TRƯỜNG THPT THANH THỦY

ĐỀ ÔN TẬP

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi có 05 trang)

I. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Bài 1 (2,0 điểm).

1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 - 2mx^2 + m^2 - 3$ có ba điểm cực trị A, B, C cùng với gốc tọa độ O tạo thành 4 đỉnh của một hình thoi.

2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $y = m(x+2)$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến với đồ thị (C) tại ba điểm đó tạo thành tam giác vuông.

Bài 2 (1,0 điểm). Cho phương trình: $\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

Bài 3 (3,0 điểm).

1. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a.

a. Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC).

b. Gọi G là trọng tâm tam giác $AA'B$, I là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'G$ và $A'I$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AD, SA sao cho $MC = 2MB, NA = 2ND, AP = 2SP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện $(H_1), (H_2)$ có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với (H_2) là khối đa diện chứa đỉnh A. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

Câu 4 (2,0 điểm). Một bài thi trắc nghiệm có 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được $0,2$ điểm, mỗi câu trả lời sai được 0 điểm. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên mỗi câu một phương án trả lời. Hỏi điểm số nào có xác suất xuất hiện lớn nhất?

II. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (12,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $M(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $M(5;0)$. **D.** $M(0;5)$.

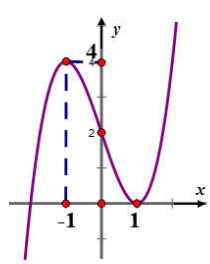
Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x-1)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y = \log(\cos x + 2)$ bằng

A. $\frac{\sin x}{(\cos x+2)\ln 10}$. **B.** $\frac{-\sin x}{\cos x+2}$. **C.** $\frac{-\sin x}{(\cos x+2)\ln 10}$. **D.** $\frac{1}{(\cos x+2)\ln 10}$.

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới



Tất cả các giá trị thực m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $1 < m < 5$. **B.** $-1 < m < 4$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $0 < m < 5$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-1		

Khoảng đồng biến của hàm số là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$, $AC = 3$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tròn xoay có được bằng cách quay hình tam giác ABC quanh cạnh AB và cạnh AC. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 4.

Câu 7. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3;5]$. Tính giá trị của $M - m$

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+3)^2(x-2)^3(x+5)$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 9. Cho hình chóp tam giác đều $S\,ABC$ cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{a^3}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{a^3}{24}$.

Câu 10. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = 2a$, gócgiữa $A'B$ và (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}a^3$. **B.** $\sqrt{6}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{9}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 1) < \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 12. Đồ thị của hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang?

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. **B.** $y = \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$.

C. $y = \frac{3x+1}{x-1}$. **D.** $y = x^4 + x^2$.

Câu 13. Một công ty sản xuất hộp đựng sữa loại 900gram dạng hình trụ có thể tích V không đổi. Giá thành của vật liệu làm đáy hộp và vỏ xung quanh của hộp là bằng nhau và bằng một nửa giá thành của vật liệu làm nắp hộp. Hỏi tỉ lệ chiều cao h và bán kính đáy R của hộp đựng sữa bằng bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất ?

A. $\frac{h}{R} = 2$. **B.** $\frac{h}{R} = \sqrt{2}$. **C.** $\frac{h}{R} = \sqrt{3}$. **D.** $\frac{h}{R} = 3$.

Câu 14. Cho phương trình $\sqrt{16\ln x + m - 4} = \ln^2(x^2) - 18\ln x + 4 - m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2021]$ để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thực phân biệt. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2018. **B.** 2034. **C.** 2042. **D.** 25.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB cân tại S. Góc giữa SA và mặt đáy bằng $45°$, góc giữa (SAB) và mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

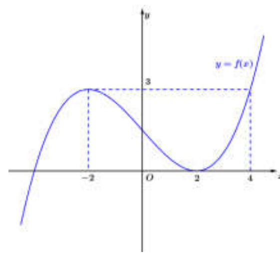
Câu 16. Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam vào 12 ghế thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có bất kỳ hai học sinh nam nào ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{7}{99}$. **B.** $\frac{1}{132}$. **C.** $\frac{7}{264}$. **D.** $\frac{7}{11880}$.

Câu 17. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị của tham số nguyên $m \in [-2021;2021]$ để hàm số $y=(x+m-1)\sqrt{x+2}-3mx+2021m$ nghịch biến trên $(2;34)$. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 2038.

Câu 18. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d \in R)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\frac{1}{f(4-x^2)-3}$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19. Trong khai triển nhị thức $\left(x-\sqrt{y}\right)^{16}$ theo số mũ của x giảm dần, hai số hạng cuối là

A. $-16xy^{15}, y^8$. **B.** $16xy^{15}, y^4$. **C.** $-16xy^{\frac{15}{2}}, y^8$. **D.** $-16x, y^4$.

Câu 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=BC=a$ và $CC'=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và AA'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'D'$ và MN bằng

A. $\frac{5a\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\frac{5a\sqrt{17}}{68}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{17}}{68}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{17}}{76}$.

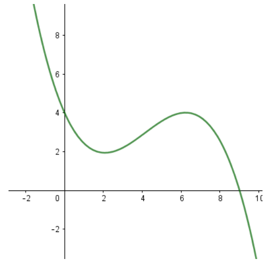
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có độ dài chiều cao bằng 9 và đáy là hình bình hành có diện tích bằng 30. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA. Tính thể tích khối đa diện có đỉnh là các điểm M,N,P,Q,B và D.

A. $\frac{50}{9}$. **B.** $\frac{50}{3}$. **C.** 50. **D.** $\frac{25}{6}$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $4^x-m.2^x+2m-5=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu số âm?



A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		0		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 25. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $\log(x+2y)=\log(x)+\log(y)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{1+2y}+\dfrac{4y^2}{1+x}$ là

A. $\dfrac{32}{5}$. **B.** $\dfrac{29}{5}$. **C.** 6. **D.** $\dfrac{31}{5}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{-3\pi}{2};2\pi\right]$ của phương trình $3f(cos2x)-4=0$ là

A. 14. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 16.

Câu 27. Cho hai số thực a,b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=15$. Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $\log_b a.\log_a^2 x-2\log_a x-\log_b bx^3=0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T=x_1x_2$

A. 196. **B.** 2744. **C.** 26244. **D.** 2021.

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3=2$ và $u_6=16$. Số hạng thứ 10 củacấp số nhân bằng

A. 512 **B.** 256 **C.** -256 **D.** 1024

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\log_2 x-2}{\log_2 x-m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

A. $m\le -2$ hoặc $m=1$. **B.** $m<-2$. **C.** $m<-2$ hoặc $m>1$. **D.** $m<-2$ hoặc $m=1$.

Câu 30. Cộng vào số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư của một cấp số cộng tăng lần lượt các số $1;2;7$ và 25 ta được bốn số lập thành cấp số nhân. Tìm công sai d của cấp số cộng đó.

A. $d=\dfrac{7}{9}$. **B.** $d=\dfrac{5}{3}$. **C.** $d=\dfrac{1}{3}$. **D.** $d=\dfrac{11}{15}$.

Câu 31. Cho phương trình: $\log_2\left(\dfrac{x^2-mx+m^2}{x+2m}\right)=-x^2+(m+4)x-m^2+8m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt?

A. 13. **B.** 14. **C.** 19. **D.** 8.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K,M lần lượt là các điểm thuộc đoạn thẳng SB,SD sao cho $\dfrac{SK}{SB}=\dfrac{2}{3},\dfrac{SM}{SD}=\dfrac{3}{5}$. Mặt phẳng (AKM) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{5}{11}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{9}{23}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{17}{47}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{19}{46}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=(x-1)\left(x^2-2mx+3m-2\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn $-2021\le m\le 2021$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

A. 2018. **B.** 4040. **C.** 2019. **D.** 4041.

Câu 34. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 35. Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\dfrac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$

A. $T_{\min}=\dfrac{3}{2}$. **B.** $T_{\min}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $T_{\min}=\dfrac{9}{2}$. **D.** $T_{\min}=\dfrac{5}{2}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B. Góc giữa cạnh SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0, $AC=3a, BC=a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$. **B.** $2y'+xy''=\dfrac{2}{x^2}$. **C.** $2y'+xy''=-\dfrac{4}{x^2}$. **D.** $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$.

