BỘ GIAO THÔNG VẬN TẢI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI
BỘ MÔN: KHOA HỌC MÁY TÍNH
KHOA: CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI GIẢNG
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

TÊN HỌC PHẦN : **Phương pháp tính**

MÃ HỌC PHẦN : 17201

TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO : **ĐẠI HỌC CHÍNH QUY**

DÙNG CHO SV NGÀNH : **CÔNG NGHỆ THÔNG TIN**

HẢI PHÒNG - 2009

ĐỀ CƯƠNG CHI TIẾT

Tên học phần: Phương pháp tính **Loại học phần:** 2
Bộ môn phụ trách giảng dạy: Khoa học máy tính **Khoa phụ trách:** CNTT
Mã học phần: 17201 **Tổng số TC:** 3

TS tiết	Lý thuyết	Thực hành/Xemina	Tự học	Bài tập lớn	Đồ án môn học
60	45	15	0	0	0

Điều kiện tiên quyết:

Sinh viên phải học xong các học phần sau mới được đăng ký học phần này:
Đại số; Giải tích 1; Giải tích 2

Mục tiêu của học phần:

Trang bị cho sinh viên các kiến thức cần thiết trong việc giải số các bài toán ứng dụng thường gặp trong kỹ thuật và tăng cường khả năng lập trình của sinh viên cho các bài toán đó.

Nội dung chủ yếu

Trình bày các khái niệm sai số; cách tính gần đúng nghiệm của phương trình; cách tính gần đúng đạo hàm và tích phân; phép nội suy hàm và giải gần đúng phương trình vi phân thường.

Nội dung chi tiết của học phần:

TÊN CHƯƠNG MỤC	**PHÂN PHỐI SỐ TIẾT**				
	TS	**LT**	**TH/Xemina**	**BT**	**KT**
Chương 1. Sai số	**10**	**8**	**2**		**0**
1.1. Khái niệm số gần đúng và sai số		1			
1.2. Cách viết số xấp xỉ		2			
1.3. Sự quy tròn số và sai số quy tròn		2	1		
1.4. Các quy tắc tính sai số		2	1		
1.5. Sai số phương pháp và sai số tính toán		1	1		
Chương 2. Giải gần đúng phương trình	**15**	**10**	**4**		**1**
2.1. Đặt vấn đề		1			
2.2. Nghiệm và khoảng phân ly nghiệm		1			
2.3. Phương pháp chia đôi		2	1		
2.4. Phương pháp lặp		2	1		
2.5. Phương pháp dây cung		2	1		
2.6. Phương pháp tiếp tuyến (Newton)		2	1		
Chương 3. Xấp xỉ hàm	**12**	**9**	**3**		**0**
3.1. Đa thức nội suy. Lược đồ Hoócne		2			
3.2. Đa thức nội suy Lagrange		2	1		
3.3. Đa thức nội suy Newton		2	1		
3.4. Phương pháp bình phương bé nhất		3	1		
Chương 4. Đạo hàm số. Tích phân số	**12**	**8**	**3**		**1**
4.1. Tính gần đúng đạo hàm		4	1		
4.2. Tính gần đúng tích phân xác định		4	2		
Chương 5. Giải gần đúng phương trình vi	**11**	**7**	**3**		**1**

TÊN CHƯƠNG MỤC	PHÂN PHỐI SỐ TIẾT				
	TS	**LT**	**TH/Xemina**	**BT**	**KT**
phân					
5.1. Đặt vấn đề		1			
5.2. Phương pháp Euler, Euler cải tiến		3	2		
5.3. Phương pháp Runger-Kutta		3	1		
Tổng số tiết:	**60**	**42**	**15**		**3**

Nhiệm vụ của sinh viên :

Tham dự các buổi thuyết trình của giáo viên, tự học, tự làm bài tập do giáo viên giao, tham dự các buổi thực hành, các bài kiểm tra định kỳ và cuối kỳ.

Tài liệu học tập :

- Phạm Kỳ Anh, *Giải tích số,* NXB ĐHQG Hà Nội, 1996.
- Tạ Văn Đĩnh, *Phương pháp tính*, NXB Giáo dục Hà Nội, 2006.
- Dương Thủy Vỹ, *Giáo trình Phương pháp tính*, NXB KH&KT Hà Nội, 2006.

