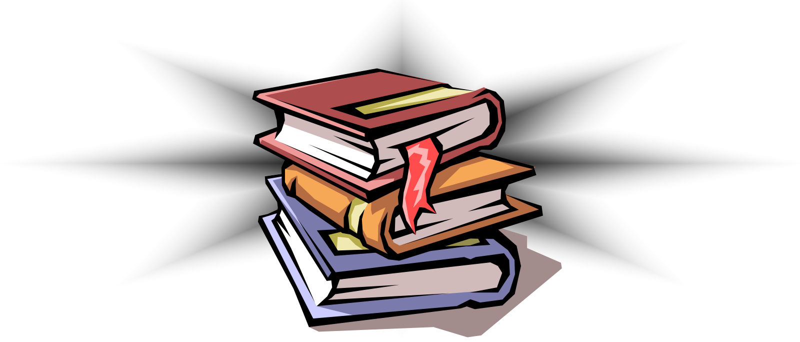
thuvientoan.net

Tài liệu soạn thảo



TUYỂN CHỌN 50 BÀI HÌNH HỌC

LUYỆN THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN

50 BÀI TOÁN HÌNH HỌC ÔN THI VÀO 10 CÓ ĐÁP ÁN

GV: CÔ MAI QUỲNH

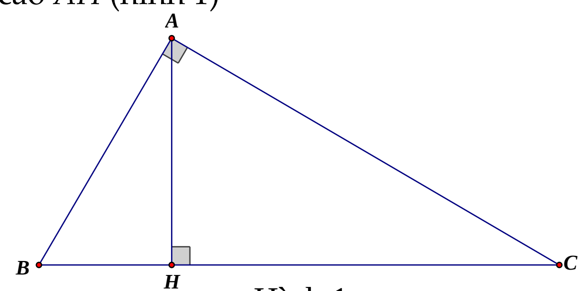
TÓM TẮT LÝ THUYẾT HÌNH 9

1. Hệ thức cơ bản trong tam giác vuông

Một tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao *AH* (hình 1)

Ta có:

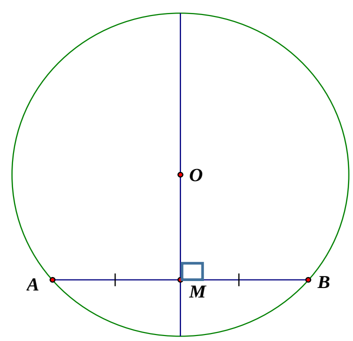
- $AB^2 = BH.BC$ và $AC^2 = CH.BC$
- $AH^2 = HB.HC$
- $AH.BC = AB.AC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$; $\cos B = \dfrac{AB}{BC}$; $\tan B = \dfrac{AC}{AB}$; $\cot B = \dfrac{AB}{AC}$
- α là góc nhọn thì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- α, β là hai góc nhọn và $\alpha + \beta = 90^o$ thì $\sin\alpha = \cos\beta$; $\tan\alpha = \cot\beta$.



Hình 1

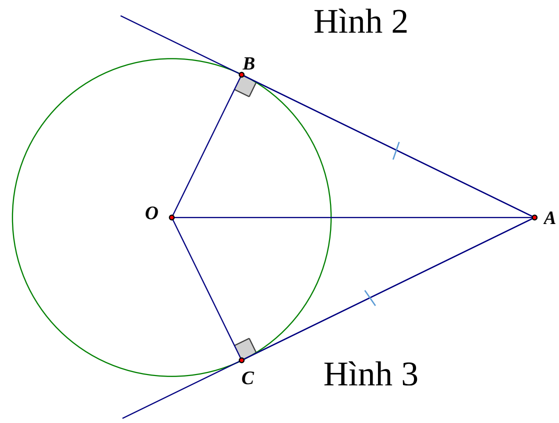
2. Đường tròn

- **Đường kính và dây cung**: (hình 2)
  - Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính
  - Trong một đường tròn đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
  - Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.



Hình 2

- **Tiếp tuyến của đường tròn** (hình 3)
  - *AB*, *AC* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại *B* và *C*



Hình 3

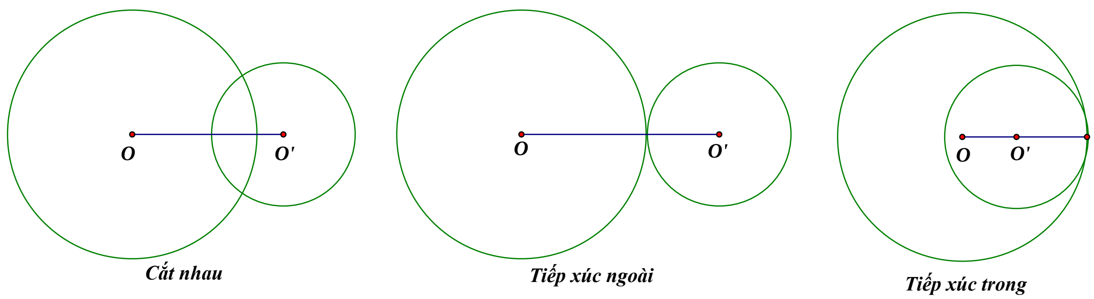
$$\begin{cases} AB = AC \\ AO \text{ là phân giác } \widehat{BAC} \\ OA \text{ là phân giác } \widehat{BOC} \end{cases}$$

- **Vị trí tương đối của hai đường tròn** (hình 4)
  - Hai đường tròn *(O; R)* và *(O'; r)* với $R \geq r$

    Cắt nhau $\Leftrightarrow R - r < OO' < R + r$

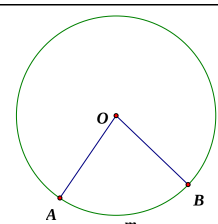
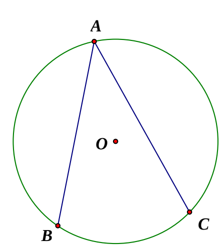
    Tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow OO' = R + r$

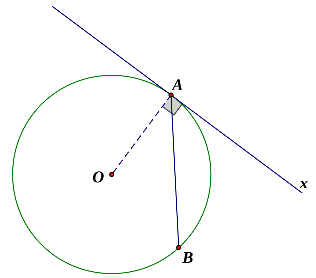
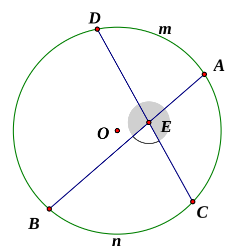
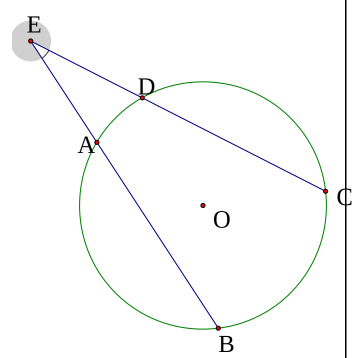
    Tiếp xúc trong $\Leftrightarrow OO' = R - r$



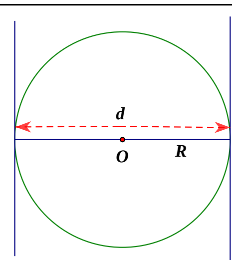
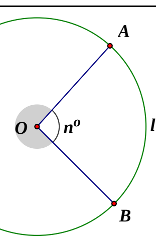
Hình 4

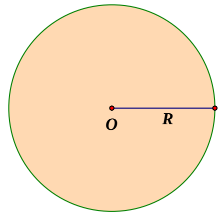
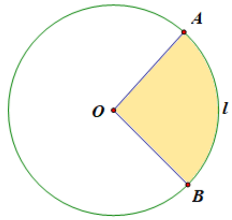
3. Các loại góc liên quan đến đường tròn

Tên góc	Định nghĩa	Hình vẽ	Công thức tính số đo
Góc ở tâm	Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm		$sđ\,\widehat{AOB} = sđ\,\overparen{AmB}$
Góc nội tiếp	Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai chứa hai dây cung của đường tròn đó		$sđ\,\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ\,\overparen{BC}$

Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung			sđ $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset\frown{AB}$
Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn			sđ $\widehat{BEC} = \frac{\text{sđ } \overset\frown{BnC} + \text{sđ } \overset\frown{Am}}{2}$
Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn			sđ $\widehat{BEC} = \frac{\text{sđ } \overset\frown{BC} - \text{sđ } \overset\frown{AD}}{2}$

4. Công thức tính trong đường tròn

	Hình vẽ	**Công thức tính**
Độ dài đường tròn		$C = 2\pi R$ hay $C = \pi d$
Độ dài cung tròn		$l = \frac{\pi R n}{180}$

Diện tích hình tròn		$S = \pi R^2$
Diện tích hình quạt		$S_{quat} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ hay $S_{quat} = \dfrac{lR}{2}$

5. Chứng minh một tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).
- Một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^o thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α thì nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được) thì nội tiếp đường tròn. Điểm đó gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

50 BÀI TẬP CHỌN LỌC.

Câu 1. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

1. Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp.
2. Tính tích $AH.AK$ theo R.
3. Xác định vị trí của điểm K để tổng $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó?

Câu 2. Cho đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

1. Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ và $\Delta ABH \# \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn thẳng AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1. Chứng minh $\Delta KAF \# \Delta KEA$.
2. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.
3. Chứng minh $MN // AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).
4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O), với P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK.

Câu 4. Cho $(O;R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$.

3. Trên cung nhỏ BC của $(O; R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của $(O;\ R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
4. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Câu 5. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt BE tại điểm F.

1. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$.
3. Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. C hứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
4. Cho biết $DF = R$, chứng minh $\tan \widehat{AFB} = 2$.

Câu 6. Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N.

1. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90^o$.
3. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$.
4. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Câu 7. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1. Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$
3. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.
4. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Câu 8. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O)

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4$cm, $AN = 6$cm.
3. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh: $MT // AC$.
4. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 9. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O; R)$. (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
3. Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F. Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME // NF$
4. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Câu 10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N.

1. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.
3. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.
4. Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng IA cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2. Chứng minh $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{BE}$.
3. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh: $HK//DC$.
4. Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật

Câu 12. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I thuộc cùng một đường tròn..
2. Chứng minh $NB^2 = NK.\text{NM}$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi P và Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Câu 13. Cho đường tròn (O; R) với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn (O; R) sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.
2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.
3. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt đoạn thẳng CD tại điểm K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.
4. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 14. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. M là một điểm trên đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q.

1. Chứng minh rằng: Tứ giác $APMO$ nội tiếp.
2. Chứng minh rằng: $AP + BQ = PQ$.
3. Chứng minh rằng: $AP.BQ = AO^2$.

4. Khi điểm M di động trên đường tròn (O), tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tứ giác $APQB$ nhỏ nhất.

Câu 15. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với các đường tròn (O) $(M, N \in (O))$. Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

1. Chứng minh tứ giác $ANHM$ nội tiếp được trong đường tròn.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$.
3. Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh $EH // NC$.

Câu 16. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn $(O; R)$ (P, Q là 2 tiếp điểm). Lấy M thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn $(O; R)$. Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1. Chứng minh tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$
2. Kẻ đường kính QS của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh NS là tia phân giác của $\widehat{PNM}$.
3. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK. Tính đội dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.

Câu 17. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tia AO cắt đường tròn (O) tại D.

1. Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn;
2. Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;
3. Gọi M là trung điểm của BC, tia AM cắt HO tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác BAC.

Câu 18. Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho $AC = R$. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. Lấy điểm M bất kì trên (O) không trùng với A, B. Tia BM cắt đường thẳng d tại P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

1. Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp;
2. Tính $BM.BP$ theo R.
3. Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song;

4. Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên (O).

Câu 19. Cho ΔABC có ba góc nội tiếp đường tròn (O), bán kính R. Hạ đường cao AH, BK của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E.

1. Chứng minh tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
2. Chứng minh. $HK//DE$.
3. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Câu 20. Cho $\widehat{xAy} = 90^o$, vẽ đường tròn tâm A bán kính R. Đường tròn này cắt Ax, Ay thứ tự tại B và D. Các tiếp tuyến với đường tròn (A) kẻ từ B và D cắt nhau tại C.

1. Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Chứng minh?
2. Trên BC lấy điểm M tùy ý (M khác B và C) kẻ tiếp tuyến MH với đường tròn (A), (H là tiếp điểm). MH cắt CD tại N. Chứng minh rằng $\widehat{MAN} = 45^0$.
3. $P; Q$ thứ tự là giao điểm của $AM; AN$ với BD. Chứng minh rằng $MQ; NP$ là các đường cao của ΔAMN.

Câu 21. Cho ΔABC $(AB < AC)$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường cao AH của ΔABC, đường kính AD của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C và B xuống đường thẳng AD. M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh các tứ giác $ABHF$ và $BMFO$ nội tiếp.
2. Chứng minh $HE//BD$.
3. Chứng minh $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích ΔABC).

Câu 22. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ ba đường cao AP, BM, CN của ΔABC cắt nhau tại H.

1. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp.
2. Chứng minh $\Delta ANM \backsim \Delta ACB$.
3. Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.
4. Giả sử $AB = 4\text{cm}$; $AC = 5\text{cm}$; $BC = 6\text{cm}$. Tính MN.

Câu 23. Cho nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B. Tia AM cắt d tại điểm N. Đường thẳng OC cắt d tại E.

1. Chứng minh: tứ giác $OCNB$ nội tiếp.

2. Chứng minh: $AC.AN = AO.AB$.
3. Chứng minh: NO vuông góc với AE.
4. Tìm vị trí điểm M sao cho $(2.AM + AN)$ nhỏ nhất.

Câu 24. Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường thẳng (d) không đi qua O, cắt đường tròn (O) tại 2 điểm A, B. Lấy điểm M bất kỳ trên tia đối BA, qua M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.
2. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh HM là phân giác của $\widehat{CHD}$.
3. Đường thẳng đi qua O và vuông góc với MO cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ nhỏ nhất.

Câu 25. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC; E thuộc AB).

1. Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn;
2. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AH và BC. Chứng minh MI vuông góc với ED.

Câu 26. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, kẻ đường cao AH. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Kẻ NE vuông góc với AH. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D. Tia AH cắt đường tròn tại F.

1. Chứng minh $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BIC}$ và tứ giác $DENC$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh hệ thức $AM.AB = AN.AC$ và tứ giác $BFIC$ là hình thang cân.
3. Chứng minh: tứ giác $BMED$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Câu 27. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1. Chứng minh: $AD.AE = AC.AB$.
2. Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp ΔCDN.
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB.

Câu 28. Cho ΔABC nhọn $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp (O), vẽ đường kính AD. Đường thẳng đi qua B vuông góc với AD tại E và cắt AC tại F. Gọi H là hình chiếu của B trên AC và M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{MHC} + \widehat{BAD} = 90^o$.
3. Chứng minh $\dfrac{HC}{HF} + 1 = \dfrac{BC}{HE}$.

Câu 29. Cho ΔABC nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm $M, N\left(M \neq B, N \neq C\right)$. Gọi H là giao điểm của BN và CM; P là giao điểm của AH và BC.

1. Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh $BM.BA = BP.BC$.
3. Trong trường hợp đặc biệt khi ΔABC đều cạnh bằng $2a$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ theo a.
4. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AE và AF của đường tròn tâm O đường kính BC (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Câu 30. Cho ΔABC đều có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B, C, H). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC.

1. Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
2. Chứng minh $OH \perp PQ$.
3. Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Câu 31. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $\left(O\right)$ có bán kính $R = 3$ cm. Các tiếp tuyến với $\left(O\right)$ tại B và C cắt nhau tại D.

1. Chứng minh tứ giác $OBDC$ nội tiếp đường tròn;
2. Gọi M là giao điểm của BC và OD. Biết $OD = 5$ (cm). Tính diện tích ΔBCD
3. Kẻ đường thẳng d đi qua D và song song với đường tiếp tuyến với $\left(O\right)$ tại A, d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh $AB.AP = AQ.AC$.
4. Chứng minh $\widehat{PAD} = \widehat{MAC}$.

Câu 32. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C cố định trên nửa đường tròn. Điểm M thuộc cung $AC\,(M \neq A; C)$. Hạ $MH \perp AB$ tại H. Nối MB cắt CA tại E. Hạ $EI \perp AB$ tại I. Gọi K là giao điểm của AC và MH. Chứng minh:

1. $BHKC$ và $AMEI$ là các tứ giác nội tiếp.
2. $AK.AC = AM^2$.
3. $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

Câu 33. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng $d \perp OA$ tại A. Trên d lấy điểm M. Qua M kẻ 2 tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O). Nối EF cắt OM tại H, cắt OA tại B.

1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $OA.OB = OH.OM = R^2$.
3. Chứng minh tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MEF thuộc một đường tròn cố định khi M di chuyển trên d.
4. Tìm vị trí của M để diện tích ΔHBO lớn nhất.

Câu 34. Cho $(O; R)$ và điểm A thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm H sao cho $AH < R$. Dựng đường thẳng $d \perp Ax$ tại H. Đường thẳng d cắt đường tròn tại E và B (E nằm giữa H và B).

1. Chứng minh $\Delta ABH \# \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C thuộc Ax sao cho H là trung điểm AC. Nối CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

Câu 35. Cho ΔABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy 1 điểm M, dựng đường tròn tâm (O) có đường kính MC. Đường thẳng BM cắt đường tròn tâm (O) tại D, đường thẳng AD cắt đường tròn tâm (O) tại S

1. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCS}$.
2. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
3. Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Câu 36. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OA. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AH và đường tròn (O_2) đường kính BH. Nối AC cắt đường tròn (O_1) tại N. Nối BC cắt đường tròn (O_2) tại M. Đường thẳng MN cắt đường tròn $(O;R)$ tại E và F.

1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật.

2. Cho $AH = 4\,\text{cm}$, $BH = 9\,\text{cm}$. Tính MN.
3. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).
4. Chứng minh $CE = CF = CH$.

Câu 37. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính vuông góc AB và CD. Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn $(O;R)$ tại E. Nối AE cắt CD tại H; nối BD cắt AE tại K.

1. Chứng minh tứ giác $OIED$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AH.AE = 2R^2$.
3. Tính $\tan\widehat{BAE}$.
4. Chứng minh OK vuông góc với BD.

Câu 38. Cho đường tròn tâm O, bán kính R, đường kính AD. Điểm H thuộc đoạn OD. Kẻ dây $BC \perp AD$ tại H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ AC, kẻ $CK \perp AM$ tại K. Đường thẳng BM cắt CK tại N.

1. Chứng minh $AH.AD = AB^2$.
2. Chứng minh tam giác CAN cân tại A.
3. Giả sử H là trung điểm của OD. Tính R theo thể tích hình nón có bán kính đáy là HD, đường cao BH.
4. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Câu 39. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn $(AC \le AB)$. Dựng về phía ngoài ΔABC một hình vuông $ACED$. Tia EA cắt nửa đường tròn tại F. Nối BF cắt ED tại K.

1. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, D, K thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $AB = EK$.
3. Cho $\widehat{ABC} = 30^o; BC = 10cm$. Tính diện tích hình viên phần giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC.
4. Tìm vị trí điểm A để chu vi tam giác ΔABC lớn nhất.

Câu 40. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại A. Lấy M thuộc Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn tại B (B khác A). Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt AB tại D. Nối OM cắt AB tại I, cắt cung nhỏ AB tại E.

1. Chứng minh $OIDC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AB.AD$ không đổi khi M di chuyển trên Ax.
3. Tìm vị trí điểm M trên Ax để $AOBE$ là hình thoi.

4. Chứng minh $OD \perp MC$.

Câu 41. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC. Nối MN cắt AC tại I. Hạ $ND \perp AC$. Gọi E là trung điểm BC. Dựng hình bình hành $ADEF$.

1. Tính $\widehat{MIC}$.
2. Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.
3. Chứng minh rằng F thuộc đường tròn $(O;R)$.
4. Cho $\widehat{CAB} = 30^o; R = 30cm$. Tính thể tích hình tạo thành khi cho ΔABC quay một vòng quanh AB.

Câu 42. Cho đường tròn $(O;R)$ với dây AB cố định. Gọi I là điểm chính giữa cung lớn AB. Điểm M thuộc cung nhỏ IB. Hạ $AH \perp IM; AH$ cắt BM tại C.

1. Chứng minh ΔIAB và ΔMAC là tam giác cân.
2. Chứng minh C thuộc một đường tròn cố định khi M chuyển động trên cung nhỏ IB.
3. Tìm vị trí của M để chu vi ΔMAC lớn nhất.

Câu 43. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm $K\left(AK \geq R\right)$. Qua K kẻ tiếp tuyến KM với đường tròn (O). Đường thẳng $d \perp AB$ tại O, d cắt MB tại E.

1. Chứng minh $KAOM$ là tứ giác nội tiếp;
2. OK cắt AM tại I. Chứng minh $OI.OK$ không đổi khi K chuyển động trên Ax;
3. Chứng minh $KAOE$ là hình chữ nhật;
4. Gọi H là trực tâm của ΔKMA. Chứng minh rằng khi K chuyển động trên Ax thì H thuộc một đường tròn cố định.

Câu 44. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA. Dây $MN \perp AB$ tại C. Trên cung MB nhỏ lấy điểm K. Nối AK cắt NM tại H.

1. Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AH.AK$ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ MB.
3. Chứng minh ΔBMN là tam giác đều.
4. Tìm vị trí điểm K để tổng $KM + KN + KB$ lớn nhất.

Câu 45. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở ngoài đường tròn. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B và C là 2 tiếp điểm). I là một điểm thuộc đoạn $BC\ (IB < IC)$. Kẻ đường thẳng $d \perp OI$ tại I. Đường thẳng d cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh $OIBE$ và $OIFC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh I là trung điểm EF.
3. K là một điểm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại K cắt AB; AC tại M và N. Tính chu vi ΔAMN nếu $OA = 2R$.
4. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC tại P và Q. Tìm vị trí của A để S_{APQ} nhỏ nhất.

Câu 46. Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt. Đường thẳng OA cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai C, D. Đường thẳng $O'A$ cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai E, F.

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.
2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
3. Cho PQ là tiếp tuyến chung của (O) và (O') $\left(P \in (O), Q \in (O')\right)$. Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Câu 47. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A.

1. Chứng minh rằng $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.
2. Tia AB cắt DE tại M. Chứng minh M là trung điểm của DE.
3. Đường thẳng EB cắt DA tại P, đường thẳng DB cắt AE tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với AB.

Câu 48. Cho đường trong $(O;R)$ và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB;

1. Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đoạn OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.
3. Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Câu 49. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm BC, vẽ đường kính AK.

1. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

2. Chứng minh $DA.DH = DB.DC$.
3. Cho $\widehat{BAC} = 60^0; S_{ABC} = 20cm^2$. Tính S_{ABC}.
4. Cho BC cố định; A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 50. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính vuông góc là AB và CD. Lấy K thuộc cung nhỏ AC, kẻ $KH \perp AB$ tại H. Nối AC cắt HK tại I, tia BC cắt HK tại E; nối AE cắt đường tròn $(O;R)$ tại F.

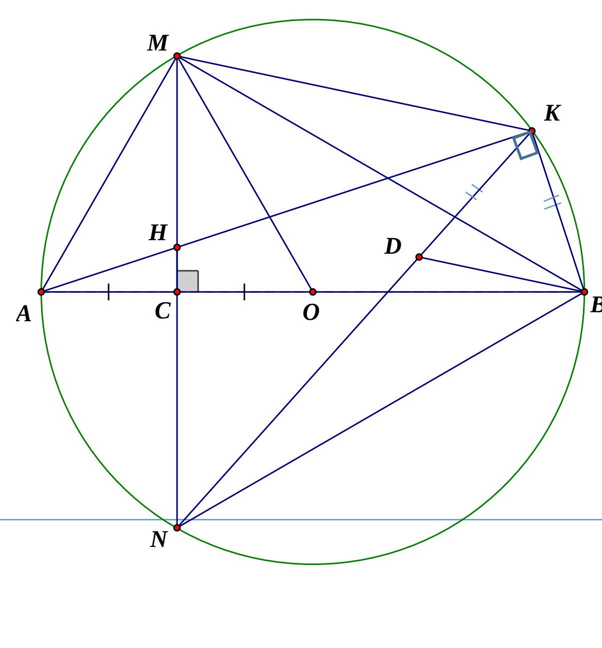
1. Chứng minh $BHFE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $EC.EB = EF.EA$.
3. Cho H là trung điểm OA. Tính theo R diện tích ΔCEF.
4. Cho K di chuyển trên cung nhỏ AC. Chứng minh đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

4. Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp.
5. Tính tích $AH.AK$ theo R.
6. Xác định vị trí của điểm K để tổng $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó?