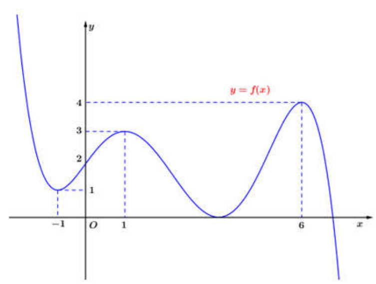
Câu 38. Tìm tất cả tham số m để hàm số $y=(m+1)x^3-(2m-1)x^2+x-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-1<m<1$. **B.** $m\le -\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{4}\le m<2$. **D.** $-\dfrac{1}{4}\le m\le 2$.

Câu 39. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $625^{\frac{x-1}{x}}.3^x=10125$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $S\in(3;4)$. **B.** $S\in(2;3)$. **C.** $S\in(0;1)$. **D.** $S\in(5;6)$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

----------- HẾT ----------

Họ và tên thí sinh:..Số báo danh:..............................

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

I. Phần tự Luận
Bài 1.
1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 - 2mx^2 + m^2 - 3$ có ba điểm cực trị A, B, C cùng với gốc tọa độ O tạo thành 4 đỉnh của một hình thoi.

Lời giải

◆Ta có: $y' = 4mx^3 - 4mx = 4mx\left(x^2 - 1\right)$.

◆ Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì $m \neq 0$.

◆Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

◆ Do đó tọa độ ba điểm cực trị là:
$A\left(0; m^2 - 3\right), B\left(1; m^2 - m - 3\right), C\left(-1; m^2 - m - 3\right)$.

◆ Gọi I là trung điểm của AO. Suy ra: $I\left(0; \dfrac{m^2 - 3}{2}\right)$.

◆ Ta có: $\overrightarrow{BC} = \left(-2; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}} = \left(0; 1\right)$.

◆Phương trình đường thẳng $\left(BC\right)$: $y = m^2 - m - 3$.

◆ Để $ABOC$ là hình thoi thì $I \in BC \Rightarrow \dfrac{m^2 - 3}{2} = m^2 - m - 3 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

◆ Đối chiếu với điều kiện: $m \neq 0$ ta được $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

2. Xét phương trình: $x^3 + 3x^2 - 4 = m\left(x + 2\right) \Leftrightarrow \left(x + 2\right)\left(x^2 + x - 2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x^2 + x - 2 - m = 0 \ (*) \end{array}\right.$.

◆ Đường thẳng $y = m\left(x + 2\right)$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -2. Khi đó: $\begin{cases} \Delta = 1 - 4\left(-2 - m\right) > 0 \\ \left(-2\right)^2 + \left(-2\right) - 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$ (1).

◆ Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $\left(C\right)$ tại các giao điểm là: $y'\left(-2\right) = 0$, $y'\left(x_1\right) = 3x_1^2 + 6x_1$, $y'\left(x_2\right) = 3x_2^2 + 6x_2$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*).

Tiếp tuyến với đồ thị $\left(C\right)$ tại ba điểm đó tạo thành tam giác vuông khi $y'\left(x_1\right).y'\left(x_2\right) = -1$
$\Leftrightarrow \left(3x_1^2 + 6x_1\right)\left(3x_2^2 + 6x_2\right) = -1 \Leftrightarrow 9x_1x_2\left(x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) + 4\right) = -1$ (**).

Theo Công thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = -2 - m \end{cases}$, nên từ (**) ta có:

$9\left(-2 - m\right)\left(-2 - m + 2\left(-1\right) + 4\right) = -1 \Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$.

Đối chiếu với đk (1), ta có giá trị cần tìm là $m = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình
◆ $\log_2\left(2x + m\right) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ x > -\dfrac{m}{2} \end{cases}$

◆ Ta có: $\log_2\left(2x + m\right) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)+1-\log_2 x^2 = x^2-4x-2m$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)+\log_2 2-\log_2 x^2 = x^2-4x-2m$

$\Leftrightarrow \log_2(4x+2m)-\log_2 x^2 = x^2-4x-2m$

$\Leftrightarrow \log_2(4x+2m)+4x+2m = x^2+\log_2 x^2$

◆ Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$.

$\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0$ với $t>0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(4x+2m)=f(x^2) \Leftrightarrow 4x+2m=x^2$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{x^2}{2}-2x$ (1)

◆ Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-2x$ với $x>0 \Rightarrow f'(x)=x-2$.

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

◆ Để phương trình $\log_2(2x+m)-2\log_2 x = x^2-4x-2m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow m\in(-2;0)$.

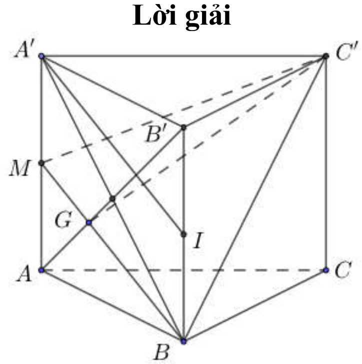
Bài 3

1. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng *a*.

a) Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC).

b) Gọi G là trọng tâm tam giác $AA'B$, I là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'G$ và $A'I$.

Lời giải



a) Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC).

Ta có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow BB'\perp(ABC)$, $AB'\cap(ABC)=A$

$\Rightarrow (AB',(ABC))=\widehat{B'AB}$.

Tam giác $B'AB$ vuông cân tại B nên $\widehat{B'AB}=45^\circ$.

Vậy $\left(AB',(ABC)\right)=45°$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'G$ và $A'I$.

Gọi M là trung điểm của $AA' \Rightarrow BM // A'I$, $BM \subset (BMC') \Rightarrow A'I // (BMC')$.

Mặt khác $C'G \subset (BMC') \Rightarrow d(A'I, C'G) = d(A'I,(BMC')) = d(A'(BMC'))$.

+) Ta có $S_{\Delta A'MC'} = \dfrac{1}{2}A'M.A'C' = \dfrac{a^2}{4}$; $d(B,(A'MC')) = d(B, AC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

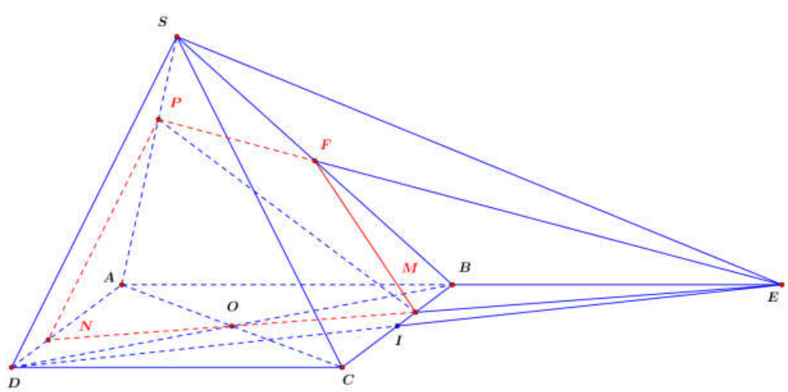
$\Rightarrow V_{BMA'C'} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta A'MC'}.d(B,(A'MC')) = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

+) Tam giác MBC', có $MB = MC' = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $BC' = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta MBC'} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

$\Rightarrow d(A',(MBC')) = \dfrac{3V_{BMA'C'}}{S_{\Delta MBC'}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $d(A'I, C'G) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AD, SA sao cho $MC = 2MB, NA = 2ND, AP = 2SP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện $(H_1),(H_2)$ có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với (H_2) là khối đa diện chứa đỉnh A. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$



Lời giải

◆Ta có:Điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AD, SA sao cho như hình vẽ bên trên

◆ Vẽ: $O = AC \cap BD, E = MN \cap AB, EP \cap SB = F, DE \cap BC = I$

Xét ΔANE có: $BM // AD$

Theo định lí Ta-lét ta có được: $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{BM}{AN} = \dfrac{BC}{3AN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{AD}{AN} = \dfrac{1}{3}\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

