

3 tháng 3 năm 2009

Cập nhật: 18 tháng 3 năm 2010

Bài giảng LÝ THUYẾT DANH MỤC ĐẦU TƯ

Rủi ro

Hoạt động đầu tư thường gắn li ền với tình trạng không chắc chắn vì kết quả thu được có thể rơi vào các tình huống khác nhau. Các nhà kinh tế tài chính phân biệt giữa khái niệm “bất trắc” và khái niệm “rủi ro”. Bất trắc là khi có nhiều tình huống khác nhau có thể xảy ra, nhưng ta không thể biết được xác suất xảy ra các tình huống này. Hãy lấy dịch cúm gà ở châu Á vào cuối năm 2003 và đầu 2004 làm ví dụ. Việc đầu tư vào một nhà hàng đặc sản gà sẽ cho kết quả tốt nếu tình huống xảy ra là không xảy ra dịch cúm gà, nhưng có thể sẽ mất trắng nếu dịch cúm gà xảy ra. Tuy nhiên, ta nói đây là tình trạng bất trắc vì không thể dựa vào số liệu lịch sử hay các phương pháp ngoại suy khác để ước lượng xác suất xảy ra cúm gà trong một khoảng thời gian nhất định là bao nhiêu. Ngược lại, ta đề cập đến *rủi ro* khi có thể ước lượng được xác suất xảy ra các tình huống khác nhau. Ví dụ, lợi nhuận của một cửa hàng kem trong mùa hè tới sẽ tùy thuộc vào việc thời tiết lúc đó sẽ như thế nào. Dựa vào số liệu lịch sử, ta có thể tính xác suất cho các khoảng nhiệt độ bình quân khác nhau vào mùa hè. Trong tài chính, ta thường cho rằng các hoạt động đầu tư là “rủi ro” vì có thể ước tính được xác suất xảy ra các tình huống khác nhau dựa vào số liệu lịch sử, giống như ví dụ về nhiệt độ mùa hè. Tuy nhiên, ta luôn cần lưu ý rằng ước lượng rủi ro dựa vào thông tin quá khứ có thể không đúng bởi vì các con số quá khứ có thể thay đổi trong tương lai.

Lợi nhuận, rủi ro và mức bù rủi ro

Một dự án đầu tư có chi phí 1 triệu đồng và chịu rủi ro như sau: sau một năm, nếu tình huống tốt xảy ra với xác suất 60%, dự án sẽ tạo nguồn thu ròng là 1,2 triệu đồng; còn nếu tình huống xấu xảy ra với xác suất 40%, dự án sẽ chỉ tạo ra 0,9 triệu đồng.

Lợi nhuận của dự án trong tình huống tốt: $\pi_G = (1,2 - 1,0) = 0,2 \text{ tr.đ}$

Lợi nhuận của dự án trong tình huống xấu: $\pi_B = (0,9 - 1,0) = -0,1 \text{ tr.đ}$

Tiêu chí đầu tiên để nhà đầu tư đánh giá dự án này là lợi nhuận kỳ vọng, được tính như sau:

$$E(\pi) = \bar{\pi} = p_G \pi_G + p_B \pi_B = 0,6*(0,2) + 0,4*(-0,1) = 0,08 \text{ tr.đ}$$

Tuy nhiên, nhà đầu tư không chỉ quan tâm đến việc dự án cho lợi nhuận kỳ vọng là bao nhiêu, mà còn muốn tìm hiểu về mức độ rủi ro của nó. Thước đo rủi ro của dự án là mức độ biến thiên của lợi nhuận so với giá trị kỳ vọng. Đó là phương sai của lợi nhuận:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\pi) = \sigma_\pi^2 &= p_G[\pi_G - E(\pi)]^2 + p_B[\pi_B - E(\pi)]^2 \\ &= 0,6*(0,2 - 0,08)^2 + 0,4*(-0,1 - 0,08)^2 = 0,0216 \end{aligned}$$

Độ lệch chuẩn của lợi nhuận (σ_π) bằng 0,147 tr.đ. Liệu mức lợi nhuận kỳ vọng 80.000 đ có đủ để chấp nhận mức rủi ro biểu thị bởi độ lệch chuẩn 147.000 đ? Để trả lời câu hỏi này, ta phải so sánh với những dự án khác.

Giả sử thay vì đầu tư vào dự án trên, nhà đầu tư có thể gửi khoản tiền 1 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5%/năm. Đây là khoản đầu tư an toàn vì có bảo hiểm tiền gửi. Lợi nhuận thu được là 50.000 đồng. So sánh lợi nhuận kỳ vọng của hai dự án, ta thấy khi chấp nhận dự án rủi ro, nhà đầu tư mong đợi được hưởng thêm một khoản lợi nhuận kỳ vọng là: $80.000 - 50.000 = 30.000$ đồng so với trường hợp đầu tư vào dự án an toàn. Nói một cách khác, nhà đầu tư được hưởng một khoản bù rủi ro là 30.000 đồng khi đầu tư vào dự án rủi ro.

Ta cũng có thể tính giá trị kỳ vọng và phương sai cho suất sinh lợi của dự án như sau.

Suất sinh lợi của dự án trong tình huống tốt: $r_G = (1,2 - 1,0)/1,0 = 20\%$

Suất sinh lợi của dự án trong tình huống xấu: $r_B = (0,9 - 1,0)/1,0 = -10\%$

Suất sinh lợi kỳ vọng:

$$E(r) = \bar{r} = p_G r_G + p_B r_B = 0,6*(20\%) + 0,4*(-10\%) = 8\%$$

Phương sai của suất sinh lợi:

$$\begin{aligned} \text{Var}(r) = \sigma^2 &= p_G[r_G - E(r)]^2 + p_B[r_B - E(r)]^2 \\ &= 0,6*(20\% - 8\%)^2 + 0,4*(-10\% - 8\%)^2 = 2,16\% \end{aligned}$$

Rủi ro, suất sinh lợi và đường đẳng dụng

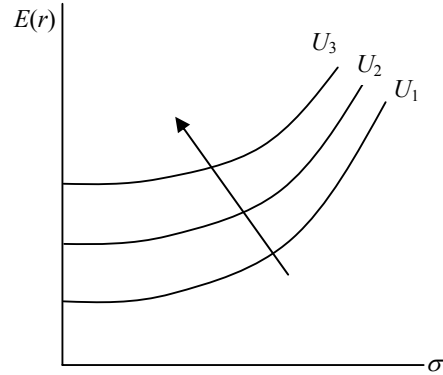
Việc nhà đầu tư yêu cầu một mức bù rủi ro dương tức là nhà đầu tư ngại rủi ro. Còn nếu mức bù rủi ro bằng không, nhà đầu tư được gọi là trung tính về rủi ro; còn nếu mức bù rủi ro nhỏ hơn không (nhà đầu tư sẵn sàng bỏ tiền ra để được hưởng rủi ro), thì nhà đầu tư được gọi là thích rủi ro. Ta có thể thấy trên thực tế hầu hết các nhà đầu tư ghét rủi ro.

