi là *biến cố đối lập* của A khi và chỉ khi $\overline{A}$ xảy ra thì A không xảy ra và ngược lại. Tức là

$$\begin{cases} A.\overline{A} = \varnothing \\ A + \overline{A} = \Omega \end{cases}.$$

Biến cố hiệu

Biến cố hiệu của hai biến cố A và B, kí hiệu $A \setminus B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi biến cố A xảy ra và biến cố B không xảy ra. Nghĩa là $A \setminus B = A.\overline{B}$.

Ví dụ. Gieo xúc xắc.

B = "Xuất hiện mặt 3 chấm"

A = "Xuất hiện mặt có số chấm là bội của 3"

A\B = "Xuất hiện mặt 6 chấm"

Một số tính chất

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $A + \Omega = \Omega$
3. $A.\Omega = A$
4. $A + \varnothing = A$
5. $A.\varnothing = \varnothing$
6. $A + A = A$
7. $A.A = A$
8. $A + B = B + A$
9. $A.B = B.A$
10. $A + (B.C) = (A + B).(A + C)$
11. $A.(B + C) = A.B + A.C$
12. $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$
13. $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$
14. $\overline{A + B + C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$
15. $\overline{A.B.C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Biến cố sơ cấp

Biến cố sơ cấp là kết quả đơn giản nhất của phép thử, là biến cố không thể biểu diễn thành tổng của các biến cố khác.

Tập hợp tất các biến cố sơ cấp trong một phép thử được gọi là *không gian các biến cố sơ cấp*. Kí hiệu là Ω.

Mỗi biến cố ngẫu nhiên A đều biểu diễn được thành tổng của các biến cố sơ cấp nào đó. Các biến cố sơ cấp trong tổng này được gọi là các *biến cố thuận lợi* cho A.

Các biến cố đồng khả năng là các biến cố có cùng khả năng xuất hiện như nhau trong một phép thử.

Nhóm đầy đủ các biến cố

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ của một phép thử được gọi là một *nhóm đầy đủ* (hay hệ đầy đủ) nếu trong kết quả của phép thử sẽ xảy ra một và chỉ một trong các biến cố đó. Tức là

$$\begin{cases} A_i . A_j = \varnothing, 1 \le i \ne j \le n \\ A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega \end{cases}$$

Chú ý: A và $\overline{A}$ tạo nên một nhóm đầy đủ các biến cố.

1.4. Xác suất biến cố: định nghĩa và tính chất

Xác suất của một biến cố là một số đặc trưng cho khả năng xuất hiện biến cố đó trong phép thử.

1.4.1. Định nghĩa cổ điển về xác suất

Giả sử trong một phép thử có tất cả n biến cố sơ cấp đồng khả năng, trong đó có m biến cố thuận lợi cho biến cố A. Khi đó *xác suất* của A, kí hiệu P(A), được xác định như sau

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Ví dụ 1. Một hộp có 10 sản phẩm trong đó có 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Tính xác suất để lấy được phế phẩm.

Ví dụ 2. Có 3 khách hàng đi vào một ngân hàng có 6 quầy phục vụ. Tính xác suất để:

a) Cả 3 khách cùng đến một quầy

b) Mỗi người đến một quầy khác nhau

c) Hai trong ba người đến một quầy

d) Chỉ một khách đến quầy số 1.

Ví dụ 3. Một hộp có 10 sản phẩm trong đó có 4 phế phẩm.

a) Lấy ngẫu nhiên có hoàn lại lần lượt từng sản phẩm ra 2 sản phẩm từ hộp. Tính xác suất lấy được 2 phế phẩm.

b) Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại lần lượt từng sản phẩm ra 2 sản phẩm từ hộp. Tính xác suất lấy được 2 phế phẩm.

Ví dụ 4. Một công ty tuyển 3 nhân viên cho 3 vị trí giám đốc, trợ lý giám đốc và trưởng phòng kinh doanh. Biết có 50 người dự tuyển trong đó có 20 nữ. Tính xác suất để trong 3 người được tuyển có trợ lý giám đốc là nữ.

Các tính chất của xác suất

i) $\begin{array}{l} P(\Omega)=1 \\ P(\varnothing)=0 \end{array}$.

ii) $0 \le P(A) \le 1$ với A là biến cố bất kì.

iii) Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \le P(B)$.

Ưu điểm và hạn chế của định nghĩa cổ điển về xác suất

- Ưu điểm: Không cần tiến hành phép thử
- Hạn chế: Đòi hỏi số kết cục của phép thử hữu hạn và đồng khả năng.

1.4.2. Định nghĩa thống kê về xác suất

Tần suất

Tiến hành n phép thử. Gọi m là số lần xuất hiện biến cố A trong n phép thử này. Số $\frac{m}{n}$ gọi là *tần suất* xuất hiện biến cố A trong n phép thử. Kí hiệu $f_n(A)$

Xác suất

Xác suất xuất hiện biến cố A trong một phép thử là một số không đổi mà tần suất $f_n(A)$ dao động rất ít xung quanh nó khi phép thử tăng lên vô hạn lần.

Trong thực tế với phép thử đủ lớn $P(A) \approx f_n(A)$

Ví dụ. Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu, người ta tiến hành tung một đồng xu nhiều lần và thu được kết quả sau đây:

Người tiến hành thử	**Số lần tung**	**Số lần được mặt sấp**	**Tần suất xuất hiện mặt sấp**
Button	4040	2048	
Person	12000	6019	
Person	24000	12012	

Ưu điểm và hạn chế của định nghĩa thống kê

- Ưu điểm: không đòi hỏi số kết cục của phép thử phải là hữu hạn và đồng khả năng.
- Hạn chế: Phải tiến hành rất nhiều phép thử mà trong thực tế điều này không phải lúc nào cũng làm được (có thể khắc phục một phần bằng cách dùng bảng số ngẫu nhiên).

1.4.3. Định nghĩa hình học về xác suất

Coi các kết cục đồng khả năng của một phép thử có thể biểu diễn bằng miền hình học D nào đó. Còn các kết cục thuận lợi cho biến cố A được biểu diễn bằng miền hình học G. Khi đó

P(A)=(Số đo miền G): (Số đo miền D)

Số đo ở đây có thể là độ dài, diện tích, thể tích.

Ví dụ. Hai người hẹn gặp nhau tại một địa điểm xác định vào khoảng từ 20h đến 21h. Mỗi người đến (và chắc chắn đến) địa điểm đã hẹn trong khoảng thời gian đó một cách độc lập, chờ 20 phút, nếu không gặp người kia thì bỏ đi. Tính khả năng (xác suất) để hai người gặp nhau.

Giải

Gọi A là biến cố hai người gặp nhau; x, y là thời điểm đến của mỗi người. Rõ ràng x, y đều là một điểm ngẫu nhiên trong đoạn [20; 21]. Để G xảy ra, tức là hai người gặp nhau, ta phải có $|x-y| \le 20$ (phút) = 1/3(giờ).

Xem cặp (x, y) như là một điểm trên mặt phẳng tọa độ. Khi đó ta được hai miền phẳng

D = { (x, y) / 20 ≤ x ≤ 21; 20 ≤ y ≤ 21}: biểu diễn các trường hợp có thể xảy ra;

$G = \{(x, y) \in D : |x-y| \le 1/3\}$ biểu diễn các trường hợp thuận lợi cho biến cố A xảy ra.

Do đó

$$P(A) = \frac{S_G}{S_D} = \frac{5/9}{1} = \frac{5}{9}$$

Nguyên lý xác suất nhỏ

Nếu một biến cố có xác suất rất nhỏ thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra

Mức xác suất nhỏ này được gọi là *"mức ý nghĩ*a". Tùy thuộc vào từng bài toán, mức ý nghĩa này có thể được lấy trong khoảng từ 0,00001 đến 0,1.

Nguyên lí xác suất lớn

Nếu biến cố có xác suất rất lớn (gần bằng 1) thì thực tế có thể cho rằng biến cố đó sẽ xảy ra trong một phép thử

Tùy thuộc vào từng bài toán, xác suất lớn này có thể được lấy 0,95; 0,99….

1.5. Các định lý cộng, nhân xác suất và các hệ quả

1.5.1. Định lý cộng

Cho A và B là hai biến cố tùy ý**.** Khi đó

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Hệ quả: Cho n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$. Khi đó

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n)$$

Chú ý: Nếu A và B xung khắc thì $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ xung khắc từng đôi thì $\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

$P(A)+P(\overline{A})=1$.

Ví dụ 1. Một khách hàng định mua hộp sản phẩm bằng cách lấy ngẫu nhiên ra cùng lúc 4 sản phẩm từ hộp để kiểm tra, nếu có không quá 1 phế phẩm thì mua hộp sản phẩm. Tính xác suất:

a) Khách hàng mua hộp sản phẩm (A).

b) Khách hàng không mua hộp sản phẩm (B).

Biết rằng hộp sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 phế phẩm

Ví dụ 2. Một lớp có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên giỏi Toán, 50 sinh viên giỏi Văn và 20 sinh viên giỏi cả Toán và Văn. Sinh viên nào giỏi ít nhất 1 trong 2 môn này sẽ được thưởng. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong lớp. Tìm xác suất để sinh viên được thưởng?

1.5.2. Xác suất có điều kiện- Định lý nhân xác suất

Xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A được tính trong điều kiện biến cố B đã xảy ra rồi gọi là *xác suất có điều kiện* của A với điều kiện B, kí hiệu là $P(A|B)$, và được xác định như sau

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} (P(B) > 0).$$

Ví dụ. Số liệu thống kê về nhân viên của một công ty được cho trong bảng

	Độc thân	Có gia đình
Nam	30	25
Nữ	20	15

Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của công ty

a) Giả sử chọn được nhân viên công ty là độc thân. Tính xác suất người đó là nữ

b) Giả sử chọn được nhân viên công ty là nam. Tính xác suất người đó đã có gia đình

Định lý nhân xác suất

Cho A, B là hai biến cố bất kì. Khi đó

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Hệ quả

Với $A_1, A_2, ..., A_n$ là các biến cố bất kì thì

$$P(A_1.A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

Ví dụ. Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó có hai sản phẩm xấu. Chọn lần lượt mỗi lần một sản phẩm cho đến khi phát hiện đủ hai sản phẩm xấu thì dừng. Tính xác suất để dừng lại ở lần chọn thứ 3 nếu việc chọn là chọn không hoàn lại.

Hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B gọi là độc lập với nhau nếu

$$P(A|B) = P(A) \text{ hoặc } P(B|A) = P(B)$$

Tức là việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này đều không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra biến cố kia.

Nhận xét: Nếu A và B độc lập với nhau thì A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và B cũng độc lập với nhau

$$\text{A, B độc lập} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là độc lập *từng đôi* nếu 2 biến cố bất kì trong nhóm độc lập với nhau.

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là *độc lập toàn phần* với nhau nếu mỗi biến cố độc lập với các biến cố còn lại cũng như với tích của một số bất kỳ các biến cố còn lại

Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ độc lập toàn phần với nhau thì

$$P(A_1.A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

Ví dụ. Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó có hai sản phẩm xấu. Chọn lần lượt mỗi lần một sản phẩm cho đến khi phát hiện đủ hai sản phẩm xấu thì dừng. Tính xác suất để dừng lại ở lần chọn thứ 3 nếu việc chọn là chọn có hoàn lại.

1.5.3. Công thức xác suất đầy đủ- Công thức Bayer

Công thức xác suất đầy đủ.

Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là một nhóm đầy đủ các biến cố và B là một biến cố bất kỳ. Khi đó

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Công thức Bayer

Công thức Bayes mang tên của linh mục và nhà toán học người Anh **Thomas Bayes** (1701 – 1761). Thomas Bayes là một linh mục, nhưng cũng là một nhà toán học tài tử. Tuy là "tài tử" nhưng di sản của ông để lại (chỉ một bài báo duy nhất) làm thay đổi cả thế giới khoa học, thay đổi cách suy nghĩ về sự bất định trong khoa học, và chỉ ra một phương pháp suy luận hoàn toàn logic. Ngày nay, phương pháp Bayes được ứng dụng trong hầu hết tất cả lĩnh vực khoa học, kể cả trong công nghệ thông tin (ứng dụng Bayes trong việc ngăn chặn những thư rác điện tử), tiên lượng kinh tế, phân tích các mối quan hệ xã hội, và lý giải qui trình suy nghĩ của con người. Ngày nay, suy luận theo trường phái Bayes được nhắc đến trên báo chí đại chúng chứ không chỉ trong báo khoa học. Những tờ báo lớn như *New York Times, Economist, Guardian*, v.v. đều thường xuyên nhắc đến phương pháp suy luận Bayes.

Công thức Bayes được dùng để đánh giá lại xác suất xảy ra của giả thuyết A_i khi biến cố A đã xảy ra.

Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là một nhóm đầy đủ các biến cố và B là một biến cố bất kỳ. Khi đó

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Công thức Bayes trông rất đơn giản nhưng có ý nghĩa rất sâu xa, thể hiện cách suy nghĩ rất phổ biến của tất cả chúng ta, đó là chúng ta đánh giá sự kiện một cách tích lũy bằng tổng hợp những sự kiện chúng ta *đã biết* cộng với *chứng cứ* thực tế.

Xác suất sự kiện - *posterior information* – thông tin hậu định.

Xác suất sự kiện ta đã biết - *prior information* – thông tin tiền định: $P(A_i)$

Xác suất thứ ba là thông tin thực tế - *likelihood*, biến cố B xảy ra.

Xác suất hậu định = Xác suất tiền định + Dữ liệu thực tế

Ví dụ 1. Có hai hộp bi hình dáng giống nhau. Hộp 1 có 8 bi đỏ, 3 bi vàng. Hộp 2 có 10 bi đỏ, 4 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra 1 bi. Tính xác suất lấy được bi đỏ.

Ví dụ 2. Một nhà máy sản xuất bóng đèn có ba phân xưởng. Phân xưởng I sản xuất 25%, phân xưởng II sản xuất 35%, phân xưởng III sản xuất 40% số bóng đèn. Tỉ lệ phế phẩm của từng phân xưởng lần lượt là 3%, 2%, 1%. Lấy ngẫu nhiên một bóng đèn do nhà máy sản xuất.

a) Tính xác suất để lấy được phế phẩm

b) Biết rằng sản phẩm này là chính phẩm. Tính xác suất để nó do phân xưởng III sản xuất.

c) Nếu lấy được phế phẩm. Khả năng sản phẩm do phân xưởng nào sản xuất là nhiều nhất

Ví dụ 3. Hộp 1 có 10 quả cầu đỏ, 5 quả cầu vàng. Hộp 2 có 7 quả cầu đỏ, 3 quả cầu vàng. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả cầu, sau đó lấy ngẫu nhiên 1 quả từ hai quả cầu này. Tìm xác suất quả cầu lấy sau cùng là quả cầu vàng.

1.5.4. Dãy phép thử Bernoulli

Dãy n phép thử Bernoulli là dãy n phép thử thỏa mãn 3 điều kiện sau:

- Các phép thử của dãy độc lập với nhau (nghĩa là kết quả của mỗi phép thử không phụ thuộc vào kết quả của các phép thử khác);
- Mỗi phép thử có hai kết quả: A và $\overline{A}$;
- Xác suất xảy ra biến cố A trong mỗi phép thử đều bằng p.

Công thức Bernoulli

Xác suất để trong dãy n phép thử Bernoulli biến cố A xuất hiện đúng k lần, kí hiệu $P_n(k)$, được tính bởi công thức

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2...,n$$

Ví dụ. Trong phân xưởng có 5 máy hoạt động , xác suất để trong ca mỗi máy bị hỏng đều bằng 0,1. Tìm xác suất để trong ca có đúng 2 máy hỏng.