Suy ra B, M, I lần lượt là trung điểm của các cạnh EA, EN, ED

Xét ΔAPE có 3 điểm S, F, B thẳng hàng với $S \in PA, F \in PE, B \in AE$

Theo định lí Menelaus ta có: $\dfrac{BA}{BE}.\dfrac{FE}{FP}.\dfrac{SP}{SA} = 1$ mà $\dfrac{BA}{BE} = 1; \dfrac{SP}{SA} = \dfrac{1}{3}$ nên suy ra $\dfrac{FE}{FP} = 3 \Rightarrow \dfrac{EF}{EP} = \dfrac{3}{4}$

Từ đó ta có được: $\dfrac{V_{E.FBM}}{V_{E.PAN}} = \dfrac{EF}{EP}.\dfrac{EB}{EA}.\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{16} \Rightarrow V_{E.FBM} = \dfrac{3}{16}V_{E.PAN}$

Mà $\dfrac{V_{A.EPN}}{V_{A.ESD}} = \dfrac{AP}{AS}.\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$ nên suy ra $V_{E.FBM} = \dfrac{3}{16}V_{E.PAN} = \dfrac{3}{16}.\dfrac{4}{9}V_{A.ESD} = \dfrac{1}{12}V_{A.ESD}$

Mặt khác: $V_{A.ESD} = \dfrac{1}{3}d(E;(ASD))S_{\Delta ASD} = 2.\dfrac{1}{3}d(B;(ASD))S_{\Delta ASD} = 2.V_{B.SAD} = 2.\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$

Nên từ đó suy ra $V_2=\left(1-\dfrac{3}{16}\right).V_{E.PAN}=\left(1-\dfrac{3}{16}\right).\dfrac{4}{9}.V_{E.SAD}=\left(1-\dfrac{3}{16}\right).\dfrac{4}{9}.V_{S.ABCD}=\dfrac{13}{36}V_{S.ABCD}$

$\Rightarrow V_1=V_{S.ABCD}-V_2=V_{S.ABCD}-\dfrac{13}{36}V_{S.ABCD}=\dfrac{23}{36}V_{S.ABCD}$

Như vậy, ta kết luận: $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{23}{13}$

Bài 4

Một bài thi trắc nghiệm có 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được $0,2$ điểm, mỗi câu trả lời sai được 0 điểm. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên mỗi câu một phương án trả lời. Hỏi điểm số nào có xác suất xuất hiện lớn nhất?

Lời giải

Khôn gian mẫu có số phần tử là số cách chọn một phương án trả lời trong mỗi câu hỏi là $n(\Omega)=4^{50}$.

Gọi x là số câu hỏi học sinh đó trả lời đúng, suy ra học sinh đó trả lời sai $50-x$ câu với $x\in\mathbb{Z}$, $0\le x\le 50$. Khi đó số điểm học sinh đạt được là $A=0,2x$ điểm.

Xác suất để học sinh đó được A điểm là $P(A)=\dfrac{C_{50}^{x}.1^{x}.3^{50-x}}{4^{50}}$.

Để điểm A có xác suất xuất hiện lớn nhất thì $C_{50}^{x}.1^{x}.3^{50-x}$ phải lớn nhất.

Khi đó ta tìm số lớn nhất trong khai triển $(1+3)^{50}=\sum\limits_{x=0}^{50}C_{50}^{x}.1^{x}.3^{50-x}$.

Ta có: $\begin{cases}C_{50}^{x}.3^{50-x}\ge C_{50}^{x-1}.3^{50-(x-1)}\\ C_{50}^{x}.3^{50-x}\ge C_{50}^{x+1}.3^{50-(x+1)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{3}{51-x}\\ \dfrac{3}{50-x}\ge\dfrac{1}{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{47}{4}\le x\le\dfrac{51}{4}$.

Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=12$.

Vậy khả năng học sinh đúng 12 câu là lớn nhất hay điểm $2,4$ có xác suất xuất hiện là lớn nhất.

II. Phần trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $M(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $M(5;0)$. **D.** $M(0;5)$.

Lời giải

◆Ta có $y'=3x^2-6x$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

◆Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

◆Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(2;1)$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln(x-1)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

◆Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}2-x>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<2$.

◆Vậy $D=(1;2)$.

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y=\log(\cos x+2)$ bằng

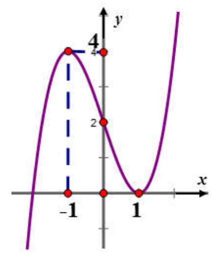
A. $\dfrac{\sin x}{(\cos x+2)\ln 10}$. **B.** $\dfrac{-\sin x}{\cos x+2}$. **C.** $\dfrac{-\sin x}{(\cos x+2)\ln 10}$. **D.** $\dfrac{1}{(\cos x+2)\ln 10}$.

Lời giải

◆Công thức $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$

◆$\left[\log(\cos x+2)\right]'=\dfrac{(\cos x+2)'}{(\cos x+2)\ln 10}=\dfrac{-\sin x}{(\cos x+2)\ln 10}$.

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới



Tất cả các giá trị thực m để phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $1<m<5$. **B.** $-1<m<4$. **C.** $0<m<4$. **D.** $0<m<5$.

Lời giải

◆Ta có $f(x)+1=m \Leftrightarrow f(x)=m-1$.

◆Đây là phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$.

◆Để phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm phân biệt thì $0<m-1<4 \Leftrightarrow 1<m<5$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khoảng đồng biến của hàm số là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

◆Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

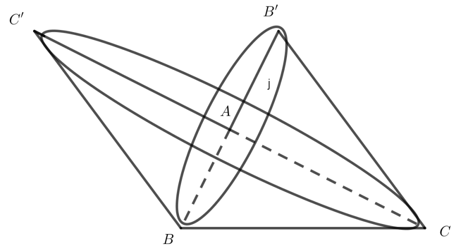
Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$, $AC=3$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tròn xoay có được bằng cách quay hình tam giác ABC quanh cạnh AB và cạnh AC. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 4.

◆Quay hình tam giác ABC quanh cạnh AB ta được khối nón có bán kính đáy là AC và đường cao là AB, do đó $V_1=\dfrac{1}{3}\pi AC^2.AB$.

◆ Quay hình tam giác ABC quanh cạnh AC ta được khối nón có bán kính đáy là AB và đường cao là AC, do đó $V_2=\dfrac{1}{3}\pi AB^2.AC$.

Khi đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi AC^2.AB}{\frac{1}{3}\pi AB^2.AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$.



Câu 7. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3;5]$. Tính giá trị của $M-m$

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ có $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}<0,\forall x\in[3;5]$.

Suy ra $M=f(3)=2, m=f(5)=\frac{3}{2}$. Vậy $M+m=\frac{7}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+3)^2(x-2)^3(x+5)$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

$$f'(x)=(x+3)^2(x-2)^3(x+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=2\\x=-5\end{array}\right.$$

BBT

x	$-\infty$		-5		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa theo BBT thì hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 9. Cho hình chóp tam giác đều $S\,ABC$ cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{8}$. **B.** $V=\frac{a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3}{24}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm ΔABC.

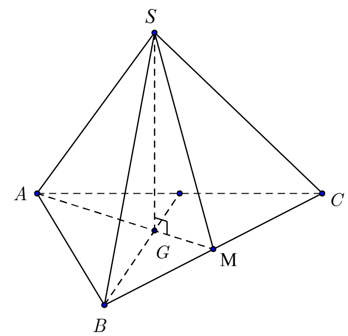
$S_{\Delta ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}..GM=\frac{1}{3}\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: góc giữa mặt đáy và mặt bên bằng $45°$ suy ra $\widehat{SMG}=45°$.

Xét tam giác vuông SGM : $\tan\widehat{SMG}=\frac{SG}{GM}$.

Suy ra: $SG=GM.\tan 45°=\frac{a\sqrt{3}}{6}.1=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SG.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{24}$.

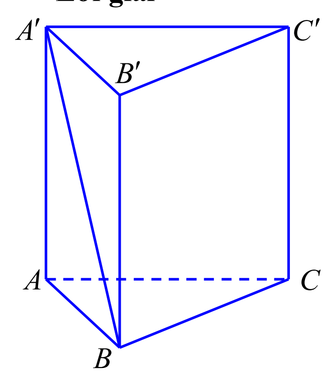


.

