TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG

Bài giảng

XÁC SUẤT THỐNG KÊ TOÁN

PHẦN I. XÁC SUẤT

Bản thảo đang được chỉnh lý của giảng viên Vương Thị Thảo Bình
Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: vuongbinh@ftu.edu.vn;
Điện thoại: 0983466899

Hà nội, tháng 1/2016

MỤC LỤC

PHẦN I – XÁC SUẤT

CHƯƠNG 1. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1.1. Bổ trợ về đại số tổ hợp

a) Quy tắc nhân: Giả sử một công việc nào đó được chia thành k giai đoạn. Có n_1 cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, n_2 cách thực hiện giai đoạn thứ hai, ..., n_k cách thực hiện giai đoạn thứ k. Khi đó ta có

$$n = n_1.n_2....n_k$$

cách thực hiện công việc.

b) Chỉnh hợp: Chỉnh hợp chập k của n phần tử (k ≤n) là một nhóm (bộ) có thứ tự gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử kí hiệu là A_n^k, được tính:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$$

c) Chỉnh hợp lặp: Chỉnh hợp lặp chặp k của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử chọn ra từ n phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể có mặt 1, 2, ..., k lần trong nhóm.

Số chỉnh hợp lặp chặp k của n phần tử được kí hiệu B_n^k.

$$B_n^k = n^k$$

d) Hoán vị: Hoán vị của m phần tử là một nhóm có thứ tự gồm đủ mặt m phần tử đã cho. Số hoán vị của m phần tử được kí hiệu là P_m.

$$P_m = m!$$

e) Tổ hợp: Tổ hợp chặp k của n phần tử (k≤n) là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử khác nhau chọn ra từ n phần tử đã cho. Số tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu là C_n^k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

Chú ý:

i) Quy ước 0! = 1.

ii) $C_n^k = C_n^{n-k}$

iii) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

1.2. Phép thử và các loại biến cố

a) Định nghĩa:

- Phép thử: Việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản để quan sát một hiện tượng nào đó có xảy ra hay không xảy ra được gọi là thực hiện một phép thử.

- Biến cố: Hiện tượng (sự kiện) được xem xét trong phép thử được gọi là biến cố, kí hiệu A, B, C...

Chú ý : Ứng với mỗi phép thử bao giờ cũng gắn với một hành động và một mục đích quan sát.

Ví dụ: + Tung một con xúc xắc xuống đất để quan sát lật lên mặt nào là một phép thử. Việc lật lên một mặt nào đó gọi là biến cố.

+) Muốn biết sản phẩm trong hộp là sản phẩm tốt hay xấu thì ta thực hiện phép thử: lấy ra từ hộp một sản phẩm và quan sát xem nó là sản phẩm tốt hay xấu; Hiện tượng: sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt, hoặc sản phẩm lấy ra là sản phẩm xấu là các biến cố.
+) Một hộp đựng 10 sản phẩm trong đó có 7 sản phẩm tốt, 3 sản phẩm xấu. Lấy ra một sản phẩm (tức là ta thực hiện một phép thử), gọi A = (Lấy được sản phẩm tốt) thì A là một biến cố.

b) Các loại biến cố: Khi tiến hành một phép thử, có thể xảy ra 3 loại biến cố:

- **Biến cố chắc chắn:** là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi thực hiện phép thử G, kí hiệu: U

- **Biến cố không thể có** (biến cố rỗng) là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử G. Kí hiệu V

- **Biến cố ngẫu nhiên** là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện phép thử.

Ví dụ: Thực hiện phép thử G là tung một con xúc xắc thì có 6 biến cố sơ cấp là "xuất hiện 1 chấm", "xuất hiện 2 chấm", ...,"xuất hiện 6 chấm".

Biến cố "xuất hiện mặt có số chấm ≤ 6" là biến cố chắc chắn.

Biến cố "xuất hiện mặt có số chấm = 7" là biến cố không thể có.

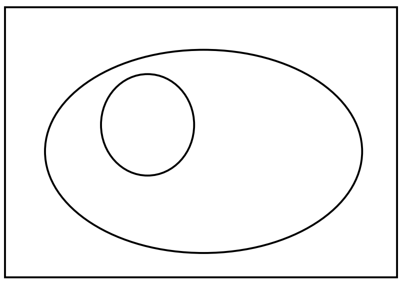
Biến cố "xuất hiện mặt 1 chấm " là biến cố ngẫu nhiên.

Chú ý: Việc đưa biến cố U, V vào chỉ để hoàn thiện về mặt lý thuyết, thực tế ta chỉ quan tâm tới biến cố ngẫu nhiên, từ đây khi nói biến cố ta hiểu đó là biến cố ngẫu nhiên.

c) Quan hệ giữa các biến cố:

<1>- *Quan hệ kéo theo:* Biến cố A đgl kéo theo biến cố B, kí hiệu A⇒B,
nếu A xảy ra thì B xảy ra.

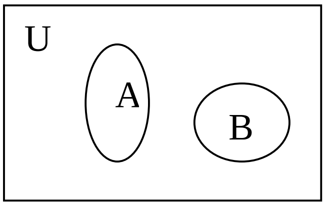
VÍ DỤ : "xuất hiện mặt 1 chấm " ⇒ "xuất hiện mặt có số chấm ≤ 6"



<2>- *Quan hệ tương đương:* Nếu A ⇒ B và B ⇒ A thì ta nói biến cố A tương đương biến cố B, kí hiệu A = B.

VÍ DỤ : "xuất hiện mặt có số chấm là chẵn" = "xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 2"

<3>- *Biến cố xung khắc:* Hai biến cố A và B đgl hai biến cố xung khắc nếu A, B không đồng thời xảy ra trong cùng một phép thử. Trường hợp ngược lại, nếu 2 biến cố có thể cùng xảy ra trong cùng một phép thử thì được gọi là không xung khắc.



Mở rộng: Nhóm n biến cố A_1, A_2,..., A_n được gọi là xung khắc từng đôi nếu bất kì hai biến cố nào trong nhóm này cũng đều xung khắc với nhau.

<4>- *Biến cố đồng khả năng:* Các biến cố được gọi là đồng khả năng nếu sự xuất hiện biến cố này hay biến cố kia có khả năng như nhau trong một phép thử.

VÍ DỤ : Khi gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất thì các biến cố

"xuất hiện mặt 1 chấm", "xuất hiện mặt 2 chấm", ..., "xuất hiện mặt 6 chấm" là đồng khả năng.

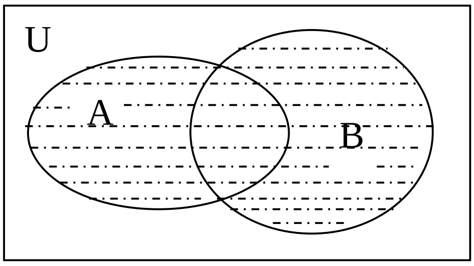
<5>- **Biến cố tổng: Biến cố C được gọi là t***ổng hai biến cố A và B nếu C xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra, kí hiệu C=A+B.*

VÍ DỤ : Hai thợ săn cùng bắn vào một con thú.

A = "Người thứ nhất bắn trúng"

B = "Người thứ hai bắn trúng"

C = A + B = "Con thú bị bắn trúng"



Ví dụ: Tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Gọi A_i là biến cố xuất hiện mặt có i chấm. Khi đó: $A = A_2 + A_4 + A_6$

Mở rộng: Biến cố A được gọi là tổng của n biến cố A_1, A_2,...,A_n nếu A xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất một trong n biến cố ấy xảy ra, kí hiệu $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

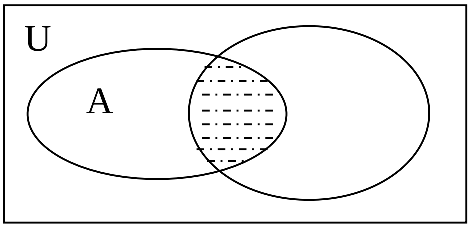
<6>- *Tích hai biến cố*: Biến cố C được gọi là tích hai biến cố A và B nếu C xảy ra khi và chỉ khi A và B đồng thời xảy ra. Kí hiệu: C= AB.

VÍ DỤ : Hai người cùng bắn một con thú.

A = "Người thứ nhất bắn trượt"

B = "Người thứ hai bắn trượt"

C = AB = "Con thú không bị bắn trúng".

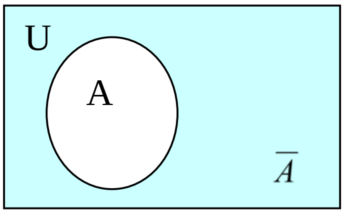


Mở rộng: Biến cố C được gọi là tích của n biến cố A_1, A_2,..., A_n nếu C xảy ra khi và chỉ khi cả n biến cố nói trên cùng đồng thời xảy ra, kí hiệu $C = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

<7>- *Biến cố hiệu: Biến cố C được gọi là hiệu của hai biến cố A và B, nếu* C xảy ra khi và chỉ khi biến cố A xảy ra, biến cố B không xảy ra. Kí hiệu C=A\B.

VÍ DỤ : Gieo xúc xắc.
B = "Xuất hiện mặt 3 chấm"
A = "Xuất hiện mặt có số chấm là bội của 3"
A\B = "Xuất hiện mặt 6 chấm"

<8>- *Biến cố đối:* Hiệu U\A là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu $\overline{A}$.



<9> Nhóm biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là một nhóm đầy đủ các biến cố nếu trong kết quả của một phép thử sẽ xảy ra một và chỉ một trong các biến cố đó, tức là:

$A_1, A_2, ..., A_n$ là một nhóm đầy đủ các biến cố $\Leftrightarrow \begin{cases} A_i \cdot A_j = V \ \ (\forall i \neq j) \\ A_1 + A_2 + ... + A_n = U \end{cases}$

d) *Một số tính chất*

A + U = U ; A.U = A ; $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

A + V = A ; A.V = V ; $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

A + A = A ; A.A = A ; A\B = A. $\overline{B}$

A + $\overline{A}$ = U ; A. $\overline{A}$ = V ; A = AB + A. $\overline{B}$

A + B = B + A ; AB = BA ;
A+(B+C) = (A+B)+C ;
A(B+C) = AB + AC
A.(BC) = (AB).C

Nếu A $\subset$ B thì A.B = A, A+B = B.
A, B xung khắc $\Leftrightarrow$ AB = V

1.3. Xác suất của biến cố

Xác suất của biến cố A là con số đặc trưng cho khả năng xuất hiện khách quan của biến cố A khi thực hiện phép thử.
Nếu xét theo khả năng xuất hiện biến cố thì biến cố được chia làm 2 loại:
+ Biến cố sơ cấp: Là biến cố không thể chia nhỏ thành các bộ phận hợp thành.
+ Biến cố phức hợp: là biến cố có thể phân chia thành nhiều biến cố sơ cấp.
Nhận xét:

i) Mọi biến cố ngẫu nhiên A đều biểu diễn được dưới dạng tổng của một số biến cố sơ cấp nào đó. Các biến cố sơ cấp trong tổng này được gọi là các biến cố thuận lợi cho biến cố A.
ii) Biến cố chắc chắn U là tổng của mọi biến cố sơ cấp có thể, nghĩa là mọi biến cố sơ cấp đều thuận lợi cho U. Do đó U còn được gọi là không gian các biến cố sơ cấp.

<u>Thí dụ 1</u>: Tung một đồng xu cân đối và đồng chất, giả sử khả năng đồng xu xuất hiện mặt sấp hay mặt ngửa là như nhau. Khi đó ta có hai biến cố sơ cấp đồng khả năng có thể xảy ra, đó là: {S; N}

<u>Thí dụ 2</u>: Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A_i = (Con xúc xắc xuất hiện mặt i chấm); $1 \le i \le 6$. Khi đó ta có 6 biến cố sơ cấp đồng khả năng có thể xảy ra, đó là $\{A_1; A_2; .....; A_6\}$

<u>Thí dụ 3</u>: Một hộp đựng 10 sản phẩm cùng loại, trong đó có 7 chính phẩm và 3 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ hộp. Khi đó ta có 10 biến cố sơ cấp đồng khả năng có thể xảy ra. Có 3 biến cố thuận lợi cho biến cố "Sản phẩm lấy ra là phế phẩm"

<u>Thí dụ 4</u>: Trở lại thí dụ 2, gọi C = (Con xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm chẵn), khi đó C xảy khi A_2 xảy ra hoặc A_4 xảy ra, hoặc A_6 xảy ra. Do vậy các biến cố $\{A_2; A_4; A_6\}$ gọi là các biến cố thuận lợi cho biến cố C xảy ra, và ta nói có 3 biến cố này thuận lợi cho C

<u>Thí dụ 5</u>: Một hộp đựng 10 sản phẩm cùng loại, trong đó có 7 chính phẩm và 3 phế phẩm, lấy 1 sản phẩm từ hộp, gọi A là biến cố "Lấy được chính phẩm". Khi đó ta có 7 biến cố thuận lợi cho A.

Như vậy, những biến cố xảy ra làm cho biến cố A xảy ra khi thực hiện một phép thử được gọi là các biến cố thuận lợi cho biến cố A.

1.3.1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

a) Định nghĩa: Giả sử phép thử có n biến cố đồng khả năng có thể xảy ra, trong đó có m biến cố thuận lợi cho biến cố A. Khi đó xác suất của biến cố A, kí liệu P(A) được định nghĩa bằng công thức sau:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Sè bieá coáthuËn lî i cho A}}{\text{Sè bieá coá®oàg khaûnaêg x¶y ra}}$$

b) Ví dụ:

VÍ DỤ : Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất xuất hiện mặt chẵn.

Giải:

Gọi A_i là biến cố xuất hiện mặt i chấm và A là biến cố xuất hiện mặt chẵn thì

$$A = A_2 + A_4 + A_6$$

Ta thấy phép thử có 6 biến cố sơ cấp đồng khả năng có thể xảy ra trong đó có 3 biến cố thuận lợi cho A.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ví dụ : Trong một lớp học có 6 học sinh nữ và 4 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên cùng một lúc 3 học sinh. Tính xác suất để trong 3 học sinh chọn ra có 2 học sinh nữ.

Giải

Gọi A là biến cố "Trong 3 học sinh có 2 học sinh nữ".

- Số khả năng có thể có: n = C_{10}^{3} = 120

- Số khả năng thuận lợi cho A: m = $C_6^2.C_4^1$ =60

- Xác suất của biến cố A là P(A) = $\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

Ví dụ đọc thêm về Bài toán Méré (Đỗ Đức Thái ???). Hiệp sĩ de Méré (tên khai sinh là Antoine Gombaud (1607-1684), là nhà văn và nhà triết học người Pháp), là một nhân vật lịch sử nghiện đánh bạc. Ông ta hay chơi xúc sắc và nhận thất rằng trong hai sự kiện sau:

A = "Tung một con xúc sắc 4 lần, có ít nhấtt 1 lần hiện lên 6", và B = "Tung một đôi xúc sắc 24 lần, có ít nhất 1 lần hiện lên một đôi 6", thì B xảy ra ít hơn A. Tuy nhiên, de Méré không giải thích được tại sao. Theo ông thì đáng lẽ ra hai sự kiện đó phải có khả năng xảy ra bằng nhau, vì 24 = 6×4. Ông ta bèn hỏi bạn mình là nhà toán học và triết học Blaise Pascal (1623-1662), vào năm 1954, Pascal lúc đó đã "từ bỏ toán", nhưng có nhận lời suy nghĩ về câu hỏi của de Méré. Sau đó Pascal viết thư trao đổi với Pierre de Fermat (1601-1665), một luật sư đồng thời là nhà toán học ở vùng Toulouse (Pháp). Hai người cùng nhau phát minh ra *lý thuyết xác suất cổ điển*, và giải được bài toán của de Méré. Kết quả là:

$$p(A)=1-p(\bar{A})=1-(1-1/6)^4\approx 0,5177$$

$$p(B)=1-p(\bar{B})=1-\left(1-(1/6)^2\right)^{24}\approx 0,4914$$

c) Các phương pháp tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển

Phương pháp 1: Suy luận trực tiếp

Ví dụ: Một hộp có 6 chính phẩm, 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm (lần lượt mỗi lần 1 sản phẩm). Tìm xác suất của

A = "biến cố lần 1 lấy được chính phẩm"

B = "biến cố lần 2 lấy được chính phẩm biết lần 1 lấy được chính phẩm"

Dễ dàng suy luận trực tiếp được:

$$p(A)=\frac{6}{10};\ p(B)=\frac{5}{9}$$

Phương pháp 2: Sơ đồ Ven

• Sơ đồ hình cây

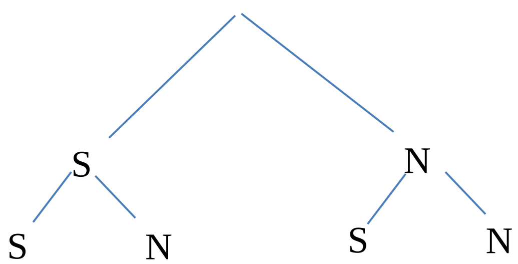
Ví dụ: Gieo đồng thời 2 đồng xu. Tìm xác suất để được:

A = biến cố xuất hiện 2 mặt sấp

B = biến cố xuất hiện 2 mặt ngửa

C = biến cố xuất hiện 1 mặt sấp, 1 mặt ngửa

Ta có sơ đồ:



Dễ thấy: $p(A)=\frac{1}{4};\ p(B)=\frac{1}{4};\ p(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Ví dụ: Giả sử khả năng sinh con trai và sinh con gái là như nhau. Một gia đình có 3 con, tìm xác suất:

A = biến cố gđ có 2 con gái

B = biến cố gđ có ít nhất 2 con gái

C = biến cố gđ có 2 con gái, biết con đầu lòng là gái

D = biến cố gđ có ít nhất 2 con gái, biết gia đình có con gái

- **Sơ đồ dạng bảng**

VÍ DỤ : Gieo 2 con xúc xắc. Tìm xác suất để được:

A: 1 mặt 6 chấm

B: ít nhất 1 mặt 6 chấm

C: Tổng số chấm xuất hiện bằng 8

D: Tổng số chấm xuất hiện bằng 8, biết con xúc xắc thứ hai được 5 chấm.

E: Tổng số chấm xuất hiện bằng 8, biết tổng số chấm là chẵn

F: Tổng số chấm xuất hiện bằng 8, biết tổng số chấm là lẻ

	1	2	3	4	5	6
1	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
2	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
3	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
4	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**
5	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
6	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

Dễ thấy: p(A)=11/36; p(B)=12/36; p(C)=5/36; p(D)=1/6; p(E)=5/18; P(F)=0/18.

- **Sơ đồ dạng tập hợp:**

Ví dụ: Trong một hội nghị có 50 đại biểu, trong đó có:

30 người biết tiếng anh

20 người biết tiếng Pháp

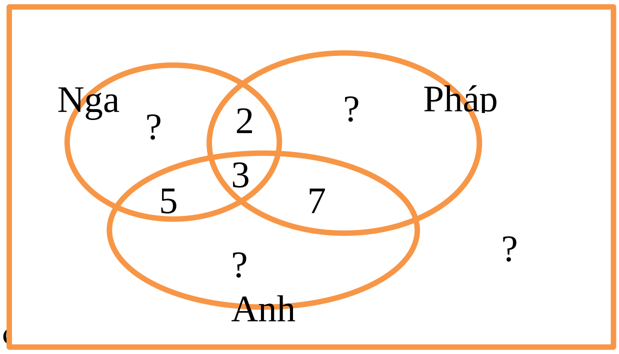
15 người biết tiếng Nga

10 người biết tiếng Ph+Anh

8 người biết tiếng A+Ng

5 người biết tiếng Ph+Ng

3 người biết tiếng A+Ph+Ng



Chọn ngẫu nhiên 1 đại biểu. Tính xác suất để đại biểu

A: biết ít nhất 1 ngoại ngữ

B: chỉ biết tiếng anh

C: biết thêm tiếng anh, biết rằng người đó biết tiếng Pháp

D: chỉ biết thêm tiếng Anh, biết rằng người đó biết tiếng pháp

E: biết thêm tiếng Anh, biết rằng người đó biết tiếng pháp + nga

Từ sơ đồ tập hợp đó, dễ dàng tính được xác suất.

Phương pháp 3: Dùng các công thức của giải tích tổ hợp

Ví dụ: Đăng ký ngẫu nhiên một số điện thoại gồm 7 chữ số. Tìm xác suất để được số điện thoại:

a) Gồm 7 chữ số khác nhau

b) Gồm 7 chữ số lẻ

c) Gồm 7 chữ số khác nhau và kết thúc bằng chữ số 9

d) Không chứa số 3.

Giải

$$n = B_{10}^{7} = 10^{7} = 10.000.000$$

a) $m_a = A_{10}^{7} = 604.800 \Rightarrow p(A) = \dfrac{604.800}{10.000.000} = 0,06048$

b) $m_b = B_{5}^{7} = 5^{7} = 78.125 \Rightarrow p(B) = \dfrac{78.125}{10.000.000} = 0,0078125$

c) $m_c = A_{9}^{6} = 60480 \Rightarrow p(A) = \dfrac{60.480}{10.000.000} = 0,006048$

d) $m_d = B_{9}^{7} = 9^{7} = 4.782.969 \Rightarrow p(D) = \dfrac{4.782.969}{10.000.000} = 0,4782969$

Ưu điểm và hạn chế của định nghĩa cổ điển về xác suất:

i) Ưu điểm: Không cần tiến hành phép thử

ii) Hạn chế: Đòi hỏi số kết cục của phép thử hữu hạn và đồng khả năng.

1.3.2. Định nghĩa xác suất theo thống kê

ĐN: Thực hiện phép thử n lần. Giả sử biến cố A xuất hiện m lần. Khi đó m được gọi là tần số của biến cố A và tỷ số $f(A) = \dfrac{m}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong phép thử.

Cho số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất xuất hiện biến cố A dần về một số xác định gọi là xác suất của biến cố A.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

Trên thực tế, khi n đủ lớn: $p(A) \approx f(A) = \dfrac{m}{n}$.

Chú ý: Với định nghĩa này cho thấy ý nghĩa thứ 2 của xác suất là đặc trưng cho cơ cấu của một tập hợp.

Ví dụ: Xác suất sinh con trai là 0,513 cho thấy 2 đặc trưng:

- Khả năng khách quan xuất hiện biến cố "sinh được con trai".
- Hoặc đặc trưng cho cơ cấu theo giới tính của trẻ sơ sinh.

VÍ DỤ: Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung đồng tiền, người ta tiến hành tung đồng tiền nhiều lần và thu được kết quả:

Người làm thí nghiệm	Số lần tung	Số lần được mặt sấp	Tần suất
Buffon	4040	2048	0,5069
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Như vậy, qua thí nghiệm cho thấy xác suất xuất hiện mặt sấp là 0,5.

c) Ưu điểm và hạn chế của định nghĩa thống kê

Ưu điểm: không đòi hỏi số kết cục của phép thử phải là hữu hạn và đồng khả năng.

Hạn chế: Phải tiến hành rất nhiều phép thử mà trong thực tế điều này không phải lúc nào cũng làm được (có thể khắc phục một phần bằng cách dùng bảng số ngẫu nhiên).

VÍ DỤ : Khi nghiên cứu một con gà đẻ trứng thì chúng ta có thể có n phép thử được, nhưng khi nghiên cứu một phụ nữ sinh con thì không thể thực hiện n phép thử với n đủ lớn được.

1.3.3. Một số định nghĩa khác về xác suất

1.3.3.1. Định nghĩa hình học về xác suất

Định nghĩa: Nếu độ đo hình học của toàn bộ miền cho trước là S, còn độ đo hình học của một phần A nào đó của nó là S_A thì xác suất để điểm ngẫu nhiên rơi vào phần A là:

$$P(A) = \frac{S_A}{S}$$

Như vậy, có thể xem định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học là mở rộng của định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển.

Ta xem xét định nghĩa thông qua một ví dụ điển hình – “**Bài toán gặp gỡ”**

Hai người bạn hẹn gặp nhau tại một địa điểm đã định trước trong khoảng thời gian từ 19 đến 20 giờ. Hai người đến chổ hẹn độc lập với nhau và qui ước rằng người đến trước sẽ chỉ đợi người đến sau 10 phút, nếu không gặp thì sẽ đi. Tính xác suất để hai người có thể gặp nhau?

Giải:

Gọi A là biến cố hai người gặp nhau.

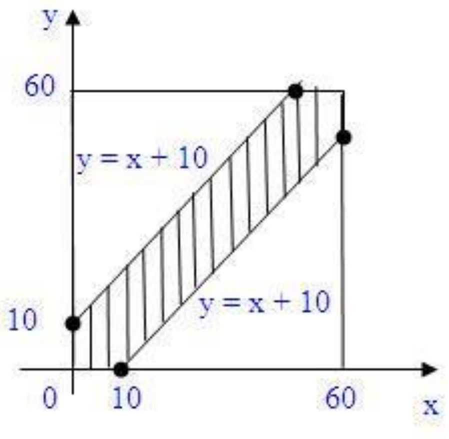
Gọi x là số phút tại thời điểm người thứ nhất đến điểm hẹn: $0 \le x \le 60$.

Gọi y là số phút lúc người thứ hai đến điểm hẹn: $0 \le y \le 60$.

Nếu ta biểu diễn số phút x theo trục hoành và số phút y theo trục tung.

Như vậy số phút lúc đến của cả hai người được biểu diễn bằng một điểm có tọa độ (x, y) nằm trong hình vuông có cạnh là 60 (ta lấy phút làmđơn vị). Đó chính là miền D.

$$D = \{(x,y): 0 \le x \le 60; 0 \le y \le 60\}$$



Để hai người gặp nhau thì số phút lúc đến x, y của mỗi người phải thỏa mãn điều kiện:

$$|x - y| \le 10$$

$$\text{hay} \quad x - 10 \leq y \leq x + 10$$

Như vậy các điểm (x, y) thích hợp cho việc gặp nhau là các điểm nằm trong phần A có gạch chéo nằm giữa hai đường thẳng y = x – 10 và y = x + 10 (như hình vẽ).

Theo công thức xác suất hình học:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(D)} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{11}{36} = 0.3056$$

Từ định nghĩa xác suất hình học, ta thấy rằng một biến cố có xác suất bằng 0 vẫn có thể xảy ra. Chẳng hạn, xác suất để một viên đạn rơi trúng một điểm M trên một miền D bằng không (vì diện tích S(A) bằng diện tích điểm M, bằng 0), nhưng biến cố đó vẫn có thể xảy ra.

1.3.3.2. Xác suất chủ quan

Khi không có thông tin đầy đủ, người ra quyết định tự gán xác suất một cách chủ quan đối với khả năng xuất hiện của trạng thái.

1.3.3.3. Định nghĩa tiên đề về xác suất

1.3.4. Tính chất xác suất

i) $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall$ biến cố A

ii) U là biến cố chắc chắn thì P(U) = 1, điều ngược lại không phải luôn đúng.

iii) V là biến cố không thể có thì P(V) = 0, điều ngược lại không phải luôn đúng.

1.4. Nguyên lý xác suất lớn và xác suất bé

- Nguyên lý xác suất bé: Nếu một biến cố có xác suất nhỏ (gần bằng 0) thì thực tế có thể cho rằng biến cố đó sẽ không xảy ra trong một phép thử.

p(V) = 0

p(A) = α, với α rất nhỏ thì có thể coi A không xảy ra khi thực hiện phép thử.

α được gọi là mức ý nghĩa.

Giá trị α được đưa ra tùy thuộc vào từng bài toán thực tế (thông thường $\alpha \leq 0,05$).

- Nguyên lý xác suất lớn: Nếu một biến cố có xác suất gần bằng 1 thì thực tế có thể cho rằng biến cố đó sẽ xảy ra trong một phép thử.

p(U) = 1

p(A) = 1-α, (thường $\alpha \leq 0,05$) thì có thể coi A xảy ra khi thực hiện phép thử.

1-α được gọi là độ tin cậy.

1.5. Một số công thức tính xác suất

1.5.1. Định lý cộng xác suất

Định lý 1: Xác suất của tổng hai biến cố xung khắc bằng tổng xác suất của các biến cố đó.

A và B là hai biến cố xung khắc thì $\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B)}$

Chứng minh cho trường hợp phép thử có n biến cố đồng khả năng.

Kí hiệu:
n - số kết cục đồng khả năng có thể xảy ra khi phép thử được thực hiện.
m_1 - số kết cục thuận lợi cho biến cố A xảy ra.
m_2 - số kết cục thuận lợi cho biến cố B xảy ra.
Do A, B xung khắc nên không thể có các kết cục thuận lợi cho cả A và B cùng đồng thời xảy ra. Vì vậy, số kết cục thuận lợi cho A hoặc B xảy ra bằng m_1+m_2. Từ đó suy ra:

$$p(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=p(A)+p(B)$$

Chú ý 1: Định lý trên chỉ là điều cần chứ không phải điều kiện đủ để các biến cố xung khắc.
Chú ý 2: Hệ quả trên có thể mở rộng cho một tổng n các biến cố xung khắc từng đôi:

$$p\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p\left(A_i\right).$$

- **Hệ quả:**

i) Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là nhóm các biến cố xung khắc từng đôi thì

$$P(A_1+A_2+...+A_n) = P(A_1) + P(A_2) +...+ P(A_n)$$

ii) Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là nhóm các biến cố đầy đủ:

$$P(A_1) + P(A_2) +...+ P(A_n) = 1$$

iii) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

iv) $\boxed{p\left(A\overline{B}\right)=p\left(A\right)-p\left(AB\right)}$

Định lý 2: Xác suất của tổng hai biến cố không xung khắc bằng tổng xác suất các biến cố đó trừ đi xác suất của tích các biến cố đó.

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Ví dụ: Khả năng gặp rủi ro khi đầu tư các dự án I, II tương ứng là 9%, 7% và gặp rủi ro đồng thời khi đầu tư cả 2 dự án là 4%. Nếu đầu tư cả 2 dự án, tính xác suất:
a) Chỉ dự án 1 gặp rủi ro.
b) Chỉ 1 dự án gặp rủi ro.
c) Đầu tư có gặp rủi ro.
d) Không gặp rủi ro.
Giải
Gọi A_i là biến cố đầu tư dự án i gặp rủi ro, ta có :

$$P(A_1) = 0,09 \; ; P(A_2) = 0,07 \; ; P(A_1A_2) = 0,04$$

a) A là biến cố chỉ dự án 1 gặp rủi ro, ta có: $A = A_1.\overline{A_2}$

$$P(A) = P(A_1.\overline{A_2}) = P(A_1) – P(A_1A_2) = 0,09 – 0,04 = \mathbf{0,05}$$

b) B là biến cố chỉ 1 dự án gặp rủi ro, ta có : $B = A_1.\overline{A_2} + \overline{A_1}.A_2$

$$P(B) = P(A_1.\overline{A_2} + \overline{A_1}.A_2) = P(A_1) + P(A_2) –2\,P(A_1A_2) = 0,09 + 0,07 – 2.0,04 = \mathbf{0,08}$$

c) C là biến cố đầu tư có gặp rủi ro, ta có : $C = A_1+A_2$

$$P(C) = P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2) – P(A_1A_2) = 0,09 + 0,07 – 0,04 = \mathbf{0,12}$$

d) D là biến cố đầu tư không gặp rủi ro, vậy D là biến cố đối của biến cố C.
Xác suất của biến cố D là :

$$P(D) = 1 – P(C) = 1 – 0,12 = \mathbf{0,88}$$

1.5.2. Xác suất có điều kiện và định lý nhân xác suất

Định nghĩa 1: Hai biến cố A và B được gọi là hai biến cố độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm thay đổi xác suất xảy ra của biến cố kia và ngược lại. Trong trường hợp việc biến cố này xảy ra hay không xảy ra làm cho xác suất xảy ra của biến cố kia thay đổi thì hai biến cố đó gọi là phụ thuộc nhau.

Ví dụ 1: Trong bình có 5 bi trắng và 3 bi đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt ra hai viên bi (mỗi lần lấy một viên và hoàn lại). Gọi A là biến cố "lần 1 lấy được bi trắng", B là biến cố "lần 2 lấy được bi trắng"

Ví dụ 2: Trong bình có 5 bi trắng và 3 bi đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt ra hai viên bi (mỗi lần lấy một viên và không hoàn lại). Gọi A là biến cố "lần 1 lấy được bi trắng", B là biến cố "lần 2 lấy được bi trắng"

Hai biến cố xung khắc thì có phụ thuộc không?

Hai biến cố không xung khắc thì có phụ thuộc không?

Chú ý: Tính chất độc lập của các biến cố có tính tương hỗ theo nghĩa là nếu A và B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và B, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập nhau.

Định nghĩa 2: Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi độc lập từng đôi với nhau nếu mỗi cặp hai trong n biến cố đó độc lập với nhau.

Ví dụ: Tung một đồng xu 3 lần, gọi A_i là biến cố được mặt sấp ở lần tung thứ i ($i=\overline{1,3}$).

Định nghĩa 3: Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi độc lập toàn phần nếu mỗi biến cố độc lập với tích của một tổ hợp bất kỳ trong các biến cố còn lại.

Ví dụ: Trong bình có 4 quả cầu:

- 1 quả sơn màu đỏ.
- 1 quả sơn màu xanh.
- 1 quả sơn màu vàng.
- 1 quả sơn cả 3 màu đó.

Lấy ngẫu nhiên từ bình ra 1 quả cầu.

A="lấy được cầu có màu đỏ", B="lấy được cầu có màu xanh", C="lấy được cầu có màu vàng"

Định nghĩa 4. Xác suất của biến cố A được tính với điều kiện biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất có điều kiện của A và ký hiệu là P(A|B).

Ví dụ: Trong bình có 5 bi trắng và 3 bi đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt ra hai viên bi (không hoàn lại). Tìm XS lần 2 lấy được viên bi trắng biết lần 1 đã lấy được viên bi trắng.

Giải:

Gọi A là biến cố "Lần thứ 1 lấy được bi trắng"

B là biến cố "Lần thứ 2 lấy được bi trắng"

Tìm P(B| A)? $p(B|A)=\dfrac{4}{7}$

Nhận xét: A, B độc lập $\Leftrightarrow \begin{cases} p(A|B)=p(A), p(A|\overline{B})=p(A) \\ p(B|A)=p(B), p(B|\overline{A})=p(B) \end{cases}$

Ví dụ: Một tổ điều tra dân số vào thăm một gia đình có 2 con.

a) Tính xác suất gia đình này có 2 con trai.

b) Đang nói chuyện thì có một cậu con trai ra chào khách. Tính xác suất gia đình này có 2 con trai.

Giải

Với gia đình có 2 con ta có 4 trường hợp xảy ra:

TT TG GT GG

Gọi A là biến cố gia đình này có 2 con trai, B là biến cố gia đình này có con trai.

a) P(A) = 1/4

b) Sự kiện cậu con trai ra chào khách, tức là biến cố B có xảy ra.

$$P(B) = 3/4 \Rightarrow p(A \mid B) = \frac{1}{3}$$

Định lý 2: Xác suất của tích hai biến cố A và B bằng tích xác suất của một trong hai biến cố đó với xác suất có điều kiện của biến cố còn lại.

$$\boxed{P(A.B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)}$$

Hệ quả.

i) Nếu P(B) >0 thì xác $P(A|B) = \dfrac{P(A.B)}{P(B)}$.

Nếu P(B) = 0 thì $P(A|B)$ không xác định.

ii) Xác suất của tích n biến cố: $P(A_1A_2....A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1).....P(A_n|A_1A_2....A_{n-1})$

iii) A, B độc lập ⇔ P(AB) = P(A).P(B) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p(A|B) = p(A) \\ p(B|A) = p(B) \end{array}\right.$

iv) $A_1, A_2, ..., A_n$ là n biến cố độc lập toàn phần thì $p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i)$

Ví dụ: Một thiết bị có 2 bộ phận với xác suất hỏng của bộ phận thứ nhất, thứ hai là 0,1; 0,2. Xác suất để cả hai bộ phận hỏng là 0,04. Tìm xác suất để:

a) Có ít nhất một bộ phận hoạt động tốt

b) Cả hai bộ phận hoạt động tốt

c) Chỉ có bộ phận 1 hoạt động tốt

d) Chỉ có 1 bộ phận hoạt động tốt

e) Bộ phận 1 hoạt động tốt nếu bộ phận 2 bị hỏng

f) Bộ phận 1 hoạt động tốt nếu chỉ có 1 bộ phận bị hỏng.

Giải

Gọi A_i (i = 1; 2) là biến cố bộ phận thứ i hoạt động tốt.

a) Gọi A là biến cố có ít nhất một bộ phận hoạt động tốt

$$A = A_1 + A_2$$

Từ đó tính được p(A) = 0,96

b) Gọi B là biến cố cả hai bộ phận hoạt động tốt.

$$B = A_1 \cdot A_2$$

$$p(\overline{B}) = p\left(\overline{A_1A_2}\right) = p\left(\overline{A_1} + \overline{A_2}\right) = ... = 0,26$$

Vậy p(B) = 0,74

c) Gọi C là biến cố chỉ có bộ phận 1 hoạt động tốt

$$C = A_1\overline{A_2}$$

Từ đó tính được p(C) = p(A_1) – p(A_1A_2) = 0,9 – 0,74 = 0,16

d) Gọi D là biến cố chỉ có 1 bộ phận hoạt động tốt

$$D = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$$

Từ đó tính được p(D) = 0,22

e) $p\left(A_1 \middle| \overline{A_2}\right) = \dfrac{p\left(A_1\overline{A_2}\right)}{p\left(\overline{A_2}\right)} = \dfrac{0{,}16}{0{,}2} = 0{,}8$

f) $p\left(A_1 \middle| D\right) = \dfrac{p\left(A_1D\right)}{p\left(D\right)} = \dfrac{P(A_1\overline{A_2})}{0{,}22} = \dfrac{0{,}16}{0{,}22} = 0{,}7273$

VÍ DỤ: Ba xạ thủ cùng bắn vào một mục tiêu một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng đích của xạ thủ thứ nhất , thứ hai và thứ ba tương ứng 0,6; 0,7; 0,8.

a) Tính xác suất để có đúng một xạ thủ bắn trúng.

b) Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

Giải

Gọi A_i là biến cố "Xạ thủ thứ i bắn trúng"; i =1; 2; 3.

Ta có A_1, A_2, A_3 là các biến cố độc lập.

a) Gọi A là biến cố "có đúng một xạ thủ bắn trúng".

$$A = A_1.\ \overline{A}_2.\ \overline{A}_3 + \overline{A}_1.\ A_2\ .\ \overline{A}_3 + \overline{A}_1\ .\ \overline{A}_2\ .\ A_3$$

P(A) = P(A_1). P($\overline{A}_2$). P($\overline{A}_3$) + P($\overline{A}_1$). P(A_2) . P($\overline{A}_3$) + P($\overline{A}_1$) . P($\overline{A}_2$) . P(A_3)

= 0,6 . 0,3 . 0,2 + 0,4 . 0,7 . 0,2 + 0,4 . 0,3 . 0,8 = 0,188.

b) Gọi B là biến cố "có ít nhất một xạ thủ bắn trúng".

Ta có: $B = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow \overline{B} = \overline{A}_1\ .\ \overline{A}_2\ .\ \overline{A}_3$

P($\overline{B}$) = P($\overline{A}_1$) . P($\overline{A}_2$) . P($\overline{A}_3$) = 0,4 . 0,3 . 0,2 = 0,024.

Vậy: P(B) = 1 - P($\overline{B}$) = 1 - 0,024 = 0,976.

VÍ DỤ: Một người làm thí nghiệm với các thí nghiệm được tiến hành độc lập và xác suất mỗi thí nghiệm thành công đều là 0,6. Hỏi người đó phải tiến hành bao nhiêu thí nghiệm để với xác suất không bé hơn 0,9973 có thể kết luận rằng có ít nhất một thí nghiệm thành công?

Giải

Gọi A là biến cố " có ít nhất một thí nghiệm thành công".

Giả sử phải tiến hành n thí nghiệm.

B_k là biến cố "thí nghiệm thứ k thành công", k = $\overline{1,n}$

Suy ra $\overline{A} = \overline{B}_1.\overline{B}_2....\overline{B}_n$.

$P(\overline{A}) = P(\overline{B}_1).P(\overline{B}_2)....P(\overline{B}_n) = (0{,}4)^n$.

Từ đó:

$P(A) = 1 - (0,4)^n$. Do $P(A) \geq 0,9973$
nên $1 - (0,4)^n \geq 0,9973$ Giải ra ta được $n \geq 6,5$
Vậy phải tiến hành 7 thí nghiệm.

1.6. Các hệ quả của định lý cộng và nhân xác suất

1.6.1. Công thức Bernoulli

Jacob Bernoulli (also known as **James** or **Jacques**) (27 December 1654/6 January 1655 – 16 August 1705) (theo wiki)

Định nghĩa 1: Hai phép thử được gọi là độc lập với nhau nếu kết quả của phép thử này độc lập với kết quả của phép thử kia và ngược lại.

Định nghĩa 2: Dãy n phép thử độc lập gọi là dãy phép thử Bernoulli nếu trong mỗi phép thử hoặc biến cố A xảy ra, hoặc biến cố A không xảy ra và xác suất xảy ra của biến cố A trong mỗi phép thử đều bằng p.

Công thức Bernoulli: Xác suất để biến cố A xuất hiện k lần trong n phép thử (với $0 \leq k \leq n$) của dãy phép thử Bernoulli cho bởi công thức:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, ..., n.)$$

Chứng minh

Gọi A_i là biến cố 'xảy ra biến cố A trong phép thử thứ i', như vậy $\overline{A_i}$ là biến cố 'không xảy ra biến cố A trong phép thử thứ i'.

Ta có : $B_k = A_1A_2...A_k\overline{A}_{k+1}...\overline{A}_n + ... + \overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}...A_n$

Tổng số các tích như vậy là C_n^k (xếp k vị trí A vào n vị trí cho trước).

Đối với mỗi tích trong tổng B_k thì biến cố A xảy ra k lần, biến cố $\overline{A}$ xảy ra $n-k$ lần. do đó xác suất mỗi biến cố tích đều bằng $p^k q^{n-k}$.

Vậy $P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Ví dụ 1: Trong phân xưởng có 5 máy hoạt động, xác suất để trong ca mỗi máy hỏng đều bằng 0,1. Tìm xác suất để trong ca có đúng 2 máy hỏng.

Giải : nếu coi sự hoạt động của mỗi máy là một phép thử thì ta có 5 phép thử độc lập. Trong mỗi phép thử xác suất máy hỏng là 0,1, xác suất máy không hỏng là 0,9.

Vậy xác suất để có đúng 2 máy hỏng là : $P_5(2) = C_5^2 0,1^2 0,9^3 = 0,0729$.

Ví dụ 2: Bắn 5 viên đạn độc lập với nhau vào cùng một bia, xác suất trúng đích các lần bắn như nhau và bằng 0,2. Muốn bắn hỏng bia phải có ít nhất 3 viên đạn bắn trúng đích. Tìm xác suất để bia bị hỏng.

Giải

Gọi k là số đạn bắn trúng bia thì xác suất để bia bị hỏng là

$P(k \geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$

$= C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5$

$= 0,0512 + 0,0064 + 0,0003$

$= 0,0579$

Ví dụ 3: Một bác sĩ có xác suất chữa khỏi bệnh là 0,8. Có người nói rằng cứ 10 người đến chữa thì chắc chắn có 8 người khỏi bệnh. Điều khẳng định đó có tin cậy không?

Giải: Điều khẳng định trên là chưa đúng. Ta xem việc chữa khỏi bệnh cho 10 người là thực hiện dãy 10 phép thử độc lập. Gọi A là biến cố chữa khỏi bệnh cho 1 người thì P(A) = 0,8. Do đó xác suất để trong 10 người đến chữa có 8 người khỏi bệnh là:

$$P_{10}(8) = C_{10}^{8}\, 0{,}8^{k}\, 0{,}2^{2} \approx 0{,}3108$$

1.6.2. Công thức xác suất đầy đủ

Công thức: Giả sử $H_1, H_2, ..., H_n$ là nhóm các biến cố đầy đủ và A là biến cố bất kỳ có thể xảy ra đồng thời với một trong các biến cố $H_1, H_2, ..., H_n$. Khi đó xác suất của biến cố A có thể được tính bởi công thức sau và gọi là **công thức xác suất đầy đủ (**total probability formula):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A|H_i)$$

Các biến cố $H_1, H_2, ..., H_n$ thường được gọi là các giả thuyết.

Chú ý: Công thức trên còn đúng nếu ta thay điều kiện $H_1+H_2+...+H_n=U$ bởi $A\subset H_1+H_2+...+H_n$.

Chứng minh : Vì A là tập con của không gian mẫu $\Omega = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$

Do đó $A = A(H_1 + H_2 + \cdots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n$

vì $H_1, H_2, ..., H_n$ xung khắc từng đôi nên $AH_1, AH_2, ..., AH_n$ cũng xung khắc từng đôi. Vậy

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + ... + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n)$$

Áp dụng định lý nhân với các tích AH_i ta được : $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A|H_i)$.

Ví dụ: Có 3 hộp giống nhau. Hộp thứ nhất đựng 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm, hộp thứ hai đựng 15 sản phẩm trong đó có 10 chính phẩm, hộp thứ ba đựng 20 sản phẩm trong đó có 15 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Tìm xác suất để lấy được chính phẩm.

Giải: Gọi A là biến cố 'lấy được chính phẩm', và xét nhóm đầy đủ các biến cố :

H_1 biến cố sản phẩm lấy ra thuộc hộp 1. H_2 biến cố sản phẩm lấy ra thuộc hộp 2. H_3 biến cố sản phẩm lấy ra thuộc hộp 3. Do các biến cố này đồng khả năng nên

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Xác suất có điều kiện của A khi H_1 xảy ra là : $P(A|H_1) = \frac{6}{10}$,

tương tự $P(A|H_2) = \frac{10}{15}, P(A|H_3) = \frac{15}{20}$. Vậy

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i).P(A|H_i) = \frac{1}{3}.\frac{6}{10} + \frac{1}{3}.\frac{10}{15} + \frac{1}{3}.\frac{15}{20} = \frac{121}{180}$$

Ví dụ 2: Xét một lô sản phẩm trong đó số sản phẩm do nhà máy I sản xuất chiếm 20%, do nhà máy II sản xuất chiếm 30%, do nhà máy 3 sản xuất chiếm 50%. Xác suất phế phẩm của nhà máy I là 0,001; nhà máy II là 0,005; nhà máy III là 0,006. Tìm xác suất để lấy ngẫu nhiên được đúng 1 phế phẩm.

Giải

Gọi B là biến cố sản phẩm lấy ra là phế phẩm.

H_1, H_2, H_3 là biến cố lấy được sản phẩm của nhà máy I, II, III

thì H_1, H_2, H_3 là nhóm các biến cố xung khắc từng đôi. Ta có:

$P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}3$; $P(H_3) = 0{,}5$

$P(B / H_1) = 0{,}001$; $P(B / H_2) = 0{,}005$; $P(B / H_3) = 0{,}006$

Do đó

$P(B) = P(H_1).P(B/H_1) + P(H_2).P(B/H_2) + P(H_3).P(B/H_3)$

$= 0{,}2 . 0{,}001 + 0{,}3. 0{,}005 + 0{,}5. 0{,}006$

$= 0{,}0065$

Ví dụ 3: Một lô hàng có 60% sản phẩm của xí nghiệp A và 40% sản phẩm của xí nghiệp B. Tỷ lệ phế phẩm của hai xí nghiệp tương ứng là 3% và 4%. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm để kiểm tra.

a) Tìm xác suất để lấy được phế phẩm. (=0,034)

b) Giả sử đã lấy được phế phẩm, khi đó khả năng sản phẩm đó thuộc mỗi xí nghiệp là bao nhiêu?

1.6.3. Công thức Bayes

Công thức Bayes mang tên của linh mục và nhà toán học người Anh **Thomas Bayes** (1701 – 1761). Thomas Bayes là một linh mục, nhưng cũng là một nhà toán học tài tử. Tuy là "tài tử" nhưng di sản của ông để lại (chỉ một bài báo duy nhất) làm thay đổi cả thế giới khoa học, thay đổi cách suy nghĩ về sự bất định trong khoa học, và chỉ ra một phương pháp suy luận hoàn toàn logic. Ngày nay, phương pháp Bayes được ứng dụng trong hầu hết tất cả lĩnh vực khoa học, kể cả trong công nghệ thông tin (ứng dụng Bayes trong việc ngăn chặn những thư rác điện tử), tiên lượng kinh tế, phân tích các mối quan hệ xã hội, và lý giải qui trình suy nghĩ của con người. Ngày nay, suy luận theo trường phái Bayes được nhắc đến trên báo chí đại chúng chứ không chỉ trong báo khoa học. Những tờ báo lớn như *New York Times, Economist, Guardian*, v.v. đều thường xuyên nhắc đến phương pháp suy luận Bayes.

Công thức Bayes được dùng để đánh giá lại xác suất xảy ra của giả thuyết H_i khi biến cố A đã xảy ra.

Công thức: Giả sử $H_1, H_2, ..., H_n$ là nhóm các biến cố đầy đủ và A là biến cố bất kỳ có thể xảy ra trong phép thử (P(A)>0). Khi đó ta có

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i).P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A/H_i)} = \frac{P(H_i).P(A/H_i)}{P(A)} \qquad (\forall i = 1, 2......n)$$

Công thức trên là hệ quả trực tiếp của công thức xác suất tích hai biến cố trong mục trước.

Công thức Bayes trông rất đơn giản nhưng có ý nghĩa rất sâu xa, thể hiện cách suy nghĩ rất phổ biến của tất cả chúng ta, đó là chúng ta đánh giá sự kiện một cách tích lũy bằng tổng hợp những sự kiện chúng ta *đã biết* cộng với *chứng cứ* thực tế.

Xác suất sự kiện - *posterior information* – thông tin hậu định.

Xác suất sự kiện ta đã biết - *prior information* – thông tin tiền định: $P(H_i)$

Xác suất thứ ba là thông tin thực tế - *likelihood*, biến cố A xảy ra.

Xác suất hậu định = Xác suất tiền định + Dữ liệu thực tế

Chứng minh

Theo công thức nhân thì:

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i \mid A) = P(H_i)P(A \mid H_i) .$$

Do đó

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)} \quad = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}.$$

Ví dụ 1: Có hai lô sản phẩm, lô thứ nhất có tỷ lệ chính phẩm là $\frac{3}{4}$; lô thứ hai có tỷ lệ chính phẩm là $\frac{2}{3}$. Lấy ngẫu nhiên một lô, từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Sản phẩm được bỏ trở lại và lại lấy tiếp một sản phẩm.

a) Tìm xác suất để sản phẩm lấy lần đầu là chính phẩm.

b) Nếu sản phẩm lấy lần đầu là chính phẩm thì:

- xác suất lô lấy ra là lô thứ nhất bằng bao nhiêu?
- xác suất lô lấy ra là lô thứ hai bằng bao nhiêu?

c) Nếu lần đầu lấy được chính phẩm thì tìm xác suất để sản phẩm lấy lần thứ 2 cũng là chính phẩm.

Giải:

a) Gọi A là biến cố sản phẩm lấy lần đầu là chính phẩm.

Gọi H_1 là biến cố sản phẩm lấy ra là của lô 1, H_2 là biến cố sản phẩm lấy ra là của lô 2.

Ta có: $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

Do H_1 và H_2 lập thành nhóm biến cố đầy đủ nên theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(A) = P(H_1).P(A \mid H_1) + P(H_2).P(A \mid H_2) = \frac{1}{2}.\frac{3}{4} + \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{17}{24} = 0,7083$$

b) Xác suất lô lấy ra là lô thứ nhất:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{3}{8} \Big/ \frac{17}{24} = \frac{9}{17}$$

Xác suất lô lấy ra là lô thứ hai:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Big/ \frac{17}{24} = \frac{8}{17}$$

c) Gọi $H_1^{'} = \left(H_1 \middle| A\right);\ H_2^{'} = \left(H_2 \middle| A\right)$.

Ta có

$$P(H_1^{'}) = \frac{9}{17}; \qquad P(H_2^{'}) = \frac{8}{17}$$

Gọi B là biến cố sản phẩm lấy lần 2 là chính phẩm.

Do H'_1 và H'_2 lập thành nhóm biến cố đầy đủ nên theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(B) = P(H_{_1}^{'}).P(B \mid H_{_1}^{'}) + P(H_2^{'}).P(B \mid H_{_1}^{'}) = \frac{9}{17}.\frac{3}{4} + \frac{8}{17}.\frac{2}{3} = 0,71.$$

Nhận xét: p(B) > p(A).

VÍ DỤ2: Có 2 lô sản phẩm do một máy tự động sản xuất ra. Lô I gồm 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Lô 2 gồm 7 chính phẩm và 3 phế phẩm.

a) Chọn ngẫu nhiên một lô và từ lô đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Tìm xác suất để được chính phẩm.

b) Giả sử đã lấy được chính phẩm, nếu từ lô đó lấy tiếp 1 sản phẩm thì xác suất được chính phẩm nữa bằng bao nhiêu?

Bài giải

a.Gọi A là biến cố lấy nn 1 sản phẩm thì sản phẩm đó là chính phẩm

H_i là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc lô thứ i ($i = \overline{1;2}$).