Giải:



1. Chứng minh tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

$MN \perp AC$

$\widehat{AKB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{HCB} = 90°$

Xét tứ giác $BCHK$ có:

$\widehat{HCB} + \widehat{AKB} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCHK$ nội tiếp.

2. Tính $AH.AK$ theo R.

Xét tam giác ΔACH và ΔAKB có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACH}=\widehat{AKB}=90^\circ\\ \widehat{A}\ chung\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ACH \# \ \Delta AKB\,(g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AK}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH.AK=AC.AB$$

Mà $AC=\frac{1}{4}R$ và $AB=2R\Rightarrow AH.AK=\frac{R^2}{2}\cdot$

3. Xác định vị trí của K để $(KM+KN+KB)\max$

* Chứng minh ΔBMN đều:

ΔAOM cân tại M (MC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến)

Mà $OA=OM=R\Rightarrow \Delta AOM$ đều $\Rightarrow \widehat{MOA}=60^\circ$

ΔMBN cân tại B vì $\begin{cases}MC=CN\\ BC\perp MN\end{cases}$

$\Rightarrow CM=CN$

Mặt khác: $\widehat{MBA}=\frac{1}{2}\widehat{MOA}=30^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{MA}$) $\Rightarrow \widehat{MBN}=60^\circ$

ΔMBN cân tại B lại có $\widehat{MBN}=60^\circ$ nên ΔMBN là tam giác đều

* Chứng minh $KM+KB=KN$

Trên cạnh NK lấy điểm D sao cho $KD=KB$.

$\Rightarrow \Delta KDB$ là tam giác cân mà $\widehat{NKB}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NB}=60^\circ$

$\Rightarrow \Delta KDB$ là tam giác đều $\Rightarrow KB=BD$.

Ta có: $\widehat{DMB}=\widehat{KMB}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{BDN}=120^\circ$ (kề bù với $\widehat{KBD}$ trong ΔKDB đều)

$\widehat{MKB}=120^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung 240°)

$\Rightarrow \widehat{MBK}=\widehat{DBN}$ (tổng các góc trong tam giác bằng 180°)

Xét ΔBDN và ΔBKM có:

$$\left.\begin{array}{l}BK=BD\,(cmt)\\ \widehat{BDN}=\widehat{BKM}\ (cmt)\\ MB=MN\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta BDN=\Delta BKN\ (c.g.c)$$

$\Rightarrow ND=MK$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow KM+KN+KB=2KN$

$\Rightarrow (KM+KN+KB)\max=4R$ khi KN là đường kính $\Rightarrow K,O,N$ thẳng hàng

$\Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung BM.

Vậy với K là điểm chính giữa cung BM thì $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị max bằng $4R$.

Câu 2. Cho đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

4. Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ và $\Delta ABH \# \ \Delta EAH$.
5. Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn thẳng AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
6. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Giải:

1. Chứng minh: $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$

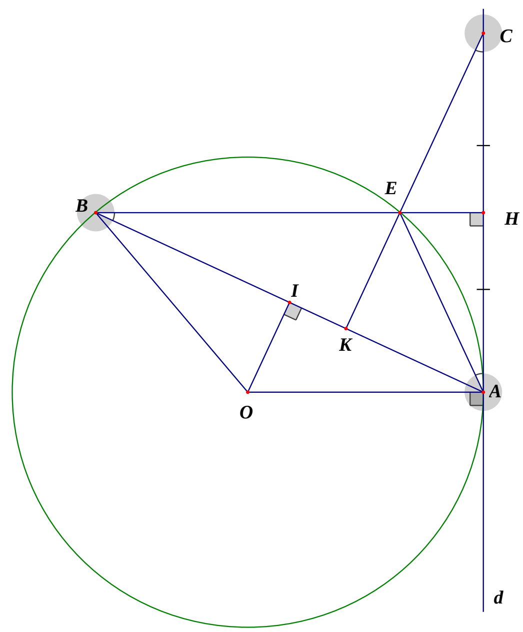
$\widehat{ABE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EA}$ (t/c góc nội tiếp)

$\widehat{HAE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EA}$ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{HAE}$

Xét ΔABH và ΔEAH có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AHB} = 90^\circ \\ \widehat{ABE} = \widehat{HAE}\ (cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \# \ \Delta EAH\ (g.g)$$



2. Xét $\Delta HEC = \Delta HEA\ (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{CAE}$ mà $\widehat{CAE} = \widehat{ABE}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABE}$

Mặt khác: $\widehat{ABE} + \widehat{CAK} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{CAK} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại K

Xét tứ giác $AHEK$ có: $\widehat{EHK} = \widehat{AKE} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EHK} + \widehat{AKE} = 180^\circ$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHEK$ nội tiếp.

3. Hạ $OI \perp AB \Rightarrow AI = IB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔAOI vuông tại I có $\cos\widehat{OAI}=\dfrac{AI}{OA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OAI}=30^\circ \Rightarrow \widehat{BAH}=60^\circ$

ΔAHB vuông tại H có: $\widehat{BAH}=60^\circ \Rightarrow \cos\ \widehat{BAH}=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{1}{2}$

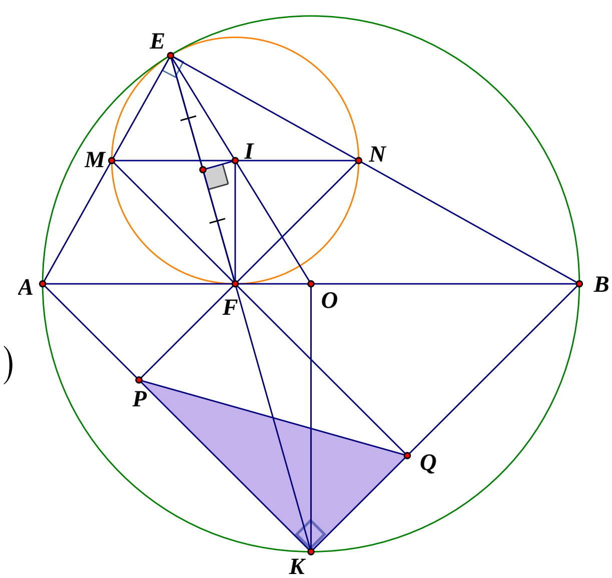
$\Rightarrow \dfrac{AH}{R\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow AH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy cần lấy điểm H sao cho độ dài $AH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ thì $AB=R\sqrt{3}$

Câu 3. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB=2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

5. Chứng minh $\Delta KAF \# \ \Delta KEA$.
6. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.
7. Chứng minh $MN//AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).
8. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O), với P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK.

Giải:



1. Chứng minh $\Delta KAF \# \ \Delta KEA$

$\widehat{KAB}=\widehat{KEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KB}$)

Xét ΔKAF và ΔKEA có:

$\left.\begin{array}{l}\widehat{KAB}=\widehat{AEK}(cmt)\\ \widehat{K}\ chung\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta KAF \# \ \Delta AEK(g.g)$

2. * Đường tròn $(I;IE)$ và đường tròn $(O;OE)$

I,O,E thẳng hàng $\Leftrightarrow IE+IO=OE$

$\Rightarrow IO=OE-IE$

Vậy $(I;IE)$ và $(O;OE)$ tiếp xúc trong tại E.

* Chứng minh $(I;IE)$ tiếp xúc với AB tại F

Dễ dàng chứng minh: ΔEIF cân tại I ($I \in$ trung trực của EF)

ΔEOK cân tại $O \Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{EKO}\ (= \widehat{OEF})$

mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IF//OK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Có : $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{KB}\ (\widehat{AEK} = \widehat{KEB}) \Rightarrow AK = KB$

$\Rightarrow \Delta AKB$ cân tại K

$\Rightarrow OK \perp AB$

Vì $\left.\begin{array}{l} OK \perp AB \\ OK//IF \end{array}\right\} \Rightarrow IF \perp AB$

$\Rightarrow (I;IE)$ tiếp xúc với AB tại F.

3. $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{MEN} = 90^\circ$ mà $\widehat{MEN}$ là góc nội tiếp đường tròn $(I;IE)$

$\Rightarrow MN$ là đường kính $(I;IE)$

$\Rightarrow \Delta EIN$ cân tại I

Lại có: ΔEOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{INE} = \widehat{OBE}$ mà 2 góc này vị trí đồng vị

$\Rightarrow MN//AB$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //).

4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E chuyển động trên (O)

$\widehat{MFE} = \widehat{MNE}$ (góc nội tiếp (I) cùng chắn cung ME)

$\widehat{AKE} = \widehat{ABE}$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung AE)

Mà $\widehat{MNE} = \widehat{ABE}\ (cmt) \Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{AKE}$, hai góc này lại ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MQ//AK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Chứng minh tương tự: $NP//BK$

Tứ giác $PFQK$ có: $MQ//AK$

$NP//BK$

$\widehat{PKQ} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ Tứ giác $PFQK$ là hình chữ nhật

Ta có: $\widehat{MFA} = \widehat{QFB}$ (đối đỉnh) ở

$\widehat{KAB} = \widehat{KBA}$ (ΔAKB cân) mà $\widehat{MFA} = \widehat{KAB} \Rightarrow \Delta FQB$ vuông cân tại Q.

Chu vi $\Delta KPQ = KP + PQ + KQ$

Mà $PK = FQ$ ($PFQK$ là hình chữ nhật) và $FQ = QB$ (ΔBFQ cân tại Q)

$\Rightarrow P_{KPQ} = QB + QK + FK = KB + FK$

Mặt khác: ΔAKB cân tại $K \Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung AB

$FK \geq FO$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow KB + FK \geq KB + FO$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow KB + FK = KB + FO$

$\Leftrightarrow FK = FO$

$\Rightarrow$ E là điểm chính giữa cung AB

$\Rightarrow FO = R$

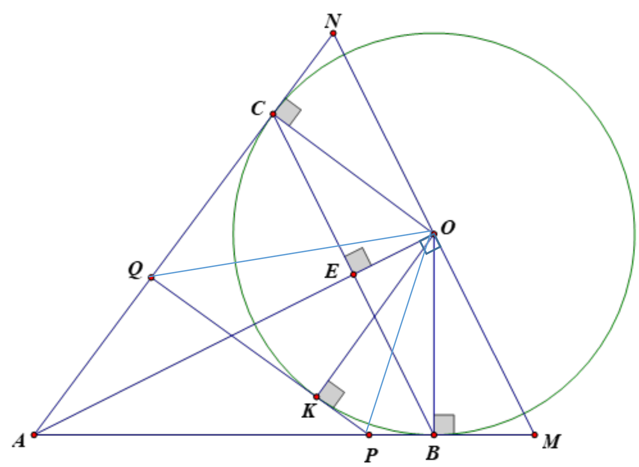
Áp dụng định lý Pi-ta-go trong ΔFOB tính được $BK = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Chu vi ΔKPQ nhỏ nhất $= R + R\sqrt{2} = R(\sqrt{2}+1)$.

Câu 4. Cho $(O;R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

5. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
6. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$.
7. Trên cung nhỏ BC của $(O; R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của $(O;\ R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
8. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Giải:



1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $ABOC$ có:

$\widehat{ABO} = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến)

$\widehat{ACO} = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2. $AB = AC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Mà AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm) nên AO là đường cao của ΔABC hay $AO \perp BC$.

Xét ΔABO vuông ở B có BE là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Rightarrow OB^2 = OE.OA$, mà $OB = R \Rightarrow R^2 = OE.OA$.

3. $PK = PB$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm).

$KQ = QC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm).

Xét chu vi $\Delta APQ = AP + AQ + QP$

$$= AP + AQ + PK + KQ$$
$$= AP + PK + AQ + QC$$
$$= AB + AC$$
$$= 2AB$$

Mà (O) cố định, điểm A cố định nên AB không thay đổi.

4. $\Delta OMP \# \Delta QNO \Rightarrow \dfrac{MP}{ON} = \dfrac{OM}{QN} \Rightarrow MP.QN = ON.OM = \dfrac{MN^2}{4}$

$\Rightarrow MN^2 = 4MP.QN$

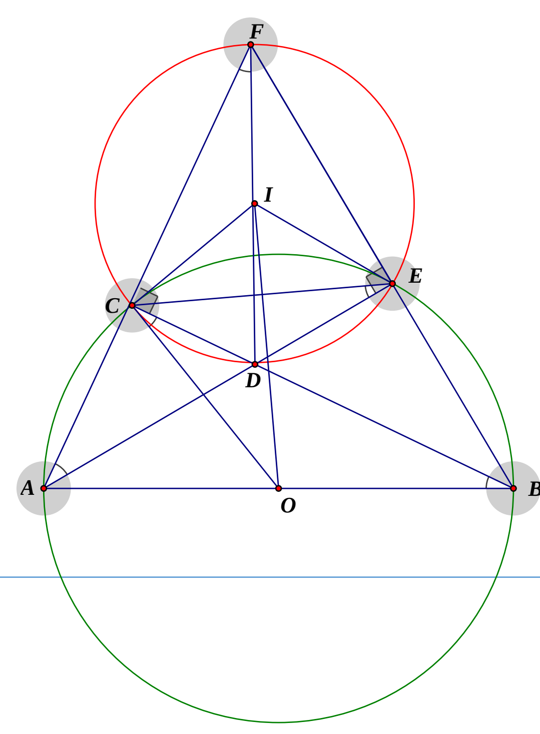
$MN = 2\sqrt{MP.QN} \le MP + NQ$ (Theo bất đẳng thức Cô-si)

Hay $MP + NQ \ge MN$ (đpcm).

Câu 5. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt BE tại điểm F.

5. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$.
7. Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. C hứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
8. Cho biết $DF = R$, chứng minh $\tan \widehat{AFB} = 2$.

Giải:



1. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.

$\widehat{ACE} = \widehat{AEB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $FCDE$ có :

$\widehat{FCD} + \widehat{FDE} = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau nên $\Rightarrow$ Tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp

2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$

Xét ΔACD và ΔBED có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACD}=\widehat{BED}=90^o\\ \widehat{ADC}=\widehat{BDE}\ (đ.đ)\end{array}\right\}\Delta ACD\#\ \Delta BED(g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{CD}=\frac{BD}{ED}\Rightarrow AD.ED=CD.BD\ \text{(đpcm)}.$$

3. * Chứng minh $\widehat{CFD}=\widehat{OCB}$

Vì tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp (I) nên

$\widehat{CFD}=\widehat{CEA}$ (góc nội tiếp (I) cùng chắn cung CD)

Mà $\widehat{CED}=\widehat{CBA}$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung CA)

$\Rightarrow \widehat{CFD}=\widehat{CBA}$

Lại có ΔOCB cân tại O nên $\widehat{CBA}=\widehat{OCB}$

$\Rightarrow \widehat{CFD}=\widehat{OCB}\quad (1)$

ΔICF cân tại I: $\widehat{CFD}=\widehat{ICF}\quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ICF}=\widehat{OCB}$

* Chứng minh IC là tiếp tuyến (O):

Ta có: $\widehat{ICF}+\widehat{ICB}=90^o$ (vì $\widehat{DIC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{OCB}+\widehat{BCI}=90^o$

$\Rightarrow OC\perp CI\Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của (O).

4. Ta có 2 tam giác vuông $\Delta ICO\#\ \Delta FEA(g.g)$

$\widehat{CAE}=\frac{1}{2}\widehat{COE}=\widehat{COI}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{CE}$) $\Rightarrow \widehat{CIO}=\widehat{AFB}$

Mà $\tan\widehat{CIO}=\dfrac{CO}{CI}=\dfrac{R}{\frac{R}{2}}=2$

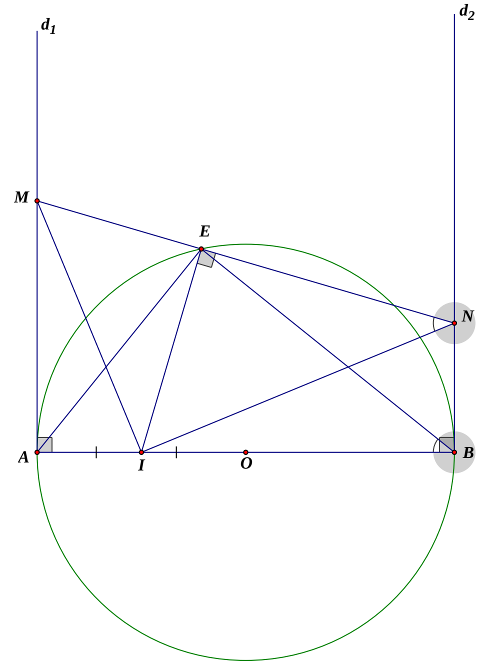
$\Rightarrow \tan\widehat{AFB}=\tan\widehat{CIO}=2.$

Câu 6. Cho đường tròn (O), đường kính $AB=2R$. Gọi d_1 và d_2 là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N.

5. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN}=90^o$.

7. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$.
8. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Giải:



1. Chứng minh $AMEI$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AMEI$ có:

$\widehat{MAI} + \widehat{MEI} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ nội tiếp.

2. * Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$.

Xét tứ giác $ENBI$ có:

$\widehat{IEN} + \widehat{IBN} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $ENBI$ nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{EI}$)

* Chứng minh $\widehat{MIN} = 90°$

Tứ giác $ENBI$ nội tiếp nên $\widehat{EMI} = \widehat{EAI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

Lại có: $\widehat{AEB} = 90° \Rightarrow \widehat{EAI} + \widehat{EBI} = 90°$

$$\Rightarrow \widehat{EMI} + \widehat{ENI} = 90° \Rightarrow \Delta MNI \text{ vuông tại } I. \text{Vậy } \widehat{MIN} = 90°.$$

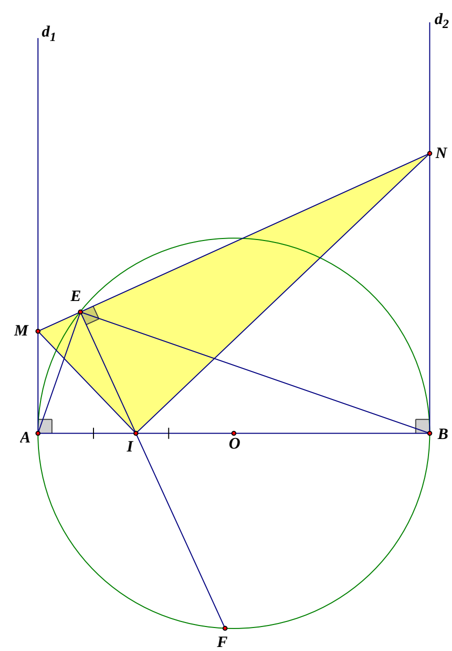
3. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$

Xét ΔAMI và ΔBNI có: $\widehat{MAI} = \widehat{NBI} = 90°$

$\widehat{AIM} = \widehat{BNI}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BIN}$)

$\Rightarrow \Delta AMI \# \Delta BIN$ $(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AI} = \frac{BI}{BN} \Rightarrow AM.BN = AI.BI.$$



4. Ta có hình vẽ

Khi E, I, F thẳng hàng $\widehat{AEF} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AF} = 45°$

$\widehat{AMI} = \widehat{AEI} = 45°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AI}$)

$\Rightarrow \Delta MAI$ vuông cân tại A.

$$\Rightarrow AM = AI = \frac{R}{2} \Rightarrow MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

(Định lí Pi-ta-go).

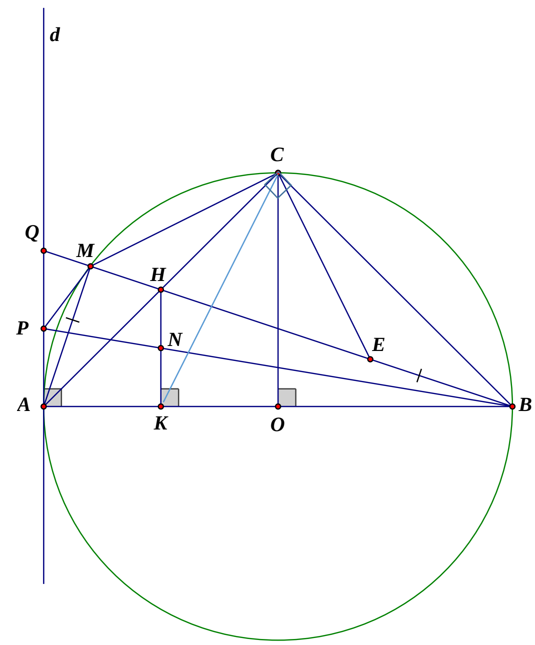
Chứng minh tương tự:

ΔBIN vuông cân tại B

$$\Rightarrow BI = BN = \frac{3R}{4} \Rightarrow IN = \sqrt{BI^2 + BN^2} = \sqrt{\frac{9R^2}{16} + \frac{9R^2}{16}} = \frac{3R\sqrt{2}}{2}$$

$S_{MIN} = \frac{1}{2}MI.NI = \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3R\sqrt{2}}{2} = \frac{3R^2}{4}$ (đơn vị diện tích).

Câu 7. Cho đường tròn (*O; R*), đường kính *AB*. Bán kính *CO* vuông góc với *AB*, *M* là điểm bất kì trên cung nhỏ *AC* (*M* khác *A* và *C*), *BM* cắt *AC* tại *H*. Gọi *K* là hình chiếu của *H* trên *AB*.



5. Chứng minh tứ giác *CBKH* là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$
7. Trên đoạn thẳng *BM* lấy điểm *E* sao cho *BE* = *AM*. Chứng minh tam giác *ECM* là tam giác vuông cân tại *C*.
8. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại điểm *A*. Cho *P* là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm *P*, *C* nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng *PB* đi qua trung điểm của đoạn thẳng *HK*.

Giải:

1. Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp:

Xét tứ giác $CBKH$ ta có:

$\widehat{BKH} = 90^0$

$\widehat{HCB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BKH} + \widehat{HCB} = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBKH$ nội tiếp.

2. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$

Tứ giác $CBKH$ nội tiếp nên: $\widehat{HCK} = \widehat{HBK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HK)

Tứ giác $MCBA$ nội tiếp (O) nên: $\widehat{MCA}=\widehat{HKB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MA)

$\Rightarrow \widehat{HCK}=\widehat{MCA}$

$\Rightarrow \widehat{ACM}=\widehat{ACK}$ (Đpcm).

3. Chứng minh ΔECM vuông cân tại C.

Vì $CD\perp AB$ nên CO là đường trung trực của $AB \Rightarrow CA=CB$

Xét ΔAMC và ΔBEC có:

$\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$MA=BE\ (gt)$

$CA=CB$(cmt)

$\Rightarrow \Delta AMC=\Delta BEC(c.g.c)\Rightarrow \widehat{MCA}=\widehat{ECB}$ (2 góc tương ứng) và $CM=CE$ (2 cạnh tương ứng)

Mặt khác: $\widehat{ECB}+\widehat{EAC}=\widehat{BCA}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{MCA}+\widehat{ECA}=90^o$

Xét ΔEMC có:

$\left.\begin{array}{l}\widehat{MCE}=90^o\\ CM=CE\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ECM$ vuông cân tại C (Đpcm).

4. Chứng minh PB đi qua trung điểm của HK

Theo đề bài: $\dfrac{AP.MB}{MA}=R\Leftrightarrow \dfrac{AP}{AM}=\dfrac{R}{MB}=\dfrac{BO}{BM}$

Mà $\widehat{PAM}=\dfrac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AM}$ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{MBA}=\dfrac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AM}$ (t/c góc nội tiếp chắn cung AM)

$\Rightarrow \widehat{PAM}=\widehat{MBA}\Rightarrow \Delta PAM\#\ \Delta OMB(c.g.c)$ (Hệ quả)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PM}=\dfrac{OB}{OM}=1\Rightarrow PA=PM$

Vậy cần lấy điểm $P\in d$ sao cho $PA=PM$ (1)

Gọi N là giao điểm của PB và HK, Q là giao điểm của BM với d

Xét ΔQMA vuông tại M có: $PA=PM \Rightarrow \Delta PMA$ cân tại $P \Rightarrow \widehat{PAM}=\widehat{PMA}$

$\widehat{PMA}+\widehat{PMQ}=90^o$

$\widehat{PAM}+\widehat{PQM}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{PMQ}=\widehat{PQM}\Rightarrow \Delta PMQ$ cân tại P $\Rightarrow PM=PQ\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow PM=PA=PQ$.