Câu 10. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = 2a$, gócgiữa $A'B$ và (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}a^3$. **B.** $\sqrt{6}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{9}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$.

Lời giải



Ta có: $\left(A'B,(ABC)\right) = \widehat{A'BA} = 30° \Rightarrow AA' = AB.\tan 30° = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = a^2$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 2x + 1\right) < \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

◆Ta có : $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 2x + 1\right) < \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 > x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

◆Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $(2;+\infty)$.

Câu 12. Đồ thị của hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang?

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. **B.** $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

C. $y = \frac{3x+1}{x-1}$. **D.** $y = x^4 + x^2$.

Lời giải

◆Đồ thị của các hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $y = x^4 + x^2$ không có tiệm cận ngang.

◆Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\right)=-\infty$.

Suy ra đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$. Suy ra đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang có phương trình $y=3$.

Câu 13. Một công ty sản xuất hộp đựng sữa loại 900gram dạng hình trụ có thể tích V không đổi. Giá thành của vật liệu làm đáy hộp và vỏ xung quanh của hộp là bằng nhau và bằng một nửa giá thành của vật liệu làm nắp hộp. Hỏi tỉ lệ chiều cao h và bán kính đáy R của hộp đựng sữa bằng bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất ?

A. $\dfrac{h}{R}=2.$ **B.** $\dfrac{h}{R}=\sqrt{2}.$ **C.** $\dfrac{h}{R}=\sqrt{3}.$ **D.** $\dfrac{h}{R}=3.$

Lời giải

◆Ta gọi V,T lần lượt là thể tích giá tiền làm một hộp đựng sữa đó trên mỗi đơn vị diện tích

Ta có: $V=\pi R^2h\Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}$

Suy ra diện tích 1 đáy bằng diện tích mặt nắp hộp sữa là πR^2 và diện tích xung quanh hộp sữa là: $2\pi Rh=2\pi R.\dfrac{V}{\pi R^2}=\dfrac{2V}{R}$

Từ đó ta có giá làm vật liệu làm đáy hộp và vỏ xung quanh của hộp là bằng nhau nên tổng giá tiền làm 2 thành phần trên là:

Vậy tổng giá tiền làm thùng $\dfrac{2V}{R}.T+\pi R^2.T=\left(\dfrac{2V}{R}+\pi R^2\right)T$

Giá thành của vật liệu làm nắp hộp bằng $\pi R^2.2T$

Suy ra chi phí sản xuất là: $\left(\dfrac{2V}{R}+\pi R^2\right)T+\pi R^2.2T=\dfrac{2V}{R}.T+3\pi R^2.T=\left(\dfrac{2V}{R}+3\pi R^2.\right)T$

Mà $\left(\dfrac{2V}{R}+3\pi R^2.\right)T=\left(\dfrac{V}{R}+\dfrac{V}{R}+3\pi R^2.\right)T\ge 3T\sqrt[3]{\dfrac{V}{R}.\dfrac{V}{R}.3\pi R^2}=3T\sqrt[3]{\dfrac{3\pi V^2}{1}}$ (const)

Nên chi phí sản xuất sẽ thấp nhất khi dấu = xảy ra tại

$\dfrac{V}{R}=3\pi R^2=\dfrac{3}{h}\left(\pi R^2h\right)=\dfrac{3V}{h}\Rightarrow\dfrac{V}{R}=\dfrac{3V}{h}\Leftrightarrow\dfrac{h}{R}=3$

Câu 14. Cho phương trình $\sqrt{16\ln x+m-4}=\ln^2\left(x^2\right)-18\ln x+4-m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-2020;2021\right]$ để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thực phân biệt. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2018. **B.** 2034. **C.** 2042. **D.** 25.

Lời giải

Điều kiện ban đầu: $x>0$

◆Ta có: $\sqrt{16\ln x+m-4}=\ln^2\left(x^2\right)-18\ln x+4-m$

$\Leftrightarrow 16\ln x + m - 4 + \sqrt{16\ln x + m - 4} = \ln^2\left(x^2\right) - 2\ln x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{16\ln x + m - 4}\right)^2 + \sqrt{16\ln x + m - 4} = \left(-2\ln(x)\right)^2 + \left(-2\ln(x)\right)$

Ta đặt: $\begin{cases} b = \sqrt{16\ln x + m - 4} \geq 0 \\ a = \ln(x) \end{cases} \Rightarrow b^2 + b = (-2a)^2 + (-2a)$

$\Leftrightarrow (b+2a)(b-2a+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -2a \\ b = 2a - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{16\ln x + m - 4} = -2\ln x & (1) \\ \sqrt{16\ln x + m - 4} = -1 + 2\ln x & (2) \end{array}\right.$.

(2) suy ra $\Rightarrow \sqrt{16\ln x + m - 4} = -1 + 2\ln x$ (*)

Ta thấy khi $\sqrt{16\ln x + m - 4} \geq 0$ thì $-1 + 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$

Bình phương 2 vế cho phương trình (*) ta có được: $16\ln x + m - 4 = 4\ln^2(x) - 4\ln x + 1$

$\Rightarrow m = 4\ln^2(x) - 20\ln x + 5$

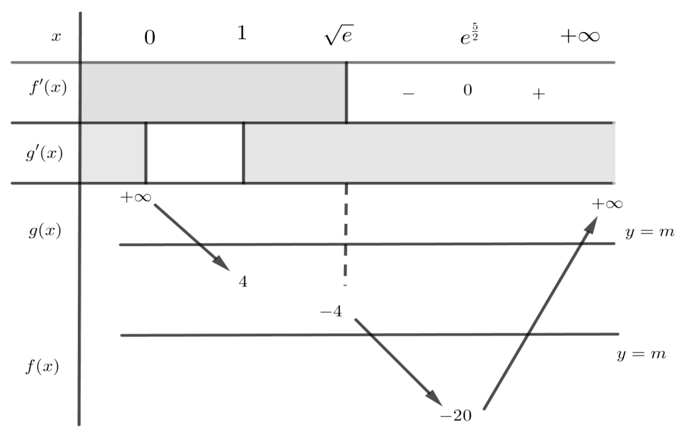
Xét hàm $y = f(x) = 4\ln^2(x) - 20\ln x + 5, \forall x \in \left[\sqrt{e}; +\infty\right)$ có $f'(x) = \frac{8\ln x - 20}{x} = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{2}}$

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số trên như sau:

(1) suy ra $\sqrt{16\ln x + m - 4} = -2\ln x, 0 < x \leq 1 \Rightarrow m = 4\ln^2(x) - 16\ln x + 4$

Xét hàm $y = g(x) = 4\ln^2(x) - 16\ln x + 4$ ta nhận thấy hàm số này không cực trị nào với $0 < x \leq 1$

Từ đó ta có BBT như sau:



Dựa vào BBT trên,để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thực phân biệt thì tập giá trị của m phải là $m \in (-20; -4] \cup [4; 2021]$. Do ta chỉ nhận giá trị nguyên nên từ đó ta thấy có tất cả 2034 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB cân tại S. Góc giữa SA và mặt đáy bằng $45°$, góc giữa (SAB) và mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

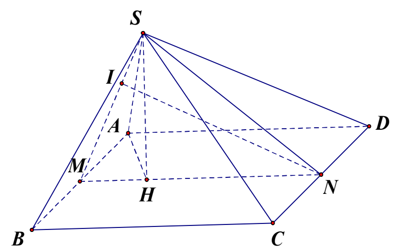
A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy. M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD

Ta có góc giữa SA và mặt đáy là góc $\widehat{SAH} = 45° \Rightarrow SA = SH\sqrt{2}$.

Ta có: ΔSAB cân tại S nên $SM \perp AB$. Mặt khác $AB \perp SH$ nên $AB \perp (SMN)$ suy ra góc giữa (SAB) và mặt đáy là góc $\widehat{SMH} = 60° \Rightarrow SM = SH\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của N lên SM ta có $\begin{cases} NI \perp SA \\ NI \perp SM \end{cases} \Rightarrow NI \perp (SAB)$ suy ra

$d(SA, CD) = d(CD, (SAB)) = d(N, (SAB)) = NI = a\sqrt{6}$.