H_1, H_2 lập thành nhóm biến cố đầy đủ. Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(A) = \frac{1}{2}.0{,}6 + \frac{1}{2}.0{,}7 = 0{,}65$$

b.Gọi B là biến cố lấy tiếp được chính phẩm từ lô 1.

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ và Bayer ta có:

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2}.0{,}6}{0{,}65}.\frac{5}{9} + \frac{\frac{1}{2}.0{,}7}{0{,}65}.\frac{6}{9} = \frac{8}{13}$$

VÍ DỤ: Một hộp có 4 sản phẩm tốt trộn lẫn với 2 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từ hộp ra hai sản phẩm. Biết sản phẩm lấy ra ở lần hai là sản phẩm tốt. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất cũng là sản phẩm tốt.

Giải

Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất là sản phẩm tốt.

B là biến cố sản phẩm lấy ra ở lần thứ hai là sản phẩm tốt.

Ta có

$$P(A) = \frac{4}{6},\ \ P(B \mid A) = \frac{3}{5},\ \ P(\overline{A}) = \frac{2}{6},\ \ P(B \mid \overline{A}) = \frac{4}{5}$$

Theo định lý Bayes thì xác suất cần tìm là

$$\text{P(A|B)} = \frac{P(A).P(B/A)}{P(A).P(B/A) + P(\overline{A}).P(B/\overline{A})} = \frac{\frac{4}{6}\frac{3}{5}}{\frac{4}{6}\frac{3}{5} + \frac{2}{6}\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$$

Bài đọc thêm: Một số nghịch lý trong xác suất (Đỗ Đức Thái ???**)**

Tính toán xác suất là một vấn đề nhiều khi hết sức tế nhị. Kể cả trong những bài toán tưởng chừng như rất đơn giản, cũng có thể tính ra kết quả sai mà khó phát hiện sai ở đâu. Phần này sẽ gồm một số "nghịch lý" trong xác suất để minh họa điều đó . Những nghịch lý này cho thấy chúng ta cần hết sức cẩn thận trong lúc lập mô hình tính toán xác suất, đặc biệt là xác suất có điều kiện, kiểm tra lại những điều tưởng chừng như hiển nhiên, để tránh sai lầm.

Nghịch lý 1 (Nghịch lý Simpson). Thuốc nào tốt hơn?

Một người nghiên cứu muốn xác định xem giữa 2 loại thuốc cùng để chữa 1 bệnh, loại nào tốt hơn. Kết quả thống kê về lượng người chữa được khỏi bệnh, phân biệt theo giới tính, được viết dưới đây

Giới tính: Nữ	Thuốc I	Thuốc II
Chữa được	150	15
Không chữa được	850	285

Giới tính: Nam	Thuốc I	Thuốc II
Chữa được	190	720
Không chữa được	10	180

Dựa vào bảng thống kê trên, có 2 câu trả lời trái ngược nhau như sau cho câu hỏi thuốc nào tốt hơn: 1) Thuốc I đem cho 1200 người dùng, chữ được bệnh cho 340 người. Thuốc II đem cho 1200 người dùng, chữa được 735 người, như vậy thuôc II tốt hơn. 2) Đối với nữ, tỷ lệ chữa được bệnh của Thuốc I là 15%, của Thuốc II là 5%. Đối với nam, tỷ lệ chữa được bệnh của thuốc I là 95%, của thuốc II là 80%. Trong cả hai trường hợp thì tỷ lệ chữa được bệnh của thuốc I cao hơn, vậy nên thuốc I tốt hơn.

Trong hai câu trả lời trên câu trả lời nào đáng tin? Vì sao? Nghịch lý nằm ở đâu?

Nghịch lý 2. Hoàng tử có chị em gái không?

Biết rằng cha mẹ của hoàng tử Romeo có 2 con (hoàng tử Romeo là một trong hai người con đó). Hỏi xác suất để hoàng tử Romeo có sister (chị gái hoặc em gái) là bao nhiêu? Có 2 đáp án sau:

1) Hoàng tử có 1 người anh chị em ruột. Có hai khả năng: hoặc người đó là con trai, hoặc là con gái. Như vậy xác suất để người đó là con gái (tức là hoàng tử có sister) là 1/2.

2) Có 4 khả năng cho 1 gia đình có 2 con: {B,B},{B,G},{G,B},{G,G}. (B = boy = con trai, G = girl = con gái, xếp theo thứ tự con thứ nhất - con thứ hai). Vì ta biết hoàng tử là con trai (đây là điều kiện) nên loại đi khả năng {G,G}, còn 3 khả năng {B,B}, {B,G}, {G,B}. Trong số 3 khả năng đó thì có 2 khả năng có con gái. Như vậy xác suất để hoàng tử có sister là 2/3.

Trong hai đáp án trên, ắt hẳn phải có (ít nhất) 1 đáp án sai. Thế nhưng cái nào sai, sai ở chỗ nào?

Nghịch lý 3. Văn Phạm có phải là thủ phạm?

Một người đàn ông tên là Văn Phạm bị tình nghi là thủ phạm trong một vụ án. Cảnh sát điều tra được những tin sau đây: 1) ngoài nạn nhân chỉ có 2 người có mặt lúc xảy ra vụ án, một trong hai người đó là Văn Phạm, người kia cảnh sát không hề biết là ai, và một trong hai người đó là thủ phạm; 2) thủ phạm phải là đàn ông. Hỏi xác suất để "Văn Phạm là thủ phạm" là bao nhiêu?

Gọi người thứ hai mà cảnh sát không biết là ai là "X".

X có thể là đàn ông hoặc đàn bà.

Gọi A là biến cố "Văn Phạm là thủ phạm", B là biến cố "X là đàn ông", C là "thủ phạm là đàn ông". Có hai cách giải khác nhau như sau:

1)Theo công thức xác suất toàn phần ta có P(A) = P(A|B).P(B)+ P(A|B).P(B)

Nếu X là đàn bà thì X không thể là thủ phạm và Văn Phạm phải là thủ phạm, bởi vậy P(A|B) = 1.

Nếu X là đàn ông thì một trong hai người, X hoặc Văn Phạm, là thủ phạm, bởi vậy P(A|B) = 1/2. X có thể là đàn ông hoặc đàn bà, và ta coi số đàn ông bằng số đàn bà, bởi vậy P(B) = P(B) = 1/2. Từ đó ta có P(A) = (1/2).(1/2) + 1.(1/2) = 3/4, có nghĩa là xác suất để "Văn Phạm là thủ phạm" bằng 3/4.

2) Ta coi C là điều kiện, và muốn tính xác suất có điều kiện P(A|C) (xác suất để Văn Phạm là thủ phạm, khi biết rằng thủ phạm là đàn ông). Theo công thức Bayes ta có:

$$p(A\,|\,C)=\frac{p(A)\,p(C\,|\,A)}{p(A)\,p(C\,|\,A)+p(\bar{A})\,p(C\,|\,\bar{A})}$$

Ở trong công thức trên, P(A) là xác suất của biến cố "Văn Phạm là thủ phạm" nếu như chưa có điều kiện "thủ phạm là đàn ông". Vì một trong hai người Văn Phạm và X là thủ phạm, nên xác suất P(A) không có điều kiện ở đây là P(A) = 1/2. Ta có P(C|A) = 1 vì tất nhiên nếu Văn Phạm là thủ phạm thì thủ phạm là đàn ông. Ngược lại, P(C|A) = 1/2 (nếu X là thủ phạm, thì thủ phạm có thể là đàn ông hoặc đàn bà, khi mà chưa đặt điều kiện "thủ phạm là đàn ông"). Bởi vậy ta có:

$$p(A\,|\,C)=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

tức là xác suất để Văn Phạm là thủ phạm bằng 2/3.

Hai cách giải trên cho 2 đáp số khác nhau, như vậy (ít nhất) một trong hai cách giải trên là sai. Cách giải nào sai và sai ở chỗ nào?

Lời giải cho các nghịch lý

Nghịch lý 1. Vấn đề nằm ở chỗ Thuốc I được đem thử cho quá it nam, quá nhiều nữ so với thuốc II, nên khi lấy tổng số các kết quả của các phép thử thì nó thiên vị thuốc II và không phản ánh đúng tỷ lệ chữa được bệnh. Kết luận 1) là sai và kết luận 2) đáng tin hơn.

Nghịch lý 2. Nghịch lý này có trong 1 quyển giáo trình tiếng Anh về xác suất. Điều đáng ngạc nhiên là tác giả của giáo trình đó nói rằng đáp án thứ hai đúng (tức là xác suất = 2/3) và đáp án thứ nhất sai. Đọc kỹ đáp án thứ 2, ta thấy khả năng B,B thực ra không phải là một khả năng đơn, mà là một khả năng kép gồm có 2 khả năng trong đó: hoàng tử được nói đến hoặc là người con trai thứ nhất, hoặc là người con trai thứ hai. Như vậy phải tính B,B là 2 khả năng B=H,B và B, B=H (H là hoàng tử). Như thế tổng cộng vẫn có 4 khả năng, và xác suất vẫn là 2/4 = 1/2. Sai ở đây là sai trong cách đếm số khả năng. (Có câu hỏi khác: tại sao 4 khả năng này lại phải có xác suất bằngnhau?Tạisaolạiphảicóphânbốxácsuấtđều?Câutrảlờidành cho bạn đọc). Nếu ta đổi bài toán đi một chút thành: Một gia đình có 2 con, biết rằng ít nhất một trong hai con là con trai, thử hỏi xác suất để có con gái là bao nhiêu? Trong bài toán này thì xác suất là 2/3 thật. Bạn đọc thử nghĩ xem sự khác nhau giữa hai bài toán nằm ở chỗ nào?

Nghịch lý 3. Vấn đề ở đây nằm ở sự lẫn lộn giữa các không gian xác suất trong lúc lập mô hình để tính xác suất. Trong cách giải thứ nhất, khi ta viết P(A) để tính xác suất của sự kiện "Văn Phạm là thủ phạm", không gian xác suất của ta phải là không gian ΩC tất cả các khả năng (với một trong 2 người Văn Phạm và X là thủ phạm) thỏa mãn điều kiện "thủ phạm là đàn ông", chứ không phải là không gian **Ω** của tất cả các khả năng có thể xảy ra (với một trong 2 người Văn Phạm và X là thủ phạm), bất kể thủ phạm là đàn ông hay đàn bà. Để cho khỏi lẫn lộn, thì trong cách giải thứ nhất ta phải viết PC(A) = PC(A|B).PC(B) + PC(A|B).PC(B) Trong không gian **Ω** thì ta có P(B) = 1/2, tức là xác suất để X là đàn ông là 1/2. Nhưng trong không gian ΩC dùng trong cách giải thứ nhất, thì ta phải dùng xác suất PC của không gian đó, và PC(B) không phải là 1/2, mà thực ra là 2/3, và PC(B) = 1/3. Nói cách khác, khi biết rằng một trong hai người X và Văn Phạm là thủ phạm, và biết rằng thủ phạm là đàn ông, thì xác suất để X là đàn ông là 2/3 chứ không còn là 1/2 nữa! (Vì sao vậy?). Nếu ta sử dụng các con số xác suất này trong công thức tính xác suất toàn phần của A trong không gian Ω_C thì ta được: $p_C(A) = (1/2).(2/3)+1.(1/3) = 2/3$ Tức là nếu ta sửa lỗi về xác suất của B đi, thì cách giải thứ nhất sẽ cho cùng đáp số 2/3 như cách giải thứ hai.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Xác suất của biến cố

1. Có hai hộp bi. Hộp 1 có 6 bi đỏ và 5 bi vàng. Hộp 2 có 7 bi đỏ và 6 bi vàng.

a) Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 1 bi. Tính xác suất:

- Lấy được 2 bi đỏ.
- Lấy được 2 bi cùng màu đỏ.
- Lấy được 2 bi khác màu.

b) Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 2 bi. Tính xác suất:

- Lấy được 3 bi đỏ.
- Lấy được số bi đỏ nhiều hơn.

2. Mỗi đội bóng rổ có 3 người gồm: 1 hậu vệ, 1 trung vệ, 1 tiền đạo. Chọn ngẫu nhiên mỗi đội một người trong 3 đội bóng rổ. Tính xác suất:

a) 3 người cùng chơi một vị trí.

b) Chọn được một đội bóng rổ đầy đủ

3. Có 3 khách hàng không quen biết nhau cùng đi vào một cửa hàng có 6 quầy phục vụ. Tính xác suất để:

a) cả 3 khách cùng đến một quầy.

b) Mỗi người đến một quầy khác nhau.

c) Hai trong 3 người cùng đến một quầy.

d) Chỉ một khách đến quầy số 1.

4. Gieo đồng thời 2 con xúc xắc một xanh, một đỏ. Tính xác suất của biến cố:

a) Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc bằng 7

b) Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc đỏ lớn hơn số chấm xuất hiện trên con xúc xắc xanh.

c) Tích số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là một số lẻ.

5. Một công ty có 30 người trong đó có 20 người biết tiếng Anh; 12 người biết tiếng pháp; 15 người biết vi tính; 10 người biết tiếng anh và vi tính. 6 người biết cả tiếng anh và tiếng pháp; 5 người biết tiếng pháp và vi tính. 2 người biết cả 3 loại. Chọn ngẫu nhiên 1 người của công ty đó. Tính xác suất để người được chọn:

a) biết ít nhất 1 loại kĩ năng trên.

b) chỉ biết một loại kĩ năng trên.

c) chỉ biết 2 loại kĩ năng trên.

d) chỉ biết tiếng anh.

6. Một ngân hàng sử dụng 2 loại thẻ thanh toán M và N. Tỷ lệ khách hàng của ngân hàng sử dụng thẻ loại M, N tương ứng là 60%, 55% và cả hai loại là 30%. Chọn ngẫu nhiên một khách hàng của ngân hàng. Tính xác suất:

a) Người đó sử dụng thẻ thanh toán của ngân hàng.

b) Người đó chỉ sử dụng 1 loại thẻ thanh toán của ngân hàng.

c) Người đó chỉ sử dụng 1 loại thẻ M.

d) Người đó không sử dụng thẻ của ngân hàng.

7. Một người viết 3 bức thư bỏ vào 3 phong bì riêng dán kín lại rồi sau đó viết địa chỉ. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) Có ít nhất một phong bì điền đúng địa chỉ?

b) Có ít nhất một phong bì điền không đúng địa chỉ?

8. Ba người khách cuối cùng ra khỏi nhà bỏ quên mũ. Chủ nhà không biết rõ chủ của của những chiếc mũ đó nên gửi trả cho họ một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để:

a) Cả 3 người cùng được trả mũ sai

b) Có đúng 1 người được trả mũ đúng

c) Có đúng 2 người được trả mũ đúng

d) Cả 3 người được trả mũ đúng

9. Một lớp sinh viên có 50% học tiếng Anh, 40% học tiếng Pháp, 30% học tiếng Đức, 20% học tiếng Anh và tiếng Pháp, 15% học tiếng Anh và tiếng Đức, 10% học tiếng Pháp và tiếng Đức, 5% học cả 3 thứ tiếng Anh, Pháp, Đức. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên 1 sinh viên thì người đó:

a. Học ít nhất 1 trong 3 thứ ngoại ngữ kể trên.

b. Chỉ học tiếng Anh và tiếng Đức

c. Chỉ học tiếng Pháp

d. Học tiếng Pháp biết rằng người đó học tiếng Anh

10. Tìm xác suất để gặp ngẫu nhiên ba người không quen biết nhau ở ngoài đường thì họ:

a. Có ngày sinh nhật khác nhau

b. Có ngày sinh nhật trùng nhau

11. Một lô hàng có 100 sản phẩm trong đó có 10 phế phẩm. Kiểm tra ngẫu nhiên lần lượt 3 sản phẩm. Nếu có phế phẩm trong 3 sản phẩm kiểm tra thì không mua lô hàng. Tính xác suất lô hàng được mua (xét 2 trường hợp có hoàn lại và không hoàn lại).

12. Một nồi hơi có 2 van bảo hiểm hoạt động độc lập, xác suất mỗi van hỏng tương ứng là 0,1; 0,05. Tính xác suất nồi hơi hoạt động an toàn:

a) Khi nồi hơi có van không hỏng.

b) Khi nồi hơi không có van hỏng.

13. Một chủ khách sạn gửi ngẫu nhiên 3 chiếc mũ bị bỏ quên cho 3 vị khách vì ông ta không biết mũ nào của ai. Tính xác suất:

a) Không ai nhận được mũ của mình.

b) Chỉ có 1 người nhận được mũ của mình.

14. Xác suất để một máy hoạt động tới thời gian T là 0,7; quá thời gian 2T là 0,3 và quá thời gian 3T là 0,1.

a) Nếu máy đã hoạt động tới thời gian T thì xác suất để nó hoạt động quá thời gian 2T là bao nhiêu?

b) Nếu máy đã hoạt động tới thời gian T thì xác suất để nó hoạt động thêm quãng thời gian 2T là bao nhiêu?

15. Một nữ hoàng được sinh ra trong một gia đình có 2 đứa bé. Tính xác suất đứa bé còn lại là gái.

16. Một sinh viên muốn hoàn thành khóa học phải qua 3 kì thi với nguyên tắc: đỗ kì thi này mới được thi kì sau. Xác suất để sinh viên đỗ kì thi thứ nhất là 0,9. Nếu đỗ kì thi đầu thì xác suất để sinh viên đó đỗ kì thi thứ hai là 0,85; Tương tự, đỗ kì thi thứ hai thì xác suất để sinh viên đó đỗ kì thi thứ ba là 0,7.

a) Tính xác suất sinh viên đó đỗ cả 3 kì thi.

b) Nếu sinh viên đó không đỗ cả 3 kì thi thì xác suất anh ta vị trượt ở kì thi thứ hai là bao

17. Bắn liên tiếp vào một mục tiêu cho đến khi có một viên đạn đầu tiên trúng mục tiêu thì ngừng bắn. Tìm xác suất sao cho phải bắn tới lần thứ 4, biết xác suất trúng mục tiêu của mỗi lần bắn là như nhau và bằng 0,4.

Định lý cộng và nhân xác suất

18. Một khách hàng định mua một hộp sản phẩm bằng cách lấy ngẫu nhiên ra cùng lúc 4 sản phẩm từ hộp để kiểm tra, nếu có không quá 1 phế phẩm thì mua hộp sản phẩm. Tính xác suất:

a) Khách hành mua hộp sản phẩm.

b) Khách hành không mua hộp sản phẩm.

Biết hộp sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 phế phẩm.

19. Tính xác suất một người mua hộp bóng đèn nếu lấy 3 bóng để kiểm tra mà:

a) Có bóng hỏng thì không mua hộp bóng đèn.

b) Số bóng hỏng nhiều hơn thì không mua hộp bóng đèn.

Biết hộp bóng đèn có 15 bóng trong đó có 3 bóng hỏng.

20. Tỷ lệ phế phẩm của lô hàng là 5%.

a) Chọn ngẫu nhiên có hoàn lại lần lượt từng sản phẩm cho đến khi gặp phế phẩm thì dừng. Tính xác suất phải chọn đến lần thứ 3.

b) Chọn ngẫu nhiên có hoàn lại lần lượt từng sản phẩm từ lô hàng. Phải chọn bao nhiêu lần để xác suất chọn được ít nhất 1 phế phẩm không nhỏ hơn 0,9.

21. Kiểm tra ngẫu nhiên lần lượt (có hoàn lại) 3 sản phẩm từ một lô hàng có tỷ lệ phế phẩm là 5%. Tính xác suất trong 3 sản phẩm kiểm tra có:

a) 2 phế phẩm.

b) ít nhất 1 phế phẩm.

22. Một hộp có 10 phiếu trong đó có 2 phiếu trúng thưởng. Có 10 người lần lượt lấy ngẫu nhiên mỗi người 1 phiếu. Tính xác suất:

a) Người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng.

b) Người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng biết trong 2 người đầu đã có 1 người lấy được phiếu trúng thưởng.

c) Giả sử người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng thì khả năng người thứ nhất lấy được phiếu trúng thưởng là bao nhiêu?

23. Một hộp có 10 bi trong đó có 2 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên (không hoàn lại) lần lượt từng bi cho đến khi lấy được 2 bi đỏ thì dừng. Tính xác suất việc lấy bi dừng ở lần thứ 3.

24. Ba xạ thủ cùng bắn mỗi người 1 viên đạn vào một cái bia. Xác suất bắn trúng bia của từng xạ thủ tương ứng là 0,5; 0,6; 0,8. Giả sử bia bị bắn trúng bởi 2 viên đạn thì xác suất xạ thủ thứ nhất bắn trúng khi đó là bao nhiêu?

25. Để phục vụ du lịch hè 2007, hai công ty A và B cùng quyết định mở thêm dịch vụ mới. Xác suất công ty A gặp rủi ro là 0,2, và công ty B là 0,4. Tuy nhiên trên thực tế, khả năng cả 2 công ty cùng gặp rủi ro là 0,1. Tìm XS các biến cố sau:

a) Chỉ có 1 công ty gặp rủi ro?

b) có ít nhất 1 công ty làm ăn không rủi ro.

26. Một xí nghiệp có 2 ô tô hoạt động độc lập. Xác suất trong một ngày làm việc các ô tô này hỏng tương ứng là 0,08; 0,1. Tính xác suất trong một ngày làm việc xí nghiệp có:

a) Hai ô tô hỏng.

b) Có 1 ô tô hỏng.

c) Có ô tô hỏng.

27. Một người đi xe đạp phải qua 4 ngã tư có đèn hiệu. Xác suất qua được hay dừng đều bằng 1/2. Tính xác suất để người này bị dừng đầu tiên ở ngã tư thứ 4?

28. Một người đi mua hàng với xác suất mua được hàng tốt bằng 0,8. Nếu lần trước mua được hàng tốt thì xác suất mua hàng tốt ở lần sau là 0,9. Còn nếu lần trước mua được hàng xấu thì không có kinh nghiệm gì cho lần sau. Người đó đã mua 3 lần. Tính xác suất trong 3 lần mua hàng chỉ có 1 lần mua phải hàng xấu.

29. Hai người thay nhau bắn liên tiếp từng viên đạn vào bia tới khi nào bắn trúng bia trước thì người đó thắng cuộc. Xác suất bắn trúng bia của mỗi người tương ứng là 0,7 và 0,8. Tính xác suất thắng cuộc đối với mỗi xạ thủ.

30. Một người thỏa thuận với vợ sắp cưới như sau: anh ta chỉ cần có con trai, và nếu vợ anh sinh cho anh được một đứa con trai thì lập tức dừng lại liền, không sinh nữa. Giả sử một người phụ nữ có thể sinh tối đa n lần, và xác suất sinh con trai ở mỗi lần sinh là 1/2 (Khả năng sinh con trai ở mỗi lần sinh là độc lập).

a) Hỏi khả năng anh này có con trai là bao nhiêu?

b) Hỏi n phải bằng bao nhiêu để khả năng anh này có con trai ≥ 99%?

Hệ quả định lý cộng và nhân xác suất

31. Một máy sản xuất lần lượt từng sản phẩm. Xác suất máy sản xuất ra phế phẩm là 0,08. Tính xác suất:

a) Trong 10 sản phẩm máy sản xuất ra có 3 phế phẩm.

b) Trong 10 sản phẩm máy sản xuất ra có phế phẩm.

c) Cần kiểm tra tối thiểu bao nhiêu sản phẩm của máy sản xuất ra để xác suất có phế phẩm hơn 90%.

32. Một người mỗi ngày có tới 6 nơi để bán hàng. Xác suất bán được hàng tại mỗi nơi của người đó là 0,3. Tính xác suất người đó bán được hàng trong một ngày.

33. Xác suất tiêu thụ điện không quá mức quy định của một nhà máy trong một ngày là 0,8. Tính xác suất trong 1 tuần (6 ngày) nhà máy:

a) Có 4 ngày tiêu thụ điện không quá mức quy định.

b) Có ngày tiêu thụ điện quá mức quy định.

34. Phải tung con xúc xắc bao nhiêu lần để xác suất xuất hiện mặt 6 chấm là 0,9.

35. Có 2 xạ thủ, mỗi người bắn 8 viên đạn vào cùng một bia. Xác suất bắn trúng đích mỗi lần của 2 xạ thủ tương ứng là 0,6; 0,7. Tính xác suất:

a) Bia bị trúng đạn.

b) Bia bị trúng 2 viên đạn.

36. Một bài thi trắc nghiệm có 20 câu, mỗi câu có 4 đáp số nhưng chỉ có 1 đáp số đúng. Tính xác suất một học sinh làm bài thi trả lời ngẫu nhiên được 9 câu đúng.

37. Ba người cùng bắn một cách độc lập vào 1 chiếc bia với xác suất bắn trúng bia của mỗi người đều bằng 0,7. Tìm xác suất để:

1) có 2 người bắn trúng

2) Có 1 người bắn trượt

3) Bia bị trúng đạn

38. Trong một lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bóng có XS hỏng là 1/4 và việc chúng hỏng là độc lập với nhau. Lớp học có đủ ánh sáng nếu có ít nhất 4 bóng không hỏng. Tính XS để có lớp học đủ ánh sáng.

39. Hai nhà máy I và II cùng sản xuất một loại sản phẩm. Tỷ lệ phế phẩm của nhà máy I, II tương ứng là 2% và 3%.

a) Một khách hàng mua ngẫu nhiên 5 sản phẩm của I. Tính xác suất trong 5 sản phẩm đó có phế phẩm.

b) Một khách hàng mua 5 sản phẩm của I và 6 sản phẩm của II. Tính xác suất trong số sản phẩm được mua có phế phẩm.

40. Một phân xưởng có 3 máy cùng sản xuất một loại sản phẩm. Sản lượng của các máy này sản xuất ra chiếm tỷ lệ 35%, 40%; 25% toàn bộ sản lượng của phân xưởng. Tỷ lệ phế phẩm của các máy này tương ứng là 1%; 1,5%; 0,8%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của phân xưởng để kiểm tra.

a) Tính xác suất lấy được phế phẩm.

b) Giả sử sản phẩm lấy ra là phế phẩm. Nhiều khả năng sản phẩm đó do máy nào sản xuất ra?

41. Có hai máy cùng sản xuất một loại sản phẩm. Tỷ lệ chính phẩm của máy thứ nhất là 0,9; của máy thứ hai là 0,85. Từ một kho chứa 1/3 sản phẩm của máy thứ nhất (còn lại của máy thứ hai) lấy ra một sản phẩm để kiểm tra.

a) Tính xác suất lấy được phế phẩm?

b) Nếu sản phẩm lấy ra là chính phẩm thì tính xác suất sản phẩm đó do máy thứ hai sản xuất ra?

42. Một công ty bảo hiểm chia dân cư (đối tượng bảo hiểm) làm 3 loại: ít rủi ro, rủi ro trung bình, rủi ro cao. Theo thống kê thấy tỉ lệ dân gặp rủi ro trong 1 năm tương ứng với các loại trên là 5%, 15%, 30% và trong toàn bộ dân cư có 20% ít rủi ro; ; 50% rủi ro trung bình; 30% rủi ro cao.

a) Tính tỉ lệ dân gặp rủi ro trong một năm.

b) Nếu một người không gặp rủi ro trong năm thì xác suất người đó thuộc loại ít rủi ro là bao nhiêu?

43. Có 2 hộp bi.

Hộp 1 có 8 bi đỏ, 3 bi vàng

Hộp 2 có 10 bi đỏ, 4 bi vàng

a) Lấy ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra 1 bi. Tính xác suất lấy được bi đỏ.

b) Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra 2 bi. Tính xác suất trong 2 bi lấy ra có 1 bi đỏ.

c) Lấy ngẫu nhiên một bi của hộp 1 bỏ sang hộp 2, sau đó từ hộp 2 lấy ra 2 bi. Tính xác suất trong 2 bi lấy ra có bi đỏ.

d) Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp 1 bỏ sang hộp 2, sau đó lấy 2 bi từ hộp 2. Tính xác suất lấy được 2 bi đỏ.

44. Một hộp có 7 sản phẩm. Hoàn toàn không biết chất lượng của các sản phẩm trong hộp này. Mọi giả thiết về só phế phẩm có trong hộp là đồng khả năng. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ hộp ra 3 sản phẩm để kiểm tra thì thấy có 2 phế phẩm.

a) Số phế phẩm nhiều khả năng nhất trong các sản phẩm còn lại là bao nhiêu?

b) Nếu lấy thêm một sản phẩm nữa từ hộp thì khă năng lấy được phế phẩm là bao nhiêu?

45. Xí nghiệp bút bi Thiên long có 3 phân xưởng sản xuất. Phân xưởng 1 sản xuất 50% sản phẩm của toàn xí nghiệp, phân xưởng 2 sản xuất 30% sản phẩm của toàn xí nghiệp, phân xưởng 3 sản xuất 20% sản phẩm của toàn xí nghiệp. Tỷ lệ phế phẩm tính trên phân xưởng 1, 2, 3 tương ứng là 1%, 2%, 3%. Một sinh viên mua phải một cây bút bi Thiên Long,

a) Tính xác suất sinh viên mua phải cây viết xấu?

b) Biết rằng mua phải cây viết xấu, tính xác suất cây viết này do phân xưởng 1 sản xuất?

46. Có 2 lô sản phẩm do một máy tự động sản xuất ra. Lô I gồm 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Lô 2 gồm 7 chính phẩm và 3 phế phẩm.

a) Chọn ngẫu nhiên một lô và từ lô đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Tìm xác suất để được chính phẩm.

b) Giả sử đã lấy được chính phẩm, nếu từ lô đó lấy tiếp 1 sản phẩm thì xác suất được chính phẩm nữa bằng bao nhiêu?

47. Ba máy cùng sản xuất một loại sản phẩm với số lượng sản phẩm như nhau. Tỷ lệ phế phẩm lần lượt là 0,1; 0,1; 0,2. Một máy làm ra 8 sản phẩm thấy có 2 phế phẩm.

a) Hỏi khả năng 2 phế phẩm đó thuộc máy nào nhiều hơn ?

b) Tính xác suất để trong 8 sản phẩm tiếp theo cũng do máy đó sản xuất sẽ lại có 2 phế phẩm.

48. Một lô hàng có 8 sản phẩm cùng loại. Kiểm tra ngẫu nhiên 4 sản phẩm thấy có 3 chính phẩm và 1 phế phẩm. Tìm xác suất để khi kiểm tra tiếp 3 sản phẩm nữa sẽ có một chính phẩm và 2 phế phẩm.

49. Một người đến cửa hàng điện để mua 1 hộp bóng đèn. Anh ta lấy ngẫu nhiên 2 bóng từ hộp bóng đèn để kiểm tra nếu có bóng hỏng thì không mua hộp bóng đèn. Tính xác suất người đó mua hộp bóng đèn. Biết hộp bóng đèn có 10 bóng trong đó có 3 bóng hỏng.

50. Một người đầu tư vào 3 loại cổ phiếu A, B, C. Xác suất trong thời gian T các cổ phiếu này tăng giá là 0,6; 0,7; 0,8. Tìm xác suất trong thời gian T:

a) có cổ phiếu tăng giá.

b) có 1 cổ phiếu tăng giá.

c) Giả sử có 2 cổ phiếu không tăng giá. Tìm xác suất B không tăng giá.

Biết rằng các cổ phiếu A, B, C hoạt động độc lập.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1

a) Khi lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 1 bi, số kết cục đồng khả năng xảy ra là: n = $C_{11}^1.C_{13}^1$ = **143**

- Gọi A là biến cố lấy được 2 bi đỏ.

Số kết cục thuận lợi cho A là: m = $C_6^1.C_7^1$ = **42**

Xác suất để biến cố A xảy ra là: P(A) = $\frac{m}{n}=\frac{42}{143}\approx$ **0,2937**

- Gọi B là biến cố lấy được 2 bi cùng màu. Ta có 2 trường hợp:

TH1: 2 bi cùng màu đỏ. Xác suất xảy ra là p_1= P(A) = $\frac{42}{143}$

TH2: 2 bi cùng màu vàng.

Số kết cục đồng khả năng là: m = $C_5^1.C_6^1$ = 30

Xác suất xảy ra là: p_2= $\frac{m}{n}=\frac{30}{143}$

Vậy xác suất của biến cố B là: P(B) = p_1 + p_2 = $\frac{42}{143}+\frac{30}{143}=\frac{72}{143}\approx$ **0,5035**

- Gọi C là biến cố lấy được 2 bi khác màu.

Xác suất của biến cố C là: P(C) = 1 – P(B) = 1 – $\frac{72}{143}=\frac{71}{143}\approx$ **0,4965**

b) Khi lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 2 bi, số kết cục đồng khả năng là: n = $C_{11}^2.C_{13}^2$ = **4290**

- Gọi D là biến cố lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 2 bi được 3 bi đỏ. Ta có 2 trường hợp:

TH1: Lấy được 2 bi đỏ ở hộp 1, 1 bi đỏ và 1 bi vàng ở hộp 2.

Số kết cục thuận lợi là: m_1= $C_6^2.C_6^1.C_7^1$ = **630**

Xác suất của TH1 là: p_1 = $\frac{m_1}{n}=\frac{630}{4290}$

TH2: Lấy được 1 bi đỏ và 1 bi vàng ở hộp 1, 2 bi đỏ ở hộp 2.

Số kết cục thuận lợi là: m_2= $C_5^1.C_6^1.C_7^2$ = **630**

Xác suất của TH2 là: p_2 = $\frac{m_2}{n}=\frac{630}{4290}$

Vậy xác suất của biến cố D là: P(D) = p_1 + p_2 = $\frac{1260}{4290}\approx$ **0,2937**

- Gọi E là biến cố lấy được số bi đỏ nhiều hơn. Ta có 2 trường hợp:

TH1:Lấy đc 3 bi đỏ. Xác suất của TH1 là: p_1 = P(D) = $\frac{1260}{4290}$

TH2: Lấy đc 4 bi đỏ.
Số kết cục thuận lợi là: m = $C_6^2 . C_7^2$ = **315**

Xác suất của TH2 là: $p_2 = \frac{m}{n} = \frac{315}{4290}$

Vậy xác suất của biến cố E là: $p(E) = p_1 + p_2 = \frac{1260}{4290} + \frac{315}{4290} = \frac{1575}{4290} \approx$ **0,3671**

Bài 2

Số kết cục đồng khả năng là: m = $C_3^1 . C_3^1 . C_3^1$ = **27**

a) Gọi A là biến cố chọn được 3 người cùng một vị trí.
Vậy 3 người được chọn có thể cùng là hậu vệ, cùng là trung vệ hoặc cùng là tiền đạo.
Số kết cục thuận lợi cho A là: n = 3.1.1.1 = **3**

Xác suất để biến cố A xảy ra là: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

b) Gọi B là biến cố chọn được một đội bóng đầy đủ.
Số kết cục thuận lợi cho B là: m = 3.2 = **6**

Vậy xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

Bài 3

Ta dùng định nghĩa xác suất cổ điển để giải bài này:

Khách hàng thứ nhất có 6 cách chọn đến 1 quầy nào đó trong 3 quầy.
Điều tương tự xảy ra với khách hàng thứ 2 và 3.

Vậy suy ra tổng số các kết cục duy nhất đồng khả năng khi 3 khách hàng bước vào và chọn cách đến các quầy chính là chỉnh hợp lặp chập 3 của 6:

$$n = B_6^3 = 6^3 = 216$$

a) Các kết cục thuận lợi cho biến cố A = „Cả 3 khách đến cùng 1 quầy“ là
3 khách hàng cùng đến quầy 1
3 khách hàng cùng đến quầy 2
...
Vậy có m = 6 kết cục thuận lợi cho biến cố A
⇨ Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{216} = \mathbf{0{,}0278}$$

b) Gọi B là biến cố „Mỗi người đến 1 quầy khác nhau“
Nếu khách hàng 1 chọn 1 quầy nào đó, thì khách hàng 2 chỉ được chọn 5 quầy còn lại, và khách hàng 3 chỉ còn 4 lựa chọn
⇨ Số kết cục thuận lợi cho biến cố B là chỉnh hợp chập 3 của 6

$$m = A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 6.5.4 = 120$$

⇨ Xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9} = \mathbf{0{,}5556}$$

c) Gọi C là biến cố „2 trong 3 người cùng đến 1 quầy“
Số cách chọn ra 2 người để xếp họ vào cùng 1 quầy chính là tổ hợp chập 2 của 3 phần tử:

$$C_3^2 = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

Sau khi chọn được 1 nhóm 2 người như vậy, số cách xếp họ vào 1 quầy nào đó là: 6
Sau khi xếp 2 người vào 1 quầy nào đó rồi, số cách để xếp 1 người còn lại vào các quầy còn lại là: 5
⇨ Số cách xếp 2 người vào 1 quầy, và 1 người còn lại vào 1 quầy khác là chỉnh hợp chập 2 của 6 phần tử:

$$A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 6.5 = 30$$

⇨ Số kết cục thuận lợi cho biến cố C là:

$$m = C_3^2 \ . \ A_6^2 = 3.30 = 90$$

⇨ Xác suất của biến cố C là:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{90}{216} = \mathbf{0{,}4167}$$

d) Gọi D là biến cố „chỉ 1 khách đến quầy số 1“

Số cách chọn ra 1 trong 3 người vào quầy 1 là tổ hợp chập 1 của 3

$$C_3^1 = 3$$

Sau khi chọn được 1 người và xếp vào quầy 1, để tạo kết cục thuận lợi cho D, người thứ 2 và người thứ 3 chỉ còn 5 quầy còn lại để chọn đi vào, chính là chỉnh hợp lặp chập 2 của 5.

⇨ Số cách xếp 1 người đã chọn vào quầy 1 và 2 người còn lại vào các quầy khác là

$$B_5^2 = 50$$

⇨ Số kết cục thuận lợi cho biến cố D là:

$$m = C_3^1 \ . \ B_2^5 = 3.25 = 75$$

⇨ Xác suất của biến cố D là:

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{75}{216} = \mathbf{0{,}3472}$$

Bài 4

Ta có bảng phân bố kết cục:

Đỏ* / *Xanh	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

a) Gọi A là biến cố „tổng số chấm xuất hiện trên mặt 2 con xúc xắc bằng 7“. Tổng số kết cục đồng khả năng:

$$n = B_6^2 = 6.6 = 36$$

Số kết cục thuận lợi cho A là:

$$m = 6$$

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

b) Gọi B là biến cố „số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc đỏ nhiều hơn số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc xanh“

Số kết cục thuận lợi là số ô nằm trên đường chéo:

$$m = 15$$

Xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$$

a) Gọi C là biến cố „tích số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc là một số lẻ“

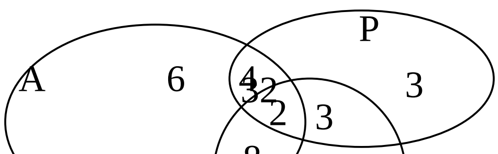
⇨ Số chấm trên mỗi xúc xắc chỉ có thể nhận 1 trong 3 giá trị: 1; 3; 5

⇨ Số kết cục thuận lợi là:

$$m = 3.3 = 9$$

⇨ Xác suất của biễn cố C là: $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{36}} = \mathbf{0{,}\ 25}$

Bài 5



Sơ đồ Ven:

a) Gọi A là biến cố „chọn được một người biết ít nhất 1 loại kĩ năng trên“
Số kết cục đồng khả năng là: n = 30
Số kết cục thuận lợi là:

$$m = 28$$

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{30}$$

b) Gọi B là biến cố „chọn được một người chỉ biết 1 loại kĩ năng trên“
Số kết cục thuận lợi là:

$$m = 11$$

Xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{11}{30}$$

c) Gọi C là biến cố „chọn được một người chỉ biết 2 loại kĩ năng trên“
Số kết cục thuận lợi là: m = 15
Xác suất của biến cố C là:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30}$$

d) Gọi D là biến cố „chọn được người chỉ biết tiếng anh“
Số kết cục thuận lợi là:

$$m = 6$$

Xác suất của biến cố D là:

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{6}{30}$$

Bài 6

Dựa vào dữ kiện đầu bài, ta có:
Tỷ lệ khách hàng chỉ sử dụng thẻ loại M là: 60% – 30% = 30%
Tỷ lệ khách hàng chỉ sử dụng thẻ loại N là: 55% – 30% = 25%
a) Gọi A là biến cố „chọn ngẫu nhiên một khách hàng thì người đó sử dụng thẻ của ngân hàng“
Xác suất của biến cố A là:

P(A) = 30% + 30% + 25% = 85% = **0.85**

b) Gọi B là biến cố „chọn ngẫu nhiên một khách hàng thì người đó chỉ sử dụng 1 loại thẻ của ngân hàng“
Xác suất của biến cố B là:

P(B) = 30% + 25% = 55% = **0.55**

c) Gọi C là biến cố „chọn ngẫu nhiên một khách hàng thì người đó chỉ sử dụng 1 thẻ loại M của ngân hàng“
Xác suất của biến cố C là:

P(C) = 30% = **0.3**

d) Gọi D là biến cố „chọn ngẫu nhiên một khách hàng thì người đó không sử dụng thẻ của ngân hàng“
Xác suất của biến cố D là:

P(D) = 1 – P(A) = 1 – 0.85 = **0.15**

Bài 7

a) Gọi A là biến cố „có ít nhất một phong bì điền đúng địa chỉ“

Tổng số kết cục đồng khả năng là chỉnh hợp chập 3 của 3: n = A_3^3 = 3.2.1 = 6

Giả sử địa chỉ đúng của 3 người tương ứng là A, B, C. Khi đó, 6 kết cục duy nhất đồng khả năng là ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) Gọi B là biến cố «có ít nhất một phong bì điền không đúng địa chỉ »

$$P(B) = \frac{5}{6}$$

Bài 8. Số cách trả mũ có thể xảy ra là $A^3{}_3$ =6.

a) Xác suất để cả 3 người bị trả sai mũ là:

P(A) = 2/6

b) Số kết cục thuận lợi để có đúng 1 người được trả đúng mũ là 3, vậy

P(B) = 3/6 = 0,5

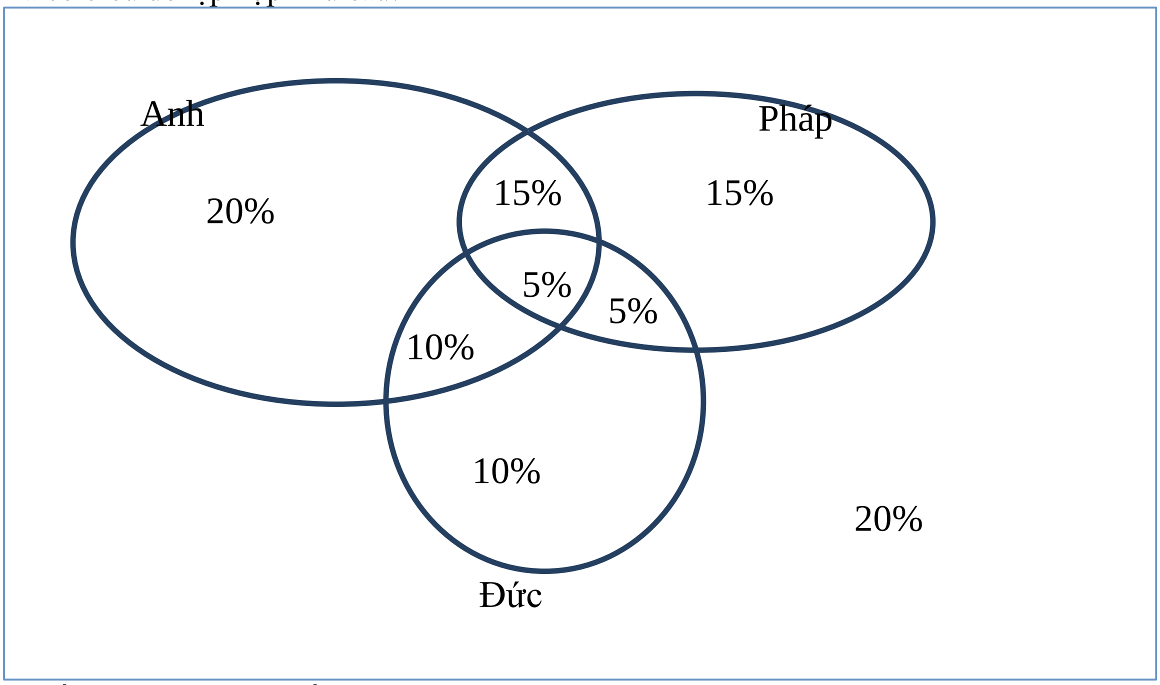
c) Không thể có khả năng chỉ có đúng 2 người được trả đúng mũ, vì chắc chắn người thứ 3 cũng sẽ đúng mũ, nên P(C) = 0

d) Để cả 3 người cùng được trả đúng mũ thì chỉ có 1 kết cục thuận lợi nên

P(D)= 1/6

Bài 9

Ta có biểu đồ tập hợp như sau:



a) Số học sinh học ít nhất 1 ngoại ngữ trên là 50% + 10% + 15% + 5% = 80%.

Vậy xác suất của biến cố này là P(A) = 0,8.

b) Số học sinh chỉ học tiếng Anh và tiếng Đức là 10%.

Vậy P(B) = 0,1.

c) Số học sinh chỉ học tiếng Pháp là 15%

Vậy xác suất là P(C) = 0,15.

Bài 10

Ta có n=8 kết cục khả năng là GGG, GGT, GTG, GTT, TTT, TGG, TGT, TTG.

a. Gọi A là biến cố ‘’ Gia đình có hai con gái’’.

Có 3 kết quả thuận lợi cho A nên ta có :

P(A)=3/8

b. Gọi B là biến cố ‘’ Gia đình có ít nhất 2 con gái ‘’.
Số kết quả thuận lợi cho B là 4 nên ta có :

P(B)=4/8=0,5

c. Gọi C là biến cố ‘’ Gia đình có hai con gái biết rằng đứa đầu lòng là con gái’’.
Số kết quả thuận lợi cho C là 2 nên ta có :

P(C)=2/4

d. Gọi D là biến cố ‘’ Gia đình có ít nhất 2 đứa con gái biết rằng gia đình đó có ít nhất 1 đứa con gái’’.
Nếu gia đình có ít nhất 1 đứa con gái thì số kết cục đồng khả năng là 7.
Số kết cục thuận lợi cho D là 4 nên ta có :

P(D)=4/7

Bài 10

Số kết cục duy nhất đồng khả năng là chỉnh hợp lặp chập 3 của 30 nên ta có :

$$n = 30^3 = 27000$$

a) Gọi A là biến cố “Cả 3 người có ngày sinh nhật khác nhau”
Số biến cố thuận lợi cho A là chỉnh hợp chập 3 của 30:

$$m = A_{30}^{3} = 24360$$

Khi đó:

$$p(A) = \frac{24360}{27000} = 0,9022$$

b) Gọi B là biến cố cả 3 người có cùng ngày sinh nhật
Khi đó:

$$p(B) = \frac{30}{27000} = 0,001$$

Bài 11

Gọi A là biến cố trong 3 sản phẩm kiểm tra không có phế phẩm.
* Trường hợp có hoàn lại:
Số kết cục đồng khả năng là: $n_1 = C_{100}^{1}.C_{100}^{1}.C_{100}^{1}$ = **1000000**
Số kết cục thuận lợi cho A là: $m_1 = C_{90}^{1}.C_{90}^{1}.C_{90}^{1}$ = **729000**
Vậy xác suất để lô hàng được mua là: $P(A) = \frac{m_1}{n_1} = \frac{729000}{1000000}$ = **0,729**
* Trường hợp không hoàn lại:
Số kết cục đồng khả năng là: $n_2 = C_{100}^{1}.C_{99}^{1}.C_{98}^{1}$ = **970200**
Số kết cục thuận lợi cho A là: $m_2 = C_{90}^{1}.C_{89}^{1}.C_{88}^{1}$ = **704880**
Vậy xác suất để lô hàng được mua là: $P(A) = \frac{m_2}{n_2} = \frac{704880}{970200} \approx$ **0,7265**

Bài 12

a) Xác suất để nồi hơi có van không hỏng là: $P_a = 1 – 0.1 \times 0.05 = 0.995$
b) Xác suất để nồi hơi không có van hỏng là: $P_b = (1 – 0.1) \times (1 – 0.05) = 0.855$

Bài 13

a) Goi A là biến cố gửi ngẫu nhiên 3 chiếc mũ cho 3 vị khách mà không ai nhận được mũ của mình.

Số kết cục đồng khả năng là: n = 3.2 = 6
Số kết cục thuận lợi là: m = 2

Xác suất của biến cố A là: P(A) = $\frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) Goi B là biến cố gửi ngẫu nhiên 3 chiếc mũ cho 3 vị khách mà chỉ có 1 người nhận được mũ của mình.
Số kết cục thuận lợi của biến cố B là: $m_1 = 3$

Xác suất của biến cố B là: P(B) = $\frac{m_1}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Bài 14

a) Xác suất để máy hoạt động quá thời gian 2T nếu máy đã hoạt động tới thời gian T là: $P_a = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$

b) Xác suất để máy hoạt động thêm quãng thời gian 2T nếu máy đã hoạt động tới thời gian T là: $P_b = \frac{0.1}{0.7} = \frac{1}{7}$

Bài 15

Xác suất để đứa bé còn lại là gái là: P = $\frac{1}{3}$

Bài 16

Bài 17

Định lý cộng và nhân xác suất

Bài 18

a) Gọi A là biến cố khách hàng mua hộp sản phẩm.
Số kết cục đồng khả năng là: n = C_{20}^4 = **4845**
Để khách hàng mua hộp sản phẩm thì trong 4 sản phẩm lấy ra phải có không quá một phế phẩm. Gọi A_1 là biến cố cả 4 sản phẩm lấy ra là chính phẩm.
Số kết cục thuận lợi cho A_1 là: m_1 = C_{15}^4 = **1365.**

Xác suất của biến cố A_1 là: $P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{1365}{4845}$

Gọi A_2 là biến cố 4 sản phẩm lấy ra gồm 3 chính phẩm và 1 phế phẩm
Số kết cục thuận lợi cho A_2 là: m_2 = $C_5^1.C_{15}^3$ = **2275**

Xác suất của biến cố A_2 là: $P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{2275}{4845}$

Vì $A = A_1 + A_2$; A_1 và A_2 xung khắc nhau, do đó xác suất của biến cố A là:

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1365}{4845} + \frac{2275}{4845} = \frac{3640}{4845} \approx$ **0,7513**

b) Gọi B là biến cố khách hàng không mua hộp sản phẩm.
Vậy B chính là biến cố đối của biến cố A

Xác suất của biến cố B là: P(B) = 1 – P(A) = 1 – $\frac{3640}{4845} \approx$ **0,2487**

Bài 19

Khi người đó lấy ra 3 bóng đèn, số kết cục đồng khả năng là: n = C_{15}^3 = **455**

a) Gọi A là biến cố trong 3 bóng đèn người đó lấy ra không có bóng hỏng. Khi đó người đó sẽ mua hộp bóng đèn.
Số kết cục thuận lợi là: m = C_{12}^3 = **220**

Xác suất của biến cố A là: P(A) = $\frac{m}{n} = \frac{220}{455} \approx$ **0,4835**
b) Gọi B là biến cố trong 3 bóng lấy ra có số bóng hỏng ít hơn.
C là biến cố trong 3 bóng lấy ra có 1 bóng hỏng.
Số kết cục thuận lợi cho C là: m_1 = $C_3^1.C_{12}^2$ = **198**
Xác suất của biến cố C là: P(C) = $\frac{m_1}{n} = \frac{198}{455}$
Vì B = A + C; A và C là 2 biến cố xung khắc, do đó xác suất của biến cố B là:
Xác suất của biến cố B là: P(B) = P(A) + P(C) = $\frac{220}{455} + \frac{198}{455} = \frac{418}{455} \approx$ **0,9187**

Bài 20
Gọi A_i là biến cố lần chọn thứ i gặp sản phẩm là chính phẩm.
a) A là biến cố phải chọn ngẫu nhiên có hoàn lại đến lần thứ 3.
Do tỷ lệ phế phẩm của lô hàng là 5% nên $P(A_i)$ = 1 – 0,05 = **0,95**
Vì biến cố A_1, A_2, $\overline{A_3}$ độc lập toàn phần và A = $A_1.A_2.\overline{A_3}$, do đó xác suất của biến cố A là:
P(A) = $P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3})$ = 0,95.0,95.(1 - 0,95) $\approx$ **0,0451**
b) Giả sử số lần phải chọn là n lần. Gọi B là biến cố chọn được ít nhất 1 phế phẩm.
=> $\overline{B}$ là biến cố không chọn được phế phẩm.
Vì biến cố $A_1, A_2 \ldots A_n$ độc lập toàn phần và $\overline{B} = A_1.A_2.A_3 \ldots A_n$, do đó xác suất của biến cố B là: P(B) = 1 – $P(\overline{B})$ = 1 – $P(A_1).P(A_2) \ldots P(A_n)$ = 1 – $(0,95)^n$
Để P(B) $\geq$ 0,9, ta có:

$$1 - (0.95)^n \geq 0,9$$
$$\Leftrightarrow (0,95)^n \leq 0,1$$
$$\Leftrightarrow n \geq \log_{0,95} 0,1 \approx \mathbf{44,8906}$$
$$\Rightarrow n \geq 45$$

Vậy phải chọn ít nhất là 45 lần để xác suất chọn được ít nhất 1 phế phẩm không nhỏ hơn 0,9.

