3.121 Sally Firefly purchases hardwood lumber for a custom furniture-building shop. She uses three suppliers, Northern Hardwoods, Mountain Top, and Spring Valley. Lumber is classified as either clear or has defects, which includes 20% of the pile. A recent analysis of the defect lumber pile showed that 30% came from Northern Hardwoods and 50% came from Mountain Top. Analysis of the clear pile indicates that 40% came from Northern and 40% came from Spring Valley. What is the percent of clear lumber from each of the three suppliers? What is the percent of lumber from each of the three suppliers?

Phân tích:

Đây là một bài toán không khó. Ta chỉ cần bám sát các bước giải:

B1: Định nghĩa biến cố

B2: Viết các xác suất dưới dạng ký hiệu toán học

B3: Tìm một nhóm biến cố vừa mutually exclusive vừa collectively exhaustive

B4: Áp dụng 1 trong 4 công thức: complement, addition, multiplication (conditional) và total rule.

Solution

Let

D: "The lumber is defect" => $\overline{D}$: "The lumber is clear"

E_1: "The lumber came from Northern Hardwoods"

E_2: "The lumber came from Mountain Top"

E_1: "The lumber came from Spring Valley"

$P(D)=0,2 \qquad P(\overline{D})=0,8$

=> $P(E_1 | D)=0,3;\ P(E_2 | D)=0,5$ => $P(E_3 | D)=1-P(E_1 | D)-P(E_2 | D)=0,2$

$P(E_1 | \overline{D})=0,4;\ P(E_3 | \overline{D})=0,4 \qquad P(E_2 | \overline{D})=1-P(E_1 | \overline{D})-P(E_3 | \overline{D})=0,2$

a. The percent of clear lumber from each of the three suppliers are denoted by $P(E_1)$, $P(E_2)$and $P(E_3)$ respectively.

Since $D, \overline{D}$ are both mutually exclusive and collectively exhaustive, by the total probability rule we have

$$P(E_1) = P(D)P(E_1 \mid D) + P(\overline{D})P(E_1 \mid \overline{D})$$
$$= 0,2.0,3 + 0,8.0,4 = 0,38$$

Similarly, $P(E_2) = 0,26;\ P(E_3) = 0,36$.

b. The percent of clear lumber from each of the three suppliers are denoted by $P(\overline{D} \mid E_1),\ P(\overline{D} \mid E_2)$ and $P(\overline{D} \mid E_3)$ respectively.

By the formula of conditional probability, we have

$$P(\overline{D} \mid E_1) = \frac{P(D \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(\overline{D})P(E_1 \mid \overline{D})}{P(E_1)} = \frac{0,8.0,4}{0,38} = \frac{16}{19}.$$

Similarly, $P(\overline{D} \mid E_2) = \frac{8}{13};\ P(\overline{D} \mid E_3) = \frac{8}{9}$.

Bàn luận: Việc tính xác suất đôi lúc rất phức tạp và gồm nhiều bước nhỏ nên việc kiểm tra lại đáp án rất cần thiết. Chẳng hạn chúng ta biết rằng E_1, E_2, E_3 both mutually exclusive and collectively exhaustive. Do đó ta cần kiểm tra tổng xác suất có bằng 1 hay không. Cụ thể, 0,38 + 0,26 + 0,36 = 1.

Ngoài ra, một trong những yếu tố quan trọng là ta phải hiểu câu hỏi của bài toán, hiểu rõ đâu là event cần tính, đâu là event điều kiện.

3.122 Robert Smith uses either regular plowing or minimal plowing to prepare the cornfields on his Minnesota farm. Regular plowing was used for 40% of the field acreage. Analysis after the crop was harvested showed that 40% of the high-yield acres were from minimalplowing fields and 30% of the low yield fields were from fields with regular plowing. What is the probability of a high yield if regular plowing is used? What is the probability that a field with high yield had been prepared using regular plowing?

(Bài này tác giả có cho sai số liệu nên thầy chỉnh lại một chút)

Let A: "The field uses regular plowing"

=> $\overline{A}$: "The field uses minimal plowing" and $P(A) = 0,4;\ P(\overline{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$

Let B: "The field is the high-yield field"

=> $\overline{B}$: "The field is the low-yield field" and $P\left(\overline{A}\,|\,B\right)=0,4$; $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,3$

=> $\begin{matrix} P\left(A\,|\,B\right)=1-0,4=0,6 \\ P\left(\overline{A}\,|\,\overline{B}\right)=1-0,3=0,7 \end{matrix}$

a. What is the probability of a high yield if regular plowing is used? => $P\left(B\,|\,A\right)=?$

Phân tích:

Ở trên chúng ta thực hiện 3 bước đầu tiên trong thuật toán tìm xác suất.

B1: Định nghĩa biến cố

B2: Viết các xác suất trong đề theo ký hiệu toán

B3: Tìm complement (hoặc tìm nhóm biến cố vừa mutually exclusive và collectively exhaustive)

Bây giờ chúng ta sẽ lựa chọn công thức để giải quyết bài toán. Đầu tiên, ta có

$$P\left(B\,|\,A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(B\right)P\left(A\,|\,B\right)}{P\left(A\right)}$$

Do đó ta phải đi tìm xác suất của B. Ở đây ta có các xác suất $P\left(A\,|\,B\right)$, $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)$ nên ta nghĩ đến công thức xác suất đầy đủ cho A. Tức

$$P\left(A\right)=P\left(B\right)P\left(A\,|\,B\right)+P\left(\overline{B}\right)P\left(A\,|\,\overline{B}\right)$$

Solution

By the total probability rule, we have

$$P\left(A\right)=P\left(B\right)P\left(A\,|\,B\right)+P\left(\overline{B}\right)P\left(A\,|\,\overline{B}\right)$$

Subtitute $P\left(A\right)=0,4$; $P\left(A\,|\,B\right)=0,6$; $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,3$. Then

$$0,4=0,6P\left(B\right)+0,3P\left(\overline{B}\right)$$

On the other hand, $P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)$ by the complement rule so we get

$$0,4 = 0,6P(B) + 0,3\left[1 - P(B)\right]$$

Hence $P(B) = \frac{1}{3}$.

Therefore, the probability of a high yield if regular plowing is used is

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}.0,6}{0,4} = \frac{1}{2}$$

b. What is the probability that a field with high yield had been prepared using regular plowing? => $P(A \mid B) = 0,6$

Bàn luận: Đây là một bài tập bị ra sai giả thiết do đó nó trở thành một bài tập khó. Tuy nhiên chúng ta bình tĩnh xử lý theo từng bước thì sẽ đi được đến đáp án cuối cùng. Để nâng cao tư duy, các bạn hãy cùng suy nghĩ: Tại sao với những giả thiết ban đầu bài bị sai?

Gợi ý:

+ Ta để ý xác suất $P(A) = P\left(A \mid \overline{B}\right) = 0,4$ => $A, \overline{B}$ are ???

+ Có kết luận gì về $\overline{A}$, B. Từ đó so sánh hai xác suất $P\left(\overline{A}\right)$ và $P\left(\overline{A} \mid B\right)$.