Xét ΔSMN có $SH.MN = NI.SM \Leftrightarrow SH.AB = a\sqrt{6}SH\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{2}a \Rightarrow S_{ABCD} = 8a^2$.

Xét ΔSAM vuông tại M ta có $SA^2 = SM^2 + AM^2 \Leftrightarrow (SH\sqrt{2})^2 = (\dfrac{2}{\sqrt{3}}SH)^2 + \dfrac{AB^2}{4} \Leftrightarrow SH = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16. Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam vào 12 ghế thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có bất kỳ hai học sinh nam nào ngồi cạnh nhau.

A. $\dfrac{7}{99}$. **B.** $\dfrac{1}{132}$. **C.** $\dfrac{7}{264}$. **D.** $\dfrac{7}{11880}$.

Lời giải

Sô cách xếp 12 học sinh vào 12 ghế là $n(\Omega) = 12!$

Xếp 7 học sinh nữ vào 7 ghế có 7! cách xếp và tạo ra 8 khe trống, xếp 5 học sinh nam vào 8 khe trống có A_8^5 cách xếp suy ra có $7!.A_8^5$ cách xếp 12 bạn vào 12 ghế sao cho không có 2 bạn nam nào ngồi gần nhau.

Vậy xác suất cần tìm $P = \dfrac{7!.A_8^5}{12!} = \dfrac{7}{99}$.

Câu 17. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị của tham số nguyên $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $y = (x + m - 1)\sqrt{x+2} - 3mx + 2021m$ nghịch biến trên $(2; 34)$. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 2038.

Lời giải

◆Ta có :

$y = (x + m - 1)\sqrt{x+2} - 3mx + 2021m$

$\Rightarrow y' = \sqrt{x+2} + \dfrac{x+m-1}{2\sqrt{x+2}} - 3m \le 0, \forall x \in (2; 34)$

$\Leftrightarrow 3m \ge \dfrac{3x+3+m}{2\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow 6m\sqrt{x+2} \ge 3x + 3 + m \Leftrightarrow m\left(6\sqrt{x+2} - 1\right) \ge 3x + 3$

Do $6\sqrt{x+2} - 1 > 0, \forall x \in (2; 34)$ nên suy ra

$\Leftrightarrow m \ge \dfrac{3x+3}{6\sqrt{x+2}-1}$, ta xét hàm $g(x) = \dfrac{3x+3}{6\sqrt{x+2}-1} \forall x \in (2; 34)$

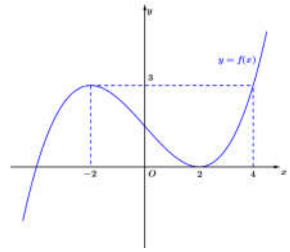
Cho $g'(x) = 0$ thì suy ra $\sqrt{x+2} = 9x + 3$ vô nghiệm $\Rightarrow g'(x) \le 0, \forall x \in (2; 34)$

Với $g'(x) \le 0, \forall x \in (2; 34)$ nên suy ra hàm đó nghịch biến trên $(2; 34) \Rightarrow \max\limits_{[2;34]} g(x) = g(2) = \dfrac{9}{11}$

Như vậy để hàm số trên nghịch biến trên $(2;34)$ thì $m \ge \max\limits_{[2;34]} g(x) \Rightarrow m \ge \dfrac{9}{11}$

Mà $m \in [-2021;2021]$ nên suy ra có tất cả 2021 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài

Câu 18. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a,b,c,d \in R)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f(4-x^2)-3}$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

◆Từ đồ thị trên ta có: $f(4-x^2)-3=0 \Leftrightarrow f(4-x^2)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-x^2=-2 \\ 4-x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{6} \\ x=0 \end{array}\right.$

Như vậy từ phương trình trên ta có được 3 tiệm cận đứng từ đồ thị hàm $g(x)$

Ta lại có: $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-x^2)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ từ đó suy ra $y=0$ chính là đường tiệm cận ngang duy nhất của đồ thị hàm số $g(x)$

Tổng số đường tiệm cận đứng, ngang của đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f(4-x^2)-3}$ là 4.

Câu 19. Trong khai triển nhị thức $\left(x-\sqrt{y}\right)^{16}$ theo số mũ của x giảm dần, hai số hạng cuối là

A. $-16xy^{15}, y^8$. **B.** $16xy^{15}, y^4$. **C.** $-16xy^{\frac{15}{2}}, y^8$. **D.** $-16x, y^4$.

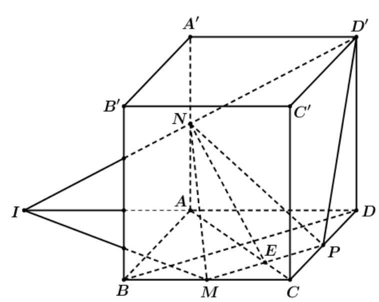
Lời giải

Ta có $\left(x-\sqrt{y}\right)^{16} = \sum\limits_{k=0}^{16} C_{16}^k x^{16-k}.(-1)^k.y^{\frac{k}{2}}$ nên $-C_{16}^{15} xy^{\frac{15}{2}} = -16xy^{\frac{15}{2}}, C_{16}^{16} y^8 = y^8$ là hai số hạng cuối.

Câu 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=BC=a$ và $CC'=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và AA'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'D'$ và MN bằng

A. $\dfrac{5a\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{5a\sqrt{17}}{68}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{17}}{68}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{17}}{76}$.

Lời giải



◆ Gọi P là trung điểm của CD. Do M là trung điểm $BC \Rightarrow MP \parallel BD$ mà $BD \parallel B'D'$ nên ta có $MP \parallel B'D'$. Mặt khác $B'D' \not\subset (MNP) \Rightarrow B'D' \parallel (MNP) \Rightarrow d(B'D';MN) = d(D';(MNP))$.

◆Trong mặt phẳng $(AA'D'D)$ có $AD \cap ND' = I$.

Vì $NA // DD' \Rightarrow \dfrac{IN}{ID'} = \dfrac{IA}{ID} = \dfrac{NA}{DD'} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra N, A lần lượt là trung điểm của ID' và $ID \Rightarrow d\left(D';(MNP)\right) = d\left(I;(MNP)\right) = \dfrac{3V_{I.NMP}}{S_{NMP}}$.

◆Ta có $S_{IMP} = S_{IMCD} - S_{IDP} - S_{CMP} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{2}+2a\right).a}{2} - \dfrac{1}{2}.2a.\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2}.2a.\dfrac{a}{2} = \dfrac{5a^2}{8}$.

$\Rightarrow V_{I.NMP} = V_{N.IMP} = \dfrac{1}{3}NA.S_{IMP} = \dfrac{1}{3}a.\dfrac{5a^2}{8} = \dfrac{5a^3}{24}$

◆ Lại có $MP = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$MN = \sqrt{NA^2 + AM^2} = \sqrt{NA^2 + AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{3a}{2}$

$NP = \sqrt{NA^2 + AM^2} = \sqrt{NA^2 + AP^2 + DP^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{3a}{2}$

Suy ra tam giác NMP cân tại N .

Gọi E là trung điểm $MP \Rightarrow NE \perp MP$ và $NE = \sqrt{NM^2 - ME^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{34}}{4}$

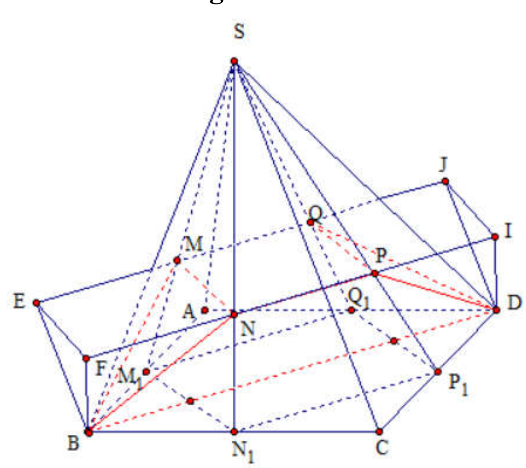
$\Rightarrow S_{NMP} = \dfrac{1}{2}NE.MP = \dfrac{a^2\sqrt{17}}{8}$

◆ Vậy $d\left(B'D';MN\right) = \dfrac{3.\dfrac{5a^3}{24}}{\dfrac{a^2\sqrt{17}}{8}} = \dfrac{5\sqrt{17}a}{17}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có độ dài chiều cao bằng 9 và đáy là hình bình hành có diện tích bằng 30. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA. Tính thể tích khối đa diện có đỉnh là các điểm M,N,P,Q,B và D.