Hình thức và tiêu chuẩn đánh giá sinh viên:

- Hình thức thi cuối kỳ : Thi viết.
- Sinh viên phải đảm bảo các điều kiện theo Quy chế của Nhà trường và của Bộ

Thang điểm: Thang điểm chữ A, B, C, D, F

Điểm đánh giá học phần: Z = 0,3X + 0,7Y.

Bài giảng này là tài liệu **chính thức và thống nhất** của Bộ môn Khoa học máy tính, Khoa Công nghệ thông tin và được dùng để giảng dạy cho sinh viên.

Ngày phê duyệt: / /2010

Trưởng Bộ môn: Thạc sỹ Nguyễn Hữu Tuân

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1
SAI SỐ

1.1. Khái niệm số gần đúng và sai số

1. Sai số tuyệt đối

Trong tính gần đúng ta làm việc với các giá trị gần đúng của các đại lượng . Cho nên vấn đề đầu tiên cần nghiên cứu, là vấn đề sai số. Xét đại lượng đúng A có giá trị gần đúng là a. Lúc đó ta nói " *a xấp xỉ A*" và viết " a $\approx$ A ". Trị tuyệt đối $|a - A|$ gọi là *sai số tuyệt đối* của a (Xem là giá trị gần đúng của A). Vì nói chung ta không cần biết số đúng A , nên không tính được sai số tuyệt đối của a. Do đó ta tìm cách *ước lượng* sai số đó bằng số dương Δ_a nào đó lớn hơn hoặc bằng $|a - A|$:

$$|a - A| \le \Delta_a \quad (1.1)$$

Số dương Δ_a này gọi là *sai số tuyệt đối giới hạn* của a. Rõ ràng nếu Δ_a là sai số tuyệt đối giới hạn của a thì mọi số $\Delta' > \Delta_a$ có thể xem là sai số tuyệt đối giới hạn của a . Vì vậy trong những điều kiện cụ thể người ta chọn Δ_a *số dương bé nhất có rhể được* thoả mãn những (1.1)
Nếu số xấp xỉ a của A có sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a thì ta quy ước viết

$$A = a \pm \Delta_a \quad (1.2)$$

với nghĩa của(1.1) tức là:

$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a \quad (1.3)$$

2. Sai số tương đối:

Tỉ số $\dfrac{|a - A|}{|a|} \cong \dfrac{|a - A|}{|A|}$ gọi là sai số số tương đối của a (so với A). Nói chung tỉ số đó không tính được vì A nói chung không biết .

Ta gọi tỉ số:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad (1.4)$$

Gọi là sai số tương đối gới hạn của a.

Ta suy ra: $\Delta_a = |a| \; \delta_a$ (1.5)

Các công thức (1.4) và (1.5) cho liên hệ giữa sai số tương đối và sai số tuyệt đối . Biết Δ_a thì (1.4) cho phép δ_a , biết δ_a thì (1.5) cho phép tính Δ_a .

Do (1.5) nên (1.2) cũng có thể viết :

$$A = a (1 \pm \delta_a) \quad (1.6)$$

Trong thực tế người ta xem Δ_a là sai số tuyệt đối và lúc đó δ_a cũng gọi là sai số tương đối.

3. Chú thích

Sai số tuyệt đối không nói lên đầy đủ " *Chất lượng*" của một số xấp xỉ, thực tế " *Chất lượng*" được phản ánh qua sai số tương đối. Lấy thí dụ: đo hai chiều dài A và B được a = 10 m với Δ_a = 0,05 m và b = 2m Với Δ_b = 0,05m. Rõ ràng phép đo A thực hiện " Chất lượng" hơn phép đo B. Điều đó không phản ánh qua sai số tuyệt đối vì chúng bằng nhau, mà qua sai số tương đối:

$$\delta_a \frac{0,05}{10} = 0,5\% < \delta_b = \frac{0,05}{2} = 2,5\%$$

1.2. Cách viết số xấp xỉ

1. Chữ có nghĩa

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số, nhưng ta chỉ kể các chữ số từ chữ số khác không đ ầu tiên tính từ trái sang phải là chữ có nghĩa . Chẳng hạn có 2,74 có 3 chữ số có nghĩa, số 0,0207 có ba chữ số có nghĩa.