1.5.5. Một số nghịch lý trong xác suất

Tính toán xác suất là một vấn đề nhiều khi hết sức tế nhị. Kể cả trong những bài toán tưởng chừng như rất đơn giản, cũng có thể tính ra kết quả sai mà khó phát hiện sai ở đâu. Phần này sẽ gồm một số "nghịch lý" trong xác suất để minh họa điều đó . Những nghịch lý này cho thấy chúng ta cần hết sức cẩn thận trong lúc lập mô hình tính toán xác suất, đặc biệt là xác suất có điều kiện, kiểm tra lại những điều tưởng chừng như hiển nhiên, để tránh sai lầm.

Nghịch lý 1 (Nghịch lý Simpson). Thuốc nào tốt hơn?

Một người nghiên cứu muốn xác định xem giữa 2 loại thuốc cùng để chữa 1 bệnh, loại nào tốt hơn. Kết quả thống kê về lượng người chữa được khỏi bệnh, phân biệt theo giới tính, được viết dưới đây

Giới tính: Nữ	Thuốc I	Thuốc II
Chữa được	150	15
Không chữa được	850	285

Giới tính: Nam	Thuốc I	Thuốc II
Chữa được	190	720
Không chữa được	10	180

Dựa vào bảng thống kê trên, có 2 câu trả lời trái ngược nhau như sau cho câu hỏi thuốc nào tốt hơn: 1) Thuốc I đem cho 1200 người dùng, chữ được bệnh cho 340 người. Thuốc II đem cho 1200 người dùng, chữa được 735 người, như vậy thuôc II tốt hơn. 2) Đối với nữ, tỷ lệ chữa được bệnh của Thuốc I là 15%, của Thuốc II là 5%. Đối với nam, tỷ lệ chữa được bệnh của thuốc I là 95%, của thuốc II là 80%. Trong cả hai trường hợp thì tỷ lệ chữa được bệnh của thuốc I cao hơn, vậy nên thuốc I tốt hơn.

Trong hai câu trả lời trên câu trả lời nào đáng tin? Vì sao? Nghịch lý nằm ở đâu?

Nghịch lý 2. Hoàng tử có chị em gái không?

Biết rằng cha mẹ của hoàng tử Romeo có 2 con (hoàng tử Romeo là một trong hai người con đó). Hỏi xác suất để hoàng tử Romeo có sister (chị gái hoặc em gái) là bao nhiêu? Có 2 đáp án sau:

1) Hoàng tử có 1 người anh chị em ruột. Có hai khả năng: hoặc người đó là con trai, hoặc là con gái. Như vậy xác suất để người đó là con gái (tức là hoàng tử có sister) là 1/2.

2) Có 4 khả năng cho 1 gia đình có 2 con: {B,B},{B,G},{G,B},{G,G}. (B = boy = con trai, G = girl = con gái, xếp theo thứ tự con thứ nhất - con thứ hai). Vì ta biết hoàng tử là

con trai (đây là điều kiện) nên loại đi khả năng {G,G}, còn 3 khả năng {B,B}, {B,G}, {G,B}. Trong số 3 khả năng đó thì có 2 khả năng có con gái. Như vậy xác suất để hoàng tử có sister là 2/3.

Trong hai đáp án trên, ắt hẳn phải có (ít nhất) 1 đáp án sai. Thế nhưng cái nào sai, sai ở chỗ nào?

Nghịch lý 3. Văn Phạm có phải là thủ phạm?

Một người đàn ông tên là Văn Phạm bị tình nghi là thủ phạm trong một vụ án. Cảnh sát điều tra được những tin sau đây: 1) ngoài nạn nhân chỉ có 2 người có mặt lúc xảy ra vụ án, một trong hai người đó là Văn Phạm, người kia cảnh sát không hề biết là ai, và một trong hai người đó là thủ phạm; 2) thủ phạm phải là đàn ông. Hỏi xác suất để "Văn Phạm là thủ phạm" là bao nhiêu?

Gọi người thứ hai mà cảnh sát không biết là ai là "X".

X có thể là đàn ông hoặc đàn bà.

Gọi A là biến cố "Văn Phạm là thủ phạm", B là biến cố "X là đàn ông", C là "thủ phạm là đàn ông". Có hai cách giải khác nhau như sau:

1)Theo công thức xác suất toàn phần ta có P(A) = P(A|B).P(B)+ P(A|B).P(B)

Nếu X là đàn bà thì X không thể là thủ phạm và Văn Phạm phải là thủ phạm, bởi vậy P(A|B) = 1.

Nếu X là đàn ông thì một trong hai người, X hoặc Văn Phạm, là thủ phạm, bởi vậy P(A|B) = 1/2. X có thể là đàn ông hoặc đàn bà, và ta coi số đàn ông bằng số đàn bà, bởi vậy P(B) = P(B) = 1/2. Từ đó ta có P(A) = (1/2).(1/2) + 1.(1/2) = 3/4, có nghĩa là xác suất để "Văn Phạm là thủ phạm" bằng 3/4.

2) Ta coi C là điều kiện, và muốn tính xác suất có điều kiện P(A|C) (xác suất để Văn Phạm là thủ phạm, khi biết rằng thủ phạm là đàn ông). Theo công thức Bayes ta có:

$$p(A\,|\,C) = \frac{p(A)\,p(C\,|\,A)}{p(A)\,p(C\,|\,A) + p(\bar{A})\,p(C\,|\,\bar{A})}$$

Ở trong công thức trên, P(A) là xác suất của biến cố "Văn Phạm là thủ phạm" nếu như chưa có điều kiện "thủ phạm là đàn ông". Vì một trong hai người Văn Phạm và X là thủ phạm, nên xác suất P(A) không có điều kiện ở đây là P(A) = 1/2. Ta có P(C|A) = 1 vì tất nhiên nếu Văn Phạm là thủ phạm thì thủ phạm là đàn ông. Ngược lại, P(C|A) = 1/2 (nếu X là thủ phạm, thì thủ phạm có thể là đàn ông hoặc đàn bà, khi mà chưa đặt điều kiện "thủ phạm là đàn ông"). Bởi vậy ta có:

$$p(A\,|\,C) = \frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

tức là xác suất để Văn Phạm là thủ phạm bằng 2/3.

Hai cách giải trên cho 2 đáp số khác nhau, như vậy (ít nhất) một trong hai cách giải trên là sai. Cách giải nào sai và sai ở chỗ nào?

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

❖ **Biến cố và xác suất**

Bài 1. Kiểm tra 4 sản phẩm . Gọi A_k là biến cố sản phẩm thứ k tốt. Hãy trình bày các biến cố sau qua A_k .

a. A: tất cả đều xấu

b. B: có ít nhất 1 sản phẩm xấu

c. C: có ít nhất 1 sản phẩm tốt

d. D: có đúng một sản phẩm xấu

e. E: có 2 sản phẩm tốt

Bài 2. Bắn vào bia 5 phát. Gọi A_i là biến cố bắn trúng ít nhất i phát. B_j là biến cố bắn trúng đúng j phát.

a. Diễn tả các biến cố $\overline{A_1}, \overline{B_1}, \overline{A_2}, \overline{B_2}$?

b. Hai biến cố $\overline{A_1}, \overline{B_1}$ có xung khắc nhau không?

c. Diễn tả các biến cố $A_1 + \overline{B_2}; B_1 + \overline{A_2}; A_1\overline{B_2}; \overline{A_2}B_1$?

Bài 3. Quan sát 4 sinh viên làm bài thi. Gọi B_j là biến cố sinh viên thứ j làm bài đạt yêu cầu. Hãy biểu diễn các biến cố sau đây qua B_j.

a. Có đúng một sinh viên đạt yêu cầu.

b. Có đúng 3 sinh viên đạt yêu cầu.

c. Có ít nhất một sinh viên đạt yêu cầu.

d. Không có sinh viên nào đạt yêu cầu.

Bài 4. Một lô hàng gồm 100 sản phẩm trong đó có 10 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra 20 sản phẩm. Tìm xác suất để trong 20 sản phẩm lấy ra:

a. Có 5 phế phẩm

b. Không có phế phẩm

Bài 5. Gieo đồng thời 2 con xúc sắc. Tìm xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên 2 con là 7.

Bài 6. Có hai hộp bi. Hộp 1 có 6 bi đỏ và 5 bi vàng. Hộp 2 có 7 bi đỏ và 6 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 1 bi. Tìm xác suất

a. Lấy được 2 bi cùng màu

b. Lấy được 2 bi khác màu

c. Lấy được 2 bi đỏ

Bài 7. Xếp ngẫu nhiên 5 người lên 7 toa tàu. Tính xác suất để

a. 5 người lên cùng toa đầu

b. 5 người lên cùng một toa

c. 5 người lên 5 toa khác nhau.

Bài 8. Một lô hàng có hai kiện sản phẩm. Mỗi kiện có 20 sản phẩm. Kiện 1 có 18 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm. Kiện 2 có 16 sản phẩm tốt và 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi kiện ra hai sản phẩm. Tính xác suất để trong 4 sản phẩm lấy ra có đúng 3 sản phẩm tốt

Bài 9. Một lô hàng gồm 20 sản phẩm trong đó có 5 phế phẩm. Người ta kiểm tra bằng phương pháp sau: kiểm tra lần lượt 4 sản phẩm (không hoàn lại). Nếu có ít nhất 1 trong 4 sản phẩm đó là phế phẩm thì loại lô hàng đó. Tìm xác suất để lô hàng đó được nhận?

- **Các định lý về xác suất**

Bài 10. Một xí nghiệp có hai ô tô hoạt động độc lập. Xác suất trong một ngày làm việc các ô tô này hỏng tương ứng là 0,08; 0,1. Tính xác suất trong 1 ngày làm việc xí nghiệp có

a. 2 ô tô hỏng

b. có 1 ô tô hỏng

c. có ô tô hỏng

d. Biết trong 1 ngày làm việc có ô tô không hỏng. Tính xác suất khi đó ô tô 2 không hỏng

Bài 11. Một công ty cần tuyển 4 nhân viên. Biết rằng có 20 người dự tuyển trong đó có 12 nam và 8 nữ.

a. Tính xác suất trong 4 người được tuyển có ít nhất 1 nam

b. An là một trong 12 nam dự tuyển. Biết rằng trong 4 người được tuyển có ít nhất 1 nam. Tính xác suất để An được tuyển

Bài 12. Có 3 bình đựng bi trong đó :

- bình loại 1 đựng 6 bi trắng 3 bi đỏ.
- bình loại 2 đựng 5 bi trắng 4 bi đỏ.
- bình loại 3 đựng 2 bi trắng 7 bi đỏ.

Lấy ngẫu nhiên 1 bình và từ bình đó lấy ra 1 bi.

a) Tính xác suất để lấy được bi trắng?

b) Biết rằng bi lấy ra là bi trắng. Tính xác suất để bình lấy ra là loại 3?

Bài 13. Có hai lô sản phẩm, mỗi lô có 10 sản phẩm. Lô thứ nhất có 3 sản phẩm loại 1, lô thứ hai có 4 sản phẩm loại 1. Từ lô thứ nhất lấy 1 sản phẩm bỏ sang lô thứ 2. Rồi từ lô thứ hai lấy 1 sản phẩm

a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ở lô thứ hai là loại 1.

b) Giả sử sản phẩm lấy ở lô thứ hai là loại 1. Nhiều khả năng sản phẩm bỏ từ lô thứ nhất sang lô thứ hai là loại gì

Bài 14. Trong một thúng cam có 42% cam Trung Quốc, 24% cam Thái Lan, 26% cam Campuchia và 8% cam Việt Nam. Trong số đó có một số cam hư gồm: 20% số cam của Trung Quốc, 10% số cam của Thái Lan, 12% số cam của Campuchia và 2% số cam của Việt Nam.

a) Tính xác suất để một người mua phải 1 trái cam TQ hư?

b) Tính xác suất để một người mua phải 1 trái cam hư?

c) Biết một người đã mua phải 1 trái cam hư. Tính xác suất để trái cam ấy của Campuchia

d) Biết một người đã mua phải 1 trái cam hư. Tính xác suất để trái cam ấy không của Việt Nam?

Bài 15. Kiện hàng 1 có 5 sản phẩm loại A, 1 sản phẩm loại B. Kiện hàng 2 có 2 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Từ mỗi kiện chọn ra ngẫu nhiên 1 sản phẩm đem giao cho khách hàng. Sau đó các sản phẩm còn lại dược dồn chung vào kiện hàng 3 đang trống.

a) Nếu ta lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kiện hàng 3 thì xác suất để chọn được sản phẩm loại B là bao nhiêu?

b) Nếu ta lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ kiện hàng 3, hãy tính xác suất để có ít nhất 1 sản phẩm loại B trong 2 sản phẩm được chọn?

Bài 16. Ở 1 vùng, tỷ lệ người dân hút thuốc lá là 30%. Biết rằng tỷ lệ người viêm họng trong số người hút thuốc lá là 60%. Còn tỷ lệ người viêm họng trong số người không thuốc lá là 10%.

a) Chọn ngẫu nhiên một người, biết rằng người đó viêm họng. Tính xác suất người đó hút thuốc lá

b) Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó hút thuốc lá.

Bài 17. Một người có 5 chìa khóa nhưng chỉ có 2 chìa mở được khóa cửa. Người đó thử từng chìa (thử xong nếu không mở được thì để riêng ra). Tính xác suất để lần thứ hai người đó mở được khóa.

Bài 18. Để trở thành nhân viên của công ty A, một người phải trải qua 2 lần phỏng vấn. Xác suất người đó đạt yêu cầu lần phỏng vấn thứ nhất là 0,7 và đạt yêu cầu lần phỏng vấn thứ 2 là 0,6. Nếu lần phỏng vấn thứ nhất đạt yêu cầu thì xác suất người đó đạt yêu cầu ở lần phỏng vấn thứ hai là 0,85. Tính xác suất:

a) Trong 2 lần phỏng vấn người đó có lần đạt yêu cầu.

b) Người đó đạt yêu cầu lần phỏng vấn thứ nhất nhưng không đạt yêu cầu ở lần phỏng vấn thứ hai.

c) Giả sử trong 2 lần phỏng vấn có lần người đó đạt yêu cầu. Tính xác suất khi đó người đó chỉ đạt yêu cầu lần 1.

- **Dãy phép thử Bernoulli**

Bài 19. Xác suất tiêu thụ điện không quá mức quy định của một nhà máy trong một ngày là 0,8. Tính xác suất trong 1 tuần (6 ngày)nhà máy

a) Có 4 ngày tiêu thụ điện không quá mức quy định

b) Có ngày tiêu thụ điện quá mức quy định

Bài 20. Một sinh viên thi 5 môn với xác suất đậu từng môn là 0,7. Tính xác suất sinh viên đó

a) Đậu 3 môn

b) Đậu ít nhất 1 môn

c) Đậu từ 1 đến 3 môn

Bài 21. Có 20 hộp sản phẩm. Mỗi hộp có 8 sản phẩm loại A, 2 sản phẩm loại B. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 1 sản phẩm để kiểm tra. Tính xác suất trong số sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm loại B.

Bài 22. Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Một sinh viên làm bài trắc nghiệm này bằng cách chọn ngẫu nhiên một trong bốn phương án trả lời cho mọi câu hỏi. Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 2đ, mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm. Tính xác suất để sinh viên này được 14 điểm

CHƯƠNG 2. BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

2.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên, phân loại biến ngẫu nhiên

2.1.1. Khái niệm

Biến ngẫu nhiên (hay đại lượng ngẫu nhiên) là một đại lượng mà trong kết quả của phép thử nó sẽ nhận một và chỉ một trong các giá trị có thể có của nó với một xác suất tương ứng nào đấy

Ví dụ. Các đại lượng sau là biến ngẫu nhiên

- Chiều cao của một người ở độ tuổi thanh thiếu niên.
- Số nốt xuất hiện khi gieo một con xúc xắc.
- Giá trị của một mã chứng khoá ở một thời điểm trong ngày.
- Tuổi thọ của một bóng đèn.