A. $\dfrac{50}{9}$. **B.** $\dfrac{50}{3}$. **C.** 50. **D.** $\dfrac{25}{6}$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $EFIJ$ sao cho $EF = MN$, $EF // MN$ và $FI = BD$ (như hình vẽ).

Ta có: $MQ = NP = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{3}.BD = \dfrac{1}{3}.FI$ suy ra: $S_{EFIJ} = 3S_{MNPQ}$.

$d\left(D,\left(EFIJ\right)\right)=\frac{1}{3}d\left(S,\left(EFIJ\right)\right)=3$.

+) $S_{M_1N_1P_1Q_1}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=15$, $S_{MNPQ}=\left(\frac{2}{3}\right)^2S_{M_1N_1P_1Q_1}=\frac{4}{9}.15=\frac{20}{3}$, $S_{EFIJ}=3.S_{MNPQ}=3.\frac{20}{3}=20$.

Suy ra: $V_{BEF.DJI}=\frac{1}{2}.d\left(D;\left(EFIJ\right)\right).S_{EFIJ}=\frac{1}{2}.3.20=30$.

Vậy $V_{MNPQBD}=V_{BEF.DJI}-V_{B.EFNM}-V_{D.QPIJ}=30-\frac{1}{3}d\left(D;\left(EFIJ\right)\right).S_{EFNM}-\frac{1}{3}d\left(D;\left(EFIJ\right)\right).S_{PQJI}$

$=30-\frac{1}{3}\left[S_{EFNM}+S_{PQJI}\right]d\left(D;\left(EFIJ\right)\right)$

$=30-\frac{1}{3}\left[S_{EFIJ}-S_{MNPQ}\right]d\left(D;\left(EFIJ\right)\right)$

$=30-\frac{1}{3}\left[20-\frac{20}{3}\right].3=\frac{50}{3}$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $4^x-m.2^x+2m-5=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$.

Lời giải

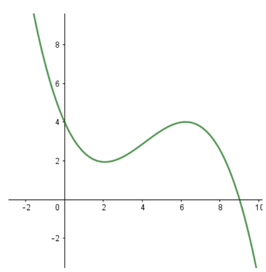
Đặt $t=2^x$ $\left(t>0\right)$, phương trình có dạng: $t^2-mt+2m-5=0$.

Đặt $f\left(t\right)=t^2-mt+2m-5$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ t_1,t_2 thỏa mãn:

$$0<t_1<1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}af\left(0\right)>0\\ \frac{S}{2}>0\\ af\left(1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-5>0\\ \frac{m}{2}>0\\ 1-m+2m-5<0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{2}<m<4.$$

Câu 23. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu số âm?



A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có: $f\left(0\right)=d>0\to d>0$; $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\to a<0$

Xét $f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$; $f'\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 dương phân biệt

$\to S=x_1+x_2=\frac{-2b}{3a}>0\to b>0\to P=x_1.x_2=\frac{c}{3a}>0\to c<0$

Vậy có $b,d>0$.

Câu 24. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		0		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Xét $g(x)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$, ta thấy f liên tục thì g liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g(-x)=f\left(e^{(-x)^2-|-x|-2}\right)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)=g(x)$

$\rightarrow g(x)=g(-x)$ và hàm $g(x)$ là hàm chẵn / đối xứng qua Oy

TH1: $x\ge 0 \Rightarrow g(x)=f\left(e^{x^2-x-2}\right) \Rightarrow g'(x)=(2x-1)e^{x^2-x-2}f'\left(e^{x^2-x-2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ e^{x^2-x-2}=1\left(e^{x^2-x-2}>0, \forall x\in\mathbb{R}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=2\,(x\ge 0) \end{array}\right.$$

Với $x>2 \rightarrow x^2-x-2>0 \Rightarrow e^{x^2-x-2}>1 \Rightarrow f'\left(e^{x^2-x-2}\right)>0$

Với $0\le x<2 \rightarrow x^2-x-2<0 \Rightarrow e^{x^2-x-2}<1 \Rightarrow f'\left(e^{x^2-x-2}\right)<0$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên $g(x)\,\forall x\in[0;+\infty)$

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow g(x)$ có 2 cực trị dương $\forall x\ge 0$

$\Rightarrow g(x)$ có $2.2+1=5$ cực trị.

Câu 25. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $\log(x+2y)=\log(x)+\log(y)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{1+2y}+\dfrac{4y^2}{1+x}$ là

A. $\dfrac{32}{5}$. **B.** $\dfrac{29}{5}$. **C.** 6. **D.** $\dfrac{31}{5}$.

Lời giải

- Ta có: $\log(x+2y)=\log(x)+\log(y) \Leftrightarrow x+2y=xy \Leftrightarrow 2(x+2y)=2xy$.

$$P=\frac{x^2}{1+2y}+\frac{4y^2}{1+x}=P=\frac{x^2}{1+2y}+\frac{(2y)^2}{1+x}\ge\frac{(x+2y)^2}{x+2y+2}\,(1)$$

Ta có: $2(x+2y)=2xy\le\dfrac{(x+2y)^2}{4} \Rightarrow (x+2y)^2-8(x+2y)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y\le 0 \\ x+2y\ge 8 \end{array}\right.$

Do $x,y>0$ nên $x+2y\ge 8$, đặt $t=x+2y$

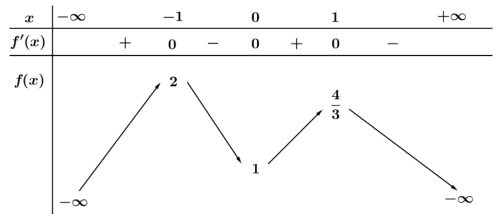
Từ (1) trở thành $P=\dfrac{t^2}{t+2}, \forall t\ge 8$.

Ta xét hàm $y = f(t) = \frac{t^2}{t+2}, \forall t \geq 8$ có $f'(t) = \frac{t^2+2t}{(t+2)^2} > 0, \forall t \geq 8$

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $(8;+\infty) \Rightarrow \min P = \min\limits_{t\in[8;+\infty)} f(t) = f(8) = \frac{32}{5}$.

Như vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{32}{5}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x+2y=8 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

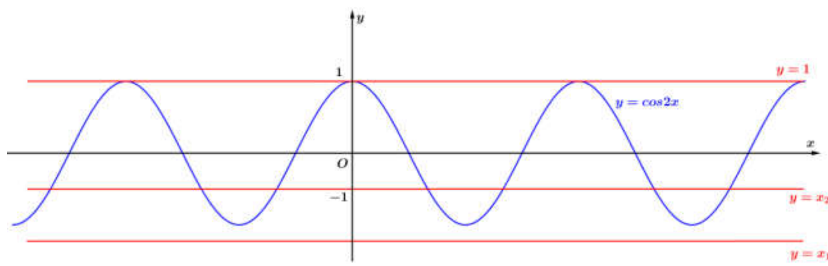


Số nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{-3\pi}{2};2\pi\right]$ của phương trình $3f(cos2x)-4=0$ là

A. 14. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 16.

Lời giải

Có thể dùng đường tròn lượng giác nhé !



◆Ta có: $3f(cos2x)-4=0 \Leftrightarrow f(cos2x) = \frac{4}{3}$. Nhìn vào đồ thị trên thì phương trình này tương đương với

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = x_1 \in (-\infty;-1) \\ \cos 2x = x_2 \in (-1;0) \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right.$ .ta vẽ đồ thị $y = \cos 2x$ trong đoạn $\left[\frac{-3\pi}{2};2\pi\right]$

Dựa vào hình vẽ trên ta kết luận phương trình ban đầu là $4+7=11$ nghiệm.