Vì $AQ \,//\, HK$ (cùng vuông góc AB) nên:

$\dfrac{NK}{PA} = \dfrac{BN}{BP}$ (Định lí Ta-let trong ΔABP)

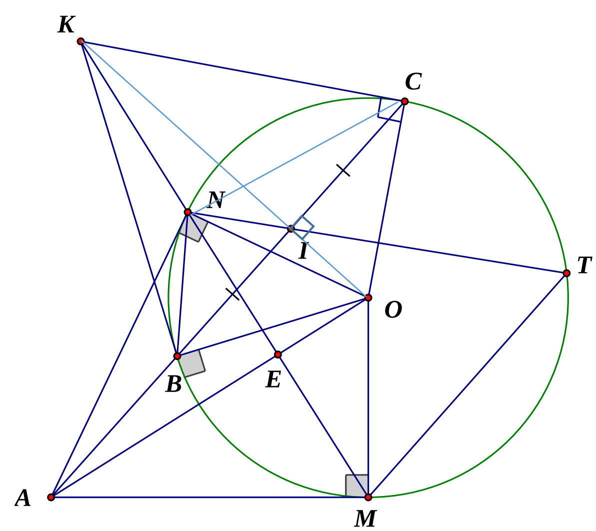
$\dfrac{BN}{BP} = \dfrac{NH}{PQ}$ (Định lí Ta-let trong ΔPBQ)

$\Rightarrow \dfrac{NK}{PA} = \dfrac{NH}{PQ}$ mà $PA = PQ(cmt)$ $\Rightarrow NK = NH$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của HK.

Vậy với $P \in d$ mà $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$ thì PB đi qua trung điểm của HK.

Câu 8. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O)



5. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.
6. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm, AN = 6cm.
7. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh: $MT \,//\, AC$.
8. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Giải:

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

Ta có $AM \perp OM$ (AM là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{OMA} = 90^o$

$AN \perp ON$ (AN là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{ONA} = 90^o$

Xét tứ giác $AMON$ có:

$\widehat{OMA} + \widehat{ONA} = 90^o + 90^o = 180^o$

mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $AMON$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4$cm; $AN = 6$cm.

Xét (O): $\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BN).

Xét ΔANB và ΔACN:

$\widehat{CAN}$ chung

$\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ANB \# \ \Delta ACN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN}$ (tính chất hai tam giác đồng dạng).

$\Rightarrow AN^2 = AB.AC$ (Đpcm).

* Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4$cm; $AN = 6$cm.

Ta có $AN^2 = AB.AC$ (cmt) mà $AB = 4$cm, $AN = 6$cm nên: $4.AC = 6^2 \Leftrightarrow AC = 9$ (cm) mà $AB + BC = AC$ nên $BC = 5$ cm.

3. Chứng minh $MT \,//\, AC$.

Xét (O): I là trung điểm của dây BC

$\Rightarrow OI \perp BC$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Tứ giác $OIAN$ nội tiếp vì $\widehat{ANO} = \widehat{AIO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{AON}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AN}$) mà hai góc cùng nhìn cạnh AO **(1)**

AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A.

$\Rightarrow OA$ là phân giác $\widehat{MON}$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AON} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$

Mà $\widehat{MTN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN).

$\Rightarrow \widehat{MTN} = \widehat{AON}$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** ta có: $\widehat{MTN} = \widehat{AIN}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MT \,//\, AC$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song).

4. Hai tiếp tuyến (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi thỏa mãn điều kiện đề bài.

* MN cắt OA tại E.

Ta chứng minh được $MN \perp OA \Rightarrow EM \perp OA$

Ta chứng minh được $OI.OK = OE.\ OA$ $(= OB^2 = OM^2 = R^2)$

Từ đó chứng minh được $\Delta OEK \# \ \Delta OIA$ (c.g.c)

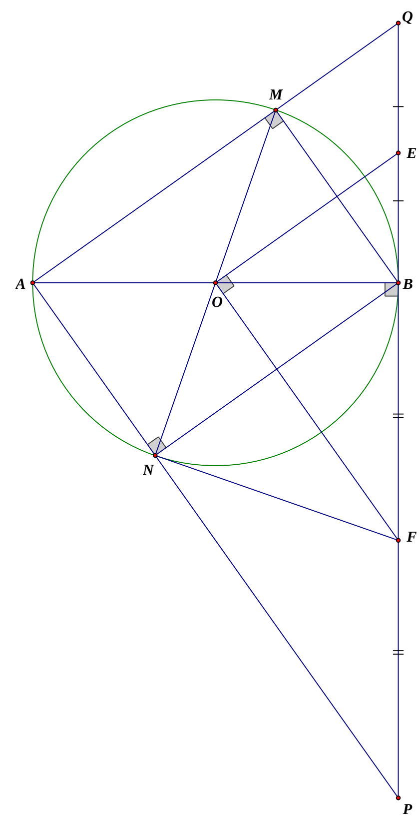
$\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OIA} = 90^o$

$\Rightarrow EK \perp OA$ mà $EM \perp OA \Rightarrow EM$ trùng EK.

K thuộc MN cố định (đpcm).

Câu 9. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O; R). (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

5. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.
6. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
7. Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F. Chứng minh F là trung điểm của BP và ME // NF
8. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.



Giải:

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{MBN} = \widehat{BNA} = \widehat{NAM} = 90^o$ (4 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AMBN$ là hình chữ nhật.

2. Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\widehat{ABM} = \widehat{MQB}$ (2 góc cùng phụ với góc $\widehat{QBM}$)

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{MQB}$

Mà $\widehat{ANM} + \widehat{MNP} = 180^o \Rightarrow \widehat{MQB} + \widehat{MNP} = 180^o$; hai góc này lại ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow MNPQ$ là tứ giác nội tiếp.

3. * Chứng minh F là trung điểm của BP.

E là trung điểm của BQ, O là trung điểm của AB

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của ΔABQ

$\Rightarrow OE // AQ$ (tính chất đường trung bình của tam giác)

Mà $OE \perp OF$; $AQ \perp AP$

$\Rightarrow OF // AP$

Lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow OF$ là đường trung bình của ΔABP.

$\Rightarrow F$ là trung điểm của BP.

* Chứng minh ME // NF

ΔNPB vuông tại N, có F là trung điểm của cạnh $BP \Rightarrow NF = BF = FB = \frac{1}{2}BP$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền)

Xét ΔONF và ΔOBF có:

$$\left.\begin{array}{l} ON = OB = R \\ OF\ chung \\ FN = FB\ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ONF = \Delta OBF\ (c.c.c)$$

$\Rightarrow \widehat{ONF} = \widehat{OBF} = 90^o$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow ON \perp NF$

Chứng minh tương tự ta có $OM \perp ME$

$\Rightarrow ME // NF$ (cùng vuông góc với MN).

4. $2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R.PQ - AM.AN$

$\Delta ABP \# \Delta QBA \Rightarrow \frac{AB}{QB} = \frac{BP}{BA} \Rightarrow AB^2 = BP.QB$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $PB + BQ \geq 2\sqrt{PB.QB} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có: $AM.AN \leq \frac{AM^2 + AN^2}{2} = \frac{MN^2}{2} = 2R^2$

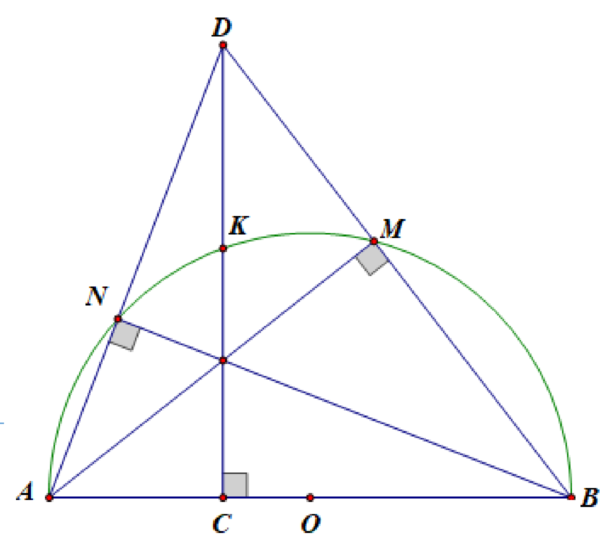
$$2S_{MNPQ} \geq 2R.4R - 2R^2 = 6R^2$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \geq 3R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $AM = AN$ và $PQ = BP$. Hay MN vuông góc với AB.

Vậy để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất thì đường kính MN vuông góc với đường kính AB.

Câu 10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D.



Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N.

5. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.
7. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.
8. Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

1. Chứng minh tứ giác nội tiếp

Chứng minh được $\widehat{AMD} = 90^o$

Vì $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^o$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh DA (nên M, C thuộc đường tròn đường kính AD).

Vậy tứ giác $ACMD$ nội tiếp.

2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$

Xét ΔCAH và ΔCDB có:

$\widehat{ACH} = \widehat{DCB} = 90^o$ (1)

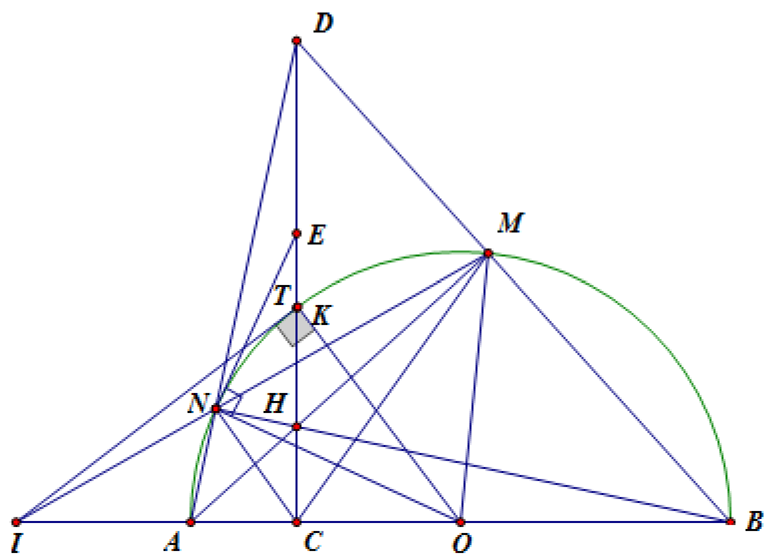
Mặt khác $\widehat{CAH} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CBM}$) (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \Delta CAH \# \Delta CDB\ (g.g)$

$\Rightarrow CA.CB = CH.CD$ (Đpcm).

3.



* Chứng minh A, N, D thẳng hàng

Vì AM và DC là đường cao của tam giác ABD nên H là trực tâm ΔABD

$\Rightarrow AD \perp BH$; $AN \perp BH$

Nên A, N, D thẳng hàng

* Gọi E là giao điểm của CK và tiếp tuyến tại N.

Ta có: $BN \perp DN$, $ON \perp EN$

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{BNO}$ mà $\widehat{BNO} = \widehat{OBN}$, $\widehat{OBN} = \widehat{EDN}$

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{EDN} \Rightarrow \Delta DEN$ cân tại $E \Rightarrow ED = EN$ (3)

Ta có: $\widehat{ENH} = 90^o - \widehat{END} = 90^o - \widehat{NDH} = \widehat{EHN}$

$\Rightarrow \Delta HEN$ cân tại $E \Rightarrow EH = EN$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow E$ là trung điểm của HD (Đpcm).

4. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi I là giao điểm của MN và AB, kẻ IT là tiếp tuyến của nửa đường tròn với T là tiếp điểm $\Rightarrow IN.IM = IT^2$ (5)

Mặt khác: $EM \perp OM$ (vì $\Delta ENO = \Delta EMO$ và $EN \perp ON$)

$\Rightarrow N, C, O, M$ cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow IN.IM = IO.IC$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow IC.IO = IT^2$

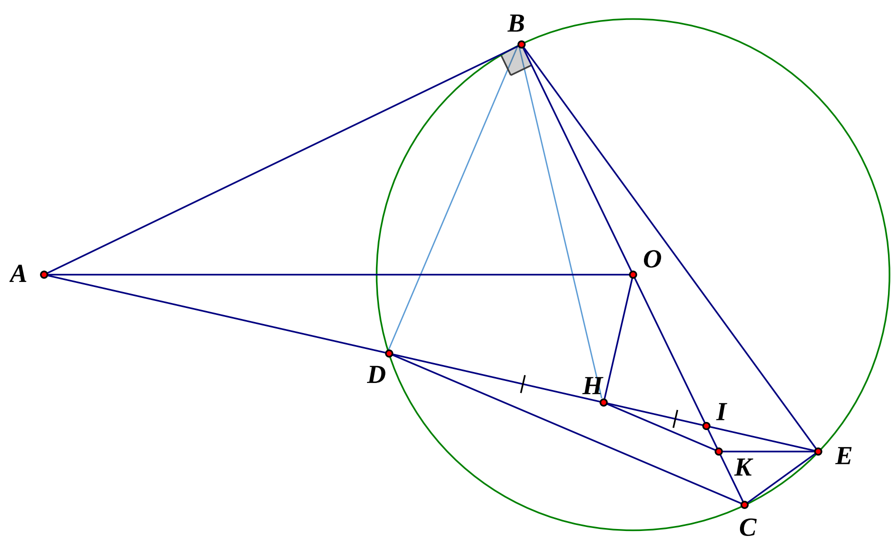
$\Rightarrow \Delta ICT \# \Delta ITO \Rightarrow CT \perp IO \Rightarrow T \equiv K$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của tiếp tuyến tại K của nửa đường tròn và đường thẳng AB

$\Rightarrow I$ cố định (Đpcm).

Câu 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng IA cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

5. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
6. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$.
7. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh: $HK // DC$.
8. Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật



Giải:

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh được $\widehat{ABO} = 90^o$

Chứng minh được $\widehat{AHO} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABOH$ nội tiếp

Suy ra bốn điểm *A, B, O, H* cùng nằm trên đường tròn đường kính *AO*.

2. Chứng minh $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{BE}$

Chứng minh được $\widehat{ABD}=\widehat{AEB}$

Xét ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{EAB}$ chung

Chứng minh được $\Delta ABD \# \ \Delta AEB\ (g.g)$

$\Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{BE}$ (Đpcm).

3. Chứng minh *KH // DC*

Tứ giác *ABOH* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OBH}=\widehat{OAH}$ mà $\widehat{OAH}=\widehat{HEK}$ (do EK//AO)

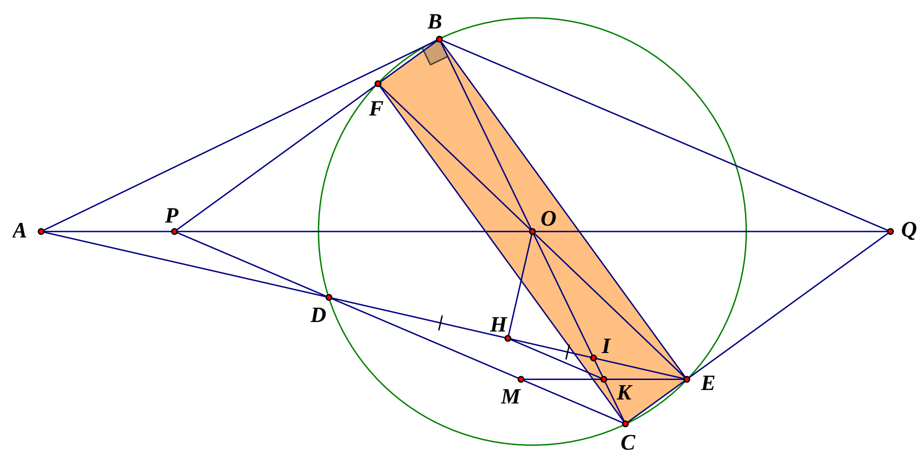
$\Rightarrow \widehat{HBK}=\widehat{HEK}$.

Suy ra tứ giác *BHKE* nội tiếp

Chứng minh được $\widehat{BKH}=\widehat{BCD}$ (cùng bằng $\widehat{BEH}$)

Kết luận *HK // DC*.

4. Chứng minh tứ giác *BECF* là hình chữ nhật.



Gọi giao điểm tia *CE* và tia *AO* là *Q*, tia *EK* và *CD* cắt nhau tại điểm *M*

Xét ΔEDM có *HK // DM* và *H* là trung điểm của đoạn *DE*, suy ra *K* là trung điểm của đoạn thẳng *ME*.

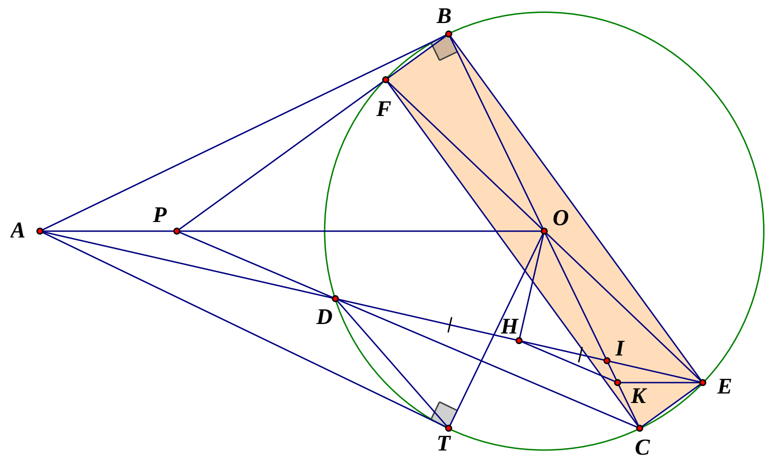
Có *ME // PQ* $\Rightarrow \frac{KE}{OQ}=\frac{MK}{OP}$ (cùng bằng $\frac{CK}{CO}$) suy ra *O* là trung điểm của đoạn *PQ*

Có: $OP=OQ;\ OB=OC$. Suy ra tứ giác *BPCQ* là hình bình hành. Suy ra *CE // BF*.

Chứng minh được $\Delta COE=\Delta BOF$ (g.c.g) $\Rightarrow OE=OF$

Mà $OB=OC=OE \Rightarrow OB=OC=OE=OF$ Suy ra tứ giác *BECF* là hình chữ nhật.

Cách 2:

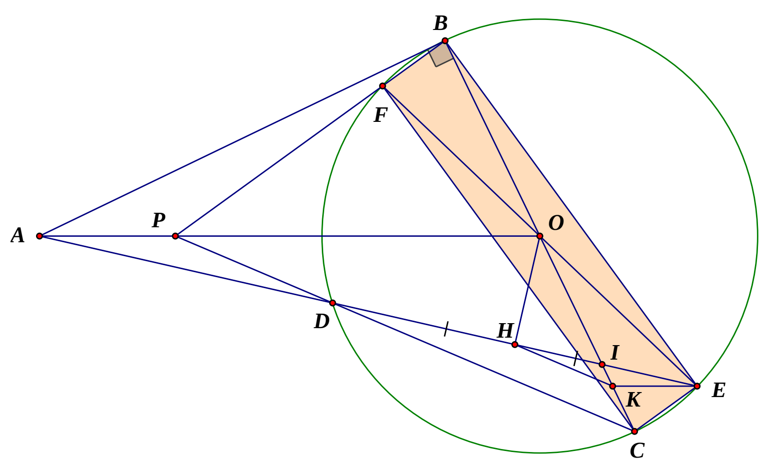


Kẻ tiếp tuyến AT với (O), chứng minh $APDT$ nội tiếp $(\widehat{PAT}+\widehat{PDT}=180°)$ dẫn đến $\widehat{ATP}=\widehat{CBE}$ (1), chứng minh $\Delta TAP=\Delta BAP$ (g.c.g) $\Rightarrow \widehat{ATP}=\widehat{ABP}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABP}=\widehat{EBC}$

Dẫn đến $\widehat{EBF}=90° \Rightarrow$ EF là đường kính $\Rightarrow BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

<u>Cách 3:</u>



Chứng minh $\Delta EHB \# \ \Delta COP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{CP}=\dfrac{EH}{CO}=\dfrac{ED}{CB}$

$\Rightarrow \Delta EDB \# \ \Delta CBP$

$\Rightarrow \widehat{EDP}=\widehat{CBP}$

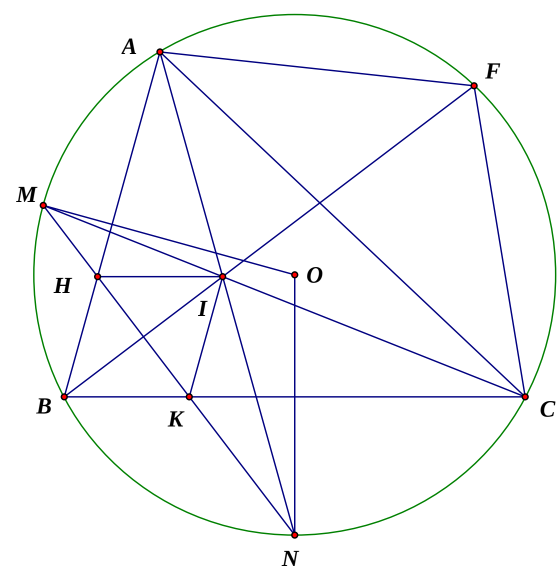
$\widehat{EDB}+\widehat{CDE}=90°$, $\widehat{CDE}=\widehat{EBC} \Rightarrow \widehat{EBP}=90° \Rightarrow$ $BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Câu 12. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

5. Chứng minh bốn điểm *C, N, K, I* thuộc cùng một đường tròn..
6. Chứng minh $NB^2 = NK.\text{NM}$.
7. Chứng minh tứ giác *BHIK* là hình thoi.
8. Gọi *P* và *Q* lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác *MBK*, tam giác *MCK* và *E* là trung điểm của đoạn *PQ*. Vẽ đường kính *ND* của đường tròn (*O*). Chứng minh ba điểm *D, E, K* thẳng hàng.

Giải:

1. Chứng minh bốn điểm *C, N, K, I* thuộc cùng một đường tròn.



Ta có: $\widehat{MCB} = \widehat{ANM}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{ICK} = \widehat{INK}$

Mà hai góc này ở cùng nhìn cạnh *IK* trong tứ giác *IKNC* từ hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow IKNC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow C, N, K, I$ thuộc cùng một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.\text{NM}$.

$\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).

Xét ΔNBK và ΔNMB có:

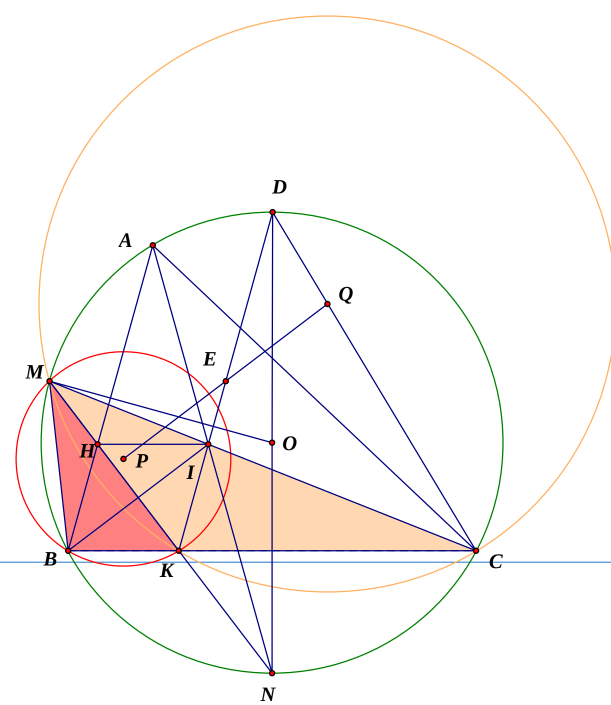
$\widehat{MNB}$ chung

$\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta NBK \# \ \Delta NMB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NK} = \dfrac{NM}{NB} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$ (đpcm).

3. Chứng minh tứ giác *BHIK* là hình thoi



Nối *BI* cắt đường tròn (*O*) tại *F*

$\Rightarrow AF = FC$

Ta có $\widehat{BMH} = \widehat{HMI}$ (vì cùng nhìn cung *BN* = *NC*)

$\widehat{MBI} = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{MA} + sđ\,\overset{\frown}{AF}\right)$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{MF}$)

$\widehat{MIB} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{MB} + sđ\,\overset{\frown}{FC}\right)$ (góc có đỉnh bên trong đường tròn)

Mà $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MC}; \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$ nên $\widehat{MBI} = \widehat{MIB}$

$\Rightarrow \Delta BMI$ cân tại M có MN là phân giác

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của BI.