Bài 21
Gọi A_1 là biến cố sản phẩm kiểm tra đầu tiên là phế phẩm.
A_2 là biến cố sản phẩm kiểm tra thứ 2 là phế phẩm.
A_3 là biến cố sản phẩm kiểm tra thứ 3 là phế phẩm.
Vì tỷ lệ phế phẩm là 5% nên $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$ = **0,05**
a) A là biến cố trong 3 sản phẩm kiểm tra có 2 phế phẩm.
Ta có: A = $A_1.A_2.\overline{A_3} + A_1.\overline{A_2}.A_3 + \overline{A_1}.A_2.A_3$ và A_1, A_2, A_3 độc lập toàn phần.
Do đó áp dụng quy tắc nhân, xác suất của biến cố A là:
P(A) = $P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(A_1).P(\overline{A_2}).P(A_3) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(A_3)$
= 0,05.0,05.(1 – 0,05) + 0,05.(1 – 0,05).0,05 + (1 – 0,05).0,05.0,05 = **7,125.10^{-3}**
b) B là biến cố trong 3 sản phẩm kiểm tra có ít nhất 1 phế phẩm.
=> $\overline{B}$ là biến cố trong 3 sản phẩm kiểm tra không có phế phẩm.
Ta có: $\overline{B} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}$ và $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ độc lập toàn phần.
Do đó áp dụng quy tắc nhân, xác suất của biến cố B là:
P(B) = 1 – $P(\overline{B})$ = 1 - $P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})$ = 1 – $(1 - 0,05)^3 \approx$ **0,1426**

Bài 22
a) Gọi A là biến cố người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng.
Số kết cục đồng khả năng là: n = $C_{10}^1.C_9^1.C_8^1$ = **720**

- A_1 là biến cố người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng và 2 người đầu không ai lấy được phiếu trúng thưởng.
Số kết cục thuận lợi cho A_1 là: $m_1 = C_8^1 . C_7^1 . C_2^1$ = **112**

Xác suất của biến cố A_1 là: $P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{112}{720}$

- A_2 là biến cố người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng và 2 người đầu có 1 người lấy được phiếu trúng thưởng.
Số kết cục thuận lợi cho A_2 là: $m_2 = C_2^1 . C_8^1 . C_2^1 . C_1^1$ = **32**

Xác suất của biến cố A_2 là: $P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{32}{720}$

Vì $A = A_1 + A_2$; A_1 và A_2 là 2 biến cố xung khắc, do đó xác suất của biến cố A là:

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{112}{720} + \frac{32}{720}$ = **0,2**

b) - Gọi B là biến cố trong 2 người đầu đã có 1 người lấy được phiếu trúng thưởng.
Số kết cục đồng khả năng của B là: $m = C_{10}^1 . C_9^1$ = **90**

Số kết cục thuận lợi cho B là: $n = C_2^1 . C_8^1 . C_2^1$ = **32**

Xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{32}{90}$

- Ta có: A|B là biến cố người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng biết trong 2 người đầu đã có một người lấy được phiếu trúng thưởng. Do vậy áp dụng công thức tính xác suất có điều kiện ta có:

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A_2)}{P(B)} = \frac{32}{720} : \frac{32}{90} = \frac{1}{8}$

Vậy $P(A|B) = \frac{1}{8}$.

c) – Gọi C là biến cố người thứ nhất lấy được phiếu trúng thưởng.
Số kết cục đồng khả năng của C là: $m = C_{10}^1 = 10$

Số kết cục thuận lợi cho C là: $n = C_2^1 = 2$

Xác suất của biến cố C là: $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{2}{10}$ = **0,2**

- Ta có: AC là biến cố người thứ 1 và người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng.
Số kết cục đồng khả năng của AC là: $m = C_{10}^1 . C_9^1 . C_8^1 = 720$

Số kết cục thuận lợi cho AC là: $n = C_2^1 . C_8^1 . C_1^1 = 16$

Xác suất của biến cố AC là: $P(AC) = \frac{m}{n} = \frac{16}{720}$

- C|A là biến cố người thứ nhất lấy được phiếu trúng thưởng biết người thứ 3 lấy được phiếu trúng thưởng. Áp dụng công thức tính xác suất có điều kiện ta có:

$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{16}{720} : 0,2 = \frac{1}{9}$

Vậy $P(C|A) = \frac{1}{9}$

Bài 23

Gọi A là biến cố việc lấy bi dừng lại ở lần thứ 3.
Số kết cục đồng khả năng là: $n = C_{10}^1 . C_9^1 . C_8^1$ = **720**

- A_1 là biến cố lần 1 và 3 lấy được bi đỏ, lần 2 không lấy được bi đỏ.
Số kết cục thuận lợi cho A_1 là: $m_1 = C_2^1 . C_8^1 . C_1^1$ = **16**

Xác suất của biến cố A_1 là: $P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{16}{720}$

- A_2 là biến cố lần 2 và 3 lấy được bi đỏ, lần 1 không lấy được bi đỏ.
Số kết cục thuận lợi cho A_2 là: $m_2 = C_8^1.C_2^1.C_1^1$ = **16**

Xác suất của biến cố A_2 là: $P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{16}{720}$

Vì $A = A_1 + A_2$; A_1 và A_2 là 2 biến cố xung khắc, do đó xác suất của biến cố A là:

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{16}{720} + \frac{16}{720} = \frac{32}{720} \approx$ **0,0444**

Bài 24

- Gọi A_i là biến cố người thứ i bắn trúng bia.
Theo đề bài ta có $P(A_1) = 0,5$; $P(A_2) = 0,6$; $P(A_3) = 0,8$ và A_1, A_2, A_3 độc lập toàn phần.
- Gọi B là biến cố bia bị bắn trúng bởi 2 viên đạn.
=> $B = A_1.A_2.\overline{A_3} + A_1.\overline{A_2}.A_3 + \overline{A_1}.A_2.A_3$
Xác suất của biến cố B là:
$P(B) = P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(A_1).P(\overline{A_2}).P(A_3) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(A_3)$
$= 0,5.0,6.(1 – 0,8) + 0,5.(1 – 0,6).0,8 + (1 – 0,5).0,6.0,8 =$ **0,46**
- $A_1.B$ là biến cố xạ thủ thứ nhất bắn trúng và bia bị bắn trúng bởi 2 viên đạn.
=> $A_1.B = A_1.A_2.\overline{A_3} + A_1.\overline{A_2}.A_3$
Xác suất của biến cố $A_1.B$ là:
$P(A_1.B) = P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(A_1).P(\overline{A_2}).P(A_3)$
$= 0,5.0,6.(1 – 0,8) + 0,5.(1 – 0,6).0,8 =$ **0,22**
- $A_1|B$ là biến cố xạ thủ bắn trúng biết bia bị bắn trúng bởi 2 viên đạn. Áp dụng công thức tính xác suất có điều kiện ta có:

$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{0,22}{0,46} \approx$ **0,4783**

Bài 25

Bài 26

Gọi A_i là biến cố trong một ngày làm việc xí nghiệp có ô tô i bị hỏng, ta có :
$P(A_1) = 0,08$; $P(A_2) = 0,1$
a) Gọi A là biến cố trong một ngày làm việc có 2 ô tô hỏng, ta có : A = A1.A2.
Do 2 ô tô hoạt động độc lập nên xác suất của biến cố A là :

$P(A) = P(A_1).\ P(A_2) = 0,08.0,1 =$ **0,008**

b) B là biến cố có 1 ô tô hỏng, ta có $B = A_1.\overline{A_2} + \overline{A_1}.A_2$
Xác suất của biến cố B là : $P(B) = P(A_1).P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}).P(A_2)$

$= 0,08.(1 – 0,1) + (1 – 0,08).\ 0,1 =$ **0,164**

c) C là biến cố có ô tô hỏng.
Vì C = A + B ; A và B là 2 biến cố xung khắc, do đó xác suất của biến cố C là:
P(C) = P(A) + P(B) = **0,172**

Bài 27

Gọi A là biến cố người này bị dừng đầu tiên ở ngã tư thứ 4

$$A = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$$

$$p(A) = p\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\right) = \frac{1}{2^4}$$

Bài 28

Gọi A là biến cố trong 3 lần mua hàng chỉ có 1 lần mua phải hàng xấu
B,C,D là biến cố người mua phải hàng xấu trong lần thứ nhất,nhì,ba

Dễ thấy $P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = 0{,}8.0{,}9.0{,}1 + 0{,}8.0{,}1.0{,}8 + 0{,}2.0{,}8.0{,}9 = 0{,}28$

Bài 29
Gọi A_i là biến cố người thứ nhất bắn trúng đích lần thứ i
Gọi Bi là biến cố người thứ hai bắn trúng đích lần thứ i
Gọi A là biến cố người 1 bắn được trúng đích trước
B là biến cố người thứ 2 bắn trúng đích trước
Suy ra $A = A_1 + \overline{A_1}\ \overline{B_1}\ A_2 + \overline{A_1}\ \overline{B_1}\ \overline{A_1}\ \overline{B_1}\ A_{3+\cdots}$.
Ta thấy các lần lấy độc lập với nhau nên thay số vào

$$P(A) = 0{,}7447$$

Từ đây suy ra P(B)=0,2553

Bài 30
a.Gọi A là biến cố anh chồng có được con trai.
Gọi Ai là biến cố anh chồng có được con trai trong lần thứ i
Bi là biến cố anh này có con gái trong lần sinh thứ i
Theo bài trên ta thấy ngay s

$$A = A_1 + \overline{A_1}\ \overline{B_1}\ A_2 + \overline{A_1}\ \overline{B_1}\ \overline{A_1}\ \overline{B_1}\ A_{3+\cdots}.$$

$$p(A) = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \cdots = 1 - \frac{1}{2^n}$$

b.Ta có

$$1 - \frac{1}{2^n} \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 6{,}64$$

Hệ quả định lý cộng và nhân xác suất

Bài 31
a) Coi việc sản xuất ra từng sản phẩm của máy là nột phép thử thì ta có 10 phép thử độc lập. Trong mỗi phép thử chỉ có 2 khả năng đối lập: hoặc là chính phẩm, hoặc phế phẩm. Xác suất phế phẩm mỗi lần sản xuất đều bằng 0,08. Vậy theo công thức Bernouli:

Xác suất trong 10 sản phẩm máy sản xuất ra có 3 phế phẩm:

$$P_{10}(3) = C_{10}^3.0{,}92^7.0{,}08^3 = 0{,}34274$$

b) Gọi A_i là biến cố sản phẩm thứ i là chính phẩm; $= \overline{1;10}$, hiển nhiên $A_i = 0{,}92$, do A_i độc lập từng đôi nên sác xuất để máy sản xuất ra toàn chính phẩm là: $0{,}92^{10}$

Vậy xác suất để trong 10 sản phẩm máy sản xuất ra có phế phẩm là :

$1 - 0{,}92^{10} = 0{,}5656$

c) Giả sử ta kiểm tra n sản phẩm

Gọi C_i là biến cố sản phẩm thứ i là chính phẩm; $i = \overline{1;n}$

Gọi C là biến cố "Trong n sản phẩm có ít nhất một phế phẩm"

Tương tự câu b ta có :

$$P(C) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(C_i)$$

Hiển nhiên $P(C_1) = P(C_2) = \cdots = P(C_n) = 0{,}92$, nên ta có:

$$P(C) = 1 - 0{,}92^n$$

Theo giả thiết xác suất của biến cố C lớn hơn 90% nên ta có bất phương trình sau:

$$1 - 0{,}92^n > 0{,}9$$

Từ đó: $0{,}92^n < 0{,}1$
Suy ra: $n \ln 0{,}92 < \ln 0{,}1$
Do $\ln 0{,}92 < 0$ nên ta có:

$$n > \frac{ln0,1}{\ln 0,92} = 27,615$$

Vậy phải kiểm tra tối thiểu 28 sản phẩm.

Bài 32

Coi mỗi nơi đến bán hàng là thực hiện 1 phép thử.
Gọi A là biến cố người đó bán được hàng tại mỗi nơi.
Khi đó, ta có lược đồ Bernoulli với n = 6; P(A) = p = 0,3.
Gọi B là biến cố người đó bán được hàng.
Xác suất của biến cố B là:

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - C_6^0.p^0.(1-p)^6$

$= 1 - C_6^0.0,3^0.0,7^6 \approx$ **0,8823**

Vậy $P(B) \approx$ **0,8823**

Bài 33

Coi việc tiêu thụ điện không quá mức quy định của một nhà máy trong một ngày là 1 phép thử thì ta có 6 phép thử độc lập.
Trong mỗi phép thử chỉ có 2 khả năng: xảy ra hoặc không xảy ra.
Gọi A là biến cố mức điện tiêu thụ không quá quy định mỗi ngày.
Khi đó, ta có lược đồ Bernoulli với n = 6; P(A) = p = 0,8.
a) Gọi B là biến cố nhà máy có 4 ngày tiêu thụ điện không quá mức quy định.
Xác suất của biến cố B là:

$P(B) = P_6(4) = C_6^4.p^4.(1-p)^2 = C_6^4.0,8^4.0,2^2 \approx$ **0,2458**

b) Gọi C là biến cố có ngày tiêu thụ điện quá mức quy định

=> $\overline{C}$ là biến cố không có ngày nào tiêu thụ điện quá mức quy định.
Xác suất của biến cố C là:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - C_6^6.p^6.(1-p)^0 = 1 - C_6^6.0,8^6.0,2^0$

Bài 34

Xác suất xuất hiện mặt 6 chấm sau 1 lần tung bất kỳ là: $p=\frac{1}{6}$

Gọi A là biến cố xuất hiện mặt 6 chấm khi tung X.

=> $\overline{A}$ là biến cố không xuất hiện mặt 6 chấm; khi đó ta có lược đồ Bernoulli với $p = \frac{1}{6}$

Giả sử tung n lần, gọi X là số lần xuất hiện mặt 6 chấm. Khi đó, xác suất xuất hiện mặt 6 chấm là:

$p(X>1) = 1 - p(X=0) = 1 - C_n^0 p^0 (1-p)^n = 0,9$ => n ≈ **12, 6293**

Vậy phải tung con xúc xắc 13 lần.

Bài 35

a) Gọi A_i và B_i lần lượt là biến cố xạ thủ 1 và 2 bắn trúng bia trong lần thứ i, $i = \overline{1;8}$, theo đề bài ta có $A_i = 0,6$, $B_i = 0,7$, $\forall i$
Gọi A là xác suất để bia không bị trúng đạn trong tất cả các lần bắn.
Do các biến cố A_i và B_i không xung khắc và độc lập toàn phần, do đó

$P(A) = \prod_{i=1} \overline{A_i} . \prod_{i=1} \overline{B_i} = (1-0,6)^8.(1-0,7)^8 = 0,4^8.0,3^8$

Vậy xác suất để bia bị trúng đạn là:
$1 - P(A) = 1 - 0,4^8.0,3^8 \approx$ **0,9999**
b) Gọi C_1 là biến cố người 1 bắn trúng 2 viên đạn, người 2 không bắn trúng viên nào.
C_2 là biến cố mỗi người chỉ bắn trúng đúng 1 viên đạn.

C_3 là biến cố người 1 không bắn trúng viên nào, người 2 bắn trúng 2 viên đạn.
C là biến cố có 2 viên đạn trúng đích.
Do 3 biến cố C_1, C_2, C_3 đôi một xung khắc nên ta có $P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$
- Xét biến cố C_1, gọi D_1 là biến cố người 1 bắn trúng 2 viên đạn, D_2 là biến cố người 2 không bắn trúng viên nào.
Nếu coi mỗi lần bắn của người 1 là một phép thử, ta có 8 phép thử độc lập, trong mỗi phép thử chỉ có 2 trường hợp, hoặc trúng hoặc trượt. Xác suất trúng mỗi lượt đều bằng 0,6. Vì thế xác suất để người 1 bắn trúng 2 viên theo công thức Bernoulli là:
$P(D_1) = C_8^2.0{,}6^2.0{,}4^6$
Xác suất để người 2 không bắn trúng viên nào theo công thức Bernoulli là:
$P(D_2) = C_8^0.0{,}7^0.0{,}3^8$
Do D_1 và D_2 là 2 biến cố không xung khắc nên
$P(C_1) = P(D_1).P(D_2) = C_8^2.0{,}6^2.0{,}4^6 .\ C_8^0.0{,}7^0.0{,}3^8$
- Lập luận tương tự, ta có:
$P(C_2) = C_8^1.0{,}6^1.0{,}4^7.\ C_8^1.0{,}7^1.0{,}3^7$
$P(C_3) = C_8^0.0{,}6^0.0{,}4^8.\ C_8^2.0{,}7^2.0{,}3^6$
- Vậy xác suất của biến cố C là:
$P(C) = C_8^2.0{,}6^2.0{,}4^6 .\ C_8^0.0{,}7^0.0{,}3^8 + C_8^1.0{,}6^1.0{,}4^7.\ C_8^1.0{,}7^1.0{,}3^7 + C_8^0.0{,}6^0.0{,}4^8.\ C_8^2.0{,}7^2.0{,}3^6$
$\approx \mathbf{1{,}8895.10^{-5}}$

Bài 36
Nếu coi mỗi câu trả lời ngẫu nhiên của học sinh này là một phép thử thì ta có 20 phép thử độc lập. Trong mỗi phép thử chỉ có 2 trường hợp: hoặc đúng hoặc sai.
Vì mỗi câu có 4 đáp số nhưng chỉ có 1 đáp số đúng nên xác suất trả lời đúng ở mỗi câu đều bằng 0,25.
Vậy theo công thức Bernoulli, xác suất học sinh trả lời ngẫu nhiên đúng 9 câu là:
$P_{20}(9) = C_{20}^9.0{,}25^9.0{,}75^{11} \approx \mathbf{0{,}0271}$

Bài 37
1.Gọi A là biến cố người 1 bắn trúng bia
B là biến cố người 2 bắn trúng bia
C là biến cố người 3 bắn trúng bia
D là biến cố chỉ có 2 người bắn trúng bia
Ta có $D = A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C$ Suy ra P(D)=3.0,7.0,7.0,3=0,441
2.Gọi E là biến cố có 1 người bắn trượt
Suy ra E=D ,vậy P(E)=0,441
3.Gọi F là biến cố bia bị trúng đạn
F= A + B + C $\Rightarrow$ $\overline{F} = \overline{A + B + C} = \overline{A}\,\overline{B}\overline{C}$
hay P(F)=1-0,3.0,3.0,3=0,973

Bài 38
Gọi A là biến cố đển lớp học đủ ánh sáng
Ta thấy lớp học đủ ánh sáng khi có 4 bóng đèn sáng và 2 bóng đèn tắt
Hoặc 5 bóng đèn sáng và 1 bóng đèn hỏng
Hoặc cả 6 bóng đèn đều sáng
Áp dụng công thức Bernoulli ta có
P(A)= $C_6^4(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^2 + C_6^5(\frac{3}{4})^5\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0{,}83$

Bài 39

a) Gọi A là biến cố trong 5 sản phẩm khách hàng mua của nhà máy I có phế phẩm
Khách hàng mua 5 sản phẩm tương ứng với 5 phép thử Bernoulli.
Ta có lược đồ Bernoulli với n = 5 ; p = 0,02. Vậy:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - C_5^0 .0,02^0.(1 - 0,02)^5 \approx \mathbf{0,0961}$$

b) Gọi B là biến cố trong số sản phẩm được mua có phế phẩm.
Gọi C là biến cố trong 6 sản phẩm khách hàng mua của nhà máy II có phế phẩm.

Tính được $p(C) = 1 - C_6^0 .0,03^0.(1 - 0,03)^6 \approx \mathbf{0,167}$

- Ta có: B = A + C

Xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = P(A+C) = p(A) + p(C) - p(AC) = 0,2471$$

Bài 40

a) Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là biến cố lấy được sản phẩm là sản phẩm của máy 1, 2 và 3.
Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là biến cố lấy được phế phẩm khi lấy được sản phẩm từ máy 1,2 và 3.
Gọi A là biến cố lấy được phế phẩm.
Theo công thức xác suất đầy đủ ta có xác suất lấy được phế phẩm là:

$P(A) = P(H_1).P(A_1|H_1) + P(H_2).P(A_2|H_2) + P(H_3).P(A_3|H_3)$
$= 0,35.0,01 + 0,4.0,015 + 0,25.0,008 = \mathbf{0,0115}$

b) Theo công thức Bayes, nếu biết sản phẩm lấy ra là phế phẩm thì xác suất sản phẩm đó do máy 1 sản xuất là:

$$P(H_1/A) = \frac{P(A_1/H_1)P(H_1)}{P(A_1/H_1)P(H_1) + P(A_2/H_2)P(H_2) + P(A_3/H_3)P(H_3)}$$

$$= \frac{0,01.0,35}{0,01.0,35 + 0,015.0,4 + 0,008.0,25} = \frac{7}{23}$$

Xác suất phế phẩm đó là của máy 2 là:

$$P(H_2/A) = \frac{P(A_2/H_2)P(H_2)}{P(A_1/H_1)P(H_1) + P(A_2/H_2)P(H_2) + P(A_3/H_3)P(H_3)}$$
$$= \frac{0,015.0,4}{0,01.0,35 + 0,015.0,4 + 0,008.0,25} = \frac{12}{23}$$

Xác suất phế phẩm đó là của máy 3 là:

$$P(H_3/A) = \frac{P(A_3/H_3)P(H_3)}{P(A_1/H_1)P(H_1) + P(A_2/H_2)P(H_2) + P(A_3/H_3)P(H_3)}$$
$$= \frac{0,008.0,25}{0,01.0,35 + 0,015.0,4 + 0,008.0,25} = \frac{4}{23}$$

Vậy nếu lấy được phế phẩm, nhiều khả năng sản phẩm đó do máy 2 sản xuất.

Bài 41

a) Gọi H_1, H_2 lần lượt là biến cố lấy được sản phẩm là sản phẩm của máy 1, 2 .
Gọi A_1, A_2 lần lượt là biến cố lấy được phế phẩm khi lấy được sản phẩm từ máy 1,2.
Gọi A là biến cố lấy được phế phẩm. Ta có: $A = A_1 + A_2$
- Vì A_1 và H_1 là 2 biến cố phụ thuộc nên xác suất của biến cố A_1 là:

$$P(A_1) = P(A_1/H_1).P(H_1)$$

Tương tự:

$$P(A_2) = P(A_2/H_2).P(H_2)$$

- Theo công thức xác suất đầy đủ ta có xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = P(A_1/H_1).P(H_1) + P(A_2/H_2).P(H_2) = \frac{1}{3}.0,1 + \frac{2}{3}.0,15 = \frac{4}{30}$$

b)Theo công thức Bayes, xác suất chính phẩm đó do máy 2 sản xuất ra là:

$$P(H_2/\bar{A}) = \frac{P(\overline{A_2}/H_2).P(H_2)}{P(\overline{A_1}/H_1).P(H_1) + P(\overline{A_2}/H_2).P(H_2)} = \frac{0,85.\frac{2}{3}}{0,9.\frac{1}{3} + 0,85.\frac{2}{3}} = \frac{17}{26}$$

Bài 42

Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là biến cố đối tượng bảo hiểm thuộc loại ít rủi ro; rủi ro trung bình; rủi ro cao.
Gọi A là biến cố đối tượng bảo hiểm gặp rủi ro.
a) Theo công thức xác suất đầy đủ, tính được $p(A) = 0,175$
b) Theo công thức Bayes ta tính được xác suất người không gặp rủi ro thuộc loại ít rủi ro:

$$p\left(H_1 | A\right) = 0,2303$$

Bài 43

a) Gọi H_1, H_2 lần lượt là biến cố bi lấy ra thuộc hộp 1, hộp 2. Dễ thấy $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$

Gọi A là biến cố lấy được bi đỏ, theo công thức tổng quát, ta có xác suất lấy được bi đỏ là:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,5.\frac{8}{11} + 0,5.\frac{10}{14} \approx 0,721$$

b)
Gọi H_i là biến cố hộp lấy ra là hộp i (i= 1; 2).
Gọi B là biến cố trong 2 bi lấy ra có 1 bi đỏ.

$$P(H_1) = P(H_2) = 0,5$$

$$p\left(B | H_1\right) = \frac{24}{55}; \quad p\left(B | H_2\right) = \frac{40}{91}$$

$$P(B) = P(H_1)P(B/H_1) + P(H_2)P(B/H_2) = 0,437$$

c) Gọi H_1 là biến cố viên bi lấy từ hộp 1 là bi đỏ
Gọi H_2 là biến cố viên bi lấy từ hộp 1 là bi vàng
Gọi C là biến cố hai bi lấy ra có bi đỏ

$$p(C) = p\left(H_1\right)p\left(C | H_1\right) + p\left(H_2\right)p\left(C | H_2\right) = 0,9324$$

d) Gọi H_1 là biến cố 2 viên bi lấy từ hộp 1 là 2 bi đỏ
Gọi H_2 là biến cố 2 viên bi lấy từ hộp 1 là 1 bi vàng và 1 bi đỏ
Gọi H_3 là biến cố 2 viên bi lấy từ hộp 1 là 2 bi vàng
Gọi D là biến cố 2 viên bi lấy từ hộp 2 là 2 bi đỏ
Ta có:

$$p(D) = p\left(H_1\right)p\left(D | H_1\right) + p\left(H_2\right)p\left(D | H_2\right) + p\left(H_3\right)p\left(D | H_3\right) = 0,5005$$

Bài 44

a) Gọi H_i là biến cố có i phế phẩm trong lô hàng ;$i = \overline{0,7}$, do số phế phẩm là đồng khả năng nên $P(H_i) = \frac{1}{8}, \forall i = \overline{0,7}$.

Gọi A là biến cố lần đầu lấy được 3 sản phẩm thì có 2 phế phẩm.

Có $P(A/H_i) = 0;\ \forall i = 0,1,7$ do 3 trường hợp này đều ko thỏa mãn giả thiết lấy được 2 phế phẩm và 1 chính phẩm.

$P(A/H_i) = \frac{C_i^2.C_{7-i}^1}{C_7^3}, \forall i = \overline{2,6}$

Vậy

$$P(A) = \sum_{i=0}^{7} P(A/H_i).P(H_i) = \frac{1}{8}\sum_{i=2}^{6}\frac{C_i^2.C_{7-i}^1}{C_7^3} = 0,25$$

Xác suất để hộp có i phế phẩm là:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i).P(H_i)}{P(A)}$$

Ta chỉ xét với $i = \overline{2,6}$ nhận thấy xác suất để hộp có 5 phế phẩm là lớn nhất.
Vậy số phế phẩm nhiều khả năng nhất còn lại là 3.
b) Gọi B là biến cố lấy thêm được phế phẩm.
Ta có :

$$P(B) = \sum_{i=0}^{7} P(B/A.H_i).P(H_i/A)$$

Dễ thấy $P(H_i/A) = 0, \forall i = 0,1,7$
Áp dụng câu a) ta có

$$P(H_2/A) = \frac{1}{14};\ P(H_3/A) = \frac{6}{35}; P(H_4/A) = \frac{9}{35}; P(H_5/A) = \frac{2}{7}; P(H_6/A) = \frac{3}{14}$$

Vậy xác suất lấy được phế phẩm là:

$$P(B) = \frac{1}{14}.0 + \frac{6}{35}.\frac{1}{4} + \frac{9}{35}.\frac{2}{4} + \frac{2}{7}.\frac{3}{4} + \frac{3}{14}.1 = 0,6$$

Bài 45

a.Gọi A là biến cố sinh viên mua phải cây viết xấu
Dễ thấy P(A)=0,5.0,01+0,3.0,02+0,2.0,03=0,017
Vậy xác suất sinh viên mua phải cây viết xấu là 0,017
b.Gọi B là biến cố cây viết do phân xưởng 1 sản xuất là cây viết xấu
Áp dụng công thức Bayer ta có
P(B)=$\frac{0,5.0,01}{0,017} = 0,3$

Bài 46

a.Gọi A là biến cố lấy nn 1 sản phẩm thì sản phẩm đó là chính phẩm
Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(A) = \frac{1}{2}.0,6 + \frac{1}{2}.0,7 = 0,65$$

b.Gọi B là biến cố lấy được chính phẩm từ lô 1
Áp dụng công thức Bayer ta có:

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2}.0,6}{0,65}.\frac{5}{9} + \frac{\frac{1}{2}.0,7}{0,65}.\frac{6}{9} = \frac{8}{13}$$

Bài 47

a) Gọi A là biến cố "trong 8 sản phẩm có 2 phế phẩm"
H_i là biến cố "8 sản phẩm này là của nhà máy thứ i", i=1,2,3
$P(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = 1/3$
Ta có H_1, H_2, H_3 lập thành nhóm đầy đủ.

$A = AH_1+ AH_2+ AH_3$

$$P(A) = p(H_1)\, p(A|H_1)+ p(H_2)\, p(A|H_2)+ p(H_3)\, p(A|H_3)$$
$$= \frac{1}{3}C_8^2(0,1)^2(0,9)^6 + \frac{1}{3}C_8^2(0,1)^2(0,9)^6 + \frac{1}{3}C_8^2(0,2)^2(0,8)^6$$
$$\approx 0,197$$

$$P(H_1|A) = \frac{p(H_1)p(A|H_1)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3}C_8^2(0,1)^2(0,9)^6}{0,197} \approx 0,25 = p(H_1')$$

$$P(H_2|A) = \frac{p(H_2)p(A|H_2)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3}C_8^2(0,1)^2(0,9)^6}{0,197} \approx 0,25 = p(H_2')$$

P(H$_3$|A) = $\dfrac{p(H_2)p(A|H_2)}{p(A)} = \dfrac{\frac{1}{3}C_8^2(0,2)^2(0,8)^6}{0,197}$ ≈0,50 = p(H$_3$')

Khả năng thuộc máy 3 nhiều hơn.

b) Gọi B là biến cố "trong 8 sản phẩm tiếp theo do máy đó sản xuất lại có 2 phế phẩm"

Ta có:

$$B = BH_1^{'} + BH_2^{'} + BH_3^{'}$$

$$p(B) = p(H_1^{'})p(B|H_1^{'}) + p(H_2^{'})p(B|H_2^{'}) + p(H_3^{'})p(B|H_3^{'})$$

$$= 0,25.C_8^2(0,1)^2(0,9)^6 + 0,25.C_8^2(0,1)^2(0,9)^6 + 0,5.C_8^2(0,2)^2(0,8)^6$$

$$= 0,221$$

Bài 48

Gọi H$_i$ (i=0,1,…,8) là biến cố lô hàng có i chính phẩm: $p(H_i) = 1/9$.

Gọi A là biến cố lần đầu lấy 4 SF được 3 CP và 1 PP

$$p(A) = \sum_{i=0}^{8} p(H_i).p(A|H_i) = \frac{126}{630} = 0,2$$

Gọi B là biến cố lấy tiếp 3 SF thì được 1 CP và 2 PP

$$p(B) = \sum_{i=0}^{8} p(H_i/A).p(B|H_iA)$$

P(H$_0$|A)= P(H$_1$|A)= P(H$_2$|A)= P(H$_8$|A)=0

$p(H_3/A) = \dfrac{5}{126}$ $\qquad$ $p(B/H_3A) = 0$

$p(H_4/A) = \dfrac{16}{126}$ $\qquad$ $p(B/H_4A) = \dfrac{3}{4}$

$p(H_5/A) = \dfrac{30}{126}$ $\qquad$ $p(B/H_5A) = \dfrac{2}{4}$

$p(H_6/A) = \dfrac{40}{126}$ $\qquad$ $p(B/H_6A) = 0$

$p(H_7/A) = \dfrac{35}{126}$ $\qquad$ $p(B/H_7A) = 0$

$$\Rightarrow p(B) = \frac{16}{126}.\frac{3}{4} + \frac{30}{126}.\frac{2}{4} = 0,214$$

Bài 49.

Gọi A là biến cố người đó chấp nhận mua hộp bóng đèn.

Ta có số cách chọn 2 bóng từ 7 bóng không hỏng là C_7^2

Số trường hợp đồng khả năng là C_{10}^2

Vậy ta có $P(A) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$

Bài 50

a.Gọi M là biến cố cổ phiếu tăng giá

Do A, B, C là các biến cố độc lập:

P(M) = 1- (1-0,6)x(1-0,7)x(1-0,8) =

b.Gọi A là biến cố cổ phiếu A tăng giá
B là biến cố cổ phiếu B tăng giá
C là biến cố cổ phiếu C tăng giá
D là biến cố có 1 cổ phiếu tăng giá,ta thấy các biến cố này xung khắc với nhau và độc lập nên ta có:

$$D = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$$

Suy ra P(D)=0,6.0,3.0,2+0,4.0,7.0,2+0,4.0,3.0,8=0,188
c.Bài toán áp dụng công thức Bayer
Gọi E là biến cố có 2 cổ phiếu không tăng giá
F là biến cố trong 2 cổ phiếu không tăng giá,có B không tăng giá
Suy ra

$$E = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$

Theo công thức Bayer ta có:

$$P(F) = \frac{0,6.0,3.0,8}{0,6.0,7.0,2 + 0,6.0,3.0,8 + 0,4.0,7.0,8} = \frac{36}{113}$$

CHƯƠNG 2. BIẾN NGẪU NHIÊN

2.1. Các khái niệm cơ bản.

2.1.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên

"Biến" là cái có thể thay đổi. "Ngẫu nhiên" là khi người ta chưa xác định được cái gì đó, thì người ta gọi nó là ngẫu nhiên. Cái gì khi đã xác định được hết tính ngẫu nhiên. Một biến có thể là ngẫu nhiên với người này, nhưng không ngẫu nhiên với người khác, tùy theo lượng thông tin nhận được. Ví dụ, số thứ tiếng ngoại ngữ mà ông A nói được là một số xác định, không ngẫu nhiên đối với ông A, nhưng nó là một số không xác định, ngẫu nhiên với một ông B nào đó.

Biến ngẫu nhiên có thể nhận giá trị trong mọi phạm trù (hiểu từ phạm trù ở đây theo nghĩa thông thường chứ không phải theo nghĩa phạm trù toán học), ví dụ như màu sắc, hình dạng, phương hướng v.v. Tuy nhiên, bằng các ánh xạ (không ngẫu nhiên), chúng ta có thể chuyển việc nghiên cứu mọi biến ngẫu nhiên về việc nghiên cứu các biến ngẫu nhiên nhận giá trị là các số. Bởi vậy ở đây, khi nói đến một biến ngẫu nhiên mà không nói cụ thể nó nhận giá trị ở đâu, chúng ta sẽ hiểu là các giá trị của nó là các con số.

Ví dụ 2.1. Tại thời điểm đóng cửa thị trường chứng khoán Mỹ hôm 04/09/2009, giá cổ phiếu của hãng phần mềm máy tính Oracle (mã chứng khoán: ORCL) là 21,97 USD. Nó đã được xác định và không còn ngẫu nhiên. Thế nhưng tại thời điểm đó, thì giá cổ phiếu của Oracle cho lúc cuối ngày 18/09/2009 chưa được biết, và nó là một biết ngẫu nhiên đối với thị trường chứng khoán. Người ta cho rằng giá của nó vào ngày 18/09/2009 có thể lên trên 23 USD, mà cũng có thể xuống dưới 21 USD. Điều này thể hiện qua việc, tại thời điểm cuối ngày 04/09/2009 , quyền mua ORCL trước ngày 19/09/2009 với giá 23 USD (September 2009 call option at strike price 23) có giá 0,25 USD (nếu như ai cũng biết chắc rằng giá của ORCL vào thời điểm 18/09/2009 sẽ không vượt quá 23 thì cái quyền mua đó sẽ phải có giá bằng 0 vì không có giá trị gì), đồng thời quyền bán (put option) ORCL với giá 21 có giá là 0,30 USD. (Các thông tin về giá cả cổ phiếu và option có thể xem trên rất nhiều các trang web về chứng khoán).

Tương tự như với các số và các hàm số, ta có thể làm nhiều phép toán khác nhau với các biến ngẫu nhiên: cộng, trừ, nhân, chia, lấy giới hạn, tích phân, hàm hợp, v.v. Qua các phép toán như vậy, chúng ta có thể sinh ra các biến ngẫu nhiên mới từ các biến ngẫu nhiên cho trước.

Ví dụ 2.2. Một học sinh thi vào đại học phải thi 3 môn. Điểm của mỗi môn có thể coi là 1 biến ngẫu nhiên. Tổng số điểm cũng là một biến ngẫu nhiên, và nó là tổng của 3 biến ngẫu nhiên phía trước.

Định nghĩa biến ngẫu nhiên chính xác là định nghĩa thông qua hàm số đo được trên một không gian xác suất. Tuy nhiên, với cách định nghĩa khá hàn lâm như vậy khá khó hiểu, vì vậy trong cuốn sách này, chúng tôi chọn cách định nghĩa đơn giản hơn.

Định nghĩa: Biến ngẫu nhiên X là một biến số nhận các giá trị nào đó tương ứng với các kết quả có thể có của phép thử tuỳ thuộc vào sự tác động của các nhân tố ngẫu nhiên.

Kí hiệu: X,Y, Z,…

Các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên thường kí hiệu :

$x_1, x_2, ..., x_n, x$

$y_1, y_2, ..., y_n, y$

Ví dụ: Tung một con xúc sắc. Gọi X là số chấm xuất hiện. Khi đó X là biến ngẫu nhiên nhận giá một trong các giá trị có thể có là: 1, 2, 3, 4, 5, 6 với xác suất tương ứng là: $P(X = i) = \frac{1}{6}$ với $\mathbf{i = \overline{1,6}}$

2.1.2. Phân loại biến lượng ngẫu nhiên:

a) Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu các giá trị có thể có của nó lập nên một tập hợp hữu hạn hoặc đếm được.

Ví dụ:

Gọi X là số chấm xuất hiện khi tung xúc xắc: X=1,2,3,4,5,6.

Y là số khách vào một cửa hàng trong 1 ngày, Y = 0,1,2,3, ... +∞

b) Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu các giá trị có thể có của nó lấp đầy một khoảng trên trục số.

Đối với biến ngẫu nhiên liên tục, ta không thể liệt kê được hết các giá trị có thể có của nó.

Ví dụ: Gọi Y là "Sai số đo lường của một đại lượng vật lý" thì Y là biến ngẫu nhiên liên tục.

VÍ DỤ*:* X= ‘Tổng cầu của thị trường về xi măng’

$Y \in$ (25 triệu tấn; 40 triệu tấn)

Y = ‘Lãi suất cổ phiếu của một công ty’

$Y \in$ (5%; 20%)

2.2. Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Quy luật phân phối xác suất của BNN là sự tương ứng giữa các giá trị có thể có của nó và các xác suất tương ứng với giá trị đó.

2.2.1. Bảng phân phối xác suất:

Bảng phân phối xác suất chỉ dùng để mô tả quy luật phân phối xác suất của BNN rời rạc.

a) ĐN: Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc với một trong các giá trị có thể có là: $x_1, x_2, …, x_n$ với xác suất tương ứng là $p_1, p_2, …, p_n$ thì bảng phân phối xác suất của X có dạng:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

b) Tính chất của bảng

i) $\mathbf{0 \le p_i \le 1}$ $\quad$ $\mathbf{(i=\overline{1,n})}$

ii) $\mathbf{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$

c) Ví dụ

VÍ DỤ1: Hai người cùng bắn vào một bia độc lập nhau. Xác suất bắn trúng tương ứng là 0,7 và 0,8. Cho mỗi người bắn một viên đạn. Lập bảng phân phối xác suất của số viên đạn bắn trúng.

Gọi X là số viên bắn trúng. X nhận một trong các giá trị 0, 1, 2.

Gọi A_i là biến cố xạ thủ thứ i bắn trúng bia

Khi đó: $p(A_1)=0,7$; $p(A_2)=0,8$; $p(\overline{A_1})=0,3$; $p(\overline{A_2})=0,2$.

Ta có:

$(X=0) = \overline{A_1}.\overline{A_2} \quad \Rightarrow \quad P(X=0) = 0,3\times 0,2= 0,06$

$(X=1) = \overline{A_1}A_2 + A_1\overline{A_2} \quad \Rightarrow \quad P(X=1) = 0,7\times 0,2 + 0,3\times 0,8= 0,38$

$(X=2) = A_1A_2 \quad \Rightarrow \quad P(X=2) = 0,7\times 0,8= 0,56$

Bảng phân phối xác suất của X:

X	0	1	2
P	0,06	0,38	0,56

VÍ DỤ2: Trong hộp có 10 sản phẩm trong đó có 6 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tìm quy luật phân phối xác suất của số chính phẩm được lấy ra.

Giải:

Gọi Y là "số chính phẩm được lấy ra trong 2 sản phẩm".

Y là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có, Y = 0, 1,2.

Xác suất P(Y=0) chính là xác suất để trong 2 sản phẩm lấy ra không có chính phẩm nào (được 2 phế phẩm). Theo định nghĩa cổ điển về xác suất ta có:

$$P(Y=0)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

Tương tự:

$$P(Y=1)=\frac{C_6^1\,C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

$$P(Y=2)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{5}{15}$$

Như vậy quy luật phân phối xác suất của Y có dạng:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

2.2.2. Hàm phân phối xác suất của biến lượng ngẫu nhiên.

Khái niệm hàm phân phối xác suất áp dụng được đối với cả biến ngẫu nhiên rời rạc và liên tục. Giả sử X là biến nhiên bất kỳ, x là một số thực nào đó. Xét biến cố "Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn x" kí hiệu (X<x). Hiển nhiên là x thay đổi thì xác suất P(X<x) cũng thay đổi theo, như vậy xác suất này là một hàm số của x.

a) Định nghĩa.

Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là F(x), ký hiệu F(x), là xác suất để biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn x, với x là một số thực bất kỳ. F(x) = P(X<x).

b) Tính chất

i) $0 \le F(x) \le 1$

ii) Hàm phân bố F(x) là hàm không giảm , tức là với $x_2>x_1$ thì: $F(x_2) \geq F(x_1)$

Chứng minh

i) Hiển nhiên vì F(x) là xác suất biến ngẫu nhiên nhận giá trị về bên trái điểm x.

ii) Với $x_1 < x_2$: $F(x_2) = p(X<x_2) = p(X<x_1) + p(x_1 \le X<x_2) = F(x_1) + p(x_1 \le X<x_2)$

Nên

$$p(x_1 \le X<x_2) = F(x_2) - F(x_1) \ge 0$$

Suy ra đpcm

Hệ quả 1: $P(a \le X< b) = F(b) - F(a)$.

Hệ quả 2: Xác suất để biến ngẫu nhiên liên tục X nhận giá trị xác định bằng không: $P(X=x_0) = 0$

Hệ quả 3: $P(a \le X \le b) = P(a \le X<b) = P(a<X \le b) = P(a<X<b)$

vi) Ta có biểu thức giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

Hệ quả: Nếu X chỉ nhận giá trị trong [a,b] thì với $x \le a$, $F(x) = 0$,

và với $x>b$, $F(x)=1$.

c) Ý nghĩa của hàm phân bố xác suất

Hàm phân bố xác suất F(x) phản ánh mức độ tập trung xác suất về bên trái của điểm x.

2.2.3. Hàm mật độ xác suất.

a). Định nghĩa.

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X (ký hiệu là f(x)) là đạo hàm bậc nhất của hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên đó:

$f(x) = F'(x)$.

b) Tính chất của hàm mật độ xác suất.

i) Hàm mật độ xác suất luôn không âm: $f(x) \ge 0 \quad \forall x$

ii) Xác suất để biến ngẫu nhiên liên tục X nhận giá trị trong khoảng (a,b) bằng tích phân xác định của hàm mật độ xác suất trong khoảng đó:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$$

iii) Hàm phân bố xác suất F(x) của biến ngẫu nhiên liên tục X bằng tích phân suy rộng của hàm mật độ xác suất trong khoảng $(-\infty, x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

iv) Tích phân suy rộng trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ của hàm mật độ xác suất bằng 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Chú ý: Tính chất 1 và tính chất 4 dùng để kiểm tra một hàm số f(x) có thể là hàm mật độ xác suất được không.

c) Ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hàm số f(x) = x^3. Hàm f(x) có thể là hàm mật độ xác suất được không?

Giải:

Khi x< 0, f(x) = x^3< 0 không thoả mãn tính chất 1, do đó f(x) không thể là hàm mật độ xác suất.

Ví dụ 2: Cho hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ kx & x \in (0,1) \end{cases}$$

a) Tìm k.

b) Tìm P(0,5<X<2)

c) Khi thực hiện 2 phép thử độc lập thì xác suất để cả hai lần ta đều có 0,5<x<2 là bao nhiêu.

Giải:

a) f(x) là hàm mật độ xác suất nên: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Lại có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kxdx + \int_{1}^{+\infty} 0dx$$

$$= k\int_{0}^{1} xdx = \frac{k}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{k}{2}\left(1^2 - 0^2\right)$$

$$= \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} = 1 \qquad \Rightarrow k = 2$$

Với k =2, dễ thấy f(x) ≥ 0, ∀ x

b) $P(0,5 < x < 2) = \int_{1/2}^{2} f(x)dx = \int_{1/2}^{1} 2xdx + \int_{1}^{2} 0dx = x^2\Big|_{1/2}^{1} = 1 - 0,25 = 0,75$

c) Gọi A_i là biến cố "Ở phép thử thứ i, ta có 0,5<X<2" (i = 1,2).

Khi đó $P(A_1) = P(A_2) = 0,75$

A là biến cố "Cả hai phép thử đều có 0,5<X<2". Khi đó:

$$A = A_1 \times A_2 \;\Rightarrow\; P(A) = P(A_1).P(A_2) = 0,75^2 = 0,5625.$$

2.3. Các tham số đặc trưng của các biến lượng ngẫu nhiên.

2.3.1. Kì vọng toán.

a) Định nghĩa kì vọng toán

Giả sử biến lượng ngẫu nhiên rời rạc X nhận một trong các giá trị có thể có $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với các xác suất tương ứng $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Kì vọng toán của biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu là E(X) là tổng các tích giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên với các xác suất tương ứng là: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Nếu X là biến lượng ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ xác suất f(x) thì kỳ vọng toán E(X) được xác định bằng biểu thức: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

VÍ DỤ: Tìm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất

X	5	6	7	8	9	10
p	$\frac{100}{2000}$	$\frac{500}{2000}$	$\frac{700}{2000}$	$\frac{300}{2000}$	$\frac{150}{2000}$	$\frac{250}{2000}$

Giải

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 5\times\frac{100}{2000} + 6\times\frac{500}{2000} + 7\times\frac{700}{2000} + 8\times\frac{300}{2000} + 9\times\frac{150}{2000} + 10\times\frac{250}{2000} = 7,325$$

Nhận xét: Nếu xét điểm trung bình của 2000 sinh viên, với thống kê điểm như sau

X	5	6	7	8	9	10
p	100	500	700	300	150	250

Tính được điểm trung bình là 7,325. Như vậy, với cỡ mẫu đủ lớn, có thể xấp xỉ kì vọng với trung bình số học.

VÍ DỤ: Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & khi\ \ 0<x<2 \\ 0 & khi\ \ x \notin (0,2) \end{cases}$$

Tìm E(X).

Giải

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{2} x.\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{3}$$

b) Tính chất

i) E(C) = C, C là hằng

ii) E(c.X) = c.E(X)

iii) E(X+Y) = E(X) + E(Y)

Hq: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

iv) Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì: E(X.Y) = E(X).E(Y).

Hq: Nếu n biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập lẫn nhau thì

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Ý nghĩa của kỳ vọng:

Tiến hành n phép thử. Giả sử X là đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị có thể $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với số lần nhận $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Giá trị trung bình của đại lượng ngẫu nhiên X trong n phép thử là

$$\bar{x} = \frac{k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n}{n} = \frac{k_1}{n}x_1 + \frac{k_2}{n}x_2 + \ldots + \frac{k_n}{n}x_n = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$$

với $f_i = \frac{k_i}{n}$ là tần suất để X nhận giá trị x_i.

Theo định nghĩa xác suất theo lối thống kê ta có $\lim_{n\to\infty} f_i = p_i$. Vì vậy với n đủ lớn ta có:

$$\tilde{x} \approx p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = E(x)$$

Ta thấy kỳ vọng của đại lượng ngẫu nhiên xấp xỉ với trung bình số học các giá trị quan sát của đại lượng ngẫu nhiên.

Ý nghĩa: *Kỳ vọng của bnn xấp xỉ bằng giá trị trung bình số học của các giá trị quan sát của biến ngẫu nhiên đó. Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.*

Ý nghĩa trong kinh tế:

- Nếu số lớn phép thử thì kỳ vọng phản ánh giá trị trung bình.
- Nếu xét trong 1 phép thử thì kỳ vọng phản ánh giá trị mong đợi.

Ví dụ: Theo thống kê xác suất để một người ở độ tuổi 40 sẽ sống thêm một năm nữa là 0,995. Một công ty bảo hiểm nhân thọ bán bảo hiểm một năm cho những người ở tuổi đó với giá 100 ngàn đồng. Nếu người mua bảo hiểm chết trong thời gian đó thì số tiền bồi thường là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền lãi trung bình của công ty khi bán mỗi thẻ bảo hiểm loại này là bao nhiêu?

Giải

Gọi X là tiền lãi công ty thu được khi bán mỗi thẻ bảo hiểm (đơn vị ngàn đồng).

X là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có của X là $X = -9900; 100$.

Bảng phân phối xác suất của X có dạng

X	-9900	100
P	0,005	0,995

Giá trì kì vọng $E(X) = 100.0,995 + (-9900).0,005 = 50$

Vậy tiền lãi trung bình của công ty khi bán mỗi thẻ bảo hiểm là 50 ngàn đồng

2.3.2. Phương sai

a) <u>Định nghĩa:</u> Phương sai của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là V(X) là kỳ vọng toán của bình phương sai lệch của biến ngẫu nhiên so với kỳ vọng toán của nó. $V(X) = E[X-E(X)]^2$.

Như vậy, nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một trong các giá trị có thể có $x_1, x_2, \dots, x_n$ với các xác suất tương ứng $p_1, p_2, \dots, p_n$ thì phương sai sẽ được xác định bởi công thức:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(X)\right]^2.p_i$$

Còn nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì phương sai được xác định bằng công thức:

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f(x)dx.$$

Người ta chứng minh được : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

b) Các tính chất.

i) V(C) = 0, C là hằng.

ii) $V(c.X) = c^2.V(X)$

iii) Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

V(C+X) = V(X)

V(X±Y) = V(X) + V(Y).

c) Ví dụ.

VÍ DỤ1: Biến lượng ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất sau:

X	0	1
P	q	p

Tìm E(X), V(X).

Giải:

E(X) = 0.q + 1.p = p

$E(X^2) = 0^2.q + 1^2.p = p$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

VÍ DỤ2: Cho hàm mật độ xác suất: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}.\sin x & x\in[0,\pi]\\ 0 & x\notin[0,\pi]\end{cases}$

i) Tính $P\left(X>\frac{\pi}{2}\right)$

ii) Tính E(X) và V(X).

Giải:

i) Ta có:

$$P\left(X>\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\sin xdx+\int_{\pi}^{+\infty}0dx=-\frac{1}{2}cos\,x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=-\frac{1}{2}\left(cos\pi-cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

ii) Ta có:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x.0.dx+\int_{0}^{\pi}x\frac{1}{2}\sin xdx+\int_{\pi}^{+\infty}x.0.dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}xd\left(\cos x\right)=-\frac{1}{2}x.cosx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos xdx=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\sin x\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Dùng tích phân từng phần làm tương tự, ta được: $E\left(X^2\right) = \frac{1}{2}\left[\pi^2 - 4\right]$

$$\Rightarrow V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\pi^2 - 4\right] - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

d) Ý nghĩa của phương sai: Ta thấy X-E(X) là độ lệch khỏi giá trị trung bình nên Var(X) = E{[X-E(X)]^2} là độ lệch bình phương trung bình. Do đó phương sai phản ánh mức độ phân tán các giá trị của đại lượng ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.

2.3.3. Độ lệch chuẩn

Định nghĩa: Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là σ_X , là căn bậc hai của phương sai.

$$\sigma_X = \sqrt{V\left(X\right)}.$$

2.3.4. Hệ số biến thiên

$$CV = \left|\frac{\sigma_X}{E(X)}\right| \times 100(\%) \ khi\, E(X) \neq 0$$

CV đo tỷ lệ phần trăm các biến thiên của biến ngẫu nhiên so với giá trị trung bình.

Ý nghĩa: Nếu độ lệch chuẩn phản ánh mức độ biến động tuyệt đối thì hệ số biến thiên phản ánh mức độ biến động tương đối của các giá trị của biến ngẫu nhiên so với giá trị trung bình của nó. Hệ số biến thiên đo tỷ lệ phần trăm các biến thiên của biến ngẫu nhiên X so với giá trị trung bình.

VÍ DỤ: X là số chính phẩm

E(X) = 1,2 CP

V(X)=0,427 CP^2

σ_X = 0,653 CP

CV_X = 54,4%

2.3.4. Giá trị tới hạn

Định nghĩa: Giá trị tới hạn mức α của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là x_α là giá trị của X thoả mãn điều kiện: $P(X > x_\alpha) = \alpha$.

2.3.5. Trung vị (median).

a) Định nghĩa: Trung vị, kí hiệu là m_d là giá trị nằm chính giữa tập hợp các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên. Nói cách khác, đó là giá trị chia phân phối của biến ngẫu nhiên thành hai phần bằng nhau.