Câu 27. Cho hai số thực a,b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=15$. Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $\log_b a.\log_a^2 x - 2\log_a x - \log_b bx^3 = 0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x_1x_2$

A. 196. **B.** 2744. **C.** 26244. **D.** 2021.

Lời giải

◆Ta đặt: $t = \log_a x \Rightarrow t_1 = \log_a x_1; t_2 = \log_a x_1$

$\log_b a.\log_a^2 x - 2\log_a x - \log_b bx^3 = 0$

$\Leftrightarrow \log_b a.\log_a^2 x - (2+3\log_b a)\log_a x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_b a.t^2 - (2+3\log_b a)t - 1 = 0$.

Do $a,b>1 \Rightarrow \log_b a > 0 \Rightarrow \log_b a.(-1) < 0$ nên phương trình trên luôn có 2 nghiệm t trái dấu .

Mặt khác theo hệ thức Viét thì ta lại có hệ thức sau:

$\log_a x_1 + \log_a x_1 = t_1 + t_2 = \frac{2+3\log_b a}{\log_b a} = 2\log_a b + 3 = \log_a(a^3b^2) \Rightarrow x_1.x_2 = a^3b^2$

Suy ra biểu thức $T = x_1x_2 = a^3b^2 = a^3(15-a)^2$.

Xét hàm $y = f(a) = a^3(15-a)^2, \forall a > 1$. Cho $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 9 \in (1;+\infty)$

Mà ta nhận thấy $f''(9) < 0$ nên suy ra $a = 9$ là điểm cực đại của hàm số $f(a), \forall a \in (1;+\infty)$

Như vậy suy ra giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x_1x_2 = \max\limits_{[1;+\infty)} f(a) = f(9) = 26244$.

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 2$ và $u_6 = 16$. Số hạng thứ 10 củacấp số nhân bằng

A. 512 **B.** 256 **C.** -256 **D.** 1024

Lời giải

Gọi q là công bội củacấp số nhân $(u_n) \Rightarrow u_6 = u_3.q^3 \Rightarrow 16 = 2q^3 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{u_3}{q^2} = \frac{1}{2}$

Vậysố hạng thứ 10 củacấp số nhân là: $u_{10} = u_1.q^9 = \frac{1}{2}.2^9 = 256$.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m\log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

A. $m \le -2$ hoặc $m = 1$. **B.** $m < -2$. **C.** $m < -2$ hoặc $m > 1$. **D.** $m < -2$ hoặc $m = 1$.

Lời giải

- Đặt $t = \log_2 x$.
- Với $x \in (4;+\infty) \Rightarrow t \in (2;+\infty)$
- Ta có: $t' = \frac{1}{x.\ln 2} > 0, \forall x \in (4;+\infty)$.
- Hàm số $y = \frac{m\log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ trở thành $y = \frac{mt - 2}{t - m - 1}$.
- Hàm số $y = \frac{m\log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \frac{mt-2}{t-m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = \frac{mt-2}{t-m-1}$ liên tục trên $(2;+\infty)$ và

$$y' = \frac{-m^2 - m + 2}{(t-m-1)^2} < 0, \forall t \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \le 2 \\ -m^2 - m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Câu 30. Cộng vào số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư của một cấp số cộng tăng lần lượt các số $1;2;7$ và 25 ta được bốn số lập thành cấp số nhân. Tìm công sai d của cấp số cộng đó.

A. $d = \frac{7}{9}$. **B.** $d = \frac{5}{3}$. **C.** $d = \frac{1}{3}$. **D.** $d = \frac{11}{15}$.

Lời giải

- Vì cấp số cộng tăng nên công sai $d > 0$.
- Gọi a là số hạng thứ nhất của cấp số cộng.
- Các số hạng thứ hai, thứ ba và thứ tư của cấp số cộng lần lượt là $a+d; a+2d; a+3d$.
- Sau khi cộng vào số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư của cấp số cộng lần lượt các số $1;2;7$ và 25 ta được bốn số $a+1; a+2+d; a+7+2d; a+25+3d$.
- Bốn số $a+1; a+2+d; a+7+2d; a+25+3d$ lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (a+2+d)^2 = (a+1)(a+7+2d) \\ (a+7+2d)^2 = (a+2+d)(a+25+3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 5d = 2 \\ (a+2+d)^2 = (a+1)(a+7+2d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{2-9a}{5} \\ (3-a)(81a+17) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-\dfrac{17}{81} \end{array}\right. \\ d=\dfrac{2-9a}{5} \end{cases}.$$

- $a=3 \Rightarrow d=-5$ (loại).
- $a=-\dfrac{17}{81} \Rightarrow d=\dfrac{7}{9}$ (thỏa mãn).

Câu 31. Cho phương trình: $\log_2\left(\dfrac{x^2-mx+m^2}{x+2m}\right)=-x^2+(m+4)x-m^2+8m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt?

A. 13. **B.** 14. **C.** 19. **D.** 8.

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} x+2m\neq 0 \\ \dfrac{x^2-mx+m^2}{x+2m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x+2m>0$ (do $x^2-mx+m^2=\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2+\dfrac{3m^2}{4}\geq 0\,\forall x;m\in\mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=m=0$)

Phương trình $\log_2\left(\dfrac{x^2-mx+m^2}{x+2m}\right)=-x^2+(m+4)x-m^2+8m+2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-mx+m^2\right)+\left(x^2-mx+m^2\right)=\log_2(4x+8m)+(4x+8m)\ \ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\,\forall t\in(0;+\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(x^2-mx+m^2\right)=f(4x+8m) \Leftrightarrow x^2-mx+m^2=4x+8m$

$\Leftrightarrow x^2-(m+4)x+m^2-8m=0\ \ (2)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1+2m>0 \\ x_2+2m>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2+4m>0 \\ (x_1+2m)(x_2+2m)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+4)^2-4\left(m^2-8m\right)>0 \\ x_1+x_2+4m>0 \\ x_1x_2+2m(x_1+x_2)+4m^2>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2-40m-16<0 \\ m+4+4m>0 \\ m^2-8m+2m(m+4)+4m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2-40m-16<0 \\ 5m+4>0 \\ 7m^2>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{20-8\sqrt{7}}{3}<m<\dfrac{20-8\sqrt{7}}{3} \\ m>-\dfrac{4}{5} \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{20-8\sqrt{7}}{3}<m<\dfrac{20+8\sqrt{7}}{3} \\ m\neq 0 \end{cases}$$

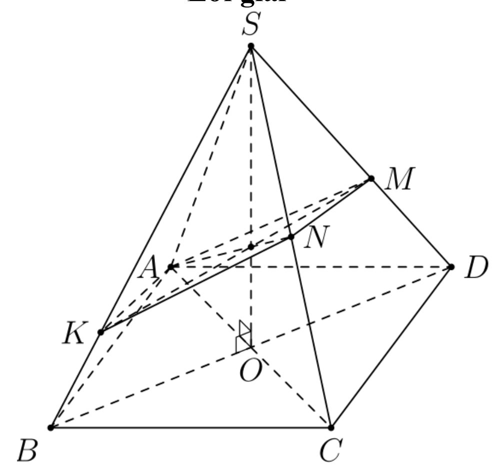
Do m nguyên nên $m\in\{1;2;...;13\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K,M lần lượt là các điểm thuộc đoạn thẳng SB,SD sao cho $\frac{SK}{SB}=\frac{2}{3},\frac{SM}{SD}=\frac{3}{5}$. Mặt phẳng (AKM) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{11}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{23}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{17}{47}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{46}$.

Lời giải



Gọi $N=SC\cap(AKM)$.

Đặt $\frac{SA}{SA}=x,\frac{SK}{SB}=y,\frac{SN}{SC}=z,\frac{SM}{SD}=t$ thì $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\Leftrightarrow z=\frac{6}{13}$.