$\Rightarrow HK \perp BI, BH = HI, BK = KI$ (1)

Mặt khác $\widehat{HBF} = \widehat{FBC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung $AF = FC$)

$\Rightarrow \Delta BHK$ có BF là phân giác cũng là đường cao

$\Rightarrow \Delta BHK$ cân tại $B \Rightarrow BH = BK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $BHIK$ là hình thoi.

4. Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng

$\widehat{QCK} = 90^o - \widehat{CMK}$

$\Rightarrow \widehat{QCK} = 90^o - \widehat{CBN}$

$\Rightarrow \widehat{QCK} = 90^o - \widehat{BCN}$

$\Rightarrow CQ \perp CN$ nên C, D, Q thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có D, B, P
thẳng hàng.

Lại có $\widehat{CKQ} = 90^o - \widehat{CMK}$

$\Rightarrow \widehat{KBP} = 90^o - \widehat{BMK}$

Mà $\widehat{CMK} = \widehat{BMK}$ nên $\widehat{CKQ} = \widehat{KBP}$

Hay $KQ // DP$.

Tương tự $KP // DQ$

Nên $KPDQ$ là hình bình hành. Hình bình hành $KPDQ$ có hai
đường chéo KD và PQ cắt nhau
tại trung điểm mỗi đường. Nên D, E, K thẳng hàng (Đpcm).

Câu 13. Cho đường tròn $(O; R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn $(O; R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

5. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.
6. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.

7. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt đoạn thẳng CD tại điểm K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.
8. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải:

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.

SD, SC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$

$\Rightarrow OD \perp SD, OC \perp SC$

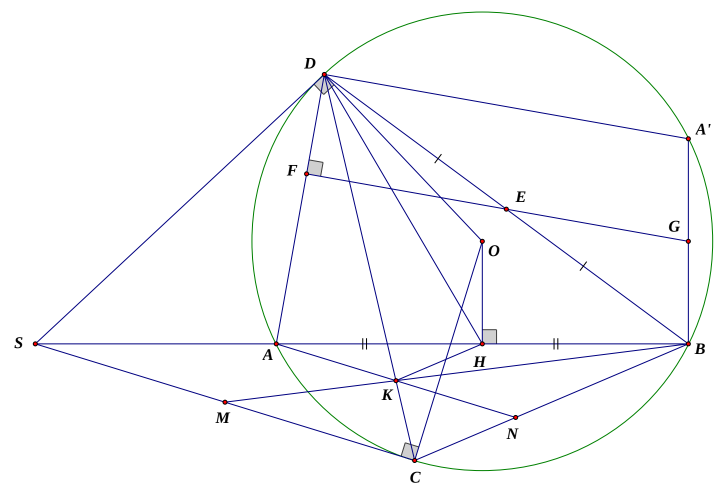
$\Rightarrow D, C$ thuộc đường tròn đường kính SO (1)

Mặt khác H là trung điểm của AB

$\Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow \widehat{SHO} = 90^o$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính SO (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C, D, H, O, S$ cùng thuộc đường tròn đường kính SO.



2. Tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và số đo góc $\widehat{CSD}$.

Xét ΔSDO có:

$SO^2 = SD^2 + DO^2$

$\Rightarrow SD^2 = SO^2 - DO^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow SD = R\sqrt{3}$

Ta có: $\sin \widehat{DSO} = \dfrac{DO}{SO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DSO} = 30^o \Rightarrow \widehat{CSD} = 60^o$.

3. Vì S, D, O, H cùng thuộc một đường tròn nên $SHOD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{SOD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{SD}$) (3)

Lại có: $\widehat{AKD} = \widehat{SCD}$ (đồng vị) nên $\widehat{AKD} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AKD} \Rightarrow ADHK$ nội tiếp.

Gọi M là giao điểm của BK và SC.

Gọi N là giao điểm của AK và BC.

Ta có: $\widehat{KHA} = \widehat{CBS}$ vì $\widehat{KHA} = \widehat{ADK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AK}$)

$$\widehat{ADK} = \widehat{CBS} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn } \overset{\frown}{AC}\text{)}$$

$\Rightarrow HK\,//\,BC$ mà H là trung điểm AB nên K là trung điểm của AN. Suy ra $AK = KN$.

Có: $\dfrac{AK}{SM} = \dfrac{KN}{CM} = \dfrac{BK}{BM}$ mà $AK = KN$ nên $SM = CM$ nên M là trung điểm của SC.

4. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn tâm O.

Ta có $\widehat{ADA'} = 90^o \Rightarrow DA' \perp DA$ mà $EF \perp DA \Rightarrow EF\,//\,DA'$.

Kéo dài EF cắt BA' tại G.

$EG\,//\,DA', E$ là trung điểm của BD nên G là trung điểm của BA'.

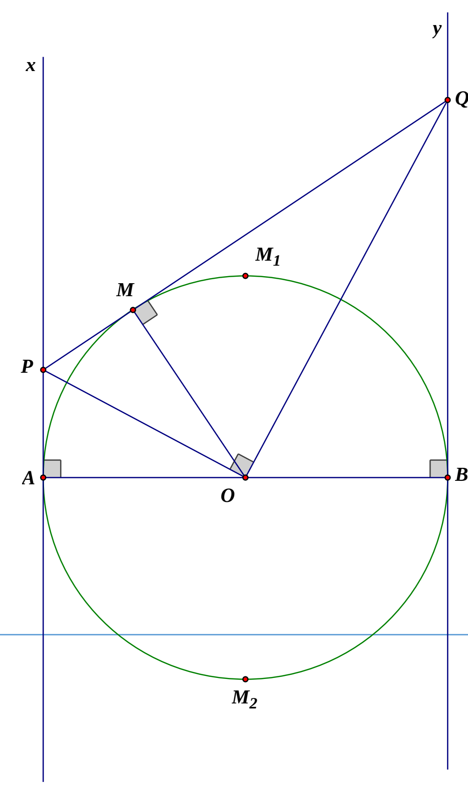
AA' là đường kính đường tròn tâm O nên A' cố định $\Rightarrow BA'$ cố định. Vậy G cố định.

Mà $\widehat{AFG} = 90^o \Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AG cố định (đpcm).

Câu 14. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. M là một điểm trên đường tròn $(M$ khác $A, B)$. Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q.

5. Chứng minh rằng: Tứ giác $APMO$ nội tiếp.
6. Chứng minh rằng: $AP + BQ = PQ$.
7. Chứng minh rằng: $AP.BQ = AO^2$.
8. Khi điểm M di động trên đường tròn (O), tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tứ giác $APQB$ nhỏ nhất.

Giải:



1. Xét tứ giác $APMQ$, ta có $\widehat{OAP} = \widehat{OMP} = 90^o$ (vì PA, PM là tiếp tuyến của (O))

Vậy tứ giác $APMO$ nội tiếp.

2. Ta có: $AP = MP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$BQ = MQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$\Rightarrow AP + BQ = MP + MQ = PQ\,(Đpcm)$.

3. Ta có OP là phân giác $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

OQ là phân giác $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

Mà $\widehat{AOM}+\widehat{BOM}=180^o$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{POQ}=90^o$

Xét ΔPOQ có: $\widehat{POQ}=90^o$ (cmt)

$OM\perp PQ$ (PQ là tiếp tuyến của (O) tại M)

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔPOQ vuông tại O có đường cao OM

$\Rightarrow MP.MQ=OM^2$ (hệ thức lượng)

Lại có $MP=AP; MQ=BQ$ (cmt); $OM=OA$ (bán kính)

Do đó $AP.BQ=AO^2\left(Đpcm\right)$.

4. Tứ giác $APQB$ có: $AP//BQ\left(AP\perp AB; BQ\perp AB\right)$, nên tứ giác $APQB$ là hình thang vuông.

$$\Rightarrow S_{APQB}=\frac{\left(AP+BQ\right).AB}{2}=\frac{PQ.AB}{2}$$

Mà AB không đổi nên S_{APQB} đạt GTNN $\Leftrightarrow PQ$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow PQ=AB\Leftrightarrow PQ//AB\Leftrightarrow OM\perp AB$

$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

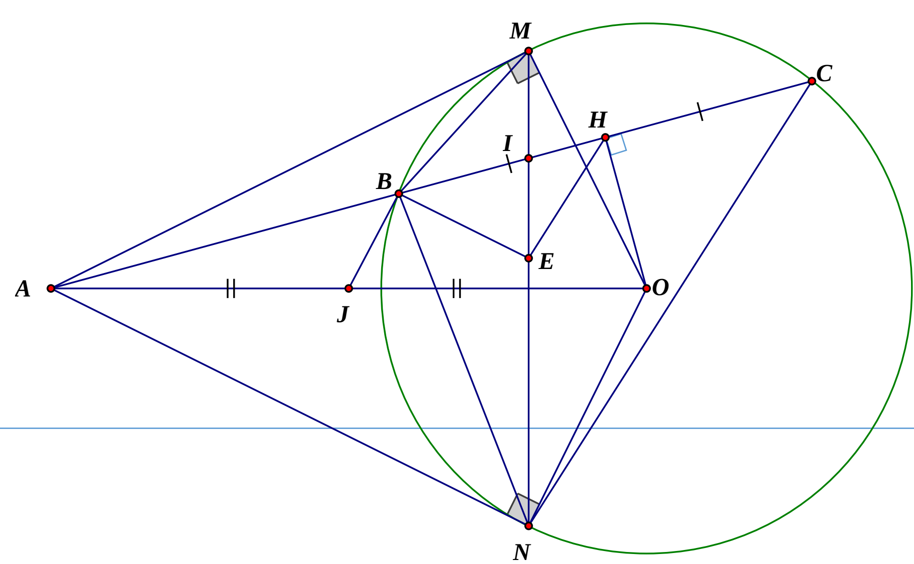
Tức M trùng M_1 hoặc M_2 thì S_{APQB} đạt GTNN là $\dfrac{AB^2}{2}$.

Câu 15. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với các đường tròn $(O)\left(M,N\in(O)\right)$. Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B,C phân biệt (B nằm giữa A,C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

4. Chứng minh tứ giác $ANHM$ nội tiếp được trong đường tròn.
5. Chứng minh $AN^2=AB.AC$.
6. Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh $EH//NC$.

Giải:

1. Vì AN, AM là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ANO}=\widehat{AMO}=9$



$\Rightarrow A; M; O; N \in$ đường tròn đường kính AO

Gọi J là trung điểm của AO

Vì H là trung điểm của BC nên $OH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHO} = 90^o$

$\Rightarrow H, O \in$ đường tròn đường kính AO

Suy ra A, O, M, N, H thuộc đường tròn tâm J đường kính AO

Suy ra $AMHN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2. Có $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung $\overset{\frown}{BN}$ và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BN}$)

Xét ΔANB và ΔACN có:

$\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$ (cmt)

$\widehat{BAN}$ chung

$\Rightarrow \Delta ANB \# \Delta ACN\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB.AC.$

3. Gọi I là giao điểm của MN và AC

Ta có MN là trục đẳng phương của đường tròn (J) và (O).

$I \in MN$ nên phương trình tích của I đối với (J) và (O) bằng nhau.

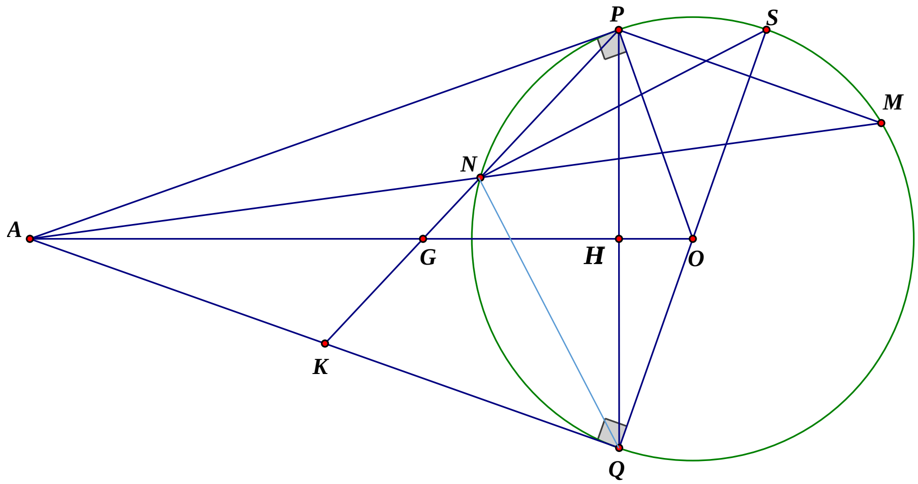
$\Rightarrow IA.IH = IB.IC \Rightarrow \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IH}{IC}$

Vì $BE // AN$ nên $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IE}{AN} \Rightarrow \dfrac{IE}{IN} = \dfrac{IH}{IC} \Rightarrow EH // NC.$

Câu 16. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn $(O; R)$ (P, Q là 2 tiếp điểm). Lấy M thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn $\left(O; R\right)$. Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

4. Chứng minh tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$
5. Kẻ đường kính QS của đường tròn $\left(O; R\right)$. Chứng minh NS là tia phân giác của $\widehat{PNM}$.
6. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK. Tính đội dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.

Giải:



1. Ta có: $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90^o$

Trong tứ giác $APOQ$ có tổng hai góc đối bằng 180^0

Suy ra tứ giác $APOQ$ nội tiếp đường tròn

$PM // AQ \Rightarrow \widehat{PMN} = \widehat{KAN}$ (so le trong)

Mà $\widehat{PMN} = \widehat{APK}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung $\overparen{PN}$ và góc nội tiếp chắn $\overparen{PN}$)

$\Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{APK}$

Xét ΔKAN và ΔKPA có:

$\widehat{K}$ chung

$\widehat{KAN} = \widehat{KPA}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta KAN \# \Delta KPA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KP} = \dfrac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP(Đpcm)$.

2. Ta có: $AQ \perp QS$ (AQ là tiếp tuyến của (O) ở Q)

Mà $PM // AQ$ (giả thiết) nên $PM \perp QS$

Đường kính $QS \perp PM$ nên QS đi qua điểm chính giữa $\overparen{PM}$ nhỏ

$sđ\,\overparen{PS} = sđ\,\overparen{SM} \Rightarrow \widehat{PNS} = \widehat{SNM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Hay NS là tia phân giác $\widehat{PNM}$ $(Đpcm)$.

3. Gọi H là giao điểm của PQ và AO

$\Rightarrow AH \perp PQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOQ ta có:

$OQ^2 = OH.OA \Rightarrow OH = \dfrac{OQ^2}{OA} = \dfrac{R^2}{3R} = \dfrac{1}{3}R$

$\Rightarrow AH = OA - OH = 3R - \dfrac{1}{3}R = \dfrac{8}{3}R$

$\widehat{KPQ} = \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{NQ}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{NQ}$)

$\widehat{NQK} = \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{NQ}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung $\overset{\frown}{NQ}$)

$\Rightarrow \widehat{NQK} = \widehat{KPQ}$

Xét ΔKNQ và ΔKQP có:

$\widehat{NQK} = \widehat{KPQ}$ (cmt)

$\widehat{K}$ chung

$\Rightarrow \Delta KNQ \# \Delta KQP\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{KN}{KQ} = \dfrac{KQ}{KP} \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$

Mà $AK^2 = NK.KP$ nên $AK = KQ$

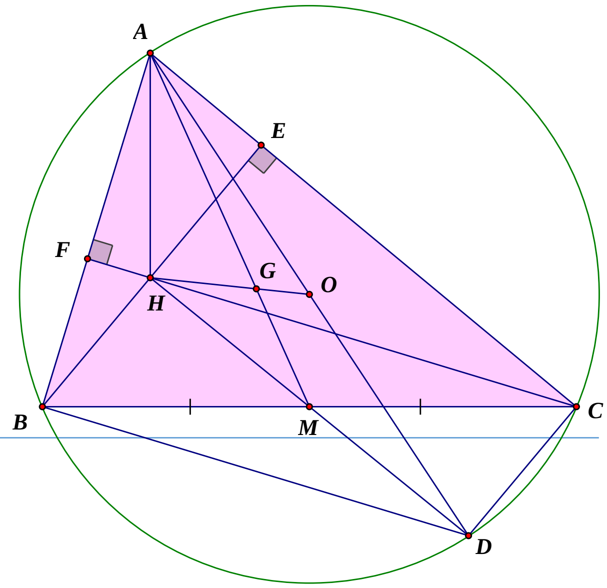
Vậy ΔAPQ có các trung tuyến AH và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm

$\Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{8}{3}R = \dfrac{16}{9}R.$

Câu 17. Cho tam giác ABC nhọn $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tia AO cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại D.

4. Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn;
5. Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;
6. Gọi M là trung điểm của BC, tia AM cắt HO tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác BAC.

Giải:



1. Xét tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$ (cùng nhìn cạnh BC)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có: $\widehat{ACD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow DC \perp AC$

Mà $HE \perp AC$; suy ra $BH // DC$ (1)

Chứng minh tương tự: $CH // BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BDCD$ là hình bình hành.

3. Ta có M là trung điểm của BC suy ra M trung điểm HD.

Do đó AM, HO là các đường trung tuyến của $\Delta AHD \Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔAHD

$\Rightarrow \dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3}$

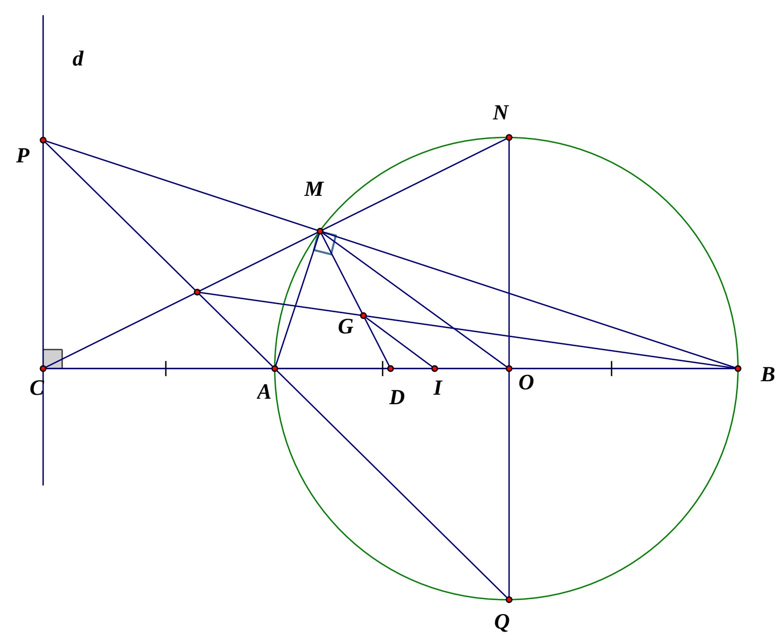
Xét tam giác ABC có M trung điểm của BC và $\dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3}$

Suy ra G là trọng tâm của ΔABC.

Câu 18. Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho $AC = R$. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. Lấy điểm M bất kì trên (O) không trùng với A, B. Tia BM cắt đường thẳng d tại P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

5. Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp;
6. Tính $BM.BP$ theo R.
7. Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song;
8. Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên (O).

Giải:



1. Ta có AB là đường kính của $(O), M \in (O) \Rightarrow \widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^o \Rightarrow \widehat{AMP} = 90^o$.

Mặt khác

$\widehat{ACP} = 90^o\,(gt) \Rightarrow \widehat{AMP} + \widehat{ACP} = 180^o$

mà hai góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $ACPM$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔBAM và ΔBPC có:

$\widehat{AMB} = \widehat{BCP} = 90^o$

$\widehat{MBA}$ chung

$\Rightarrow \Delta BAM \# \Delta BPC\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BA}{BP}$

$\Rightarrow BM.BP = BA.BC = 2R.3R = 6R^2$.

3. Ta có:

$AMNQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MNQ} = \widehat{PAM}$ (góc trong tại một đỉnh và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (1)

$AMPC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PCM} = \widehat{PAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{PM}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MNQ} = \widehat{PCM}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow PC//NQ$.

4. Gọi D là trung điểm của $BC \Rightarrow D$ là điểm cố định

Qua G kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại I

G là trọng tâm ΔBCM nên $G \in MD$ và $MG = \dfrac{2}{3}MD$ (tính chất trọng tâm trong tam giác)

Do $GI//MO$

Áp dụng định lý Ta-lét cho ΔDMO ta có $I \in DO$ và $\dfrac{OI}{OD} = \dfrac{MG}{MD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow OI = \dfrac{2}{3}OD$

Mà O, D là hai điểm cố định nên I cố định

Do $GI//MO$ nên theo định lý Ta-lét ta có: $\dfrac{GI}{MO} = \dfrac{DG}{DM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IG = \dfrac{1}{3}MO = \dfrac{R}{3}$

$\Rightarrow G$ luôn cách điểm I cố định một khoảng $\dfrac{R}{3}$ không đổi.

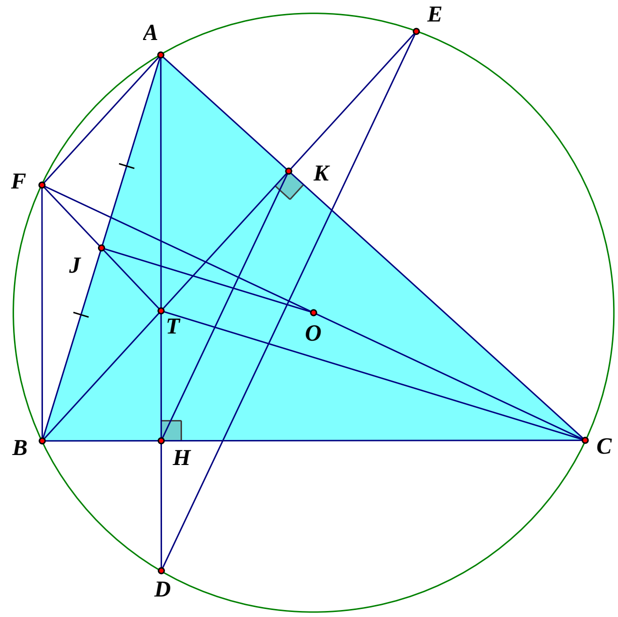
$\Rightarrow$ Khi M di động, điểm G luôn nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\dfrac{R}{3}$.

Câu 19. Cho ΔABC có ba góc nội tiếp đường tròn (O), bán kính R. Hạ đường cao AH, BK của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E.

4. Chứng minh tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
5. Chứng minh. $HK//DE$.
6. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Giải:

1. Tứ giác $ABHK$ có $\widehat{AKB}=\widehat{AHB}=90^o$, mà hai góc cùng nhìn cạnh AB



Suy ra tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

2. Theo câu trên tứ giác $ABHK$ nội tiếp (J) với J là trung điểm của AB

Nên $\widehat{BAH}=\widehat{BKH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BH}$ của (J))

Mà $\widehat{BAH}=\widehat{BAD}$ (A, H, K thẳng hàng)

$\widehat{BAD}=\widehat{BED}$ (hai góc cùng chắn $\widehat{BD}$ của (O))

Suy ra $\widehat{BKH}=\widehat{BED}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HK//DE$.