Ta kí hiệu biến ngẫu nhiên bằng các chữ in hoa X, Y, Z,… và các chữ thường x,y,z… để kí hiệu giá trị của chúng.

Xem biến ngẫu nhiên tương tự như số và các hàm số, ta có thể thực hiện các phép toán thông thường (cộng, trừ, nhân, chia,…). Với các phép toán như vậy, từ những biến ngẫu nhiên ban đầu chúng ta sẽ thu được những biến ngẫu nhiên mới.

Ví dụ. Một học sinh trung học phổ thông thi vào đại học cần phải có kết quả của một tổ hợp gồm ba môn. Điểm thi mỗi môn của bạn học sinh có thể xem là một biến ngẫu nhiên. Khi đó trung bình tổng ba môn thi cũng là một biến ngẫu nhiên.

2.1.2. Phân loại biến ngẫu nhiên

Người ta chia các biến ngẫu nhiên thành 2 loại:

+ *Biến ngẫu nhiên rời rạc* nếu nó chỉ nhận một số hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các giá trị. Nói cách khác, giá trị của biến ngẫu nhiên có thể liệt kê thành dãy hữu hạn hoặc vô hạn $x_1, x_2, x_3...$
+ *Biến ngẫu nhiên liên tục* nếu tập giá trị của nó có thể lấp đầy một khoảng trên trục số. Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì $P\left(X=a\right)=0$ với mọi số thực a.

Ví dụ.

- Gọi X là chiều cao của một người ở độ tuổi thanh thiếu niên. Ta thấy rằng X là biến ngẫu nhiên liên tục nhận giá trị trong một khoảng.
- Gọi Y là số mặt xuất hiện khi ta tung một con xúc xắc. Khi đó Y là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị từ một đến sáu.

2.2. Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên là một cách biểu diễn quan hệ giữa các giá trị của biến ngẫu nhiên với các xác suất tương ứng mà nó nhận các giá trị đó.

2.2.1. Bảng phân phối xác suất

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị $x_1, x_2, ..., x_n$ với các xác suất tương ứng $P\left(X = x_i\right) = p_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X có dạng

X	x_1	x_2	….	x_n
P	p_1	p_2	….	p_n

Tính chất:

$$\begin{cases} 0 \le p_i \le 1 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

$$P(a < X < b) = \sum_{a < x_i < b} p_i$$

Ví dụ 1. Một hộp có 10 sản phẩm trong đó có 6 sản phẩm đạt loại A. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Lập bảng phân phối xác suất của số sản phẩm loại A lấy ra?

Ví dụ 2. Có 2 kiện hàng. Kiện 1 có 3 sản phẩm tốt, 2 sản phẩm xấu. Kiện 2 có 2 sản phẩm tốt, 3 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên từ kiện 1 ra 2 sản phẩm và từ kiện 2 ra 1 sản phẩm. Lập luật phân phối xác suất của số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm lấy ra?

Ví dụ 3. Có 3 hộp trong đó có 2 hộp loại 1 và 1 hộp loại 2. Hộp loại 1 có 3 bi trằng, 2 bi vàng. Hộp loại 2 có 3 bi trắng, 3 bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 1 hộp rồi từ hộp đó chọn ngẫu nhiên ra 2 bi. Gọi X là số bi trắng lấy được. Lập bảng phân phối xác suất của X?

2.2.2. Hàm phân phối xác suất

Khái niệm hàm phân phối xác suất áp dụng được đối với cả biến ngẫu nhiên rời rạc và liên tục. Giả sử X là biến nhiên bất kỳ, x là một số thực nào đó. Xét biến cố "Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn x" kí hiệu (X<x). Hiển nhiên là x thay đổi thì xác suất P(X<x) cũng thay đổi theo, như vậy xác suất này là một hàm số của x.

Cho X là một biến ngẫu nhiên. *Hàm phân phối xác suất* của biến ngẫu nhiên X , kí hiệu $F(x)$ là hàm số xác định như sau:

$$F(x) = P(X < x),\ \forall x \in \mathrm{R}$$

Ý nghĩa

Hàm phân bố xác suất F(x) phản ánh mức độ tập trung xác suất về bên trái của điểm x.

Tính chất:

i) $0 \le F(x) \le 1, \forall x \in R$

ii) $F(x)$ là hàm không giảm, liên tục trái. Đặc biệt, nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì $F(x)$ là hàm liên tục.

iii) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\qquad$ $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

iv) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$ với mọi a, b thuộc R và a<b

2.2.3. Hàm mật độ xác suất

Cho X là một biến ngẫu nhiên liên tục với hàm phân phối F(x) là một hàm số có đạo hàm. Khi đó *hàm mật độ xác suất* của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $f(x)$, là hàm xác định bởi

$$f(x) = F'(x)$$

Tính chất:

i) $f(x) \ge 0, \quad \forall x \in R$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

iii) $P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

iv) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Các tính chất *i), ii)* là tính chất đặc trưng của hàm mật độ xác suất. Một hàm *f(x)* xác định trên R thỏa mãn *i), ii)* là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X nào đó.

Ví dụ. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \dfrac{k}{x^2} & , x \ge 1 \end{cases}$$

a) Tìm k?

b) Tìm hàm phân phối xác suất F(x)?

c) Tính $P(2 < X < 3)$?

2.2.4. Phân phối xác suất của hàm biến ngẫu nhiên

Trường hợp X là biến ngẫu nhiên rời rạc:

Ví dụ. Cho X có bảng phân phối xác suất

X	-1	0	1	2
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Tìm bảng phân phối xác suất của $Y = X^2$.

Trường hợp X là biến ngẫu nhiên liên tục:

Ví dụ. Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất $f_X(x)$. Tìm hàm mật độ xác suất của $Y = 2X + 3$.

2.3. Các tham số của biến ngẫu nhiên

2.3.1. Kì vọng toán, phương sai, độ lệch chuẩn

❖ **Kì vọng toán**

Kì vọng toán của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu E(X) được xác định như sau:

+ Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	....	x_n
P	p_1	p_2	....	p_n

thì

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

+ Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất *f(x)* thì

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

Tính chất:

i) $E(C)=C$,C là hằng số

ii) $E(C.X)=C.E(X),C$ là hằng số

iii) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

iv) Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì $E(X.Y)=E(X).E(Y)$

v) Cho hàm số $y=\varphi(x)$ và xét biến ngẫu nhiên $Y=\varphi(X)$. Khi đó $E(Y) \;=\sum_i \varphi(x_i)\, p_i$ nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có $P(X=x_i)=p_i$. $E(Y) \;=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\, f(x)dx$ nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất f(x).

Ý nghĩa trong kinh tế

- Nếu số lớn phép thử thì kỳ vọng phản ánh giá trị trung bình.
- Nếu xét trong 1 phép thử thì kỳ vọng phản ánh giá trị mong đợi.

Ví dụ 1. Chọn ngẫu nhiên 3 bi từ một túi có 4 bi trắng 6 bi đen. Gọi X là số bi trắng có trong 3 bi.Tìm kì vọng của X?

Ví dụ 2. Cho X là đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , khi\ x \in [0,1] \\ 0 & , khi\ x \notin [0,1] \end{cases}$$

Tìm kì vọng của X?

❖ **Phương sai**

Phương sai của biến ngẫu nhiên X kí hiệu V (X) được xác định như sau:

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Tính chất:

Cho 2 biến ngẫu nhiên X, Y và hằng số C

i) $V(C) = 0$

ii) $V(CX) = C^2 V(X)$

iii) Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y).$$

iv) $V(C + X) = V(X)$

Ý nghĩa của phương sai

Ta thấy X-E(X) là độ lệch khỏi giá trị trung bình nên Var(X) = E{[X-E(X)]^2} là độ lệch bình phương trung bình. Do đó phương sai phản ánh mức độ phân tán các giá trị của đại lượng ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.

Ví dụ 1. Biến lượng ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất sau:

X	0	1
P	q	p

Tìm E(X), V(X).

Ví dụ 2. Cho hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}.\sin x & x\in[0,\pi]\\ 0 & x\notin[0,\pi]\end{cases}$$

i) Tính $P\left(X>\frac{\pi}{2}\right)$

ii) Tính E(X) và V(X).

❖ **Độ lệch chuẩn**

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X kí hiệu là $\sigma(X)$, được định nghĩa như sau:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

2.3.2. Mode, trung vị, hệ số biến thiên

❖ **Mode**

Với biến ngẫu nhiên rời rạc : *Mode* của X, kí hiệu ModX, là giá trị của X ứng với xác suất lớn nhất. Ta có

$$\text{ModX}=x_i \Leftrightarrow p_i=max\{p_1,p_2,....\}$$

Với biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì ModX là giá trị mà tại đó $f(x)$ đạt cực đại.

❖ **Trung vị (Median)**

Trung vị của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu MedX là một số thỏa

$$P(X<Med(X))=P(X\geq Med(\text{X}))=\frac{1}{2}$$

Ta thấy rằng MedX là giá trị của biến ngẫu nhiên chia phân phối thành hai phần có xác suất giống nhau.

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì $MedX=x_0$ nếu $F(x_0)=\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 1. Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất như sau:

X	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Tìm ModX?

Ví dụ 2. Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất như sau:

X	1	2	3	4
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Tìm ModX và MedX?

Ví dụ 3. Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}4x^3 & khi\, x\in(0,1)\\ 0 & khi\, x\notin(0,1)\end{cases}$$

Tìm MedX?

- ❖ **Hệ số biến thiên**

$$CV=\left|\frac{\sigma(X)}{E(X)}\right|.100\% \quad (\mathrm{E(X)}\neq 0).$$

2.3.3. Giá trị tới hạn

Giá trị tới hạn mức α của biến ngẫu nhiên liên tục X, kí hiệu x_α là giá trị của X thỏa mãn điều kiện

$$P(X>x_\alpha)=\alpha.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

❖ **Phân phối xác suất**

Bài 1. Một người bắn 3 viên đạn độc lập với nhau vào một chiếc bia với xác suất trúng bia của mỗi viên là 0,7. Hãy lập bảng phân phối xác suất của số viên đạn trúng bia.

Bài 2. Một xí nghiệp có 2 ô tô vận tải hoạt động. Xác suất trong ngày làm việc các ô tô bị hỏng tương ứng là 0,1 và 0,2. Gọi X là số ô tô bị hỏng trong ngày.

a) Tìm qui luật phân phối xác suất của X?

b) Thiết lập hàm phân phối xác suất của X

Bài 2. Xác suất một người bắn trúng bia là 0,8. Người ấy được phát từng viên đạn cho đến khi bắn trúng bia. Tìm qui luật phân phối xác suất của số viên đạn bắn trượt?

Bài 3. Có 2 lô sản phẩm. Lô 1 có 8 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lô 2 có 7 chính phẩm và 3 phế phẩm. Từ lô 1 lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm bỏ sang lô 2 sau đó từ lô thứ 2 lấy ra 2 sản phẩm. Gọi X là số chính phẩm được lấy ra.

a) Tìm qui luật phân phối của X.

b) Xây dựng hàm phân bố xác suất của X .

Bài 4. Có hai kiện sản phẩm. Kiện thứ nhất có 4 chính phẩm và 4 phế phẩm. Kiện thứ hai có 2 chính phẩm và 6 phế phẩm. Lần thứ nhất chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kiện thứ nhất bỏ vào kiện thứ nhì và lần thứ hai chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kiện thứ nhì trả vào kiện thứ nhất. Lần thứ 3 chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm từ kiện thứ nhất. Tìm quy luật phân phối xác suất của số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm lấy ra trong lần thứ ba.

Bài 5. Hộp sản phẩm có 8 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp để mua.

a) Gọi X là số sản phẩm loại A trong 2 sản phẩm. Tìm phân phối xác suất của X.

b) Giá của mỗi sản phẩm loại A là 10 ngàn đồng, mỗi sản phẩm loại B là 8 ngàn đồng. Gọi Y là tổng số tiền người khách phải trả. Tìm phân phối xác suất của Y.

Bài 6. Một thiết bị có 3 bộ phận hoạt động độc lập. Xác suất trong thời gian t các bộ phận này bị hỏng tương ứng là: 0,1; 0,12; 0,15. Tìm luật phân phối xác suất của số bộ phận bị hỏng của thiết bị trong thời gian t. Tìm xác suất trong thời gian t thiết bị có không quá 1 bộ phận bị hỏng.

Bài 7. Một người bán hàng sẽ đến 2 nơi, mỗi nơi chỉ mang 1 sản phẩm chào hàng để bán. Khả năng người đó bán được sản phẩm ở nơi thứ nhất là 0,3; còn nơi thứ hai là 0,6. Sản phẩm bán ở mỗi nơi, loại thượng hạng là 1000 USD, còn loại thường là 500 USD và đồng khả năng. Tìm phân phối xác suất tổng số tiền bán hàng của người đó.

Bài 8. Một hộp kín có 4 thẻ đỏ, 4 thẻ đen và 6 thẻ trắng. Lấy ngẫu nhiên 3 thẻ từ hộp. Giả sử nếu lấy được mỗi thẻ đỏ được 1 điểm, mỗi thẻ đen trừ 1 điểm, mỗi thẻ trắng là 0 điểm. Tìm phân phối xác suất của số điểm có được.

Bài 9. Có 3 kiện hàng. Kiện thứ nhất có 8 sản phẩm loại A, 2 sản phẩm loại B; kiện hai có 6 sản phẩm loại A, 3 sản phẩm loại B; kiện thứ ba có 7 sản phẩm loại A, 1 sản phẩm loại B. Chọn ngẫu nhiên 1 kiện, rồi từ kiện đó chọn ngẫu nhiên không hoàn lại ra 2 sản phẩm thì được 2 sản phẩm loại A. Lấy tiếp từ kiện đã chọn ra 2 sản phẩm. Lấy tiếp từ kiện đã chọn ra 2 sản phẩm. Tìm luật phân phối xác suất của số sản phẩm loại A có trong 2 sản phẩm lấy lần sau.

Bài 10. Một hộp có 10 phiếu trong đó có 3 phiếu trúng thưởng. Nếu lấy ngẫu nhiên 3 phiếu từ hộp được mỗi phiếu trúng thưởng thì được thưởng 1 tặng phẩm. Gọi X là số tặng phẩm có được khi lấy 3 phiếu. Tìm số tặng phẩm đáng tin cậy nhất có được (xét hai trường hợp lấy có hoàn lại và không hoàn lại).

Bài 11. Một hộp có 4 bi đỏ, 6 bi vàng, 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp nếu được mỗi bi đỏ thì được 1 điểm, mỗi bi xanh bớt đi 1 điểm, được bi vàng thì được 0 điểm. Gọi X là tổng số điểm có được khi lấy 3 bi. Lập bảng phân phối xác suất của tổng số điểm có được khi lấy 3 bi.

Bài 12. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0 & khi\, x < 0 \\ \sin 2x & khi\, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1 & khi\, x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ *f(x)*

b) Tính $P\left(\frac{\pi}{6} \le X \le \frac{\pi}{4}\right)$?

Bài 13. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Tìm xác suất để trong 3 phép thử độc lập có 2 lần X nhận giá trị trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$

Bài 14. Một trạm được cung cấp Gas 1 lần trong một tuần. Dung lượng gas bán trong một tuần của trạm là X (đơn vị: ngàn thùng) có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 \text{ khi x} \in (0,1) \\ 0 \quad \text{khi x} \notin (0,1) \end{cases}$$

Dung lượng kho chứa là bao nhiêu để xác suất trong một tuần trạm hết gas là 5%.

Bài 15. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 \text{ khi } x \in (0,1) \\ 0 \quad \text{khi } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Cho E(X) =0,6. Tìm hàm F(x), tính $p(-1 < X < 0,5)$.