Số trung vị (tiếng Anh: *median*) là một số tách giữa nửa lớn hơn và nửa bé hơn của một mẫu, một quần thể, hay một phân bố xác suất. Nó là giá trị giữa trong một phân bố, mà số số nằm trên hay dưới con số đó là bằng nhau. Điều đó có nghĩa rằng 1/2 quần thể sẽ có các giá trị nhỏ hơn hay bằng số trung vị, và một nửa quần thể sẽ có giá trị bằng hoặc lớn hơn số trung vị.

Để tìm *số trung vị* của một danh sách hữu hạn các số, ta xếp tăng dần tất cả các quan sát, rồi lấy gí trị nằm giữa danh sách. Nếu số quan sát là số chẵn, người ta thường lấy trung bình của hai giá trị nằm giữa.

b) Tính chất.

- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì giá trị X_i sẽ là trung vị m_d nếu thoả mãn điều kiện:

$$F(X_i) \le 0,5 < F(X_{i+1})$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì trung vị m_d là giá trị thoả mãn điều kiện:

$$\int_{-\infty}^{m_d} f(x)dx = 0,5$$

2.3.6. Mốt

a) Định nghĩa:

Mốt, ký hiệu là m_0 là giá trị của biến ngẫu nhiên tương ứng với:

1. Xác suất lớn nhất nếu là biến ngẫu nhiên rời rạc.
2. Cực đại của hàm mật độ xác suất nếu là biến ngẫu nhiên liên tục.

b) Ví dụ:

Tìm Trung vị và Mốt của biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất sau:

X	20	21	22	23	24	25
P	0,3	0,25	0,18	0,14	0,1	0,03

Giải:

Để tìm trung vị, trước hết ta xây dựng hàm phân bố xác suất của X.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 20 \\ 0,3 & 20 < x \le 21 \\ 0,55 & 21 < x \le 22 \\ 0,73 & 22 < x \le 23 \\ 0,87 & 23 < x \le 24 \\ 1 & x > 25 \end{cases}$$

Từ đó $m_d = 21$, $m_0 = 20$.

•Hai BNN độc lập:

- Nhắc lại hai biến cố độc lập

  A, B độc lập ⇔ P(AB) = P(A).p(B)

- Xét hai biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất như sau

X	2	5
p_x	0,3	0,7

Y	1	3	4
p_Y	0,1	0,5	0,4

Biến cố $(X=x_i)$ và $(Y=y_j)$ độc lập ⇔

⇔ $P[(X=x_i),(Y=y_j)]=P[X=x_i,Y=y_j]=P(X=x_i).P(Y=y_j),\ \forall i,j$

• Thực hành: khi thực hiện phép thử mà việc X nhận các giá trị x_i không ảnh hưởng đến việc Y nhận các giá trị y_j, và ngược lại thì ta nói X, Y độc lập.
VÍ DỤ: Tung xx, X='số chấm xh lần1', Y='số chấm xh lần2'

Ví dụ: Chứng minh E(X-Y) = E(X) – E(Y)
E(aX+b) = aE(X) + b
Ví dụ: Cho 2 biến ngẫu nhiên độc lập có bảng phân phối xác suất như sau

X	2	5
p_x	0,3	0,7

Y	1	3	4
p_Y	0,1	0,5	0,4

a) Tìm E(X+Y), E(XY) theo 2 cách
b) Tìm V(X+Y) theo 2 cách

Giải

X+Y	3	5	6	6	8	9
p	0,03	0,15	0,12	0,07	0,35	0,28

X+Y	3	5	6	8	9
p	0,03	0,15	0,19	0,35	0,28

XY	2	6	8	5	15	20
P	0,03	0,15	0,12	0,07	0,35	0,28

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

X	*0*	*1*	*2*	*3*
p	*0,15*	*0,45*	*0,3*	*0,1*

Tìm Mod(X), E(X), V(X), p(-1<X<2), $p\left(\left|X-E(X)\right|<0,5\right)$, $p\left(\left|X-E(X)\right|>0,8\right)$.

2. Cho biến ngẫu nhiên X có luật phân phối xác suất:

X	*0*	*1*	*4*	*6*
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

Tìm phương sai của Y = 5X + σ_X, $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$.

3. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases} kx^3 \text{ khi } 0 \le x \le 1 \\ 0 \quad \text{khi } x \notin [0,1] \end{cases}$$

a) Tìm E(X), V(X), Mod(X), Median(X), $p\left(\left|X-E(X)\right|<0,5\right)$.

b) Cho $Y=2\sqrt{X}$ *, tìm hàm mật độ của Y. Tính* $p\left(\frac{1}{2}<Y<2\right)$*, E(Y).*

4. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ

$$f(x)=\begin{cases} k(1-x^2) \text{ khi } |x|\le 1 \\ 0 \qquad \text{khi } |x|>1 \end{cases}$$

a) Tìm Mod(X), E(X), V(X).

b) Cho Y = 3X$^{2\cdot}$ *Tìm hàm mật độ, kì vọng của Y.*

6. Một trạm được cung cấp Gas 1 lần trong một tuần. Dung lượng gas bán trong một tuần của trạm là X (đơn vị: ngàn thùng) có hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases} 5(1-x)^4 \text{ khi x} \in (0,1) \\ 0 \qquad \text{khi x} \notin (0,1) \end{cases}$$

Dung lượng kho chứa là bao nhiêu để xác suất trong một tuần trạm hết gas là 5%.

a:Find a: P(X>a)=0.05

P(X>a) = $\mathrm{p(X>a)}=\int_a^{+\infty} \mathrm{f(x)dx}=0.05$

$$\int_a^{+\infty} 5(1-\mathrm{x})^4\mathrm{dx}=\int_a^1 5(1-\mathrm{x})^4\mathrm{dx}=0.05$$

7. Một người bắn 3 viên đạn độc lập với nhau vào một chiếc bia với xác suất trúng bia của mỗi viên là 0,7. Hãy lập bảng phân phối xác suất của số viên đạn trúng bia.

8. Một sinh viên phải thi 3 môn một cách độc lập với nhau. Xác suất nhận được cùng một điểm số nào đó ở cả ba môn đều như nhau. Xác suất để thi một môn được điểm 8 là 0,18; dưới điểm 8 là 0,65. Xác suất để thi cả ba môn đều được điểm 10 là 0,000343. Tính xác suất để sinh viên thi 3 môn được ít nhất là 28 điểm. Điểm thi được cho theo thang điểm 10, không có điểm lẻ.

9. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất như sau:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & khi & x\le 2 \\ Cx-1 & khi & 2<x\le 4 \\ 1 & khi & x>4 \end{cases}$$

a) Căn cứ vào biểu thức này, hãy cho biết miền giá trị có thể có của X là khoảng nào?

b) Hãy xác định giá trị cụ thể của C

c) Hãy tính xác suất để X nhận giá trị nhỏ hơn 3

d) Hãy tính xác suất để X nhận giá trị lớn hơn 3,5

e) Hãy tính xác suất để X nhận giá trị nằm trong khoảng (2,5; 3,5)

f) Thực hiện 3 phép thử độc lập về biến ngẫu nhiên này. Tính xác suất trong đó X nhận một giá trị trong khoảng câu e.

g) Thực hiện 5 phép thử độc lập về biến ngẫu nhiên này. Tính xác suất trong đó X nhận hai giá trị trong khoảng câu e.

10. Hộp sản phẩm có 8 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp để mua.

a) Gọi X là số sản phẩm loại A trong 2 sản phẩm. Tìm phân phối xác suất của X.

b) Giá của mỗi sản phẩm loại A là 10 ngàn đồng, mỗi sản phẩm loại B là 8 ngàn đồng. Gọi Y là tổng số tiền người khách phải trả. Tìm phân phối xác suất của Y.

11. Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

a) Tìm phân phối xác suất của $Y = X^2 - X + 2$

b) Tính E(Y)

12. *Cho hai hộp sản phẩm*

Hộp 1 có 10 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm.

Hộp 2 có 12 sphẩm trong đó có 4 phế phẩm.

a) Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm của hộp 1. Gọi X là số phế phẩm lấy được. Lập bảng phân phối xác suất của X. Tìm Mod(X), E(X), V(X) và hàm phân phối của X.

b) Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một sản phẩm. Gọi Y là số phế phẩm có được. Lập bảng phân phối xác suất của Y.

c) Từ hộp 1 lấy 2 sản phẩm bỏ vào hộp 2. Sau đó từ hộp 2 lấy ra 2 sản phẩm. Lập bảng phân phối xác suất của số chính phẩm Z lấy được. Tìm số chính phẩm lấy được nhiều khả năng nhất khi lấy 2 sản phẩm như trên.

d) Lấy ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm. Tìm xác suất để sai lệch giữa số chính phẩm được lấy ra và kì vọng của nó không nhỏ hơn 1.

13. Cho 2 máy có tỉ lệ sản phẩm loại 1 tương ứng là 10%, 20%. Cho mỗi máy sản xuất ra 2 sản phẩm.

a) Tìm luật phân phối xác suất của số sản phẩm loại 1 trong 4 sản phẩm sản xuất ra.

b) Tìm số sản phẩm loại 1 tin chắc nhất; số sản phẩm loại 1 trung bình có trong 4 sản phẩm sản xuất ra.

14. Một thiết bị có 3 bộ phận hoạt động độc lập. Xác suất trong thời gian t các bộ phận này bị hỏng tương ứng là: 0,1; 0,12; 0,15. Tìm luật phân phối xác suất của số bộ phận bị hỏng của thiết bị trong thời gian t. Tìm xác suất trong thời gian t thiết bị có không quá 1 bộ phận bị hỏng.

15.

16. Nhu cầu hàng ngày về một loại thực phẩm tươi sống có bảng phân phối xác suất:

Nhu cầu (kg)	30	31	32	33	34
p	0,15	0,2	0,35	0,18	0,12

Mỗi kg mua vào với giá 2,5 ngàn và bán ra với giá 4 ngàn. Nếu bị ế đến cuối ngày bán hạ giá còn 1,5 ngàn mới bán hết hàng. Phải đặt mua hằng ngày bao nhiêu kg thực phẩm để có lãi nhất?

Bài 17. *Một người bán hàng sẽ đến 2 nơi, mỗi nơi chỉ mang 1 sản phẩm chào hàng để bán. Khả năng người đó bán được sản phẩm ở nơi thứ nhất là 0,3; còn nơi thứ hai là 0,6. Sản phẩm bán ở mỗi nơi, loại thượng hạng là 1000 USD, còn loại thường là 500 USD và đồng khả năng. Tìm phân phối xác suất tổng số tiền bán hàng của người đó.*

18. Một hộp kín có 4 thẻ đỏ, 4 thẻ đen và 6 thẻ trắng. Lấy ngẫu nhiên 3 thẻ từ hộp. Giả sử nếu lấy được mỗi thẻ đỏ được 1 điểm, mỗi thẻ đen trừ 1 điểm, mỗi thẻ trắng là 0 điểm. Tìm phân phối xác suất của số điểm có được.

19. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{khi } x \in (0,1) \\ 0 & \text{khi } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Cho E(X) =0,6. Tìm hàm F(x), tính $p\left(-1 < X < 0,5\right)$*; V(X).*

20. Một hộp có 10 sản phẩm gồm chính phẩm và phế phẩm. Gọi X là số phế phẩm có trong hộp. X có bảng phân phối xác suất như sau:

X	0	1	2
p	0,7	0,2	0,1

Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ hộp ra 2 sản phẩm . Gọi Y là số phế phẩm có trong 2 sản phẩm lấy ra. Tìm luật phân phối xác suất của Y, Y^2.

$p(H_0) = 0,7; \quad p(H_1) = 0,2; \quad p(H_2) = 0,1;$

$$p(Y = 0 \mid H0) = \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}$$

$$p(Y = 0 \mid H1) = \frac{C_9^2 C_1^0}{C_{10}^2}$$

$$p(Y = 0 \mid H2) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2}$$

$$p(Y = 0) = \sum_{i=0}^{2} p(H_i) \cdot p(Y = 0 \mid H_i)$$

21. Có 3 kiện hàng. Kiện thứ nhất có 8 sản phẩm loại A, 2 sản phẩm loại B; kiện hai có 6 sản phẩm loại A, 3 sản phẩm loại B; kiện thứ ba có 7 sản phẩm loại A, 1 sản phẩm loại B. Chọn ngẫu nhiên 1 kiện, rồi từ kiện đó chọn ngẫu nhiên không hoàn lại ra 2 sản phẩm thì được 2 sản phẩm loại A. Lấy tiếp từ kiện đã chọn ra 2 sản phẩm. Lấy tiếp từ kiện đã chọn ra 2 sản phẩm. Tìm luật phân phối xác suất của số sản phẩm loại A có trong 2 sản phẩm lấy lần sau.

22. Chủ một cửa hàng sửa chữa điện dân dụng thuê 5 thợ sửa chữa làm việc 40 giờ trên 1 tuần với lương 800 ngàn/1 tuần. Do nhu cầu sửa chữa tăng lên nên nhiều hợp đồng bị từ chối. Để xem xét có cần thuê thêm thợ nữa không, người chủ đã khảo sát nhu cầu sửa chữa X trong tuần có bảng phân phối như sau:

X (giờ/tuần)	*185*	*195*	*205*	*215*	*225*	*235*	*245*	*255*
P	*0,03*	*0,09*	*0,12*	*0,15*	*0,22*	*0,21*	*0,13*	*0,05*

Nếu mỗi giờ sửa chữa, chủ cửa hàng thu được 30 ngàn đồng thì có nên thuê thêm một người thợ nữa không? xét trong 2 trường hợp sau:

a) Năm người thợ cũ chỉ đồng ý làm đúng 40 giờ/tuần.

b) Năm người thợ cũ đồng ý làm thêm tối đa mỗi người 5 giờ/1 tuần với tiền công 25 ngàn/1 giờ làm thêm.

23. Theo dõi hiệu quả kinh doanh của một công ty qua nhiều năm, các chuyên gia thiết lập bảng phân phối xác suất của lãi suất đầu tư của công ti như sau:

X (%)	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
P	*0,08*	*0,12*	*0,2*	*0,3*	*0,18*	*0,1*	*0,02*

a) Khả năng đầu tư vào công ty đó để đạt lãi suất ít nhất 11% là bao nhiêu?

b) Tìm mức lãi suất nhiều khả năng nhất và mức lãi suất trung bình khi đầu tư vào công ty đó.

c) Tìm mức độ rủi ro khi đầu tư vào công ti đó.

24. Có hai hộp sản phẩm. Hộp 1 có 8 chính phẩm và 2 phế phẩm. Hộp 2 có 7 chính phẩm và 4 phế phẩm.

a) Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm của hộp 1 để kiểm tra. Gọi X là số phế phẩm lấy được. Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Lấy ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm để kiểm tra. Tìm số phế phẩm nhiều khả năng nhất có được trong 3 sản phẩm lấy ra.Tìm xác suất sai lệch giữa số phế phẩm lấy ra và kì vọng của nó không vượt quá 1,5.

c) Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp 1 và 1 sản phẩm từ hộp 2. Gọi Y là số chính phẩm lấy được. Tìm phân phối xác suất của Y.

d) Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm của hộp 1bỏ sang hộp 2, tiếp đó lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm của hộp 2 bỏ sang hộp 1, sau đó lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm từ hộp 1. Gọi Z là số phế phẩm có được. Tìm phân phối xác suất của Z.

25. Một hộp có 10 phiếu trong đó có 3 phiếu trúng thưởng. Nếu lấy ngẫu nhiên 3 phiếu từ hộp được mỗi phiếu trúng thưởng thì được thưởng 1 tặng phẩm. Gọi X là số tặng phẩm có được khi lấy 3 phiếu. Tìm số tặng phẩm đáng tin cậy nhất có được (xét hai trường hợp lấy có hoàn lại và không hoàn lại).

26. Một hộp có 4 bi đỏ, 6 bi vàng, 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp nếu được mỗi bi đỏ thì được 1 điểm, mỗi bi xanh bớt đi 1 điểm, được bi vàng thì được 0 điểm. Gọi X là tổng số điểm có được khi lấy 3 bi. Lập bảng phân phối xác suất của tổng số điểm có được khi lấy 3 bi.

27. Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối xác suất:

X	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

và Y = 2X-1. Tính p(Y<4),V(Y).

28. Có 3 kiện hàng. Kiện thứ nhất có 8 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B. Kiện thứ hai có 6 sản phẩm loại A và 4 sản phẩm loại B. Kiện thứ ba có 3 sản phẩm loại A và 7 sản phẩm loại B.

a) Chọn ngẫu nhiên mỗi kiện ra 1 sản phẩm. Tính xác suất để có ít nhất 1 sản phẩm loại A trong 3 sản phẩm lấy ra.

b) Chọn ngẫu nhiên 2 kiện, rồi từ 2 kiện đã chọn lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ mỗi kiện ra 1 sản phẩm. Tìm quy luật phân phối xác suất của số sản phẩm loại A có trong 2 sản phẩm lấy ra.

Bài 29

Tại một cửa hàng bán xe máy Honda người ta thống kê được số xe máy bán ra hàng tuần (X) với bảng phân phối xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P_X	0,05	0,12	0,17	0,08	0,12	0,2	0,07	0,02	0,07	0,02	0,03	0,05

Bài 2.12: (Trang 46)

Thực hiện 3 lần bắn bia với xác suất trúng bia tương ứng là 0,3; 0,4; 0,6 . Tìm kì vọng toán và phương sai của số lần bắn trúng bia.

Bài 30

Kinh nghiệm cho thấy số lượng của một loại sản phẩm mà một khách hàng mua có bảng phân phối xác suất như sau:

Số lượng sản phẩm	*0*	*1*	*2*	*3*
Xác suất tương ứng	*0,168*	*0,436*	*0,324*	*0,072*

a, Nếu mỗi sản phẩm được bán với giá 110 ngàn đồng và nhân viên bán hàng được hưởng 10% trên số sản phẩm bán được thì số tiền hoa hồng bình quân mà nhân viên bán hàng được hưởng từ mỗi khách hàng là bao nhiêu.
b, Tìm phương sai của số tiền hoa hồng đó và nêu ý nghĩa của kết quả thu được.

Bài 31

Một người từ nhà tới cơ quan phải đi qua 3 ngã tư, xác suất để người đó gặp đèn đỏ ở ngã tư tương ướng là 0,2; 0,4 và 0,5. Hỏi thời gian trung bình phải ngừng trên đường là bao nhiêu, biết rằng mỗi khi gặp đèn đỏ ngừoi ấy phải đợi chừng 3 phút.

Phần biến ngẫu nhiên liên tục

Bài 32

Nhu cầu hàng năm về loại hàng A là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau (đơn vị: ngàn sản phẩm)

$$f(x) = \begin{cases} k(30-x); x \in (0;30) \\ 0; x \notin (0;30) \end{cases}$$

a, Tìm k
b, Tìm xác suất để nhu cầu về loại hàng đó không vượt quá 12.000 sản phẩm trong 1 năm.
c. Tìm nhu cầu trung bình hàng năm về loại hàng đó.

$$\int_0^{30} \frac{1}{450} x(30-x)\,dx = 10$$

Bài 33

Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x; x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ 0; x \notin (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

a) Tìm hệ số a.
b) Tìm P(0 ≤ X< π/4)
c) Tìm E(X)

Bài 34

Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân bố xác suất:

$$F(x)=\begin{cases}0; x\le 0\\ 1/2-k\cos x; 0<x\le\pi\\ 1; x\ge\pi\end{cases}$$

a) Tìm hệ số a.
b) Tìm P(0 ≤X< π/4)
c) Tìm E(X)

Bài 2.39: (Trang 57)

Biến ngẫu nhiên liênn tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases}(2/\pi)\cos^2 x; x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})\\ 0; x\notin(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

Tìm xác suất để trong 3 phép thử độc lập có 2 lần X nhận giá trị trong khảng (0; $\frac{\pi}{4}$).

Bài 35

Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}x^2/9; x\in(0;3)\\ 0; x\notin(0;3)\end{cases}$$

a) Hàm số trên có phải là hàm mật độ xác suất không
b) Nếu có thì tìm xác suất để trong 3 phép thử độc lập có ít nhất một lần X nhận giá trị trong khoảng (1,2).

Bài 36

Tỷ lệ mắc 1 loại bệnh trong một vùng dân cư là biến ngẫu nhiên liên tục và có hàm mật độ xs:

$$f(x)=\begin{cases}1/20; x\in(5;25)\\ 0; x\notin(5;25)\end{cases}$$

a) Tính $P(|X-10|>2,5)$
b) Tính tỉ lệ mắc bệnh trung bình và phương sai.

Phần bài tập tổng hợp

Bài 37

Giá hàng ngày trên thị trường thế giới về đường (đơn vị: USD/fao) có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0,78	0,79	0,8	0,81	0,82	0,83
P	0,05	0,1	0,25	0,4	0,15	0,15

a) Tìm xác suất để một ngày nào đó giá đường đạt ít nhất là 0,8 USD/fao
b) Tìm xác suất để một ngày nào đó giá đường thấp hơn 0,82 USD/fao

c) *Giả sử giá hàng ngày của đường là độc lập nhau, tìm xác suất để trong 2 ngày liên tiếp giá đường đều cao hơn 0,8 USD/fao.*

Bài 39

Lợi nhuận X thu được khi đầu tư 50 triệu đồng vào một dự án có bảng phân phối xác suất như sau (đơn vị : triệu đồng)

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

a, Tìm mức lợi nhuận có khả năng nhiều nhất khi đầu tư vào dự án đó
b, Việc đầu tư vào vụ án này có hiệu quả không? Vì sao?
c, Làm thế nào để đo được mức độ rủi ro của vụ đầu tư này? Hãy tìm mức độ rủi ro đó.

Bài 40

Lợi nhuận thu được từ 1 triệu đồng đầu tư vào công ty A (X_A) và công ty B *(X_B) có các bảng phân phối xác suất như sau:*

X_A	-500	-100	100	500	700
P_{X_A}	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

X_B	-200	50	100
P_{X_B}	0,1	0,6	0,3

a) *Nếu dự định đầu tư 10 triệu đồng thì lợi nhuận kì vọng khi đầu tư vào hai công ty A và công ty B* là bao nhiêu.
b) *Nếu dùng hệ số biến thiên như độ đo mức độ rủi ro của đầu tư thì việc đầu tư vào công ty nào rủi ro hơn.*

Bài 41

Một công ty thuê một luật sư trong một vụ kiện với hai phương án trả công như sau:

- *Phương án 1: Trả 5 triệu đồng bất kể thắng hay thua kiện*
- *Phương án 2: Trả 100 ngàn đồng nếu thua kiện và 15 triệu đồng nếu thắng.*

Luật sư đã chọn phương án 2. Vậy theo đánh giá của luật sư thì khả năng thắng kiện của công ty tối thiểu là bao nhiêu?

Bài 42

Trên một chuyến bay người ta thống kê được rằng có 0,5% hành khách bị mất hành lí và giá trị trung bình mà hành khách đòi bồi thường cho số hành lý bị mất trung bình là 600 ngàn đồng. Công ty hàng không muốn tăng thêm giá vé để bù đắp cho số tiền phải bồi thường cho số hành lý bị mất. Vậy công ty nên tăng giá vé thêm bao nhiêu? Tại sao?

Bài 43

Số lượng thuyền gỗ X mà một xưởng đóng thuyền có thể làm được trong một tháng có bảng phân phối xác suất như sau:

X	2	3	4	5	6	7	8
P_X	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,05	0,05

a, Tìm xác suất để trong tháng tới xưởng đó sẽ đóng được từ 4 đến 7 con thuyền.
b, Tìm hàm phân bố xác suất của X.

c, Dùng hàm phân bố xác suất, hãy tính xác suất để trong tháng tới xưởng đó sẽ đóng được không quá 6 con thuyền.
d, Số thuyền có khả năng nhiều nhất mà xưởng đó có thể đóng được trong tháng tới là bao nhiêu?
e, Giả sử việc đóng thuyền có chi phí cố định hàng tháng là 25 triệu đồng và chi phí bổ sung cho mỗi con thuyền là 5 triệu đồng. Hãy tìm chi phí bình quân hàng tháng của xưởng đó.

Bài 44

Số lượng sản phẩm hỏng mà một công nhân có thể làm ra trong 1 thángcó bảng phân phối xác suất như sau:

Số SP hỏng	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Xác suất	*0,01*	*0,09*	*0,3*	*0,2*	*0,2*	*0,1*	*0,1*

a, Tìm xác suất để trong 1 tháng người công nhân đó làm ra không quá 4 sản phẩm hỏng.
b, Giả sử số sản phẩm mà người công nhân đó phải làm bù bằng bình phương số sản phẩm hỏng mà người đó đã làm trong tháng. Tìm số sản phẩm phải làm bù bình quân mỗi tháng của người công nhân đó.

Bài 45

Số lượng xe TOYOTA mà một đại lý bán được trong 1 tuần có bảng phân phối xs:

Số xe bán được	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Xác suất	*0,1*	*0,1*	*0,2*	*0,2*	*0,3*	*0,1*

a, Tìm xác suất để đại lý đó bán được ít nhất 4 xe trong 1 tuần.
b, Giả sử chi phí cho hoạt động của đại lý bằng căn bậc hai của số xe bán được nhân với 3 triệu. Tìm chi phí trung bình cho hoạt động của đại lý mỗi tuần.

Bài 46

Qua kinh nghiệm, một cửa hàng bánh trung thu biết rằng dịp tết trung thu số bánh có thể bán được có bảng phân phối xác suất như sau:

Số bánh bán được	*30*	*31*	*32*	*33*	*34*	*35*
Xác suất	*0,15*	*0,2*	*0,35*	*0,15*	*0,1*	*0,15*

a, Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của số bánh bán được.
b, Nếu cửa hàng đặt mua 600 chiếc thì xác suất bán hết bánh là bao nhiêu, xác suất còn thừa lại là bao nhiêu.
c, Để có thể chắc chắn đến 95% là sẽ đủ bánh bán thì cửa hàng cần đặt mua bao nhiêu chiếc bánh.

Bài 47

Trong 900000 vé số phát hành thì có 20 giải trị giá 5 triệu, 150 giải trị giá 5 triệu và 1600 giải trị giá 1 triệu. Tìm số tiền lãi kì vọng của một ngừơi khi mua một vé biết giá vé là 5 ngàn đồng.

Bài 48

Nhu cầu hàng ngày về một loại thực phẩm tươi sống có phân phối xác suất như sau:

Nhu cầu (kg)	*30*	*31*	*32*	*33*	*34*	*35*
Xác suất	*0,15*	*0,2*	*0,35*	*0,15*	*0,1*	*0,15*

Mỗi thực phẩm mua vào với giá 2,5 ngàn và bán ra với giá 4 ngàn. Nếu bị ế đến cuối ngày phải bán hạ giá còn 1,5 ngàn mới bán được hết. Vậy phải đặt mua hàng ngày bao nhiêu kg thực phẩm để có lãi nhất.

Bài 51

Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \notin (0;\pi) \\ \dfrac{sinx}{2} & ; \quad x \in (0;\pi) \end{cases}$$

a, Tìm hàm phân bố xác suất F(x)
b, Tìm P(0<X<π/4)
c, Tìm E(X)

Bài 52

Một công ty cung cấp nguyên vật liệu gửi 5 giấy nợ đòi tới một xí nghiệp yêu cầu thanh toán tiền cho 5 đợt giao hàng vừa qua với số lượng hàng của các đợt không khac nhau nhiều lắm. Trong số 5 giấy đòi nợ này (mỗi giấy viết riêng cho từng đợt) có 2 giấy ghi sai số tiền phải thanh toán. Do đến hạn phải trả nợ ngân hàng, công ty yêu cầu xí nghiệp thanh toán ngay cho 3 đợt bất kì trong 5 đợt giao hàng ngay. Kế toán viên của xí nghiệp lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ra 3 giấy để kiểm tra và làm các phiếu chi.

Tính xác suất để trong 3 giấy lấy ra đó có ít nhất 1 giấy ghi sai số tiền phải thanh toán.

Bài 53

Xí nghiệp và công ty nói ở bài trên thỏa thuận với nhau rằng nếu kế toán viên của xí nghiệp phát hiện thấy có giấy đòi nợ nào trong số 3 tờ giấy được lấy ra mà ghi sai số tiền thì xí nghiệp có quyền hoãn trả số nợ của đợt giao hàng đó. Mỗi giấy bị hoãn trả sẽ làm thiệt cho công ty 5 triệu đồng do phải trả lãi nợ quá hạn cho ngân hàng.

Hãy xác định số tiền thiệt hại trung bình có thể xảy ra đối với công ty do phải trả lãi nợ quá hạn.

Bài 54

Tuổi thọ (tính theo giờ) của một loại van điện lắp trong 1 thiết bị là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 100 \\ \dfrac{100}{x^2} & ; \quad x > 100 \end{cases}$$

Tìm xác suất để 2 trong số 5 van điện này bị thay thế trong 150 giờ hoạt động đầu tiên biết rằng vệc hỏng của các van điện là độc lập với nhau.

Bài 55

Tuổi thọ (tính theo giờ) của một trò chơi điện tử bấm tay là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ ke^{-x/100} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó k là hằng số. Tính xác suất:
a) Tuổi thọ của trò chơi này nằm trong khoảng từ 50 đến 150 giờ
b) Tuổi thọ của trò chơi này ít hơn 100 giờ.

Bài 56

Tùy theo tình hình kinh tế trong nước mà trong năm tới một công ty thu được mức lãi (tính theo triệu đơn vị tiền tệ nước này) khi đầu tư vào 2 ngành A và B như sau:

Tình hình kinh tế	*Kém phát triển*	*Ổn định*	*Phát triển*
Ngành A	*20*	*80*	*120*
Ngành B	*-30*	*100*	*140*

Theo dự báo thì xác suất để nền kinh tế nước đang xét trong năm tới sẽ rơi vào các tình trạng tưng ứng như trên là 0,3; 0,5 và 0,2.

Vậy công ty nên đầu tư vào ngành nào để cho:

a) *Mức lãi kì vọng là cao hơn.*

b) *Độ rủi ro (phương sai của mức lãi) là ít hơn.*

Bài 57

Trong một cuộc thi người ta có hai hình thức sau:

- *Hình thức 1: mỗi người trả lời 2 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm.*
- *Hình thức 2: Nếu trả lời đúng câu thứ nhất mới được trả lời câu thứ hai, nếu không thì dừng. trả lời đúng câu thứ nhất được 5 điểm, trả lời đúng câu thứ hai được 10 điểm.*

Trong cả hai hình thưc thi, các câu trả lời sai đều không được điểm. Giả sử xác suất trả lời đúng cho mỗi câu đều là 0,75; việc trả lời đúng mỗi câu là đọc lập với nhau.

Nên chon hình thức nào để được số điểm trung bình lớn hơn.

60. Hộp có 10 bóng đèn gồm 5 bóng loại 100W, 3 bóng loại 60W, 2 bóng loại 30W. Lấy ngẫu nhiên 2 bóng. Gọi Y là tổng số của hai bóng này. Tìm kì vọng của Y.

61. Cơ quan dự báo khí tượng thuỷ văn chia thời tiết thành các loại "xấu", "bình thường", "tốt" với xác suất tương ứng là 0,25; 0,45; 0,3. Với tình trạng trên thì khả năng nông nghiệp được mùa tương ứng là 0,2; 0,6; 0,7. Nếu như sản xuất nông nghiệp được mùa thì mức xuất khẩu tương ứng với tình trạng trên là: 2,5 triệu tấn, 3,3 triệu tấn, 3,8 triệu tấn. Hãy tìm mức xuất khẩu lương thực có thể hi vọng.

62. Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối xác suất

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

và Y = 2X - 1. Tính P{Y<4}; EY, VY.

63. Một hộp có 12 sản phẩm trong đó có 4 phế phẩm, lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm từ hộp để kiểm tra. Tìm số phế phẩm tin chắc và số phế phẩm trung bình có được. Giải bài toán trong 2 trường hợp: lấy có hoàn lại; lấy không hoàn lại.

64. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 \text{ khi } x \in [0,3] \\ 0 \text{ khi } \notin [0,3] \end{cases}$$

a) Tìm kì vọng của X

b) Tìm hàm phân phối của X và tính $P\{X < 2\};\ P\{|X - EX| > 0{,}5\};\ P\{|X - EX| < 1\}$

65. Cho 2 máy, tỉ lệ sản phẩm loại A của hai máy tương ứng là 20%, 30%. Cho mỗi máy sản xuất lần lượt từng sản phẩm ra 2 sản phẩm.

a) Lập bảng phân phối xác suất của số sản phẩm loại A trong 4 sản phẩm sản xuất ra.

b) Tính số sản phẩm loại A tin chắc nhất; phương sai của số sản phẩm loại A trong 4 sản phẩm.

66. Trong ngày hội thi, mỗi công nhân dự thi sẽ sản xuất lần lượt 2 sản phẩm. Mỗi sản phẩm loại A sẽ được thưởng 10 ngàn đồng, mỗi sản phẩm không là loại A sẽ bị phạt 2 ngàn đồng. Giả sử một công nhân tham gia dự thi có khả năng sản xuất được sản phẩm loại A mỗi lần là 30%. Tìm luật phân phối xác suất số tiền mà công nhân này thu được.

67. Sản phẩm của một nhà máy khi sản xuất xong được đóng thành kiện mỗi kiện 5 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm loại I có trong mỗi kiện. Cho biết phân phối xác suất của X

X	2	3	4
P	0,3	0,5	0,2

a) Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ một kiện ra 2 sản phẩm để kiểm tra. Tìm phân phối xác suất của Y các sản phẩm loại I có trong 2 sản phẩm này.

b) Từ một kiện hàng do nhà máy sản xuất lấy ngẫu nhiên không hoàn lại 2 sản phẩm thì thấy có 1 sản phẩm loại I. Tính xác suất để trong kiện này còn lại 2 sản phẩm loại I.

c) Từ một kiện hàng do nhà máy sản xuất, lấy ngẫu nhiên không hoàn lại ra 3 sản phẩm thì thấy có 1 sản phẩm loại I. Tìm phân phối xác suất của số sản phẩm loại I có trong 2 sản phẩm còn lai trong kiện.

68. Có 3 hộp bi, mỗi hộp có 6 bi. Hộp thứ nhất có 2 bi đỏ, 4 bi vàng. Hộp thứ hai có 3 bi đỏ, 3 bi vàng. Hộp thứ ba có 1 bi đỏ, 5 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 2 trong 3 hộp, sau đó từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra 1 bi. Nếu lấy được 2 bi vàng được 1 điểm; lấy được 1 bi đỏ, 1 bi vàng được 2 điểm; 2 bi đỏ được 5 điểm. Tìm số điểm trung bình có được

69. Một nhân viên của cửa hàng nhận về 2 kiện sản phẩm, kiện thứ nhất có 6 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Kiện thứ hai có 5 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Nhân viên này lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm của kiện thứ nhất và 2 sản phẩm của kiện thứ hai để trưng bày.

a) Tìm luật phân phối xác suất của số sản phẩm loại A có trong 5 sản phẩm được trưng bày. Tìm số sản phẩm loại A trung bình và số sản phẩm loại A tin chắc nhất có trong 5 sản phẩm được trưng bày.

b) Sau khi chọn 5 sản phẩm trưng bày xong, nhân viên này đổ số sản phẩm còn lai của 2 kiện vào một chỗ. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ các sản phẩm này. Tính xác suất khách hàng mua được 2 sản phẩm loại A.

70. Tìm hàm mật độ của $Y=X^2$ biết hàm mật độ của X cho như sau:

a) $f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$

71. Tiền điện phải trả của một hộ gia đình trong 1 tháng là biến ngẫu nhiên có trung bình 16 USD và độ chênh lệch tiêu chuẩn 1 USD. Dùng bất đẳng thức Trêbưsep xác định số M nhỏ nhất để với xác suất 0,99 số tiền điện phải trả trong 1 năm không vượt quá M.

Hướng dẫn giải

1. Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

X	***0***	***1***	***2***	***3***
p	***0,15***	***0,45***	***0,3***	***0,1***

***Tìm** Mod(X), E(X), V(X), p(-1<X<2),* $p\left(|X-E(X)|<0,5\right)$, $p\left(|X-E(X)|>0,8\right)$.

<u>Giải:</u>

- $Mod(X) = m_o = 0.45$
- $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0.0,15 + 1.0,45 + 2.0,3 + 3.0,1 = 1.35$
- $E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 0^2.0,15 + 1^2.0,45 + 2^2.0,3 + 3^2.0,1 = 2.55$

$V(X) = E(X^2) - E(X) = 2.55 - 1.35^2 = 0.7275$

- $p(-1 < X < 2) = p(X=0) + p(X=1) = 0,15 + 0,45 = 0.6$
- $p\left(|X-E(X)|<0,5\right) = p\left(0,85 \le X \le 1.85\right) = p(X=1) = 0.45$
- $p\left(|X-E(X)|<0,5\right) = 1 - p\left(|X-E(X)|<0.8\right) = p\left(0,55 \le X \le 2.15\right) = p(X=1) + p(X=2) = 0.45 + 0.3 = 0.7$

2. Cho biến ngẫu nhiên X có luật phân phối xác suất:

X	***0***	***1***	***4***	***6***
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

***Tìm phương sai của** $Y = 5X + \sigma_X$, $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.*

Giải:

Áp dụng các công thức ta có:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i.p_i = 0.\frac{1}{8} + 1.\frac{4}{8} + 4.\frac{1}{8} + 6.\frac{2}{8} = 2,5$$

$$E(X^2) = \sum_{1}^{4} x_i^2.p_i = 0^2.\frac{1}{8} + 1^2.\frac{4}{8} + 4^2.\frac{1}{8} + 6^2.\frac{2}{8} = 11,5$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 11,5 - 2,5^2 = 5,25$$

$$Y = 5X + \sigma_X \Rightarrow V(Y) = V(5X + \sigma_X) = V(5X) + V(\sigma_X) = V(5X) = 5^2.V(X) = 5^2.5,25 = 131,25$$

3. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 \text{ khi } 0 \le x \le 1 \\ 0 \quad \text{khi } x \notin [0,1] \end{cases}$$

a) Tìm E(X), V(X), Mod(X), Median(X), $p\left(\left|X - E(X)\right| < 0,5\right)$.

b) Cho $Y = 2\sqrt{X}$ ***, tìm hàm mật độ của Y. Tính*** $p\left(\frac{1}{2} < Y < 2\right)$***, E(Y).***

Giải:

a) Theo tính chất của hàm mật độ xác suất ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} kx^3 dx = \frac{k.x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \int_{0}^{1} 4.x^5 dx = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{3} - 0,8^2 = 0,0267$$

- Hàm mật độ f(x) đạt cực đại khi x=1, nên Mod(X)=1.
- MedianX (m_d):

$$\int_{-\infty}^{m_d} f(x)dx = 0,5 \Leftrightarrow \int_{0}^{m_d} 4.x^3 dx = 0,5$$

$$\Leftrightarrow x^4 \Big|_0^{m_d} = 0,5 \Leftrightarrow m_d^4 = 0,5 \Leftrightarrow m_d = \sqrt[4]{0,5} \approx 0,841$$

- $P\left(\left|X - E(X)\right| < 0,5\right)$

$$\left|X - E(X)\right| < 0,5 \Leftrightarrow \left|X - 0,8\right| < 0,5 \Leftrightarrow 0,3 < X < 1,3$$

$$\Rightarrow P\left(\left|X - E(X)\right| < 0,5\right) = P\left(0,3 < X < 1,3\right) = \int_{0,3}^{1,3} f(x)dx = \int_{0,3}^{1} 4.x^3 = x^4 \Big|_{0,3}^{1} = 0,9919$$

b) Y là biến ngẫu nhiên liên tục.

Hàm phân phối xác suất của Y:

$$\mathrm{F_Y}\left(y\right) = p(Y < y) = p\left(2\sqrt{X} < y\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{khi } y \le 0 \\ p\left(0 \le X \le \dfrac{y^2}{4}\right) & \text{khi } 0 < y \le 2 \\ 1 & \text{khi } y > 2 \end{cases}$$

Trong đó:

$$p\left(0 \le X \le \frac{y^2}{4}\right) = \int_0^{\frac{y^2}{4}} 4x^3 dx = \frac{y^8}{256}$$

Do đó, hàm mật độ xác suất của Y là:

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^7}{32} & \text{khi } y \in (0,2) \\ 0 & \text{khi } y \notin (0,2) \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < Y < 2\right) = \int_{1/2}^{2} g(y)dy = \int_{1/2}^{2} \frac{y^7}{32}dy = \frac{y^8}{256}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{65535}{65536} = 0,9999$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y.f(y)dy = \int_0^2 \frac{y^8}{32}dy = \frac{y^9}{288}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{9}$$

4. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ

$$f(x)=\begin{cases} k(1-x^2) \text{ khi } |x|\le 1 \\ 0 \quad \text{khi } |x|>1 \end{cases}$$

a) Tìm Mod(X), E(X), V(X).

b) Cho Y = 3X$^{2.}$ Tìm hàm mật độ, kì vọng của Y.

Giải:

a) Theo tính chất hàm mật độ xác suất

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1} k(1-x^2)dx=k\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4.k}{3}\Rightarrow k=\frac{3}{4}$$

Vậy hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X có dạng:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}.\left(1-x^2\right) \text{ khi x} \in[-1,1] \\ 0 \qquad \text{khi x} \notin[-1,1] \end{cases}$$

Theo định nghĩa kì vọng toán và phương sai của biến ngẫu nhiên liên tục ta có:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}(x-x^3)dx=\frac{3}{4}.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx-[E(X)]^2=\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}\left(x^2-x^4\right)=\frac{3}{4}.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{5}$$

b) Y=3X^2, Y là biến ngẫu nhiên liên tục

$$F_Y(y)=p\left(3X^2<y\right)$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{khi } y\le 0 \\ p\left(-\sqrt{\frac{y}{3}}<x<\sqrt{\frac{y}{3}}\right) & \text{khi } 0<y\le 3 \\ 1 & \text{khi } y>3 \end{cases} \quad =\begin{cases} 0 & \text{khi } y\le 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{y}-\frac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{y^3} & \text{khi } 0<y\le 3 \\ 1 & \text{khi } y>3 \end{cases}$$

Hàm mật độ tìm được

$$f(y)=\begin{cases} 0 & \text{khi } y\notin(0;3) \\ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{y} & \text{khi } y\in(0;3) \end{cases}$$

Kỳ vọng của Y là

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy=\int_{0}^{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{y}\right)dy=0,6$$

6. Một trạm được cung cấp Gas 1 lần trong một tuần. Dung lượng gas bán trong một tuần của trạm là X (đơn vị: ngàn thùng) có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 \text{ khi } 0 < x < 1 \\ 0 \quad \text{khi } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Dung lượng kho chứa là bao nhiêu để xác suất trong một tuần trạm hết gas là 5%.

Giải:

Gọi a là dung lượng của kho chứa (đơn vị: ngàn thùng)

Nhận xét 0<a<1

Xác suất trong 1 tuần trạm hết ga là 5%

$P(X \geq a) = 0,05$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^1 5.(1-x)^4 dx = 0,05 \Leftrightarrow (x-1)^5 \Big|_a^1 = 0,05 \Leftrightarrow a = 0,4507$$

7. Một người bắn 3 viên đạn độc lập với nhau vào một chiếc bia với xác suất trúng bia của mỗi viên là 0,7. Hãy lập bảng phân phối xác suất của số viên đạn trúng bia.

Giải:

Gọi X là ”Số viên đạn bắn trúng bia”. X là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có X=1,2,3

Gọi A_1 là biến cố viên đạn thứ nhất bắn trúng

A_2 là biến cố viên đạn thứ hai bắn trúng

A_3 là biến cố viên đạn thứ ba bắn trúng

Ta có A_1, A_2, A_3 là các biến cố độc lập

Áp dụng các công thức Bernoulli ta có

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,7$$
$$P\left(\overline{A_1}\right) = P\left(\overline{A_2}\right) = P\left(\overline{A_3}\right) = 0,3$$

Ta có:

$$P\left(X=0\right) = C_3^0 = 0,3^3 = 0,027$$
$$P\left(X=1\right) = C_3^1.0,7.0,3^2 = 0,189$$
$$P\left(X=2\right) = C_3^2.0,7^2.0,3 = 0,441$$
$$P\left(X=3\right) = C_3^3.0,7^3 = 0,343$$

Bảng phân phối xác suất của số viên đạn bắn trúng bia có dạng:

X	0	1	2	3
P	0,027	0,189	0,441	0,343

8. Một sinh viên phải thi 3 môn một cách độc lập với nhau. Xác suất nhận được cùng một điểm số nào đó ở cả ba môn đều như nhau. Xác suất để thi một môn được điểm 8 là 0,18; dưới điểm 8 là 0,65. Xác suất để thi cả ba môn đều được điểm 10 là 0,000343. Tính xác suất để sinh viên thi 3 môn được ít nhất là 28 điểm. Điểm thi được cho theo thang điểm 10, không có điểm lẻ.

Giải:

Gọi X là điểm số của một môn thi.
Theo đề ra ta có bảng phân phối xác suất của điểm số một môn thi:

X	< 8	8	9	10
P	0,65	0,18	a	b

Xác suất 3 môn điểm 10 là 0,00343

⇨ $b^3 = 0{,}00343$ ⇨ $b = 0{,}07$

⇨ $a = 1 – 0{,}65 – 0{,}18 – 0{,}07 = 0{,}1$

Gọi A là biến cố "tổng điểm thi 3 môn ít nhất 28 điểm".

A_1 là biến cố "có hai môn được 10, một môn được 8".
A_2 là biến cố "có hai môn được 10, một môn được 9".
A_3 là biến cố "có một môn được 10, hai môn được 9".
A_4 là biến cố "có ba môn được 10".

Như vậy: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

Mà A_1, A_2, A_3, A_4 là các biến cố xung khắc nên:

$P(A_1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$
$= C_3^2.0{,}07^2.0{,}18 + C_3^2.0{,}07^2.0{,}1 + C_3^1.0{,}07.0{,}1^2 + 0{,}07^3$
$= 0{,}006559$

9. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & khi \quad x \le 2 \\ Cx - 1 & khi \quad 2 < x \le 4 \\ 1 & khi \quad x > 4 \end{cases}$$

a) Căn cứ vào biểu thức này, hãy cho biết miền giá trị có thể có của X là khoảng nào?

b) Hãy xác định giá trị cụ thể của C

c) Hãy tính xác suất để X nhận giá trị nhỏ hơn 3

d) Hãy tính xác suất để X nhận giá trị lớn hơn 3,5

e) Hãy tính xác suất để X nhận giá trị nằm trong khoảng (2,5; 3,5)

g) Thực hiện 3 phép thử độc lập về biến ngẫu nhiên này. Tính xác suất trong đó X nhận một giá trị trong khoảng câu e.

h) Thực hiện 5 phép thử độc lập về biến ngẫu nhiên này. Tính xác suất trong đó X nhận hai giá trị trong khoảng câu e.

<u>Giải</u>

a) Miền giá trị có thể có của X là [2; 4]

b) F(x) là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục, nên nó liên tục tại x=4. Do đó ta có

$$\lim_{x\to 4} F(x) = F(4) \Leftrightarrow 4c - 1 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Với c = ½, f(x) liên tục tại x = 2.

c) $P(X < 3) = F(3) = \frac{1}{2}.3 - 1 = \frac{1}{2}$

d) $P(X > 3,5) = 1 - P(X \le 3,5) = 1 - F(3,5) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

e) $P(2,5 < X < 3,5) = F(3,5) - F(2,5) = \frac{1}{2}$

g) Áp dụng công thức Bernoulli ta có xác suất thực hiện 3 phép thử trong đó X nhận 1 giá trị trong khoảng câu e có dạng $P = C_3^1.0,5.0,5^2 = 0,375$

h) Áp dụng công thức Bernoulli ta có xác suất thực hiện 5 phép thử trong đó 2 giá trị trong khoảng câu 5 là $P = C_5^2.0,5^2.0,5^3 = 0,3125$

10. Hộp sản phẩm có 8 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp để mua.

a) Gọi X là số sản phẩm loại A trong 2 sản phẩm. Tìm phân phối xác suất của X.

b) Giá của mỗi sản phẩm loại A là 10 ngàn đồng, mỗi sản phẩm loại B là 8 ngàn đồng. Gọi Y là tổng số tiền người khách phải trả. Tìm phân phối xác suất của Y.

<u>Giải:</u>

a) X là số sản phẩm loại A trong 2 sản phẩm được chọn ngẫu nhiên. X là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có X=0,1,2

Xác suất P(X=0) là xác suất để trong 2 sản phẩm được chọn không có sản phẩm nào loại A. Theo định nghĩa cổ điển về xác suất ta có

$$P(X = 0) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{1}{11}$$

Tương tự:

$$P(X=1)=\frac{C_4^1.C_8^1}{C_{12}^2}=\frac{16}{33}$$
$$P(X=2)=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}=\frac{14}{33}$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{14}{33}$

b) Y là tổng số tiền khách phải trả cho 2 sản phẩm. Y là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có Y=16,18,20

Ta có

$$P(Y=16)=P(X=0)=\frac{1}{11}$$
$$P(Y=18)=P(X=1)=\frac{16}{33}$$
$$P(Y=20)=P(X=2)=\frac{14}{33}$$

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	16	18	20
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{14}{33}$

11. Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất

X	**-1**	**0**	**1**	**2**
P	***0,2***	***0,1***	***0,3***	***0,4***

a) Tìm phân phối xác suất của Y = X² - X +2

b) Tính E(Y)

Giải:

a) Từ $Y=X^2-X+2$ ta có

$$Y(X=-1)=4, Y(X=0)=2, Y(X=1)=2, Y(X=2)=4$$

Vậy xác suất của Y:

$P(Y=2)=P(X=0)+P(X=1)=0,1+0,3=0,4$
$P(Y=4)=P(X=-1)+P(X=2)=0,2+0,4=0,6$

Bảng phân phối xác suất của Y là

Y	2	4
P	0,4	0,6

b) Từ bảng phân phối xác suất ta có

$E(Y)=2.0,4+4.0,6=0,32$

12. Cho hai hộp sản phẩm

Hộp 1 có 10 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm.

Hộp 2 có 12 sphẩm trong đó có 4 phế phẩm.

a) Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm của hộp 1. Gọi X là số phế phẩm lấy được. Lập bảng phân phối xác suất của X. Tìm Mod(X), E(X), V(X) và hàm phân phối của X.

b) Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một sản phẩm. Gọi Y là số phế phẩm có được. Lập bảng phân phối xác suất của Y.

c) Từ hộp 1 lấy 2 sản phẩm bỏ vào hộp 2. Sau đó từ hộp 2 lấy ra 2 sản phẩm. Lập bảng phân phối xác suất của số chính phẩm Z lấy được. Tìm số chính phẩm lấy được nhiều khả năng nhất khi lấy 2 sản phẩm như trên.

d) Lấy ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm. Tìm xác suất để sai lệch giữa số chính phẩm được lấy ra và kì vọng của nó không nhỏ hơn 1.

Giải:

a) X là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị với các giá trị có thể có X=0,1,2

P(X=0) là biến cố mà trong 2 sản phẩm lấy ra không có phế phẩm nào. Theo công thức cổ điển về xác suất ta có

$$P(X=0)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15} \qquad P(X=1)=\frac{C_3^1.C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15} \qquad P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

Dựa vào bảng xác suất ta có

$Mod(X) \in \{0;1\}$

$E(X) = \sum_{i=0}^{2} x_i.p_i = 0.\frac{7}{15} + 1.\frac{7}{15} + 2.\frac{1}{15} = 0,6$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=0}^{2} x_i^2.p_i - 0,6^2 = \frac{28}{75} \approx 0,373$

Hàm phân phối xác suất của X có dạng:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & khi\ x \le 0 \\ \frac{7}{15} & khi\ 0 < x \le 1 \\ \frac{14}{15} & khi\ 1 < x \le 2 \\ 1 & khi\ x > 2 \end{cases}$$

b) Gọi Y là số phế phẩm lấy được khi lấy mỗi hộp 1 sản phẩm.

Y là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị có thể có Y=0,1,2

Áp dụng công thức tính xác suất ta có

$P(Y=0) = \frac{C_7^1}{C_{10}^1}.\frac{C_8^1}{C_{12}^1} = \frac{7}{15}$

$P(Y=1) = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}.\frac{C_8^1}{C_{12}^1} + \frac{C_7^1}{C_{10}^1}.\frac{C_4^1}{C_{12}^1} = \frac{13}{30}$

$P(Y=2) = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}.\frac{C_4^1}{C_{12}^1} = \frac{1}{10}$

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{1}{10}$

c) H_1 là biến cố lần 1 lấy 2 chính phẩm $p(H_1) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2}$

H_2 là biến cố lần 1 lấy 1 chính phẩm, 1 phế phẩm $p(H_2) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2}$

H_3 là biến cố lần 1 lấy 2 phế phẩm $p(H_3) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2}$

- Gọi Z là số chính phẩm lấy được.