3. Gọi T là giao điểm của hai đường cao AH và BK

Tứ giác $CHTK$ có $\widehat{CHT}=\widehat{CKT}=90^o$

Suy ra tứ giác $CHTK$ nội tiếp đường tròn đường kính CT

Do đó CT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔCHK (*)

Gọi F là giao điểm của CO với (O) hay CF là đường kính của (O)

Ta có: $\widehat{CAF}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FA\perp CA$

Mà $BK\perp CA$ (gt)

Nên $BK//FA$ hay $BT//FA$ (1)

Ta có: $\widehat{CBF}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FB\perp CB$

Mà $AH\perp CB$ (gt)

Nên $AH//FB$ hay $AT//FB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AFBT$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song)

Do J là trung điểm của đường chéo AB

Nên J cũng là trung điểm của đường chéo FT (tính chất đường chéo hình bình hành)

Xét ΔCTF có O là trung điểm của FC, J là trung điểm của FT

Nên OJ là đường trung bình của ΔCTF

$\Rightarrow OJ=\dfrac{1}{2}CT$ (**)

Từ (*) và (**) ta có độ dài của OJ bằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK

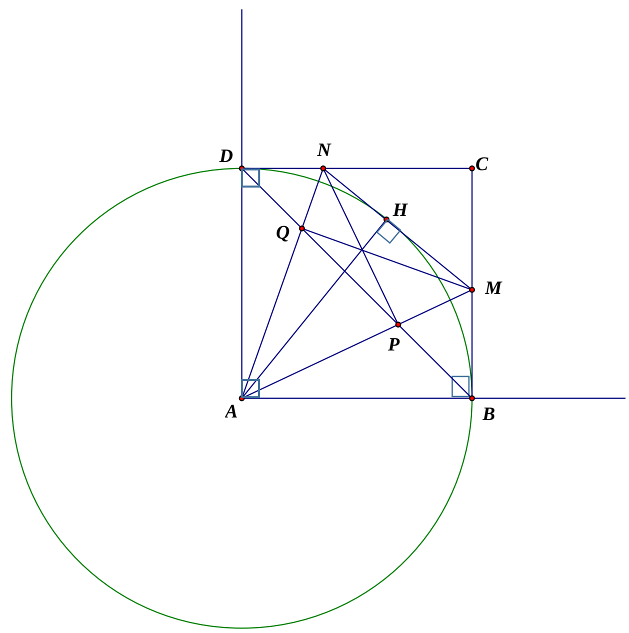
Mà độ dài của OJ là khoảng cách từ tâm O đến dây AB (J là trung điểm của dây AB)

Do (O) và dây AB cố định nên độ dài OJ không đổi.

Vậy độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Câu 20. Cho $\widehat{xAy} = 90^o$, vẽ đường tròn tâm A bán kính R. Đường tròn này cắt Ax, Ay thứ tự tại B và D. Các tiếp tuyến với đường tròn (A) kẻ từ B và D cắt nhau tại C.

4. Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Chứng minh?
5. Trên BC lấy điểm M tùy ý (M khác B và C) kẻ tiếp tuyến MH với đường tròn (A), (H là tiếp điểm). MH cắt CD tại N. Chứng minh rằng $\widehat{MAN} = 45^0$.
6. $P; Q$ thứ tự là giao điểm của $AM; AN$ với BD. Chứng minh rằng $MQ; NP$ là các đường cao của ΔAMN.



Giải:

1. Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$\widehat{CBA} = \widehat{ADC} = 90^o$

Xét tứ giác $ABCD$ có:

$$\begin{cases} \widehat{BAD} = 90^o \\ \widehat{CBA} = \widehat{ADC} = 90^o\,(cmt) \end{cases}$$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Ta có $AB = AC = R$ nên $ABCD$ là hình vuông.

2. Xét ΔADN vuông và ΔAHN vuông có:

$$\begin{cases} AN\ chung \\ AD = AH = R \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ADN = \Delta AHN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{HAN}$

Tương tự: $\widehat{DAN} + \widehat{HAN} + \widehat{HAM} + \widehat{BAM} = \widehat{xAy} = 90^o$

$\Rightarrow 2.\widehat{HAN} + 2.\widehat{HAM} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{HAN} + \widehat{HAM} = 45^o$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = 45^o$.

3. Xét ΔBCD vuông có: $BC = CD = R$

$\Rightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại $C \Rightarrow \widehat{CBD} = 45^o$

Ta có A, B là hai đỉnh cùng nhìn QM một góc 45^o

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABMQ$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AQM} + \widehat{ABM} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{AQM} = 180^o - \widehat{ABM} = 180^o - 90^o = 90^o$

$\Rightarrow MQ \perp AN \Rightarrow MQ$ là đường cao của ΔAMN (đpcm)

Tương tự $ADNP$ là tứ giác nội tiếp

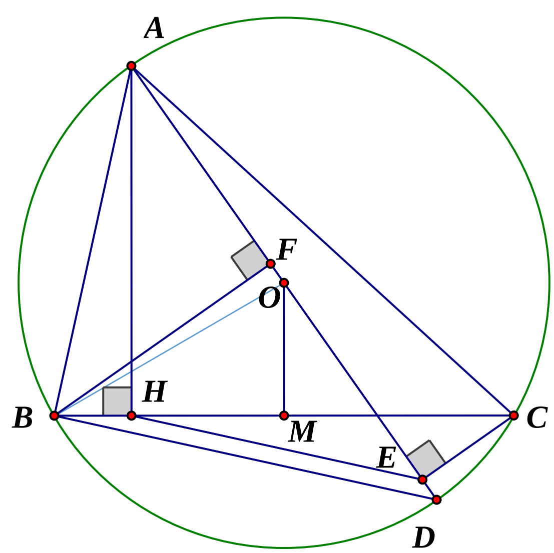
$\Rightarrow NP \perp AM \Rightarrow NP$ là đường cao trong ΔAMN

Vậy MQ, NP là các đường cao trong ΔAMN (đpcm)

Câu 21. Cho $\Delta ABC\left(AB < AC\right)$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$. Vẽ đường cao AH của ΔABC, đường kính AD của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C và B xuống đường thẳng AD. M là trung điểm của BC.

4. Chứng minh các tứ giác $ABHF$ và $BMFO$ nội tiếp.
5. Chứng minh $HE//BD$.
6. Chứng minh $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích ΔABC).

Giải:



1. Theo đề bài ta có: $\widehat{AHB} = \widehat{BFA} = 90^o$ mà 2 góc cùng nhìn cạnh AB

Vậy tứ giác $ABHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

Có M là trung điểm là BC mà BC là dây cung nên $OM \perp BC$

Khi đó $\widehat{BFO} = \widehat{BMO} = 90^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

Vậy tứ giác $BMOF$ nội tiếp đường tròn đường kính OB.

2. Theo đề bài: $\widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90^o \Rightarrow ACEH$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{CHE} = \widehat{CAE} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$)

Lại có: $\widehat{CAE} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

Nên $\widehat{CHE} = \widehat{CBD}$ mà chúng ở vị trí đồng vị suy ra: $HE//BD$.

3. Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}BC.AB.\sin\widehat{ABC}\left(AH = AB.\sin\widehat{ABC}\right)$

Mặt khác trong ΔABC có: $\widehat{ABD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $AB = AD.\sin\widehat{ADB} = 2R\sin\widehat{ACB}$ ($\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ vì hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Tương tự ta có: $\begin{cases} AC = 2R.\sin\widehat{ABC} \\ BC = 2R.\sin\widehat{BAC} \end{cases}$

Ta có: $AB.AC.BC = 8R^3.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{ABC}.\sin\widehat{BAC}$ (1)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AB.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.2R.\sin\widehat{BAC}.2R.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{CBA} = 2R^2.\sin\widehat{BAC}.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{CBA}(2)$$

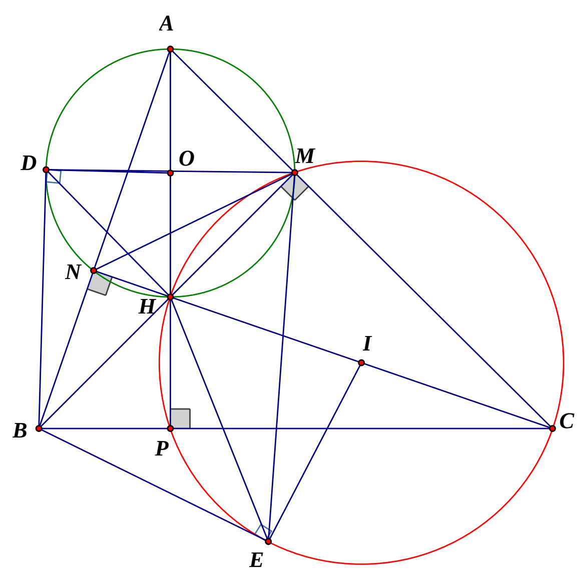
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{AB.BA.CA} = \dfrac{1}{4R}$

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$.

Câu 22. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ ba đường cao AP, BM, CN của ΔABC cắt nhau tại H.

5. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp.
6. Chứng minh $\Delta ANM \backsim \Delta ACB$.
7. Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.
8. Giả sử $AB = 4$cm; $AC = 5$cm; $BC = 6$cm. Tính MN.

Giải:



1. Ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^o$

Mà hai đỉnh M, N cùng nhìn BC

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔANM và ΔACB có:

$\hat{A}$ chung

$\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BNM}$)

Suy ra $\Rightarrow \Delta ANM\ \#\ \Delta ACB$ (g.g).

3. Gọi O là tâm đường tròn đường kính AH

Gọi I là tâm đường tròn đườn kính CH

Xét ΔBDH và ΔBMD có:

$\widehat{B}$ chung

$\widehat{BDH} = \widehat{BMD}$ (cùng phụ với $\widehat{MDH}$)

Suy ra: $\Delta BDH \# \Delta BMD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BM} = \dfrac{BH}{BD} \Rightarrow BD^2 = BM.BH \quad (1)$

Ta có: $\widehat{EMC} = \widehat{EHC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$)

Mà $\widehat{HME} + \widehat{EMC} = 90^o$ (gt) $\Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{EHI} = 90^o$

Lại có $\widehat{IHE} = \widehat{HEI}$ do ΔHIE cân tại I

$\Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{HEI} = 90^o$

Xét ΔBHE và ΔBEM có:

$\widehat{HBE}$ chung

$\widehat{BEH} = \widehat{BME}$ (cùng phụ với $\widehat{HEI}$)

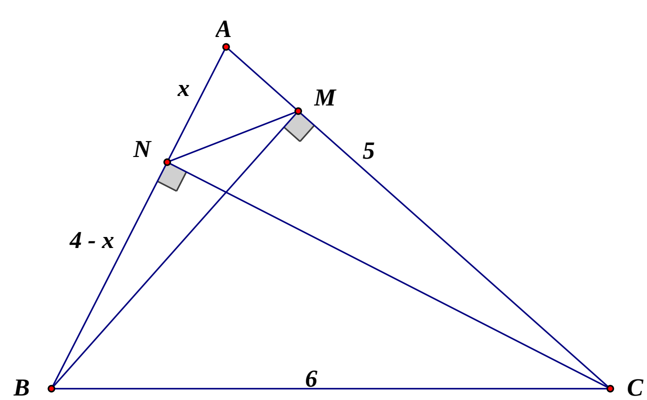
Suy ra: $\Delta BHE \# \Delta BEM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BE} = \dfrac{BE}{BM} \Rightarrow BE^2 = BM.BH \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $BE = BD$.

4. Đặt $AN = x$; $NB = 4 - x \left(0 < x < 4\right)$

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có:



$CN^2 = AC^2 - AN^2$

Mà $CN^2 = BC^2 - BN^2$

$\Rightarrow AC^2 - AN^2 = BC^2 - BN^2$

$\Leftrightarrow 5^2 - x^2 = 6^2 - \left(4 - x\right)^2$

$\Leftrightarrow 25 - x^2 = 36 - 16 + 8x - x^2$

$\Leftrightarrow 25 - 36 + 16 = 8x$

$\Leftrightarrow 8x = 5$

$\Leftrightarrow x = 0,625$

Vậy $AN = 0,625$

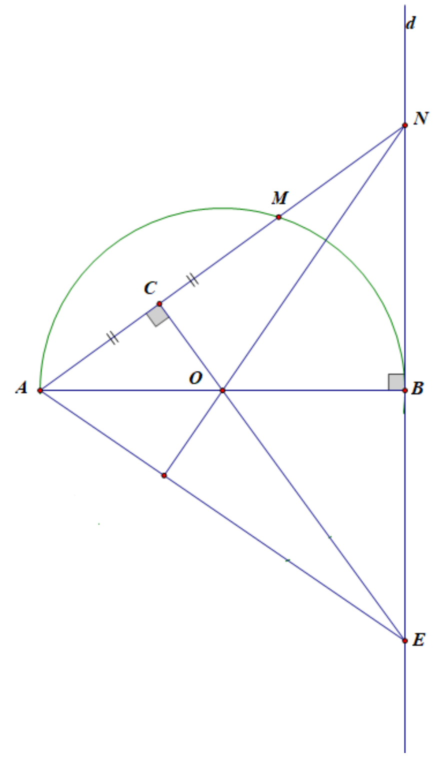
Lại có: $\Delta ANM \# \Delta ACB$ (cmt)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

$\Rightarrow MN = \dfrac{AN.BC}{AC} = \dfrac{0,625.6}{5} = 0,75$ (cm).

Câu 23. Cho nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B. Tia AM cắt d tại điểm N. Đường thẳng OC cắt d tại E.

5. Chứng minh: tứ giác $OCNB$ nội tiếp.
6. Chứng minh: $AC.AN = AO.AB$.
7. Chứng minh: NO vuông góc với AE.
8. Tìm vị trí điểm M sao cho $(2.AM + AN)$ nhỏ nhất.



Giải:

1. Theo tính chất dây cung ta có:

$OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OCN} = 90^o$

BN là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow OB \perp BN \Rightarrow \widehat{OBN} = 90^o$

Xét tứ giác $OCNB$ có tổng góc đối:

$\widehat{OCN} + \widehat{OBN} = 90^o + 90^o = 180^o$

Do đó tứ giác $OCNB$ nội tiếp.

2. Xét ΔACO và ΔABN có:

$\widehat{CAO}$ chung

$\widehat{ACO} = \widehat{ABN} = 90^o$

Suy ra $\Rightarrow \Delta ACO \# \Delta ABN (g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AO}{AN}$

Do đó: $AC.AN = AO.AB$ (đpcm).

1. Theo chứng minh trên ta có:

$OC \perp AM \Rightarrow EC \perp AN \Rightarrow EC$ là đường cao của ΔANE (1)

$OB \perp BN \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow AB$ là đường cao của ΔAME (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O$ là trực tâm của ΔANE (vì O là gia điểm của AB và EC)

$\Rightarrow NO$ là đường cao thứ ba của ΔANE

Suy ra $NO \perp AE$ (đpcm).

2. Ta có: $2.AM + AN = 4AC + AN$ (vì C là trung điểm của AM)

$4AC.AN = 4AO.AB = 4R.2R = 8R^2$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$4AC + AN \geq 2\sqrt{2AC.AN} = 2.\sqrt{8R^2} = 4\sqrt{2}R$

Suy ra tổng $2.AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$ khi $4AC = AN$

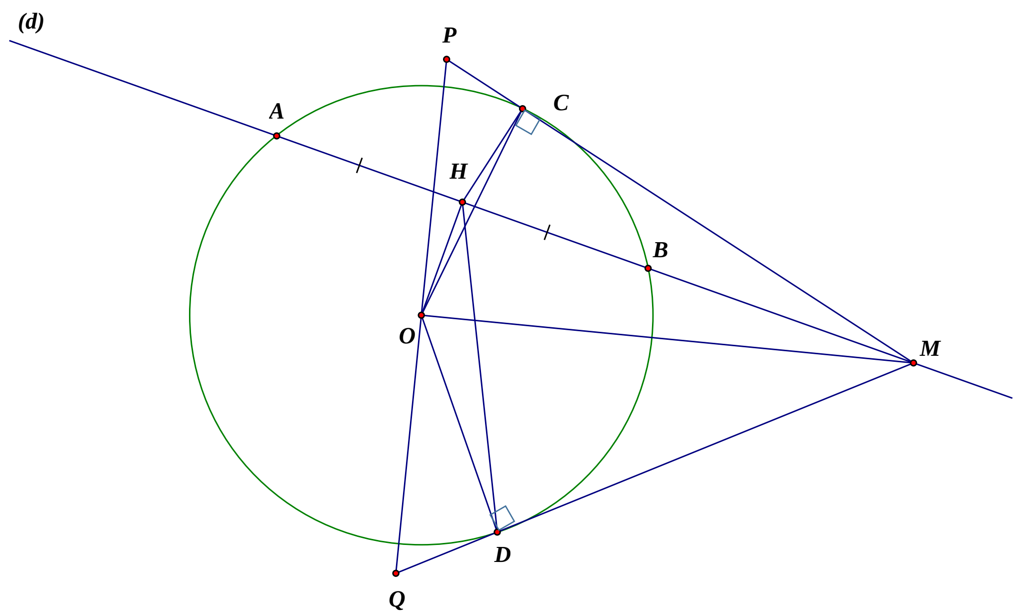
$\Rightarrow AN = 2AM \Rightarrow M$ là trung điểm của AN

Khi đó ΔABN vuông tại B có BM là đường trung tuyến nên $AM = MB \Rightarrow AM = BM$

Vậy với M là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB thì $2AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$.

Câu 24. Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường thẳng (d) không đi qua O, cắt đường tròn (O) tại 2 điểm A, B. Lấy điểm M bất kỳ trên tia đối BA, qua M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm).

4. Chứng minh tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.
5. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh HM là phân giác của $\widehat{CHD}$.
6. Đường thẳng đi qua O và vuông góc với MO cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ nhỏ nhất.



Giải:

1. Xét tứ giác $MCOD$ có:

$MC \perp OD \Rightarrow \widehat{OCM} = 90^o$; $MD \perp OD \Rightarrow \widehat{ODM} = 90^o$

Suy ra tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.

2. Ta có H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow \widehat{MHO} = 90^o \Rightarrow H$ thuộc đường kính MO

$\Rightarrow$ 5 điểm $D; M; C; H; O$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{DOM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

$\widehat{CHM} = \widehat{COM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Lại có $\widehat{DOM} = \widehat{COM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{CHM} \Rightarrow HM$ là phân giác $\widehat{CHD}$.

3. Ta có: $S_{MPQ} = 2S_{MOP} = OC.MP = R.(MC + CP) \geq 2R\sqrt{CM.CP}$

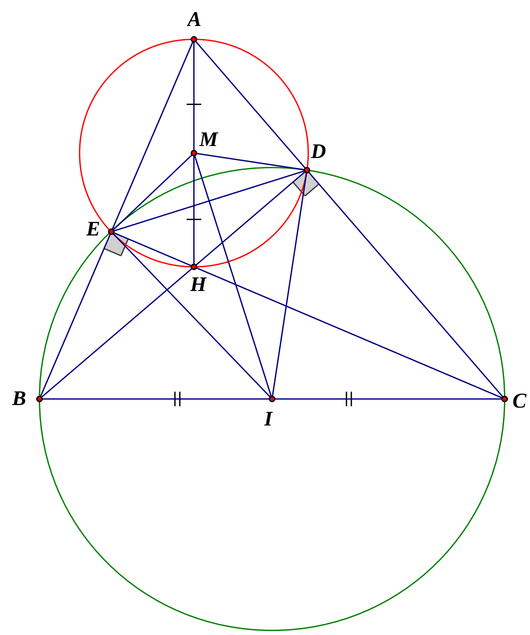
Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông *OMP* ta có:

$CM.CP = OC^2 = R^2$ không đổi $\Rightarrow S_{MPQ} \geq 2R^2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow CM = CP = R\sqrt{2}$. Khi đó *M* là giao điểm *(d)* với đường tròn tâm *O* bán kính $R\sqrt{2}$.

Vậy *M* là giao điểm của *(d)* với đường tròn tâm *O* bán kính $R\sqrt{2}$ thì diện tích ΔMRT nhỏ nhất.

Câu 25. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC; E thuộc AB).



3. Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn;
4. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AH và BC. Chứng minh MI vuông góc với ED.

Giải:

1. Tứ giác *ADHE* có: $AD \perp DH\ (gt)$; $AE \perp EH\ (gt)$

Nên $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^o$

Do đó: $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối diện

Vậy tứ giác *ADHE* nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác *BEDC* có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^o$ (gt) nên cùng nội tiếp đường tròn tâm *I* đường kính *BC* (1)

Tương tự: Tứ giác *ADHE* nội tiếp đường tròn tâm *M* đường kính *AH* và *E, D* là giao điểm của *I* và đường tròn

Dễ dàng chứng minh $\Delta EMI = \Delta DMI\ (c.c.c)$

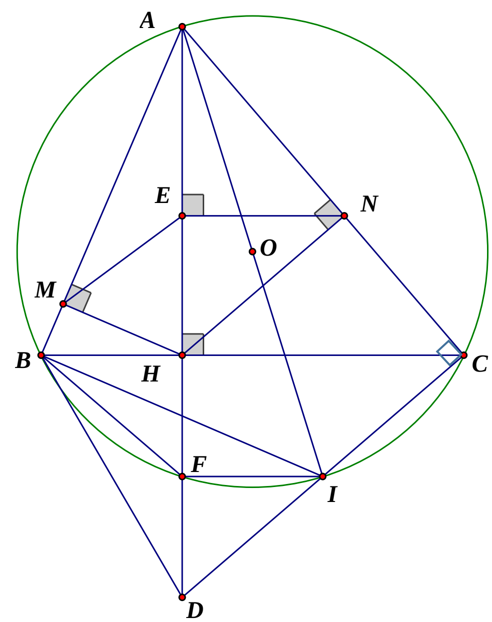
$\Rightarrow MI$ là phân giác $\widehat{DME}$

Mà ΔDMI cân tại $M\ (MD = ME)$

$\Rightarrow MI \perp DE\ (Đpcm)$.

Câu 26. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm *O*, kẻ đường cao AH. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Kẻ NE vuông góc với AH. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D. Tia AH cắt đường tròn tại F .

4. Chứng minh $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=\widehat{BIC}$ và tứ giác $DENC$ nội tiếp được trong một đường tròn.
5. Chứng minh hệ thức $AM.AB=AN.AC$ và tứ giác $BFIC$ là hình thang cân.
6. Chứng minh: tứ giác $BMED$ nội tiếp được trong một đường tròn.



Giải:

1. Vì $ABIC$ là tứ giác nội tiếp nên:

$\widehat{ABC}=\widehat{AIC};\widehat{ACB}=\widehat{AIB}$

$\Rightarrow \widehat{ABC}+\widehat{ACB}=\widehat{AIC}+\widehat{AIB}=\widehat{BIC}$

Vì $NE\perp AD; NC\perp CD$ nên s $\widehat{NED}=\widehat{NCD}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{NED}+\widehat{NCD}=180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $DENC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AHB và AHC có:

$AM.AB=AH^2; AN.AC=AH^2\Rightarrow AM.AB=AN.AC$

Có $\widehat{IAC}=90^o-\widehat{AIC};\ \widehat{BAF}=90^o-\widehat{ABH};\ \widehat{AIC}=\widehat{ABH}\Rightarrow \widehat{IAC}=\widehat{BAF}$

Suy ra số đo hai cung IC và BF bằng nhau $\Rightarrow IC=BF$

Mặt khác vì $ABFI$ và $ABIC$ nội tiếp nên $\widehat{BAF}=\widehat{BIF};\ \widehat{IAC}=\widehat{IBC};\ \widehat{BIF}=\widehat{IBC}$

Suy ra $IF//BC\Rightarrow BCIF$ là hình thang

Vì $\widehat{BAF}=\widehat{CAI}\Rightarrow \widehat{BAI}=\widehat{CAF}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{FC}=\overset{\frown}{BI}\Rightarrow FC=BI$

Hình thang $BCIF$ có $FC=BI\Rightarrow BCIF$ là hình thang cân.

3. Có $\Delta AEN\# AGD\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AN}{AD}\Rightarrow AE.AD=AN.AC=AM.AB\Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AM}{AD}$

Xét ΔAME và ΔADB có:

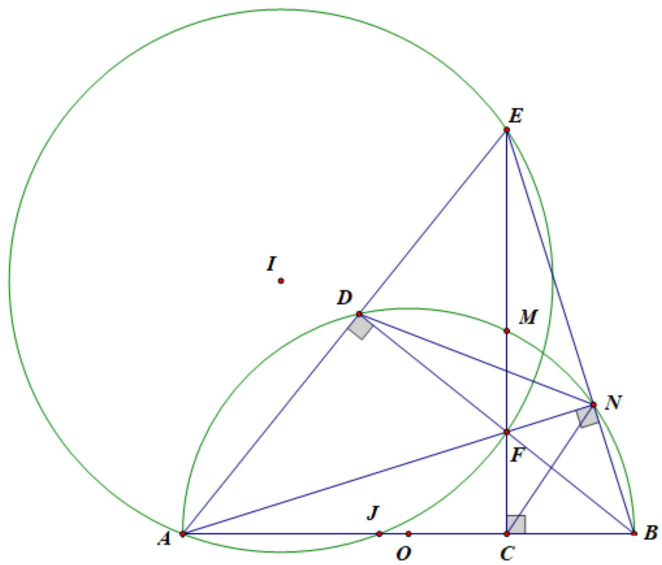
$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AM}{AD}$ (cmt); $\widehat{MAE}$ chung

Suy ra $\Delta AME\# ADB\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{BME} + \widehat{ADB} = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối diện

Suy ra $BMED$ nội tiếp đường tròn.

