

# Mật mã trên đường cong Elliptic Curves cho thiết bị IoT

Sinh viên thực hiện  
Đặng Quang Trung - 20134145

Giảng viên hướng dẫn  
TS Trần Vĩnh Đức

Ngày 23 tháng 5 năm 2018

- 1 Cở sở lý thuyết
  - Hệ mã khóa công khai
  - Giao thức Diffie-Hellman
- 2 Đường cong elliptic
- 3 Chứng thư số ẩn
- 4 Kết quả

## 1 Cở sở lý thuyết

- Hệ mã khóa công khai
- Giao thức Diffie-Hellman

## 2 Đường cong elliptic

## 3 Chứng thư số ẩn

## 4 Kết quả

# Tại sao cần có mật mã?



# Ứng dụng

- Thương mại điện tử:
  - Chữ ký điện tử.
  - Mã hóa thông tin giao dịch.
- Mạng xã hội:
  - Mã hóa tin nhắn, văn bản, thư điện tử, ....
- Banking
  - Xác thực người dùng
  - Mã hóa giao dịch, thông tin khách hàng.
  - ....

## 1 Cở sở lý thuyết

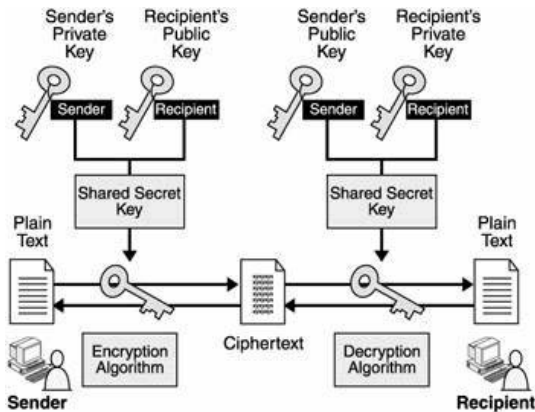
- Hệ mã khóa công khai
- Giao thức Diffie-Hellman

## 2 Đường cong elliptic

## 3 Chứng thư số ẩn

## 4 Kết quả

# Sơ đồ hệ mã khóa công khai



- 1 Cở sở lý thuyết
  - Hệ mã khóa công khai
  - **Giao thức Diffie-Hellman**

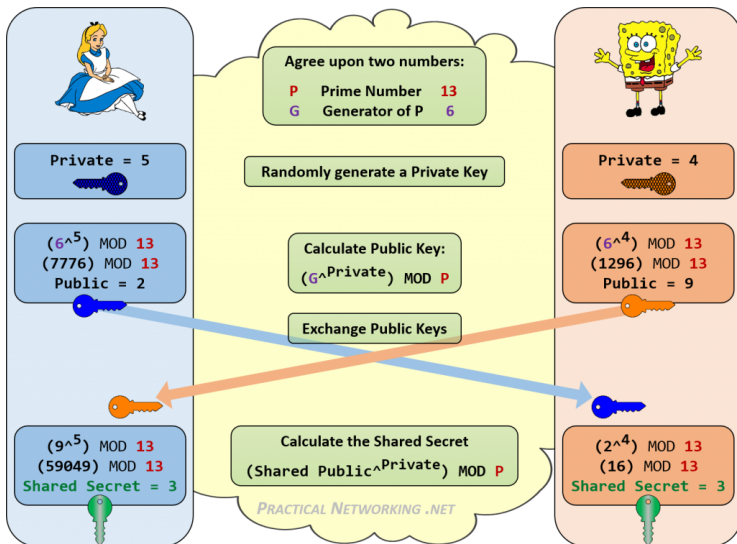
- 2 Đường cong elliptic

- 3 Chứng thư số ẩn

- 4 Kết quả



# Diffie-Hellman



- 1 Cở sở lý thuyết
  - Hệ mã khóa công khai
  - Giao thức Diffie-Hellman
- 2 Đường cong elliptic
- 3 Chứng thư số ẩn
- 4 Kết quả