Áp dụng công thức tỉ lệ thể tích cho đáy là hình bình hành

$$\frac{V_{S.AKNM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_1}{V_{S.ABCD}}=\frac{xyzt}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{1.\frac{2}{3}.\frac{6}{13}.\frac{3}{5}}{4}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{13}{6}+\frac{5}{3}\right)=\frac{19}{65}.$$

Suy ra thể tích khối không chứa đỉnh S là $\frac{V_2}{V_{S.ABCD}}=1-\frac{19}{65}=\frac{46}{65}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{46}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=(x-1)\left(x^2-2mx+3m-2\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn $-2021\le m\le 2021$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

A. 2018. **B.** 4040. **C.** 2019. **D.** 4041.

Lời giải

◆ Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành là:

$(x-1)\left(x^2-2mx+3m-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ g(x)=x^2-2mx+3m-2=0\end{array}\right..$$

◆Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-3m+2>0\\ g(1)=m-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Kết hợp với điều kiện $-2021\le m\le 2021$ ta có $m\in[-2021;1)\cup(2;2021]$.

Mà $m\in\mathbb{N}^*$ nên $m\in\{3;4;5;...;2021\}$. Vậy có 2019 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

◆Điều kiện xác định: $\begin{cases}x\ge 2\\ x\ne 1\\ x\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x\ne 3\end{cases}$. Suy ra tập xác định của hàm số $D=[2;+\infty)/\{3\}$.

◆Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=0$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang có phương trình $y=0$.

◆Ta có: $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1+\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1+\sqrt{x-2}}{(x-1)(x-3)}=+\infty$ do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^+}\left(1+\sqrt{x-2}\right)=2\\ \lim\limits_{x\to3^+}\left(x^2-4x+3\right)=0\\ x^2-4x+3>0\ \forall x>3\end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng có phương trình $x=3$.

Vậy đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}$ có hai tiệm cận.

Câu 35. Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\dfrac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$

A. $T_{\min}=\dfrac{3}{2}$. **B.** $T_{\min}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $T_{\min}=\dfrac{9}{2}$. **D.** $T_{\min}=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

$gt\Leftrightarrow\log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)=\log_5(5a+5b)+(5a+5b)$

Xét hàm số $f(t)=\log_5 t+t\ ,\forall t>0$

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 5}+1>0\ ,\forall t>0\to$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $4a+2b+5=5a+5b\Rightarrow a=5-3b$ thay vào biểu thức: $T=a^2+b^2$

$T=(5-3b)^2+b^2=10b^2-30b+25=10\left(b-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}\ge\dfrac{5}{2}$

Vậy $T_{\min}=\dfrac{5}{2}$ khi $b=\dfrac{3}{2}$

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B. Góc giữa cạnh SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0, $AC=3a, BC=a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải

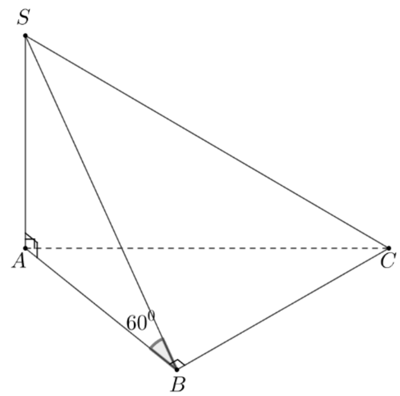
$AB=\sqrt{9a^2-a^2}=2\sqrt{2}a$

Góc giữa cạnh SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0, nên $\widehat{SBA}=60^0$.

$SA = \tan 60^0.AB = 2\sqrt{6}a$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}2\sqrt{2}a.a = \sqrt{2}a^2$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\sqrt{2}a^2.2\sqrt{6}a = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$



Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. **B.** $2y' + xy'' = \frac{2}{x^2}$. **C.** $2y' + xy'' = -\frac{4}{x^2}$. **D.** $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$y'' = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}.x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$

Do đó: $2y' + xy'' = 2.\frac{1 - \ln x}{x^2} + x.\frac{2\ln x - 3}{x^3} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} + \frac{2\ln x - 3}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

Câu 38. Tìm tất cả tham số m để hàm số $y = (m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-1 < m < 1$. **B.** $m \le -\frac{5}{2}$. **C.** $-\frac{1}{4} \le m < 2$. **D.** $-\frac{1}{4} \le m \le 2$.

Lời giải

◆Với $m = -1$ ta có $y = 3x^2 + x - 1$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

◆Với $m \ne -1$ ta có $y' = 3(m+1)x^2 - 2(2m-1)x + 1$.

Ta có: $\Delta' = (2m-1)^2 - 3(m+1) = 4m^2 - 7m - 2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3(m+1)x^2 - 2(2m-1)x + 1 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m+1) > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m+1) > 0 \\ 4m^2 - 7m - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 4m^2 - 7m - 2 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \in \left[-\frac{1}{4}; 2\right] \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{1}{4}; 2\right]$.

Câu 39. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $625^{\frac{x-1}{x}}.3^{x}=10125$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $S\in(3;4)$. **B.** $S\in(2;3)$. **C.** $S\in(0;1)$. **D.** $S\in(5;6)$.

Lời giải

Ta có điều kiện: $x\neq 0$

Phương trình trên tương đương với:

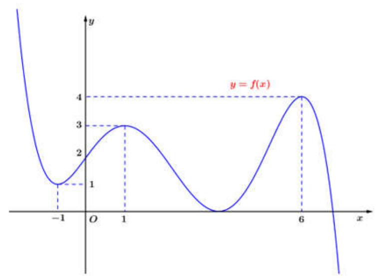
$$625^{\frac{x-1}{x}}.3^{x}=10125\Leftrightarrow 5^{4\left(\frac{x-1}{x}\right)}.3^{x}=3^{4}.5^{3}\Leftrightarrow \frac{x-4}{x}=(4-x)\log_5 3$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{1}{x}+\log_5 3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\\ x=-\log_5 3\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu, ta nhận cả hai nghiệm trên

Như vậy tổng nghiệm là $S=4-\log_3 5\approx 2{,}535....\in(2;3)$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Ta có phương trình trên tương đương với:

$$\frac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3\Leftrightarrow 4m^3+m=\left[f^2(x)+3\right]\sqrt{2f^2(x)+5}$$

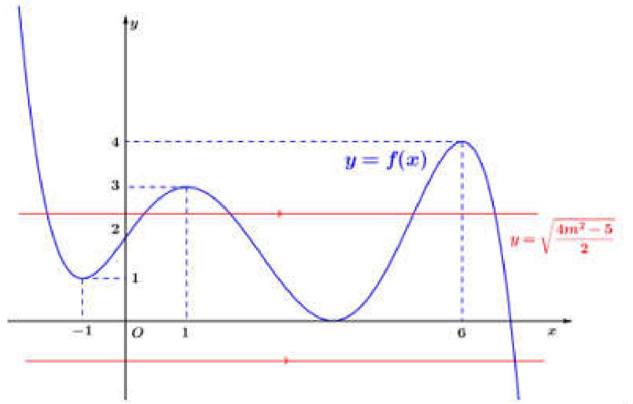
$$\Leftrightarrow 8m^3+2m=\left[2f^2(x)+6\right]\sqrt{2f^2(x)+5}$$

$$\Leftrightarrow (2m)^3+(2m)=\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right)^3+\sqrt{2f^2(x)+5}$$

Ta xét hàm đặc trưng $g(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}$ có $g'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, $\Rightarrow f(2m)=f\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right)\Leftrightarrow 2m=\sqrt{2f^2(x)+5},m\geq 0$

$\Rightarrow f(x)=\pm\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$, kèm điều kiện $4m^2-5\geq 0\pm m\in\left(\dfrac{-\sqrt{5}}{2};\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\Rightarrow m\in\left[0;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$



Nhìn vào đồ thị ta thấy với $f(x) = -\sqrt{\frac{4m^2-5}{2}}$ thì nó luôn có 1 nghiệm

Như vậy thì để phương trình ban đầu có 3 nghiệm thực phân biệt thì phương trình $f(x) = \sqrt{\frac{4m^2-5}{2}}$ phải có 2 nghiệm thực phân biệt, nhìn vào đồ thị ta thấy tại $y = 4$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt cho nên ta suy ra $\Rightarrow \sqrt{\frac{4m^2-5}{2}} = 4 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}$ mà $m \in \left[0; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ nên $m = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

Vậy có duy nhất một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.