Như vậy, suất sinh lợi kỳ vọng càng cao thì độ thỏa dụng của nhà đầu tư càng lớn; nhưng phương sai (hay độ lệch chuẩn) của suất sinh lợi càng cao thì độ thỏa dụng của

nhà đầu tư càng nhỏ. Ta có thể biểu diễn phương trình độ thỏa dụng của nhà đầu tư theo dạng thông dụng sau:

$$U = E(r) - \frac{1}{2} A \sigma^2 \quad (1) \quad (A = 1, 2)$$

Hình 1 biểu diễn đường đẳng dụng của nhà đầu tư trên trục tọa độ suất sinh lợi kỳ vọng và độ lệch chuẩn. Dọc theo đường đẳng dụng U_1 , khi độ lệch chuẩn tăng lên thì nhà đầu tư cũng yêu cầu suất sinh lợi kỳ vọng cao hơn để đảm bảo độ thỏa dụng không đổi. Lấy ví phân hai vế của hàm thỏa dụng ta có:



Hình 1: Đường đẳng dụng

$$dU = \frac{\partial U}{\partial E(r)} dE(r) + \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \Rightarrow \frac{dE(r)}{d\sigma} = - \frac{\partial U / \partial \sigma}{\partial U / \partial E(r)} = A \sigma \quad (2)$$

Đường đẳng dụng có dạng lõm thông thường: khi độ lệch chuẩn tăng thêm 1 đơn vị, rồi 1 đơn vị, thì để giữ độ thỏa dụng không đổi, nhà đầu tư yêu cầu mức tăng thêm của suất sinh lợi kỳ vọng ngày một cao hơn. Theo hướng tây-bắc, độ thỏa dụng của nhà đầu tư sẽ tăng lên: $U_3 > U_2 > U_1$.

Danh mục đầu tư

Một danh mục đầu tư bao gồm nhiều tài sản (hay dự án đầu tư hay công cụ tài chính) khác nhau. Giả sử nhà đầu tư chỉ nắm giữ một danh mục đầu tư gồm hai tài sản với trọng số (tỷ lệ đầu tư), suất sinh lợi kỳ vọng và độ lệch chuẩn như sau:

Tài sản	Trọng số	Suất sinh lợi kỳ vọng	Độ lệch chuẩn
X	w_X	$E(r_X) = \bar{r}_X$	σ_X
Y	w_Y	$E(r_Y) = \bar{r}_Y$	σ_Y

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục đầu tư bằng bình quân trọng số của suất sinh lợi kỳ vọng của các tài sản riêng rẽ trong danh mục:

$$E(r_P) = \bar{r}_P = w_X \bar{r}_X + w_Y \bar{r}_Y$$

Độ rủi ro của danh mục đầu tư không chỉ phụ thuộc vào độ lệch chuẩn của suất sinh lợi của các tài sản riêng rẽ trong danh mục, mà còn phụ thuộc vào sự tương tác giữa suất sinh lợi của các tài sản. Những sự tương tác này được biểu diễn bởi tích sai (Cov) hay hệ số tương quan (ρ).

Phương sai của danh mục đầu tư:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= w_X^2 \sigma_X^2 + w_Y^2 \sigma_Y^2 + 2w_X w_Y \text{Cov}(r_X, r_Y) \\ &= w_X^2 \sigma_X^2 + w_Y^2 \sigma_Y^2 + 2w_X w_Y \sigma_X \sigma_Y \rho_{XY} \end{aligned}$$

Tổng quát hóa, ta có một danh mục đầu tư P với N tài sản:

- ✓ Tài sản i có suất sinh lợi kỳ vọng: \bar{r}_i
- ✓ Suất sinh lợi của tài sản i có phương sai: $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$
- ✓ Tích sai giữa suất sinh lợi của tài sản i và j : σ_{ij}
- ✓ Trọng số của các tài sản trong danh mục: w_1, w_2, \dots, w_N .

Tổng của các trọng số là 100%:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_N = \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục:

$$E(r_P) = \bar{r}_P = w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + \dots + w_N \bar{r}_N = \sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i$$

Phương sai của suất sinh lợi của danh mục:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= w_1^2 \sigma_{11} + w_1 w_2 \sigma_{12} + \dots + w_1 w_N \sigma_{1N} \\ &\quad + w_2 w_1 \sigma_{21} + w_2^2 \sigma_{22} + \dots + w_2 w_N \sigma_{2N} \\ &\quad + \dots + w_N w_1 \sigma_{N1} + w_N w_2 \sigma_{N2} + \dots + w_N^2 \sigma_{NN} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j \end{aligned}$$

Ta có thể biểu diễn các công thức trên dưới dạng ma trận.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\bar{R}} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \dots \\ \bar{r}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

Tổng của các trọng số là 100%:

$$\sum_{i=1}^N w_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \mathbf{1}^T \mathbf{W} = 1$$

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục:

$$w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + \dots + w_N \bar{r}_N = \sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i = [\bar{r}_1 \quad \bar{r}_2 \quad \dots \quad \bar{r}_N] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \mathbf{\bar{R}}^T \mathbf{W} = \bar{r}_P$$

Phương sai của suất sinh lợi của danh mục:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_N] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \mathbf{W}^T \mathbf{\Delta W} = \sigma_P^2$$

Rủi ro đặc thù, rủi ro hệ thống và đa dạng hóa

Khi danh mục đầu tư chỉ bao gồm một loại tài sản, ví dụ như cổ phiếu của một công ty, thì rủi ro của danh mục hoàn toàn là rủi ro của cổ phiếu đó. Rủi ro của cổ phiếu, như đã trình bày, được đo bằng độ biến thiên của suất sinh lợi, do tác động của các yếu tố chung của thị trường và nền kinh tế (như lạm phát, tỷ giá hối đoái, chu kỳ kinh doanh,...) và các yếu tố đặc thù của bản thân doanh nghiệp phát hành cổ phiếu.