Z là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị có thể có Z=0,1,2

$p(Z=0) = p(H_1)p(Z=0 \mid H_1) + p(H_2)p(Z=0 \mid H_2) + p(H_3)p(Z=0 \mid H_3) = \frac{127}{1365}$

$$p(Z=1)=p(H_1)p(Z=1|H_1)+p(H_2)p(Z=1|H_2)+p(H_3)p(Z=1|H_3)=\frac{643}{1365}$$
$$p(Z=2)=p(H_1)p(Z=2|H_1)+p(H_2)p(Z=2|H_2)+p(H_3)p(Z=2|H_3)=\frac{595}{1365}$$

Bảng phân phối xác suất của Z

Y	0	1	2
P	$\frac{127}{1365}$	$\frac{643}{1365}$	$\frac{595}{1365}$

Số chính phẩm lấy được nhiều khả năng nhất khi lấy 2 sản phẩm như trên là m_o =1

d) X là số chính phẩm lấy được
X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị 0, 1, 2, 3
A_x là biến cố lấy được X chính phẩm
Hi là biến cố lấy được lấy được sản phẩm ở hộp thứ i
Xác suất để lấy được sản phẩm ở mỗi hộp là như nhau và bằng $\frac{1}{2}$.

Ta áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$p(X) = p(H_1).p(A_x|H_1) + p(H_2).p(A_x|H_2)$$

p(X=0) = $\frac{1}{2}\frac{3C3}{10C3}+\frac{1}{2}\frac{4C3}{12C3}=\frac{35}{2640}$

p(X=1) = $\frac{1}{2}\frac{3C2.7C1}{10C3}+\frac{1}{2}\frac{4C2.8C1}{12C3}=\frac{519}{2640}$

p(X=2) = $\frac{1}{2}\frac{3C1.7C2}{10C3}+\frac{1}{2}\frac{4C1.8C2}{12C3}=\frac{1365}{2640}$

p(X=3) = $\frac{1}{2}\frac{7C3}{10C3}+\frac{1}{2}\frac{8C3}{12C3}=\frac{721}{2640}$

Ta có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	3
p	$\frac{35}{2640}$	$\frac{519}{2640}$	$\frac{1365}{2640}$	$\frac{721}{2640}$

E(X) = $\sum_{i=1}^{4} xi.qi$ = 2.05

Ta có:

p(|X-E(X)|>=1) = 1- p(|X-E(X)<1) = 1- p(|X-2.05|<1)

= 1- p(1.05<x<3.05) = 1- (p(2) + p(3)) = $\frac{554}{2640}$

13. Cho 2 máy có tỉ lệ sản phẩm loại 1 tương ứng là 10%, 20%. Cho mỗi máy sản xuất ra 2 sản phẩm.

a) Tìm luật phân phối xác suất của số sản phẩm loại 1 trong 4 sản phẩm sản xuất ra.

b) Tìm số sản phẩm loại 1 tin chắc nhất; số sản phẩm loại 1 trung bình có trong 4 sản phẩm sản xuất ra.

Giải:

a) Gọi X là số sản phẩm loại 1 trong 4 sản phẩm được lấy ra. X là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có của X là X=0,1,2,3,4. Các biến cố X=0, X=1, X=2, X=3, X=4 là các biến cố đầy đủ.

P(X=0) là biến cố trong 4 sản phẩm lấy ra không có sản phẩm nào loại 1, nên

$P(X=0)=0,9^2.0,8^2=0,5184$

Tương tự

Bảng phân phối xác suất của số sản phẩm loại 1 trong 4 sản phẩm:

X	0	1	2	3	4
P	0,5184	0,3744	0,0964	0,0104	0,0004

b) Số sản phẩm loại 1 tin chắc nhất là m_0=0

Số sản phẩm loại 1 trung bình có trong 4 sản phẩm sản xuất ra là E(V) với

$$E(V)=\sum_{i=0}^{4}x_i.p_i=0,6$$

14. Một thiết bị có 3 bộ phận hoạt động độc lập. Xác suất trong thời gian t các bộ phận này bị hỏng tương ứng là: 0,1; 0,12; 0,15. Tìm luật phân phối xác suất của số bộ phận bị hỏng của thiết bị trong thời gian t. Tìm xác suất trong thời gian t thiết bị có không quá 1 bộ phận bị hỏng.

Giải

Gọi X là số bộ phận bị hỏng của thiết bị trong thời gian t. X là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có X=0,1,2,3

P(X=0) là xác suất mà trong thời gian t không có bộ phận nào bị hỏng. Ta có

$P(X=0)=0,9.0,88.0,85=0,6732$

Tương tự

$$P(X=1)=0,1.0,88,0,85+0,9.0,12.0,85+0,9.0,88.0,15=0,2854$$
$$P(X=2)=0,1.0,12.0,85+0,1.0,88.0,15+0,9.0,12.0,15=0,0396$$
$$P(X=3)=0,1.0,12.0,15=0,0018$$

Xác suất trong thời gian t thiết bị không có quá 1 bộ phận bị hư hỏng bằng

$P(X=0)+P(X=1)=0,6732+0,2854=0,9586$

15.

16. Nhu cầu hàng ngày về một loại thực phẩm tươi sống có bảng phân phối xác suất:

Nhu cầu (kg)	***30***	***31***	***32***	***33***	***34***
P	***0,15***	***0,2***	***0,35***	***0,18***	***0,12***

Mỗi kg mua vào với giá 2,5 ngàn và bán ra với giá 4 ngàn. Nếu bị ế đến cuối ngày bán hạ giá còn 1,5 ngàn mới bán hết hàng. Phải đặt mua hằng ngày bao nhiêu kg thực phẩm để có lãi nhất?

Giải:

Gọi i là số thực phẩm nhập vào và j là số kg thực phẩm theo nhu cầu.

Lợi nhuận hàng ngày B phụ thuộc vào i, j, giá bán (4 ngàn), giá mua (2,5 ngàn) và giá bán nếu bị ế (1,5 ngàn) như sau:

$$B_{i,j}=\begin{cases} 4j-2,5i+1,5(i-j) & ; \quad j\le i \\ 4i-2,5i=1,5i & ; \quad j>i \end{cases}$$

Khi đó ta có bảng lợi nhuận như sau:

j / i / Pj	30 0,15	31 0,2	32 0,35	33 0,18	34 0,12	E_i (ngàn)
30	45	45	45	45	45	45
31	44	46,5	46,5	46,5	46,5	46.125
32	43	45,5	48	48	48	46.75
33	42	44,5	47	49,5	49,5	46.5
34	41	43,5	46	48,5	51	45.8

E_i là số tiền lãi kì vọng khi nhập I (kg) thực phẩm :

$$E_i=\sum_{i=30}^{35} B_{i,j}.P_j$$

Như vậy, để có lãi nhiều nhất thì nên nhập 32 kg thực phẩm.

17. Một người bán hàng sẽ đến 2 nơi, ...

Giải:

Gọi X là số tiền bán hàng của người đó ở nơi 1. Ta có bảng phân phối xác suất

X	0	500	1000
p	0,7	0.15	0.15

Gọi Y là số tiền bán hàng của người đó ở nơi 2. Ta có bảng phân phối xác suất

Y	0	500	1000
p	0,4	0.3	0.3

Bảng phân phối tổng số tiền bán hàng của người đó là

X+Y	0	0+500	0+1000	500+0	500+500	500+1000	1000+0	1000+500	1000+1000
p	0,28	0.21	0.21	0,06	0.045	0.045	0,06	0.045	0.045

Hay viết lại

X+Y	**0**	**500**	**1000**	**1500**	**2000**
p	**0.28**	**0.27**	**0.315**	**0.09**	**0.045**

18. Một hộp kín có 4 thẻ đỏ, 4 thẻ đen và 6 thẻ trắng. Lấy ngẫu nhiên 3 thẻ từ hộp. Giả sử nếu lấy được mỗi thẻ đỏ được 1 điểm, mỗi thẻ đen trừ 1 điểm, mỗi thẻ trắng là 0 điểm. Tìm phân phối xác suất của số điểm có được.

Giải:

Các trường hợp có thể xảy ra và xác suất từng trường hợp

Số thẻ đỏ	Số thẻ đen	Số thẻ trắng	Tổng điểm	Xác suất
3	0	0	3	$\frac{C_4^3}{C_{14}^3} = \frac{1}{91}$
2	1	0	1	$\frac{C_4^2.C_4^1}{C_{14}^3} = \frac{6}{91}$
2	0	1	2	$\frac{C_4^2.C_6^1}{C_{14}^3} = \frac{9}{91}$
1	2	0	-1	$\frac{C_4^2.C_4^1}{C_{14}^3} = \frac{6}{91}$

1	0	2	1	$\frac{C_6^2.C_4^1}{C_{14}^3}=\frac{15}{91}$
1	1	1	0	$\frac{C_4^1.C_4^1.C_6^1}{C_{14}^3}=\frac{24}{91}$
0	3	0	-3	$\frac{C_4^3}{C_{14}^3}=\frac{1}{91}$
0	0	3	0	$\frac{C_6^1}{C_{14}^3}=\frac{5}{91}$
0	1	2	-1	$\frac{C_6^2.C_4^1}{C_{14}^3}=\frac{15}{91}$
0	2	1	-2	$\frac{C_4^2.C_6^1}{C_{14}^3}=\frac{9}{91}$

Gọi X là xác suất tổng số điểm.

X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trì có thể có từ X=-3,-2,-1,0,1,2,3

Vậy bàm phân phối xác suất có dạng

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{91}$	$\frac{9}{91}$	$\frac{21}{91}$	$\frac{29}{91}$	$\frac{21}{91}$	$\frac{9}{91}$	$\frac{1}{91}$

19. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases} a+bx^2 \text{ khi } x\in(0,1) \\ 0 \quad\quad\ \text{ khi } x\notin(0,1) \end{cases}$$

Cho E(X) =0,6. Tìm hàm phân phối xác suất của X, tính $p\left(-1<X<0,5\right)$***; V(X).***

<u>Giải:</u>

Theo tính chất của hàm mật độ xác suất ta có

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1\left(a+b.x^2\right)dx=\left(a.x+\frac{b.x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=a+\frac{b}{3}\ (1)$$

Ta lại có

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_0^1\left(a.x+b.x^3\right)dx=\left(\frac{a.x^2}{2}+\frac{b.x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{a}{2}+\frac{b}{4}=0,6\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=0,6 \\ b=1,2 \end{cases}$

Với $x\in(0;1)$, ta có:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_0^x(0,6+1,2.x^2)dx=\left(0,6.x+0,4.x^3\right)\Big|_0^x=0,6.x+0,4.x^3$$

- Do đó hàm phân phối xác suất cần tìm là:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{nếu } x\le 0 \\ 0,6.x+0,4.x^3 & \text{nếu } 0<x\le 1 \\ 1 & \text{nếu } x>1 \end{cases}$$

- Tính được:

$$P(-1<X<0,5)=\int_{-1}^{0,5} f(x)dx=\int_0^{0,5}\left(0,6+1,2.x^2\right)dx=\left(0,6.x+0,4.x^3\right)\Big|_0^{0,5}=0,35$$

Hoặc $P(-1<X<0,5)=\int_{-1}^{0,5} f(x)dx=F(0,5)-F(-1)=0,35$

- Tính V(X):

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx=\int_0^1\left(0,6.x^2+1,2.x^4\right)dx=\left(0,2.x^3+0,24.x^5\right)\Big|_0^1=0,44$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=0,44-0,6^2=0,08$$

20. Một hộp có 10 sản phẩm gồm chính phẩm và phế phẩm. Gọi X là số phế phẩm có trong hộp. X có bảng phân phối xác suất như sau:

X	***0***	***1***	***2***
p	***0,7***	***0,2***	***0,1***

Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ hộp ra 2 sản phẩm . Gọi Y là số phế phẩm có trong 2 sản phẩm lấy ra. Tìm luật phân phối xác suất của Y, Y^2.

Giải:

Y là số phế phẩm có trong 2 sản phẩm lấy ra.

Y là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị có thể có Y=0,1,2

$p(H_0) = 0,7; \quad p(H_1) = 0,2; \quad p(H_2) = 0,1;$

$$p(Y = 0 | H0) = \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}$$

$$p(Y = 0 | H1) = \frac{C_9^2 C_1^0}{C_{10}^2}$$

$$p(Y = 0 | H2) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2}$$

$$p(Y = 0) = \sum_{i=0}^{2} p(H_i) \cdot p(Y = 0 | H_i)$$

Áp dụng công thức tính xác suất đầy đủ ta có:

$$P(Y = 0) = \frac{0,7.C_{10}^2 + 0,2.C_9^2 + 0,1.C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{83}{90}$$

Tương tự, ta tính được

$$P(Y = 1) = \frac{0,2.C_9^1.C_1^1 + 0,1.C_2^1.C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{17}{225}$$

$$P(Y = 2) = \frac{0,1.C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{450}$$

Bảng phân phối xác suất của Y:

Y	0	1	2
P	$\frac{83}{90}$	$\frac{17}{225}$	$\frac{1}{450}$

Bảng phân phối xác suất của $Y^{2:}$

Y^2	0	1	4
P	$\frac{83}{90}$	$\frac{17}{225}$	$\frac{1}{450}$

21. Có 3 kiện hàng. Kiện thứ nhất có 8 sản phẩm loại A, 2 sản phẩm loại B; kiện hai có 6 sản phẩm loại A, 3 sản phẩm loại B; kiện thứ ba có 7 sản phẩm loại A, 1 sản phẩm loại B. Chọn ngẫu nhiên 1 kiện, rồi từ kiện đó chọn ngẫu nhiên không hoàn lại ra 2 sản phẩm thì được 2 sản phẩm loại A. Lấy tiếp từ kiện đã chọn ra 2 sản phẩm. Lấy tiếp từ kiện đã chọn ra 2 sản phẩm. Tìm luật phân phối xác suất của số sản phẩm loại A có trong 2 sản phẩm lấy lần sau.

<u>Giải:</u>

Hi là lấy được kiện hàng i (i=1,2,3)

Ai là biến cố lần 1 lấy được 2 chính phẩm

A_{22} là biến cố lần 2 lấy được chính phẩm

A_{20} là biến cố lần 2 không lấy được chính phẩm

A_{21} là biến cố lần 2 lấy được 1 chính phẩm

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$

$P(A_1)= P(H_1).P(A_1/H_1) +P(H_2).P(A_1/H_2) + P(H_3).P(A_1/H_3)$

$$=1/3\left(\frac{C_8^2}{C_{10}^2}+\frac{C_6^2}{C_9^2}+\frac{C_7^2}{C_8^2}\right)=\frac{161}{270}$$

$$P(A_{22})=P(A_{22}/H_1A_1)P(H_1/A_1)+P(H_2/H_1).P(A_{22}/H_2A_1)+P(H_3/A_1).P(A_{22}/H_3A_1)$$

$$=\frac{C_6^2}{C_8^2}\left[\frac{P(H_1)P(A_1/H_1)}{P(A_1)}\right]+\frac{C_4^2}{C_7^2}\left[\frac{P(H_2).P(A_1/H_2)}{P(A_1)}\right]+\frac{C_5^2}{C_6^2}\left[\frac{P(H_3)P(A_1/H_3)}{P(A_1)}\right]$$

$$=\frac{C_6^2}{C_8^2}\left[\frac{1/3C_8^2/C_{10}^2}{161/270}\right]+\frac{C_4^2}{C_7^2}\left[\frac{1/3C_6^2/C_9^2}{161/270}\right]+\frac{C_5^2}{C_6^2}\left[\frac{1/3C_7^2/C_8^2}{161/270}\right]$$

$$=\frac{15}{28}\frac{8}{23}+\frac{2}{7}\frac{75}{322}+\frac{2}{3}\frac{135}{322}=\frac{600}{1127}$$

$$P(A_{20})=\frac{C_2^2}{C_8^2}\frac{8}{23}+\frac{C_3^2}{C_7^2}\frac{75}{322}=\frac{103}{2254}$$

$$P(A_{21})=\frac{C_2^1C_6^2}{C_8^2}\frac{8}{23}+\frac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}\frac{75}{322}+\frac{C_5^1C_1^1}{C_6^2}\frac{135}{322}=\frac{951}{2254}$$

22. Chủ một cửa hàng sửa chữa điện dân dụng thuê 5 thợ sửa chữa làm việc 40 giờ trên 1 tuần với lương 800 ngàn/1 tuần. Do nhu cầu sửa chữa tăng lên nên nhiều hợp đồng bị từ chối. Để xem xét có cần thuê thêm thợ nữa không, người chủ đã khảo sát nhu cầu sửa chữa X trong tuần có bảng phân phối như sau:

X (giờ/tuần)	***185***	***195***	***205***	***215***	***225***	***235***	***245***	***255***
p	***0,03***	***0,09***	***0,12***	***0,15***	***0,22***	***0,21***	***0,13***	***0,05***

Nếu mỗi giờ sửa chữa, chủ cửa hàng thu được 30 ngàn đồng thì có nên thuê thêm một người thợ nữa không? xét trong 2 trường hợp sau:

a) Năm người thợ cũ chỉ đồng ý làm đúng 40 giờ/tuần.

b) Năm người thợ cũ đồng ý làm thêm tối đa mỗi người 5 giờ/1 tuần với tiền công 25 ngàn/1 giờ làm thêm.

<u>Giải</u>

a) Nếu 5 người công nhân cũ chỉ làm với 40h/tuần.

** Nếu không thuê thêm công nhân:*

Gọi Y là lợi nhuận thu được.

Ta có Y=30.X – 5.800 = 30.X – 4000

Số giờ tối đa mà cửa hàng đáp ứng được là 5.40=200(h)

=> X=185,195,200

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	1550	1850	2000
P	0,03	0,09	0,88

$$E(Y) = 0,03.1550 + 0,09.1850 + 0,88.2000 = 1973(ngh\text{ìn})$$

** Nếu thuê thêm 1 công nhân:*

Gọi Z là lợi nhuận thu được.

Ta có Z=30.X – 6.800 = 30.X – 4800

Số giờ tối đa mà cửa hàng đáp ứng được là 6.40=240(h)

Bảng phân phối xác suất của Z

Z	750	1050	1350	1650	1950	2250	2400
P	0,03	0,09	0,12	0,15	0,22	0,21	0,18

$$E(Z) = 750.0,03 + 1050.0,09 + 1350.0,12 + 1650.0,15 + 1950.0,22 + 2250.0,21 + 2400.0,18 = 1860(ngh\text{ìn})$$

Như vậy chủ cửa hàng không nên thuê thêm 1 công nhân nữa.

b) Nếu 5 người thợ cũ đồng ý làm thêm tối đa mỗi người 5 giờ/1 tuần với tiền công 25 ngàn/1 giờ làm thêm.

** Nếu không thuê thêm công nhân:*

Gọi T là lợi nhuận thu được.

Ta có $T = \begin{cases} 30X - 4000 \text{ khi } X \le 200 \\ 30X - 4000 - 25(X - 200) = 5X + 1000 \text{ khi } X > 200 \end{cases}$

Số giờ tối đa mà cửa hàng đáp ứng được là 5.40+5.5=225(h)

Bảng phân phối xác suất của Y

T	1550	1850	2025	2075	2125
P	0,03	0,09	0,12	0,15	0,61

$E(T) = 2063,5(nghìn)$

** Nếu thuê thêm 1 công nhân:*

Gọi S là lợi nhuận thu được.

Ta có $S = \begin{cases} 30X - 4800 \text{ khi } X \le 240 \\ 30X - 4800 - 25(X - 200) = 5X + 1200 \text{ khi } X > 240 \end{cases}$

Số giờ tối đa mà cửa hàng đáp ứng được là 6.40+5.5=265(h)

Bảng phân phối xác suất của S

S	750	1050	1350	1650	1950	2250	2425	2475
P	0,03	0,09	0,12	0,15	0,22	0,21	0,13	0,05

$E(Z) = 1867(nghìn)$

Như vậy chủ cửa hàng không nên thuê thêm 1 công nhân nữa.

Bài tập tổng hợp

25. Theo dõi hiệu quả kinh doanh của một công ty qua nhiều năm, các chuyên gia thiết lập bảng phân phối xác suất của lãi suất đầu tư của công ti như sau:

X (%)	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
p	***0,08***	***0,12***	***0,2***	***0,3***	***0,18***	***0,1***	***0,02***

a) Khả năng đầu tư vào công ty đó để đạt lãi suất ít nhất 11% là bao nhiêu?

b) Tìm mức lãi suất nhiều khả năng nhất và mức lãi suất trung bình khi đầu tư vào công ty đó.

c) Tìm mức độ rủi ro khi đầu tư vào công ti đó.

<u>Giải:</u>

a) Khả năng đầu tư vào công ty đó để đạt lãi ít nhất 11% chính là $P\left(X \ge 11\right)$

$P\left(X \ge 11\right) = 0,2 + 0,3 + 0,18 + 0,1 + 0,02 = 0,8$

b) Mức lãi suất nhiều khả năng nhất chính là m_0=12

Mức lãi suất trung bình khi đầu tư vào công ty đó là E(V):

$E(V) = \sum_{9}^{15} x_i.p_i = 9.0,08 + 10.0,12 + 11.0,2 + 12.0,3 + 13.0,18 + 14.0,1 + 15.0,02 = 11,76$

c) Mức độ rủi ro khi đầu tư vào công ty đó chính là độ lệch chuẩn $\sigma(X)$

Ta có $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{9}^{15}x_i^2.p_i-11,76^2=120,4-11,76^2=2,1024$

Suy ra mức độ rủi ro $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2,1024}\approx 1,45$

26. Có hai hộp sản phẩm. Hộp 1 có 8 chính phẩm và 2 phế phẩm. Hộp 2 có 7 chính phẩm và 4 phế phẩm.

a) Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm của hộp 1 để kiểm tra. Gọi X là số phế phẩm lấy được. Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Lấy ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm để kiểm tra. Tìm số phế phẩm nhiều khả năng nhất có được trong 3 sản phẩm lấy ra.Tìm xác suất sai lệch giữa số phế phẩm lấy ra và kì vọng của nó không vượt quá 1,5.

c) Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp 1 và 1 sản phẩm từ hộp 2. Gọi Y là số chính phẩm lấy được. Tìm phân phối xác suất của Y.

d) Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm của hộp 1bỏ sang hộp 2, tiếp đó lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm của hộp 2 bỏ sang hộp 1, sau đó lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm từ hộp 1. Gọi Z là số phế phẩm có được. Tìm phân phối xác suất của Z.

Giải:

a) Gọi X là số phế phẩm khi lấy ra 3 phế phẩm ở hộp 1:

X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị có thể có Y=0,1,2

Áp dụng công thức tính xác suất ta có:

$$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=1)=\frac{C_8^1.C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

Bảng phân phối xác suất của X:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

b) Gọi T là số phế phẩm khi lấy ra 3 phế phẩm lấy ra , T=0,1,2,3

Gọi Ai là biến cố có i phế phẩm trong 3 phế phẩm lấy ra, i=0,1,2,3

H1 là xác suất lấy phải hộp 1, H2 là xác suất lấy phải hộp 2

=> p(H1)=p(H2)=0,5

p(T=1)=p(A1)=p(H1).p(A1/H1)+ p(H2).p(A1/H2)=0,5. $\frac{7}{15}$ +0,5. $\frac{C_4^1.C_7^2}{C_{11}^3}=\frac{161}{330}$

p(T=0)=p(A0)=p(H1).p(A0/H1)+ p(H2).p(A0/H2)=0,5. $\frac{7}{15}$ +0,5. $\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=\frac{56}{165}$

p(T=2)=p(A2)=p(H1).p(A2/H1)+ p(H2).p(A2/H2)=0,5. $\frac{1}{15}$ +0,5. $\frac{C_4^2.C_7^1}{C_{11}^3}=\frac{53}{330}$

p(T=3)=p(A3)=0,5. $\frac{C_4^3}{C_{11}^3}=\frac{2}{165}$

Bảng phân phối xác suất của T:

T	0	1	2	3
P	$\frac{56}{165}$	$\frac{161}{330}$	$\frac{53}{330}$	$\frac{2}{165}$

E(T)=0. $\frac{56}{165}$ +1. $\frac{161}{330}$ +2. $\frac{53}{330}$ +3. $\frac{2}{165}=\frac{93}{110}$

Xác suất sai lệch giữa số phế phẩm lấy ra và kì vọng của nó không vượt quá 1,5 là:

$$P(|T-E(T)|<1,5)=P(\left|T-\frac{93}{110}\right|<1,5)=P(\frac{36}{55}<T<\frac{129}{55})=P(T=1)+P(T=2)=\frac{161}{330}+\frac{53}{330}=\frac{107}{165}$$

c) Gọi Y là số chính phẩm lấy được, Y=0,1,2,3

$$P(Y=0)=\frac{C_2^2.C_4^1}{C_{10}^2.C_{11}^1}=\frac{4}{495}$$

$$P(Y=1)=\frac{C_8^1.C_2^1.C_4^1+C_2^2.C_7^1}{C_{10}^2.C_{11}^1}=\frac{71}{495}$$

$$P(Y=2)=\frac{C_8^1.C_2^1.C_7^1+C_8^2.C_4^1}{C_{10}^2.C_{11}^1}=\frac{224}{495}$$

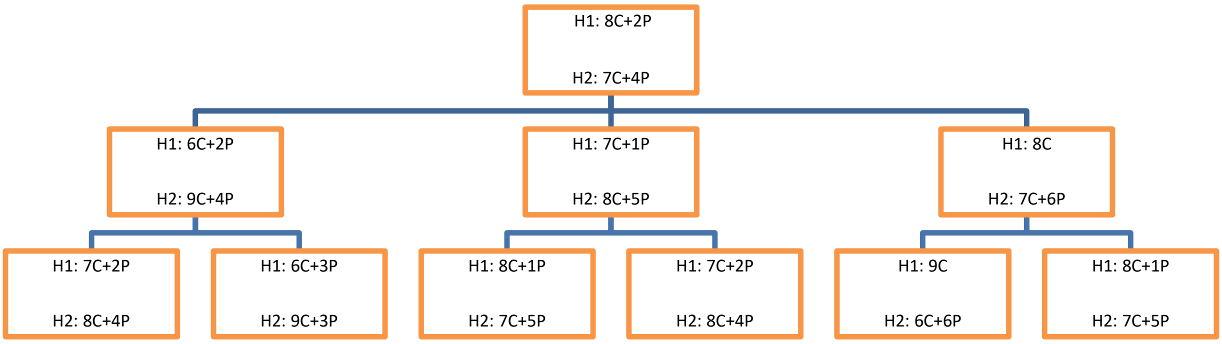
$$P(Y=3)=\frac{C_8^2.C_7^1}{C_{10}^2.C_{11}^1}=\frac{196}{495}$$

Bảng phân phối xác suất của Y:

Y	0	1	2	3

P	$\frac{4}{495}$	$\frac{71}{495}$	$\frac{224}{495}$	$\frac{196}{495}$

d) Từ đề bài ta có sơ đồ:



Gọi Z là số phế phẩm lấy được sau 3 bước như đề bài, Z=0,1,2

$$P(Z=0)=\frac{1}{6}.(\frac{C_7^2}{C_9^2}+\frac{C_6^2}{C_9^2}+\frac{C_8^2}{C_9^2}+\frac{C_7^2}{C_9^2}+\frac{C_9^2}{C_9^2}+\frac{C_8^2}{C_9^2})=\frac{149}{216}$$

$$P(Z=2)=\frac{1}{6}.(\frac{C_2^2}{C_9^2}+\frac{C_3^2}{C_9^2}+\frac{C_3^2}{C_9^2})=\frac{5}{216}$$

$$P(Z=1)=1-P(Z=0)-P(Z=2)=\frac{62}{216}$$

Bảng phân phối xác suất của Z:

Z	0	1	2
P	$\frac{149}{216}$	$\frac{62}{216}$	$\frac{5}{216}$

27. Một hộp có 10 phiếu trong đó có 3 phiếu trúng thưởng. Nếu lấy ngẫu nhiên 3 phiếu từ hộp được mỗi phiếu trúng thưởng thì được thưởng 1 tặng phẩm. Gọi X là số tặng phẩm có được khi lấy 3 phiếu. Tìm số tặng phẩm đáng tin cậy nhất có được (xét hai trường hợp lấy có hoàn lại và không hoàn lại).

<u>Giải:</u>

Gọi X là tặng phẩm có được khi lấy 3 phiếu, X là biến ngẫu nhiên rời rạc và X=0,1,2,3

** Xét trường hợp lấy có hoàn lại:*

$$P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$$
$$P(X=1)=\frac{C_3^1.C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$$
$$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$$
$$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)=\frac{7}{40}$$

Số tặng phẩm đáng tin cậy nhất có được là m_o=1

** Xét trường hợp lấy có hoàn lại:*

$$P(X=0)=\frac{7^3}{10^3}=\frac{343}{1000}$$
$$P(X=1)=\frac{C_3^1.7.7.3}{10^3}=\frac{441}{1000}$$
$$P(X=2)=\frac{C_3^1.3.3.7}{10^3}=\frac{189}{1000}$$
$$P(X=3)=\frac{3^3}{10^3}=\frac{27}{1000}$$

Số tặng phẩm đáng tin cậy nhất có được là m_o=1

28. Một hộp có 4 bi đỏ, 6 bi vàng, 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp nếu được mỗi bi đỏ thì được 1 điểm, mỗi bi xanh bớt đi 1 điểm, được bi vàng thì được 0 điểm. Gọi X là tổng số điểm có được khi lấy 3 bi. Lập bảng phân phối xác suất của tổng số điểm có được khi lấy 3 bi.

Giải:

X là tổng số điểm có được khi lấy 3 bi.

X là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có X=-3,-2,-1,0,1,2,3

Ta có bảng xác suất của các trường hợp

Số bi đỏ	Số bi vàng	Số bi xanh	Tổng số điểm	Xác suất
3	0	0	3	$\frac{C_4^3}{C_{13}^3}=\frac{2}{143}$
0	3	0	-3	$\frac{C_6^3}{C_{13}^3}=\frac{10}{143}$
0	0	3	0	$\frac{C_3^3}{C_{13}^3}=\frac{1}{286}$
1	2	0	-1	$\frac{C_4^1.C_6^2}{C_{13}^3}=\frac{30}{143}$

1	0	2	1	$\frac{C_4^1.C_3^2}{C_{13}^3}=\frac{6}{143}$
0	1	2	-1	$\frac{C_6^1.C_3^2}{C_{13}^3}=\frac{9}{143}$
0	2	1	-2	$\frac{C_6^2.C_3^1}{C_{13}^3}=\frac{45}{286}$
2	1	0	1	$\frac{C_6^2.C_4^1}{C_{13}^3}=\frac{18}{143}$
2	0	1	2	$\frac{C_4^2.C_3^1}{C_{13}^3}=\frac{9}{143}$
1	1	1	0	$\frac{C_4^1.C_6^1.C_3^1}{C_{13}^3}=\frac{36}{143}$

Bảng phân phối xác suất của tổng số điểm X có được khi lấy 3 viên bi

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
P	$\frac{10}{143}$	$\frac{45}{286}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{27}{286}$	$\frac{24}{143}$	$\frac{9}{143}$	$\frac{2}{143}$

30. Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối xác suất:

X	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

và Y = 2X-1. Tính p(Y<4),V(Y).

Giải

Từ bảng phân phối xác suất của X, ta có bảng phân phối xác suất của Y như sau :

$Y=X^2$	-1	1	3	5	7
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Ta có

$$P(Y<4)=P(Y=-1)+P(Y=1)+P(Y=3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

$$V(Y)=(-1)^2.\frac{1}{8}+1^2.\frac{1}{4}+3^2.\frac{1}{4}+5^2.\frac{1}{4}+7^2.\frac{1}{8}=15$$

Bài 65.

X	0	1	2
p	0.64	0.32	0.04

Y	0	1	2
p	0.49	0.42	0.09

X+Y	0+0	0+1	0+2	1+0	1+1	1+2	2+0	2+1	2+2
p	0.3136	0.2688	0.0576	0.1568	0.1344	0.0288	0.0196	0.0168	0.0036

X+Y	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p	**0.3136**	**0.4256**	**0.2116**	**0.0456**	**0.0036**

CHƯƠNG 3. MỘT SỐ QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THÔNG DỤNG

3.1. Luật không - một.

a) Ví dụ: **T**ung xx 1 lần. Gọi X là số lần xuất hiện mặt 6 chấm

Lập bảng ppxs cho X? Tính E(X), V(X)

X	0	1
P_x	1-p	p= $\frac{1}{6}$

Ta thấy $\boxed{p_x = p(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}}$ x = 0; 1. (1)

b) Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị có thể có X = 0; 1 với xác suất tương ứng được tính bởi công thức (1) được gọi là tuân theo quy luật phân phối không – một với tham số p.

Ký hiệu: X ~A(p).

c) Các tham số đặc trưng

E(X) = p

V(X) = p(1-p)

d) Chú ý: Trong thực tế, quy luật không một thường được dung để đặc trưng cho các dấu hiệu ngiên cứu định tính, có hai phạm trù luân phiên.

VÍ DỤ: Dùng BNN nghiên cứu giới tính của khách hàng với hai giá trị bằng 0 (Nam), 1 (nữ). Khi đó xác suất p sẽ đặc trưng cho tỷ lệ khách hàng nữ trong tập các khách hàng.

3.2. Luật nhị thức.

a) VÍ DỤ: Tung xx 3 lần

Gọi X là số lần xuất hiện mặt 6 chấm

Lập bảng ppxs cho X?

Nhận xét: - Tính độc lập giữa các lần tung

- biến cố A quan tâm?
- XS biến cố A qua các lần tung

b) Định nghĩa.

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận một trong các giá trị có thể có X = 0, 1, 2, …, n với xác suất tương ứng được tính bằng công thức:

$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$ với $x=\overline{0,n}$ và $q=1-p$ trong đó $0\le p\le 1$.

Luật nhị thức ký hiệu là B(n,p).

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X phân phối theo quy luật nhị thức là:

X	0	1	…	x	…	n
p	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$		$C_n^x p^x q^{n-x}$		$C_n^n p^n q^0$

Nhxét:

- Một dãy phép thử được gọi là độc lập nếu kết quả xảy ra ở các phép thử không ảnh hưởng lẫn nhau
- Thực hiện phép thử n lần. Mỗi lần thực hiện phép thử ta quan tâm biến cố A xuất hiện hay không
- Xác suất p(A) cố định qua các phép thử

Gọi X là số lần biến cố A xảy ra trong dãy n phép thử thì X có phân phối nhị thức, kí hiệu: X ~ B(n,p)

XS "X=x" (biến cố A xảy ra x lần trong n phép thử) là:

$$p_x=P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$$

TD1: Một phân xưởng có 5 máy hoạt động độc lập. XS để một ngày mỗi máy bị hỏng đều bằng 0,1. Tìm XS để:

a) Trong một ngày có hai máy hỏng.

b) Trong một ngày có không quá hai máy hỏng.

c) Các tham số đặc trưng của B(n,p)

$$E(X)=\sum_{x=1}^{n} x.C_n^x p^x q^{n-x}.$$

Ta có: $(t+1)^n=\sum_{x=1}^{n} C_n^x.t^x$. Đạo hàm hai vế theo t ta được:

$$\left[(t+1)^n\right]'=\left[\sum_{x=1}^{n} C_n^x.t^x\right]'$$

$$\Rightarrow n.(t+1)^{n-1}=\sum_{x=1}^{n}x.C_n^x.t^{x-1}.$$ Với $t=\dfrac{p}{q}$ ta có:

$$n.\left(\frac{p}{q}+1\right)^{n-1}=\sum_{x=1}^{n}x.C_n^x.\left(\frac{p}{q}\right)^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow n.\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}=\sum_{x=1}^{n}x.C_n^x.\left(\frac{p}{q}\right)^{x-1}$$. Nhân cả hai vế với: $p.q^{n-1}$, ta có:

$$\Leftrightarrow n.p=\sum_{x=1}^{n}x.C_n^x.p^x.q^{n-x}.$$

Vậy E(X) = n.p

Tương tự, ta tính được: V(X) = n.p.q

Từ đó, ta có: $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q}$.

* ***Mod$_X$***: $np+p-1\le \mathrm{mod}(X)\le np+p$.

`

d) Chú ý: *Tìm xác suất để biến ngẫu nhiên X phân phối nhị thức B(n,p) nhận giá trị trong đoạn [x,x+h] thì xác suất này được tính bằng công thức:*

$$p[x\le X\le x+h]=p_x+p_{x+1}+\cdots+p_{x+h}$$

VÍ DỤ: Tung đồng xu cân đối đồng chất. Hãy xác định số lần được mặt sấp có khả năng nhiều nhất nếu số lần tung là:

a) n=10

b) n=5

VÍ DỤ: Tỷ lệ phế phẩm của một máy là 15%.

a) Cho máy đó sản xuất 5 sản phẩm. Tìm xác suất để được không quá 1 phế phẩm.

b) Cho máy đó sản xuất 10 sản phẩm.

Tìm XS để số CP được sản xuất ra sai lệch so với số CP trung bình <1.

c) Muốn số chính phẩm thu được trung bình là 12 sản phẩm thì phải cho máy đó sản xuất tối thiểu bao nhiêu sản phẩm?

3.3. Luật phân phối chuẩn.

a) Định nghĩa.

Biến ngẫu nhiên liên tục X nhận các giá trị trong khoảng $(-\infty;+\infty)$ gọi là phân phối theo quy luật chuẩn với các tham số μ và σ^2, nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Tiến hành khảo sát hàm số trên và vẽ đồ thị của nó ta sẽ thu được các kết luận sau đây:

a. Hàm số xác định trên toàn trục Ox.

b. Với mọi giá trị của x hàm số luôn luôn dương, như vậy đồ thị của nó luôn nằm cao hơn trục Ox.

c. Khi $x \to \pm\infty$ thì $-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \to 0$ nên $f(x) \to 0$ tức là trục Ox là đường tiệm cận ngang.

d. Lấy đạo hàm của hàm mật độ, ta có:

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mu$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \mu$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \mu$

Do đó, tại $x = \mu$, hàm số đạt cực đại: $f_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

e. Dễ thấy, từ biểu thức của f(x) thì f(x) = f(2 μ -x), do đó, hàm f(x) nhận đường thẳng $x = \mu$ làm trục đối xứng.

g. Điểm uốn.

Ta xét đạo hàm bậc hai: $f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$

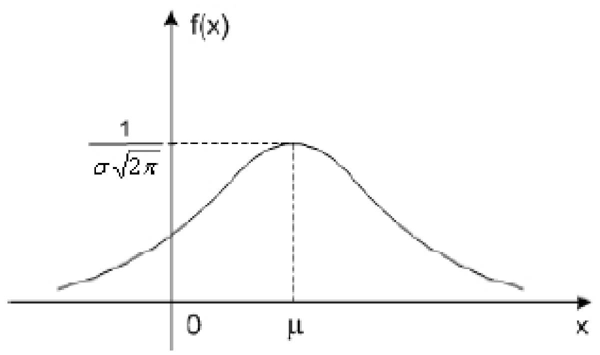
Có $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu + \sigma \\ x = \mu - \sigma \end{cases}$

Và $f(\mu+\sigma) = f(\mu-\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$. Vậy điểm uốn là:

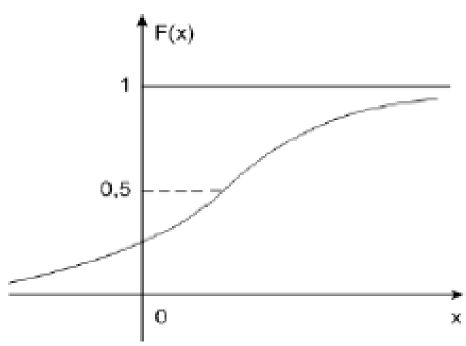
$$\left(\mu-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right) \quad \text{và} \quad \left(\mu+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right).$$

Từ đó ta có đồ thị hàm số:

Đồ thị:



Hình 3: Đồ thị hàm mật độ của phân phối chuẩn.



Hình 4: Đồ thị hàm phân phối xác suất của phân phối chuẩn.

Đồ thị hàm mật độ của phân phối chuẩn có dạng hình chuông nên phân phối chuẩn còn có tên gọi là phân phối hình chuông.

→ Do hàm mật độ của phân phối chuẩn không có nguyên hàm sơ cấp nên ta không thể biểu diễn hàm phân phối xác suất F(X) bởi một hàm số sơ cấp.

b) Các tham số đặc trưng.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Xét phép đổi biến $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ hay là: $x=\sigma Z+\mu,\ dx=\sigma dZ$, ta được:

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma Z+\mu)e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma Ze^{-\frac{Z^2}{2}}dZ+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ$$

Do $\sigma Ze^{-\frac{Z^2}{2}}$ là hàm lẻ và do tich phân thứ nhất có cận đối xứng qua gốc toạ độ, vì vậy tích phân thứ nhất bằng 0. Lại có $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ=\sqrt{2\pi}$, do đó, tích phân thứ hai bằng μ.

Kết hợp lại ta được:

$$E(X)=\mu.$$

Thực hiện phép đổi biến tương tự, ta có:

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Z^2e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ$$

Dùng công thức tích phân từng phần với: $\mu=Z,\ dv=Z^2e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ$, ta tính được: $V(X)=\sigma^2$ và:

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sigma.$$

c) **Phân phối chuẩn hóa:** Đại lượng NN được gọi là có phân phối chuẩn hóa nếu nó có phân phối chuẩn với μ=0 và σ^2=1; Kí hiệu U $\in$ N(0,1) hay U ~N(0,1).

Nhận xét: Nếu X $\in$ N(μ,σ^2) thì U=$\frac{X-\mu}{\sigma}$ $\in$ N(0,1).

d) Giá trị tới hạn chuẩn mức α (kí hiệu u_α): Giá trị tới hạn chuẩn mức α (bậc α) của U pp chuẩn hóa , kí hiệu u_α, là giá trị của U có pp chuẩn hóa thỏa mãn điều kiện P(U > u_α) = α.

Các giá trị u_α được tính sẵn thành bảng (Phụ lục 6).

$$p(U>u_\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_\alpha}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\alpha$$

Cho trước α, từ đó tính được u_α, và ngược lại

Giá trị tới hạn chuẩn có tính chất $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$.

e) Tính xác suất p(a<X<b) với $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$

Cách 1: P(a<X<b)? cho X ~ N(μ,σ²)

$$p(a < X < b) = \Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

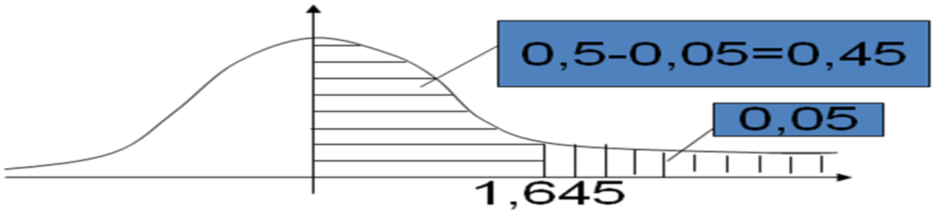
- **Trong đó** $\Phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

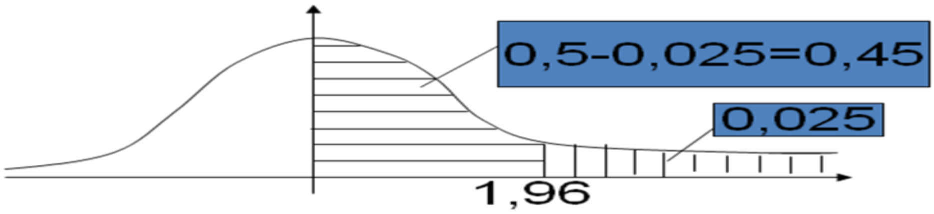
+ $\Phi_0(u)$ ------ Bảng Ph. lục 5

+ $\Phi_0(-u) = -\Phi_0(u)$

+ $\forall u>5$, $\Phi_0(u) \approx \Phi_0(5)=0,5$

VÍ DỤ1: $\Phi_0(1,645) = 0,45$; $\Phi_0(1,96) = 0,475$



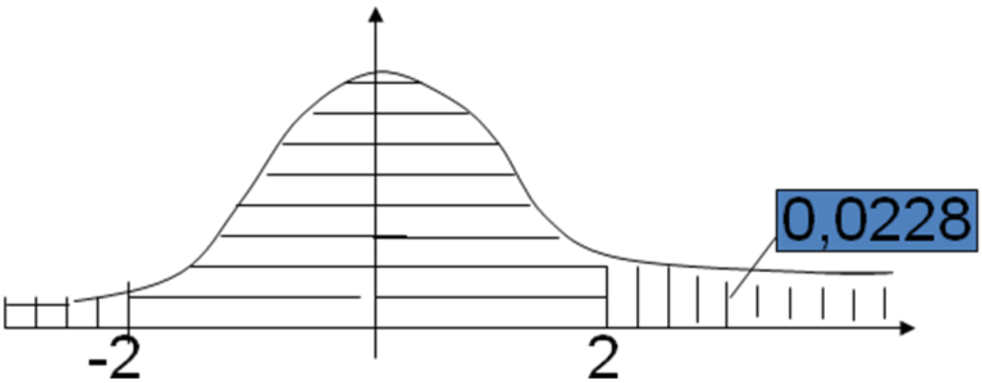


Do tính chất đối xứng của hàm Φ(u) nên các bảng cho điểm tới hạn chuẩn U_α cũng như các giá trị của hàm Φ_0 người ta chỉ thiết lập đối với những điểm u>0. Với u<0, ta xét các điểm đối xứng để từ đó suy ra.

VÍ DỤ1: Cho biết p(U < 2) = 0,9772

a) Hãy xác định bậc tới hạn của điểm 2 và điểm (-2)

b) Hãy xác định các giá trị Φ_0 tại điểm 2 và điểm (-2)



Cách 2: P(a<X<b)?

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P(u_1 < U < u_2)$$

VÍ DỤ2: X~N(0,12; $0,001^2$), P(0,118<X<0,122)=? (2 cách**)**

e) XS của sự sai lệch giữa BNN và kì vọng của nó

P(|X-μ|<ε) = P(μ-ε < X <μ+ε)

Áp dụng công thức:

$$p(a < X < b) = \Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Ta có kết luận:

$$p(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

VÍ DỤ (NT2011) Trọng lượng X (đơn vị: gam) của sản phẩm do máy tự động sản xuất là một biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn N(100,1). Sản phẩm gọi là đạt tiêu chuẩn nếu trọng lượng của nó đạt từ 98,04g đến 101,96g. Tính tỷ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn.

Bài giải:

Ta có

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ với } \mu = 100; \sigma^2 = 1$$

$$p(98,4 < X < 101,96) = P(|X-\mu| < 1,96) = 2\Phi_0\left(\frac{1,96}{1}\right) = 2\Phi_0(1,96) = 0,95$$

VÍ DỤ (NT2003): Tuổi thọ một loại sản phẩm làm ra là biến lượng ngẫu nhiên phân phối chuẩn với trung bình 4,2 năm và độ lệch chuẩn là 1,5 năm. Bán được một sản phẩm thì lãi 100 ngàn đồng, song nếu sản phẩm phải bảo hành thì lỗ 300 ngàn đồng. Vậy để tiền lãi trung bình khi bán mỗi sản phẩm là 30 ngàn đồng thì phải quy định thời gian bảo hành là bao nhiêu?

Bài giải:

Ta có

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ với } \mu = 4,2; \sigma = 1,5.$$

Gọi p là tỉ lệ sản phẩm không phải bảo hành.

Gọi Y là tiền lãi khi bán sản phẩm

$$E(Y) = p \times 100 + (1-p) \times (-300) = 30 \Rightarrow p = 0,825.$$

Gọi a là thời gian qui định bảo hành.

Suy ra:

$$p = p(X > a) = 0,825 \Rightarrow P\left(U > \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 0,825 \Rightarrow \frac{a-4,2}{1,5} = -0,93 \Rightarrow a = 2,805$$

Vậy cần quy định thời gian bảo hành là 2,805 năm.

VÍ DỤ (NT2002) Chiều dài của chi tiết máy được làm ra (đơn vị: cm) có phân bố chuẩn. Biết 65% số chi tiết được sản xuất có chiều dài lớn hơn 20 và 8% số chi tiết làm ra có chiều dài hơn 30.

a) Nếu chi tiết được chấp nhận có chiều dài nhỏ hơn 25 thì tỷ lệ phế phẩm bị loại là bao nhiêu?

b) Cần quy định chiều dài loại chi tiết tối thiểu là bao nhiêu để tỷ lệ sản phẩm bị loại nhỏ hơn 0,02.
Bài giải
X là chiều dài của chi tiết máy được tạo ra, theo bài ra:

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \text{ và } \begin{cases} P\left(X>20\right)=0,65 \\ P\left(X>30\right)=0,08 \end{cases}$$

Từ đó, ta có:

$$\begin{cases} P\left(X>20\right)=P\left(U>\dfrac{20-\mu}{\sigma}\right)=0,65 \\ P\left(X>30\right)=P\left(U>\dfrac{30-\mu}{\sigma}\right)=0,08 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{20-\mu}{\sigma}=-u_{0,35}=-0,39 \\ \dfrac{30-\mu}{\sigma}=u_{0,08}=1,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu=22,18 \\ \sigma=5,59 \end{cases}$$

a) Tỉ lệ phế phẩm bị loại là

$$P\left(X>25\right)=P\left(U>\frac{25-\mu}{\sigma}\right)=P(U>0,5)=0,308$$

b) Gọi a là chiều dài quy định để loại chi tiết, ta cần tìm a bé nhất sao cho P(X > a) < 0,02.
Ta có:

$$P\left(X>a\right)=P\left(U>\frac{a-22,18}{5,59}\right)<0,02 \Rightarrow \frac{a-22,18}{5,59}\geq u_{0,02}=2,05 \Rightarrow a\geq 33,6395$$

Chiều dài quy định tối thiểu là 33.6395.

f) Quy tắc "2σ" và "3σ"

$$p\left(\left|X-\mu\right|<2\sigma\right)=2\Phi_0\left(2\right)=0,9544=95,44\%$$
$$p\left(\left|X-\mu\right|<3\sigma\right)=2\Phi_0\left(3\right)=0,9994=99,74\%$$

Như vậy, xác suất để biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn nhận giá trị trong khoảng (μ-2σ<X<μ+2σ) là 95,44%;
xác suất để biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn nhận giá trị trong khoảng (μ-3σ<X<μ+3σ) là 99,94%.

• **Sự hội tụ của phân phối nhị thức về phân phối chuẩn** (Cao văn, tr. 186)**:**
Khi sử dụng quy luật nhị thức, nếu n khá lớn, thì việc tính toán theo công thức Bernoulli sẽ gặp khó khăn. Lúc đó nếu p nhỏ đến mức np≈npq thì có thể dùng quy luật Poisson thay thế cho quy luật nhị thức. Song nếu p lại không nhỏ (p > 0,1) thì không thể dùng quy luật Poisson để thay thế được. Khi đó có thể dùng quy luật chuẩn để thay thế quy luật nhị thức như sau:

(i) Nếu n>5 và $\left|\sqrt{\dfrac{p}{1-p}}-\sqrt{\dfrac{1-p}{p}}\right|\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}<0,3$ thì biến ngẫu nhiên phân phối B(n, p) có thể coi như phân phối xấp xỉ chuẩn với kỳ vọng toán μ=np; σ^2 = npq. Từ đó:

$$P\left(X=x\right)=C_n^x p^x q^{n-x}\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

(Định lý địa phương Laplace)

Mặt khác:

$$P\left(x\leq X\leq x+h\right)=P_x+P_{x+1}+\cdots+P_{x+h}\approx\Phi_0\left(\frac{x+h-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi_0\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Để giảm sai số, ta có công thức hiệu chỉnh:

$$P\left(x \le X \le x+h\right) = P\left(x-0.5 < X < x+h+0.5\right) \approx \Phi_0\left(\frac{x+h+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

(ii) *Định lý giới hạn trung tâm:* Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ là n biến ngẫu nhiên độc lập lẫn nhau và cùng tuân theo một quy luật phân phối xác suất nào đó với các kỳ vọng toán $E(X_1), E(X_2), ..., E(X_n)$ và các phương sai $V(X_1), V(X_2), ..., V(X_n)$ hữu hạn đã biết thì biến ngẫu nhiên $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sẽ có phân phối xấp xỉ chuẩn với $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)$ và $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right)$ khi n khá lớn ($n \ge 30$). Do vậy: Khi n khá lớn ($n \ge 30$) và p không quá gần 0, cũng không quá gần 1 ($0 < p < 1$) thì quy luật phân phối nhị thức xấp xỉ quy luật phân phối chuẩn

Ví dụ: Tỉ lệ sản phẩm loại A của 1 máy là 25%. Cho máy sản xuất 250 lượt, tính xác suất để trong 250 sản phẩm đó có 70 sản phẩm loại A.

Giải. Gọi X là số sản phẩm loại A có trong 250 sản phẩm.

$X \sim B(n = 250;\ \ p = 0,25)$. Do n=250 nên ta có thể coi:

$$X \sim N(\mu;\sigma^2);\quad \mu = np = 62,5;\quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 6,8465$$

$$P\{X = 70\} \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{70-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1}{6,8465}\varphi\left(\frac{70-62,5}{6,8465}\right) = \frac{\varphi(1,1)}{6,8465} \approx 0,0194$$

3.4. Luật Poisson.

Phân phối này được tìm ra bởi nhà toán học Siméon-Denis Poisson (1781–1840) và đã được xuất bản cùng với lý thuyết xác suất của ông, vào năm 1838 với tựa đề *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* ("Research on the Probability of Judgments in Criminal and Civil Matters").