Bài 16. Biến ngẫu nhiên liênn tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} (2/\pi)\cos^2 x; x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ 0; x \notin (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Tìm xác suất để trong 3 phép thử độc lập có 2 lần X nhận giá trị trong khảng $(0; \frac{\pi}{4})$

Bài 17. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2/9; x \in (0;3) \\ 0; x \notin (0;3) \end{cases}$$

a) Hàm số trên có phải là hàm mật độ xác suất không

b) Nếu có thì tìm xác suất để trong 3 phép thử độc lập có ít nhất một lần X nhận giá trị trong khoảng (1,2).

Bài 18. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x; x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ 0; x\notin(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

a) Tìm hệ số a.

b) Tìm P(0 ≤ X< $\pi/4$)

Bài 19. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x\notin(0;\pi) \\ \dfrac{\sin x}{2} & ; \quad x\in(0;\pi) \end{cases}$$

a) Tìm hàm phân bố xác suất F(x)

b) Tìm P(0<X<π/4)

Bài 20. Tuổi thọ (tính theo giờ) của một trò chơi điện tử bấm tay là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ ke^{-x/100} & ; \quad x\geq 0 \end{cases}.$$

Trong đó k là hằng số. Tính xác suất:

a) Tuổi thọ của trò chơi này nằm trong khoảng từ 50 đến 150 giờ

b) Tuổi thọ của trò chơi này ít hơn 100 giờ.

❖ **Các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên**

Bài 21. Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	3
p	0,15	0,45	0,3	0,1

Tìm Mod(X), E(X), V(X), p(-1<X<2), $p\left(|X-E(X)|<0,5\right)$, $p\left(|X-E(X)|>0,8\right)$.

Bài 22. Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

a) Tìm phân phối xác suất của Y = X^2 - X +2.

b) Tính E(Y).

Bài 23. Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X như sau:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

a) Tính E(X), V(X) và σ(X).

b) Tìm Mod(X).

c) Tính $P(2 \le X < 4)$.

d) Cho $Y = 5X + 2$. Tính E(Y) ; V(Y).

Bài 24. Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối xác suất:

X	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

và Y = 2X-1. Tính p(Y<4),V(Y).

Bài 25. Thời gian xếp hàng chờ mua hàng của khách là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm phân phối xác suất như sau(đơn vị: phút)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 2x & , 0 < x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

a) Tìm thời gian xếp hàng trung bình?

b) Tìm xác suất để trong 3 người xếp hàng thì có không quá 2 người phải chờ quá 0,5 phút?

Bài 26. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2) & khi\ |x| \le 1 \\ 0 & khi\ |x| > 1 \end{cases}$$

a) Tìm k

b) Tìm ModX, E(X), V(X)

c) Cho $Y = 3X^2$. Tìm hàm mật độ, kỳ vọng của Y.

Bài 27. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 \text{ khi } x \in (0,1) \\ 0 \quad\quad \text{ khi } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Cho E(X) =0,6. Tìm hàm F(x), tính $p(-1 < X < 0,5)$; V(X).

Bài 28. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 \text{ khi } 0 \le x \le 1 \\ 0 \quad \text{khi } x \notin [0,1] \end{cases}$$

a) Tìm E(X), V(X), Mod(X), Median(X), $p(|X - E(X)| < 0,5)$.

Bài 29. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{kx^2 \text{ khi } x \in [0,3]} \\ \mathrm{0 \text{ khi } \notin [0,3]} \end{cases}$$

a) Tìm kì vọng của X.

b) Tìm hàm phân phối của X và tính $\mathrm{P\{X < 2\}}$; $\mathrm{P\{|X - EX| > 0,5\}}$; $\mathrm{P\{|X - EX| < 1\}}$.

Bài 30. Hộp sản phẩm có 8 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp để mua.

a) Gọi X là số sản phẩm loại A trong hai sản phẩm. Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Giá của mỗi sản phẩm loại A là 10 ngàn, mỗi sản phẩm loại B là 8 ngàn. Gọi Y là tổng số tiền khách phải trả. Tìm bảng phân phối xác suất của Y.

c) Tìm phân phối xác suất của $Z = X^2 - X + 2$.

d) Tính E(Z).

Bài 31. Cho hai máy, tỷ lệ sản phẩm loại 1 của từng máy tương ứng là 10%, 20%. Cho mỗi máy sản xuất ra 2 sản phẩm.

a) Tìm quy luật phân phối xác suất của số sản phẩm loại 1 trong 4 sản phẩm lấy ra

b) Tìm số sản phẩm loại 1 tin chắc nhất, số sản phẩm loại 1 trung bình trong 4 sản phẩm sản xuất ra.

Bài 32. Một hộp đựng 15 bóng đèn trong đó có 9 bóng mới và 6 bóng đã sử dụng. Lần đầu người ta lấy ngẫu nhiên 3 bóng từ 15 bóng để sử dụng , sau đó trả lại vào hộp. Lần thứ hai lại lấy ngẫu nhiên 3 bóng từ 15 bóng đèn này. Tìm số bóng đèn mới (chưa sử dụng lần nào)tin chắc nhất trong ba bóng được lấy ra lần thứ hai.

Bài 33. Theo tài liệu thống kê về tai nạn giao thông ở một khu vực thì người ta thấy tỷ lệ xe máy bị tai nạn là 0,0055 (vụ/tổng số xe/năm). Một công ty bảo hiểm đề nghị tất cả các chủ xe phải mua bảo hiểm cho xe máy với số tiền là 30.000đ/xe và số tiền bảo hiểm cho một vụ tai nạn là 3.000.000 đ. Hỏi lợi nhuận công ty kỳ vọng thu được đối với mỗi hợp đồng bảo hiểm là bao nhiêu biết rằng chi phí cho quản lý và các chi phí khác chiếm 30% số tiền bán bảo hiểm.

Bài 34. Theo tài liệu thống kê xác suất để một người ở độ tuổi 40 sẽ sống thêm một năm nữa là 0,995. Một công ty bảo hiểm nhân thọ bán bảo hiểm một năm cho những người ở độ tuổi đó với giá 100 ngàn đồng và nếu người mua bảo hiểm chết trong thời gian đó thì số tiền bồi thường là 10 triệu đồng. Hỏi lợi nhuận trung bình của công ti khi bán mỗi thẻ bảo hiểm loại này là bao nhiêu?

Bài 35. Nhu cầu hàng ngày về một loại thực phẩm tươi sống có bảng phân phối xác suất :

Nhu cầu (kg)	30	31	32	33	34	35
P	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1	0,05

Mỗi kg thực phẩm mua vào với giá 2,5 ngàn và bán ra với giá 4 ngàn. Nếu bị ế cuối ngày phải bán hạ giá còn 1,5 ngàn mới bán hết được. Phải đặt mua hàng ngày bao nhiêu kg thực phẩm để có lãi nhất.

Bài 36. Tùy theo tình hình kinh tế trong nước mà trong năm tới một công ty thu được mức lãi (tính theo triệu đơn vị tiền tệ nước này) khi đầu tư vào 2 ngành A và B như sau:

Tình hình kinh tế	Kém phát triển	Ổn định	Phát triển
Ngành A	20	80	120
Ngành B	-30	100	140

Theo dự báo thì xác suất để nền kinh tế nước đang xét trong năm tới sẽ rơi vào các tình trạng tưng ứng như trên là 0,3; 0,5 và 0,2.

Vậy công ty nên đầu tư vào ngành nào để cho:

a) Mức lãi kì vọng là cao hơn.

b) Độ rủi ro (phương sai của mức lãi) là ít hơn.

Bài 37. Qua kinh nghiệm, một cửa hàng bánh trung thu biết rằng dịp tết trung thu số bánh có thể bán được có bảng phân phối xác suất như sau:

Số bánh bán được	30	31	32	33	34	35
Xác suất	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1	0,15

a) Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của số bánh bán được.

b) Nếu cửa hàng đặt mua 600 chiếc thì xác suất bán hết bánh là bao nhiêu, xác suất còn thừa lại là bao nhiêu.

c, Để có thể chắc chắn đến 95% là sẽ đủ bánh bán thì cửa hàng cần đặt mua bao nhiêu chiếc bánh.

Bài 38. Số lượng xe TOYOTA mà một đại lý bán được trong 1 tuần có bảng phân phối xs:

Số xe bán được	0	1	2	3	4	5
Xác suất	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

a) Tìm xác suất để đại lý đó bán được ít nhất 4 xe trong 1 tuần.

b) Giả sử chi phí cho hoạt động của đại lý bằng căn bậc hai của số xe bán được nhân với 3 triệu. Tìm chi phí trung bình cho hoạt động của đại lý mỗi tuần.

Bài 39. Trên một chuyến bay người ta thống kê được rằng có 0,5% hành khách bị mất hành lí và giá trị trung bình mà hành khách đòi bồi thường cho số hành lý bị mất trung bình là 600 ngàn đồng. Công ty hàng không muốn tăng thêm giá vé để bù đắp cho số tiền phải bồi thường cho số hành lý bị mất. Vậy công ty nên tăng giá vé thêm bao nhiêu? Tại sao?

Bài 40. Một công ty thuê một luật sư trong một vụ kiện với hai phương án trả công như sau:

- Phương án 1: Trả 5 triệu đồng bất kể thắng hay thua kiện
- Phương án 2: Trả 100 ngàn đồng nếu thua kiện và 15 triệu đồng nếu thắng.

Luật sư đã chọn phương án 2. Vậy theo đánh giá của luật sư thì khả năng thắng kiện của công ty tối thiểu là bao nhiêu?

CHƯƠNG 3. MỘT SỐ QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THÔNG DỤNG

3.1. Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

3.1.1. Phân phối nhị thức $\mathrm{B}(n,p)$

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có *phân phối nhị thức* tham số n, p. Kí hiệu $X \sim B(n,p)$ nếu X nhận một trong các giá trị 0, 1, 2,…, n với xác suất tương ứng như sau:

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad ,k=0,1,...,n$$

trong đó p là một hằng số, 0<p<1, $n \in N, n>0$.

Xét dãy n phép thử Bernouli với xác suất xảy ra biến cố A trong mỗi phép thử là p. Gọi X là số lần xuất hiện biến cố A trong n phép thử Bernoulli trên. Khi đó $X \sim B(n,p)$

Tính chất: Cho $X \sim B(n,p)$.

i) $E(X)=np$

ii) $V(X)=np(1-p)$

iii) $np-q \le ModX \le np-q+1$ với $q=1-p$

Ví dụ 1. Tung một con xúc sắc cân đối, đồng chất 10 lần. Gọi X là số lần xuất hiện mặt số 5. Hãy lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X?

Ví dụ 2. Một bài thi trắc nghiệm gồm 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Một học sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời cho mỗi câu hỏi.

a) Tính xác suất để học sinh này làm được đúng 25 câu.

b) Trung bình học sinh này trả lời được bao nhiêu câu?

c) Tính phương sai của số câu học sinh này trả lời được.

3.1.2. Phân phối không - một A(p)

Biễn ngẫu nhiên X gọi là có *phân phối không* - *một tham số p* (hay phân phối Bernoulli), kí hiệu $X \sim A(p)$ nếu X chỉ nhận 2 giá trị 0 và 1 theo bảng phân phối xác suất như sau:

X	0	1
P	q	p

trong đó p là hằng số $0 < p < 1$, q=1-p.

Tính chất

$$E(X) = p \qquad V(X) = pq \qquad \sigma(X) = \sqrt{pq}$$

3.1.3. Phân phối Poisson $P(\lambda)$

Định nghĩa : Biến ngẫu nhiên X gọi là có *phân phối Poisson* với tham số λ, kí hiệu $X \sim P(\lambda)$ nếu X nhận một trong các giá trị 0,1,2,…với xác suất tương ứng được tính bằng công thức

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,...$$

Tính chất

i) $E(X) = V(X) = \lambda$

ii) $\lambda - 1 \le ModX \le \lambda$

iii) Nếu X_1 , X_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối Poisson với tham số lần lượt là λ_1, λ_2 thì $X_1 + X_2$ cũng có phân phối Poisson với tham số $(\lambda_1 + \lambda_2)$

Phân phối Poisson có nhiều ứng dụng liên quan đến *số quan sát một hiện tượng thực tiễn* nào đó trong một đơn vị thời gian hoặc khoảng không gian nhất định. Chẳng hạn số các cuộc điện thoại gọi đến một trạm nào đó trong một phút, số khách hàng đến nhà băng trong mỗi chu kỳ 01 giờ, số máy điện thoại hỏng trong một ngày ở Tp. HCM, số sinh viên vào forum khoa KT-ĐHQG Tp.HCM trong mỗi chu kỳ 30 phút ... Nói chung *dòng vào của một hệ phục vụ* (một quán cà phê, hiệu cắt tóc, tiệm sửa xe, trạm điện thoại thẻ, siêu thị, ...) đều là các biến ngẫu nhiên có phân phối Poison

Ví dụ 1. Biết trung bình trong một ngày có 600 người đến siêu thị. Tính xác suất trong một ngày có 700 người đến siêu thị.

Ví dụ 2. Ở một tổng đài điện thoại các cuộc điện thoại gọi đến là ngẫu nhiên và độc lập nhau. Tốc độ trung bình là 2 cuộc trên 1 phút. Tìm xác suất để

a. Có đúng 5 cuộc gọi trong vòng 4 phút? (biến cố A)

b. Không có cuộc nào trong khoảng thời gian 30 giây? (biến cố B)

c. Có ít nhất 1 cuộc trong khoảng thời gian 15 giây? (biến cố C)

3.1.4. Phân phối siêu bội H(N,M,n)

Xét một tập hợp gồm N phần tử, trong đó có M phần tử có tính chất A nào đó. Lấy ngẫu nhiên từ tập hợp ra n phần tử. Gọi X là số phần tử có tính chất A có trong n phần tử lấy ra. Khi đó X có phân phối xác suất được xác định như sau:

$$P(X=k)=\frac{C_M^k.C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad \mathrm{k}=0,1,2,\ldots,\min(n,M)\quad (*)$$

Biến ngẫu nhiên X có phân phối xác suất được xác định bởi công thức (*) gọi là có *phân phối siêu bội* với các tham số là N, M và n. Kí hiệu $X \sim H(N,M,n)$.

Ví dụ. Một lô hàng có 100 sản phẩm, trong đó có 85 sản phẩm tốt. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng ra 10 sản phẩm.

a.Tìm xác suất để có 3 sản phẩm tốt trong 10 sản phẩm được lấy ra

b.Tìm số sản phẩm tốt trung bình trong 10 sản phẩm lấy ra.

Tính chất

Nếu $X \sim H(N,M,n)$ thì

$$E(X)=np;\quad V(X)=npq.\frac{N-n}{N-1}$$

trong đó $p=\frac{M}{N}; q=1-p$.