# Định nghĩa

Một đường cong elliptic curve được xác định bởi phương trình đường cong

- **phương trình dạng Weierstrass**

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B$$

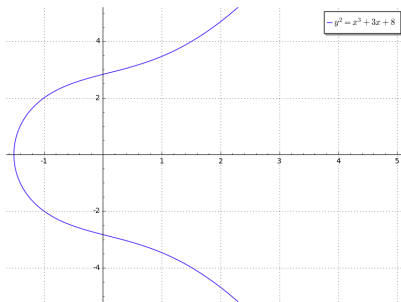
với điều kiện  $A, B \in \mathbb{F}$  thỏa mãn  $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ .

- **phương trình dạng Montgomery**

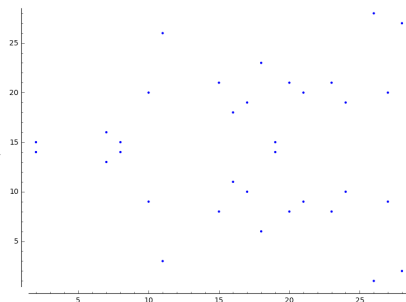
$$M_{A,B} : By^2 = x^3 + Ax^2 + x$$

với điều kiện  $A \in \mathbb{F} \setminus \{-2, 2\}$ ,  $B \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$  và  $B(A^2 - 4) \neq 0$

# Elliptic trên trường hữu hạn



(a) elliptic trên trường số thực



elliptic trên trường hữu hạn  $\mathbb{F}_{29}$

Hình: Đường cong elliptic dạng  $y^2 = x^3 + 3x + 8$

- Đường cong elliptic có điểm giả định  $\mathcal{O}$  ở vô cùng được gọi là điểm cơ sở.

# Luật trên đường cong elliptic hữu hạn

Trên đường cong elliptic có 2 phép toán quan trọng là:

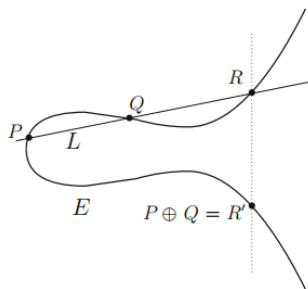
- Phép cộng (Add)
- Phép nhân đôi và cộng (Double-And-Add)

Phép cộng 2 trên đường cong elliptic( $E$ ) thoả mãn tính chất:

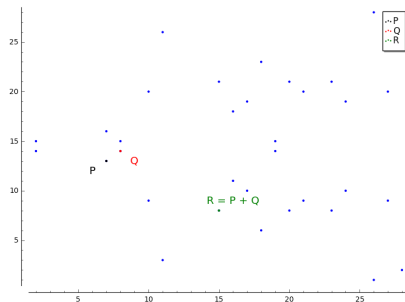
- Phần tử đơn vị:  $P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P \ \forall P \in E$ .
- Phần tử nghịch:  $P + (-P) = \mathcal{O} \ \forall P \in E$ .
- Kết hợp:  $(P + Q) + R = P + (Q + R) \ \forall P, Q, R \in E$ .
- Giao hoán:  $P + Q = Q + P \ \forall P, Q \in E$ .

Hay nói cách khác tập các điểm thuộc  $E$  với luật cộng tạo thành nhóm *Abelian*.

# Phép cộng trên đường cong elliptic



(a)  $P + Q (P \neq Q)$

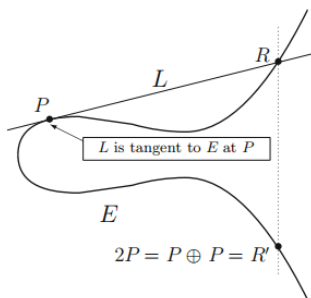


(b)  $P + Q (P \neq Q)$  trên  $\mathbb{F}_{29}$

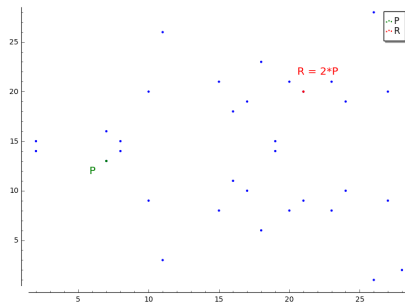
Đường cong elliptic dạng  $y^2 = x^3 + 3x + 8$

- $P(7, 13) + Q(8, 14) = R(15, 8) \pmod{29} \in E(\mathbb{F}_{29})$ .