Rủi ro do các yếu tố chung tạo ra được gọi là rủi ro hệ thống vì nó tác động đến tất cả các loại tài sản trên thị trường. Rủi ro do các yếu tố riêng của tài sản tạo ra được gọi là rủi ro đặc thù.

Khi ta kết hợp nhiều loại tài sản với nhau trong một danh mục đầu tư thì rủi ro đặc thù của cả danh mục được giảm xuống do các yếu tố tác động đến rủi ro đặc thù của các loại tài sản riêng rẽ trong danh mục là khác nhau và có thể triệt tiêu lẫn nhau. Nếu số lượng tài sản trong danh mục là đủ lớn thì rủi ro đặc thù của danh mục sẽ được loại bỏ. Ngược lại, vì rủi ro hệ thống tác động đến mọi tài sản, nó vẫn luôn hiện hữu trong danh mục đầu tư.

Ta có thể chứng minh kết quả trên trong một danh mục đầu tư gồm N tài sản với mỗi tài sản đều có suất sinh lợi kỳ vọng và phương sai bằng nhau. Tích sai giữa suất sinh lợi của các tài sản cũng như nhau.

Danh mục đầu tư P gồm N tài sản có trọng số như nhau. Với $i, j = 1, 2, \dots, N$, ta có:

- ✓ trọng số $w_i = 1/N$
- ✓ suất sinh lợi kỳ vọng $E(r_i) = \mu$
- ✓ phương sai của suất sinh lợi $\text{var}(r_i) = \nu$
- ✓ tích sai của suất sinh lợi $\text{cov}(r_i, r_j) = c$.

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục:

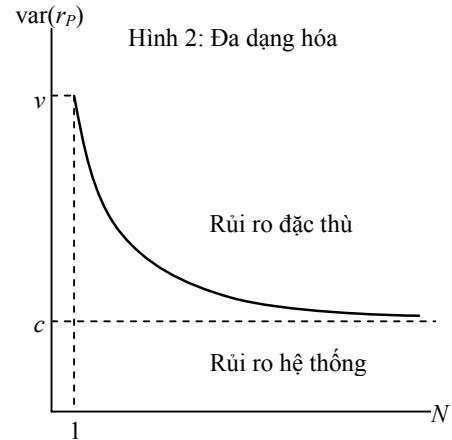
$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(r_i) = N(1/N)\mu = \mu$$

Độ lệch chuẩn của danh mục:

$$\begin{aligned} \text{var}(r_p) &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & c & \dots & c \\ c & v & \dots & c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & c & \dots & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/N \\ 1/N \\ \dots \\ 1/N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v/N + c(N-1)/N \\ v/N + c(N-1)/N \\ \dots \\ v/N + c(N-1)/N \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{N} v + \left(1 - \frac{1}{N}\right) c \end{aligned}$$

Khi số lượng tài sản trong danh mục P đủ lớn, thì phương sai của danh mục bằng c .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}(r_p) = c$$



Phân bổ đầu tư thụ động giữa hai tài sản rủi ro

Một nhà đầu tư dự định bỏ tiền vào hai loại tài sản: bất động sản và chỉ số thị trường chứng khoán. Câu hỏi đặt ra là nhà đầu tư phải bỏ tiền theo tỷ lệ bao nhiêu vào hai tài sản này để có được một danh mục đầu tư tối ưu.

Tài sản	Trọng số	Suất sinh lợi kỳ vọng	Độ lệch chuẩn
Bất động sản	w_1	$E(r_1) = \bar{r}_1 = 0,20$	$\sigma_1 = 0,40$
Chứng khoán	w_2	$E(r_2) = \bar{r}_2 = 0,12$	$\sigma_2 = 0,25$

Hệ số tương quan: $\rho_{12} = 0,2$ hay tích sai: $\text{Cov}(r_1, r_2) = \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0,02$

Với một tỷ trọng nhất định trong danh mục đầu tư, ta có thể tính suất sinh lợi kỳ vọng và độ lệch chuẩn cho cả danh mục.

$$\bar{r}_P = w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 = w_1 \bar{r}_1 + (1 - w_1) \bar{r}_2 \quad (1) \Rightarrow w_1 = \frac{\bar{r}_P - \bar{r}_2}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2} \text{ và } w_2 = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_P}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2} \quad (2)$$

$$\sigma_P^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12} \quad (3)$$

Thay (2) vào (3), ta có:

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{\bar{r}_P - \bar{r}_2}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_P}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2} \right)^2 \sigma_2^2 + 2 \frac{(\bar{r}_P - \bar{r}_2)(\bar{r}_1 - \bar{r}_P)}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2} \sigma_{12}$$

$$\sigma_P^2 = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})\bar{r}_P^2 - 2[\bar{r}_1\sigma_2^2 + \bar{r}_2\sigma_1^2 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\sigma_{12}]\bar{r}_P + (\bar{r}_1^2\sigma_2^2 + \bar{r}_2^2\sigma_1^2 - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12})}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}$$