3.2. Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

3.2.1. Phân phối chuẩn $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

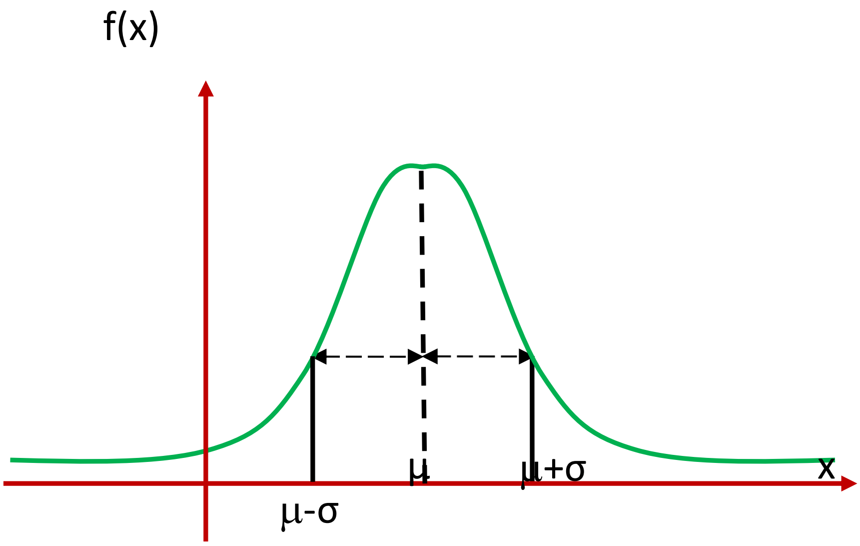
❖ **Phân phối chuẩn**

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có *phân phối chuẩn* với tham số μ và $\sigma^2(\sigma>0)$, kí hiệu: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ nếu hàm mật độ có dạng:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in R$$

Đồ thị hàm mật độ của phân phối chuẩn

Đồ thị f(x) có dạng hình chuông, nhận đường thẳng $x=\mu$ làm trục đối xứng, trục hoành làm tiệm cận ngang, các điểm uốn $\left(\mu\pm\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$, điểm cực đại của đồ thị $\left(\mu;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$



Tính chất:

i) $E\left(X\right)=\mu$

ii) $V(X)=\sigma^2$

iii) $ModX=MedX=\mu$

iv) Nếu $X\sim N\ \mu,\sigma^2$ thì $aX+b\sim N\ a\mu+b,a^2\sigma^2$ với $a,b\in\mathbb{R},a\neq 0$

v) Nếu X_1,X_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn $X_1\sim N\ \mu_1,\sigma_1^2\ ;X_2\sim N\ \mu_2,\sigma_2^2$ thì

$$X_1+X_2\sim N\ \mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2$$

vi) Nếu X_1,X_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn $X_1\sim N\ \mu_1,\sigma_1^2\ ;X_2\sim N\ \mu_2,\sigma_2^2$ thì

$$aX_1+bX_2\sim N\ a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2\quad(a,b\in\mathbb{R},ab\neq 0)$$

❖ **Phân phối chuẩn tắc**

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối chuẩn tắc nếu $X\sim N\left(0,1\right)$. Khi đó hàm mật độ của X :

$$\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

gọi là hàm mật độ Gauss.

Hàm mật độ Gauss là hàm chẵn và $\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0,5$.

Hàm phân phối $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, gọi là hàm phân phối Gauss

Tích phân Laplace: $\phi(x) = \int_{0}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Tính chất:

i) $\phi(-x) = -\phi(x)$

ii) $x > 5 : \phi(x) \approx 0,5$

iii) $F(x) = 0,5 + \phi(x)$

iv) $P(a < X < b) = \phi(b) - \phi(a)$

v) $P(X > a) = 0,5 - \phi(a)$

vi) $P(X < b) = \phi(b) + 0,5$

Chú ý:

- Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì biến ngẫu nhiên $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
- Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì

$$P(a < X < b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) (*)$$

$$P(X > a) = 0,5 - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X < b) = 0,5 + \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

❖ **Qui tắc 2σ và qui tắc 3σ:**

Từ (*) , nếu X ~ N(μ;σ^2) thì

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) (**)$$

Với $\varepsilon = 2\sigma$ thì

$$P(|X-\mu|<2\sigma) = 2\phi(2) = 0{,}9544 \text{ hay } P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9544$$

Tương tự với $\varepsilon = 3\sigma$ ta được

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9973.$$

❖ **Giá trị tới hạn chuẩn**

Giá trị tới hạn chuẩn mức α, kí hiệu z_α là giá trị xác định bởi

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \text{ với } Z \sim N(0,1).$$

Ta có $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$

Ví dụ 1. Giả sử $X \sim N(\mu;\sigma^2)$ với μ=2100 và σ=200. Hãy tìm :

$a)\mathrm{P}(X > 2400)$

$b)\mathrm{P}(1700 < X < 2200)$

$c)$Tìm a sao cho $\mathrm{P}(X > a) = 0{,}03$

Ví dụ 2. Chiều dài của một loại chi tiết máy có phân phối chuẩn với $\mu = 30cm$, độ lệch chuẩn $\sigma = 2cm$.

a. Một chi tiết máy sản xuất ra được xem là đạt yêu cầu khi có chiều dài nằm trong khoảng từ 28 cm đến 31 cm. Chọn ngẫu nhiên 1 chi tiết máy, tính xác suất chọn được chi tiết máy đạt yêu cầu.

b. Một chi tiết máy được xem là quá dài khi chiều dài của nó lớn hơn 34,5 cm. Chọn ngẫu nhiên 1 chi tiết máy, tính xác suất chi tiết máy này quá dài?

c. Một chi tiết máy được xem là quá ngắn nếu chiều dài của nó nhỏ hơn 20cm. Chọn ngẫu nhiên 1 chi tiết máy, tính xác suất chi tiết máy này quá ngắn?

Ví dụ 3: Thời gian (tính bằng tháng) từ lúc vay đến lúc trả tiền của khách hàng tại một ngân hàng là biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn trung bình 18 tháng, độ lệch chuẩn 4 tháng.

a. Tính tỷ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng trong khoảng từ 10 đến 19 tháng; không ít hơn 1 năm; ít hơn 9 tháng

b. Khoảng thời gian tối thiểu là bao nhiêu để tỷ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng vượt thời gian đó không quá 1%.

3.2.2. Phân phối $\chi^2(n)$

Biến ngẫu nhiên X gọi là có phân phối $\chi^2(n)$ (khi bình phương với n bậc tự do), kí hiệu $X \sim \chi^2(n)$ nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & khi\, x > 0 \\ 0 & khi\, x \le 0 \end{cases}$$

Trong đó $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ (hàm Gamma).

Tính chất: Cho biến ngẫu nhiên $X \sim \chi^2(n)$

i) $E(X) = n$

ii) $V(X) = 2n$

iii) Nếu $X_1 \sim \chi^2(n), X_2 \sim \chi^2(m)$, X_1, X_2 độc lập thì $X_1 + X_2 \sim \chi^2\ n + m$

iv) Nếu $X_i\,(i = 1,2,...,n)$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có phối chuẩn tắc $N(0,1)$ thì biến ngẫu nhiên $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ có phân phối khi bình phương với n bậc tự do.

v) Khi n đủ lớn thì $\dfrac{X-n}{\sqrt{2n}}$ có phân phối xấp xỉ phân phối N(0,1) với $X \sim \chi^2(n)$

- **Giá trị tới hạn χ^2**

Giá trị tới hạn mức α của phân phối khi bình phương với n bậc tự do, kí hiệu $\chi^2_\alpha(n)$ là giá trị xác định bởi

$$P\left(X > \chi^2_\alpha(n)\right) = \alpha \text{ trong đó } X \sim \chi^2(n)$$

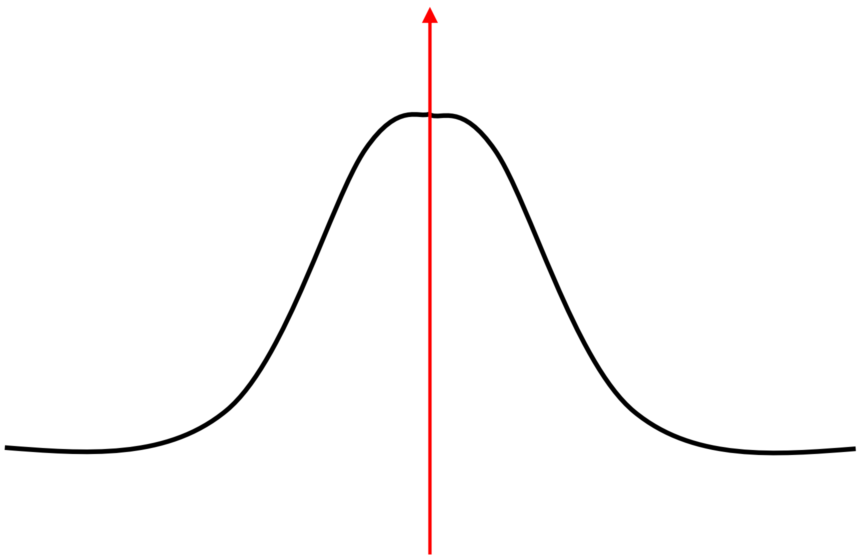
3.2.3. Phân phối student $T(n)$

Biến ngẫu nhiên X gọi là có phân phối Student với n bậc tự do, kí hiệu $X \sim T(n)$ nếu hàm mật độ của X có dạng:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}$$

Trong đó $\Gamma(x)$ là hàm Gamma.

Đồ thị hàm mật độ của phân phối Student như sau



Tính chất

Cho $X \sim T(n)$.Khi đó

i) $E(X) = 0$ (n>1)

$V(X) = \frac{n}{n-2}$ (n>2)

ii) Nếu $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, X và Y độc lập thì biến ngẫu nhiên $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim T(n)$

Khi số bậc tự do n tăng lên phân phối Student hội tụ rất nhanh về phân phối chuẩn tắc N(0,1). Do đó khi n đủ lớn (n≥30) ta có thể dùng phân phối chuẩn tắc thay cho phân phối Student.

- **Giá trị tới hạn Student**

Giá trị tới hạn mức α của phân phối Student n bậc tự do, kí hiệu $t_\alpha(n)$ là giá trị xác định bởi :

$P\left(X > t_\alpha(n)\right) = \alpha$ với $X \sim T\left(n\right)$

Ta có $t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n)$

3.2.4. Phân phối Fisher-Snedecor $F\left(n_1, n_2\right)$

Biến ngẫu nhiên X gọi là có *phân phối Fisher – Snedecor* với n_1 và n_2 bậc tự do, kí hiệu $X \sim F\left(n_1, n_2\right)$, nếu hàm mật độ xác suất có dạng:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ C\dfrac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(n_2 + n_1 x\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & , x > 0 \end{cases}$$

Trong đó $C = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right) n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)}$

Nếu $U \sim \chi^2\left(n_1\right)$, $V \sim \chi^2\left(n_2\right)$ và U, V độc lập thì biến ngẫu nhiên: $F = \dfrac{U/n_1}{V/n_2} \sim F\left(n_1, n_2\right)$

- **Giá trị tới hạn Fisher – Snedecor**

Giá trị tới hạn mức α của phân phối Fisher – Snedecor với n_1 và n_2 bậc tự do kí hiệu $f_\alpha\left(n_1, n_2\right)$ là giá trị xác định bởi:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} > f_\alpha\left(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2\right)\right) = \alpha \text{ với } X \sim F\left(n_1, n_2\right)$$

Ta có $f_\alpha\left(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2\right) = \dfrac{1}{f_{1-\alpha}\left(\mathrm{n}_2, \mathrm{n}_1\right)}$

3.2.5. Phân phối mũ $\mathrm{E}(\lambda)$

Định nghĩa: Biến ngẫu nhiên X gọi là có phân phối mũ với tham số λ $(\lambda > 0)$, ký hiệu $X \sim E(\lambda)$ nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{x<0}\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{x} \geq 0\end{cases}$$

Tính chất

Nếu $X \sim E(\lambda)$ thì

$$\begin{cases}E(X)=\dfrac{1}{\lambda}\\ V(\mathrm{X})=\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$$

Phân phối mũ có mặt trong nhiều ứng dụng thực tiễn. Chẳng hạn thời gian phục vụ của hệ phục vụ đám đông là các biến ngẫu nhiên có phân phối mũ (thời gian nói chuyện của các cuộc đàm thoại, thời gian chờ của khách hàng để được phục vụ…). Tuổi thọ của các thiết bị, tuổi thọ của nhiều loài sinh vật… cũng có phân phối mũ.

3.2.6. Qui luật phân phối đều $\mathbf{U}(\mathbf{a},\mathbf{b})$

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có *phân phối đều* trên đoạn [a;b], kí hiệu $\mathrm{X} \sim \mathrm{U}(\mathrm{a};\mathrm{b})$ nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & khi\, x \in [a,b]\\ 0 & khi\, x \notin [a,b]\end{cases}$$

Tính chất

Cho biến ngẫu nhiên X~U(a;b). Khi đó

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

3.2.7. Các công thức xấp xỉ

❖ **Xấp xỉ phân phối siêu bội bằng phân phối nhị thức**

Định lý: Cho $X \sim H(N,M,n)$. Nếu n cố định và $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{M}{N}=p$ thì

$\lim\limits_{N\to\infty} P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ với $q=1-p$.

Ý nghĩa: Trong thực hành, giả sử $X \sim H(N, M, n)$, nếu N khá lớn, n rất nhỏ so với N thì

$$P(X = k) \approx C_n^k p^k q^{n-k}, p = \frac{M}{N}$$

Công thức xấp xỉ tốt khi n<0,05N

❖ **Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson**

Định lí: Cho $X_n \sim B(n, p)$. Khi $n \to +\infty$, $p \to 0$, $np = \lambda(const)$ thì

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Ý nghĩa: Trong thực hành, $X \sim B(n, p)$, nếu với n khá lớn, và p khá bé (sao cho $npq \approx np$) thì

$$P(X = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ với } \lambda = np$$

Trong thực tế dùng công thức xấp xỉ trên khi $n > 50$ và $p < 0{,}1$

Ví dụ. Một máy dệt có 4000 ống sợi. Xác suất để mỗi ống sợi ấy bị đứt trong một phút là 0,0005. Tính xác suất trong 1 phút

a) Có 3 ống sợi bị đứt

b) Có ít nhất hai ống sợi bị đứt

❖ **Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn**

Định lí giới hạn địa phương Moivre-Laplace: Giả sử $P_n(k)$ là xác suất xuất hiện k lần biến cố A trong dãy n phép thử Bernoulli với P(A)=p, p không quá gần 0 và 1, $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ bị chặn đều. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(k)\sqrt{npq}}{\varphi(x_k)} = 1$$

Trong đó $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, q = 1 - p$.

❖ **Định lí giới hạn Moivre-Laplace tích phân**

Giả sử $X \sim B(n,p)$, p không quá gần 0 và 1. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(k_1 \le X \le k_2)}{\phi(\alpha_2)-\phi(\alpha_1)} = 1$$

trong đó $\alpha_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, i = 1,2$ và $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$

Ý nghĩa: Trong thực hành, với $X \sim B(n,p)$, khi n đủ lớn và p không quá lớn và không quá bé ta có:

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ với } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \approx \phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right) (*) \text{ với } \phi(x) \text{ là tích phân Laplace}$$

Việc xấp xỉ tốt khi $np \ge 5$ và $nq \ge 5$ hoặc $npq \ge 20$ hoặc $n > 5$ và $\left|\sqrt{\dfrac{p}{1-p}} - \sqrt{\dfrac{1-p}{p}}\right|\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0,3$

Ví dụ. Một xạ thủ bắn 64 phát súng vào bia. Xác suất bắn trúng mỗi phát là 0,8. Tính xác suất

a) Có từ 45 đến 52 phát trúng bia

b) Có không dưới 51 phát trúng bia

3.3. Luật số lớn và các định lý giới hạn

- **Bất đẳng thức Trê bư sép**

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng E(X) và phương sai V(X) hữu hạn thì

$$P(|X-E(X)| > \varepsilon) \le \frac{V(X)}{\varepsilon^2}; \forall \varepsilon > 0$$

- **Định lý Trê bư sép**

Nếu dãy các biến ngẫu nhiên (X_n) độc lập có kỳ vọng hữu hạn và phương sai bị chặn đều $((V(X_i) \le C\forall i)$, khi đó với mọi $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Hệ quả: Nếu (X_n) độc lập, cùng phân phối, có kỳ vọng μ và phương sai σ^2 thì

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Định lý trên còn được gọi là luật số lớn của Trê bư sép

- **Định lý Bernoulli**

Gọi $f_n(A)$ là tần xuất xuất hiện biến cố A trong dãy n phép thử độc lập và P(A)=p trong mỗi phép thử thì với mọi $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| f_n(A) - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Định lý trên còn được gọi là luật số lớn của Bernoulli

- **Định lý giới hạn trung tâm**

Giả sử các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ độc lập cùng phân phối với kỳ vọng $E(X_i) = \mu$, phương sai $V(X_i) = \sigma^2$ (hữu hạn khác 0) .