Câu 27. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).



4. Chứng minh: $AD.AE = AC.AB$.
5. Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp ΔCDN.
6. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB.

Giải:

1. Có $\widehat{ADB} = \widehat{ANB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔADB và ΔACE có:

$\widehat{ADB} = \widehat{ACE} = 90^o$

$\widehat{EAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ADB \# \Delta ACE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AC.AB\ (Đpcm)$

2. Có $AN \perp EB;\ EC \perp AB,\ EC$ giao AN tại F nên F là trực tâm của $\Delta AEB \Rightarrow BF \perp EA$

Mà $BD \perp EA \Rightarrow B, D, F$ thẳng hàng

Tứ giác $ADFC$ có hai góc đối bằng 90^o nên tứ giác $ADFC$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{DCF} = \widehat{DAF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DF}$)

Tương tự ta có: $\widehat{NCF} = \widehat{NBF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{NF}$)

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{NBF}$ (cùng phụ với $\widehat{AEB}$) $\Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{NCF}$

Suy ra CF là phân giác $\widehat{DCN}$

Tương tự cũng có DF là phân giác $\widehat{NDC}$

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp ΔDCN

2. Gọi J là giao điểm của (I) với đoạn AB

Có $\widehat{FAC} = \widehat{CEB} = 90^o - \widehat{ABE} \Rightarrow \Delta FAC \# \Delta BEC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{AC}{EC} \Rightarrow CF.CE = BC.AC \qquad (1)$

Vì $AEFJ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FJC} = \widehat{FEA} = 180^o - \widehat{AJF}$

$\Rightarrow \Delta CFJ \# \Delta CAE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CJ}{CE} \Rightarrow CF.CE = CA.CJ \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BC.AC = CA.CJ \Rightarrow BC = CJ \Rightarrow C$ là trung điểm của BJ (vì $J \neq B$)

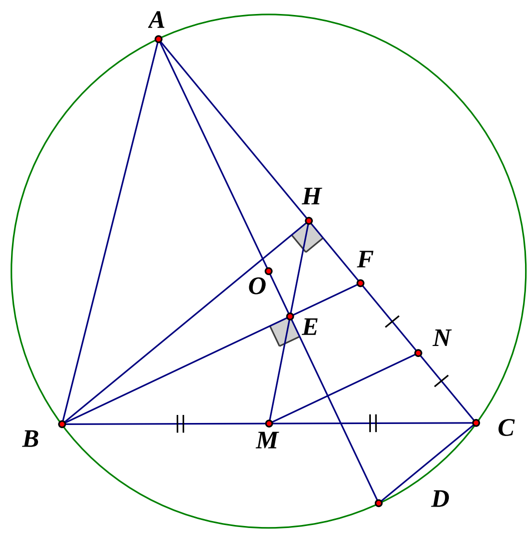
Suy ra J là điểm cố định

Có $IA = IJ$ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ là đường thẳng cố định.

Câu 28. Cho ΔABC nhọn $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp (O), vẽ đường kính AD. Đường thẳng đi qua B vuông góc với AD tại E và cắt AC tại F. Gọi H là hình chiếu của B trên AC và M là trung điểm của BC.

4. Chứng minh $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.
5. Chứng minh $\widehat{MHC} + \widehat{BAD} = 90^o$.
6. Chứng minh $\dfrac{HC}{HF} + 1 = \dfrac{BC}{HE}$.

Giải:



1. Có $\widehat{ACD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì $BE \perp AD$ nên $\widehat{FED} = 90^o \Rightarrow \widehat{FED} + \widehat{FCD} = 180^o$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Vì M là trung điểm cạnh huyền BC của tam giác vuông BHC nên

$MH = MC = MB \Rightarrow \Delta MHC$ cân tại M (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MCH}$

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên:

$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{MHC} = \widehat{BCD} + \widehat{MCH} = \widehat{DCH} = 90^o$.

3. Vì $BE \perp AE, BH \perp AH$ nên $\widehat{BEA} = \widehat{BHA} = 90^o \Rightarrow ABEH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BHE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Mà theo ý 2 ta có: $\widehat{BAE} = 90^o - \widehat{MHC} = \widehat{BHM} \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BHM}$

Suy ra H, E, M thẳng hàng.

Gọi N là trung điểm của FC.

$\Rightarrow NM$ là đường trung bình của ΔBFC

$\Rightarrow MN // BF$ nên ta có:

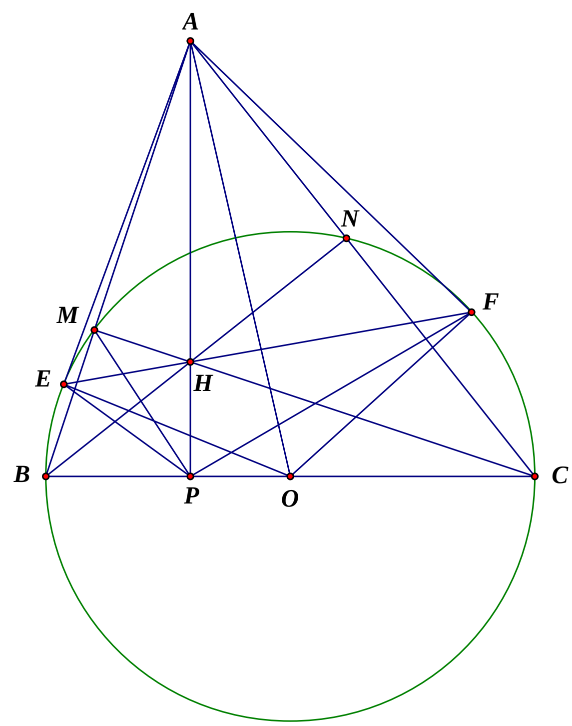
$\dfrac{BC}{HE} = \dfrac{2HM}{HE} = \dfrac{2HN}{HF} = \dfrac{2(HF + FN)}{HF} = \dfrac{2HF + FC}{HF} = \dfrac{HF + HC}{HF} = 1 + \dfrac{HC}{HF}$ (đpcm).

Câu 29. Cho ΔABC nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm $M, N \left(M \neq B, N \neq C\right)$. Gọi H là giao điểm của BN và CM; P là giao điểm của AH và BC.

5. Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

6. Chứng minh $BM.BA = BP.BC$.
7. Trong trường hợp đặc biệt khi ΔABC đều cạnh bằng $2a$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ theo a.
8. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AE và AF của đường tròn tâm O đường kính BC (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Giải:



1. Ta có: $\widehat{AMH} = 90^o$; $\widehat{ANH} = 90^o$ nên M và N cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $AMPC$ có $\widehat{APC} = 90^0$ (do H là trực tâm của ΔABC) và $\widehat{AMC} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta BMC \# \ \Delta BPA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BP} = \dfrac{BC}{BA}\cdot$ Từ đó suy ra $BM.BA = BP.BC$.

3. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ có đường kính AH

ΔABC đều nên trực tâm H cũng là trọng tâm

$\Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}\cdot AP = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ bằng:

$\pi.AH = \dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$

Vậy chu vi đường tròn ngoại tiếp tức giác $AMHN$ bằng $\dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$.

4. Ta có: $AH.AP = AM.AB = AE^2 \Rightarrow \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{AP}$

Xét ΔAHE và ΔAEP có:

$\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{AP}$ (cmt); $\widehat{EAP}$ chung

Nên $\Delta AHE \# \ \Delta AEP$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{AEP}$ (1)

Tương tự ta có: $\widehat{AHF} = \widehat{AFP}$ (2)

Mặt khác: Tứ giác $AFOP$ và $AEOF$ nội tiếp đường tròn đường kính AO nên năm điểm A, E, P, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp đường tròn nên: $\widehat{AEP}+\widehat{AFP}=180^o$ (3)

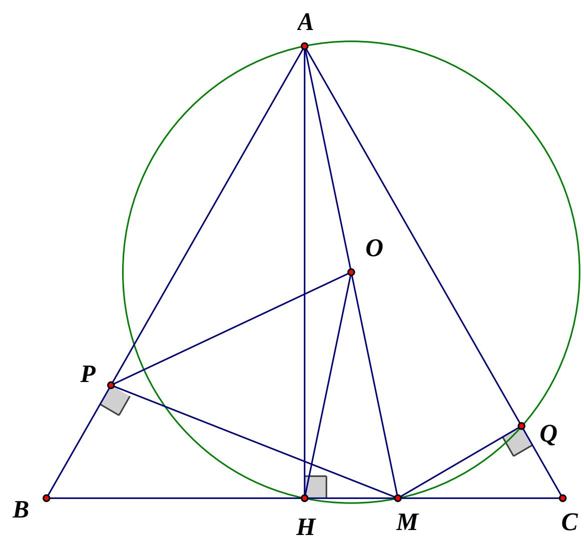
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{AHE}+\widehat{AHF}=\widehat{AEP}+\widehat{AFP}=180^o \Rightarrow \widehat{EHF}=180^o$

Vậy ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Câu 30. Cho ΔABC đều có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B, C, H). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC.

4. Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
5. Chứng minh $OH \perp PQ$.
6. Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Giải:



1. Xét tứ giác $APMQ$ có:

$\widehat{APM}=\widehat{AQM}=90^o$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{APM}+\widehat{AQM}=180^o \Rightarrow$ Tứ giác $APMQ$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AM

Gọi O là trung điểm của AM

$\Rightarrow$ tứ giác $APMQ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AM.

2. Ta có: $\widehat{AHM}=90^o$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AHM}$ nội tiếp chắn $\frac{1}{2}$ đường tròn đường kính AM

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{HPQ}=\widehat{HAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HQ}$)

$\widehat{HQP}=\widehat{HAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HP}$)

Mà $\widehat{HAC}=\widehat{HAB}$ (ΔABC đều nên AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác)

$\Rightarrow \widehat{HPQ}=\widehat{HQP} \Rightarrow \Delta HPQ$ cân tại $H \Rightarrow HP = HQ$ (1)

Mà $OP = OQ$ (do $P, Q \in (O)$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH$ là đường trung trực của $PQ \Rightarrow OH \perp PQ$.

1. $S_{MAC}=\frac{1}{2}MQ.AC=\frac{1}{2}MQ.BC$

Ta có: $S_{MAB}=\frac{1}{2}.MP.AB=\frac{1}{2}.MP.BC$ (do $AB = BC$)

$S_{MAC}=\frac{1}{2}MQ.AC=\frac{1}{2}MQ.BC$ (do $AC=BC$)

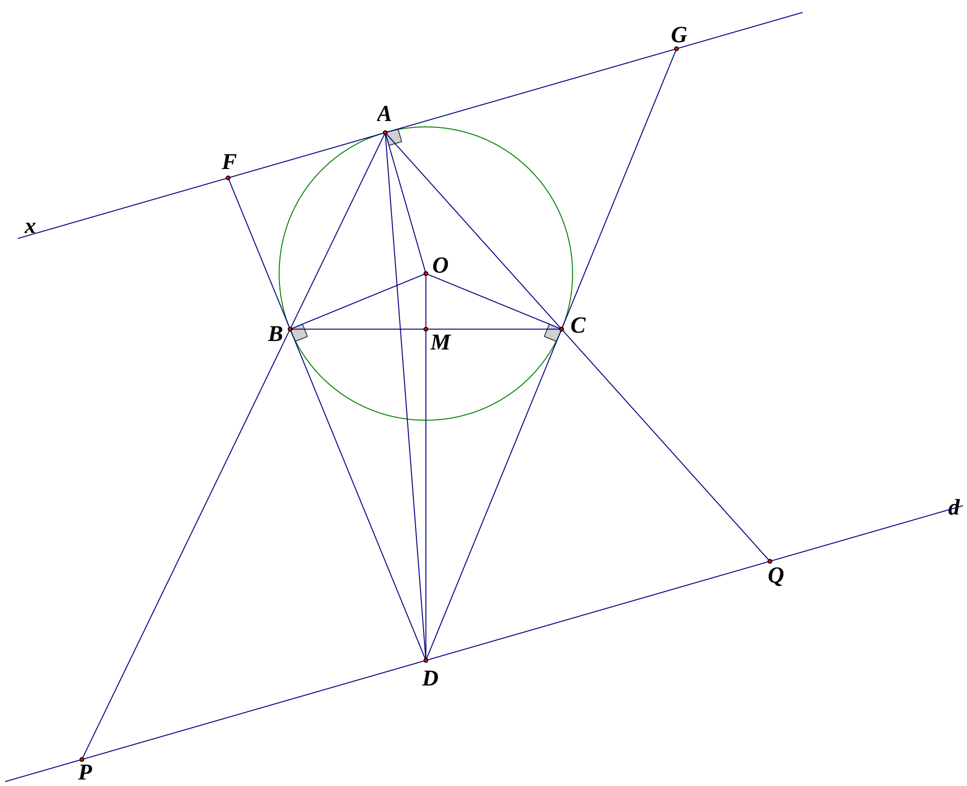
$S_{ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC$ (do $AC=BC$)

$S_{MAB}+S_{MAC}=S_{ABC}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.MP.BC+\frac{1}{2}.MQ.BC=\frac{1}{2}.AH.BC\Leftrightarrow MP+MQ=AH$ (đpcm).

Câu 31. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) có bán kính $R=3$cm. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại D.

5. Chứng minh tứ giác $OBDC$ nội tiếp đường tròn;
6. Gọi M là giao điểm của BC và OD. Biết $OD=5$(cm). Tính diện tích ΔBCD
7. Kẻ đường thẳng d đi qua D và song song với đường tiếp tuyến với (O) tại A, d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh $AB.AP=AQ.AC$.
8. Chứng minh $\widehat{PAD}=\widehat{MAC}$.

Giải:



1. Do DB, DC là các tiếp tuyến của $(O)\Rightarrow\widehat{OBD}=\widehat{OCD}=90^o$

$\Rightarrow\widehat{OBD}+\widehat{OCD}=90^o+90^o=180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $OBDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng định lý Pi-ta-go vào ΔOBD vuông tại B

$\Rightarrow DB = \sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(cm)$

Ta có: $OB = OC = R, BD = DC$ (2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow O; D$ thuộc trung trực $BC \Rightarrow OD$ là trung trực $BC \Rightarrow OD \perp BC$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔOBD vuông, ta có:

$$DM.DO = BD^2 \Rightarrow DM = \frac{BD^2}{DO} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5}(cm)$$

$$BM.OD = OB.BD \Rightarrow BM = \frac{OB.BD}{OD} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}(cm)$$

Vậy $S_{DBC} = \frac{1}{2}DM.BC = DM.BM = \frac{16}{5}.\frac{12}{5} = 7,68(cm^2)$

3. Ta có: $\widehat{APQ} = \widehat{BAx}$ (2 góc so le trong do $Ax // PQ$)

Mà $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và cung $\overset{\frown}{AB}$ và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ACB}$

Xét ΔABC và ΔAQP có:

$\widehat{PAQ}$ chung; $\widehat{APQ} = \widehat{ACB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \# \Delta AQP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow AB.AP = AC.AQ.$

4. Kéo dài BD cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại F

Ta có: $\widehat{DBP} = \widehat{ABF}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{ABF} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{ACB} = \widehat{APD}$ (do $\Delta ABC \# \Delta AQP$)

$\Rightarrow \widehat{DBP} = \widehat{APD} = \widehat{BPD} \Rightarrow \Delta DBP$ cân tại $D \Rightarrow DB = DP$

Tương tự kéo dàu DC cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại G

Ta chứng minh $\widehat{DCQ} = \widehat{ACG} = \widehat{ABC} = \widehat{DQC} \Rightarrow \Delta DCQ$ cân tại D

Lại có $DB = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow DP = DQ \Rightarrow D$ là trung điểm PQ

Ta có: $\Delta ABC \# \Delta AQP$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{2MC}{2PD} \Rightarrow \frac{AC}{AP} = \frac{MC}{PD}$

Xét ΔAMC và ΔADP có:

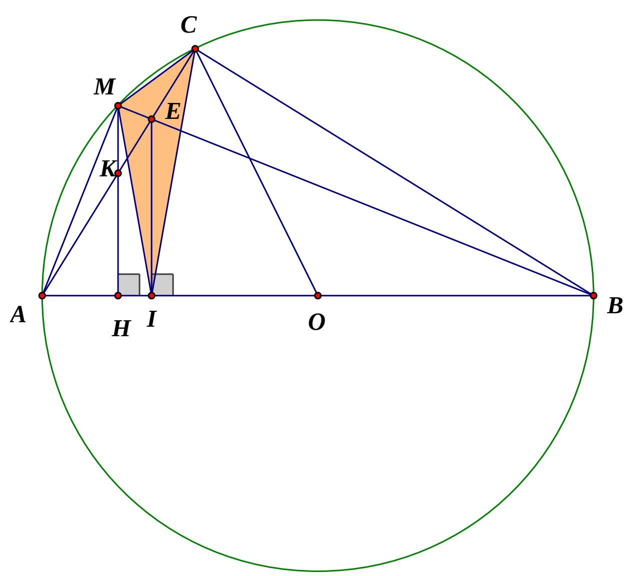
$\widehat{ACM} = \widehat{APD}$ ($\widehat{ACB} = \widehat{APQ}$ - cmt); $\frac{AC}{AP} = \frac{MC}{PD}$

$\Rightarrow \Delta AMC \# \Delta ADP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PAD} = \widehat{MAC}$ (đpcm).

Câu 32. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C cố định trên nửa đường tròn. Điểm M thuộc cung $AC\,(M \neq A; C)$. Hạ $MH \perp AB$ tại H. Nối MB cắt CA tại E. Hạ $EI \perp AB$ tại I. Gọi K là giao điểm của AC và MH. Chứng minh:

5. $BHKC$ và $AMEI$ là các tứ giác nội tiếp.
6. $AK.AC = AM^2$.
7. $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
8. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

1. Chứng minh tứ giác tứ giác $BHKC$ và $AMEI$ là tứ giác nội tiếp



$\widehat{AMB} = \widehat{KCB} = 90^o$ (2 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $BHKC$ có:

$\widehat{KHB} + \widehat{KCB} = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHKC$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AMEI$ có:

$\widehat{AMB} + \widehat{EIA} = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

2. Xét ΔAHK và ΔACB có:

$\widehat{AHK} = \widehat{ACK} = 90^o$

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHK \# \Delta ACB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AK}{AB} \Rightarrow AH.AB = AC.AK \quad (1)$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔAMB vuông tại M, có MH là đường cao, ta có:

$AH.AB = AM^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow AK.AC = AM^2\,(Đpcm)$

3. Xét ΔAEI và ΔABC có:

$\widehat{AIE} = \widehat{ACB} = 90^o$

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEI \# \Delta ABC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AI} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AB.AI \quad (3)$

Xét ΔBEI và ΔBAM có:

$\widehat{BIE} = \widehat{BMA} = 90^o$

$\widehat{ABM}$ chung

$\Rightarrow \Delta BEI \# \ \Delta BAM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BE}{BI} = \dfrac{BA}{BM} \Rightarrow BE.BM = BI.BA \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AB(AI + BI)$

$\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AB^2 = 4R^2$

Vậy $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào M.

4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

Tứ giác $BCEI$ có:

$\widehat{BCE} + \widehat{EIB} = 90^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $BCEI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EIC} = \widehat{EBC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

Từ câu 1, ta có tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{EIM} = \widehat{EAM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung ME).

Mà $\widehat{EBC} = \widehat{EAM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$\widehat{MIC} = \widehat{EIC} + \widehat{EIM} = 2.\widehat{EAM} = \widehat{MOC}$ mà 2 đỉnh cùng nhìn cạnh MC

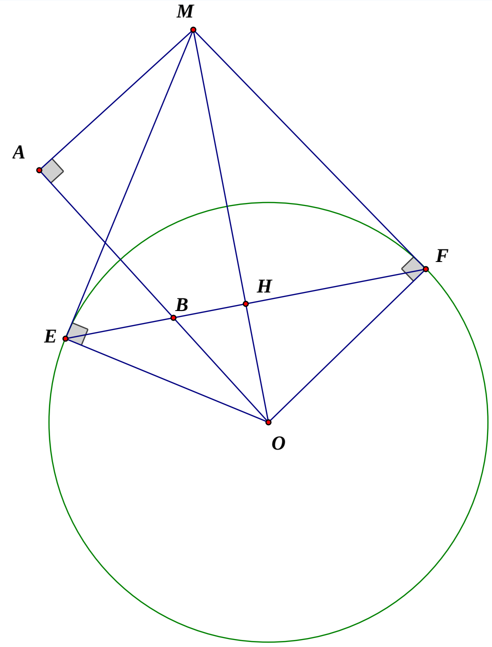
$\Rightarrow M, C, I, O$ thuộc cùng 1 đường tròn

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định O và C.

Câu 33. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng $d \perp OA$ tại A. Trên d lấy điểm M. Qua M kẻ 2 tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O). Nối EF cắt OM tại H, cắt OA tại B.

5. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $OA.OB = OH.OM = R^2$.
7. Chứng minh tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MEF thuộc một đường tròn cố định khi M di chuyển trên d.
8. Tìm vị trí của M để diện tích ΔHBO lớn nhất.

Giải:



1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.

Có $ME = MF$ và MO là phân giác của $\widehat{EMF}$ nên $MO \perp EF$ tại H. Mà $MA \perp OA \Rightarrow MABH$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta OHB \# \ \Delta OAM \Rightarrow OB.OA = OH.OM$

ΔEMO vuông tại $E \Rightarrow OH.OM = OE^2 = R^2$.

3. Có $I \in MO; EI$ là phân giác $\widehat{MEH}$.

Mà $\widehat{MEI} + \widehat{IEO} = 90^o$

$\widehat{IEH} + \widehat{OIE} = 90^o \Rightarrow \widehat{OIE} = \widehat{IEO}$

$\Rightarrow \Delta OIE$ cân tại $O \Rightarrow OI = OE = R \Rightarrow I \in (O;R)$.

4. Vì $OB.OA = R^2 \Rightarrow OA = \dfrac{R^2}{OA} \Rightarrow B$ cố định.

$\widehat{OHB} = 90^o \Rightarrow H \in$ đường tròn đường kính OB.

Gọi K là trung điểm $OB \Rightarrow KB = KO = HK$.

Hạ $HN \perp OB$

S_{HBO} max $\Leftrightarrow HN$ max. Mà $HN \leq HK$. Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$.

Vậy S_{HBO} max $\Leftrightarrow \Delta HBO$ vuông cân tại $H \Leftrightarrow MO$ tạo với OA một góc 45^o.

Câu 34. Cho $(O;\ R)$ và điểm A thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm H sao cho $AH < R$. Dựng đường thẳng $d \perp Ax$ tại H. Đường thẳng d cắt đường tròn tại E và B (E nằm giữa H và B).

2. Chứng minh $\Delta ABH \# \ \Delta EAH$.
4. Lấy điểm C thuộc Ax sao cho H là trung điểm AC. Nối CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
5. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

Giải :

1. Chứng minh $\Delta AHB \# \ \Delta EAH$

Ta có: $\widehat{EAH} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AE}$ (t/c góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{ABE} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AE}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AE}$)

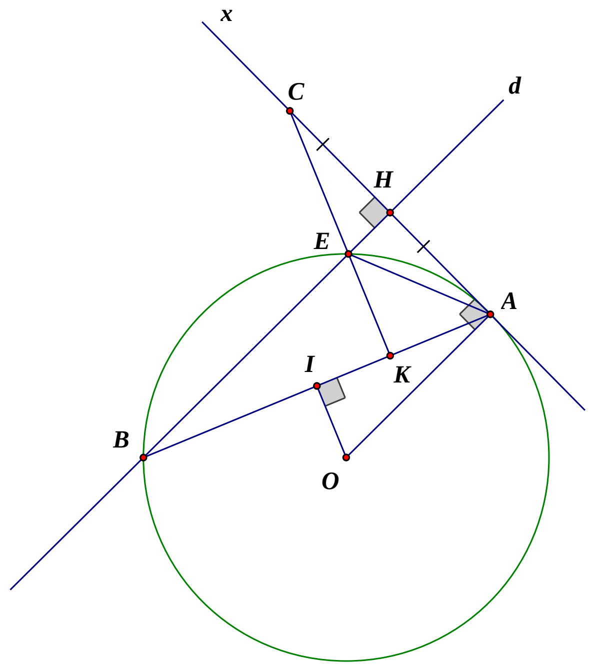
Xét ΔAHB và ΔEAH có:

$\widehat{EAH} = \widehat{ABE}$ (cmt)

$\widehat{AHB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHB \# \ \Delta EAH\,(g.g)$.

2. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp



Ta có: $\left.\begin{matrix} EH \perp AC \\ AH = HC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta EAC$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{KCA} = \widehat{ABH}$

Mà $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{KCA} + \widehat{BAH} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{CKA} = 90^o$

Xét tứ giác $AHEK$ có:

$\widehat{AKE} + \widehat{EHA} = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối diện

$\Rightarrow AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

3. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$

Kẻ $OI \perp AB$ tại I

$\Rightarrow AI = IB = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{OAI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OAI} = 30^o \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^o$

$\Rightarrow AH = AB.\cos 60^o = R\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy cần lấy điểm H trên Ax sao cho $AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ thì $AB = R\sqrt{3}$.

Câu 35. Cho ΔABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy 1 điểm M, dựng đường tròn tâm (O) có đường kính MC. Đường thẳng BM cắt đường tròn tâm (O) tại D, đường thẳng AD cắt đường tròn tâm (O) tại S

4. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCS}$.

5. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
6. Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Giải:

1. Ta có $\widehat{BAC} = 90^o$ (giả thiết)

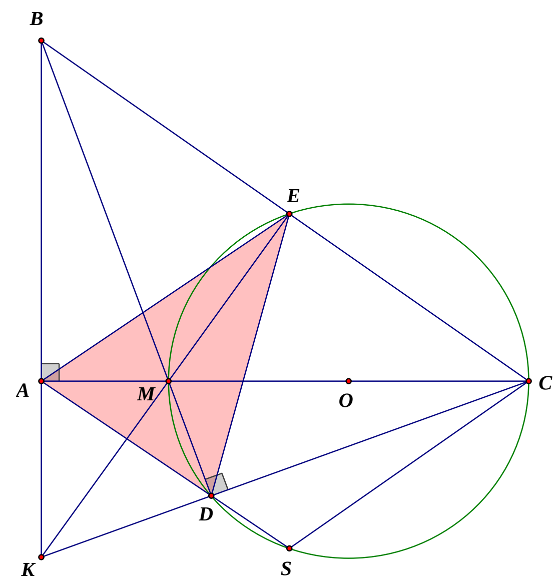
$\widehat{MDC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

A, D nhìn BC dưới góc 90^o nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB). (1)

Ta có tứ giác $DMCS$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACS}$ (cùng bù với $\widehat{MDS}$). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACS} \Rightarrow CA$ là phân giác $\widehat{BCS}$.



2. Giả sử BA cắt CD tại K. Ta có $BD \perp CK, CA \perp BK$.

$\Rightarrow M$ là trực tâm ΔKBC. Mặt khác $\widehat{MEC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow K, M, E$ thẳng hàng hay BA, EM, CD đồng quy tại K.

3. Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (cùng chắn cung DC). (3)

Mặt khác tứ giác $BAME$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MBE}$ (cùng chắn cung ME). (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{MAE}$ hay AM là tia phân giác của $\widehat{DAE}$.

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{ADM} = \widehat{MDE}$ hay DM là tia phân giác $\widehat{ADE}$.

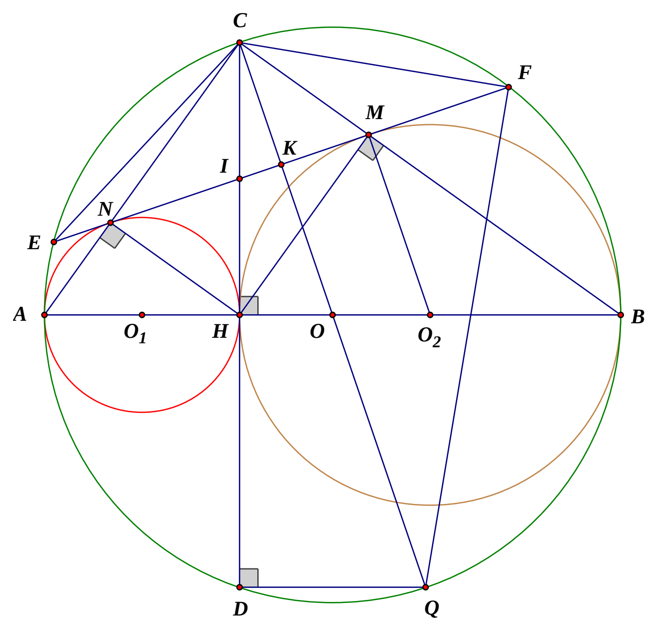
Vậy M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE.

* **<u>Lưu ý</u>**: *Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy, một phương pháp thường dùng là chứng minh ba đường thẳng ấy hoặc là ba đường cao, hoặc là ba đường trung tuyến, hoặc là ba đường phân giác của một tam giác.*

Câu 36. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OA. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AH và đường tròn (O_2) đường kính BH. Nối AC cắt đường tròn (O_1) tại N. Nối BC cắt đường tròn (O_2) tại M. Đường thẳng MN cắt đường tròn $(O;R)$ tại E và F.

5. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật.
6. Cho $AH = 4\,\text{cm}$, $BH = 9\,\text{cm}$. Tính MN.
7. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).
8. Chứng minh $CE = CF = CH$.

Giải:



1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật:

Ta có: $\widehat{AMH} = \widehat{ACB} = \widehat{HNB} = 90^o$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{CMH} = \widehat{CNH} = 90^o$

$\Rightarrow CMHN$ là hình chữ nhật.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB:

$CH^2 = AH.HB = 4.9 = 36$

Suy ra $CH = 6 \Rightarrow MN = 6\,(cm)$.

3. Gọi I là giao điểm của CH và MN.
   Theo tính chất hình chữ nhật:

$IM = IN = IC = IH \Rightarrow \Delta IMH$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{IMH} = \widehat{IHM}$

Lại có: $O_2M = O_2H \Rightarrow \widehat{O_2MH} = \widehat{O_2HM}$

$\Rightarrow \widehat{O_2MI} = \widehat{O_2HI} = 90^o$.

Chứng minh tương tự: $\widehat{O_1NI} = 90^o$

Do đó MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

4. OC cắt MN tại K, cắt $(O;\,R)$ tại $Q \Rightarrow \widehat{CDQ} = \widehat{CFQ} = 90^o$.

Có $OC = OB = R \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$

Mà $O_2M = O_2B = R_2 \Rightarrow \widehat{O_2MB} = \widehat{OBN} \Rightarrow \widehat{O_2MB} = \widehat{OCB}$

$\Rightarrow O_2M\,//\,OC \Rightarrow OC \perp MN$ tại K.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông FCQ: $CF^2 = CK.CQ$ (1)

Có $\Delta CKI \# \ \Delta CDQ\ (g.g) \Rightarrow CK.CQ = CI.CD \quad (2)$

Mà $OH \perp CD \Rightarrow HC = HD$

Do đó $CI.CD = \dfrac{1}{2}CH.2CH = CH^2$ (3)

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow CF^2 = CH^2 \Rightarrow CF = CH$

Có $OK \perp EF \Rightarrow KE = KF \Rightarrow \Delta CEF$ cân tại $C \Rightarrow CE = CF$.

Vậy $CE = CF = CH$.

Câu 37. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính vuông góc AB và CD. Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn *(O; R)* tại E. Nối AE cắt CD tại H; nối BD cắt AE tại K.

5. Chứng minh tứ giác $OIED$ nội tiếp.
6. Chứng minh $AH.AE = 2R^2$.
7. Tính $\tan \widehat{BAE}$.
8. Chứng minh OK vuông góc với BD.

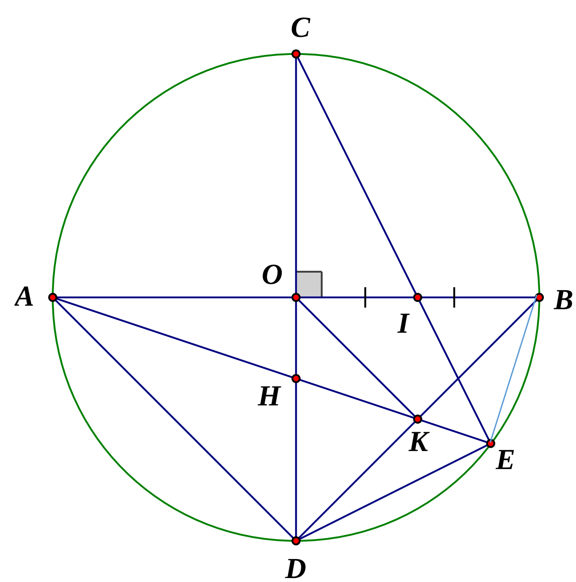
Giải:

1. Ta có CD là đường kính của đường tròn (O; R) nên $\widehat{CED} = 90^o$

Theo giả thiết $\widehat{BOD} = 90^o$

Do đó: $\widehat{IED} + \widehat{IOD} = 180^o$

Suy ra tứ giác $OIED$ là tứ giác nội tiếp.



2. $\Delta AOH \# \ \Delta AEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AE.AH = AO.AB = 2R^2$

3. Ta có: $\widehat{BEC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = 45^o$

$\widehat{AEC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = 45^o$

Suy ra EI là phân giác $\widehat{AEB}$

Do đó $\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\tan \widehat{BAE} = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{1}{3}$

4. Xét ΔOHA vuông tại O, ta có $OH = OA.\tan\widehat{OAH} = \frac{OA}{3} = \frac{OD}{3}$ vì vậy H là trọng tâm của tam giác DAB.

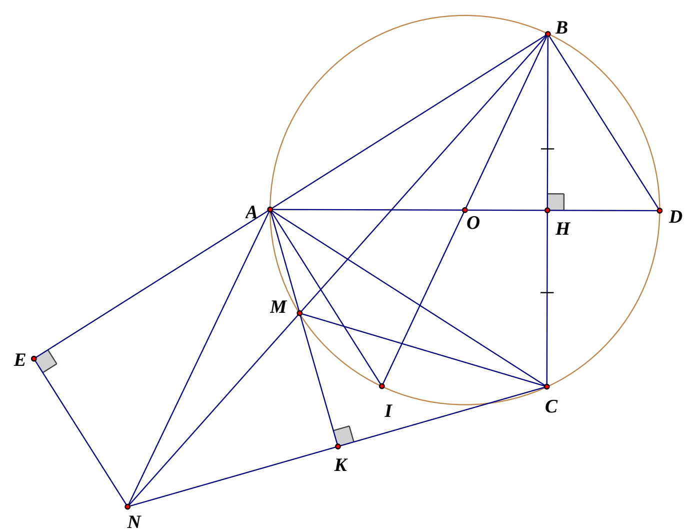
Do đó AK là đường trung tuyến của tam giác DAB.

Suy ra $KB = KD$. Vì vậy $OK \perp DB$ (quan hệ đường kính – dây cung).

Câu 38. Cho đường tròn tâm O, bán kính R, đường kính AD. Điểm H thuộc đoạn OD. Kẻ dây $BC \perp AD$ tại H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ AC, kẻ $CK \perp AM$ tại K. Đường thẳng BM cắt CK tại N.

5. Chứng minh $AH.AD = AB^2$.
6. Chứng minh tam giác CAN cân tại A.
7. Giả sử H là trung điểm của OD. Tính R theo thể tích hình nón có bán kính đáy là HD, đường cao BH.
8. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Giải:



1. Tam giác ABD vuông tại $B, BH \perp AD$ nên $AH.AD = AB^2$.
2. Do $AH \perp BC \Rightarrow HB = HC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{AMB}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{KMN}$ (1)

Tứ giác $ABCM$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{KMC}$ (cùng bù với $\widehat{AMC}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{KMN} = \widehat{KMC}$.

Lại có $MK \perp CN$ (giả thiết) $\Rightarrow \Delta MCN$ cân tại $M \Rightarrow KC = KN$.

Tam giác CAN có $AK \perp CN$ và $KC = KN$ nên ΔACN cân tại A.

3. Khi $OH = HD$, tam giác BOD cân tại $B \Rightarrow BO = BD$, mà $OB = OD = R$ nên tam giác OBD đều $\Rightarrow \widehat{BOH} = 60^o \Rightarrow BH = OB.\sin 60^o = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$

Trong đó: $r = HD = \frac{R}{2}, h = BH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$.

4. Hạ $NE \perp AB$. Vì AB không đổi nên S_{ABN} lớn nhất khi NE lớn nhất.

Ta có: $AN = AC$ không đổi.

Mà $NE \le NA$, dấu bằng xảy ra khi $E \equiv A$. Lấy I đối xứng với B qua O. Khi $E \equiv A$ thì $\widehat{NAB} = 90^o$ do đó NA đi qua I.

Mặt khác AM là phân giác của $\widehat{NAC}$ nên M là điểm chính giữa của cung nhỏ IC.

Vậy điểm M cần tìm là điểm chính giữa cung nhỏ IC.

Câu 39. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn $(AC \le AB)$. Dựng về phía ngoài ΔABC một hình vuông $ACED$. Tia EA cắt nửa đường tròn tại F. Nối BF cắt ED tại K.

5. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, D, K thuộc một đường tròn.
6. Chứng minh $AB = EK$.
7. Cho $\widehat{ABC} = 30^o; BC = 10cm$. Tính diện tích hình viên phần giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC.
8. Tìm vị trí điểm A để chu vi tam giác ΔABC lớn nhất.

Giải:

1. $ACED$ là hình vuông

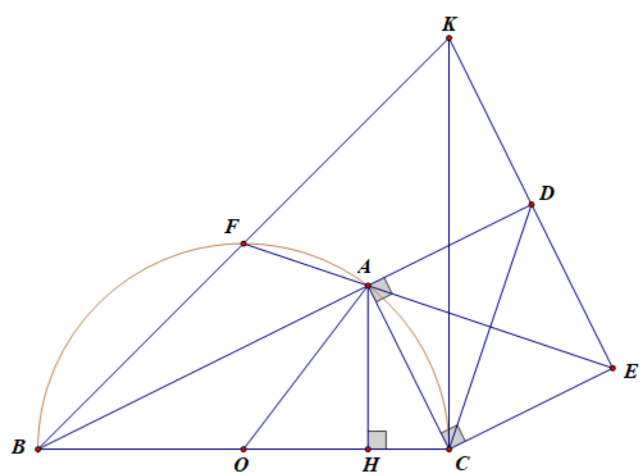
$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CDE} = 45^o$

Tứ giác $BCAF$ nội tiếp đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{CAE}$

(cùng bù với góc $\widehat{CAF}$)

$\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{CDE} \Rightarrow \widehat{FBC} + \widehat{CDK} = 180^o$

$\Rightarrow BCDK$ là tứ giác nội tiếp.



2. Có: $\widehat{BAC} = 90^o = \widehat{CEK}$.

Mà tứ giác $BCDK$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CKD} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ECK}$.

Lại có: $AC = CE$ (cạnh hình vuông)

Suy ra $\Delta ABC = \Delta EKC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\Rightarrow AB = EK$

3. Vì $\widehat{ABC} = 30^o$ nên $\widehat{AOC} = 60^o$, do đó tam giác OAC là tam giác đều.

Kẻ $AH \perp BC$, ta có $AH = OA.\sin 60^o = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Gọi diện tích hình viên phân là S, ta có: $S = S_{quat\,AOC} - S_{AOC}$

$$S = \frac{60^o}{360^o}.\pi.R^2 - \frac{1}{2}OC.AH$$

$$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} = R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{25(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}\,(cm^2).$$

4. Chu vi ΔABC lớn nhất $\Leftrightarrow AB + AC$ lớn nhất. Áp dụng BĐT $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$

   Ta có: $(AB + AC)^2 \leq 2(AB^2 + AC^2) = 2BC^2 = 8R^2 \Rightarrow AB + AC \leq 2\sqrt{2}R.$

Dấu "=" xảy ra khi $AB = AC \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính BC.

Câu 40. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại A. Lấy M thuộc Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn tại B (B khác A). Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt AB tại D. Nối OM cắt AB tại I, cắt cung nhỏ AB tại E.

5. Chứng minh $OIDC$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh tích $AB.AD$ không đổi khi M di chuyển trên Ax.
7. Tìm vị trí điểm M trên Ax để $AOBE$ là hình thoi.
8. Chứng minh $OD \perp MC$.

Giải:

1. Có $MA = MB; OA = OB = R$ nên OM là trung trực của AB nên $OI \perp AB$ và $IA = IB$

Lại có $OC \perp CD$ nên $\widehat{OID} + \widehat{OCD} = 180^o \Rightarrow OIDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

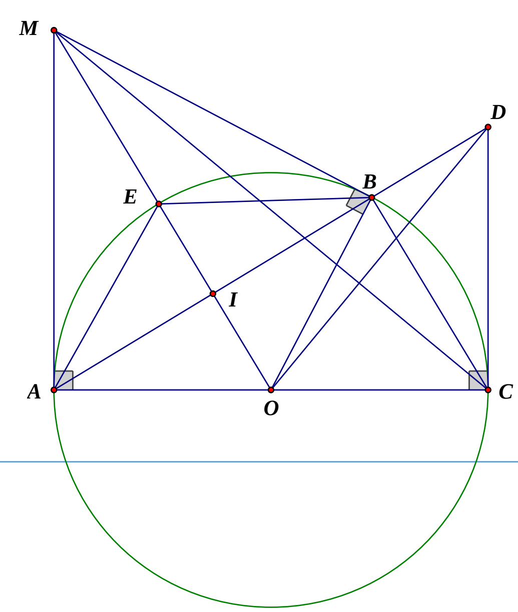
Mà ΔACD vuông tại C nên $AB.AD = AC^2$ không đổi.

3. $AOBE$ là hình thoi $\Leftrightarrow AE = EB = BO = OA$

   $\Leftrightarrow \Delta AOE$ đều $\Leftrightarrow \widehat{AOE} = 60^o$

ΔAOM vuông tại A nên

$AM = OA.\tan 60^o = R\sqrt{3}$.



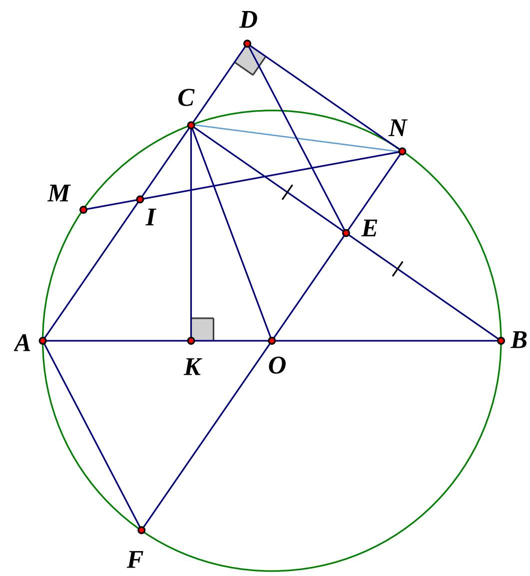
4. $\widehat{AMO}=\widehat{BAC}$ (cùng phụ với $\widehat{MAB}$), $\widehat{MAO}=\widehat{OCD}=90^o$

Nên $\Delta AMO \# \Delta CAD(g.g)\Rightarrow \dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AO}{CD}$

Mà $OA=OC=R$, suy ra $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{OC}{CD}\Rightarrow \tan\widehat{MCA}=\tan\widehat{ODC}$

$\Rightarrow \widehat{MCA}=\widehat{ODC}\Rightarrow \widehat{ODC}+\widehat{MCD}=90^o$. Do đó $OD\perp MC$.

Câu 41. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC. Nối MN cắt AC tại I. Hạ $ND\perp AC$. Gọi E là trung điểm BC. Dựng hình bình hành $ADEF$.



5. Tính $\widehat{MIC}$.
6. Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.
7. Chứng minh rằng F thuộc đường tròn $(O;R)$.
8. Cho $\widehat{CAB}=30^o; R=30cm$. Tính thể tích hình tạo thành khi cho ΔABC quay một vòng quanh AB.

Giải:

1. $\widehat{MIA}=\dfrac{1}{2}(sđ\,\widehat{MA}+sđ\,\widehat{CN})=\dfrac{1}{4}sđ\,\widehat{AB}=45^o\Rightarrow \widehat{MIC}=135^o$

2. Có: $\widehat{NC}=\widehat{NB}\Rightarrow ON\perp BC$ tại E.

Lại có: $\widehat{ACB}=90^o\Rightarrow \widehat{DCE}=90^o$.

Mà $ND\perp CD\ (gt)\Rightarrow CEND$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow DN\perp ON$ tại $N\Rightarrow DN$ là tiếp tuyến của (O).

3. Theo tính chất hình chữ nhật ta có: $\widehat{EDC}=\widehat{NCD}$

Mà $\widehat{EDC}=\widehat{F}\Rightarrow \widehat{F}=\widehat{DNC}\Rightarrow \widehat{F}+\widehat{ACN}=180^o$. $ON\,//\,AC$ (cùng $\perp CB$)

$\Rightarrow N, E, O, F$ thẳng hàng. Suy ra $ACNF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow F\in(O)$

4. Hạ $CK\perp AB$. Tam giác ABC có $\widehat{A}=30^o$, $\widehat{C}=90^o$ nên $\widehat{B}=60^o$

Do đó, ΔOBC là tam giác đều $\Rightarrow BK=KO=\dfrac{R}{2};\ BC=R;\ CK=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\cdot$

Khi quay ΔABC một vòng quanh AB có hai hình nón tạo thành: hình nón đỉnh A, và hình nón đỉnh B cùng có tâm hình tròn đáy là K, bán kính CK.

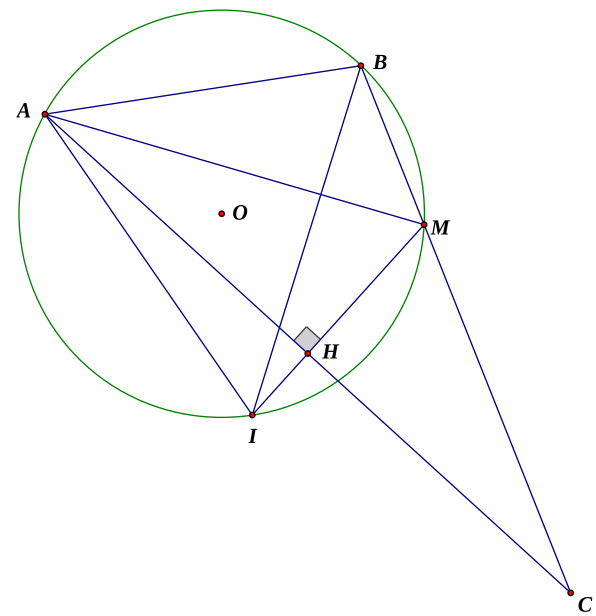
Gọi thể tích tạo thành là V, ta có:

$$V = \frac{1}{3}\pi.CK^2.AK + \frac{1}{3}\pi.CK^2.BK = \frac{1}{3}\pi.CK^2(AK+BK)$$

$$= \frac{1}{3}\pi.CK^2.AB = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3R^2}{4}\cdot 2R = \frac{\pi R^3}{2} = 500\pi\ (cm^3)$$

Câu 42. Cho đường tròn $(O;R)$ với dây AB cố định. Gọi I là điểm chính giữa cung lớn AB. Điểm M thuộc cung nhỏ IB. Hạ $AH \perp IM$; AH cắt BM tại C.

4. Chứng minh ΔIAB và ΔMAC là tam giác cân.
5. Chứng minh C thuộc một đường tròn cố định khi M chuyển động trên cung nhỏ IB.
6. Tìm vị trí của M để chu vi ΔMAC lớn nhất.



Giải:

1. Vì $\overset{\frown}{IA} = \overset{\frown}{IB} \Rightarrow IA = IB \Rightarrow \Delta IAB$ cân tại I.

Tứ giác $ABMI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IMC}$ (cùng bù với $\widehat{IMB}$)

Ta có: $\widehat{IAB} = \widehat{IBA}; \widehat{IBA} = \widehat{IMA}; \widehat{IAB} = \widehat{IMC}$

$\Rightarrow \widehat{IMA} = \widehat{IMC}$

Lại có: $MH \perp AC \Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M.