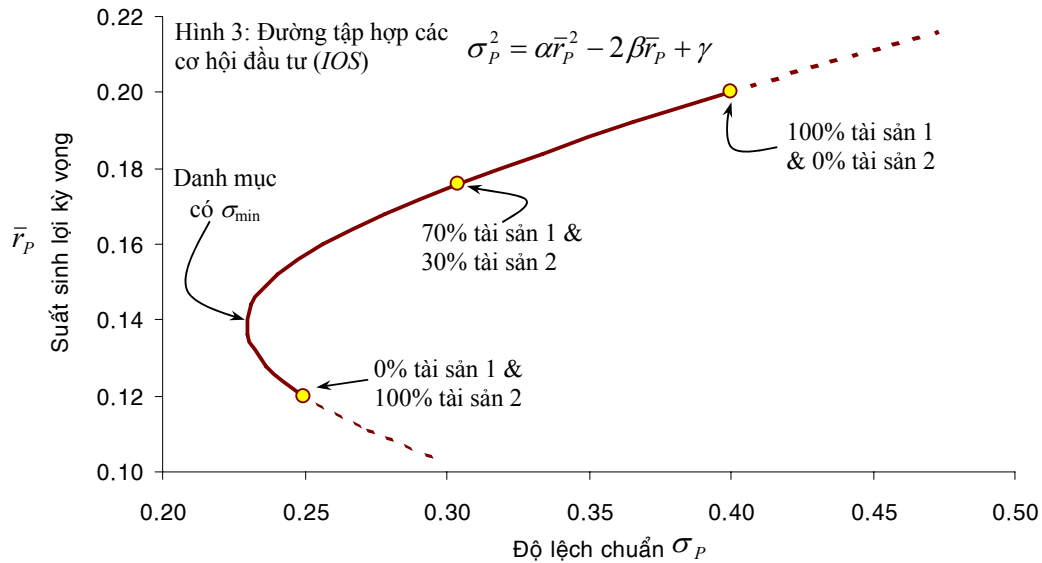
$$\text{Đặt } \alpha = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}; \beta = \frac{\bar{r}_1\sigma_2^2 + \bar{r}_2\sigma_1^2 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}; \gamma = \frac{\bar{r}_1^2\sigma_2^2 + \bar{r}_2^2\sigma_1^2 - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}$$

$$\text{Ta có: } \sigma_P^2 = \alpha \bar{r}_P^2 - 2\beta \bar{r}_P + \gamma \quad (4)$$

Thay số vào (4) ta có:

$$\sigma_P^2 = 28,52\bar{r}_P^2 - 7,91\beta\bar{r}_P + 0,60 \quad (5)$$

Biểu diễn (5) trên đồ thị với trục tọa độ suất sinh lợi kỳ vọng và độ lệch chuẩn, ta được một đường cong, mà mỗi điểm trên đó ứng với một danh mục đầu tư có suất sinh lợi kỳ vọng \bar{r}_P và độ lệch chuẩn σ_P . Đường cong này được gọi là *tập hợp các cơ hội đầu tư (IOS)*. Việc đầu tư vào hai tài sản theo các tỷ lệ khác nhau cho ta những điểm khác nhau trên đường *IOS*.

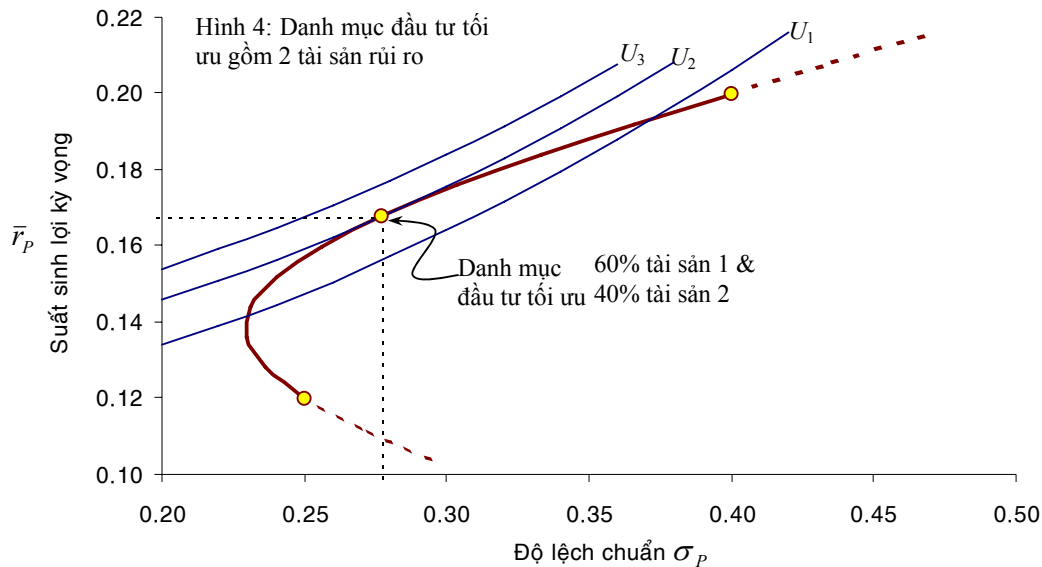


Vấn đề đặt ra là làm thế nào để chọn được danh mục tối ưu trên *IOS*. Để làm được điều này, ta phải kết hợp đường *IOS* với các đường đẳng dụng. Ta trở về với bài toán tối ưu hóa thông thường: tối đa hóa độ thỏa dụng với ràng buộc là danh mục đầu tư nằm trên đường *IOS*.

Danh mục đầu tư là tối ưu khi *IOS* tiếp xúc với đường đẳng dụng cao nhất trên hình 4. Tại tiếp điểm, độ dốc của đường đẳng dụng và đường *IOS* bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Độ dốc của đường } IOS: \frac{d\bar{r}_P}{d\sigma_P}|_{IOS} = \frac{\sigma_P}{\alpha\bar{r}_P - \beta} \\ \text{Độ dốc của đường đẳng dụng: } \frac{d\bar{r}_P}{d\sigma_P}|_{\bar{U}} = A\sigma_P \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Tại tiếp điểm: } \frac{\sigma_P}{\alpha\bar{r}_P - \beta} = A\sigma_P \\ \text{hay } \bar{r}_P = \frac{1}{\alpha} \left(\beta + \frac{1}{A} \right). \text{ Từ đó, ta} \\ \text{xác định được danh mục } P. \end{array}$$