Đặt $T_n = \dfrac{\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$.

Khi đó với mọi x thuộc R ta có

$$\lim_{n\to\infty} P\left(T_n < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Nói cách khác khi n đủ lớn phân phối xác suất của T_n xấp xỉ phân phối chuẩn tắc.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

❖ Phân phối thường gặp của biến ngẫu nhiên rời rạc

Bài 1. Một người đem bán 5 lô sản phẩm, mỗi lô có 10 sản phẩm trong đó có 1 sản phẩm hỏng. Người mua lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô ra 3 sản phẩm để kiểm tra. Nếu lô nào cả 3 sản phẩm đều tốt thì mua lô đó. Tính xác suất bán được 4 lô.

Bài 2. Một phân xưởng có 100 máy hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để mỗi máy bị hỏng trong 1 ca sản xuất là 0,09.

a. Tìm xác suất để trong 1 ca sản xuất có trên 95% máy không bị hỏng

b. Tìm số máy hỏng trung bình và số máy hỏng tin chắc nhất trong 1 ca sản suất

c. Tìm xác suất để trong 1 ca sản xuất có từ 45 đến 60 máy bị hỏng.

Bài 3. Một lô bong đèn có 10 000 bóng trong đó có 4000 bóng 110V, lấy ngẫu nhiên 10 bóng. Tính xác suất có

a. 3 bóng 110V

b. ít nhất 1 bóng 110V

Bài 4. Có hai lô sản phẩm. Mỗi lô có 10 sản phẩm. Lô thứ nhất có 3 sản phẩm loại 1, lô thứ hai có 6 sản phẩm loại 1. Lấy từ lô thứ nhất ra 2, từ lô thứ hai ra 4 sản phẩm. Tính xác suất lấy được

a. 4 sản phẩm loại 1

b.Đem 6 sản phẩm lấy ra đi bán với giá sản phẩm loại 1 là 8000đ, sản phẩm không phải loại 1 là 5000đ 1 sản phẩm. Tìm số tiền thu được trung bình và phương sai của số tiền thu được

Bài 6. Một công ty dịch vụ qua điện thoại (hoạt động thường trực) nhận được trung bình 300 lần gọi đến trong 1 giờ. Tìm xác suất để công ty đó nhận được đúng 5 lần gọi đến trong 3 phút.

Bài 7. Trong một đợt thi nâng bậc thợ của ngành dệt, mỗi công nhân dự thi sẽ chọn ngẫu nhiên 1 trong 2 máy và với máy đã chọn dệt 100 sản phẩm. Nếu trong 100 sản phẩm sản xuất ra có từ 75 sản phẩm loại 1 trở lên thì được nâng bậc. Giả sử đối với công nhân A, xác suất để sản xuất được sản phẩm loại 1 đối với 2 máy lần lượt là 0,7 và 0,8.

Tính xác suất để công nhân được nâng bậc thợ.

Bài 8. Có 2 lô hàng, mỗi lô gồm 1000 sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm loại B của từng lô tương ứng là 10%, 20%. Một người mua lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô ra 10 sản phẩm để kiểm tra. Nếu trong 10 sản phẩm lấy ra từ lô hàg nào đó có không quá 2 sản phẩm loại B thì mua lô hàng đó. Tính xác suất có lô hàng được mua

Bài 9. Công ty bay A luôn bán vé cho khách vượt quá số ghế của mỗi chuyến bay vì luôn có khách đặt vé nhưng không bay. Giả sử tỷ lệ khách đặt vé nhưng không bay là 2%. Với chuyến bay có 194 ghế nhưng đã bán 200 vé thì xác suất chuyến bay thiếu chỗ là bao nhiêu

Bài 10. Số yêu cầu phục vụ tại một tổng đài có phân phối Poisson với trung bình 4 yêu cầu 1 giờ.

a) Tính xác suất tổng đài có 10 yêu cầu trong 2 giờ.

b) Nếu người trực tổng đài phải nghỉ ăn trưa mất 30 phút thì xác suất người đó không bị mất yêu cầu nào là bao nhiêu ?Theo bạn nhiều khả năng có bao nhiêu yêu cầu tổng đài phục vụ trong khoảng thời gian này.

Bài 11. Một khách sạn nhận đặt phòng của 325 khách hàng cho 300 phòng vào ngày 30 tháng 4 vì theo kinh nghiệm của những năm trước cho thấy có 10% khách đặt phòng nhưng không đến. Tính xác suất :

a) Có 280 khách đặt phòng và đến vào ngày 30 tháng 4 để nhận phòng.

b) Tất cả các khách đặt phòng đến vào ngày 30 tháng 4 đều nhận được phòng

❖ **Phân phối thường gặp của biến ngẫu nhiên liên tục**

Bài 12. Tuổi thọ của 1 loại bóng đèn là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với tuổi thọ trung bình 1500 giờ; độ lệch chuẩn 150 giờ. Nếu thời gian sử dụng không quá 1251 giờ thì phải bảo hành miễn phí.

a) Tìm tỷ lệ bóng phải bảo hành

b) Phải quy định thời gian bảo hành là bao nhiêu để tỷ lệ bóng phải bảo hành chỉ còn 1%

Bài 13. Trọng lượng X của một loại sản phẩm (đơn vị: gam) có phân phối chuẩn. Biết 65% số sản phẩm có trọng lượng lớn hơn 20 gam và 8% số sản phẩm có trọng lượng lớn hơn 30gam. Nếu sản phẩm được chấp nhận có trọng lượng nhỏ hơn 25gam thì tỷ lệ sản phẩm bị loại là bao nhiêu

Bài 14. Chiều cao của nam giới khi trưởng thành ở 1 vùng là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với μ=160 cm và σ=6 cm. Một thanh niên bị coi là lùn nếu chiều cao bé hơn 155 cm.

a) Tìm tỉ lệ thanh niên lùn vùng đó?

b) Tìm xác suất để lấy ngẫu nhiên 4 người thì có ít nhất 1 người không bị lùn?

Bài 15. Độ dài của một chi tiết máy là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ với độ lệch chuẩn là 0,3cm . Một chi tiết máy được xem là đạt tiêu chuẩn nếu độ dài sai lệch so với μ không quá 0,33 cm.

a) Tính xác suất chọn ngẫu nhiên 1 chi tiết máy thì được chi tiết máy đạt yêu cầu

b) Chọn ngẫu nhiên 5 chi tiết máy. Tính xác suất để có chi tiết máy đạt yêu cầu

Bài 16. Có hai chiếc máy loại 1. Trọng lượng sản phẩm do loại máy này sản suất ra có phân phối chuẩn với trung bình 500g và độ lệch chuẩn10g. Đồng thời có 1 chiếc máy loại 2. Trọng lượng sản phẩm do loại máy này sản suất ra có phân phối chuẩn với trung bình 502g và độ lệch chuẩn16g. Các sản phẩm có trọng lượng 500g trở lên là loại A. Chọn ngẫu nhiên một trong ba máy rồi cho sản xuất 100 sản phẩm. Tính xác suất

a) Có 55 sản phẩm loại A.

b) Có không dưới 55 sản phẩm loại A.

Bài 17. Tổng doanh số mỗi tuần của một khách sạn là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 2200 USD và độ lệch chuẩn 230 USD. Tính xác suất :

a)Tổng doanh số của cả 2 tuần sau không vượt quá 5000USD

b) Doanh số vượt quá 2000USD ít nhất 2 trong 5 tuần sau

Giả sử doanh số từng tuần của một khách sạn là độc lập với nhau.

Bài 18. Một kĩ sư xây dựng cho rằng tổng trọng lượng W mà một chiếc cầu chịu đựng được mà không bị phá vỡ cấu trúc có phân phối chuẩn với trung bình 400 và độ lệch chuẩn 40. Giả sử rằng trọng lượng của ô tô là biến nhẫu nhiên có trung bình 3 và độ lệch chuẩn 0,3. Số ô tô trên cầu tối thiểu là bao nhiêu để xác suất cầu bị phá vỡ cấu trúc vượt quá 0,1 (đơn vị trong bài toán này là tấn)

Bài 19. Số điểm Hùng và Minh chơi Bowling tương ứng có phân phối chuẩn $N(170, 20^2)$; $N(160, 15^2)$. Nếu Hùng và Minh mỗi người chơi một lần và giả sử điểm của họ là độc lập với nhau. Tính xác suất :

a) Minh cao điểm hơn

b) Tổng số điểm của họ trên 350.

Bài 20. Thời gian ông A đi làm hàng ngày từ nhà đến cơ quan có phân phối chuẩn trung bình 24 phút, độ lệch chuẩn 3,8 phút

a) Tính xác suất ông A đi làm tối thiểu mất nửa giờ

b) Nếu buổi sáng cơ quan làm việc lúc 7h30 nhưng ông ta rời nhà lúc 7h15 thì khả năng ông ta bị trễ giờ là bao nhiêu

c) Tính xác suất trong 1 tuần ông ta đi làm 5 lần, có ít nhất một lần thời gian đi làm mất hơn nửa giờ.

Bài 21. Trọng lượng các viên thuốc có phân phối chuẩn với kỳ vọng 250mg và phương sai 81 mg2. Thuốc được đóng thành vỉ, mỗi vỉ 10 viên. Một vỉ được gọi là đúng tiêu chuẩn khi có trọng lượng từ 2490 mg đến 2510 mg (đã trừ bao bì). Lấy ngẫu nhiên 100 vỉ để kiểm tra. Tính xác suất:

a.Có 80 vỉ đạt tiêu chuẩn.

b. Có từ 70 vỉ trở lên đạt tiêu chuẩn

Bài 22. Tuổi thọ một loại máy lạnh A là biến ngẫu nhiên X có phân phối N(10; 6,25). Khi bán một máy thì lời 1,4 triệu đồng nhưng nếu máy lạnh phải bảo hành thì lỗ 1,8 triệu đồng. Vậy để có tiền lãi trung bình khi bán loại máy lạnh này là 0,9 triệu đồng thì cần qui định thời gian bảo hành là bao lâu?

CHƯƠNG 4. BIẾN NGẪU NHIÊN HAI CHIỀU

4.1. Khái niệm

Cho các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên xác định trên cùng một phép thử. Khi đó ta gọi $Z = X_1, X_2, ..., X_n$ là biến ngẫu nhiên n chiều hay véc tơ ngẫu nhiên n chiều.

Để đơn giản ta xét trường hợp biến ngẫu nhiên 2 chiều $Z = X, Y$

Nếu X, Y đều rời rạc (hay liên tục) ta gọi (X,Y) là rời rạc (liên tục). Ở đây ta không xét trường hợp một thành phần rời rạc, một thành phần là liên tục.

4.2. Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều

4.2.1. Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

❖ **Bảng phân phối xác suất đồng thời**

Để mô tả véc tơ ngẫu nhiên 2 chiều (X,Y) nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu người ta sử dụng bảng phân phối xác suất sau

X \ Y	y_1	y_2	……	y_j	……	y_m
x_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_1, y_2)$	……	$P(x_1, y_j)$	……	$P(x_1, y_m)$
x_2	$P(x_2, y_1)$	$P(x_2, y_2)$	……	$P(x_2, y_j)$	……	$P(x_2, y_m)$
……	……	……	……	……	……	……
x_i	$P(x_i, y_1)$	$P(x_i, y_2)$	……	$P(x_i, y_j)$	……	$P(x_i, y_m)$
……	……	……	……	……	……	……
x_n	$P(x_n, y_1)$	$P(x_n, y_2)$	……	$P(x_n, y_j)$	……	$P(x_n, y_m)$

Trong đó:

- $x_i \quad (i=\overline{1,n})$ là các giá trị có thể có của X; $y_j\,(j=\overline{1,m})$ là các giá trị có thể có của Y.
- $P\left(x_i, y_j\right)=P\left(X=x_i, Y=y_j\right)=P\left((X=x_i)(Y=y_j)\right)$ gọi là xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) nhận giá trị *(x_i,y_j)*.
- Các xác suất này thoả mãn :

$$\begin{cases} p\left(x_i, y_j\right) \geq 0, \quad \forall i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_i, y_j\right)=1 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Chi phí quảng cáo (triệu đồng/tuần) và doanh thu (triệu đồng/tuần) của một công ty có bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

X \ Y	1000	1200	1500
20	0,08	0,05	0,01
30	0,2	0,3	0,02
40	0,12	0,2	0,02

Trong đó X là chi phí quảng cáo, Y là doanh thu.

- **Phân phối biên**

Nếu biết được phân phối đồng thời của vectơ ngẫu nhiên (X,Y) ta cũng sẽ xác định được phân phối biên của mỗi thành phần

Phân phối biên của biến ngẫu nhiên X

$$P_X\left(x_i\right)=\sum_{j=1}^{m} p\left(x_i, y_j\right)$$

Bảng phân phối biên của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	……..	x_n
P	$p_X(x_1)$	$p_X(x_2)$	……..	$p_X(x_n)$

Phân phối biên của biến ngẫu nhiên Y

$$p_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)$$

Bảng phân phối biên của biến ngẫu nhiên Y

X	y_1	y_2	……..	y_m
P	$p_Y(y_1)$	$p_Y(y_2)$	……..	$p_Y(y_m)$

4.2.2. Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y), kí hiệu là F(X,Y) là hàm được xác định như sau:

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)$$

Tính chất

1) $0 \le F(x,y) \le 1, \forall x, y \in R$

2) F(x,y) không giảm theo từng biến số, nghĩa là

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$ nếu $x_2>x_1$

$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$ nếu $y_2>y_1$

3) Ta có các biểu thức giới hạn sau

$$F(-\infty,-\infty)=0; F(+\infty,+\infty)=1;$$
$$F(-\infty, y)=0; F(x,-\infty)=0;$$
$$F(x,+\infty)=F_X(x); F(+\infty; y)=F_Y(y)$$

4) $P(x_1 < X < x_2; y_1 < Y < y_2) = F(x_2, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2)$

4.2.3. Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục hai chiều (X,Y) có hàm phân phối xác suất F(x,y) liên tục và có đạo hàm hỗn hợp cấp 2 liên tục (có thể trừ một số hữu hạn đường cong)

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y), kí hiệu f(x,y) là hàm

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

Ta có

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint_D f(x,y)dxdy \text{ với } D\subset R^2$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

Tính chất

1) $f(x,y)\geq 0;\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1;$

2) Các hàm mật độ của X, của Y

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy;\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

3) X,Y độc lập $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$

4.3. Quy luật phân phối xác suất có điều kiện của các biến ngẫu nhiên thành phần

❖ **Bảng phân phối xác suất có điều kiện**

Xét biến ngẫu nhiên rời rạc (X,Y) trong đó các giá trị có thể có của thành phần X là $x_1,x_2,\ldots,x_n$, còn các giá trị có thể có của thành phần Y là $y_1,y_2,\ldots,y_m$. Gọi $P(x_i\mid y_j)\ (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ là xác suất có điều kiện để thành phần X nhận giá trị bằng x_i với điều kiện thành phần Y nhận giá trị bằng y_j.