2. Chữ số đáng tin

Mọi số thập phân đều có dạng:

$$A = \pm \sum a_s 10^s \qquad (1.7)$$

Trong đó: a_s là những số nguyên từ 0 đến 9, chẳng hạn số 65,807 viết:

$$65,807 = 6.10^1 + 5.10^0 + 8.10^{-1} + 0.10^{-2} + 7.10^{-3}$$

Tức ta có dạng (1.7) với:

$\alpha_1 = 6$, $\alpha_o = 5$, $_{\alpha\text{-}1} = 8$, $_{\alpha\text{-}2} = 0$, $_{\alpha\text{-}3} = 7$

Giả sử a là giá trị xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a. Ta chú ý chữ α_s là chữ số đứng ở hàng thứ s của a. Nếu $\Delta_a \leq 0,5 .10^s$ thì nói α_s là *chữ số đáng tin*, nếu Nếu $\Delta_a > 0,5 .10^s$ thì nói α_s là *chữ số đáng nghi*.

Như vậy ta đã gắn khái niệm sai số tuyệt đối với khái niệm chữ số đáng tin

Thí dụ: Cho a = 65,827 với Δ_a thì các chữ số 6, 5, 8, 2 là đáng tin, còn các chữ số 7, 4 là đáng nghi. Nếu Δ_a = 0,0067 thì các chữ số 6, 5, 8, là đáng tin còn các chữ số 2, 7, 4 là đáng nghi.

Rõ ràng nếu α_s là đáng tin thì tất cả những chữ số có nghĩa đứng ở bên trái nó cũng là đáng tin và nếu α_s là đáng nghi thì tất cả những chữ số có nghĩa ở bên phải nó cũng đáng nghi.

3. Cách viết số xấp xỉ

Cho số a là giá trị xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a. Có hai cách viết số xấp xỉ a. Cách thứ nhất là *viết kèm theo sai số* như ở công thức (1.2) hoặc (1.6) . Cách thứ hai là *viết theo quy ước*: *Mọi chữ số có nghĩa là đáng tin*. Một số viết theo cách thứ hai có nghĩa là nó có sai số tuyệt đối giới hạn *không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng cuối cùng*. Các bảng số cho sẵn như bảng lôgarít, v...v.. thường in các số xấp xỉ theo quy ước này.

1.3. Sự quy tròn và sai số quy tròn

1. Hiện tượng quy tròn số và sai số quy tròn.

Trong tính toán khi gặp một số có quá nhiều chữ số đáng nghi người ta bỏ đi một vài chữ số ở cuối cho gọn, việc làm đó gọi là *quy tròn số*. Mỗi khi quy tròn một số người ta tạo ra một sai số mới gọi là *sai số quy tròn* nó bằng hiệu giữa số đã quy tròn và số chưa quy tròn. Trị tuyệt đối của hiệu đó gọi là sai số quy tròn tuyệt đối *càng bé càng tốt*.

Ta chọn quy tắc sau đây : *quy tròn sao cho sai số quy tròn tuyệt đối không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng được giữ lại cuối cùng, tức là 5 đơn vị ở hàng bỏ đi đầu tiên, cụ thể là, nếu chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5 thì thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng một đơn vị, còn nếu chữ số bỏ đi đầu tiên < 5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng.*

Thí dụ: Số 62,8274 quy tròn đến chữ số lẻ thập phân thứ ba (tức là giữ lại các chữ số từ đầu đến chữ số lẻ thập phân thứ ba) sẽ thành số 62,827; cũng số đó quy tròn đến chữ số lẻ thập phân thứ hai sẽ thành 62,83; và cũng số đó quy tròn đến ba chữ số có nghĩa (tức là chỉ giữ lại ba chữ số có nghĩa) sẽ thành 62,8.