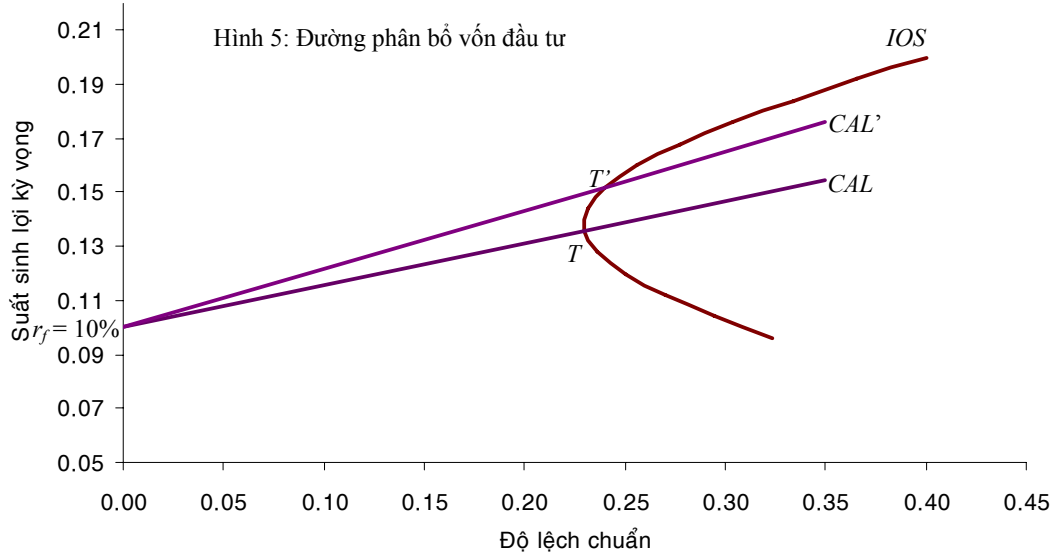
Thay số ta có danh mục tối ưu với $\bar{r}_P^* = 16,79\%$ và $\sigma_P^* = 27,74\%$. Trọng số của danh mục này là $w_1^* = 59,8\%$ và $w_2^* = 40,2\%$



Phân bổ đầu tư thụ động giữa hai tài sản rủi ro và tài sản phi rủi ro

Bây giờ, bên cạnh thị trường chứng khoán và bất động sản, nhà đầu tư có thể gửi tiền một cách an toàn vào ngân hàng (do có bảo hiểm tiền gửi) với lãi suất $r_f = 10\%$.

Nhà đầu tư sẽ vẫn chỉ đầu tư vào hai tài sản rủi ro như trên hay sẽ bỏ ra một phần tiền để gửi ngân hàng? Và nếu nhà đầu tư có gửi ngân hàng thì sẽ gửi với tỷ lệ bao nhiêu và đầu tư vào hai tài sản rủi ro với tỷ lệ như thế nào?



Tiền gửi vào ngân hàng là một tài sản phi rủi ro. Độ lệch chuẩn của suất sinh lợi của nó bằng 0. Biểu diễn trên đồ thị thì tài sản phi rủi ro này sẽ nằm ngay trên trục tung (trục suất sinh lợi kỳ vọng) với tung độ bằng r_f .

Ký hiệu w_0 , w_1 , w_2 là tỷ trọng đầu tư tương ứng vào tiền gửi ngân hàng, bất động sản và chỉ số chứng khoán. Điều này tương đương với việc nhà đầu tư bỏ tiền một phần vào tiền gửi ngân hàng (w_0) và một phần ($w = w_1 + w_2$) và danh mục T bao gồm bất động sản và chỉ số chứng khoán. Trên đồ thị, danh mục của nhà đầu tư sẽ nằm trên đường thẳng nối điểm biểu diễn tài sản phi rủi ro trên trục tung và danh mục T trên đường IOS . Đường thẳng này được gọi là *đường phân bổ vốn đầu tư* (CAL).

Như vậy, sau khi có được đường IOS , nhà đầu tư sẽ phải thực hiện hai việc nữa: (i) xác định danh mục T trên IOS và (ii) xác định doanh mục tối ưu cuối cùng P bằng cách kết hợp T và tài sản phi rủi ro.

Chúng ta thấy danh mục T' ưu thế hơn danh mục T vì đường CAL' nằm trên đường CAL và như vậy bất cứ danh mục nào trên đường CAL sẽ có một danh mục tương ứng trên đường CAL' với độ lệch chuẩn tương đương nhưng suất sinh lợi kỳ vọng cao hơn.

Nhà đầu tư sẽ chọn danh mục T trên đường IOS sao cho đường CAL vừa đúng tiếp xúc với IOS . Chính vì vậy, danh mục T có tên gọi là danh mục *tiếp xúc*.

Ta thấy trong số các đường CAL , đường CAL tiếp xúc với đường IOS là có độ dốc cao nhất. Độ dốc của đường CAL được biểu diễn bởi: $S = \frac{\bar{r}_T - r_f}{\sigma_T}$ (S có tên gọi là hệ số

Sharpe). Nhớ rằng vì T nằm trên IOS nên: $\sigma_T^2 = \alpha \bar{r}_T^2 - 2\beta \bar{r}_T + \gamma$

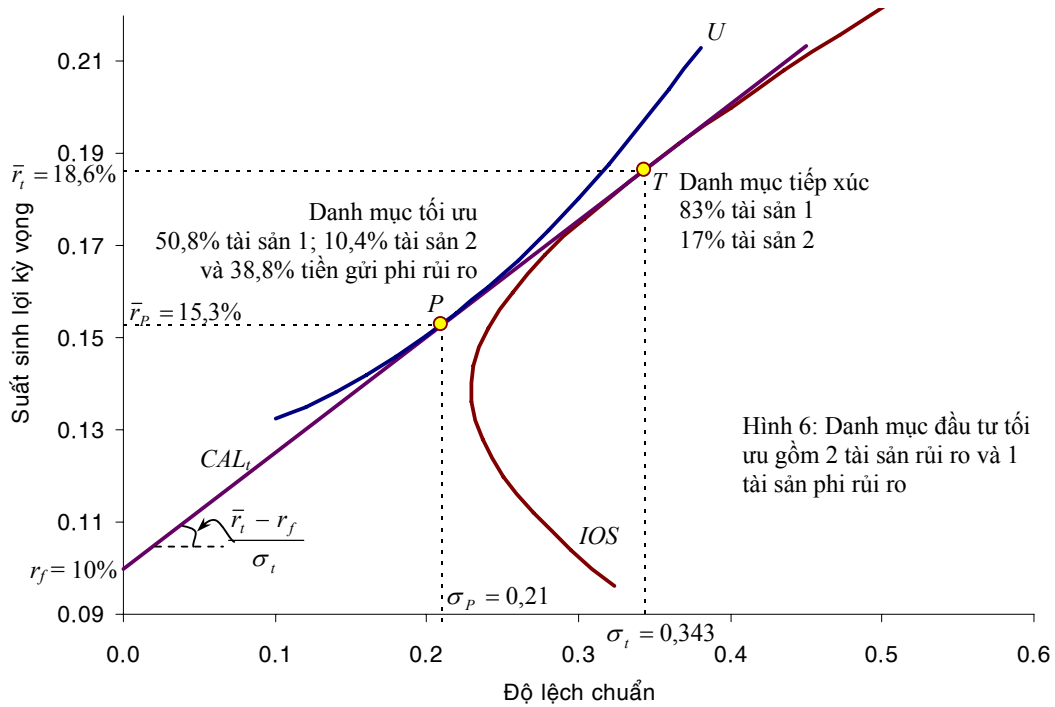
Ta có: $S = \frac{\bar{r}_t - r_f}{\sqrt{\alpha \bar{r}_t^2 - 2\beta \bar{r}_t + \gamma}}$ đạt giá trị cực đại khi $\bar{r}_t = \frac{\gamma - \beta r_f}{\beta - \alpha r_f}$