Trong lý thuyết xác suất và thống kê, **Phân phối Poisson** (*phân phối Poa-xông*) là một phân phối xác suất rời rạc. Nó khác với các phân phối xác suất rời rạc khác ở chỗ thông tin cho biết không phải là xác suất để một sự kiện (*event*) xảy ra (thành công) trong một lần thử như trong phân phối Bernoulli, hay là số lần mà sự kiện đó xảy ra trong *n* lần thử như trong phân phối nhị thức, mà chính là **trung bình số lần xảy ra thành công của một sự kiện trong một khoảng thời gian nhất định**. Giá trị trung bình này được gọi là **lamda**, kí hiệu là λ.

a) Định nghĩa.

Giả sử tiến hành n phép thử độc lập, trong mỗi phép thử xác suất để biến cố A xảy ra đều bằng p và không xảy ra đều bằng q=1-p. Lúc đó, nếu gọi X là số lần xuất hiện biến cố A trong n phép thử đó thì X phân phối theo quy luật nhị thức và xác suất để X nhận một trong các giá trị có thể có của nó được tính bằng công thức Bernoulli. Tuy nhiên, nếu số phép thử n quá lớn mà xác suất p lại quá nhỏ thì việc tính toán sẽ gặp nhiều khó khăn. Vì vậy, trong trường hợp này người ta sử dụng công thức xấp xỉ Poisson.

Một cách tổng quát, quy luật Poisson được định nghĩa như sau:

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận một trong các giá trị có thể có X= 0,1,… với xác suất được tính bằng công thức:

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad x=0,1,2,...$$

gọi là phân phối theo quy luật Poisson với tham số là λ.

Kí hiệu: X ~ P(λ)

Trong thực tế, công thức Poisson có thể dùng thay cho công thức Bernoulli nếu thỏa mãn điều kiện np ≥ 20 và p ≤ 0,1, tức là np ≈ npq.

b) Các tham số đặc trưng.

$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} x.e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$. Lại có $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=e^{\lambda}$

Do đó: $E(X)=e^{-\lambda}.e^{\lambda}.\lambda=\lambda$

Bằng cách tương tự ta có thể tính được: $E(X^2)=\lambda^2-\lambda$.

Do đó, $V(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$.

Từ đó: $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}$

Ví dụ (Cao Văn, tr. 161). Một máy dệt có 5000 ống sợi. Xác suất để một giờ máy hoạt động có một ống sợi bị đứt là 0,0002. Tìm xác suất để trong một phút máy hoạt động có không quá 2 ống sợi bị đứt.

Giải

Gọi X là số ống sợi bị đứt trong 1 phút. Ta có: X ~ B(n=5000; p=0,0002).

Vì n = 5000 rất lớn, p=0,0002 quá nhỏ và tích np = 1 ≈ npq.

Do đó, có thể coi X phân phối xấp xỉ quy luật Poisson P(λ) với λ =1.

Xác suất để trong một phút máy hoạt động có không quá 2 ống sợi bị đứt là:

$$P(0\le X\le 2)=P_0+P_1+P_2=e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}+e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}+e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}=2,71^{-0}\frac{0^0}{0!}+2,71^{-1}\frac{1^1}{1!}+2,71^{-1}\frac{1^2}{2!}=0,9225$$

Ví dụ: Mỗi chuyến xe chở được 1000 chai bia. Xác suất để một chai bia bị vỡ khi vận chuyển là 0,001. Tìm xác suất để khi vận chuyển có:

a) 2 chai vỡ; số chai vỡ không ít hơn 2.

b) Số chai vỡ trung bình khi vận chuyển.

Giải.

a) Gọi số chai vỡ khi vận chuyển 1000 chai là X: $X \sim B(1000;0,001); np=1$ với p khá bé; n khá lớn nên ta coi $X \sim P(\lambda), \lambda=1$.

$$P\{X=2\}\approx e^{-1}\times\frac{1^2}{2!}\approx 0,1839$$

$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X\leq 1\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}\approx 1-e^{-1}\times\frac{1^0}{0!}-e^{-1}\times\frac{1^1}{1!}\approx 0,2642$$

b) Số chai vỡ trung bình: E(X)= λ =1

Ví dụ: Một trạm điện thoại tự động nhận được trung bình 300 cuộc gọi trong một giờ. Tìm xác suất trạm điện thoại này nhận a) đúng hai cuộc gọi trong một phút,

b) không ít hơn hai cuộc gọi trong một phút.

Giải:

Gọi X là số cuộc điện thoại gọi đến trong một phút.

λ là số cuộc điện thoại trung bình gọi đến trong một phút: $\lambda=\frac{300}{60}=5$

Suy ra: X~ $\underline{P}(\lambda)$

Ta có: $P(X=K)=\frac{e^{-5}.5^K}{K!}, K=\left(\overline{0,n}\right)$

a) Gọi A là biến cố trong một phút có đúng hai cuộc gọi đến.

Suy ra: $P(A)=P(X=2)=\frac{e^{-5}5^2}{2!}=0,0842$

b) Gọi B là biến cố trong một phút không ít hơn 2 cuộc điện thoại gọi đến.

Suy ra: $P(B)=P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]$

$$=1-[\frac{e^{-5}}{1}+\frac{e^{-5}.5}{1}]=1-6e^{-5}=0,9595$$

Vậy: Xác suất trạm điện thoại nhận đúng hai cuộc gọi trong một phút là 0,0842

Xác suất trạm điện thoại nhận không ít hơn hai cuộc gọi trong một phút là 0,9595

Ví dụ: Trong 1000 trang sách có 100 lỗi in sai. Tìm xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một trang sách này có

a) đúng 3 lỗi in sai,

b) nhiều hơn 3 lỗi in sai.

Giải:

Gọi X là số lỗi in sai trong một trang sách.

λ là số lỗi in sai trung bình trong một trang sách: $\lambda=\frac{100}{1000}=0,1$

Suy ra: X ~ P(λ)

Ta có: $P(X=K)=\frac{e^{-0,1}.0,1^K}{K!}, K=\left(\overline{0,n}\right)$

a) Gọi A là biến cố trong một trang sách có đúng 3 lỗi in sai.

Suy ra: $P(A)=P(X=3)=\frac{e^{-0,1}.0,1^3}{3!}=0,00015$

b) Gọi B là biến cố trong một trang sách có nhiều hơn 3 lỗi in sai.

Suy ra: $P(B)=P(X>3)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]$

$$=1-(\frac{e^{-0,1}.0,1^0}{0!}+\frac{e^{-0,1}.0,1^1}{1!}+\frac{e^{-0,1}.0,1^2}{2!}+\frac{e^{-0,1}.0,1^3}{3!})=0,0000038$$

Vậy: Xác suất để một trang sách có đúng 3 lỗi in sai là: 0,00015

Xác suất để một trang sách có nhiều hơn 3 lỗi in sai là: 0,0000038

• **Sự hội tụ của quy luật Poisson về quy luật chuẩn:** Đối với quy luật Poisson thì quá trình hội tụ của nó về quy luật chuẩn sẽ diễn ra khi λ trở nên lớn hơn 20. Vì vậy, nếu X phân phối Poisson P(λ) với λ > 20 thì có thể xem X ohân phối xấp xỉ chuẩn với μ= λ; σ^2 = λ.

3.5. Quy luật siêu bội H(N,n,m)

a) Ví dụ: Trong bình có N quả cầu, trong đó có M quả cầu trắng và N-m quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt ra n quả cầu theo phương thức không hoàn lại. Gọi X là số quả cầu trắng lấy được. Lập bảng phân phối xác suất của X?

$$X \sim H(N, M, n)$$

b) Định nghĩa: X ~ H(N, M, n) nếu

$$\begin{cases} X = 0,1,2,...,n \\ p(X = x) = \dfrac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \end{cases}$$

c) Các tham số đặc trưng:

$$\begin{cases} E(X) = np \\ V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1} \end{cases}$$

• **Xấp xỉ phân phối siêu bội về quy luật nhị thức:** Khi N khá lớn so với n thì $X \approx B(n,p);\ p = \dfrac{M}{N}$

Do đó:

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

Ví dụ: Trong 20 giấy báo thuế thu nhập có 3 tờ mắc sai sót. Lấy ngẫu nhiên 5 giấy để kiểm tra. Tìm quy luật phân phối xác suất, trung bình và phương sai của số giấy mắc sai sót có trong 5 giấy lấy ra.

Giải. Gọi X là số giấy mắc sai sót trong 5 tờ giấy lấy ra.

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3\} \quad \Rightarrow \quad X \sim H(20;3;5)$$

$$P\{X=0\} = \frac{C_{17}^5}{C_{20}^5} \approx 0,3991; P\{X=1\} = \frac{C_3^1.C_{17}^4}{C_{20}^5} \approx 0,4605$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_3^2.C_{17}^3}{C_{20}^5} \approx 0,1316; P\{X=3\} = \frac{C_3^3.C_{17}^1}{C_{20}^5} \approx 0,0088$$

Phân phối xác suất của X:

X	0	1	2	3
P	0,3991	0,4605	0,1316	0,0088

$$X \sim H(20;3;5): E(X) = np = 5.\frac{3}{20} = 0,75$$

$$V(X) = np(1-p).\frac{N-n}{N-1} = 5.\frac{3}{20}.\frac{17}{20}.\frac{20-5}{20-1} = \frac{153}{304} \approx 0,5033$$

Ví dụ: Cho 2 lô hàng, mỗi lô có 1000 sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm loại B trong từng lô lần lượt là 10%, 20%. Người mua lấy ngẫu nhiên 10 sản phẩm để kiểm tra. Nếu trong 10 sản phẩm lấy ra từ lô hàng nào có không quá 2 sản phẩm loại B thì mua lô hàng đó. Tính xác suất có lô hàng được mua.

Giải. Gọi X_i là số sản phẩm loại B có trong 10 sản phẩm lấy từ lô i(i=1;2)

Gọi A là biến cố có lô hàng được mua

$$X_1 \sim H(N=1000; M=10\%.1000=100; n=10); X_2 \sim H(N=1000; M=20\%.1000=200; n=10)$$

Vì N=1000 khá lớn so với n=10 nên ta coi

$$X_1 \sim B(10; p_1); p_1 = 10\% = 0,1.$$
$$X_2 \sim B(10; p_2); p_2 = 20\% = 0,2.$$
$$P\{X_1 \le 2\} = P\{X_1 = 0\} + P\{X_1 = 1\} + P\{X_1 = 2\} = 0,9296$$
$$P\{X_2 \le 2\} = P\{X_2 = 0\} + P\{X_2 = 1\} + P\{X_2 = 2\} = 0,6778$$
$$P(A) = P\{(X_1 \le 2) + (X_2 \le 2)\} = P(X_1 \le 2) + P(X_2 \le 2) - P(X_1 \le 2).P(X_2 \le 2) = 0,97738$$

Ví dụ: Một nhà máy có 3 phân xưởng cùng sản xuất ra một loại sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm loại B của các phân xưởng tương ứng là: 10%, 20%, 30%. Từ một lô hàng có 10000 sản phẩm gồm 3000 sản phẩm của phân xưởng 1; 4000 sản phẩm của phân xưởng 2 và 3000 sản phẩm của phân xưởng 3, người ta chọn ra ngẫu nhiên 100 sản phẩm để kiểm tra. Nếu thấy có không quá 24 sản phẩm loại B trong 100 sản phẩm kiểm tra thì mua lô hàng đó. Tính xác suất lô hàng được mua?

Giải

Số sản phẩm lọa B của các phân xưởng tương ứng là: 300; 800; 900.

$$X \sim H(N=10000; M=300+800+900=2000; n=100)$$

Vì N=10000 rất lớn so với n=100 nên có thể xấp xỉ $X \sim B\left(n=100; p=\dfrac{2000}{10000}=0,2\right)$ với

$\mu = np = 20; \quad \sigma = \sqrt{npq} = 4$

Kiểm tra tiêu chuẩn xấp xỉ của quy luật nhị thức, ta có: $X \sim N(\mu=20; \sigma=4)$.

Từ đó tính được xác suất mua lô hàng theo quy luật phân phối chuẩn.

3.6. Quy luật phân phối đều U(a,b)

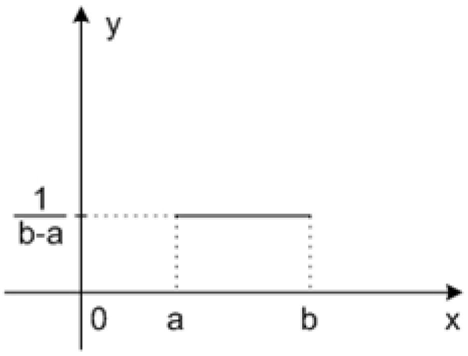
a) Định nghĩa:

$$X \sim U(a,b) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & khi\ x \in (a,b) \\ 0 & khi\ x \notin (a,b) \end{cases}$$

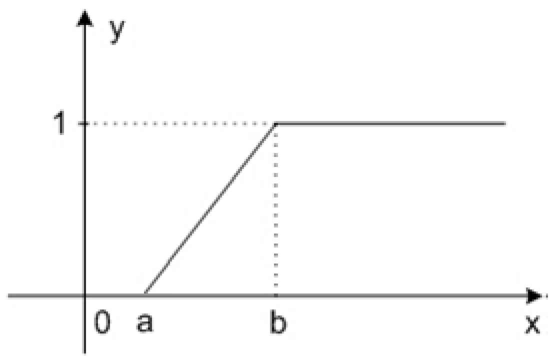
Hàm phân phối xác suất: Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên có phân phối đều là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{nếu } a \le x \le b \\ 1 & \text{nếu } x > b \end{cases}$$

- Đồ thị: Ta xét đồ thị của hàm mật độ và hàm phân phối xác suất của phân phối đều trên [a,b] là:



Hình 1: Đồ thị hàm mật độ của phân phối đều.



Hình 2: Đồ thị hàm phân phối xác suất của phân phối đều.

b) Tham số đặc trưng:

$$E(X) = \frac{a+b}{2};$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Chứng minh

Kỳ vọng: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2} = Med(X)$

Phương sai: $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Với: $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$ (Tính ở trên)

Suy ra phương sai: $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$= \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ví dụ: Khi thâm nhập vào thị trường mới, doanh nghiệp không thể khẳng định được một cách chắc chắn doanh số hàng tháng có thể đạt được sẽ là bao nhiêu mà chỉ dự kiến được rằng doanh số tối thiểu sẽ là 20 triệu đồng/tháng và tối đa là 40 triệu đồng/tháng. Tìm xác suất để doanh nghiệp đạt được doanh số tối thiểu là 35 triệu đồng/tháng.

Giải. Gọi X là doanh số thàng tháng mà doanh nghiệp có thể đạt được ở thị trường đó. Do không có thông tin gì hơn, nên có thể xem X là biến ngẫu nhiên liên tục phân phối đều trên khoảng (20; 40).

Vậy X có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40-20} = 0,05 & \text{khi } x \in (20;40) \\ 0 & \text{khi } x \notin (20;40) \end{cases}$$

Từ đó xác suất để doanh nghiệp đạt được doanh số tối thiểu là 35 triệu đồng/tháng là:

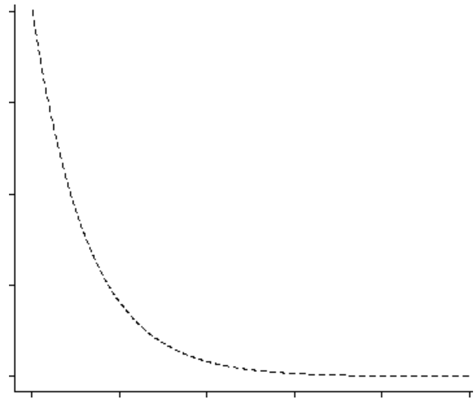
$$P(X>35)=\int_{35}^{+\infty} f(x)dx=\int_{35}^{40} 0,05\,dx==0,25\,.$$

3.7. Quy luật phân phối lũy thừa E(λ)

a) Định nghĩa:

$$X \sim E(\lambda) \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}0 & khi\, x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} khi\, x\geq 0\end{cases}$$

b) Các tham số đặc trưng: $E(X)=\sigma_X=\dfrac{1}{\lambda}$



Người ta chứng minh được rằng thời gian giữa hai lần xuất hiện yêu cầu của một dòng yêu cầu tối giản trong các hệ thống phục vụ công cộng phân phối theo quy luật lũy thừa. Trong các hệ thống kỹ thuật, thời gian làm việc liên tuch của máy móc thiết bị giữa hai lần sửa chữa cũng thường phân phố thưo quy luật lũy thừa.

Ví dụ: Khoảng cách thời gian mà hai khách hàng kế tiếp nhau đến ngân hàng là biến ngẫu nhiên phân phối lũy thừa với trung bình là 3 phút. Giả sử vừa có 1 khách đến. Tìm xác suất để trong vòng ít nhất 2 phút nữa mới có người khách tiếp theo?

3.8. Luật khi bình phương.

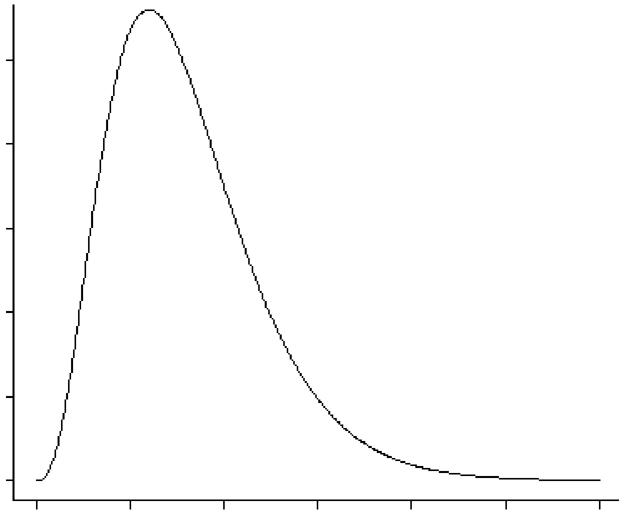
a) Định nghĩa.

Biến ngẫu nhiên liên tục χ^2 gọi là phân phối theo quy luật khi bình phương với n bậc tự do (kí hiệu là: $\chi^{2(n)}$) nếu hàm mật độ xác suất của nó được xác định bằng biểu thức sau:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}.x^{\frac{n}{2}-1} & x>0\end{cases}$$

Trong đó: $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ là hàm Gamma. Nếu n là một số nguyên thì $\Gamma(n+1)=n!$.

$f(\chi^2)$



b) Các tham số đặc trưng.

$$E\left(\chi^2\right) = n$$

$$V\left(\chi^2\right) = 2n,\ \sigma_{\chi^2} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2n}.$$

c) Tính chất

(1) Cho một dãy các biến ngẫu nhiên: x_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ độc lập, cùng phân phối chuẩn hoá.

Khi đó, xét: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ thì $\chi^2 \sim \chi^{2(n)}$.

(2) Cho $\chi_1^2 \sim \chi^{2(n_1)}$ và $\chi_2^2 \sim \chi^{2(n_2)} \Rightarrow \chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^{2(n_1+n_2)}$

3.9. Luật Student n bậc tự do.

a) Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên liên tục T được gọi là phân phối theo quy luật Student với n bậc tự do (Kí hiệu là: T(n)) nếu hàm mật độ xác suất của nó được xác định bằng biểu thức sau:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[1+\frac{t^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}} \quad \forall t$$ Trong đó: $\Gamma(x)$ là hàm Gamma.

b) Các tham số đặc trưng.

Người ta có thể tính được: E(T) = 0; $V(T) = \frac{n}{n-2}, \sigma_T = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$

c) Tính chất.

Cho U ~ N(0.1) và V~ $\chi^{2(n)}$ trong đó U và V độc lập với nhau.

Khi đó, xét: $T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ thì T ~ T(n).

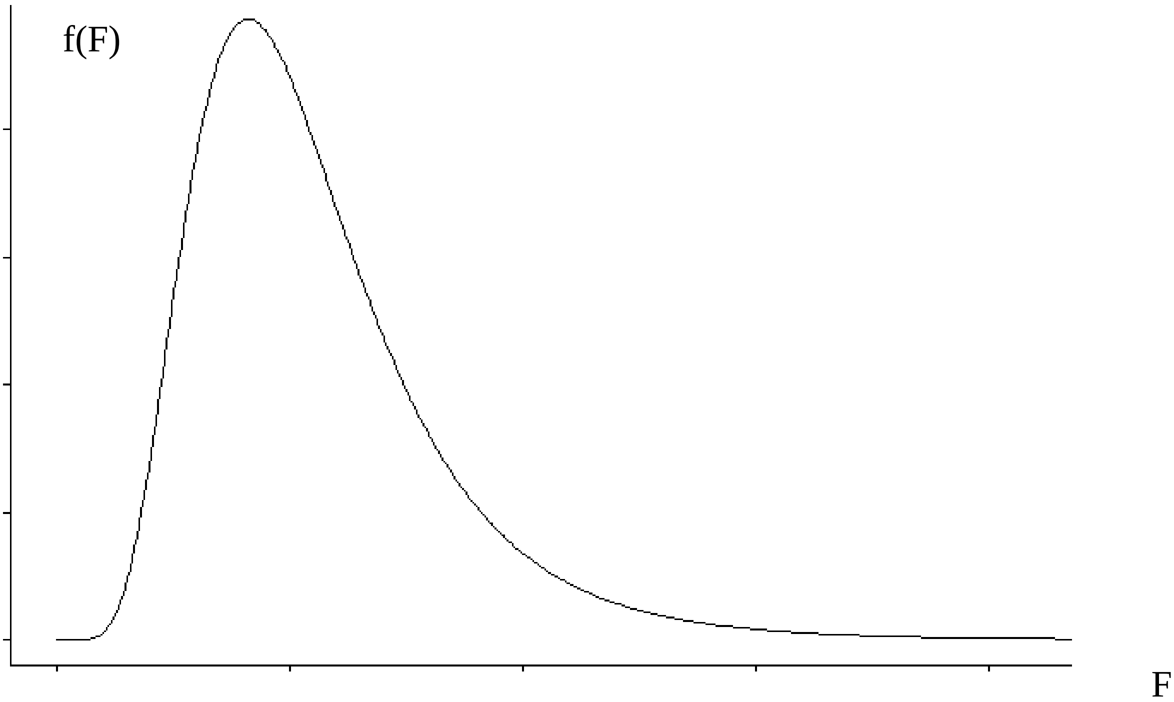
Khi n > 30 thì T xấp xỉ phân phối chuẩn hóa.

3.10. Luật Fisher - Snedecor - F(n1,n2)

a. Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên liên tục F gọi là phân phối theo quy luật Fisher -Snedecor với n_1, n_2 bậc tự do (Kí hiệu là: $F(n_1,n_2)$) nếu hàm mật độ xác suất của nó được xác định bằng biểu thức sau:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ C\dfrac{x^{\frac{n_1-n_2}{2}}}{(n_2+n_1).x^{\frac{n_1-n_2}{2}}} & x>0\end{cases}$$ với: $$C=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right).n_1^{\frac{n_1}{2}}.n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)}.$$



b. Các tham số đặc trưng.

Người ta tính được kì vọng: $E(F)=\dfrac{n_2}{n_2-2}$

Và phương sai: $$V(F)=\frac{2n_2^2(n_1+n_2^2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$$

Độ lệch chuẩn: $$\sigma_F=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2n_2^2(n_1+n_2^2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}}$$

c. Tính chất

Cho U ~ $\chi^{2(n_1)}$ và V~ $\chi^{2(n_2)}$. Khi đó, xét: $F=\dfrac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}$ thì F ~ $F(n_1,n_2)$.

3.11. Luật số lớn

Khi xem xét một số lớn các biến ngẫu nhiên thì tính ngẫu nhiên mất đi và quy luật tất định được bộc lộ.

Bất đẳng thức Trêbưsep

Nếu X là biến ngẫu nhiên có kì vọng toán và phương sai hữu hạn thì với mọi số dương ε tùy ý, ta đều có:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Định lý Trêbưsep

Nếu các biến $X_1, X_2, ..., X_n$ độc lập từng đôi và có các kì vọng, phương sai đều bị chặn trên bởi hằng số C thì với mọi ε dương bé tùy ý, ta luôn có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Hệ quả: Nếu các biến $X_1, X_2, ..., X_n$ độc lập từng đôi và có kì vọng μ, phương sai $V(X_i) \leq C$ thì với mọi ε dương bé tùy ý, ta luôn có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Định lý Bernoulli

f là tần suất xuất hiện biến cố A trong lược đồ Bernoulli (n,p). Khi đó:

3.12. Một số chú ý

- Tính khép kín của quy luật chuẩn: Cho Xi (i=1,2,…,n) là n BNN thành phần thỏa mãn
  - Độc lập với nhau
  - X_i tuân theo quy luật $N(\mu,\sigma_i^2)$

Khi đó $\sum a_i X_i$ (a_i là các hằng số) cũng tuân theo qlpp chuẩn với $E(\sum a_i X_i) = \sum a_i \mu_i$; $V(\sum a_i X_i) = \sum a_i^2 \sigma_i^2$.

- Giả sử n BNN: $X_1, X_2, …, X_n$ cùng tuân theo N(0,1) thì $X = \sum X_i^2$ sẽ tuân theo quy luật χ2 với n bậc tự do.

- U~N(0,1), V~χ2(n)

  U, V độc lập

$$\Rightarrow\ T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim T(n)$$

- U, V độc lập

  $U \sim \chi^2(n_1)$, $V \sim \chi^2(n_2)$

$$\Rightarrow\ F = \frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}} \sim F(n_1, n_2)$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

3.1. Một lô có 12 thùng sản phẩm, mỗi thùng có 10 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm Lấy ngẫu nhiên từ mỗi thùng một sản phẩm để kiểm tra Tìm số phế phẩm tin chắc nhất và số phế phẩm trung bình có trong các sản phẩm lấy ra.

X= số phế phẩm trong 12 sản phẩm lấy ra

$X \sim B(n=12;\ p=0.3)$

số phế phẩm tin chắc nhất = m_o: $np+p-1 \le m_0 \le np+p \Rightarrow 2.9 \le m_0 \le 3.9 \Rightarrow m_0 = 3$.

số phế phẩm trung bình = $E(X) = np = 12 * 0.3 = 3.6$

3.2. Biến cố nào trong các biến cố sau có xác suất lớn hơn.

a) Có ít nhất 2 lần xuất hiện mặt 6 chấm khi gieo con súc sắc 12 lần.

X= số lần xuất hiện mặt 6 chấm khi gieo ss 12 lần. $X \sim B(n=12; p=1/6)$

$P(X\ge 2) = 1 - p(X<2) = 1-[p(X=0) + p(X=1)] = 1-C_{12}^{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{12}-C_{12}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{11}=0{,}62$

b) Có ít nhất 3 lần xuất hiện mặt mặt 6 chấm khi gieo con súc sắc 18 lần.

X= số lần xuất hiện mặt 6 chấm khi gieo ss 18 lần. $X \sim B(n=12; p=1/6)$

$P(X\ge 3) = 1 - p(X<3) = 1-[p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)] =$

$= 1-C_{18}^{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{18}-C_{18}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{17}-C_{18}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{16}=0{,}597$

3.3. Trong một nhà máy có 3 phân xưởng dệt Mỗi phân xưởng có 100 máy dệt hoạt động độc lập với nhau. Xác suất trong một ca sản xuất mỗi máy dệt bị hỏng là như nhau và bằng 2,5%.

a) Tìm luật phân phối xác suất của số máy hỏng trong một ca sản xuất của 1 phân xưởng.

Gọi X là số máy dệt bị hỏng trong một ca sản suất của một phân xưởng

$X \sim B(n=100;\ p=0{,}025)$.

Gọi Y là số máy dệt bị hỏng trong một ca sản suất của 2 phân xưởng

$Y \sim B(n=200;\ p=0{,}025)$.

b) Trung bình trong một ca sản xuất toàn nhà máy có bao nhiêu máy dệt bị hỏng?

$Z = X1+X2+X3 \sim B(n=300;\ p=0{,}025)$.

$E(Z) = E(X1+X2+X3) = E(X1) + E(X2) + E(X3) = 3 * 100 * 0{,}025 = \ldots$

c) Nếu mỗi kĩ sư có thể chữa được tối đa 2 máy dệt bị hỏng trong 1 ca sản xuất thì nhà máy cần bố trí trực sửa chữa mỗi ca bao nhiêu kĩ sư là hợp lí nhất.

$np + p - 1 \le Mod(X) \le np+p \Rightarrow 1{,}525 \le Mod(X) \le 2{,}525 \Rightarrow Mod(X) = 2$

$Mod(Z) = ?$

$Z = X1+X2+X3 \sim B(n=300;\ p=0,025)$.

$Mod(Z) = Mod(X1) + Mod(X2) + Mod(X3) = 2+2+2 = 6$

3.4. Thời gian (tính bằng tháng) từ lúc vay tới lúc trả tiền của một khách hàng tại một ngân hàng là biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn trung bình 18 tháng, độ lệch tiêu chuẩn 4 tháng.

a) Tính tỉ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng trong khoảng từ 10 đến 19 tháng; không ít hơn một năm; ít hơn 9 tháng.

b) Khoảng thời gian tối thiểu là bao nhiêu để tỉ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng vượt quá thời gian đó không quá 1%.

3.5. Giả sử thời gian X (đơn vị là phút) đi từ nhà Hải đến cơ quan là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn trung bình 40 phút, độ lệch tiêu chuẩn 7 phút. Nếu Hải muốn 95% khả năng không bị trễ cuộc họp tại cơ quan lúc 1 giờ chiều thì thời điểm chậm nhất Hải phải rời nhà là bao nhiêu?

3.6. Giả sử $X \sim N(5, \sigma^2)$, nếu $P\{X > 9\} =0,2$. Tìm σ^2

3.7. Trọng lượng của các sản phẩm là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn trung bình 50g và phương sai 100 g^2. Sản phẩm được đóng thành thùng, mỗi thùng 100 sản phẩm. Thùng có trọng lượng trên 5,1 kg là loại I. Tìm tỉ lệ thùng loại I.

3.8. Tuổi thọ của một chip máy tính là X (đơn vị: giờ) với $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 1,4.10^6, \sigma = 0,3.10^6$

Chip có tuổi thọ hơn $1,6.10^6$ là loại I.

a) Tính xác suất trong 6 loại chip này hoạt động độc lập: có 2 chip loại I. Tìm số chip loại I trung bình có trong 6 chip.

b) Tính xác suất trong mạng máy tính có 100 chip loại này hoạt động độc lập có trên 30 chip loại I. Tìm số chip loại I đáng tin nhất trong 100 chip.

3.9. Một công ti du lịch nhận đăng kí phòng khách sạn của 150 khách. Kinh nghiệm những năm trước cho biết 15% khách đăng kí nhưng không nhận phòng. Công ti cần phải chuẩn bị ít nhất bao nhiêu phòng để tỉ lệ khách đăng kí nhưng không có phòng ít hơn 1%.

3.10. Trọng lượng X của một loại trái cây (đơn vị : gam) là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai bằng 100 $(gam)^2$. Một trái cây loại này đạt tiêu chuẩn xuất khẩu nếu có trọng lượng tối thiểu là 85 gam. Cho tỉ lệ trái cây đạt tiêu chuẩn xuất khẩu là 6,68%.

a) Lấy ngẫu nhiên 6 loại trái cây này. Gọi Y là số trái cây có trọng lượng tối thiểu là 80 gam. Tìm kì vọng và phương sai của $\frac{Y}{3}$

b) Tính xác suất có ít nhất 1 trong 6 trái cây được chọn ngẫu nhiên có trọng lượng đạt tối thiểu 80 gam.

3.11. Chiều cao của một người trưởng thành có phân phối chuẩn với trung bình 175 và độ lệch tiêu chuẩn 4 cm. Hãy xác định:

a) Tỉ lệ người trưởng thành có tầm vóc trên 180 cm.

b) Tỉ lệ người trưởng thành có chiều cao từ 166 cm đến 177 cm.

c) Tìm giá trị của m, biết 33% người trưởng thành có chiều cao dưới mức m.

d) Giới hạn biến động chiều cao của 90% người trưởng thành xung quanh giá trị trung bình.

3.12. Lãi suất (%) đầu tư vào một dự án trong năm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Theo đánh giá của Ủy ban đầu tư thì khả năng cho lãi suất cao hơn 20% là 15,87% và cho lãi suất cao hơn 25% là 2,28%. Vậy khả năng đầu tư không bị thua lỗ là bao nhiêu?

3.13. Có hai thị trường A và B, lãi suất cổ phiếu trên hai thị trường này là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, độc lập có kì vọng và phương sai:

	Trung bình	Phương sai
Thị trường A	19%	36
Thị trường B	22%	100

a) Nếu nhằm mục đích đạt lợi nhuận tối thiểu là 10% thì đầu tư vào loại cổ phiếu nào?

b) Để tránh rủi ro thì nên đầu tư vào cổ phiếu trên cả hai thị trường theo tỉ lệ nào?

a) Gọi X (kg) là trọng lượng của loại trái cây đã cho.

3.14. Chiều cao của nam giới trưởng thành là biến ngẫu nhiên X (cm), $X \sim N(160,36)$.

Tìm xác suất khi chọn ngẫu nhiên 5 nam giới trưởng thành có ít nhất 1 người có chiều cao trong khoảng (158,162) (cm).

3.15. Thời gian đi từ nhà tới trường của An là biến ngẫu nhiên T (đơn vị: phút) có phân phối chuẩn. Biết rằng 65% số ngày An đến trường mất hơn 20 phút; 8% số ngày mất hơn 30 phút.

a) Tính thời gian trung bình và độ lệch tiêu chuẩn.

b) Giả sử An xuất phát từ nhà trước giờ học 25 phút. Tính xác suất để An bị muộn học.

3.16. Một nhà máy bán một loại sản phẩm nào đó với giá 1 USD/1 sản phẩm. Trọng lượng của sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn kì vọng μ (kg) và độ lệch chuẩn 1 (kg). Giá thành làm ra một sản phẩm là: $C = 0,05\mu + 0,3$.

Nếu sản phẩm có trọng lượng bé hơn 8 kg thì phải loại bỏ vì không bán được. Tìm μ để lợi nhuận của nhà máy là lớn nhất.

3.17. Một điều khoản khi kí hợp đồng đấu thầu một dự án là nhà thầu cần chỉ ra thời gian hoàn thành dự án là bao lâu và sẽ bị phạt nếu trễ thời gian hoàn thành. Nếu thời gian hoàn thành dự án của một nhà thầu là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn trung bình 40 tuần, độ lệch tiêu chuẩn 5 tuần thì

a) Xác suất nhà thầu bị phạt là bao nhiêu khi đưa vào hợp đồng thời hạn hoàn thành là 43 tuần.

b) Nhà thầu định đặt thời hạn hoàn thành dự án là bao nhiêu để với thời gian đó khả năng bị phạt không quá 5%.

3.18. Gọi X là trọng lượng (tính bằng kg) của một bao phân bón được đóng gói tự động và $X \sim (10;0,05^2)$.

a) Tính tỉ lệ các bao phân bón có trọng lượng sai lệch so với trọng lượng quy định 10 (kg) không quá 100 gam.

b) Tính xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một bao phân bón gặp bao có trọng lượng trên 10,1 kg.

c) Lấy ngẫu nhiên 100 bao phân bón. Tìm số bao nhiều khả năng nhất và số bao trung bình có trọng lượng mà sai lệch giữa trọng lượng của nó với trọng lượng quy định 10 (kg) không vượt quá 100 gam.

3.19. Chiều cao của một loại cây lấy gỗ là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với chiều cao trung bình là 20 m và độ lệch tiêu chuẩn là 2,5 m. Cây đạt tiêu chuẩn khai thác là cây có chiều cao tối thiểu là 15 m. Hãy tính tỉ lệ cây đạt tiêu chuẩn khai thác. Nếu cây đạt tiêu chuẩn sẽ lãi 100 ngàn đồng, ngược lại cây không đạt tiêu chuẩn sẽ lỗ 30 ngàn đồng. Người ta khai thác ngẫu nhiên 100 cây. Tính tiền lãi trung bình của lô cây đó.

3.20. Tuổi thọ của một loại bóng đèn là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 960 giờ, độ lệch tiêu chuẩn 80 giờ. Thời gian bảo hành là 920 giờ. Nếu bóng đèn không phải bảo hành thì công ti lãi 200 ngàn đồng, còn bóng đèn phải bảo hành thì công ti lỗ 100 ngàn đồng. Tìm số tiền lời tin chắc và số tiền lời trung bình khi công ti bán 3 bóng đèn để sử dụng.

3.21. Một mô hình chuyển động của một cổ phiếu được cho như sau: giá hiện tại là s, sau một phiên giao dịch nó sẽ là u.s với xác suất p và d.s với xác suất 1-p, sự tăng hay giảm giá của các phiên giao dịch là độc lập. Tính xác suất giá cổ phiếu sẽ lên 30% sau 1000 phiên giao dịch, nếu u=1,012; d=0,99; p=0,52.

3.22. Trọng lượng của một sản phẩm X (đơn vị: gam) do một máy tự động sản xuất ra với $X \sim N(100,2)$. Sản phẩm được coi là đạt tiêu chuẩn nếu trọng lượng của nó đạt từ 98 đến 103 gam.

a) Tìm tỉ lệ sản phẩm không đạt kĩ thuật của máy.

b) Cho máy sản xuất 100 sản phẩm. Tính xác suất có không quá 15 sản phẩm không đạt kĩ thuật trong 100 sản phẩm này.

3.23. Một trục máy quay được sản xuất ra gọi là đạt kĩ thuật nếu sai lệch giữa đường kính của nó với đường kính thiết kế không quá 0,33 mm. Biết đường kính của trục máy là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với độ lệch tiêu chuẩn là 0,3 mm. Tìm xác suất:

a) Lấy ngẫu nhiên 5 trục máy loại này có 3 trục đạt kĩ thuật.

b) Trong 100 trục máy loại này có không ít hơn 80 trục đạt kĩ thuật.

3.24. Trong một ngày hội thi mỗi công nhân được chọn ngẫu nhiên một trong 2 máy và sản xuất 100 sản phẩm. Nếu trong 100 sản phẩm sản xuất ra có 80 sản phẩm loại I trở lên thì được thưởng. Xác suất công nhân A sản xuất được sản phẩm loại I với mỗi máy tương ứng là 0,7; 0,8.

a) Tính xác suất công nhân A được thưởng.

b) Giả sử A dự thi 200 lần thì số lần được thưởng nhiều khả năng nhất là bao nhiêu ?

c) A phải dự thi bao nhiêu lần để xác xuất có ít nhất một lần được thưởng không dưới 95%.

3.25. Trung bình 40 giây có 2 ô tô đi qua trạm giao thông. Tính xác suất:

a) Có 3 đến 4 ô tô đi qua trạm trong khoảng thời gian 2 phút; có 7 ô tô đi qua trạm trong khoảng thời gian 3 phút.

b) Tính xác suất để trong khoảng thời gian T có ít nhất 1 ô tô đi qua trạm. Xác định T để xác suất này là 0,95.

3.26. Một trạm cho thuê xe có 3 xe taxi. Hàng ngày phải nộp thuế 8 USD/1 xe dù xe có được thuê hay không. Mỗi chiếc xe taxi được thuê với giá 20 USD/ 1 ngày. Giả sử yêu cầu thuê xe. Giả sử yêu cầu thuê xe của trạm là X có phân phối Poisson với tham số λ=2,8.

a) Gọi Y là số tiền lời trong 1 ngày của trạm. Tính số tiền lời trung bình của trạm thu được trong một ngày

b) Giải bài toán trong trường hợp trạm có 4 xe

c) Đưa ra kết luận trạm nên có 3 hay 4 xe.

$X \sim P(\lambda), \lambda = 2,8$

3.27. Một trung tâm bưu điện nhận được trung bình 150 cú điện thoại trong 1 giờ. Tính xác suất để trung tâm này nhận được không quá 2 cú điện thoại trong vòng 1 phút.

3.28. Một lô hàng có 1000 sản phẩm trong đó có 400 sản phẩm loại A. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ lô hàng 10 sản phẩm để kiểm tra. Tính xác suất có 3 sản phẩm loại A có trong 10 sản phẩm lấy ra.

3.29. Cho trọng lượng của một loại trái cây tính bằng (kg) là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Một mẫu điều tra 650 trái cây loại này có 31 trái có trọng lượng dưới 1,8 kg và 130 trái hơn 2,4 kg.

a) Tìm trọng lượng trung bình và độ lệch tiêu chuẩn của trái cây loại này.

b) Những trái cây nặng dưới 1,8 kg là phế phẩm. Giả sử có một lô rất nhiều trái cây loại này. Người ta phân loại lô trái cây này như sau;

Lấy ngẫu nhiên 20 trái cây từ lô trái cây để kiểm tra, nếu không có trái phế phẩm thì xếp là trái cây loại I, nếu có 1 hoặc 2 trái phế phẩm thì xếp là trái cây loại II, nếu có hơn 2 trái phế phẩm thì xếp là trái cây loại III. Nhiều khả năng nhất lô trái cây được xếp loại mấy?

3.30. Có 3 lô hàng mỗi lô gồm 10000 sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm loại I của từng lô tương ứng là: 60%, 70%, 80%. Người ta lấy lần lượt từ mối lô 10 sản phẩm để kiểm tra (lấy không hoàn lại). Nếu trong 10 sản phẩm lấy ra kiểm tra có từ 8 sản phẩm loại I trở lên thì mua lô đó.

a) Tìm xác suất để lô hàng có tỉ lệ sản phẩm loại I là 80% được mua.

b) Tìm xác xuất có ít nhất một lô hàng được mua.

c) Nếu chỉ có một lô được mua, tìm xác suất để đó là lô hàng có tỉ lệ sản phẩm loại I là 80%.

3.31. Một kiện hàng có 12 sản phẩm trong đó có 7 sản phẩm loại A, 5 sản phẩm loại B. Khi bán được một sản phẩm loại A thì lời 3 USD, còn bán một sản phẩm loại B lời 2 USD. Lấy ngẫu nhiên từ kiện ra 3 sản phẩm để bán. Tìm luật phân phối xác xuất xác của số tiền lời thu được.

3.32. Có 3 kiện hàng, mỗi kiện có 10 sản phẩm. Số sản phẩm loại A có trong mỗi kiện tương ứng là 6, 7, 8; các sản phẩm còn lại là loại B.

a) Từ mỗi kiện lấy ngẫu nhiên không hoàn lại ra 2 sản phẩm để kiểm tra, nếu cả 2 đều là loại A thì mua kiện hàng. Tính xác suất có kiện hàng được mua.

b) Chọn ngẫu nhiên một kiện rồi từ đó chọn ngẫu nhiên ra hai sản phẩm để bán. Nếu bán được một sản phẩm loại A thì lời 3 USD, một sản phẩm loại B lời 2 USD. Tìm luật phân phối của số tiền lời khi bán hai sản phẩm.

3.33. Sản phẩm của một nhà máy sau khi sản xuất xong được đóng thành mỗi hộp 10 sản phẩm. Cho biết số lượng sản phẩm loại I có phân phối như sau

Số sản phẩm loại I	7	8	9	10
Tỉ lệ hộp tương ứng	0,1	0,3	0,4	0,2

Một khách hàng muốn mua 500 hộp của nhà máy. Khách hàng kiểm tra từng hộp bằng cách chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm trong hộp, nếu 3 sản phẩm là loại I thì nhận hộp đó. Tìm số hộp tin chắc nhất mà khách hàng có thể nhận được.

3.34. Một công ty thương mại mua hàng từ một xưởng sản xuất. Hàng hóa được đóng gói thành từng kiện mỗi kiện 90 sản phẩm. Theo quy ước trong hợp đồng nếu có quá 1 sản phẩm xấu trong kiện thì kiện không đạt tiêu chuẩn. Công ty kiểm tra bằng cách mở từng kiện hàng, rút ngẫu nhiên 4 sản phẩm để kiểm tra, nếu cả 4 đều tốt thì nhận kiện hàng, nếu không thì trả lại kiện hàng.

a) Tính xác suất công ty trả nhầm kiện hàng đạt tiêu chuẩn.

b) Tính xác xuất công ty nhận nhầm sản phẩm có 2 sản phẩm xấu.

3.35. Một lô hàng có 20000 sản phẩm,với tỉ lệ sản phẩm loại A là 80%. Một người mua chọn ngẫu nhiên 120 sản phẩm để kiểm tra. Nếu có ít nhất 100 sản phẩm loại A trong 120 sản phẩm đó thì mua lô hàng. Tính xác suất lô hàng được mua.

3.36. Có 3 phân xưởng trong một công ti cùng sản xuất một mặt hàng. Sản phẩm được đóng thành kiện có hình thức và trọng lượng giống nhau. Một cửa hàng nhận về một lô hàng của công ti gồm có 30% sản phẩm được sản xuất từ phân xưởng 1; 20% sản phẩm được sản xuất từ phân xưởng 2 và 50% sản phẩm được sản xuất từ phân xưởng 3. Mỗi kiện hàng của phân xưởng 1 có 7 sản phẩm tốt và 3 phế phẩm; mỗi kiện hàng của phân xưởng 2 có 9 sản phẩm tốt và 1 phế phẩm; mỗi kiện hàng của phân xưởng 3 có 8 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm.

Trước khi mua kiện hàng của kiện hàng, một khách hàng kiểm tra bằng cách chọn ngẫu nhiên không hoàn lại 2 sản phẩm của kiện hàng, nếu cả hai đều là sản phẩm tốt thì khách hàng mua kiện hàng, khách hàng không thể biết kiện hàng của phân xưởng nào.

a) Tính xác suất kiện hàng được mua.

b) Nếu kiện hàng được mua, tính xác suất để kiện hàng này do phân xưởng 3 sản xuất.

c) Giả sử số kiện hàng trong lô hàng rất lớn. Tính xác suất để khi kiểm tra 100 kiện hàng thì có ít nhất 70 kiện được mua.

3.37. Xe buýt xuất hiện tại bến đợi từ 7 giờ sang, cứ 15 phút có một chuyến. Giả sử thời điểm X một người khách xuất hiện tai bến đợi từ lúc 7 giờ đến 7 giờ 30 có phân phối đều. Tìm xác suất người đó phải đợi xe buýt nhiều hơn 10 phút.

3.38.

a) Một trạm cứu hỏa được đặt dọc quốc lộ có độ dài A (A < +∞). Giả sử hỏa hoạn xuất hiện tại điểm X có phân phối đều trong (0, A). Nên đặt trạm ở vị trí nào để trung bình khoảng cách từ chỗ hỏa hoạn tới trạm là cực tiểu

b) Với câu hỏi tương tự, bây giờ giả sử A = +∞ và khoảng cách (từ 0 tới chỗ hỏa hoạn) X có phân phối mũ với tham số λ.

Hướng dẫn giải chương 3

3.1. Xác suất lấy phải phế phẩm trong một thùng là : $p = \frac{3}{10} = 0,3$

Gọi X là số phế phẩm trong 12 thùng được lấy ra.

$$X \sim B\left(n = 12, p = 0,3\right)$$

- Tìm Mod(X):

Vậy số phế phẩm tin chắc nhất có trong các sản phẩm lấy ra là 3 phế phẩm

- Tìm E(X): $E(X) = np = 3,6$

Vậy số phế phẩm trung bình có trong các sản phẩm lấy ra là 3,6 phế phẩm.

3.2. Biến cố nào trong các biến cố sau có xác suất lớn hơn.

a) Có ít nhất 2 lần xuất hiện mặt 6 chấm khi gieo con súc sắc 12 lần.

b) Có ít nhất 3 lần xuất hiện mặt mặt 6 chấm khi gieo con súc sắc 18 lần.

Giải:

Gọi X, Y lần lượt là số lần xuất hiện mặt 6 chấm khi gieo con súc sắc 12 và 18 lần.

$X \sim B\left(12, \frac{1}{6}\right); Y \sim B\left(18, \frac{1}{6}\right)$

Xác suất có ít nhất 2 lần xuất hiện mặt 6 chấm khi gieo con súc sắc 12 lần là:

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$

$$= 1 - C_{12}^{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}.\left(\frac{5}{6}\right)^{12} - C_{12}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}.\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0,6187$$

Tương tự:

Xác suất có ít nhất 3 lần xuất hiện mặt mặt 6 chấm khi gieo con súc sắc 18 lần là:

$$P\{Y \geq 3\} = 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} - P\{Y = 2\} \approx 0,5973$$

Suy ra: $P\{X \geq 2\} > P\{Y \geq 3\}$

3.3. Gọi X là số máy hỏng trong 1 ca sản xuất của 1 phân xưởng. Do 100 máy dệt hoạt động độc lập với nhau và xác suất mỗi máy dệt bị hỏng là như nhau (= 2,5%=0,025) nên X có phân phối nhị thức

$X \sim B(100; 0,025)$

a) Trung bình trong một ca sản xuất số máy hỏng của một phân xưởng: $E(X) = np = 2,5$

Trung bình trong một ca sản xuất số máy bị hỏng của toàn nhà máy: $E(3X) = 3E(X) = 7,5$

b) Có Mod(X) là số máy hỏng nhiều khả năng nhất trong 1 ca của mỗi phân xưởng.

Tìm Mod(X):

$$np + p - 1 \leq Mod(X) \leq np + p$$

$$\Leftrightarrow 100.0,025 - 1 \leq Mod(X) \leq 100.0,025 + 0,025$$

$$\Leftrightarrow 1,5 \leq Mod(X) \leq 2,5$$

$$\Rightarrow Mod(X) = 2$$

$\Rightarrow$ Số máy hỏng nhiều khả năng nhất trong 1 ca sản xuất của mỗi phân xưởng là 2

$\Rightarrow$ Số máy hỏng nhiều khả năng nhất trong 1 ca sản xuất của cả nhà máy là 3.2=6.

Mà mỗi kĩ sư tối đa có thể sửa chữa được tối đa 2 máy dệt bị hỏng trong 1 ca sản xuất nên nhà máy cần bố trí trực sửa chữa mỗi ca 3 kĩ sư là hợp lý nhất.

3.4. $X \sim N(\mu = 18, \sigma = 4)$

a) Tỷ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng trong khoảng từ 10 đến 19 tháng là:

$$P\{10 \le X \le 19\} = \Phi_0\left(\frac{19-18}{4}\right) - \Phi_0\left(\frac{10-18}{4}\right)$$
$$= \Phi_0(0,25) - \Phi_0(-2)$$
$$= \Phi_0(0,25) + \Phi_0(2)$$
$$= 0,0987 + 0,4772$$
$$= 0,5759$$

* Tỷ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng trong khoảng thời gian không ít hơn một năm là:

$$P\{X \ge 12\} = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{12-18}{4}\right) = 0,5 - \Phi_0(-1,5) = 0,5 + 0,4332 = 0,9332$$

* Tỷ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng trong khoảng thời gian ít hơn 9 tháng là:

$$P\{X < 9\} = \Phi_0\left(\frac{9-18}{4}\right) + 0,5 = \Phi_0(-2,25) + 0,5 = -0,4878 + 0,5 = 0,0122$$

b) Giả sử x_0 (tháng) là khoảng thời gian tối thiểu để tỉ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng vượt quá thời gian đó không quá 1%

$$P\{X > x_0\} = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{x_0 - 18}{4}\right) \le 0,01$$

$$\Rightarrow \Phi_0\left(\frac{x_0 - 18}{4}\right) \ge 0,5 - 0,01 = 0,49 = \Phi_0(2,33)$$

Do $\Phi_0(x)$ đồng biến nên:

$$\frac{x_0 - 18}{4} \ge 2,33 \Rightarrow x_0 \ge 27,32$$

Vậy 27 tháng 9 ngày là khoảng thời gian tối thiểu để tỉ lệ khách hàng trả tiền cho ngân hàng vượt quá thời gian đó không quá 1%.

3.5. $X \sim N(\mu = 40, \sigma = 7)$

Gọi x_0 là thời điểm Hải phải rời nhà (giờ).

Thời gian đi từ nhà Hải đến cơ quan nếu rời khỏi nhà ở thời điểm x_0 là : $(13-x_0).60$ (phút)

Theo giả thiết, biến ngẫu nhiên X là thời gian đi từ nhà Hải đến cơ quan.