2. Từ chứng minh trên $\Rightarrow MI$ là đường trung trực của AC

$\Rightarrow IC = IA$ không đổi $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn $(I;\, IA)$

3. Chu vi $\Delta MAC = MA + MC + AC = 2(MA + AH)$

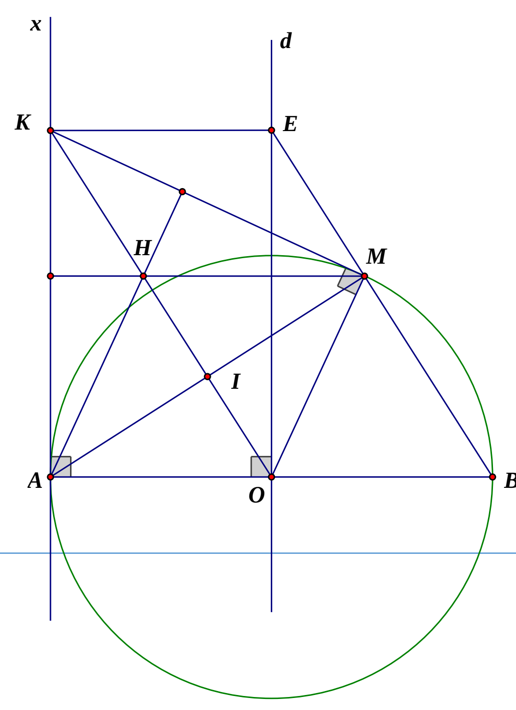
Có $\widehat{HMA} = \widehat{IBA}$ (không đổi và $\widehat{IBA} < 90^o$)

Đặt $\widehat{HMA} = \widehat{IAB} = \alpha$. Ta có: $AH = MA.\sin\alpha$

Vậy chu vi $\Delta MAC = 2MA(1+\sin\alpha)$

Chu vi ΔMAC lớn nhất khi MA lớn nhất $\Leftrightarrow A, O, M$ thẳng hàng.

Câu 43. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm



$K\left(AK \ge R\right)$. Qua K kẻ tiếp tuyến KM với đường tròn (O). Đường thẳng $d \perp AB$ tại O, d cắt MB tại E.

5. Chứng minh $KAOM$ là tứ giác nội tiếp;
6. OK cắt AM tại I. Chứng minh $OI.OK$ không đổi khi K chuyển động trên Ax;
7. Chứng minh $KAOE$ là hình chữ nhật;
8. Gọi H là trực tâm của ΔKMA. Chứng minh rằng khi K chuyển động trên Ax thì H thuộc một đường tròn cố định.

Giải:

1. $\widehat{KAO} = \widehat{KMO} = 90^o \Rightarrow KAOM$ nội tiếp.
2. Theo tính chất tiếp tuyến: $KA = KM$

KO là phân giác của $\widehat{AKM} \Rightarrow KO \perp AM$ tại I

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác vuông AOK ta có

$OI.OK = OA^2 = R^2$

3. Có $OK\ // BM$ (cùng $\perp AM$) $\Rightarrow \widehat{KOA} = \widehat{EBO}$.

Mà $OA = OB = R$; $\widehat{KAO} = \widehat{EOB} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta AKO = \Delta OEB\ (c.g.c)$

$\Rightarrow AK = OE$, mà $AK\ // OE$, $\widehat{KAO} = 90^o$

$\Rightarrow AKEO$ là hình chữ nhật.

4. H là trực tâm của $\Delta KMA \Rightarrow AH \perp KM$, $MH \perp KA \Rightarrow AH\ // OM$, $MH\ // OA$.

Do đó $AOMH$ là hình bình hành $\Rightarrow AH = OM = R$.

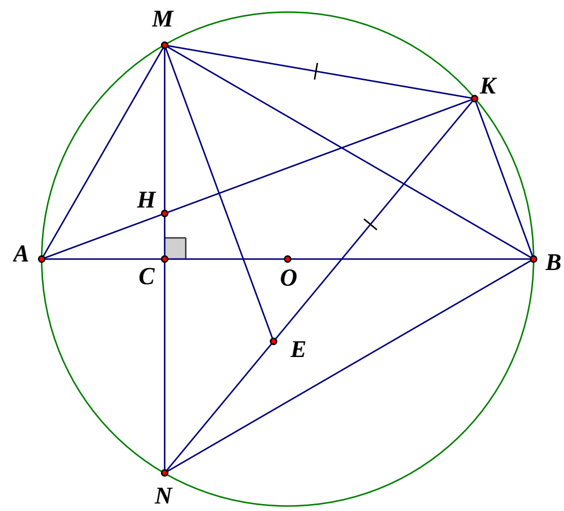
Vậy H thuộc đường tròn $(A; R)$.

Câu 44. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA. Dây $MN \perp AB$ tại C. Trên cung MB nhỏ lấy điểm K. Nối AK cắt NM tại H.

5. Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh tích $AH.AK$ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ MB.
7. Chứng minh ΔBMN là tam giác đều.
8. Tìm vị trí điểm K để tổng $KM + KN + KB$ lớn nhất.

Giải:

1. Có $\widehat{BKA} = 90^o$; $\widehat{MCB} = 90^o \Rightarrow \widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 180^o$ nên tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.



2. $\Delta ACH \# \Delta AKB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{AK} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AK = AB.AC = R^2$

3. Vì $OC \perp MN \Rightarrow CM = CN \Rightarrow \Delta BMN$ cân tại B.

ΔMAB vuông tại M $\Rightarrow AM^2 = AC.AB = R^2$

$\Rightarrow AM = R$. Do đó $\sin \widehat{MBA} = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MAB} = 30^o$

Mà $\widehat{MCB} = \widehat{NCB}$ (tính chất tam giác cân) $\Rightarrow \widehat{MNB} = 60^o$

Do đó ΔMNB là tam giác đều.

4. Trên KN lấy E sao cho $KE = KM$

Vì tam giác BMN đều nên $\widehat{MBN} = 60^o \Rightarrow \widehat{MKN} = 60^o \Rightarrow \Delta KME$ đều.

Do đó $ME = MK$ và $\widehat{KME} = 60^o$.

Lại có: $MB = MN$ và $\widehat{KMB} = \widehat{EMN}$ (cùng cộng với $\widehat{BME} = 60^o$)

$\Rightarrow \Delta KMB = \Delta EMN$ $(c.g.c) \Rightarrow KB = EN$.

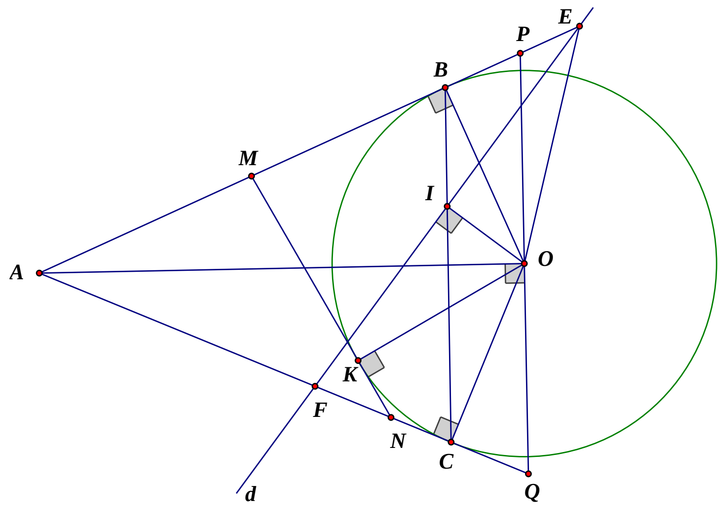
Từ đó $KM + KB = KN \Rightarrow S = KM + KN + KB = 2KN$

S lớn nhất $\Leftrightarrow KN$ lớn nhất $\Leftrightarrow K, O, N$ thẳng hàng.

Câu 45. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở ngoài đường tròn. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B và C là 2 tiếp điểm). I là một điểm thuộc đoạn BC $(IB < IC)$. Kẻ đường thẳng $d \perp OI$ tại I. Đường thẳng d cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

5. Chứng minh $OIBE$ và $OIFC$ là tứ giác nội tiếp.

6. Chứng minh I là trung điểm EF.
7. K là một điểm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại K cắt AB; AC tại M và N. Tính chu vi ΔAMN nếu $OA = 2R$.
8. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC tại P và Q. Tìm vị trí của A để S_{APQ} nhỏ nhất.



Giải :

1. Có $OB \perp AB, OC \perp AC$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{OIE} = \widehat{OBE} = 90^o \Rightarrow OIBE$ nội tiếp

$\widehat{OIF} + \widehat{OCF} = 180^o \Rightarrow OIFC$ nội tiếp.

2. Tứ giác $OIBE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OBI}$. Tương tự $\widehat{OFI} = \widehat{OCI}$. Mà $OB = OC = R$

$\Rightarrow \widehat{OBI} = \widehat{OCI} \Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OFI}$

$\Rightarrow \Delta OEF$ cân tại O. Mà $OI \perp EF \Rightarrow IE = IF$ (Đpcm)

3. Có $MK = MB,\ NK = NC$

Suy ra chu vi $\Delta AMN = AC + AB = 2AC = 2\sqrt{AO^2 - OC^2} = 2\sqrt{3R^2} = 2R\sqrt{3}$

4. Có AO là phân giác của $\widehat{PAQ}$, $PQ \perp AO \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại $A \Rightarrow S_{APQ} = 2S_{AOQ}$

$S_{APQ} = AQ.OC$ mà $OC = R$ không đổi, do đó S_{APQ} nhỏ nhất $\Leftrightarrow AQ$ nhỏ nhất.

ΔOAQ vuông tại O$\Rightarrow AC.CQ = OC^2 = R^2$.

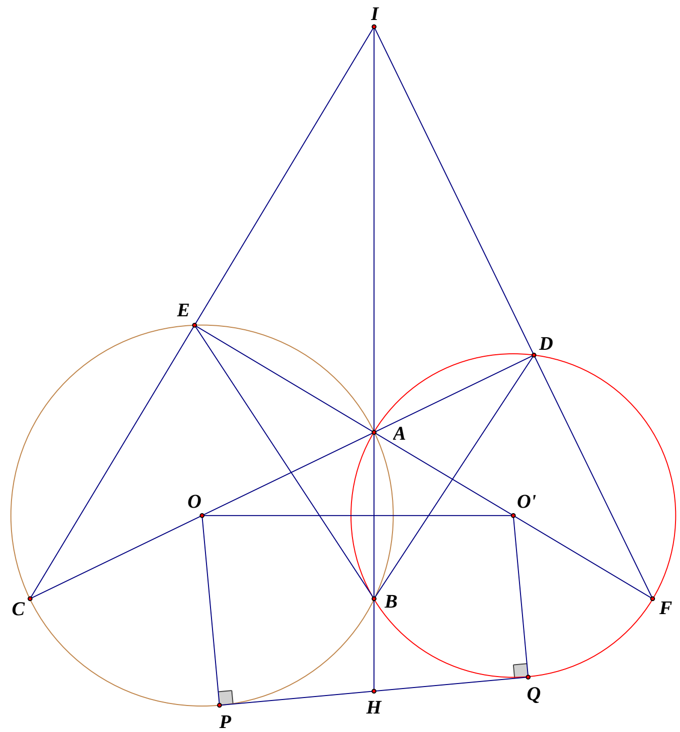
Mà $AQ = AC + CQ \geq 2\sqrt{AC.CQ} = 2R$, dấu "=" xảy ra khi $AC = CQ$

S_{APQ} min $\Leftrightarrow AC = CQ \Leftrightarrow \Delta OQA$ vuông cân tại $O \Leftrightarrow \widehat{A} = 45^o \Leftrightarrow OA = R\sqrt{2}$

Câu 46. Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt. Đường thẳng OA cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai C, D. Đường thẳng $O'A$ cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai E, F.

4. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.

5. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
6. Cho PQ là tiếp tuyến chung của (O) và $(O')\left(P\in(O),Q\in(O')\right)$. Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.



Giải:

1. Ta có: $\widehat{ABC}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABF}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên B, C, F thẳng hàng.

Có AB; CE và DF là 3 đường cao của ΔACF nên chúng đồng quy.

2. Do $\widehat{IEF}=\widehat{IBF}=90^o$ suy ra $BEIF$ nội tiếp đường tròn.
3. Gọi H là giao điểm của AB và PQ

Ta chứng minh được $\Delta AHP \# \Delta PHB \Rightarrow \dfrac{HP}{HB}=\dfrac{HA}{HP} \Rightarrow HP^2 = HA.HB$

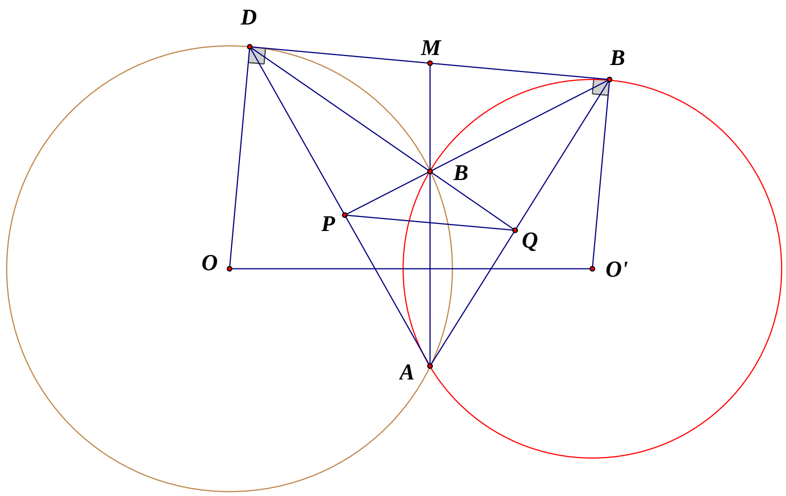
Tương tự, $HQ^2 = HA.HB$

Vậy $HP = HQ$ hay H là trung điểm của PQ.

Câu 47. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn với $D\in(O)$ và $E\in(O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A.

4. Chứng minh rằng $\widehat{DAB}=\widehat{BDE}$.
5. Tia AB cắt DE tại M. Chứng minh M là trung điểm của DE.
6. Đường thẳng EB cắt DA tại P, đường thẳng DB cắt AE tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với AB.

Giải:



1. Ta có $\widehat{DAB}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{BDE}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

Suy ra $\widehat{DAB}=\widehat{BDE}$.

2. Xét ΔDMB và ΔAMD có:

$\widehat{DMA}$ chung,

$\widehat{DAM}=\widehat{BDM}$

Nên $\Delta DMB \# \Delta AMD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MD}{MB}=\frac{MA}{MD}$ hay $MD^2=MA.MB$.

Tương tự ta cũng có: $\Delta EMB \# \Delta AME \Rightarrow \frac{ME}{MB}=\frac{MA}{ME}$ hay $ME^2=MA.MB$.

Từ đó: $MD=ME$ hay M là trung điểm của DE.

3. Ta có $\widehat{DAB}=\widehat{BDM}$, $\widehat{EAB}=\widehat{BEM}$

$\Rightarrow \widehat{PAQ}+\widehat{PBQ}=\widehat{DAB}+\widehat{EAB}+\widehat{PBQ}=\widehat{BDM}+\widehat{BEM}+\widehat{DBE}=180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APBQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQB}=\widehat{PAB}$.

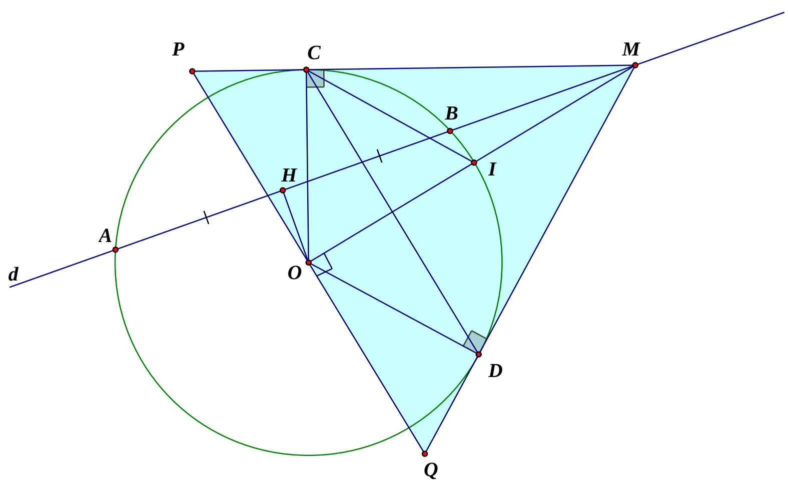
Kết hợp với $\widehat{PAB}=\widehat{BDM}$ suy ra $\widehat{PQB}=\widehat{BDM}$.

Hai góc này ở vị trí so le trong nên PQ song song với AB.

Câu 48. Cho đường trong $(O;R)$ và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A,B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC,MD với đường tròn (C,D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB;

4. Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
5. Đoạn OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.
6. Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Giải:



1. Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $\widehat{OHM} = 90^o$.

Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $\widehat{ODM} = 90^o$.

Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $MC = MD \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M

$\Rightarrow MI$ là một đường phân giác của $\widehat{CMD}$.

Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset\frown{CD}$ nên $\widehat{DCI} = \frac{1}{2}$sđ $\overset\frown{DI} = \frac{1}{2}$sđ $\overset\frown{CI} = \widehat{MCI}$

$\Rightarrow$ CI là phân giác của $\widehat{MCD}$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD.

3. Ta có ΔMPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính:

$$S = 2S_{OQM} = 2.\frac{1}{2}.OD.QM = R(MD + DQ).$$

Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow MD + DQ$ nhỏ nhất.

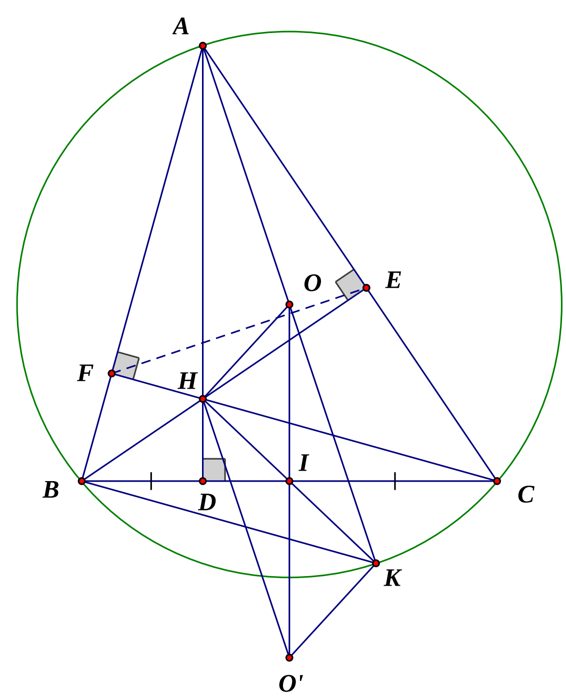
Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có $DM.DQ = OD^2 = R^2$ không đổi nên $MD + DQ$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DM = DQ = R$.

Khi đó $OM = R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Câu 49. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm BC, vẽ đường kính AK.

5. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.
6. Chứng minh $DA.DH = DB.DC$.
7. Cho $\widehat{BAC} = 60^0; S_{ABC} = 20cm^2$. Tính S_{ABC}.
8. Cho BC cố định; A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải:



1. Vì B và C thuộc đường tròn đường kính AK: $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^o$

Do đó $BH // CK$ và $CH // BK \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

Mà I là trung điểm BC nên I là trung điểm của HK

Suy ra H; I; K thẳng hàng.

2. Ta có $\widehat{HBD} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) nên $\Delta DBH \# \Delta DAC(g.g)$

Suy ra $\dfrac{DB}{DA} = \dfrac{HD}{DC} \Rightarrow DB.DC = DA.DH$.

3. Vì $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^o \Rightarrow \Delta AEB \# \Delta AFC(g.g)$

Suy ra $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$; $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF \# \Delta ABC(c.g.c)$

Do đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AF}\right)^2$

Mà $\dfrac{AE}{AB} = cos\widehat{BAC} = cos60^o = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 4S_{AEF} = 80cm^2$.

4. Lấy O' đối xứng với O qua I suy ra O' cố định.

Ta có $IH = IK; OK = OA = R$ nên OI là đường trung bình của ΔKHA

Do đó $OI // AH$ và $OI = \dfrac{1}{2}AH$

Suy ra $OO'//AH$, $OO'=AH$ nên $OO'HA$ là hình bình hành

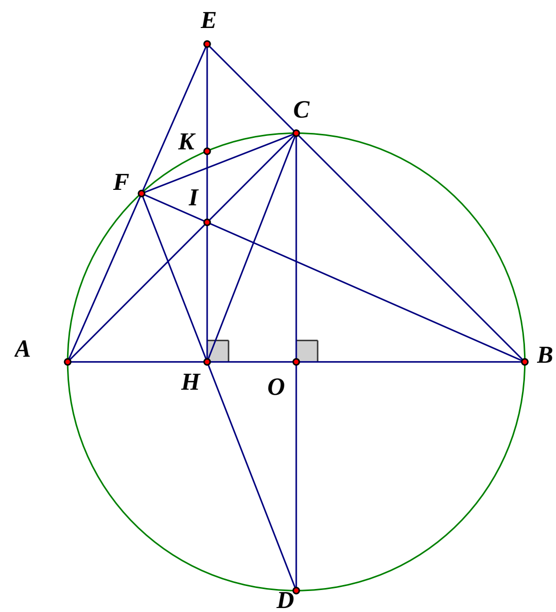
Do đó $O'H=OA=R$ (không đổi)

Vậy H thuộc đường tròn ($O';R$) cố định.

Câu 50. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính vuông góc là AB và CD. Lấy K thuộc cung nhỏ AC, kẻ $KH\perp AB$ tại H. Nối AC cắt HK tại I, tia BC cắt HK tại E; nối AE cắt đường tròn (O;R) tại F.

5. Chứng minh $BHFE$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $EC.EB=EF.EA$.
7. Cho H là trung điểm OA. Tính theo R diện tích ΔCEF.
8. Cho K di chuyển trên cung nhỏ AC. Chứng minh đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:



1. Do F thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AFB}=90^o$

Suy ra $\widehat{BFE}=\widehat{BHE}=90^o\Rightarrow BHFE$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $\widehat{ECA}=\widehat{EFB}=90^o;\widehat{AEC}$ chung

Nên

$\Delta ECA\#\ \Delta EFB(g.g)\Rightarrow\dfrac{EC}{EF}=\dfrac{EA}{EB}\Rightarrow EC.EB=EA.EF$.

3. Từ chứng minh trên suy ra AC, BF, EH là 3 đường cao của ΔEAB nên chúng cắt nhau tại I.

Do đó $\dfrac{EC}{EF}=\dfrac{EA}{EB}$ và $\widehat{AEB}$ chung nên $\Delta ECF\#\ \Delta EAB$ (cạnh – góc – cạnh)

$$\frac{S_{ECF}}{S_{EAB}}=\left(\frac{EC}{EA}\right)^2\ (1)$$

Vì $OB=OC=R$ nên ΔOBC vuông cân tại $O\Rightarrow\widehat{OBC}=45^o$.

Do đó ΔHBE vuông cân tại $H\Rightarrow EH=HB=\dfrac{3R}{2}$.

Mà $AH=\dfrac{R}{2}$ nên $AE^2=AH^2+HE^2=\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{9R^2}{4}=\dfrac{10R^2}{4}\Rightarrow AE=\dfrac{R\sqrt{10}}{2}$

Tương tự $BE^2 = HB^2 + HE^2 = \dfrac{9R^2}{2} \Rightarrow BE = \dfrac{3R}{\sqrt{2}}$

Lại có: $OC // EH$ (cùng $\perp AB$) nên $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{HO}{HB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow EC = \dfrac{1}{3}EB = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{EC}{EA}\right)^2 = \dfrac{1}{5} \Rightarrow S_{ECF} = \dfrac{1}{5}S_{EAB} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot EH \cdot AB = \dfrac{3R^2}{10}$

4. Các tứ giác *BEFH* và *AHCE* nội tiếp nên $\widehat{AEB} = \widehat{CHB}; \widehat{AEB} = \widehat{AHF} \Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{CHB}$

Suy ra $\widehat{AHF} = \widehat{DHB}$.

Có $HO \perp OC, OC = OD$ nên ΔHCD cân tại *H* nên $\widehat{AHF} = \widehat{DHB}$

Do đó $\widehat{AHF} = \widehat{DHB}$ mà $\widehat{AHF} + \widehat{FHB} = 180^o \Rightarrow \widehat{DHB} + \widehat{FHB} = 180^o$

Suy ra *F; H; D* thẳng hàng. Suy ra *FH* đi qua *D* cố định.