Trong danh mục T , tỷ trọng tài sản 1 là w_{t1} và tỷ trọng tài sản 2 là w_{t2} ($w_{t1} + w_{t2} = 1$).

$$w_{t1} = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2} \text{ và } w_{t2} = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_t}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}$$

Thay số ta có danh mục T với $\bar{r}_t = 18,64\%$ và $\sigma_t = 34,30\%$. Trọng số của danh mục T là $w_{t1} = 83,0\%$ và $w_{t2} = 17,0\%$. Hệ số Sharp, $S_t = 0,252$

Sau khi xác định được danh mục tiếp xúc T trên đường IOS , việc tiếp theo của nhà đầu tư là quyết định xem bỏ tiền với tỷ lệ bao nhiêu vào tài sản phi rủi ro (tiền gửi) và danh mục T .



Danh mục đầu tư tối ưu (P) sẽ là một điểm trên đường CAL_t , ở đó nhà đầu tư đạt độ thỏa dụng cao nhất. Như vậy, P là tiếp điểm của đường đẳng dụng U và đường phân bổ vốn CAL_t .

Tại P , độ dốc của đường đẳng dụng vào đường CAL_t bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Độ dốc của đường } CAL_t: S_t = \frac{\bar{r}_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{\bar{r}_t - r_f}{\sigma_t} \\ \text{Độ dốc của đường đẳng dụng: } \left. \frac{d\bar{r}_P}{d\sigma_P} \right|_{\bar{U}} = A\sigma_P \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Tại tiếp điểm: } A\sigma_P = S_t \text{ hay} \\ \sigma_P = \frac{S_t}{A} \end{array}$$

Nhà đầu tư bỏ tiền vào danh mục phi rủi ro với tỷ lệ w_0 và vào danh mục T với tỷ lệ $(1 - w_0)$. Ta có: $\sigma_P = (1 - w_0)\sigma_t = S_t/A$. Hay, $w_0 = 1 - S_t/(A\sigma_t)$. Vậy, ta xác định được tỷ trọng của tài sản phi rủi ro và các tài sản rủi ro trong danh mục đầu tư tối ưu P .

Thay số ta có danh mục tối ưu P với $\bar{r}_P = 15,29\%$ và $\sigma_P = 20,99\%$. Trọng số của danh mục P là $w_0 = 38,8\%$, $w_1 = 50,8\%$ và $w_2 = 10,4\%$.

Chúng ta thấy là nếu các nhà đầu tư đối diện với cùng một đường tập hợp các cơ hội đầu tư IOS thì họ sẽ cùng chọn một danh mục gồm các tài sản rủi ro như nhau (danh mục T). Sau đó, tùy theo sở thích riêng rẽ của mình mà mỗi nhà đầu tư sẽ chọn bỏ tiền một phần vào danh mục rủi ro T và một phần vào tài sản phi rủi ro.

Giả sử, một nhà đầu tư khác chọn một danh mục tối ưu của mình P' trên đường CAL với đòi hỏi suất sinh lợi kỳ vọng là $\bar{r}_P' = 25,00\%$, tương ứng với độ lệch chuẩn suất sinh lợi $\sigma_P = 59,56\%$. Như vậy, so với trước, nhà đầu tư này muốn suất sinh lợi kỳ vọng cao hơn, nhưng tương ứng sẽ phải chấp nhận mức độ rủi ro cao hơn. Để có được danh mục này, nhà đầu tư sẽ phải đảm bảo trọng số $w_0 = -73,7\%$, $w_1 = 144,1\%$ và $w_2 = 29,6\%$. Tức là, nhà đầu tư sẽ đi vay một khoản bằng 73,7% giá trị vốn tự có của mình rồi dùng toàn bộ tiền tự có cộng với tiền vay để đầu tư vào tài sản 1 và 2 theo tỷ lệ 83:17.

Tóm lại quy trình thiết lập một danh mục đầu tư tối ưu bao gồm các bước sau:

1. Xác định các thông số của các tài sản định đầu tư (suất sinh lợi kỳ vọng, phương sai và tích sai).
2. Xác định đường tập hợp các cơ hội đầu tư vào các tài sản rủi ro.
(Trong trường hợp chỉ có 2 tài sản rủi ro như ví dụ trên, ta có thể xác định ngay được IOS . Đối với nhiều tài sản, để xác định IOS , ta phải làm phải toán tối ưu là xác định tất cả các tập hợp đầu tư mà ứng với một suất sinh lợi kỳ vọng nhất định, ta có được độ lệch chuẩn nhỏ nhất).
3. Xác định danh mục đầu tư tiếp xúc trên đường tập hợp các cơ hội đầu tư (đó là danh mục nằm ở tiếp điểm giữa đường phân bổ vốn và đường IOS).
4. Dựa trên sở thích riêng về sự đánh đổi giữa suất sinh lợi kỳ vọng và rủi ro, mỗi nhà đầu tư sẽ chọn đầu tư một phần vào tài sản phi rủi ro và một phần vào danh mục tiếp xúc.