# Phép cộng trên đường cong elliptic



(a)  $P + P([2]P)$

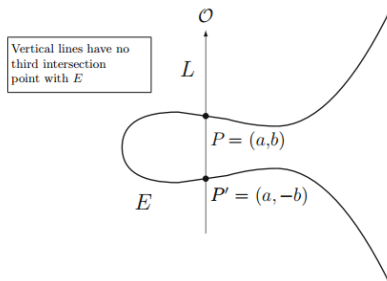


(b)  $P + P([2]P)$  trên  $\mathbb{F}_{29}$

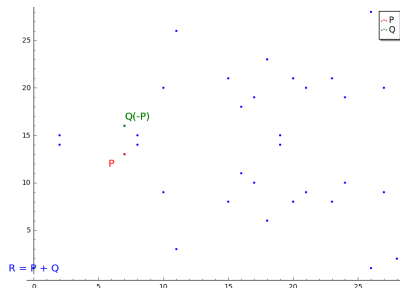
Đường cong elliptic dạng  $y^2 = x^3 + 3x + 8$

- $P(7, 13) + P(7, 13) = 2P(7, 13) = R(21, 20) \pmod{29} \in E(\mathbb{F}_{29})$

# Phép cộng trên đường cong elliptic



(a)  $P + (-P)$



(b)  $P + (-P)$  trên  $\mathbb{F}_{29}$

Đường cong elliptic dạng  $y^2 = x^3 + 3x + 8$

- $P(7, 13) + P'(7, 15) = \mathcal{O} \in E(\mathbb{F}_{29})$ 
  - $-P(7, 13) = P'(7, -13) = P'(7, 15) \pmod{29}$
- $P + \mathcal{O} = P \quad \forall P \in E(\mathbb{F}_{29})$



# Double-And-Add

Phép toán  $Q = nP$  với  $n \in \mathbb{F}_p$ .

$$Q = \underbrace{P + P + \dots + P}_{n \text{ add}}$$

Vấn đề:

- Nếu  $n$  lớn thì tốc độ tính  $Q = nP$  sẽ rất lâu.

Ta có thể biểu diễn  $n$  thành:

$$n = n_0 + n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 4 + n_3 \cdot 8 + \dots + n_r \cdot 2^r$$

với  $n_0, n_1, \dots, n_r \in \{0, 1\}$ . Nếu  $n_r = 1$  ta có thể tính:

$$Q_0 = P, Q_1 = 2Q_0, Q_2 = 2Q_1, \dots, Q_r = 2Q_{r-1}$$

Chú ý rằng  $Q_i$  chỉ gấp 2 lần  $Q_{i-1}$  hay  $Q_i = 2^i P$ . Phép cộng sẽ được tính:

$$nP = n_0 Q_0 + n_1 Q_1 + n_2 Q_2 + \dots + n_r Q_r$$

# Điểm sinh trên đường cong

Cho  $G$  là một điểm nằm trên  $E$  và có cấp là  $n$  (hay  $nG = \mathcal{O}$ ). Khi đó các phần tử của đường cong sẽ biểu diễn bởi:

$$G, 2G, 3G, 4G, \dots, nG$$

với  $nG = \mathcal{O}$  là điểm cơ sở.