Bảng phân phối xác suất có điều kiện của thành phần X với điều kiện $Y=y_j$ có dạng

$X\|Y=y_j$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	$P(x_1\|y_j)$	$P(x_2\|y_j)$	$\dots$	$P(x_i\|y_j)$	$\dots$	$P(x_n\|y_j)$

Trong đó các xác suất có điều kiện được tính bằng công thức

$$P(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} \quad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}$$

Ta chú ý rằng

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} = \frac{P(y_j)}{P(y_j)} = 1 \quad j = \overline{1,m}$$

Tức là các xác suất có điều kiện $P(x_i|y_j)$ cũng phải thỏa mãn các yêu cầu của một quy luật phân phối xác suất

Bảng phân phối xác suất có điều kiện của thành phần Y với điều kiện $X = x_i$ có dạng

$Y\|X=x_i$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m
P	$P(y_1\|x_i)$	$P(y_2\|x_i)$	$\dots$	$P(y_j\|x_i)$	$\dots$	$P(y_m\|x_i)$

Trong đó

$$P(y_j|x_i) = P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)} \quad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}$$

Ví dụ 1. Phân phối xác suất của lương tháng Y (triệu đồng) và giới tính X của công nhân một công ty như sau

Y / X	0,5	1	1,5
Nữ: 0	0,1	0,3	0,2
Nam:1	0,06	0,18	0,16

Tìm phân phối xác suất của lương tháng của nữ công nhân.

❖ Hàm mật độ xác suất có điều kiện

Giả sử (X,Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục.

Hàm mật độ xác suất có điều kiện của thành phần X với Y=y, kí hiệu f(x|y) là biểu thức

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện của thành phần Y với X=x, kí hiệu f(y|x) là biểu thức

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện cũng thỏa mãn các điều kiện

$$f(x|y)\ge 0; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y)dx=1;$$

$$f(y|x)\ge 0; \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x)dy=1.$$

Công thức tổng hợp hệ hai biến ngẫu nhiên theo phân phối xác suất của các thành phần như sau

Nếu (X,Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc thì

$$P(x_i,y_j)=P(x_i)P(y_j|x_i)=P(y_j)P(x_i|y_j) \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$$

Nếu (X,Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục thì

$$f(x,y)=f_X(x)f(y|x)=f_Y(y)f(x|y)$$

Nếu hai thành phần X và Y độc lập với nhau thì phân phối xác suất có điều kiện cũng bằng phân phối xác suất không điều kiện . Khi đó

$P(x_i,y_j)=P(x_i)P(y_j) \quad (*) i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ nếu (X,Y) là biến ngẫu nhiên rời rạc

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) (**)$ nếu (X,Y) là biến ngẫu nhiên liên tục

(*) và (**) là điều kiện cần và đủ để X và Y độc lập.

4.4. Các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên 2 chiều

4.4.1. Kỳ vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên thành phần

Từ bảng phân bố xác suất thành phần ta có công thức tính kì vọng và phương sai sau:

+ Nếu X,Y là biến ngẫu nhiên rời rạc

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p(x_i,y_j)$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{m}y_j p(y_j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}y_j p(x_i,y_j)$$

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^2 p(x_i,y_j)-\left[E(X)\right]^2$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}y_j^2 p(x_i,y_j)-\left[E(Y)\right]^2$$

+ Nếu X,Y là biến ngẫu nhiên liên tục

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)dxdy-\left(E(X)\right)^2$$

$$V(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-E(Y)\right)^2 f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)dxdy-\left(E(Y)\right)^2$$

4.4.2. Hiệp phương sai, hệ số tương quan

+ **Hiệp phương sai**

Hiệp phương sai (hay còn gọi là Covariance) của 2 biến ngẫu nhiên X,Y kí hiệu Cov(X,Y) là kì vọng của tích các sai lệch của các biến ngẫu nhiên đó với kì vọng của chúng.

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}$$

Tính chất:

(i) Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)

(ii) Cov(X,Y)=Cov(Y,X)

(iii) Cov(X,X)=V(X)

(iv) Nếu X,Y độc lập thì Cov(X,Y)=0. Điều ngược lại không đúng.

(v) Cov(aX+c,bY+d)= abCov(X,Y)

(vi) Cov(X+X',Y)=Cov(X,Y)+Cov(X',Y)

(vii) Cov(aX,Y)=acov(X,Y)

(viii) V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov(X,Y)

Nếu X,Y rời rạc có bảng phân bố đồng thời như ở phần 4.2.1 thì :

$$\text{Cov}\left(\text{X},\text{Y}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p\left(x_i,y_j\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)$$

Nếu X, Y liên tục thì $Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy-E(X)E(Y)$

❖ **Hệ số tương quan**

Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên X,Y được kí hiệu và định nghĩa bởi công thức:

$$\rho_{XY}=\frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Trong đó $\sigma_X=\sqrt{V(X)};\sigma_Y=\sqrt{V(Y)}$

Tính chất:

1) $\left|\rho_{XY}\right|\le 1$ với mọi X,Y.

2) Nếu X,Y độc lập thì $\rho_{XY}=0$. Điều ngược lại không đúng.

3) Nếu Y=aX+b,a≠0 thì $\left|\rho_{XY}\right|=1$

Ý nghĩa của hệ số tương quan :

- Hệ số tương quan đo mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa X và Y. Khi $\left|\rho_{X,Y}\right|$ càng gần 1 thì mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa chúng càng chặt, khi $\left|\rho_{X,Y}\right|$càng gần 0 thì mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa chúng càng yếu.

- Khi $\rho_{X,Y} = 0$ ta nói X, Y *không tương quan.*

Ví dụ. Phân phối xác suất của lương tháng Y (triệu đồng) và giới tính X của công nhân một công ty như sau

X \ Y	0,5	1	1,5
Nữ: 0	0,1	0,3	0,2
Nam:1	0,06	0,18	0,16

Hãy cho biết lương tháng của công nhân có tương quan với giới tính của công nhân không ?

4.4.3. Kì vọng toán có điều kiện, hàm hồi quy

- **Kỳ vọng có điều kiện**

+ X,Y rời rạc

Kì vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên Y với điều kiện X=x_i được kí hiệu và tính theo công thức sau:

$$E\left(Y \middle| X = x_i\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j p\left(y_j \mid x_i\right)$$

Tương tự ta có kì vọng có điều kiện của X với điều kiện Y=y_j :

$$E\left(X \mid Y = y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i p\left(x_i \mid y_j\right)$$

+ X, Y liên tục

Kì vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên Y với điều kiện X=x

$$E\left(Y \middle| X = x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(f(y \mid x)dy$$

Trong đó $f(y \mid x)$ là hàm mật độ xác suất có điền kiện của Y với $X = x$

Kì vọng có điều kiện của X với điều kiện Y=y:

$$E\left(X \mid Y=y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(f(x \mid y)dx$$

- **Hàm hồi quy**

Hàm hồi qui của Y đối với X là kì vọng có điều kiện của Y đối với X :

$$f\left(x\right)=E\left(Y \middle| X=x\right)$$

Hàm hồi qui của X đối với Y là kì vọng có điều kiện của X đối với Y :

$$g\left(y\right)=E\left(X \middle| Y=y\right)$$

Các hàm hồi quy cho biết giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên này phụ thuộc vào biến kia như thế nào

Ví dụ. Thống kê dân cư ở một thành phố nọ ở độ tuổi trưởng thành về thu nhập hàng tháng X và độ tuổi Y thu được kết quả trong bảng sau:

X \ Y	30	45	70
1	0,01	0,02	0,05
2	0,03	0,06	0,10
3	0,18	0,21	0,15
4	0,07	0,08	0,04

Trong đó X có đơn vị là triệu đồng/tháng.

Y=30, 45, 70 là chỉ độ tuổi người dân trong khoảng 25-35; 35-55; 55-85.

Tìm thu nhập trung bình theo lứa tuổi.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc:

Y \ X	26	30	41	50
2,3	0,05	0,08	0,12	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

a) Tìm bảng phân phối xác suất biên của các thành phần X và Y?

b) Tìm bảng phân phối xác suất có điều kiện của Y khi X=26 và của X khi Y=2,7?

2. Biến ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có bảng phân phối xác suất như sau:

Y \ X	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

a) Tìm kì vọng có điều kiện của Y với X=1?

b) Tìm các kì vọng toán E(X), E(Y) và các phương sai V(X), V(Y)?

c) Tìm hiệp phương sai và hệ số tương quan giữa X và Y?

3. Điều tra thu nhập hàng năm đơn vị triệu đồng của các cặp vợ chồng đang làm việc thu được kết quả sau. X-thu nhập chồng Y- thu nhập vợ

X \ Y	100	200	300	400
100	0,20	0,04	0,01	0
200	0,10	0,36	0,09	0

300 400	0 0	0,05 0	0,10 0	0 0,05

a) Tìm phân phối biên của thu nhập của chồng và vợ?

b) Tìm phân phối thu nhập của các bà vợ có chồng thu nhập 200 triệu/năm?

c) Thu nhập trung bình hàng năm của chồng và của vợ?

d) Thu nhập trung bình của các bà vợ có chồng ở mức thu nhập 200 triệu/năm?

e) Thu nhập của chồng và của vợ có độc lập nhau không?

4. Cho (X,Y) là biến ngẫu nhiên 2 chiều có bảng phân phối xác suất như sau:

X \ Y	y	0	1
0 1	1/4 1/5	a b	1/8 1/10

a) Tìm a, b để X,Y độc lập?

b) Giả thiết rằng a=1/5. Xác định giá trị b sao cho hiệp phương sai của (X,Y) bằng 0. X và Y trong trường hợp này có độc lập nhau không?

5. Thống kê về lãi suất cổ phiếu tính cho 100 USD khi đầu tư vào 2 ngân hàng A và B trong 1 năm tương ứng là X(đơn vị %), Y (đơn vị :%) cho kết quả trong bảng

X \ Y	-2	5	10
-1	0,1	0,15	0,1
4	0,05	0,2	0,1
8	0,1	0,15	0,05

a.Tính lãi suất kì vọng và mức độ rủi ro khi đầu tư vào A và B

b. X và Y có độc lập với nhau không

c. Tính lãi suất cổ phiếu trung bình của A khi lãi suất cổ phiếu của B là 5%

d. X và Y có tương quan không

e. Để đạt lãi suất trung bình lớn nhất thì nên đầu tư vào 2 loại cổ phiếu của A, B theo tỉ lệ nào

f. Để hạn chế rủi ro về lãi suất đến mức thấp nhất thì nên đầu tư vào 2 loại cổ phiếu theo tỷ lệ nào

Bảng 1: Giá trị hàm mật độ phân phối chuẩn hóa

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.3989	0.3950	0.3910	0.3872	0.3833	0.3795	0.3757	0.3720	0.3683	0.3646
0.1	0.3610	0.3574	0.3538	0.3503	0.3468	0.3434	0.3400	0.3366	0.3332	0.3299
0.2	0.3266	0.3234	0.3202	0.3170	0.3138	0.3107	0.3076	0.3045	0.3015	0.2985
0.3	0.2955	0.2926	0.2897	0.2868	0.2840	0.2811	0.2783	0.2756	0.2728	0.2701
0.4	0.2674	0.2648	0.2621	0.2595	0.2569	0.2544	0.2518	0.2493	0.2469	0.2444
0.5	0.2420	0.2396	0.2372	0.2348	0.2325	0.2302	0.2279	0.2256	0.2234	0.2211
0.6	0.2189	0.2168	0.2146	0.2125	0.2104	0.2083	0.2062	0.2041	0.2021	0.2001
0.7	0.1981	0.1961	0.1942	0.1923	0.1903	0.1884	0.1866	0.1847	0.1829	0.1811
0.8	0.1793	0.1775	0.1757	0.1740	0.1722	0.1705	0.1688	0.1671	0.1655	0.1638
0.9	0.1622	0.1606	0.1590	0.1574	0.1558	0.1543	0.1528	0.1512	0.1497	0.1482
1.0	0.1468	0.1453	0.1439	0.1424	0.1410	0.1396	0.1382	0.1368	0.1355	0.1341
1.1	0.1328	0.1315	0.1302	0.1289	0.1276	0.1263	0.1251	0.1238	0.1226	0.1214
1.2	0.1202	0.1190	0.1178	0.1166	0.1154	0.1143	0.1132	0.1120	0.1109	0.1098
1.3	0.1087	0.1076	0.1066	0.1055	0.1045	0.1034	0.1024	0.1014	0.1004	0.0994
1.4	0.0984	0.0974	0.0964	0.0955	0.0945	0.0936	0.0926	0.0917	0.0908	0.0899
1.5	0.0890	0.0881	0.0873	0.0864	0.0855	0.0847	0.0838	0.0830	0.0822	0.0814
1.6	0.0805	0.0797	0.0790	0.0782	0.0774	0.0766	0.0759	0.0751	0.0744	0.0736
1.7	0.0729	0.0722	0.0714	0.0707	0.0700	0.0693	0.0686	0.0680	0.0673	0.0666
1.8	0.0659	0.0653	0.0646	0.0640	0.0634	0.0627	0.0621	0.0615	0.0609	0.0603
1.9	0.0597	0.0591	0.0585	0.0579	0.0573	0.0568	0.0562	0.0556	0.0551	0.0545
2.0	0.0540	0.0535	0.0529	0.0524	0.0519	0.0514	0.0508	0.0503	0.0498	0.0493
2.1	0.0489	0.0484	0.0479	0.0474	0.0469	0.0465	0.0460	0.0456	0.0451	0.0446
2.2	0.0442	0.0438	0.0433	0.0429	0.0425	0.0420	0.0416	0.0412	0.0408	0.0404
2.3	0.0400	0.0396	0.0392	0.0388	0.0384	0.0380	0.0377	0.0373	0.0369	0.0366
2.4	0.0362	0.0358	0.0355	0.0351	0.0348	0.0344	0.0341	0.0337	0.0334	0.0331
2.5	0.0327	0.0324	0.0321	0.0318	0.0315	0.0312	0.0308	0.0305	0.0302	0.0299
2.6	0.0296	0.0293	0.0290	0.0288	0.0285	0.0282	0.0279	0.0276	0.0274	0.0271
2.7	0.0268	0.0265	0.0263	0.0260	0.0258	0.0255	0.0252	0.0250	0.0247	0.0245
2.8	0.0243	0.0240	0.0238	0.0235	0.0233	0.0231	0.0228	0.0226	0.0224	0.0222
2.9	0.0220	0.0217	0.0215	0.0213	0.0211	0.0209	0.0207	0.0205	0.0203	0.0201
3.0	0.0199	0.0197	0.0195	0.0193	0.0191	0.0189	0.0187	0.0185	0.0183	0.0182
3.1	0.0180	0.0178	0.0176	0.0174	0.0173	0.0171	0.0169	0.0168	0.0166	0.0164
3.2	0.0163	0.0161	0.0159	0.0158	0.0156	0.0155	0.0153	0.0152	0.0150	0.0149
3.3	0.0147	0.0146	0.0144	0.0143	0.0141	0.0140	0.0139	0.0137	0.0136	0.0134
3.4	0.0133	0.0132	0.0131	0.0129	0.0128	0.0127	0.0125	0.0124	0.0123	0.0122
3.5	0.0120	0.0119	0.0118	0.0117	0.0116	0.0115	0.0113	0.0112	0.0111	0.0110
3.6	0.0109	0.0108	0.0107	0.0106	0.0105	0.0104	0.0103	0.0102	0.0101	0.0100
3.7	0.0099	0.0098	0.0097	0.0096	0.0095	0.0094	0.0093	0.0092	0.0091	0.0090
3.8	0.0089	0.0088	0.0087	0.0087	0.0086	0.0085	0.0084	0.0083	0.0082	0.0082
3.9	0.0081	0.0080	0.0079	0.0078	0.0078	0.0077	0.0076	0.0075	0.0075	0.0074
4.0	0.0073	0.0072	0.0072	0.0071	0.0070	0.0070	0.0069	0.0068	0.0067	0.0067
4.1	0.0066	0.0065	0.0065	0.0064	0.0064	0.0063	0.0062	0.0062	0.0061	0.0060
4.2	0.0060	0.0059	0.0059	0.0058	0.0057	0.0057	0.0056	0.0056	0.0055	0.0055
4.3	0.0054	0.0054	0.0053	0.0053	0.0052	0.0051	0.0051	0.0050	0.0050	0.0049
4.4	0.0049	0.0048	0.0048	0.0048	0.0047	0.0047	0.0046	0.0046	0.0045	0.0045