Vậy xác suất để Hải không bị trễ:

$$P\{X \le (13 - x_0).60\} = \Phi_0\left(\frac{(13 - x_0).60 - 40}{7}\right) + 0,5$$

Để 95% Hải không bị trễ cuộc họp tại cơ quan thì:

$$\Phi_0\left(\frac{(13-x_0).60-40}{7}\right)+0,5=0,95$$

$$\Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{(13-x_0).60-40}{7}\right)=0,45$$

$$\Leftrightarrow \frac{(13-x_0).60-40}{7}=1,65$$

$\Rightarrow x_0 \approx 12,14$

$\Rightarrow x_0 \approx 12,14$ (giờ) = 12 giờ 8 phút

Vậy nếu muốn 95% khả năng không bị trễ cuộc họp tại cơ quan lúc 1 giờ chiều thì thời điểm chậm nhất Hải phải rời nhà là 12 giờ 8 phút

3.6. X ~ N(5, σ^2)
Có:

$$0,2=P\{X>9\}=0,5-\Phi_0\left(\frac{9-5}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi_o\left(\frac{4}{\sigma}\right)=0,3\approx\Phi_0(0,84)\Rightarrow\frac{4}{\sigma}=0,84$$

Vậy $\sigma \approx 4,7619$ và $\sigma^2 \approx 22,675$

3.7. Gọi X_i trọng lượng sản phẩm thứ i trong thùng ($i=\overline{1,100}$).

$$Xi \sim N\left(\mu,\sigma^2\right), \mu=50g, \sigma^2=(100g)^2$$

Gọi X là trọng lượng thùng

$$Xi=\sum_{i=1}^{100} Xi \sim N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right)$$

$$\mu_X=E(X)=\sum_{i=1}^{100}E(Xi)=100.50=5000(g)=5(kg)$$

$$\sigma_X^2=V(X)=\sum_{i=1}^{100}V(Xi)=100.(100g)^2=(0.1kg)^2$$

Tỷ lệ thùng loại 1 là:

$$P(X>5,1)=0,5-\Phi_0\left(\frac{5,1-5}{0,1}\right)=0,5-\Phi_0(1)=0,5-0,3413=0,1587$$

3.8. Ta lấy đơn vị của X là 10^6 giờ.
Xác suất của một chip là loại I:

$$P\{X>1,6\}=0,5-\Phi_0\left(\frac{1,6-1,4}{0,3}\right)\approx0,5-\Phi_0(0,67)=0,2514$$

a) Gọi Y là số chip loại I có trong 6 chip.

$$Y \sim B(n=6,p=0,2514)$$

Xác suất để có 2 chíp loại I trong 6 chíp là :

$$P\{Y=2\}=C_6^2.(0,2514)^2.(1-0,2514)^4\approx 0,2977$$

Số chíp loại I trung bình có trong 6 chíp là :

$$E(Y)=np=6.0,2514=1,5048$$

b) Gọi Z là số chip loại I có trong 100 chip.

$$Z \sim B(n=100, p=0,2514)$$

Do $n\geq 30$:

$$Z \sim N(\mu,\sigma^2); \mu=np=25,14; \sigma^2=np(1-p)=4,3382^2$$

Xác suất để trong 100 chíp có trên 30 chíp loại I là:

$$P\{30<Z\leq 100\}= P\{30,5<Z<100,5\}=\Phi_0\left(\frac{100,5-25,14}{4,3382}\right)-\Phi_0\left(\frac{30,5-25,14}{4,3382}\right)$$

$$=0,5-\Phi_0(1,23)=0,1093$$

Số chip loại I đáng tin nhất, tức là tìm $Mod(Z)$:

$$np+p-1\leq Mod(Z)\leq np+p$$
$$\Leftrightarrow 25,14+0,2514-1\leq Mod(Z)\leq 25,14+0,2514$$
$$\Leftrightarrow 24,3914\leq Mod(Z)\leq 25,3914$$
$$\Rightarrow Mod(Z)=25$$

Vậy số chip loại I đáng tin nhất trong 100 chíp là 25

3.9. Gọi X là số khách đăng kí phòng và nhận phòng: $X \sim B(150;0,85)$

Do $n=150$:

$$X \sim N(\mu,\sigma^2); \mu=np=127,5; \sigma^2=np(1-p)=4,3732^2$$

Gọi k là số phòng công ti chuẩn bị, ta có:

$$P\{k<X<150\}<0,01$$

$$P\{k<X<150\}=\Phi_0\left(\frac{150+0,5-127,5}{4,3732}\right)-\Phi_0\left(\frac{k-0,5-127,5}{4,3732}\right)$$

$$=0,5-\Phi_0\left(\frac{k-128}{4,3732}\right)$$

$$\Rightarrow 0,5-\Phi_0\left(\frac{k-128}{4,3732}\right)<0,01 \quad \Rightarrow \Phi_0\left(\frac{k-128}{4,3732}\right)>0,49=\Phi_0(2,33)$$

$$\Rightarrow \frac{k-128}{4,3732}>2,33 \Leftrightarrow k>138,1896$$

Vậy phải chuẩn bị ít nhất là 139 phòng để tỉ lệ khách hàng đăng ký nhưng không có phòng ít hơn 1%

3.10. $X \sim N(\mu,\sigma^2), \sigma^2 = 100$

Xác suất lấy được một trái cây đạt tiêu chuẩn xuất khẩu là :

$$P\{X \ge 85\} = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{85-\mu}{10}\right)$$

Do tỷ lệ trái cây đạt tiêu chuẩn xuất khẩu là 6,68% nên:

$$0,5 - \Phi_0\left(\frac{85-\mu}{10}\right) = 0,0668$$

$$\Rightarrow \Phi_0\left(\frac{85-\mu}{10}\right) = 0,4332 \approx \Phi_0(1,5)$$

Vậy $\mu = 85 - 10.1,5 = 70$

a) Xác suất lấy được một trái cây có trọng lượng tối thiểu 80 gam là:

$$P\{X \ge 80\} = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{80-70}{10}\right) = 0,1587$$

Ta có : $Y \sim B(6,p); p = 0,1587$

$$E\left(\frac{Y}{3}\right) = \frac{1}{3}E(Y) = \frac{6.0,1587}{3} = 0,3174$$

$$V\left(\frac{Y}{3}\right) = \frac{1}{9}V(Y) = \frac{6.0,1587.(1-0,1587)}{9} \approx 0,089$$

b) Xác suất có ít nhất 1 trong 6 trái cây được chọn ngẫu nhiên có trọng lượng đạt tối thiểu 80 gam là:

$$P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1-0,1587)^6 \approx 0,6454$$

3.11. Gọi X là chiều cao của người trưởng thành.

Theo đề bài ra: $\mu = 175, \sigma = 4$

$$X \sim N(\mu = 175, \sigma^2 = 16)$$

a) Tỉ lệ người trưởng thành có tầm vóc trên 180 cm:

$$P(X > 180) = P(180 < X < +\infty) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{180-175}{4}\right)$$
$$= 0,5 - \Phi_0(1,25) = 0,5 - 0,3944$$
$$= 0,1056 = 10,56\%$$

b) Tỉ lệ người trưởng thành có chiều cao từ 166 cm đến 177cm:

$$P(166 \le X \le 177) = \Phi_0\left(\frac{177-175}{4}\right) - \Phi_0\left(\frac{166-175}{4}\right) = \Phi_0(0,5) - \Phi_0(-2,25)$$
$$= \Phi_0(0,5) + \Phi_0(2,25) = 0,1915 + 0,4878 = 0,6793 = 67,93\%$$

c) Tỉ lệ người trưởng thành có chiều cao dưới mức m:

$P(X < m) = \Phi_0\left(\frac{m-175}{4}\right) + 0,5$

Vì 33% người trưởng thành có chiều cao dưới mức m nên ta có:

$P(X < m) = 0,33 \Rightarrow \Phi_0\left(\frac{m-175}{4}\right) + 0,5 = 0,33 \Rightarrow \Phi_0\left(\frac{m-175}{4}\right) = -0,17 = -\Phi_0(0,44) = \Phi_0(-0,44)$

$\Rightarrow \frac{m-175}{4} = -0,44 \Rightarrow m = 173,24$

Vậy m = 173,24 cm.

d) Giới hạn biến động chiều cao của 90% người trưởng thành xung quanh giá trị trung bình là:

$V(X) = 0,9^2.\sigma^2 = 0,81.16 = 12,96$

3.12. Gọi X (%) là lãi suất đầu tư vào dự án đó. Vì X tuân theo quy luật phân phối chuẩn:
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Theo bài ra thì khả năng cho lãi suất cao hơn 20% là 15,87% và cho lãi suất cao hơn 25% là 2,28%:

$P(X > 20) = P(20 < X < +\infty) = 0,1587$

$= \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right)$

$\Rightarrow \Phi_0\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0,3413 = \Phi_0(1)$

$\Rightarrow \frac{20-\mu}{\sigma} = 1 \Rightarrow \mu + \sigma = 20(*)$

$P(X > 25) = P(25 < X < +\infty) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0,0228$

$\Rightarrow 0,5 - \Phi_0\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0,0228 \Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0,4772 = \Phi_0(2)$

$\Rightarrow \frac{25-\mu}{\sigma} = 2 \Rightarrow 2\sigma + \mu = 25(**)$

Từ (*), (**) ta có:

$$\begin{cases} \mu + \sigma = 20 \\ \mu + 2\sigma = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 15 \\ \sigma = 5 \end{cases}$$

Vậy khả năng năng bị thua lỗ là:

$P(X \geq 0) = P(0 \leq X \leq +\infty) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(\frac{0-15}{5}) = 0,5 - \Phi_0(-3) = 0,5 + \Phi_0(3)$

$= 0,5 + 0,4987 = 0,9987 = 99,87\%$

3.13. Gọi X_A, X_B (%) là lãi suất tương ứng của hai thị trường A và B.

Theo bài ra ta có: $X_A \sim N(\mu_A = 19, \sigma_A = 6)$; $X_B \sim N(\mu_B = 22, \sigma_B = 10)$

Xác suất được lãi tối thiểu 10% nấu mua cổ phiếu ở công ti A:

$$P(X_A \geq 10) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{10-19}{6}\right) = 0,5 - \Phi_0(-1,5)$$
$$= 0,5 + \Phi_0(1,5) = 0,5 + 0,4332 = 0,9332$$

Tương tự với công ti B:

$$P(X_B \geq 10) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{10-22}{10}\right) = 0,5 - \Phi_0(-1,2)$$
$$= 0,5 + \Phi_0(1,2) = 0,5 + 0,3849 = 0,8849$$

Vậy muốn đạt lợi nhuận tối thiểu là 10% thì đầu tư vào loại cổ phiếu của thị trường A.

a) Giả sử tỉ lệ đầu tư vào thị trường A là p($0 \leq p \leq 1$), tỉ lệ đầu tư vào thị trường B sẽ là 1-p.

Gọi Y là mức lãi suất thu được khi đầu tư vào các dự án.

$\Rightarrow$ Y = p.X_A + (1-p).X_B

V(X_A) = 36; V(X_B) = 100

Vậy mức độ rủi ro khi đầu tư vào các dự án là:

V(Y) = V(p.X_A + (1-p).X_B) = p^2.V(X_A) + $(1\text{-}P)^2$.V(X_B)

$\Rightarrow$ V(Y) = $36p^2 + 100(1-p)^2 = 136p^2 - 200p + 100$

Để hạn chế tối đa rủi ro tức là V(Y) min, ta có:

Đặt f(p) = $136p^2 - 200p + 100$

$$f'(p) = 272p - 200$$
$$f'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{200}{272} = \frac{25}{34} \approx 0,7353$$
$$f''(p) = 272 > 0$$

Vậy f(p) đạt min khi p = 0,7353

Vậy để tránh rủi ro ta nên đầu tư vào cổ phiếu trên 2 thị trường A,B theo tỉ lệ 73,53% và 26,47%.

3.14. Ta có $X \sim N(160,36) \Rightarrow \mu = 160, \sigma = 6$

Tỉ lệ nam giới trong độ tuổi trưởng thành có chiều cao trong khoảng (158,162) (cm)

$$P(158 < X < 162) = P\left(\frac{158-160}{6} < X < \frac{162-160}{6}\right)$$
$$= P(-\frac{1}{3} < X < \frac{1}{3}) = 2.0,1293 = 0,2586$$

Gọi Y là số nam giới trưởng thành có chiều cao trong khoảng (158,162) trong 5 nam giới trưởng thành.

$$Y \sim B(5, p);\ p = 0,2586$$

Xác suất khi chọn ngẫu nhiên 5 nam giới trưởng thành có ít nhất 1 người có chiều cao trong khoảng (158,162) (cm) là

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_5^0.(0,2586)^0.(1-0,2586)^{5-0} = 0,7760$$

3.15. Giả sử: $T \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) Theo bài ra số ngày An đến trường mất hơn 20 phút chiếm 65%, số ngày mất hơn 30 phút chiếm 8%:

$$P(T > 20) = P(20 < T < +\infty) = 0,65$$
$$\Rightarrow \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0,65$$
$$\Rightarrow \Phi_0\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = -0,15 \Rightarrow \frac{20-\mu}{\sigma} = 0,39$$
$$\Rightarrow \mu + 0,39\sigma = 20 (1)$$

$$P(T > 30) = P(30 < T < +\infty) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0,08$$
$$\Rightarrow \Phi_0\left(\frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0,42 \Rightarrow \frac{30-\mu}{\sigma} = 1,4$$
$$\Rightarrow \mu + 1,4\sigma = 30 (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$\begin{cases} \mu + 0,39\sigma = 20 \\ \mu + 1,4\sigma = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \approx 22,1788 \\ \sigma \approx 5,5866 \end{cases}$$

Vậy thời gian trung bình là 22,1788 phút, độ lệch tiêu chuẩn là 5,5866 phút.

b) An đi học muộn nếu thời gian đi học của An quá 25 phút.

Xác suất để An muộn học là:

$$P(T > 25) = P(25 < X < +\infty) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{25 - 22,1788}{5,5866}\right) \approx 0,5 - \Phi_0(0,5) = 0,5 - 0,1915 = 0,3085$$

3.16. Gọi X (kg) là trọng lượng sản phẩm. Theo đề bài ra ta có $X \sim N(\mu, 1^2)$

Xác suất để sản phẩm có thể bán được là

$$p = P(X \geq 8) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{8-\mu}{1}\right) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{8-\mu}{1}\right)$$

Xác suất để sản phẩm bị loại là 1-p

Gọi Y là lợi nhuận thu được khi bán một sản phẩm. Vì giá thành làm ra một sản phẩm là C = 0,05μ + 0,3 USD và giá 1 sản phẩm bán được là 1USD/1 sản phẩm nên ta có thể coi lợi nhuận thu được khi sản phẩm bị loại là –C USD và lợi nhuận thu được khi sản phẩm được bán đi là 1 – C USD

Ta có bảng phân phối xác suất của Y

Y	-C	1-C
P	1-p	p

Vậy lợi nhuận trung bình trên một sản phẩm là:

E(Y) = -C(1 - p) + (1 - C)p = p – C =0,5 - $\Phi_0(8-\mu)-0{,}05\mu-0{,}3$

= 0,2 - $\Phi_0(8-\mu)-0{,}05\mu$

Ta cần tìm μ để E(Y) lớn nhất.

Đặt f(μ)= 0,2 - $\Phi_0(8-\mu)-0{,}05\mu$

Ta có: $f'(\mu)=\varphi(8-\mu)-0{,}05$ trong đó: $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-u^2}{2}}$

$$f'(\mu)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(8-\mu)^2}{2}}=0{,}05 \Leftrightarrow -\frac{(8-\mu)^2}{2}=\ln\left(0{,}05\sqrt{2\pi}\right) \Leftrightarrow (8-\mu)^2=4{,}1616$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mu=5{,}96\\ \mu=10{,}04\end{array}\right.$$

$$f''(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(8-\mu)^2}{2}}(8-\mu)<0 \text{ khi } \mu = 10{,}04$$

Vậy với μ = 10,04 thì lợi nhuận của nhà máy là lớn nhất.

3.17. Gọi X (tuần) là thời gian nhà thầu hoàn thành dự án. Ta có X ~ N (40,5^2).

a) Nhà thầu bị phạt nếu thời gian nhà thầu hoàn thành dự án lớn hơn 43 tuần.

Xác suất nhà thầu bị phạt là:

$$P(X>43)=\Phi_0(+\infty)-\Phi_0\left(\frac{43-40}{5}\right)=0{,}5-\Phi_0(0{,}6)$$

$$=0{,}5-0{,}2257=0{,}2743$$

b) Gọi x_0 là thời hạn nhà thầu đặt ra để hoàn thành dự án sao cho khả năng bị phạt không quá 5%.

Xác suất nhà thầu bị phạt là:

$$P(X>x_0)=\Phi_0(+\infty)-\Phi_0\left(\frac{x_0-40}{5}\right)=0{,}5-\Phi_0\left(\frac{x_0-40}{5}\right)$$

Khả năng nhà thầu bị phạt không quá 5% nếu

$$P(X>x_0)\le 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}5-\Phi_0\left(\frac{x_0-40}{5}\right)\le 0{,}05 \Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{x_0-40}{5}\right)\ge 0{,}45$$

$$\Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{x_0-40}{5}\right)\ge \Phi_0(1{,}65) \Leftrightarrow \frac{x_0-40}{5}\ge 1{,}65 \Leftrightarrow x_0\ge 48{,}25$$

Vậy thời hạn nhà thầu đặt ra để hoàn thành dự án sao cho khả năng bị phạt không quá 5% là 48,25 tuần.

3.18. Gọi X là trọng lượng (tính bằng kg) của một bao phân bón được đóng gói tự động và $X \sim N(10;0{,}05^2)$. Ta có 100g = 0,1 kg.

a) Tỉ lệ các phân bón có trọng lượng sai lệch so với trọng lượng quy định 10 kg không quá 100 gam là

$$P\left(|X-10|\le 0{,}1\right)=2\Phi_0\left(\frac{0{,}1}{0{,}05}\right)=2\Phi_0(2)=0{,}9544$$

b) Xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một bao phân bón gặp bao có trọng lượng trên 10,1 kg là

$$P(X > 10,1) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{10,1-10}{0,05}\right) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228$$

c) Gọi Y là số bao phân bón mà sai lệch giữa trọng lượng của nó với trọng lượng quy định 10 kg không vượt quá 100g trong 100 bao đã lấy.

Ta có: $Y \sim B(100; 0,9544); n = 100, p = 0,9544$

Số bao nhiều khả năng nhất mà sai lệch giữa trọng lượng của nó với trọng lượng quy định 10kg không vượt quá 100g là m_0.

Ta có $np + p - 1 \le m_0 \le np + p \Rightarrow 95,3944 \le m_0 \le 96,3944 \Rightarrow m_0 = 96$ (bao)

Số bao trung bình có trọng lượng mà sai lệch giữa trọng lượng của nó với quy định 10kg không vượt quá 100g là

E(Y) = np = 100.0,9544 = 95,44 (bao).

3.19.

Gọi X (đơn vị: m) là chiều cao của cây lấy gỗ.

$$X \sim N\left(20, 2,5^2\right).$$

Xác suất để cây đạt tiêu chuẩn là

$$p = P(X \ge 15) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{15-20}{2,5}\right) = 0,5 - \Phi_0(-2) = 0,9772.$$

Gọi Y là tiền lãi khi khai thác một cây (đơn vị: ngàn đồng). Ta tính được:

Y	-30	100
p	0,0228	0,9772

E(Y) = 97,036

Vậy tiền lãi trung bình của lô cây là 100×97,036 = 9703,6 (ngàn đồng).

3.20. Gọi X là tuổi thọ của loại bóng đèn nói trên. Ta có $X \sim N\left(960; 80^2\right)$

Xác suất bóng đèn không phải bảo hành là

$$p = P\left(X > 920\right) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{920-960}{80}\right) = 0,5 - \Phi_0(-0,5) = 0,6915$$

Gọi Z là số tiền lời thu được khi công ti bán 3 bóng đèn để sử dụng, ta lập bảng phân phối xác suất

Z	-300	0	300	600
P	0,0294	0,1974	0,4425	0,3307

Số tiền lời tin chắc khi công ti bán ra 3 bóng đèn để sử dụng là

Mod Z = 300 ngàn đồng.

Số tiền lời trung bình khi công ti bán 3 bóng đèn để sử dụng là E(Z) = 322,35 ngàn đồng.

3.21. Gọi k là số phiên ít nhất (trong 1000 phiên) giá cổ phiếu tăng để sau k phiên đó giá chứng khoán tăng 30%, nghĩa là:

$$s+0,3s=u^k.d^{1000-k}.s$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{d}\right)^k=\frac{1,3}{d^{1000}}$$

Logarit cơ số e cả 2 vế và biến đổi ta được:

$$k.\ln\left(\frac{u}{d}\right)=\ln 1,3-1000\ln d \Rightarrow k\approx 469,209$$

$$\Rightarrow k=470$$

Gọi X là số phiên cổ phiếu tăng trong 1000 phiên: $X \sim B(1000;0,52)$

Do $n=1000$:

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right);\mu=np=520;\sigma^2=np(1-p)=15,7987^2$$

Xác suất giá cổ phiếu sẽ lên 30% sau 1000 phiên giao dịch là:

$$P\{470\le X\le 1000\}=\Phi_0\left(\frac{1000+0,5-520}{15,7987}\right)-\Phi_0\left(\frac{470-0,5-520}{15,7987}\right)$$

$$\approx 0,5+\Phi_0(3,2)=0,9993$$

3.22. a) $X \sim N(100,2)$

Tỉ lệ sản phẩm đạt kĩ thuật của máy là:

$$P\{98\le X\le 103\}=\Phi_0\left(\frac{103-100}{\sqrt{2}}\right)-\Phi_0\left(\frac{98-100}{\sqrt{2}}\right)\approx\Phi_0(2,12)-\Phi_0(-1,41)=0,9037$$

Tỉ lệ sản phẩm không đạt kĩ thuật của máy là:

$$1-P\{98\le X\le 103\}=0,0963$$

b) Gọi Y là số sản phẩm không đạt kĩ thuật trong 100 sản phẩm : $Y \sim B(100;0,0963)$.

Do $n=100$:

$$Y \sim N\left(\mu,\sigma^2\right);\mu=np=9,63;\sigma^2=np(1-p)=2,95^2$$

Xác suất có không quá 15 sản phẩm không đạt kĩ thuật trong 100 sản phẩm là:

$$P\{0\le X\le 15\}=\Phi_0\left(\frac{15+0,5-9,63}{2,95}\right)-\Phi_0\left(\frac{0-0,5-9,63}{2,95}\right)$$

$$\approx\Phi_0(1,99)-\Phi_0(-3,43)=0,9764$$

3.23. Gọi X là đường kính của trục máy:

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right);\sigma=0,3$$

Xác suất một trục máy đạt kĩ thuật là:

$$P\{|X-\mu|\le 0,33\}=2\Phi_0\left(\frac{0,33}{0,3}\right)=2\Phi_0(1,1)=0,7286$$

a) Gọi Y là số trục máy đạt kĩ thuật trong 5 trục,

$Y \sim B(5,p), p = 0,7286$

Xác suất để có 3 trục đạt kĩ thuật trong 5 trục máy là

$P\{Y=3\} = C_5^3 \cdot 0,7286^3 \cdot (1-0,7286)^2 = 0,2849$

c) Gọi Z là số trục máy đạt kĩ thuật trong 100 trục: $Z \sim B(100,p)$

Do $n = 100$:

$$Z \sim N(\mu,\sigma^2); \mu = np = 72,86; \sigma^2 = np(1-p) = 4,4468^2$$

Xác suất để trong 100 trục máy có không ít hơn 80 trục đạt kỹ thuật là:

$$P\{80 \le X \le 100\} = \Phi_0\left(\frac{100+0,5-72,86}{4,4468}\right) - \Phi_0\left(\frac{80-0,5-72,86}{4,4468}\right) \approx 0,5 - \Phi_0(1,49) = 0,0681$$

3.24. H_i là biến cố "A chọn máy i để thi", $i = \overline{1,2}$

$$P(H_1) = P(H_2) = 0,5$$

A là biến cố "công nhân A được thưởng"

Gọi X_i là số sản phẩm loại I khi A sản xuất máy i.

$X_1 \sim B(n_1 = 100, p_1 = 0,7)$; $X_2 \sim B(n_2 = 100; p_2 = 0,8)$

Do $n_1 = n_2 = 100$:

$$X_1 \sim N(\mu,\sigma^2); \mu = n_1p_1 = 70; \sigma^2 = n_1p_1(1-p_1) = 4,5826$$

$$X_1 \sim N(\mu,\sigma^2); \mu = n_2p_2 = 80; \sigma^2 = n_2p_2(1-p_2) = 4$$

Xác suất công nhân A được thưởng nếu sử dụng máy 1:

$$P(A/H_1) = P\{80 \le X_1 \le 100\} = \Phi_0\left(\frac{100+0,5-70}{4,5826}\right) - \Phi_0\left(\frac{80-0,5-70}{4,5826}\right)$$

$$= 0,5 - \Phi_0(2,07) = 0,0192$$

Xác suất công nhân A được thưởng nếu sử dụng máy 2 là

$$P(A/H_2) = P\{80 \le X_2 \le 100\} = \Phi_0\left(\frac{100+0,5-80}{4}\right) - \Phi_0\left(\frac{80-0,5-80}{4}\right)$$

$$\approx 0,5 + \Phi_0(0,13) = 0,5517$$

Vì H_1, H_2 là nhóm biến cố đầy đủ nên xác suất để công nhân A được thưởng là:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,5.0,0192 + 0,5.0,5517 = 0,28545$$

b) Gọi Y là số lần được thưởng của A trong 200 lần thi

$Y \sim B(n = 200, p = 0,28545)$

Tìm Mod(Y):

$$np + p - 1 \le Mod(Y) \le np + p$$
$$\Leftrightarrow 200.0,28545 + 0,28545 - 1 \le Mod(Y) \le 200.0,28545 + 0,28545$$
$$\Leftrightarrow 56,37545 \le Mod(Y) \le 57,37545$$
$$\Rightarrow Mod(Y) = 57$$

Số lần được thưởng nhiều khả năng nhất là 57

a) Giả sử n là số lần A cần dự thi, Z là số lần được thưởng của A trong n lần $Z \sim B(n, p = 0,28545)$

Để xác xuất có ít nhất một lần được thưởng không dưới 95% thì

$$P\{Z \ge 1\} = 1 - P\{Z = 0\} = 1 - (1 - 0,28545)^n \ge 0,95$$
$$\Rightarrow (1 - 0,28545)^n \le 0,05$$
$$n \ge \frac{\ln 0,05}{\ln(1 - 0,28545)} \approx 8,913$$

Vậy n = 9

3.25. Trung bình $\frac{2}{3}$ phút (=40 giây) có 2 ô tô đi qua trạm giao thông

$\Rightarrow$ Trung bình 2 phút có 6 ô tô đi qua trạm giao thông
Trung bình 3 phút có 9 ô tô đi qua trạm giao thông

* Gọi X là số ô tô đi qua trạm trong khoảng thời gian 2 phút $\Rightarrow X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = 6$

Xác suất để có 3 đến 4 ô tô đi qua trạm trong khoảng thời gian 2 phút là:

$$P\{3 \le X \le 4\} = P\{X = 3\} + P\{X = 4\}$$
$$= \frac{e^{-6}.6^3}{3!} + \frac{e^{-6}.6^4}{4!} \approx 0,2231$$

* Gọi Y là số ô tô qua trạm trong khoảng thời gian 3 phút $\Rightarrow Y \sim P(\lambda)$ với $\lambda = 9$

Xác suất để có 7 ô tô đi qua trạm trong khoảng thời gian 3 phút là:

$$P\{Y = 7\} = e^{-9}\frac{9^7}{7!} \approx 0,1171$$

a) Z là số xe qua trạm trong khoảng thời gian T
Trung bình T phút có 3T ô tô đi qua trạm giao thông $\Rightarrow Z \sim P(\lambda), \lambda = 3T$

Xác suất để trong khoảng thời gian T có ít nhất 1 ô tô đi qua trạm là:

$$P\{Z \ge 1\} = 1 - P\{Z = 0\} = 1 - e^{-3T}$$

Để xác suất này là 0,95 thì :

$$1 - e^{-3T} = 0,95 \Rightarrow e^{-3T} = 0,05 \;\Rightarrow\; T = \frac{\ln 0,05}{-3} \approx 0,9986 \;\;\Rightarrow T = \frac{\ln 0,05}{-3} \approx 0,9986 \text{ (phút)}$$

3.26. Số tiền lời trong một ngày của trạm là:

$Y = 20X - 24; Y = \{-24, -4, 16, 36\}$

$P\{Y = -24\} = P\{X = 0\} = e^{-2,8}\frac{2,8^0}{0!} \approx 0,0608$

$P\{Y = -4\} = P\{X = 1\} = e^{-2,8}\frac{2,8^1}{1!} \approx 0,1703$

$P\{Y = 16\} = P\{X = 2\} = e^{-2,8}\frac{2,8^2}{2!} \approx 0,2384$

$P\{Y = 36\} = P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X \leq 2\} \approx 0,5305$

Bảng phân phối xác suất của Y là:

Y	-24	-4	16	36
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,5305

$$E(Y) = 20,772$$

Vậy số tiền lời trung bình của trạm thu được trong một ngày là 20,772 USD

a) Khi trạm có 4 xe cho thuê thì số tiền lời trong một ngày của trạm là :
$Z = 20X - 32$; $Z = \{-32, -12, 8, 28, 48\}$

Tương tự câu a, ta có bảng phân phối xác suất của Z

Z	-32	-12	8	28	48
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,308

$E(Z) = 18,932$

Vậy số tiền lời trung bình của trạm thu được trong một ngày trong trường hợp trạm có 4 xe là 18,932 USD

b) Từ câu a, b ta thấy trạm có 3 xe cho thuê thì lợi nhuận trung bình cao hơn $\Rightarrow$Trạm nên có 3 xe

3.27. Gọi X là số cuộc điện thoại trung tâm nhận được trong vòng 1 phút.
Do trung tâm bưu điện nhận được trung bình 150 cuộc điện thoại trong 1 giờ, ta có:

$X \sim P(\lambda), \lambda = 2,5$ với $\lambda = \frac{150}{60}$

Xác suất để trung tâm này nhận được không quá 2 cú điện thoại trong vòng 1 phút là:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{e^{-2,5}.2,5^0}{0!} + \frac{e^{-2,5}.2,5^1}{1!} + \frac{e^{-2,5}.2,5^2}{2!} = 0,5438$$

3.28. Gọi X là số sản phẩm loại A trong 10 sản phẩm lấy ra.
Ta có: $X \sim H(1000; 400; 10)$ với $X(\Omega) = \{1; 2; 3; ...; 10\}$

Xác suất có 3 sản phẩm loại A có trong 10 sản phẩm lấy ra là:

$$P(X=3)=\frac{C_{400}^{3}.C_{1000-400}^{10-3}}{C_{1000}^{10}}\approx 0,2155$$

3.29. Gọi X (kg) là trọng lượng của loại trái cây đã cho.

Ta có: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Mẫu điều tra 650 trái cây loại này có 31 trái có trọng lượng dưới 1,8 kg và 130 trái hơn 2,4 kg, ta có:

$$P(X<1,8)=1-P(1,8\le X<+\infty)=\frac{31}{650}$$

$$\Leftrightarrow 1-\left[\Phi_0(+\infty)-\Phi_0\left(\frac{1,8-\mu}{\sigma}\right)\right]=1-0,5+\Phi_0\left(\frac{1,8-\mu}{\sigma}\right)=\frac{31}{650}$$

$$\Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{1,8-\mu}{\sigma}\right)=-0,4523=\Phi_0(-1,67)$$

$$\Rightarrow \frac{1,8-\mu}{\sigma}=-1,67\Rightarrow \mu-1,67\sigma=1,8(1)$$

$$\frac{130}{650}=P(X>2,4)=\Phi_0(+\infty)-\Phi_0\left(\frac{2,4-\mu}{\sigma}\right)=0,5-\Phi_0\left(\frac{2,4-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi_0\left(\frac{2,4-\mu}{\sigma}\right)=0,3=\Phi_0(0,84)\Rightarrow \frac{2,4-\mu}{\sigma}=0,84$$

$$\Rightarrow \mu+0,84\sigma=2,4(2)$$

Từ (1), (2) ta có:

$$\begin{cases}\mu-1,67\sigma=1,8\\ \mu+0,84\sigma=2,4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=2,1992\\ \sigma=0,2390\end{cases}$$

Vậy trọng lượng trung bình của trái cây loại này là 2,1992 kg và độ lệch chuẩn là 0,2390 kg.

a) Trong mẫu điều tra 650 trái này có 31 trái có trọng lượng dưới 1,8 kg. Do đó, trong 650 trái cây có 31 phế phẩm.

Gọi X là số phế phẩm có trong 20 trái cây lấy ra từ lô.

Ta có: $X \sim H(650;31;20)$ với $X(\Omega)=\{1;2;...;20\}$

Khả năng lô trái cây được xếp loại I là:

$$P(X=0)=\frac{C_{31}^{0}.C_{650-31}^{20-0}}{C_{650}^{20}}=0,3707$$

Khả năng lô trái cây được xếp loại II là:

$$P(1\le X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{C_{31}^{1}.C_{650-31}^{20-1}}{C_{650}^{20}}+\frac{C_{31}^{2}.C_{650-31}^{20-2}}{C_{650}^{20}}=0,5647$$

Khả năng trái cây được xếp loại III là:

$$P(X>2)=1-P(X=0)-P(1\le X\le 2)=1-0,5647-0,3707=0,0646$$

Vậy nhiều khả năng nhất lô trái cây được xếp loại II.

3.30. Gọi các lô có tỉ lệ sản phẩm loại I của tương ứng: 60%, 70%, 80% lần lượt là 1, 2, 3.
Gọi A_i là biến cố lô thứ I được mua với I = 1, 2, 3.

Lô số 1 có 10000 sản phẩm, trong đó có 10000.60%=6000 sản phẩm loại I.

Gọi X_1 là số sản phẩm loại I trong 10 sản phẩm loại I được lấy ra từ lô thứ I.

Ta có:

$X_1 \sim H(10000;6000;10)$ với $X_1(\Omega)=\{1;2;...;10\}$

$$P(A_1)=P(X_1\geq 8)=P(X_1=8)+P(X_1=9)+P(X_1=10)$$
$$=\frac{C_{6000}^{8}.C_{10000-6000}^{10-8}}{C_{1000}^{10}}+\frac{C_{6000}^{9}.C_{10000-6000}^{10-9}}{C_{1000}^{10}}+\frac{C_{6000}^{10}.C_{10000-6000}^{10-10}}{C_{1000}^{10}}=0,1672$$
$$P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0,8328$$

Tương tự

$$P(A_2)=0,3827\Rightarrow P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=0,6173$$
$$P(A_3)=0,6778\Rightarrow P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=0,3222$$

a) Xác suất để lô hàng có tỉ lệ sản phẩm loại I là 80% được mua là $P(A_1)$=0,1672.

b) Gọi B là biến cố có ít nhất một lô hàng được mua. Ta có: $\overline{B}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

P($\overline{B}$) = P($\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$) = P($\overline{A_1}$)P($\overline{A_2}$)P($\overline{A_3}$) Vì $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ là 3 biến cố độc lập.

Xác suất có ít nhất một lô hàng được mua là

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0,1656=0,8344$$

c) Gọi C là biến cố chỉ có một lô hàng có tỉ lệ sản phẩm loại I là 80% được mua. Ta có: $C=\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

Xác suất chỉ có lô hàng có tỉ lệ sản phẩm loại I là 80% được mua là:

$P(C)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)=0,3484$ Vì $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, A_3 là 3 biến độc lập.

3.31. Gọi X là số sản phẩm loại A trong 3 sản phẩm được lấy ra. Suy ra 3 – X là số sản phẩm loại B trong 3 sản phẩm được lấy ra.
Ta có $X \sim H(12;7;3)$

Gọi Y là số tiền lời thu được khi bán 3 sản phẩm đó. Thế thì Y = 3X + 2(3 – X) = X + 6 với $Y(\Omega)=\{6;7;8;9\}$

Từ đó, ta có:

$$P(Y=6)=P(X=0)=\frac{C_7^0.C_{12-7}^{3-0}}{C_{12}^3}=0,0455$$

Tương tự : P(Y = 7) = P(X = 0) = 0,3182

P(Y = 8) = P(X = 2) = 0,4773

P(Y = 9) = P(X =3) = 0,1590

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	6	7	8	9
P	0,0455	0,3182	0,4773	0,1590

(Quy luật siêu bội H(N,n,m))

3.32. Gọi kiện 1, kiện 2, kiện 3 lần lượt là kiện hàng số sản phẩm loại A có trong mỗi kiện tương ứng là 6, 7, 8.

a) Gọi A_i là biến cố kiên hàng thứ I được mua với I = 1; 2; 3.

Vì kiện 1 có 10 sản phẩm, trong đó có 6 sản phẩm loại A.

Gọi X_1 là số sản phẩm loại A trong đó có 2 sản phẩm được lấy ra.

Ta có $X_1 \sim H(10;6;2)$ và $X_1(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

$$P\left(A_1\right)=P\left(X_1=2\right)=\frac{C_6^2.C_{10-6}^0}{C_{10}^2}=0,3333 \Rightarrow P\left(\overline{A_1}\right)=1-P\left(A_1\right)=0,6667$$

Tương tự

$$P(A_2)=P(X_2=2)=0,4667 \Rightarrow P\left(\overline{A_2}\right)=0,5333$$

$$P(A_3)=P(X_3=2)=0,6222 \Rightarrow P(\overline{A_3})=0,3778$$

Gọi M là biến cố có kiện hàng được mua. Ta có $\overline{M}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

Xác suất có kiện hàng được mua là

$$P(M)=1-P(\overline{M})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1}).P(\overline{A_3}).P(\overline{A_3})=0,8657$$

Vì các biến trên là các biến độc lập.

b) Gọi X là số sản phẩm loại A có trong 2 sản phẩm được lấy ra. Thế thì 2 – X là số sản phẩm B có trong 2 sản phẩm được lấy ra.

Gọi H_i là biến cố lấy ra 2 sản phẩm thuộc lô thứ i với I = 0; 1; 2. Nhóm H_1, H_2, H_3là một nhóm biến cố đấy đủ.

Và $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Gọi Y là số tiền lời khi bán 2 sản phẩm (USD).

Ta có Y = 3X + 2(2 – X) = X + 4 với $Y(\Omega) = \{4;5;6\}$.

X/H_i là biến cố số sản phẩm loại A trong 2 sản phẩm lấy ra từ kiện i.

Ta có $X/H_1 \sim H\{10;6;2\}$, $X/H_2 \sim H\{10;7;2\}$, $X/H_3 \sim H\{10;8;2\}$ với $X/H_i(\Omega) = \{0;1;2\}$; i = 1, 2, 3.

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(Y=4)=P(X=0)=P(H_1).P(X/H_1)+P(H_2).P(X/H_2)+P(H_3).P(X/H_3)=0,0741$$

Tương tự:

$$P(Y=5)=P(X=1)=0,4519$$

$$P(Y=6)=P(X=2)=0,4740$$

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	4	5	6
P	0,0741	0,4519	0,4740

3.33. Gọi X là số sản phẩm loại I trong 3 sản phẩm được lấy ra từ 1 hộp.

Hộp loại 1, loại 2, loại 3, loại 4 là hộp mà số sản phẩm loại I tương ứng là 7; 8; 9; 10.

Gọi H_i là biến cố lấy ở hộp loại i (i = 1;2;3;4) ra 3 sản phẩm.

H_1, H_2, H_3, H_4 là nhóm biến cố đầy đủ.

Ta có $P(H_1) = 0,1; P(H_2) = 0,3; P(H_3) = 0,4; P(H_4) = 0,2$.

X/H_i là số sản phẩm lấy ra từ một hộp thuộc loại i.

Ta có $X/H_1 \sim H(10;7;3), X/H_2 \sim H(10;8;3), X/H_3 \sim H(10;9;3), X/H_4 \sim H(10;10;3)$

Từ đó

$$P(X=3/H_1)=0,2917; P(X=3/H_2)=0,4667$$
$$P(X=3/H_3)=0,7; P(X=3/H_4)=1$$

Xác suất để hộp sản phẩm được nhận là

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ: $p = P(X=3) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i).P(3/H_i) = 0,6492$

Gọi Y là số hộp mà khách có thể nhận được.

Ta có $Y \sim B(500;p); n=500, p=0,6492$.

Số hộp tin mà khách hàng nhận được là m_0. Ta có $np+p-1 \le m_0 \le np+p \Rightarrow 324,2492 \le m_0 \le 325,2492 \Rightarrow m_0 = 325$.

Vậy số hộp tin mà khách hàng chắc chắn nhận được là 325 hộp.

3.34.

Nếu công ti trả nhầm kiện hàng đạt tiêu chuẩn thì kiện hàng gồm 90 sản phẩm đó có đúng 89 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu; đồng thời rút ngẫu nhiên 4 sản phẩm thì có 1 sản phẩm xấu.

Gọi X là số sản phẩm xấu có trong 4 sản phẩm được rút ngẫu nhiên của kiện hàng đạt tiêu chuẩn bị trả nhầm.

Ta có

$X \sim H(90;1;4) \quad X(\Omega) = \{0;1\}$.

Xác suất công ti trả nhầm kiện hàng đạt tiêu chuẩn là

$$P(X=1) = \frac{C_1^1.C_{90-1}^{4-1}}{C_{90}^4} = 0,0444$$

a)

Công ty nhận kiện hàng có 2 sản phẩm xấu nếu trong kiện hàng có 90 sản phẩm đó có đúng 88 sản phẩm tốt và 2 sản phẩm xấu; đồng thời khi rút ngẫu nhiên 4 sản phẩm thì có 1 sản phẩm xấu.

Gọi Y là số sản phẩm xấu có trong 4 sản phẩm được rút ngẫu nhiên của kiện hàng có 2 sản phẩm xấu.

Ta có

$Y \sim H(90;2;4) \quad Y(\Omega) = \{0;1;2\}$

Xác suất công ty nhận nhầm sản phẩm có 2 sản phẩm xấu là

$$P(Y=2)=\frac{C_2^2.C_{90-2}^{4-2}}{C_{90}^4}=0,0015$$

3.35. Trong lô hàng có 20000 sản phẩm có 80%.20000 = 16000 sản phẩm loại A. Lô hàng sẽ được mua nếu có ít nhất 100 sản phẩm loại A trong 120 sản phẩm được lấy ra.

Gọi X là số sản phẩm loại A trong 120 sản phẩm được lấy ra.

Ta có $X \sim H(20000;16000;120)$ với $X(\Omega)=\{0;1;...;120\}$

Vì 20000 khá lớn so với 120 nên ta có thể coi

$$X \sim B(120;p); p=\frac{16000}{20000}=0,8;1-p=0,2$$

Xác suất lô hàng được mua là

$$P(X\geq 100)=\sum_{i=100}^{120}P(X=i)=\sum_{i=100}^{120}C_{120}^i.(0,8)^i.(0,2)^{120-i}=0,2146$$

3.36. Gọi X là số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm được lấy ra của kiện hàng.

Gọi H_i là biến cố kiện hàng do phân xưởng I sản xuất i = 1;2;3 .

Vì H_1, H_2, H_3 là một nhóm đầy đủ và H_1, H_2, H_3 là đồng khả năng nên ta có $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

X/H_i là số sản phẩm tốt có 2 sản phẩm được lấy ra từ kiện hàng do phân xưởng i sản xuất.

Ta có $X/H_1 \sim H(10;7;2); X/H_2 \sim H(10;9;2); X/H_3 \sim H(10;8;2)$

$$P\left(X=2/H_1\right)=\frac{C_7^2.C_{10-7}^{2-2}}{C_{10}^2}=0,4667$$

$$P\left(X=2/H_2\right)=\frac{C_7^2.C_{10-9}^{2-2}}{C_{10}^2}=0,4667$$

$$P\left(X=2/H_1\right)=\frac{C_7^2.C_{10-8}^{2-2}}{C_{10}^2}=0,4667$$

Xác suất kiện hàng được mua là

$$P(X=2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i).P(2/H_i)=0,6292$$

a) Áp dụng công thức Bayes ta có xác suất để kiện hàng đã được mua do phân xưởng 3 sản xuất là

$$P(H_3/X=2)=\frac{P(H_3).P(X=2/H_3)}{P(X=2)}=0,3294$$

b) Gọi Y là số kiện hàng có trong 100 kiên được mua.

Ta có $Y \sim B(100;p); p=0,6296$

Do n = 100 nên ta có thể coi

$$Y \sim N\left(\mu;\sigma^2\right); \mu=np=62,96; \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{100.0,6296.0,3704}=4,829$$

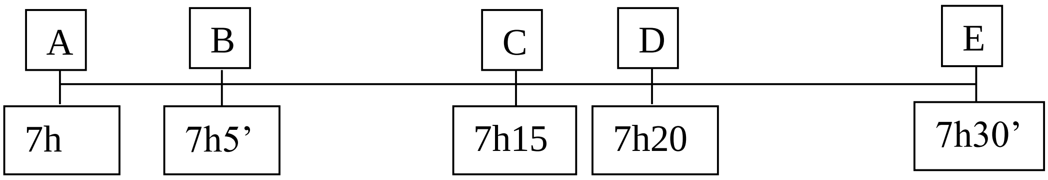
Xác suất để khi kiểm tra 100 kiện hàng thì có it nhất 70 kiện được mua là

3.37. $X \sim U\left(0,30\right)$ Trong đó X=0 tương ứng với thời điểm 7h.

Hàm mật độ xác suất của X: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} \text{ khi } x \in (0,30) \\ 0 \text{ khi } x \notin (0,30) \end{cases}$

Theo giả thiết, xe buýt xuất hiện tại bến đợi từ 7 giờ sáng, cứ 15 phút có một chuyến nên ta có 7 giờ, 7 giờ 15 và 7 giờ 30 là 3 thời điểm xe bus đi qua.

Người khách phải đợi hơn 10 phút nếu thời điểm xuất hiện của người đó nằm trong AB, CD.



Xác suất để người đó phải đợi xe bux nhiều hơn 10 phút là :

$$P\{0 < X < 5\} + P\{15 < X < 20\} = \int_0^5 \frac{dx}{30} + \int_{15}^{20} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$$

3.38.

a) $X \sim U(0, A)$

Hàm mật độ xác suất của X : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{A} \text{ khi } x \in (0,A) \\ 0 \text{ khi } x \notin (0,A) \end{cases}$

Giả sử $a \in (0, A)$ là chỗ đặt trạm cứu hỏa.

Ta tìm $\min E(|X-a|)$ với $a \in (0, A)$

$$g(a) = E(|X-a|) = \int_0^A |x-a| \frac{1}{A} dx = -\int_0^a \frac{(x-a)}{A} dx + \int_a^A \frac{(x-a)}{A} dx$$

$$= -\left.\frac{(x-a)^2}{2A}\right|_0^a + \left.\frac{(x-a)^2}{2A}\right|_a^A = \frac{a^2}{2A} + \frac{A^2 - 2aA + a^2}{2A}$$

$$\Rightarrow g(a) = \frac{1}{2A}\left[2a^2 - 2aA + A^2\right];$$

$$\bullet\ g'(a) = \frac{1}{2A}\left[4a - 2A\right] = 0 \Rightarrow a = \frac{A}{2}$$

$$\bullet\ a = \frac{A}{2}, g''(a) = \frac{2}{A} > 0$$

$\Rightarrow$ g(a) đạt cực tiểu tại $a = \dfrac{A}{2}$

Vậy ta phải đặt trạm ở chính giữa khoảng (0, A) để trung bình khoảng cách từ chỗ hỏa hoạn tới trạm là cực tiểu.

b)
$X \sim E(\lambda)$

Hàm mật độ xác suất của X: $f\left(x\right)=\begin{cases} 0 \text{ khi } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ khi } x\ge 0 \end{cases}$

Ta tìm $\min E\left(\left|X-a\right|\right)$ với $a\in\left(0,+\infty\right)$

$$g\left(a\right)=E\left(\left|X-a\right|\right)=\int_0^{+\infty}\left|x-a\right|\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$=-\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\left(x-a\right)dx+\int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\left(x-a\right)dx$$
$$=-e^{-\lambda x}\left(a-x-\frac{1}{\lambda}\right)\Bigg|_0^a+e^{-\lambda x}\left(a-x-\frac{1}{\lambda}\right)\Bigg|_a^{+\infty}$$
$$=\frac{2e^{-\lambda a}}{\lambda}+a-\frac{1}{\lambda}$$
$$g'\left(a\right)=-2e^{-\lambda a}+1$$
$$g'(a)=0\Leftrightarrow a=\frac{\ln 2}{\lambda}$$
$$g''\left(a\right)=2\lambda e^{-\lambda a}>0$$

Vậy g(a) đạt cực tiểu khi $a=\frac{\ln 2}{\lambda}$

Vậy ta phải đặt trạm cách 0 một đoạn có độ dài $a=\frac{\ln 2}{\lambda}$ để trung bình khoảng cách từ chỗ hỏa hoạn tới trạm là cực tiểu.

CHƯƠNG 4. BIẾN NGẪU NHIÊN HAI CHIỀU

4.1. Khái niệm chung

VÍ DỤ : - Mô tả kích thước của sản phẩm hình chữ nhật
W=(X,Y), với X là chiều dài, Y là chiều rộng.
- Mô tả kích thước của sản phẩm hình hộp ta có bnn 3 chiều
W=(X,Y,Z), với X là chiều dài, Y là chiều rộng, Z là chiều cao.

ĐN: BNN 2 chiều là BNN mà các giá trị có thể của nó được xác định bằng 2 con số. Kí hiệu W=(X,Y).
X, Y được gọi là các thành phần của BNN hai chiều.
BNN hai chiều được gọi là rời rạc (liên tục) nếu các thành phần của nó là các BNN rời rạc (liên tục).

4.2. Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều

W=(X,Y) là biến ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc

$$X = x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$Y = y_1, y_2, \ldots, y_m$$

Xác suất để đồng thời ($X=x_i$) và ($Y=y_i$): $p\left(x_i, y_j\right) = p\left[\left(X = x_i\right)\cdot\left(Y = y_j\right)\right]$

+ Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

Y \ X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	P_Y
y_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_1)$	...	$P(x_i, y_1)$	...	$P(x_n, y_1)$	$P(y_1)$
y_2	$P(x_1, y_2)$	$P(x_2, y_2)$	...	$P(x_i, y_2)$	...	$P(x_n, y_2)$	$P(y_2)$
...	...	...	...	...	...	...	...
y_j	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_j)$	...	$P(x_i, y_j)$	...	$P(x_n, y_j)$	$P(y_j)$
...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	$P(x_1, y_m)$	$P(x_2, y_m)$	...	$P(x_i, y_m)$	...	$P(x_n, y_m)$	$P(y_m)$
P_X	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_i)$	...	$P(x_n)$	

x_i ($i=\overline{1,n}$): Các giá trị có thể có của thành phần X

y_j ($i=\overline{1,m}$): Các giá trị có thể có của thành phần Y

$P(x_i, y_j)$: Xác suất đồng thời để BNN hai chiều (X,Y) nhận giá trị (x_i,y_j)

$$\begin{cases} P(x_i, y_j) \geq 0, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) = 1 \end{cases}$$

- Phân phối xác suất biên của X:

X	x_1	x_2	...	x_n
P(x)	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$

$$p\left(x_i\right) = \sum_{j=1}^{m} p\left(x_i, y_j\right)$$

- Phân phối xác suất biên của Y:

Y	y_1	y_2	...	y_n
P(y)	$p(y_1)$	$p(y_2)$	...	$p(y_n)$

$$p\left(y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(x_i, y_j\right)$$

+ Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều

Hàm phân bố xác suất đồng thời của BNN hai chiều (X,Y), kí hiệu F(x,y) là xác suất để thành phần X nhận giá trị nhỏ hơn x và thành phần Y nhận giá trị nhỏ hơn y với x, y là các số thực tùy ý:

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y)$$

VÍ DỤ : Tìm xác suất để trong kết quả của phép thử thành phần X của BNN hai chiều (X,Y) nhận giá trị X<2 và thành phần Y nhận giá trị Y<3 nếu biết hàm phân bố XS của nó có dạng:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

*** Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều**

Đối với BNN liên tục (X,Y) ngoài hàm phân bố xác suất ra còn có thể dùng hàm mật độ xác suất để biểu diễn quy luật phân phối xác suất của nó. Ta sẽ giả thiết rằng với BNN liên tục (X,Y) hàm phân bố xác suất luôn liên tục và có đạo hàm riêng hỗn hợp bậc hai ở mọi đường cong (có thể trừ một số đường cong nhất định).

ĐN: Hàm mật độ xác suất đồng thời của BNN hai chiều liên tục (X,Y), kýhiệu là f(x,y), là đạo hàm riêng hỗn hợp bậc hai của hàm phân bố xác suất đồng thời:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

VÍ DỤ : Tìm hàm mật độ các suất đồng thời của BNN hai chiều liên tục (X,Y) nếu biết hàm phân bố xác suất đồng thời của nó:

$$F(x,y) = \sin x.\sin y \ \ (0 \le y \le \frac{\pi}{2})$$

4.3. Quy luật phân phối xác suất có điều kiện

- Nếu (X,Y) là BNN hai chiều rời rạc thì:

$$P(x_i, y_j) = P(x_i) P(y_j | x_i)$$
$$= P(y_j) P(x_i | y_j) \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

- Nếu (X,Y) là BNN hai chiều liên tục thì:

$$f(x,y) = f_1(x)\, f(y|x)$$
$$= f_2(y)\, f(x|y)$$

- Nếu (X,Y) là BNN rời rạc, độc lập thì:

$$P(x_i, y_j) = P(y_j) P(x_i) \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

- Nếu (X,Y) là BNN liên tục, độc lập thì:

$$f(x,y) = f_1(x)\,.\,f_2(y)$$

4.4. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên hai chiều:

a) Kỳ vọng có điều kiện

Với điều kiện Y=y_j, bảng phân phối xác suất có điều kiện Y=y_j của X là:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	$p(x_1 \vert Y = y_j)$	$p(x_2 \vert Y = y_j)$	$\cdots$	$p(x_n \vert Y = y_j)$

$$p\left(x_i \middle| Y = y_j\right) = \frac{p\left(x_i, y_j\right)}{p\left(y_j\right)} \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

Với điều kiện X=x_i, bảng phân phối xác suất có điều kiện X=x_i của Y là:

Y	y_1	y_2	...	Y_m
P	$p(y_1 \vert X = x_i)$	$p(y_2 \vert X = x_i)$	$\cdots$	$p(y_m \vert X = x_i)$

$$p\left(y_j \middle| X = x_i\right) = \frac{p\left(x_i, y_j\right)}{p\left(x_i\right)} \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

Kì vọng toán có điều kiện, hàm hồi quy

* Kỳ vọng toán có điều kiện của BNN rời rạc Y với X=x (x là một giá trị xác định của X) là tổng các tích giữa các giá trị có thể có của Y với các xác suất có điều kiện tương ứng:

$$E(Y \mid x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j|x) = f(x_i)$$

* Kỳ vọng toán có điều kiện của BNN liên tục Y với X=x được xác định bằng công thức:

$$E(Y \mid X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y|x)\, dy$$

trong đó f(y | x) là hàm mật độ xác suất có điều kiện của Y với X=x.