Phụ lục 1: Tài sản phi rủi ro

Do có quyền đánh thuế và có khả năng kiểm soát mức cung tiền tệ, chỉ có chính phủ mới có thể phát hành các trái phiếu không có rủi ro vỡ nợ. Tuy nhiên, kể cả khi không có rủi ro vỡ nợ thì trái phiếu vẫn chịu rủi ro lãi suất và rủi ro lạm phát. Rủi ro lạm phát chỉ có thể được loại bỏ khi trái phiếu được phát hành dưới hình thức trái phiếu có lãi suất được hiệu chỉnh theo chỉ số giá. Tức là lãi suất của trái phiếu bằng một mức cố định cộng với tỷ lệ lạm phát trong giai đoạn trước đó. Hơn thế nữa, một trái phiếu chỉ số chỉ hoàn toàn không có rủi ro về lãi suất thực khi có kỳ hạn đúng bằng với thời gian mà nhà đầu tư muốn nắm giữ. Nhưng ngay cả trái phiếu chính phủ được hiệu chỉnh theo chỉ số giá vẫn phải chịu rủi ro lãi suất, bởi vì lãi suất thay đổi bất ngờ theo thời gian. Khi mức lãi suất trong tương lai không chắc chắn, thì mức giá trái phiếu trong tương lai cũng không chắc chắn.

Tuy nhiên, người ta thường coi tín phiếu kho bạc (ví dụ tín phiếu kho bạc kỳ hạn 3 tháng) là tài sản tài chính không có rủi ro. Tính chất ngắn hạn của loại phiếu này làm cho giá trị của nó không bị tác động nhiều bởi biến động lãi suất. Trên thực tế, nhà đầu tư có thể cố định tỷ suất lợi nhuận ngắn hạn bằng cách mua 1 tín phiếu và giữ nó cho tới khi đáo hạn. Hơn thế nữa, tính chất không chắc chắn của tỷ lệ lạm phát trong thời gian 182 ngày thường không đáng kể so với tính chất không chắc chắn của các tỷ suất lợi nhuận khác trên thị trường chứng khoán.

Trên thực tế, hầu hết các nhà đầu tư đều coi nhiều công cụ thị trường tiền tệ là tài sản không rủi ro. Hầu hết các công cụ thị trường tiền tệ đều gần như không chịu rủi ro lãi suất do có kỳ hạn ngắn và tương đối an toàn về khả năng trả nợ (rủi ro tín dụng gần bằng 0).

Các quỹ đầu tư vào thị trường tiền tệ thường nắm giữ ba loại chứng khoán - tín phiếu kho bạc, chứng chỉ tiền gửi ngân hàng và thương phiếu. Tuy nhiên, các công cụ này cũng khác nhau về rủi ro vỡ nợ. Lợi suất cho tới khi đáo hạn của chứng chỉ tiền gửi và thương phiếu có cùng kỳ hạn thường cao hơn lợi suất của tín phiếu kho bạc.

Phụ lục 2: Lý thuyết danh mục đầu tư trường hợp nhiều tài sản

I. Xác định đường tập hợp các cơ hội đầu tư vào các tài sản rủi ro

1. Tài sản rủi ro: $1, 2, \dots, N$.

- ✓ Tài sản i có suất sinh lợi kỳ vọng: \bar{r}_i
- ✓ Suất sinh lợi của tài sản i có phương sai: $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$
- ✓ Đồng phương sai (tích sai) giữa suất sinh lợi của tài sản i và j : σ_{ij}
- ✓ Tỷ lệ đầu tư vào các tài sản: w_1, w_2, \dots, w_N .

2. Ta có thể biểu diễn các công thức trên dưới dạng ma trận.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \dots \\ \bar{r}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\text{Tổng của các trọng số là 100\%:} \quad \sum_{i=1}^N w_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \mathbf{1}^T \mathbf{W} = 1$$

$$\text{Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục:} \quad \sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \dots & \bar{r}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} = \bar{r}_p$$

Phương sai của suất sinh lợi của danh mục:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \mathbf{W}^T \mathbf{\Delta} \mathbf{W} = \sigma_p^2$$

3. Đối với mỗi suất sinh lợi kỳ vọng nhất định theo yêu cầu, nhà đầu tư muốn xây dựng một danh mục sao cho phương sai của suất sinh lợi có giá trị nhỏ nhất.

Vậy, nhà đầu tư muốn tối thiểu hóa $\sigma_p^2 = \mathbf{W}^T \mathbf{\Delta} \mathbf{W}$ trên cơ sở thỏa mãn các ràng buộc:

$$\mathbf{1}^T \mathbf{W} = 1 \quad (1) \quad \text{và} \quad \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} = \bar{r}_p \quad (2)$$

Ta có phương trình Lagrangian sau đây:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} + \lambda(1 - \mathbf{1}^T \mathbf{W}) + \gamma(\bar{r}_p - \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}) \quad (3)$$

Điều kiện cần của tối thiểu hóa:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = \Delta \mathbf{W} - \lambda \mathbf{1} - \gamma \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0} & (4) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{W} = 0 & (5) \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \bar{r}_p - \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} = 0 & (6) \end{cases}$$

Từ (4), ta có các tỷ trọng tài sản tối ưu:

$$\mathbf{W}^* = \lambda \Delta^{-1} \mathbf{1} + \gamma \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}} \quad (7)$$

Thế (7) vào (5) và (6) ta được hệ phương trình với hai ẩn số là λ và γ .

$$\begin{cases} (\mathbf{1}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) \lambda + (\mathbf{1}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}) \gamma = 1 \\ (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) \lambda + (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}) \gamma = \bar{r}_p \end{cases}$$

Đặt $A = \mathbf{1}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}$; $B = \mathbf{1}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}$; $C = \bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}$; và $D = AC - B^2$. Ta có:

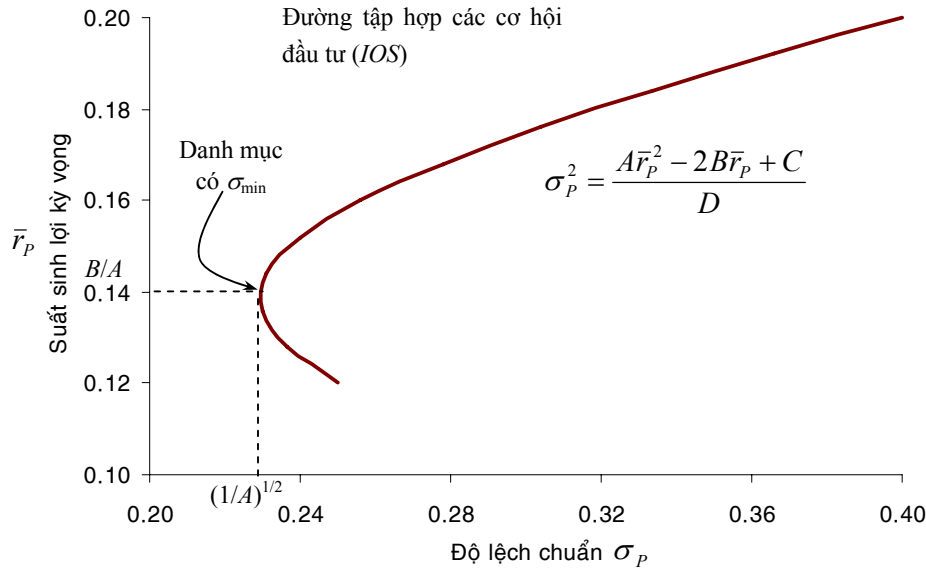
$$\begin{cases} A\lambda + B\gamma = 1 \\ B\lambda + C\gamma = \bar{r}_p \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{C - B\bar{r}_p}{D} \quad \text{và} \quad \gamma = \frac{A\bar{r}_p - B}{D}$$

Phương trình phương sai của suất sinh lợi danh mục đầu tư:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \Delta (\lambda \Delta^{-1} \mathbf{1} + \gamma \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}) \\ &= \lambda \mathbf{W}^T \mathbf{1} + \gamma \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{R}} \\ &= \lambda + \gamma \bar{r}_p \end{aligned}$$

4. Phương trình đường tập hợp các cơ hội đầu tư:

$$\sigma_p^2 = \frac{A\bar{r}_p^2 - 2B\bar{r}_p + C}{D} \quad (8)$$



II. Xây dựng danh mục đầu tư với N tài sản rủi ro và tài sản phi rủi ro

1. Tài sản phi rủi ro có suất sinh lợi r_f . Tỷ lệ đầu tư vào tài sản phi rủi ro: w_0

Tỷ lệ đầu tư vào các tài sản rủi ro: w_1, w_2, \dots, w_N

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_N = 1 \quad \text{hay} \quad w_0 + \mathbf{1}^T \mathbf{W} = 1 \quad \text{hay} \quad w_0 = 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{W}$$

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục:

$$\begin{aligned} \bar{r}_p &= r_f w_0 + \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} = r_f (1 - \mathbf{1}^T \mathbf{W}) + \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \\ \bar{r}_p &= r_f + (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{W} \end{aligned} \quad (9)$$

2. Đối với mỗi suất sinh lợi kỳ vọng nhất định theo yêu cầu, nhà đầu tư muốn xây dựng một danh mục sao cho phương sai của suất sinh lợi có giá trị nhỏ nhất.

Vậy, nhà đầu tư muốn tối thiểu hóa $\sigma_p^2 = \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W}$ trên cơ sở thỏa mãn ràng buộc (9).

Phương trình Lagrangian:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} + \gamma [\bar{r}_p - r_f - (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{W}] \quad (10)$$

Điều kiện cần của tối thiểu hóa:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = \Delta \mathbf{W} - \gamma (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad (11)$$

Các tỷ trọng tài sản rủi ro tối ưu:

$$\mathbf{W}^* = \gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) \quad (12)$$

Thế (7) vào (9):

$$\begin{aligned}\bar{r}_p &= r_f + (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})^T \gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) \\ \bar{r}_p - r_f &= \gamma [(\bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}) + (\mathbf{1}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) r_f^2 - 2(\bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) r_f] = \gamma (A r_f^2 - 2B r_f + C)\end{aligned}$$

Vậy:

$$\gamma = \frac{\bar{r}_p - r_f}{A r_f^2 - 2B r_f + C} \quad (13)$$

3. Phương trình phương sai của suất sinh lợi danh mục đầu tư:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \Delta [\gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})] \\ &= \gamma \mathbf{W}^T (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) \\ &= \gamma (\bar{r}_p - r_f)\end{aligned} \quad (14)$$

4. Đường thị trường vốn:

Thế (13) vào (14) rồi rút gọn, ta được:

$$\sigma_p = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sqrt{A r_f^2 - 2B r_f + C}} \quad (15)$$

Đường phân bổ vốn (*CAL*) là một tia đi từ vị trí của tài sản phi rủi ro và tiếp xúc với đường *IOS* tại một danh mục có tên gọi là danh mục tiếp xúc *T*.

5. Xác định danh mục tiếp xúc *T*

T vừa nằm trên *CML* vừa nằm trên *IOS*. *T* không chứa tài sản phi rủi ro nên ta có:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}^T \mathbf{W}_t &= 1 \quad \text{và} \quad \mathbf{W}_t = \gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) \quad [\text{từ phương trình (12)}] \Rightarrow \\ &\circ \quad \mathbf{1}^T \gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) = 1 \\ &\circ \quad \gamma (\mathbf{1}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) = 1 \\ &\circ \quad \gamma = (B - A r_f)^{-1}\end{aligned}$$

Vậy,

$$\mathbf{W}_t = (B - A r_f)^{-1} \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})$$

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục *T*:

$$\bar{r}_t = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}_t = \frac{C - B r_f}{B - A r_f}$$

Phương sai của suất sinh lợi của danh mục *T*:

$$\sigma_t^2 = \mathbf{W}_t^T \Delta \mathbf{W}_t = \frac{\bar{r}_t - r_f}{B - A r_f}$$

5. Danh mục tối ưu, P

Nhà đầu tư sẽ chọn danh mục đầu tư tối ưu bằng cách đầu tư một phần tiền vào danh mục tiếp xúc T và phần còn lại vào tài sản phi rủi ro tùy theo sở thích của mình về sự đánh đổi giữa suất sinh lợi kỳ vọng và rủi ro.