Bảng 2. GIÁ TRỊ HÀM TÍCH PHÂN LAPLACE

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.473	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4.0	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Bảng 3. GIÁ TRỊ TỚI HẠN CHUẨN

U	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Bảng 4. GIÁ TRỊ TỚI HẠN STUDENT $t_{\alpha}^{(n)}$

n \ α	**0.2**	**0.15**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.22
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208
7	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785
8	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501
9	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297
10	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144
11	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025
12	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930
13	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852
14	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787
15	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733
16	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646
18	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610
19	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579
20	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552
21	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527
22	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505
23	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485
24	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467
25	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450
26	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435
27	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421
28	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408
29	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396
30	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385
40	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307
50	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261
60	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232
70	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	2.899	3.211
80	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195
90	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	2.878	3.183
100	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174
120	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160
240	0.843	1.039	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596	2.833	3.125
00	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090

Bảng 5. GIÁ TRỊ TỚI HẠN KHI-BÌNH PHƯƠNG

α / n	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.0025	0.001
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6
150	109.1	112.7	118.0	122.7	128.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3

Bảng 6. GIÁ TRỊ TỚI HẠN FISHER

N2	N1 / α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0.1	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
5	***0.05***	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
	0.025	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
	0.1	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
6	***0.05***	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
	0.025	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
	0.1	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
7	***0.05***	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
	0.025	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
	0.1	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
8	***0.05***	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
	0.025	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
	0.1	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
9	***0.05***	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
	0.025	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
	0.1	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323
10	***0.05***	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
	0.025	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717
	0.1	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248
11	***0.05***	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
	0.025	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526
	0.1	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188
12	***0.05***	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
	0.025	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374
	0.1	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138
13	***0.05***	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
	0.025	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250
	0.1	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095
14	***0.05***	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
	0.025	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147
	0.1	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059
15	***0.05***	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
	0.025	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060
	0.1	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028
16	***0.05***	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
	0.025	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986
	0.1	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001
17	***0.05***	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
	0.025	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922
	0.1	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977
18	***0.05***	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
	0.025	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.100	3.005	2.929	2.866

	0.1	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937
20	***0.05***	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
	0.025	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774

GIÁ TRỊ TỚI HẠN FISHER (Tiếp)

N2	**N1** α	**12**	**15**	**20**	**30**	**40**	**60**	**80**	**100**	**120**	**240**
	0.1	3.268	3.238	3.207	3.174	3.157	3.140	3.132	3.126	3.123	3.114
5	***0.05***	4.678	4.619	4.558	4.496	4.464	4.431	4.415	4.405	4.398	4.382
	0.025	6.525	6.428	6.329	6.227	6.175	6.123	6.096	6.080	6.069	6.042
	0.1	2.905	2.871	2.836	2.800	2.781	2.762	2.752	2.746	2.742	2.732
6	***0.05***	4.000	3.938	3.874	3.808	3.774	3.740	3.722	3.712	3.705	3.687
	0.025	5.366	5.269	5.168	5.065	5.012	4.959	4.932	4.915	4.904	4.877
	0.1	2.668	2.632	2.595	2.555	2.535	2.514	2.504	2.497	2.493	2.482
7	***0.05***	3.575	3.511	3.445	3.376	3.340	3.304	3.286	3.275	3.267	3.249
	0.025	4.666	4.568	4.467	4.362	4.309	4.254	4.227	4.210	4.199	4.171
	0.1	2.502	2.464	2.425	2.383	2.361	2.339	2.328	2.321	2.316	2.304
8	***0.05***	3.284	3.218	3.150	3.079	3.043	3.005	2.986	2.975	2.967	2.947
	0.025	4.200	4.101	3.999	3.894	3.840	3.784	3.756	3.739	3.728	3.699
	0.1	2.379	2.340	2.298	2.255	2.232	2.208	2.196	2.189	2.184	2.172
9	***0.05***	3.073	3.006	2.936	2.864	2.826	2.787	2.768	2.756	2.748	2.727
	0.025	3.868	3.769	3.667	3.560	3.505	3.449	3.421	3.403	3.392	3.363
	0.1	2.284	2.244	2.201	2.155	2.132	2.107	2.095	2.087	2.082	2.069
10	***0.05***	2.913	2.845	2.774	2.700	2.661	2.621	2.601	2.588	2.580	2.559
	0.025	3.621	3.522	3.419	3.311	3.255	3.198	3.169	3.152	3.140	3.110
	0.1	2.209	2.167	2.123	2.076	2.052	2.026	2.013	2.005	2.000	1.986
11	***0.05***	2.788	2.719	2.646	2.570	2.531	2.490	2.469	2.457	2.448	2.426
	0.025	3.430	3.330	3.226	3.118	3.061	3.004	2.974	2.956	2.944	2.914
	0.1	2.147	2.105	2.060	2.011	1.986	1.960	1.946	1.938	1.932	1.918
12	***0.05***	2.687	2.617	2.544	2.466	2.426	2.384	2.363	2.350	2.341	2.319
	0.025	3.277	3.177	3.073	2.963	2.906	2.848	2.818	2.800	2.787	2.756
	0.1	2.097	2.053	2.007	1.958	1.931	1.904	1.890	1.882	1.876	1.861
13	***0.05***	2.604	2.533	2.459	2.380	2.339	2.297	2.275	2.261	2.252	2.230
	0.025	3.153	3.053	2.948	2.837	2.780	2.720	2.690	2.671	2.659	2.628
	0.1	2.054	2.010	1.962	1.912	1.885	1.857	1.843	1.834	1.828	1.813
14	***0.05***	2.534	2.463	2.388	2.308	2.266	2.223	2.201	2.187	2.178	2.155
	0.025	3.050	2.949	2.844	2.732	2.674	2.614	2.583	2.565	2.552	2.520
	0.1	2.017	1.972	1.924	1.873	1.845	1.817	1.802	1.793	1.787	1.771
15	***0.05***	2.475	2.403	2.328	2.247	2.204	2.160	2.137	2.123	2.114	2.090
	0.025	2.963	2.862	2.756	2.644	2.585	2.524	2.493	2.474	2.461	2.429
	0.1	1.985	1.940	1.891	1.839	1.811	1.782	1.766	1.757	1.751	1.735
16	***0.05***	2.425	2.352	2.276	2.194	2.151	2.106	2.083	2.068	2.059	2.035
	0.025	2.889	2.788	2.681	2.568	2.509	2.447	2.415	2.396	2.383	2.350
	0.1	1.958	1.912	1.862	1.809	1.781	1.751	1.735	1.726	1.719	1.703
17	***0.05***	2.381	2.308	2.230	2.148	2.104	2.058	2.035	2.020	2.011	1.986
	0.025	2.825	2.723	2.616	2.502	2.442	2.380	2.348	2.329	2.315	2.282
	0.1	1.933	1.887	1.837	1.783	1.754	1.723	1.707	1.698	1.691	1.674
18	***0.05***	2.342	2.269	2.191	2.107	2.063	2.017	1.993	1.978	1.968	1.943
	0.025	2.769	2.667	2.559	2.445	2.384	2.321	2.289	2.269	2.256	2.222
	0.1	1.912	1.865	1.814	1.759	1.730	1.699	1.683	1.673	1.666	1.649
20	***0.05***	2.308	2.234	2.155	2.071	2.026	1.980	1.955	1.940	1.930	1.905
	0.025	2.720	2.617	2.509	2.394	2.333	2.270	2.237	2.217	2.203	2.169

GIÁ TRỊ TỚI HẠN FISHER (Tiếp)

N2	N1 / α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0.1	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.920
21	***0.05***	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
	0.025	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.969	2.874	2.798	2.735
	0.1	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.060	2.008	1.967	1.933	1.904
22	***0.05***	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
	0.025	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.700
	0.1	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866
25	***0.05***	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
	0.025	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613
	0.1	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.819
30	***0.05***	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
	0.025	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511
	0.1	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763
40	***0.05***	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
	0.025	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388
	0.1	2.809	2.412	2.197	2.061	1.966	1.895	1.840	1.796	1.760	1.729
50	***0.05***	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
	0.025	5.340	3.975	3.390	3.054	2.833	2.674	2.553	2.458	2.381	2.317
	0.1	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707
60	***0.05***	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
	0.025	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270
	0.1	2.779	2.380	2.164	2.027	1.931	1.860	1.804	1.760	1.723	1.691
70	***0.05***	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
	0.025	5.247	3.890	3.309	2.975	2.754	2.595	2.474	2.379	2.302	2.237
	0.1	2.769	2.370	2.154	2.016	1.921	1.849	1.793	1.748	1.711	1.680
80	***0.05***	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
	0.025	5.218	3.864	3.284	2.950	2.730	2.571	2.450	2.355	2.277	2.213
	0.1	2.762	2.363	2.146	2.008	1.912	1.841	1.785	1.739	1.702	1.670
90	***0.05***	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
	0.025	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.432	2.336	2.259	2.194
	0.1	2.756	2.356	2.139	2.002	1.906	1.834	1.778	1.732	1.695	1.663
100	***0.05***	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
	0.025	5.179	3.828	3.250	2.917	2.696	2.537	2.417	2.321	2.244	2.179
	0.1	2.748	2.347	2.130	1.992	1.896	1.824	1.767	1.722	1.684	1.652
120	***0.05***	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910
	0.025	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157
	0.1	2.739	2.338	2.121	1.983	1.886	1.814	1.757	1.712	1.674	1.642
150	***0.05***	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943	1.894
	0.025	5.126	3.781	3.204	2.872	2.652	2.494	2.373	2.278	2.200	2.135
	0.1	5.109	3.766	3.189	2.858	2.638	2.479	2.359	2.263	2.185	2.120
180	***0.05***	6.778	4.725	3.892	3.425	3.120	2.904	2.740	2.611	2.507	2.421
	0.025	8.077	5.457	4.423	3.851	3.481	3.219	3.022	2.869	2.744	2.642
	0.1	2.727	2.325	2.107	1.968	1.871	1.799	1.742	1.696	1.658	1.625
240	***0.05***	3.880	3.033	2.642	2.409	2.252	2.136	2.048	1.977	1.919	1.870
	0.025	5.088	3.746	3.171	2.839	2.620	2.461	2.341	2.245	2.167	2.102

GIÁ TRỊ TỚI HẠN FISHER (Tiếp)

N2	N1 / α	12	15	20	30	40	60	80	100	120	240
	0.1	1.875	1.827	1.776	1.719	1.689	1.657	1.640	1.630	1.623	1.605
21	***0.05***	2.250	2.176	2.096	2.010	1.965	1.916	1.891	1.876	1.866	1.839
	0.025	2.637	2.534	2.425	2.308	2.246	2.182	2.148	2.128	2.114	2.079
	0.1	1.859	1.811	1.759	1.702	1.671	1.639	1.622	1.611	1.604	1.586
22	***0.05***	2.226	2.151	2.071	1.984	1.938	1.889	1.864	1.849	1.838	1.811
	0.025	2.602	2.498	2.389	2.272	2.210	2.145	2.111	2.090	2.076	2.040
	0.1	1.820	1.771	1.718	1.659	1.627	1.593	1.576	1.565	1.557	1.538
25	***0.05***	2.165	2.089	2.007	1.919	1.872	1.822	1.796	1.779	1.768	1.740
	0.025	2.515	2.411	2.300	2.182	2.118	2.052	2.017	1.996	1.981	1.944
	0.1	1.773	1.722	1.667	1.606	1.573	1.538	1.519	1.507	1.499	1.478
30	***0.05***	2.092	2.015	1.932	1.841	1.792	1.740	1.712	1.695	1.683	1.654
	0.025	2.412	2.307	2.195	2.074	2.009	1.940	1.904	1.882	1.866	1.827
	0.1	1.715	1.662	1.605	1.541	1.506	1.467	1.447	1.434	1.425	1.402
40	***0.05***	2.003	1.924	1.839	1.744	1.693	1.637	1.608	1.589	1.577	1.544
	0.025	2.288	2.182	2.068	1.943	1.875	1.803	1.764	1.741	1.724	1.682
	0.1	1.680	1.627	1.568	1.502	1.465	1.424	1.402	1.388	1.379	1.354
	0.05	1.952	1.871	1.784	1.687	1.634	1.576	1.544	1.525	1.511	1.476
	0.025	2.216	2.109	1.993	1.866	1.796	1.721	1.681	1.656	1.639	1.594
	0.1	1.657	1.603	1.543	1.476	1.437	1.395	1.372	1.358	1.348	1.321
60	***0.05***	1.917	1.836	1.748	1.649	1.594	1.534	1.502	1.481	1.467	1.430
	0.025	2.169	2.061	1.944	1.815	1.744	1.667	1.625	1.599	1.581	1.534
	0.1	1.641	1.587	1.526	1.457	1.418	1.374	1.350	1.335	1.325	1.297
70	***0.05***	1.893	1.812	1.722	1.622	1.566	1.505	1.471	1.450	1.435	1.396
	0.025	2.136	2.028	1.910	1.779	1.707	1.628	1.585	1.558	1.539	1.490
	0.1	1.629	1.574	1.513	1.443	1.403	1.358	1.334	1.318	1.307	1.278
80	***0.05***	1.875	1.793	1.703	1.602	1.545	1.482	1.448	1.426	1.411	1.370
	0.025	2.111	2.003	1.884	1.752	1.679	1.599	1.555	1.527	1.508	1.457
	0.1	1.620	1.564	1.503	1.432	1.391	1.346	1.321	1.304	1.293	1.263
90	***0.05***	1.861	1.779	1.688	1.586	1.528	1.465	1.429	1.407	1.391	1.349
	0.025	2.092	1.983	1.864	1.731	1.657	1.576	1.531	1.503	1.483	1.430
	0.1	1.612	1.557	1.494	1.423	1.382	1.336	1.310	1.293	1.282	1.250
100	***0.05***	1.850	1.768	1.676	1.573	1.515	1.450	1.415	1.392	1.376	1.333
	0.025	2.077	1.968	1.849	1.715	1.640	1.558	1.512	1.483	1.463	1.409
	0.1	1.601	1.545	1.482	1.409	1.368	1.320	1.294	1.277	1.265	1.232
120	***0.05***	1.834	1.750	1.659	1.554	1.495	1.429	1.392	1.369	1.352	1.307
	0.025	2.055	1.945	1.825	1.690	1.614	1.530	1.483	1.454	1.433	1.376
	0.1	1.590	1.533	1.470	1.396	1.353	1.305	1.277	1.259	1.247	1.212
150	***0.05***	1.817	1.734	1.641	1.535	1.475	1.407	1.369	1.345	1.327	1.280
	0.025	2.032	1.922	1.801	1.665	1.588	1.502	1.454	1.423	1.402	1.342
	0.1	2.018	1.907	1.786	1.649	1.571	1.484	1.435	1.403	1.381	1.319
180	***0.05***	2.285	2.140	1.982	1.805	1.706	1.595	1.534	1.494	1.466	1.390
	0.025	2.481	2.309	2.124	1.918	1.803	1.676	1.605	1.560	1.528	1.440
	0.1	1.573	1.516	1.451	1.376	1.332	1.281	1.252	1.233	1.219	1.180
240	***0.05***	1.793	1.708	1.614	1.507	1.445	1.375	1.335	1.308	1.290	1.237
	0.025	1.999	1.888	1.766	1.628	1.549	1.460	1.410	1.377	1.354	1.289