* Tương tự, ta có định nghĩa kỳ vọng toán có điều kiện của X khi Y = y.

* Hàm hồi quy của Y đối với X là kỳ vọng toán có điều kiện của Y đối với X:

$$f(x) = E(Y \mid x)$$

Tương tự, hàm hồi quy của X đối với Y là kỳ vọng toán có điều kiện của X đối với Y:

$$f(y) = E(X \mid y)$$

VÍ DỤ : Thống kê dân số của một nước ở độ tuổi trưởng thành theo trình độ học vấn X và lứa tuổi Y thu được kết quả ở bảng dưới đây. Tìm học vấn trung bình theo lứa tuổi?

Y X	25-35 30	35-55 45	55-100 70
Thất học: 0	0,01	0,02	0,05
Tiểu học: 1	0,03	0,06	0,10
Trung học: 2	0,18	0,21	0,15
Đại học: 3	0,07	0,08	0,04

Giải:

Học vấn trung bình theo lứa tuổi là kỳ vọng toán có điều kiện của X theo Y. Với Y = 30 ta có bảng phân phối xác suất có điều kiện sau:

X / Y=30	0	1	2	3
P	$\frac{0,01}{0,29}$	$\frac{0,03}{0,29}$	$\frac{0,18}{0,29}$	$\frac{0,07}{0,29}$

Từ đó

$$E(X / Y=30) = 0 \times \frac{0,01}{0,29} + 1 \times \frac{0,03}{0,29} + 2 \times \frac{0,18}{0,29} + 3 \times \frac{0,07}{0,29} = 2,069.$$

Tương tự

$$E(X \mid Y=45) = 1,946$$
$$E(X \mid Y = 70) = 1,529$$

Mô tả trên đồ thị:

b) Tính độc lập của hai biến ngẫu nhiên rời rạc

Cách 1. Dùng định nghĩa;

Cách 2. Xác suất đồng thời của hai dòng bất kì có cùng tỷ lệ;
Cách 3. Xác suất đồng thời của hai cột bất kì có cùng tỷ lệ;
Cách 4. Các quy luật phân phối xác suất có điều kiện cũng là qlpp biên.

VÍ DỤ 1: Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của (X,Y)

X\Y	1	2
0	0,06	0,04
1	0,3	0,2
2	0,24	0,16

a) X, Y có độc lập không ?
b) E(XY) ? V(X+Y)?

c) Hiệp phương sai và hệ số tương quan
Hiệp phương sai
$COV(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$

>0: X, Y tương quan thuận chiều
<0: X, Y tương quan ngược chiều
=0: X, Y không tương quan
≠0: X, Y tương quan

Chú ý:
1) COV(X,X) = V(X);   COV(Y,Y)=V(Y)
2) V(X ± Y) = V(X) + V(Y) ± 2 COV(X,Y)
3) COV(X,Y) = E(XY) - E(X) E(Y)
Hệ quả: X, Y độc lập thì Cov(X,Y) = 0.

Hệ số tương quan:

$$\rho_{XY} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Tính chất: 1) $\rho_{XY} = \rho_{YX}$

2) $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

3) $\rho_{XY} > 0$ thì X, Y đồng biến

< 0 thì X, Y nghịch biến

4) X, Y độc lập thì $\rho_{XY} = 0$

5) $\rho_{XY} = \pm 1$ thì X, Y phụ thuộc hàm số.

Chú ý: 1) $\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

2) X, Y độc lập thì không tương quan. Điều ngược lại không đúng.

VÍ DỤ 2: Cho X= Giới tính; Y = lương tháng.

X\Y	0,5	1	1,5

0	0,1	0,3	0,2
1	0,06	0,18	0,16

a) Phân phối xác suất lương tháng của nữ công nhân?

b) Lương trung bình của nữ công nhân?

c) Lương tháng có tương quan giới tính không?

d) Mức độ tương quan chặt chẽ đến đâu?

4.6. Quy luật phân phối xác suất của hàm các biến ngẫu nhiên

+ Hàm 1 biến ngẫu nhiên: Khái niệm và quy luật phân phối xác suất.

+ Hàm 2 biến ngẫu nhiên: Khái niệm và quy luật phân phối xác suất.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 4.1

Cho các biến ngẫu nhiên X, Y có bảng phân phối đồng thời:

X \ Y	1	2	3
1	0,12	0,15	0,03
2	0,28	0,35	0,07

a) Tìm các phân phối biên.

b) Chứng minh X và Y độc lập.

c) Tìm luật phân phối xác suất của Z = X.Y.

d) Tính EZ.

Bài 4.2

Thống kê về lãi suất cổ phiếu tính cho 100USD khi đầu tư vào hai ngân hàng A và B trong 1 năm tương ứng là X (đơn vị: %), Y (đơn vị: %) cho kết quả trong bảng:

X \ Y	-2	5	10
-1	0,10	0,15	0,10
4	0,05	0,20	0,10
8	0,10	0,15	0,05

a) Tính lãi suất kì vọng và mức độ rủi ro khi đầu tư vào A và B.

b) X và Y có độc lập với nhau không?

c) Tính lãi suất cổ phiếu trung bình của A khi lãi suất cổ phiếu của B là 5%.

d) Cho kết luận về sự phụ thuộc tuyến tính giữa X và Y.

e) Lập bảng phân phối xác suất của T = X + Y, tính ET, VT.

f) Để đạt lãi suất trung bình lớn nhất thì nên đầu tư vào hai loại cổ phiếu của A, B theo tỷ lệ nào?

i) Để hạn chế rủi ro về lãi suất đến mức thấp nhất thì nên đầu tư vào hai loại cổ phiếu theo tỉ lệ nào?

Bài 4.3

Một hộp có 3 cầu đỏ, 4 cầu trắng, 5 cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp. Gọi X, Y là số quả cầu đỏ, cầu vàng có trong 3 quả cầu được chọn.

Lập bảng phân phối đồng thời của X và Y.

Bài 4.4

Có 3 hộp đựng bi: Hộp 1 có 6 bi xanh, 4 bi đỏ; Hộp 2 có 6 bi xanh, 2 bi đỏ; Hộp 3 có 4 bi xanh và 3 bi đỏ.

Lấy ngẫu nhiên từ hộp 1 ra 1 bi và từ hộp 2 ra 2 bi rồi bỏ vào hộp 3. Sau đó lấy từ hộp 3 ra 4 bi.

a) Gọi X là tổng số bixanh lấy ra từ hộp 1 và hộp 2 bỏ vào hộp 3. Tìm luật phân phối xác suất của X. Tìm hàm phân phối của X.

b) Tìm xác suất để 4 bi lấy ra từ hộp 3 đều có màu xanh.

c) Tìm xác suất để 4 bi lấy ra từ hộp 3 đều có hai màu.

Bài 4.5

Cho bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên 2 chiều (X, Y) như sau:

X \ Y	1	2	3
0	0,2	0,25	a
1	b	0,15	0,1

Tìm phân phối xác suất của Y biết EY = 2.

Bài 4.6

Một nhà máy kẹo đóng các gói kẹo sôcôla của mình gồm hỗn hợp đường, hạt dẻ và sôcôla màu đậm, màu nhạt. Giả sử X, Y tương ứng là tỉ lệ sôcôla màu nhạt và màu đậm trong mỗi hộp sôcôla có hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(2x + 3y), & 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

a) Tìm k

b) Tính xác suất $P\{(X, Y) \in A\}$ với $A = \left\{(x, y \mid 0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\right\}$

c) Tìm hàm mật độ của X

d) Tìm hàm mật độ điều kiện f(y|x); Tính

$$P\left\{\frac{1}{4} < Y < 1 \mid X = \frac{3}{4}\right\}; E\left(Y \mid X = \frac{3}{4}\right)$$

e) Tìm hàm mật độ của T = X + Y. Tính P{X + Y > 1}.

Bài 4.7

Giả sử X thời gian (tính bằng giây) xảy ra phản ứng của một hợp chất và Y là nhiệt độ (đơn vị °F) mà tại đó phản ứng xảy ra, có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ của T = Y – X

b) Tìm P {X < Y}

Bài 4.8

Cho hàm mật độ đồng thời của X và Y

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

a) X, Y có độc lập không?

b) Tính P {X, Y < 0,5} và EX.Y; cov(X, Y)

Bài 4.9

Tổng doanh thu mỗi tuần của một khách sạn là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn trung bình 22000 USD, độ lệch tiêu chuẩn 230 USD. Tính xác suất:

a) Tổng doanh thu hai tuần không vượt quá 5000 USD.

b) Tổng doanh thu vượt quá 2000 USD ít nhất 2 trong 3 tuần sau.

Giả sử tổng doanh thu từng tuần là độc lập.

Bài 4.10

Số điểm của Hùng và Minh khi chơi Bowling tương ứng có phân phối chuẩn $N(170, 20^2)$, $N(160, 15^2)$. Nếu Hùng và Minh mỗi người chơi một lần và giả sử số điểm của họ độc lập với nhau. Tính xác suất:

a) Minh cao điểm hơn.

b) Tổng số điểm của họ trên 350.

Bài 4.11

Một kỹ sư xây dựng cho rằng tổng trọng lượng W của một chiếc cầu có thể chịu đựng được mà không bị phá vỡ cấu trúc có phân phối chuẩn trung bình 400, độ lệch tiêu chuẩn 40. Giả sử rằng trọng lượng của ô tô là biến ngẫu nhiên trung bình 3 và độ lệch tiêu chuẩn là 0,3. Số ô tô trên cầu tối thiểu là bao nhiêu để xác suất cầu bị phá vỡ cấu trúc vượt quá 0,1 (đơn vị của bài này là tấn).

Bài 4.12

Có hai hộp sản phẩm. Hộp 1 có 8 chính phẩm, 3 phế phẩm; hộp 2 có 10 chính phẩm, 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 2 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm có được trong 4 sản phẩm lấy ra.

Tìm số phế phẩm nhiều khả năng nhất và số phế phẩm trung bình có được trong 4 sản phẩm lấy ra.

Bài 4.13

Đội bóng bàn của một câu lạc bộ sẽ đấu 44 trận. Trong đó 26 trận đấu với đội lớp A còn 18 trận đấu với đội lớp B. Giả sử xác suất mỗi trận đội câu lạc bộ thắng đội lớp A là 0,4 và thắng đội lớp B là 0,7. Kết quả các trận đấu là độc lập. Tính xác suất:

a) Đội câu lạc bộ thắng ít nhất 25 trận.

b) Đội câu lạc bộ thắng đội lớp A nhiều hơn thắng đội lớp B.

Bài 4.14

Một hộp có 3 bi đỏ, 2 bi vàng, 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp. Gọi X là số bi đỏ, Y là số bi vàng có được trong 2 bi lấy ra.

a) Tìm bảng phân phối đồng thời của X và Y.

b) Tính P $\{(X, Y) \in A\}$ với $A = \{(x, y) \mid x + y \le 1\}$

c) Tìm các phân phối biên của X, của Y.

d) Tìm phân phối điều kiện của X với điều kiện Y = 1, tính E (X | Y = 1)

Bài 4.15

Giả sử X, Y là tuổi thọ (tính bằng năm) của 2 thành phần trong 1 hệ thống điện có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{(x+y)}, & 0 < x, 0 < y \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ của X, của Y

b) Tìm E(X + Y); V(X + Y)

Bài 4.16

Giả sử X là đường kính của một loại cáp điện và Y là đường kính khuôn đúc bằng sứ cáp này, cả X, Y có giá trị thuộc (0, 1) và có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

$$\text{Tính P} \left\{X + Y > \frac{1}{2}\right\}.$$

Bài 4.17

Giả sử X, Y là tuổi thọ của 2 thiết bị (tính bằng giờ) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y(1+x)} & x, y \ge 0 \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ của X, của Y; X, Y có độc lập không?

b) Tìm P {0 < X < 1 | Y = 2}, E (X | Y = 2).

Bài 4.20

Một kiện hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 3 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B, 3 sản phẩm loại C. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ kiện ra 2 sản phẩm. Gọi X, Y tương ứng là số sản hẩm loại A, loại B có trong 2 sản phẩm lấy ra.

a) Lập bảng phân phối đồng thời của X và Y.

b) Tìm phân phối có điều kiện của Y với điều kiện X = 0.

c) X, Y có độc lập với nhau không?

Bài 4.21

Có hai loại cổ phiếu A, B đang được bán trên thị trường chứng khoán với lãi suất của chúng tương ứng là các biến ngẫu nhiên X, Y có bảng phân phối đồng thời

X \ Y	-2	0	5	10
0	0	0,05	0,05	0,1
4	0,05	0,1	0,25	0,15
6	0,1	0,05	0,1	0

a) Nếu đầu tư toàn bộ vào cổ phiếu A thì lãi suất kì vọng và mức độ rủi ro là bao nhiêu?

b) Tính P {Y = 5 | X = 4}; E (Y | X = 4).

c) Nếu để đạt mục tiêu là lãi suất kì vọng lớn nhất thì nên đầu tư vào cả 2 loại cổ phiếu theo tỉ lệ nào?

d) Nếu muốn hạn chế rủi ro về lãi suất thấp nhất thì nên đầu tư vào hai loại cổ phiếu theo tỉ lệ nào?

Bài 4.22

Chiều dài X (cm), chiều rộng Y (cm) của một loại chi tiết được gia công một cách độc lập là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với EX = 8 (cm), EY = 4 (cm), σ(X) = 0,8 (cm); σ(Y) = 0,2 (cm). Chi tiết gọi là đạt tiêu chuẩn nếu chiều dài của nó sai lệch so với kích thước trung bình không vượt quá 0,9 cm và chiều rộng của nó sai lệch so với kích thước trung bình không vượt quá 0,4 cm.

a) Lấy ngẫu nhiên 1 chi tiết, hãy tìm xác suất để chi tiết đạt tiêu chuẩn.

b) Lấy ngẫu nhiên 3 chi tiết. Gọi Z là số chi tiết đạt tiêu chuẩn. Tính kì vọng và phương sai của $\frac{Z}{3}$; Tính xác suất để trong 3 chi tiết trên có ít nhất một chi tiết đạt tiêu chuẩn.

c) Lấy ngẫu nhiên một chi tiết, thấy nó không đạt tiêu chuẩn. Hãy tính xác suất chi tiết này không đạt tiêu chuẩn do gia công chiều dài.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 4.1. Giải

a) Phân phối của X

X	1	2
P	0,3	0,7

Phân phối của Y

Y	1	2	3
P	0,4	0,5	0,1

b) Ta có:

$P_{11} = 0,12 = 0,3 . 0,4 = P(1) q(1)$

$P_{12} = 0,15 = 0,3 . 0,5 = P(1) q(2)$

$P_{13} = 0,03 = 0,3 . 0,1 = P(1) q(3)$

$P_{21} = 0,28 = 0,7 . 0,4 = P(2) q(1)$

Tương tự $P_{22} = P(2) q(2)$, $P_{23} = P(2) q(3)$

Vậy X và Y độc lập.

c)

Z \ Y / X	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6

P {Z = 1} = P {X = 1, Y = 1} = 0,12

P {Z = 2} = P {X = 1, Y = 2} + P {X = 2, Y = 1} = 0,15 + 0,28 = 0,43

P {Z = 3} = P {X = 1, Y = 3} = 0,03

P {Z = 4} = P {X = 2, Y = 2} = 0,35

P {Z = 6} = P {X = 2, Y = 3} = 0,07

Bảng phân phối của Z = X.Y

Z	1	2	3	4	6
P	0,12	0,43	0,03	0,35	0,07

d) Từ bảng phân phối của Z

EZ = 2,89

Cách 2.

X, Y độc lập, EX = 1,7 ; EY = 1,7

EZ = EX . Y = EX . EY = 1,7 . 1,7 = 2,89

Giải

a) Ta có

X	-1	4	8
P	0,35	0,35	0,30

; EX = 3,45 ; VX = 13,2475

Y	-2	5	10
P	0,25	0,5	0,25

; EY = 4,5 ; VY = 18,25

b) Tồn tại $P_{11} = 0,10 \neq 0,35 \,.\, 0,25 = P(-1) \,.\, q(-2)$

⇒ X và Y không độc lập.

c) Lập bảng phân phối xác suất có điều kiện của X khi {Y = 5}

X	-1	4	8
$P_{(X\|Y = 5)}$	$P_{-1\|5}$	$P_{4\|5}$	$P_{8\|5}$

$P_{-1|5} = P\{X = -1, Y = 5\} = \frac{P\{X = -1, Y = 5\}}{P\{Y=5\}} = \frac{0,15}{0,5}$

$P_{4|5} = P\{X = 4, Y = 5\} = \frac{0,20}{0,5}$; $P_{8|5} = P\{X = 8, Y = 5\} = \frac{0,15}{0,5}$

Lãi suất cổ phiếu trung bình của X khi Y = 5%:

$E(X|Y = 5) = -1 \,.\, P_{-1|5} + 4 \,.\, P_{4|5} + 8 \,.\, P_{8|5} = 3,7$

d) Để kết luận về sự phụ thuộc tuyến tính giữa X và Y ta tính: $\rho_{X,Y}$

EX . Y = (-1) . (-2) . 0,1 + (-1) . 5. 0,15 + (-1) . 10 . 0,1 + 4 . (-2) . 0,05 + 4,5 . 0,02 + 4 . 10 . 0,1 + 8 . (-2) . 0,1 + 8,5 . 0,15 + 8 . 10 . 0,05 = 10, 85

cov(X,Y) = EX . Y – EX . EY = -4.675

$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{VX}.\sqrt{VY}} \approx -0,3007$

Vì $\rho_{X,Y} = -0,3007$ suy ra có sự phụ thuộc tuyến tính ngược chiều giữa X và Y.

e) Tập giá trị và xác suất của T:

T / X \ Y	-2	5	10
-1	-3	4	9
4	2	9	14
8	6	13	18

P {T = -3} = P {X = -1, Y = -2} = 0,1

P {T = 2} = P {X = 4, Y = -2} = 0,05

P {T = 4} = P {X = -1, Y = 5} = 0,15

P {T = 6} = P {X = 8, Y = -2} = 0,1

P {T = 9} = P {X = 4, Y = 5} + P {X = -1, Y = 10} = 0,3

P {T = 13} = P {X = 8, Y = 5} = 0,15

P {T = 14} = P {X = 4, Y = 10} = 0,1

P {T = 18} = P {X = 8, Y = 10} = 0,05

T	-3	2	4	6	9	13	14	18
P	0,1	0,05	0,15	0,1	0,3	0,15	0,1	0,05

ET = 7,95 (hoặc ET = EX + EY)

$ET^2 = 92,55$; $VT = ET^2 - (ET)^2 = 29,3475$

f) Gọi α (đơn vị: 100%, $0 \le \alpha \le 1$) là tỉ lệ đầu tư vào cổ phiếu của A và (1 – α) là tỉ lệ đầu tư vào cổ phiếu của B. Ta tìm cực đại:

$g(\alpha) = E(\alpha X + (1 - \alpha) . Y) = \alpha EX + (1 - \alpha)EY = 4,5 - 1,05\alpha$

⇒ Khi α = 0: $g_{max} = g(0) = 4,5$

Vậy đầu tư tất cả vào cổ phiếu của B thì lợi nhuận kì vọng lớn nhất.

i) Với kí hiệu trong câu f) ta tìm α để phương sai bé nhất.

$h(\alpha) = V(\alpha X + (1 - \alpha)Y)$

$= \alpha^2 VX + (1 - \alpha)^2 VY + 2\alpha(1- \alpha) \text{cov}(X,Y)$

$= 40,8475\, \alpha^2 - 45,85\alpha + 18,25$

Ta có: $h'(\alpha) = 0 \leftrightarrow \alpha = 0,5612$ và $h''(\alpha) = 81,695 > 0$

⇒ Khi α = 0,5612: $h_{min} = h(0,5612)$

Vậy đầu tư vào cổ phiếu của A với tỉ lệ 56,12% và cổ phiếu của B với tỉ lệ 43,88% thì rủi ro thấp nhất.

Giải

Bảng phân phối xác suất

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{C_4^3}{C_{12}^3}$	$5.\frac{C_4^2}{C_{12}^3}$	$\frac{C_5^2.4}{C_{12}^3}$	$\frac{C_5^3}{C_{12}^3}$
1	$3.\frac{C_4^2}{C_{12}^3}$	$3.\frac{5.4}{C_{12}^3}$	$3.\frac{C_5^2}{C_{12}^3}$	0
2	$\frac{C_3^2.4}{C_{12}^3}$	$\frac{C_3^2.5}{C_{12}^3}$	0	0
3	$\frac{C_3^3}{C_{12}^3}$	0	0	0

Giải

a) X_1: số bi xanh lấy từ hộp 1; X_2: số bi xanh lấy từ hộp 2; X_1, X_2 độc lập.

Bảng phân phối đồng thời của X_1 và X_2:

X_2 \ X_1	0	1	2
0	$\frac{4}{10}.\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{70}$	$\frac{4}{10}.\frac{6.2}{C_8^2}=\frac{6}{35}$	$\frac{4}{10}.\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{3}{14}$
1	$\frac{6}{10}.\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{3}{140}$	$\frac{6}{10}.\frac{6.2}{C_8^2}=\frac{9}{35}$	$\frac{6}{10}.\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{9}{28}$

Tập giá trị của $X = X_1 + X_2$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$P\{X = 0\} = P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = \frac{1}{70}$

$P\{X = 1\} = P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = \frac{6}{35} + \frac{3}{140} = \frac{27}{140}$

$P\{X = 2\} = P\{X_1 = 0, X_2 = 2\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{3}{14} + \frac{9}{35} = \frac{33}{70}$

$P\{X = 3\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 2\} = \frac{9}{28}$

Bảng phân phối xác suất của X:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{70}$	$\frac{27}{140}$	$\frac{33}{70}$	$\frac{9}{28}$

Hàm phân phối xác suất của X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{khi } x \le 0 \\ \frac{1}{70} & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ \frac{29}{140} & \text{khi } 1 \le x \le 2 \\ \frac{9}{28} & \text{khi } 2 \le x \le 3 \\ 1 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$$

b) B = "Lấy 4 bi từ hộp 3 đều màu xanh". Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(B) = P(X = 0) . P(B|X = 0) + P(X = 1) . P(B|X = 1) + P(X = 2) . P(B|X = 2) + P(X = 3) . P(B|X = 3)$$

$$= \frac{1}{70}.\frac{1}{C_{10}^4} + \frac{27}{140}.\frac{C_5^4}{C_{10}^4} + \frac{33}{70}.\frac{C_6^4}{C_{10}^4} + \frac{9}{28}.\frac{C_7^4}{C_{10}^4} \approx 0,0919$$

c) C = "Lấy 4 bi từ hộp 3 đều màu đỏ". Theo công thức xác suất đầy đủ, tương tự tính P(B):

$$P(C) = \frac{1}{70}.\frac{C_6^4}{C_{10}^4} + \frac{27}{140}.\frac{C_5^4}{C_{10}^4} + \frac{33}{70}.\frac{C_4^4}{C_{10}^4} \approx 0,0079$$

Xác suất lấy 4 bi có 2 màu là:

P = 1 – P(B) – P(C) ≈ 0,9002

Giải

Ta có bảng phân phối xác suất của Y như sau:

Y	1	2	3
P	0,2 + b	0,4	0,1 + a

EY = 3a + b + 1,3 = 2 ↔ 3a + b = 0,7

Mặt khác: 0,2 + 0,25 + a + b + 0,15 + 0,1 = 1

⇔ a + b = 0,3

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=0{,}3 \\ 3a+b=0{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}2 \\ b=0{,}1 \end{cases}$

Bảng phân phối xác suất của Y:

Y	1	2	3
P	0,3	0,4	0,3

Bài 4.20

Giải

a) Bảng phân phối của X và Y

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$	$\frac{C_4^1.C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$	$\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$
1	$\frac{C_3^1.C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$	$\frac{C_3^1.C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$	0
2	$\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$	0	0

b) Ta có:

$$P(X=0)=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{2}{15}=\frac{7}{15}$$

$$P(Y=0\,|X=0)=\frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{7}{15}}=\frac{1}{7}$$

$$P(Y = 1 \mid X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(X = 0)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{4}{7}$$

$$P(Y = 2 \mid X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 2)}{P(X = 0)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}$$

Bảng phân phối có điều kiện của Y với điều kiện X = 0

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

c) Ta có:

$$P(Y = 0) = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{1}{15} \neq P(X = 0). P(Y = 0) = \frac{7}{15} . \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$$

⇒ X, Y không độc lập với nhau.

Bài 4.21

Giải

a) Phân phối của X:

X	0	4	6
P	0,2	0,55	0,25

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i). x_i = 0 . 0,2 + 4 . 0,55 + 6 . 0.25 = 3,7$$

$$E(X^2) = 0^2 . 0,2 + 4^2 . 0,55 + 6^2 . 0,25 = 17,8$$

$$\text{b) } P(Y \geq 5 \mid X = 4) = \frac{P(X = 4; Y \geq 5)}{P(X = 4)}$$

$$= \frac{P(X = 4; Y = 5) + P(X = 4; Y = 10)}{P(X = 4)}$$

$$= \frac{0,25 + 0,15}{0,55} = 0,7273$$

E(Y | X = 4)

$$= \sum_{j=1}^{m} y_j. P(y_j \mid X = 4)$$

$$= -2 \frac{P(X = 4; Y = -2)}{P(X = 4)} + 0. \frac{P(X = 4; Y = 0)}{P(X = 4)} + 5. \frac{P(X = 4; Y = 5)}{P(X = 4)} + 10. \frac{P(X = 4; Y = 10)}{P(X = 4)}$$

$$= \frac{(-2). 0,05 + 5.0,25 + 10.0,15}{0,55} = 4,8182$$

c) Phân phối của Y:

Y	-2	0	5	10
P	0,15	0,2	0,4	0,25

$$E(Y) = -2.0,15 + 0.0.2 + 5.0,4 + 10.0,25 = 4,2$$

$$E(Y^2) = 4.0,15 + 0.0,2 + 25.0,4 + 100.0,25 = 35,6$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 35,6 - 4,2^2 = 17,96$$

Gọi α (đơn vị: 100%, 0 ≤ α ≤ 1) là tỉ lệ đầu tư vào cổ phiếu A; (1 – α) là tỉ lệ đầu tư vào cổ phiếu B.

Ta tìm cực đại:

$$g(\alpha) = E(\alpha.X + (1-\alpha).Y)$$

$$= \alpha.E(X) + (1-\alpha).E(Y)$$

$$= \alpha.3,7 + (1-\alpha).4,2$$

= 4,2 – 0,5α

g(α) đạt max ⇔ α = 0

$g(\alpha)_{max} = 4,2$

Vậy để đạt lãi suất kì vọng lớn nhất thì nên đầu tư toàn bộ vào cổ phiếu B, không đầu tư vào cổ phiếu A.

d) Với kí hiệu ở câu c, ta xét hàm:

$$h(\alpha) = V(\alpha.X + (1-\alpha).Y)$$

$$= \alpha^2.V(X) + (1-\alpha)^2.V(Y) + 2\alpha.(1-\alpha).cov(X,Y)$$

Ta tính cov(X, Y)

Vì X, Y là là biến ngẫu nhiên rời rạc nên:

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(x_i, y_j)$$

= 0.(-2).0 + 0.0.0,05 + 0.5.0.05 + 0.10.0.1 + 4.(-2).0,05 + 4.0.0,1 + 4.5.0,25 + 4.10.0,15 + 6.(-2).0,1 + 6.0.0,05 + 6.5.0,1 + 6.10.0

= 12,4

cov(E, Y) = E(X.Y) – E(X) . E(Y)

= 12,4 = 3,7 . 4,2 = -3,14

Ta có:

$$h(\alpha) = \alpha^2.4,11 + (1-\alpha)^2.17,96 + 22.(1-\alpha).(-3,14)$$

$$= 4,11.\alpha^2 + (\alpha^2 - 2\alpha + 1).17,96 - 6,28.(1-\alpha).\alpha$$

$$= 28,35.\alpha^2 - 42,2.\alpha + 17,96$$

$$h(\alpha)\ \min \Leftrightarrow \Delta'_{h(\alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{21,1}{28,35} = 0,7443$$

$$\Rightarrow h_{\min} = 2{,}25$$

Vậy đầu tư vào cổ phiếu A 74,43%, vào cổ phiếu B 25,57%.

Bài 4.22

Giải

a) X là chiều dài, Y là chiều rộng

Theo đề bài, ta có:

X phân phối theo $N(EX, {\sigma_X}^2)$ với $EX = 8$; ${\sigma_X}^2 = 0{,}8$ cm

Y phân phối theo $N(EY, {\sigma_Y}^2)$ với $EY = 4$; ${\sigma_Y}^2 = 0{,}2$ cm

1 chi tiết đạt tiêu chuẩn khi:

$$\begin{cases} |X - EX| \le 0{,}9 \\ |Y - EY| \le 0{,}4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}9 \le X - 8 \le 0{,}9 \\ -0{,}4 \le Y - 4 \le 0{,}4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}1 \le X \le 8{,}9 \\ 3{,}6 \le Y \le 4{,}4 \end{cases}$$

Tỉ lệ xác suất:

$$P(7{,}1 \le X \le 8{,}9) = \Phi_0\left(\frac{8{,}9 - 8}{0{,}8}\right) - \Phi_0\left(\frac{7{,}1 - 8}{0{,}8}\right)$$

$$= \Phi_0(1{,}125) - \Phi_0(-1{,}125)$$

$$= 2\,.\,\Phi_0(1{,}125) = 2.0{,}3708 = 0{,}7416$$

$$P(3{,}6 \le Y \le 4{,}4) = \Phi_0\left(\frac{4{,}4 - 4}{0{,}2}\right) - \Phi_0\left(\frac{3{,}6 - 4}{0{,}2}\right)$$

$$= \Phi_0(2) - \Phi_0(-2)$$

$$= 2\,.\,\Phi_0(2) = 2.0{,}4772 = 0{,}9544$$

Vậy xác suất để 1 chi tiết đạt tiêu chuẩn:

$$P = P(7{,}1 \le X \le 8{,}9)\,.\,P(3{,}6 \le Y \le 4{,}4)$$

$$= 0{,}7416\,.\,0{,}9544 = 0{,}7076$$

b) Theo câu a, xác suất lấy ngẫu nhiên 1 chi tiết đạt tiêu chuẩn là 0,7076 và các chi tiết độc lập với nhau

⇒ Xác suất lấy chi tiết không đạt tiêu chuẩn là 0,2924

Gọi Z là số chi tiết lấy đạt tiêu chuẩn trong 3 chi tiết.

Z nhận các giá trị Z = 0, 1, 2, 3

Ta có bảng phân phối xác suất của Z:

Z	0	1	2	3
P	$0{,}2924^3$	$C_3^1\,.\,0{,}7076\,.\,0{,}2924^2$	$C_3^2\,.\,0{,}7076^2.\,0{,}2924$	$0{,}7076^3$

$$E(Z) = 0.\,0{,}2924^3 + C_3^1\,.\,0{,}7076\,.\,0{,}2924^2 + 2.\,C_3^2\,.\,0{,}7076^2.\,0{,}2924 + 3.\,0{,}7076^3$$

= 2,1228

$$E(Z^2) = 5,127$$

$$E\left(\frac{Z}{3}\right) = \frac{1}{3}.E(Z) = 0,7076$$

$$V\left(\frac{Z}{3}\right) = \frac{1}{9}.V(Z) = \frac{1}{9}\left[E(Z^2) - [E(Z)]^2\right] = 0,069$$

c) Theo phần a:

A_1 biến ngẫu nhiên lấy 1 chi tiết không đạt tiêu chuẩn

$P(A_1) = 1 – 0,7076 = 0,2924$

A_2 biến ngẫu nhiên lấy 1 chi tiết, chiều dài không đạt chuẩn

$P(A_2) = 1 – P(7,1 \leq X \leq 8,9)$

$= 1 – 0,7416 = 0,2584$

Xác suất cần tìm:

$$P\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \frac{P(A_2, A_1)}{P(A_1)} = \frac{0,2584}{0,2924} = 0,884$$

Bảng 1: Giá trị hàm mật độ phân phối chuẩn hóa

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.3989	0.3950	0.3910	0.3872	0.3833	0.3795	0.3757	0.3720	0.3683	0.3646
0.1	0.3610	0.3574	0.3538	0.3503	0.3468	0.3434	0.3400	0.3366	0.3332	0.3299
0.2	0.3266	0.3234	0.3202	0.3170	0.3138	0.3107	0.3076	0.3045	0.3015	0.2985
0.3	0.2955	0.2926	0.2897	0.2868	0.2840	0.2811	0.2783	0.2756	0.2728	0.2701
0.4	0.2674	0.2648	0.2621	0.2595	0.2569	0.2544	0.2518	0.2493	0.2469	0.2444
0.5	0.2420	0.2396	0.2372	0.2348	0.2325	0.2302	0.2279	0.2256	0.2234	0.2211
0.6	0.2189	0.2168	0.2146	0.2125	0.2104	0.2083	0.2062	0.2041	0.2021	0.2001
0.7	0.1981	0.1961	0.1942	0.1923	0.1903	0.1884	0.1866	0.1847	0.1829	0.1811
0.8	0.1793	0.1775	0.1757	0.1740	0.1722	0.1705	0.1688	0.1671	0.1655	0.1638
0.9	0.1622	0.1606	0.1590	0.1574	0.1558	0.1543	0.1528	0.1512	0.1497	0.1482
1.0	0.1468	0.1453	0.1439	0.1424	0.1410	0.1396	0.1382	0.1368	0.1355	0.1341
1.1	0.1328	0.1315	0.1302	0.1289	0.1276	0.1263	0.1251	0.1238	0.1226	0.1214
1.2	0.1202	0.1190	0.1178	0.1166	0.1154	0.1143	0.1132	0.1120	0.1109	0.1098
1.3	0.1087	0.1076	0.1066	0.1055	0.1045	0.1034	0.1024	0.1014	0.1004	0.0994
1.4	0.0984	0.0974	0.0964	0.0955	0.0945	0.0936	0.0926	0.0917	0.0908	0.0899
1.5	0.0890	0.0881	0.0873	0.0864	0.0855	0.0847	0.0838	0.0830	0.0822	0.0814
1.6	0.0805	0.0797	0.0790	0.0782	0.0774	0.0766	0.0759	0.0751	0.0744	0.0736
1.7	0.0729	0.0722	0.0714	0.0707	0.0700	0.0693	0.0686	0.0680	0.0673	0.0666
1.8	0.0659	0.0653	0.0646	0.0640	0.0634	0.0627	0.0621	0.0615	0.0609	0.0603
1.9	0.0597	0.0591	0.0585	0.0579	0.0573	0.0568	0.0562	0.0556	0.0551	0.0545
2.0	0.0540	0.0535	0.0529	0.0524	0.0519	0.0514	0.0508	0.0503	0.0498	0.0493
2.1	0.0489	0.0484	0.0479	0.0474	0.0469	0.0465	0.0460	0.0456	0.0451	0.0446
2.2	0.0442	0.0438	0.0433	0.0429	0.0425	0.0420	0.0416	0.0412	0.0408	0.0404
2.3	0.0400	0.0396	0.0392	0.0388	0.0384	0.0380	0.0377	0.0373	0.0369	0.0366
2.4	0.0362	0.0358	0.0355	0.0351	0.0348	0.0344	0.0341	0.0337	0.0334	0.0331
2.5	0.0327	0.0324	0.0321	0.0318	0.0315	0.0312	0.0308	0.0305	0.0302	0.0299
2.6	0.0296	0.0293	0.0290	0.0288	0.0285	0.0282	0.0279	0.0276	0.0274	0.0271
2.7	0.0268	0.0265	0.0263	0.0260	0.0258	0.0255	0.0252	0.0250	0.0247	0.0245
2.8	0.0243	0.0240	0.0238	0.0235	0.0233	0.0231	0.0228	0.0226	0.0224	0.0222
2.9	0.0220	0.0217	0.0215	0.0213	0.0211	0.0209	0.0207	0.0205	0.0203	0.0201
3.0	0.0199	0.0197	0.0195	0.0193	0.0191	0.0189	0.0187	0.0185	0.0183	0.0182
3.1	0.0180	0.0178	0.0176	0.0174	0.0173	0.0171	0.0169	0.0168	0.0166	0.0164
3.2	0.0163	0.0161	0.0159	0.0158	0.0156	0.0155	0.0153	0.0152	0.0150	0.0149
3.3	0.0147	0.0146	0.0144	0.0143	0.0141	0.0140	0.0139	0.0137	0.0136	0.0134
3.4	0.0133	0.0132	0.0131	0.0129	0.0128	0.0127	0.0125	0.0124	0.0123	0.0122
3.5	0.0120	0.0119	0.0118	0.0117	0.0116	0.0115	0.0113	0.0112	0.0111	0.0110
3.6	0.0109	0.0108	0.0107	0.0106	0.0105	0.0104	0.0103	0.0102	0.0101	0.0100
3.7	0.0099	0.0098	0.0097	0.0096	0.0095	0.0094	0.0093	0.0092	0.0091	0.0090
3.8	0.0089	0.0088	0.0087	0.0087	0.0086	0.0085	0.0084	0.0083	0.0082	0.0082
3.9	0.0081	0.0080	0.0079	0.0078	0.0078	0.0077	0.0076	0.0075	0.0075	0.0074
4.0	0.0073	0.0072	0.0072	0.0071	0.0070	0.0070	0.0069	0.0068	0.0067	0.0067
4.1	0.0066	0.0065	0.0065	0.0064	0.0064	0.0063	0.0062	0.0062	0.0061	0.0060
4.2	0.0060	0.0059	0.0059	0.0058	0.0057	0.0057	0.0056	0.0056	0.0055	0.0055
4.3	0.0054	0.0054	0.0053	0.0053	0.0052	0.0051	0.0051	0.0050	0.0050	0.0049
4.4	0.0049	0.0048	0.0048	0.0048	0.0047	0.0047	0.0046	0.0046	0.0045	0.0045

Bảng 2. GIÁ TRỊ HÀM TÍCH PHÂN LAPLACE

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

u	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.473	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4.0	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Bảng 3. GIÁ TRỊ TỚI HẠN CHUẨN

U	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Bảng 4. GIÁ TRỊ TỚI HẠN STUDENT $t_{\alpha}^{(n)}$

α / n	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.22
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208
7	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785
8	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501
9	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297
10	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144
11	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025
12	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930
13	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852
14	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787
15	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733
16	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646
18	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610
19	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579
20	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552
21	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527
22	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505
23	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485
24	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467
25	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450
26	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435
27	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421
28	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408
29	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396
30	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385
40	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307
50	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261
60	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232
70	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	2.899	3.211
80	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195
90	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	2.878	3.183
100	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174
120	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160
240	0.843	1.039	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596	2.833	3.125
00	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090

Bảng 5. GIÁ TRỊ TỚI HẠN KHI-BÌNH PHƯƠNG

α / n	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.0025	0.001
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6
150	109.1	112.7	118.0	122.7	128.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3

Bảng 6. GIÁ TRỊ TỚI HẠN FISHER

N2	N1 / α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0.1	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
5	***0.05***	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
	0.025	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
	0.1	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
6	***0.05***	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
	0.025	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
	0.1	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
7	***0.05***	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
	0.025	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
	0.1	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
8	***0.05***	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
	0.025	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
	0.1	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
9	***0.05***	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
	0.025	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
	0.1	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323
10	***0.05***	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
	0.025	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717
	0.1	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248
11	***0.05***	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
	0.025	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526
	0.1	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188
12	***0.05***	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
	0.025	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374
	0.1	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138
13	***0.05***	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
	0.025	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250
	0.1	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095
14	***0.05***	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
	0.025	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147
	0.1	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059
15	***0.05***	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
	0.025	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060
	0.1	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028
16	***0.05***	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
	0.025	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986
	0.1	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001
17	***0.05***	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
	0.025	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922
	0.1	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977
18	***0.05***	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
	0.025	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.100	3.005	2.929	2.866
	0.1	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937
20	***0.05***	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
	0.025	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774

GIÁ TRỊ TỚI HẠN FISHER (Tiếp)

N2	N1 / α	12	15	20	30	40	60	80	100	120	240
	0.1	3.268	3.238	3.207	3.174	3.157	3.140	3.132	3.126	3.123	3.114
5	***0.05***	4.678	4.619	4.558	4.496	4.464	4.431	4.415	4.405	4.398	4.382
	0.025	6.525	6.428	6.329	6.227	6.175	6.123	6.096	6.080	6.069	6.042
	0.1	2.905	2.871	2.836	2.800	2.781	2.762	2.752	2.746	2.742	2.732
6	***0.05***	4.000	3.938	3.874	3.808	3.774	3.740	3.722	3.712	3.705	3.687
	0.025	5.366	5.269	5.168	5.065	5.012	4.959	4.932	4.915	4.904	4.877
	0.1	2.668	2.632	2.595	2.555	2.535	2.514	2.504	2.497	2.493	2.482
7	***0.05***	3.575	3.511	3.445	3.376	3.340	3.304	3.286	3.275	3.267	3.249
	0.025	4.666	4.568	4.467	4.362	4.309	4.254	4.227	4.210	4.199	4.171
	0.1	2.502	2.464	2.425	2.383	2.361	2.339	2.328	2.321	2.316	2.304
8	***0.05***	3.284	3.218	3.150	3.079	3.043	3.005	2.986	2.975	2.967	2.947
	0.025	4.200	4.101	3.999	3.894	3.840	3.784	3.756	3.739	3.728	3.699
	0.1	2.379	2.340	2.298	2.255	2.232	2.208	2.196	2.189	2.184	2.172
9	***0.05***	3.073	3.006	2.936	2.864	2.826	2.787	2.768	2.756	2.748	2.727
	0.025	3.868	3.769	3.667	3.560	3.505	3.449	3.421	3.403	3.392	3.363
	0.1	2.284	2.244	2.201	2.155	2.132	2.107	2.095	2.087	2.082	2.069
10	***0.05***	2.913	2.845	2.774	2.700	2.661	2.621	2.601	2.588	2.580	2.559
	0.025	3.621	3.522	3.419	3.311	3.255	3.198	3.169	3.152	3.140	3.110
	0.1	2.209	2.167	2.123	2.076	2.052	2.026	2.013	2.005	2.000	1.986
11	***0.05***	2.788	2.719	2.646	2.570	2.531	2.490	2.469	2.457	2.448	2.426
	0.025	3.430	3.330	3.226	3.118	3.061	3.004	2.974	2.956	2.944	2.914
	0.1	2.147	2.105	2.060	2.011	1.986	1.960	1.946	1.938	1.932	1.918
12	***0.05***	2.687	2.617	2.544	2.466	2.426	2.384	2.363	2.350	2.341	2.319
	0.025	3.277	3.177	3.073	2.963	2.906	2.848	2.818	2.800	2.787	2.756
	0.1	2.097	2.053	2.007	1.958	1.931	1.904	1.890	1.882	1.876	1.861
13	***0.05***	2.604	2.533	2.459	2.380	2.339	2.297	2.275	2.261	2.252	2.230
	0.025	3.153	3.053	2.948	2.837	2.780	2.720	2.690	2.671	2.659	2.628
	0.1	2.054	2.010	1.962	1.912	1.885	1.857	1.843	1.834	1.828	1.813
14	***0.05***	2.534	2.463	2.388	2.308	2.266	2.223	2.201	2.187	2.178	2.155
	0.025	3.050	2.949	2.844	2.732	2.674	2.614	2.583	2.565	2.552	2.520
	0.1	2.017	1.972	1.924	1.873	1.845	1.817	1.802	1.793	1.787	1.771
15	***0.05***	2.475	2.403	2.328	2.247	2.204	2.160	2.137	2.123	2.114	2.090
	0.025	2.963	2.862	2.756	2.644	2.585	2.524	2.493	2.474	2.461	2.429
	0.1	1.985	1.940	1.891	1.839	1.811	1.782	1.766	1.757	1.751	1.735
16	***0.05***	2.425	2.352	2.276	2.194	2.151	2.106	2.083	2.068	2.059	2.035
	0.025	2.889	2.788	2.681	2.568	2.509	2.447	2.415	2.396	2.383	2.350
	0.1	1.958	1.912	1.862	1.809	1.781	1.751	1.735	1.726	1.719	1.703
17	***0.05***	2.381	2.308	2.230	2.148	2.104	2.058	2.035	2.020	2.011	1.986
	0.025	2.825	2.723	2.616	2.502	2.442	2.380	2.348	2.329	2.315	2.282
	0.1	1.933	1.887	1.837	1.783	1.754	1.723	1.707	1.698	1.691	1.674
18	***0.05***	2.342	2.269	2.191	2.107	2.063	2.017	1.993	1.978	1.968	1.943
	0.025	2.769	2.667	2.559	2.445	2.384	2.321	2.289	2.269	2.256	2.222
	0.1	1.912	1.865	1.814	1.759	1.730	1.699	1.683	1.673	1.666	1.649
20	***0.05***	2.308	2.234	2.155	2.071	2.026	1.980	1.955	1.940	1.930	1.905
	0.025	2.720	2.617	2.509	2.394	2.333	2.270	2.237	2.217	2.203	2.169

N2	N1 / α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0.1	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.920
21	***0.05***	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
	0.025	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.969	2.874	2.798	2.735
	0.1	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.060	2.008	1.967	1.933	1.904
22	***0.05***	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
	0.025	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.700
	0.1	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866
25	***0.05***	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
	0.025	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613
	0.1	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.819
30	***0.05***	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
	0.025	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511
	0.1	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763
40	***0.05***	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
	0.025	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388
	0.1	2.809	2.412	2.197	2.061	1.966	1.895	1.840	1.796	1.760	1.729
50	***0.05***	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
	0.025	5.340	3.975	3.390	3.054	2.833	2.674	2.553	2.458	2.381	2.317
	0.1	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707
60	***0.05***	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
	0.025	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270
	0.1	2.779	2.380	2.164	2.027	1.931	1.860	1.804	1.760	1.723	1.691
70	***0.05***	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
	0.025	5.247	3.890	3.309	2.975	2.754	2.595	2.474	2.379	2.302	2.237
	0.1	2.769	2.370	2.154	2.016	1.921	1.849	1.793	1.748	1.711	1.680
80	***0.05***	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
	0.025	5.218	3.864	3.284	2.950	2.730	2.571	2.450	2.355	2.277	2.213
	0.1	2.762	2.363	2.146	2.008	1.912	1.841	1.785	1.739	1.702	1.670
90	***0.05***	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
	0.025	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.432	2.336	2.259	2.194
	0.1	2.756	2.356	2.139	2.002	1.906	1.834	1.778	1.732	1.695	1.663
100	***0.05***	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
	0.025	5.179	3.828	3.250	2.917	2.696	2.537	2.417	2.321	2.244	2.179
	0.1	2.748	2.347	2.130	1.992	1.896	1.824	1.767	1.722	1.684	1.652
120	***0.05***	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910
	0.025	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157
	0.1	2.739	2.338	2.121	1.983	1.886	1.814	1.757	1.712	1.674	1.642
150	***0.05***	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943	1.894
	0.025	5.126	3.781	3.204	2.872	2.652	2.494	2.373	2.278	2.200	2.135
	0.1	5.109	3.766	3.189	2.858	2.638	2.479	2.359	2.263	2.185	2.120
180	***0.05***	6.778	4.725	3.892	3.425	3.120	2.904	2.740	2.611	2.507	2.421
	0.025	8.077	5.457	4.423	3.851	3.481	3.219	3.022	2.869	2.744	2.642
	0.1	2.727	2.325	2.107	1.968	1.871	1.799	1.742	1.696	1.658	1.625
240	***0.05***	3.880	3.033	2.642	2.409	2.252	2.136	2.048	1.977	1.919	1.870
	0.025	5.088	3.746	3.171	2.839	2.620	2.461	2.341	2.245	2.167	2.102

GIÁ TRỊ TỚI HẠN FISHER (Tiếp)

N2	N1 / α	12	15	20	30	40	60	80	100	120	240
	0.1	1.875	1.827	1.776	1.719	1.689	1.657	1.640	1.630	1.623	1.605
21	***0.05***	2.250	2.176	2.096	2.010	1.965	1.916	1.891	1.876	1.866	1.839
	0.025	2.637	2.534	2.425	2.308	2.246	2.182	2.148	2.128	2.114	2.079
	0.1	1.859	1.811	1.759	1.702	1.671	1.639	1.622	1.611	1.604	1.586
22	***0.05***	2.226	2.151	2.071	1.984	1.938	1.889	1.864	1.849	1.838	1.811
	0.025	2.602	2.498	2.389	2.272	2.210	2.145	2.111	2.090	2.076	2.040
	0.1	1.820	1.771	1.718	1.659	1.627	1.593	1.576	1.565	1.557	1.538
25	***0.05***	2.165	2.089	2.007	1.919	1.872	1.822	1.796	1.779	1.768	1.740
	0.025	2.515	2.411	2.300	2.182	2.118	2.052	2.017	1.996	1.981	1.944
	0.1	1.773	1.722	1.667	1.606	1.573	1.538	1.519	1.507	1.499	1.478
30	***0.05***	2.092	2.015	1.932	1.841	1.792	1.740	1.712	1.695	1.683	1.654
	0.025	2.412	2.307	2.195	2.074	2.009	1.940	1.904	1.882	1.866	1.827
	0.1	1.715	1.662	1.605	1.541	1.506	1.467	1.447	1.434	1.425	1.402
40	***0.05***	2.003	1.924	1.839	1.744	1.693	1.637	1.608	1.589	1.577	1.544
	0.025	2.288	2.182	2.068	1.943	1.875	1.803	1.764	1.741	1.724	1.682
	0.1	1.680	1.627	1.568	1.502	1.465	1.424	1.402	1.388	1.379	1.354
	0.05	1.952	1.871	1.784	1.687	1.634	1.576	1.544	1.525	1.511	1.476
	0.025	2.216	2.109	1.993	1.866	1.796	1.721	1.681	1.656	1.639	1.594
	0.1	1.657	1.603	1.543	1.476	1.437	1.395	1.372	1.358	1.348	1.321
60	***0.05***	1.917	1.836	1.748	1.649	1.594	1.534	1.502	1.481	1.467	1.430
	0.025	2.169	2.061	1.944	1.815	1.744	1.667	1.625	1.599	1.581	1.534
	0.1	1.641	1.587	1.526	1.457	1.418	1.374	1.350	1.335	1.325	1.297
70	***0.05***	1.893	1.812	1.722	1.622	1.566	1.505	1.471	1.450	1.435	1.396
	0.025	2.136	2.028	1.910	1.779	1.707	1.628	1.585	1.558	1.539	1.490
	0.1	1.629	1.574	1.513	1.443	1.403	1.358	1.334	1.318	1.307	1.278
80	***0.05***	1.875	1.793	1.703	1.602	1.545	1.482	1.448	1.426	1.411	1.370
	0.025	2.111	2.003	1.884	1.752	1.679	1.599	1.555	1.527	1.508	1.457
	0.1	1.620	1.564	1.503	1.432	1.391	1.346	1.321	1.304	1.293	1.263
90	***0.05***	1.861	1.779	1.688	1.586	1.528	1.465	1.429	1.407	1.391	1.349
	0.025	2.092	1.983	1.864	1.731	1.657	1.576	1.531	1.503	1.483	1.430
	0.1	1.612	1.557	1.494	1.423	1.382	1.336	1.310	1.293	1.282	1.250
100	***0.05***	1.850	1.768	1.676	1.573	1.515	1.450	1.415	1.392	1.376	1.333
	0.025	2.077	1.968	1.849	1.715	1.640	1.558	1.512	1.483	1.463	1.409
	0.1	1.601	1.545	1.482	1.409	1.368	1.320	1.294	1.277	1.265	1.232
120	***0.05***	1.834	1.750	1.659	1.554	1.495	1.429	1.392	1.369	1.352	1.307
	0.025	2.055	1.945	1.825	1.690	1.614	1.530	1.483	1.454	1.433	1.376
	0.1	1.590	1.533	1.470	1.396	1.353	1.305	1.277	1.259	1.247	1.212
150	***0.05***	1.817	1.734	1.641	1.535	1.475	1.407	1.369	1.345	1.327	1.280
	0.025	2.032	1.922	1.801	1.665	1.588	1.502	1.454	1.423	1.402	1.342
	0.1	2.018	1.907	1.786	1.649	1.571	1.484	1.435	1.403	1.381	1.319
180	***0.05***	2.285	2.140	1.982	1.805	1.706	1.595	1.534	1.494	1.466	1.390
	0.025	2.481	2.309	2.124	1.918	1.803	1.676	1.605	1.560	1.528	1.440
	0.1	1.573	1.516	1.451	1.376	1.332	1.281	1.252	1.233	1.219	1.180
240	***0.05***	1.793	1.708	1.614	1.507	1.445	1.375	1.335	1.308	1.290	1.237
	0.025	1.999	1.888	1.766	1.628	1.549	1.460	1.410	1.377	1.354	1.289