## Ví dụ

Cho pt  $y^2 = x^3 + 3x + 8$ , ta có điểm sinh  $G = (19, 15)$  có cấp  $n = 35$

$G = (19, 15)$	$2G = (15, 8)$	$3G = (18, 23)$	$4G = (27, 20)$
$5G = (21, 20)$	$6G = (17, 19)$	$7G = (26, 28)$	$8G = (20, 8)$
$9G = (10, 9)$	$10G = (23, 21)$	$11G = (11, 26)$	$12G = (24, 10)$
$13G = (16, 11)$	$14G = (28, 2)$	$15G = (7, 16)$	$16G = (2, 15)$
$17G = (8, 14)$	$18G = (8, 15)$	$19G = (2, 14)$	$20G = (7, 13)$
$21G = (28, 17)$	$22G = (16, 18)$	$23G = (24, 19)$	$24G = (11, 3)$
$25G = (23, 8)$	$26G = (10, 20)$	$27G = (20, 21)$	$28G = (26, 1)$
$29G = (17, 10)$	$30G = (21, 9)$	$31G = (27, 9)$	$32G = (18, 6)$
$33G = (15, 21)$	$34G = (19, 14)$	$35G = \mathcal{O}$	

# Diffe-Hellman trên đường cong Elliptic

Alice      Cả Alice và Bob cùng thống nhất thông số  
số nguyên tố  $p$ , đường cong  $E$  trên trường  $\mathbb{F}_p$       Bob  
và điểm sinh  $G$

---

$p = 29, E : y^2 = x^3 + 3x + 8$  trên  $\mathbb{F}_{29}$   
và điểm sinh  $G = (19, 15)$

---

$$\begin{aligned} n_A &= 7 \\ Q_A &= n_A \cdot G \\ &= (26, 28) \end{aligned}$$

Alice gửi  $Q_A$  cho Bob  $\longrightarrow Q_A$   
 $Q_B \longleftarrow$  Bob gửi  $Q_B$  cho Alice

$$\begin{aligned} n_B &= 8 \\ Q_B &= n_B \cdot G \\ &= (20, 8) \end{aligned}$$


---

Tính khóa chia sẻ giữa Alice và Bob

---

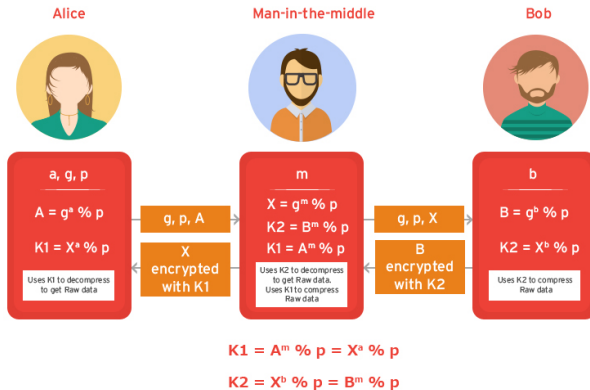
$$\begin{aligned} S &= n_A \cdot Q_B \\ &= (28, 27) \end{aligned}$$

$$S = (n_A \cdot n_B) \cdot G = (n_B \cdot n_A) \cdot G$$

$$\begin{aligned} S &= n_B \cdot Q_A \\ &= (28, 27) \end{aligned}$$

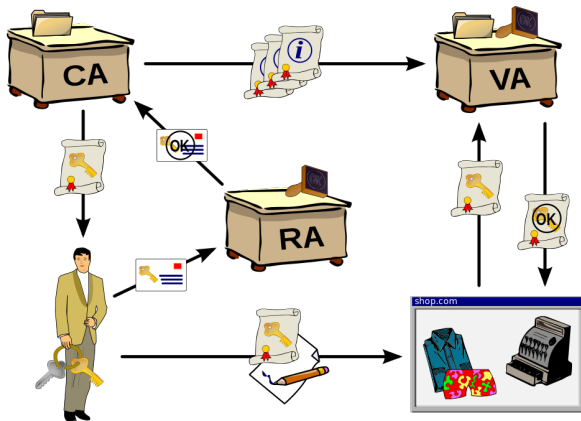
- 1 Cở sở lý thuyết
  - Hệ mã khóa công khai
  - Giao thức Diffie-Hellman
- 2 Đường cong elliptic
- 3 Chứng thư số ẩn
- 4 Kết quả

# Tại sao cần chứng thư số ẩn?



Tấn công MITM

# Sơ đồ PKI



Sơ đồ PKI

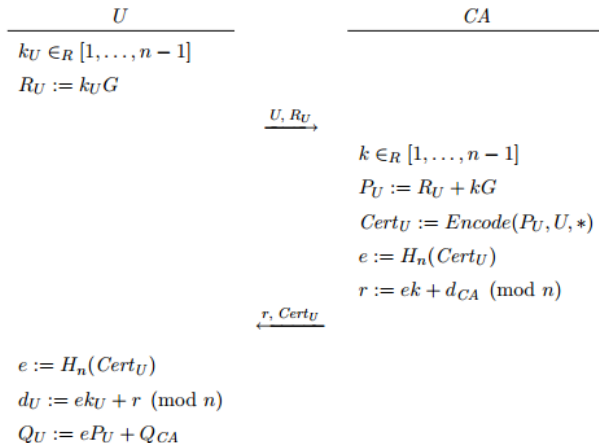
# Chứng thư số ẩn ECQV

Sơ đồ chứng thư số ẩn bao gồm các phần:

1. **ECQV\_Setup**: CA thiết lập các tham số đường cong elliptic, hàm băm, định dạng mã hóa chứng chỉ và tất cả các bên đã chọn một trình tạo số ngẫu nhiên. CA tạo ra một cặp khóa.
2. **Cert\_Request**: Người yêu cầu U phải tạo một yêu cầu cho một chứng chỉ, được gửi đến CA.
3. **Cert\_Generate**: Khi nhận được yêu cầu chứng chỉ từ U, CA xác nhận danh tính của U và tạo chứng chỉ số ẩn. CA gửi phản hồi cho U.
4. **Cert\_PK\_Extraction**: Với chứng chỉ số ẩn cho U người dùng, thông số và khóa công khai của CA.
5. **Cert\_Reception**: Sau khi nhận được phản hồi cho yêu cầu chứng chỉ của mình, U đảm bảo tính hợp lệ của cặp khóa được chứng nhận ngầm.



## Sơ đồ ECQV



- 1 Cở sở lý thuyết
  - Hệ mã khóa công khai
  - Giao thức Diffie-Hellman
- 2 Đường cong elliptic
- 3 Chứng thư số ẩn
- 4 Kết quả**

# Cài đặt

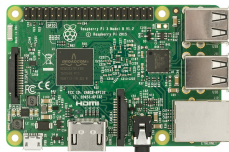
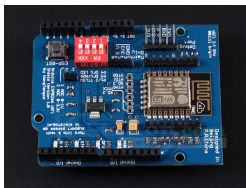
# Kết quả thu được

- Tìm hiểu được một số nguyên lý mã công khai, hàm băm, chữ ký điện tử.
- Hiểu được lý thuyết về đường cong elliptic.
- Hiểu được các bước cơ bản xây dựng một đường cong elliptic và ứng dụng trong thuật toán trao đổi khóa và tạo chứng thư số.
- Nắm được một số kiểu tấn công như timing-attack, tấn công xen giữa.
- ...

# Hạn chế

- Chưa tìm hiểu được một cách đầy đủ và chi tiết về đường cong elliptic trên trường hữu hạn  $F_{2^m}$  với 2 dạng cơ sở normal và polinomial.
- Ứng dụng truyền file và chứng thư số chưa có giao diện đẹp mắt và mới chỉ thử nghiệm trên một máy.
- ...

# Hướng Phát triển



**Hình:** arduino, esp-12(esp8266), raspberry pi – các thiết bị dùng trong phát triển sản phẩm IoT

- Tốc độ tính toán trên đường cong Elliptic nhanh.
- Lưu trữ và trao đổi khóa nhỏ gọn.
- Tính an toàn bảo mật cao.