2. Sai số của số đã quy tròn.

Giả sử a là số xấp xỉ của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a. Giả sử ta quy tròn a thành a' thì $|a' - a|$ là sai số quy tròn tuyệt đối. Số lượng ố$_a$ thoả mãn:

$$|a' - a| \leq \text{ố}_{a'} \qquad (1.8)$$

Gọi là sai số quy tròn tuyệt đối giới hạn, cũng gọi là sai số quy tròn tuyệt đối cho gọn.

Hãy tính sai số tuyệt đối giới hạn $\Delta_{a'}$ của a'. Ta có:

$$a' - A = a' - a + a - A$$

Do đó:

$$|a' - A| \leq |a' - a| + |a - A| \leq \text{ố}_{a'} + \Delta_a$$

Vậy ta có thể lấy $\Delta_a' = \Delta_a + \theta_{a'}$ (1.9)

Rõ ràng $\Delta_{a'} > \Delta_a$ tức là việc quy tròn số làm tăng sai số tuyệt đối giới hạn.

3. Ảnh hưởng của sai số quy tròn

Thí dụ: Xét đại lượng $A = (\sqrt{2} - 1)^{10}$. áp dụng công thức nhị thức niutơn (Newton) ta có công thức đúng:

$$(\sqrt{2} - 1)^{10} = 3363 - 2378\sqrt{2} \qquad (1.10)$$

Với: $\sqrt{2}$ = 1,41421356....

Bây giờ ta tính hai vế của (1.10) bằng cách thay $\sqrt{2}$ bởi các số quy tròn (xem bảng 1.1):

Bảng 1.1

$\sqrt{2}$	Vế trái	Vế phải
1,4	0,0001048576	33,8
1,41	0,00013422659	10,02
1,414	0,00014791200	0,508
1,41421	0,00014866399	0,00862
1,414213563	0,00014867678	0,0001472

Sự khác biệt giữa các giá trị tính ra của hai vế chứng tỏ rằng sai số quy tròn có thể có những tác dụng rất đáng ngại trong các quá trình tính toán . Ta nói quá trình tính A bằng vế trái của (1.10) là quá trình tính ổn định , quá trình tính A bằng vế phải của (1.10) là quá trình tính không ổn định.

1.4. Các quy tắc tính sai số

1. Mở đầu.

Xét hàm số u của hai biến số x và y :

$$u = f(x,y) \qquad (1.11)$$

Cho biết sai số về x và y, hãy lập công thức tính sai số về u.

Để tránh nhầm lẫn trước hết ta nhắc lại ý nghĩa của các ký hiệu:

Δx, Δy, Δu chỉ các số gia của x, y, u

Dx, dy, du chỉ các vi phân của x, y, u

Δ_x, Δ_y, Δ_u lại là các sai số tuyệt đối của x, y, u. Theo định nghĩa (1.1) ta luôn có:

$$|\Delta x| \le \Delta_x \ ; \ |\Delta y| \le \Delta_y \qquad (1.12)$$

Ta phải tìm: Δ_u để có $|\Delta_u| \le \Delta_u$

2. Sai số của tổng u = x + y

Ta có: $\Delta u = \Delta x + \Delta y$

Ta suy ra: $|\Delta u| \le |\Delta x| + |\Delta y|$

Do đó theo (1.12) ta có: $|\Delta u| \le \Delta_x + \Delta_y$

Ta chọn: $\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y$ (1.13)

Để có: $|\Delta u| \le \Delta_u$.

Vậy có quy tắc:

Sai số tuyệt đối (Giới hạn) của một tổng bằng tổng các sai số tuyệt đối (Giới hạn) của các số hạng.

Chú thích. Xét trường hợp u = x - y với x và y cùng dấu .

Lúc đó: $\delta_u = \frac{\Delta_u}{u} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x-y|}$

Cho nên nếu $|x-y|$ rất bé thì sai số tương đối giới hạn rất lớn. Do đó trong tính toán người ta tìm cách *tránh phải trừ các số gần nhau.*

3. Sai số của tích u = xy

Ta có: $\Delta u \approx du = ydx + xdy \approx y\Delta x + x\Delta y$

$$|\Delta u| \leq |y|\ |\Delta x| + |x|\ |\Delta y| \leq |y|\ \Delta_x + |x|\ \Delta_y$$

Ta suy ra: $\Delta_u = |y|\Delta_x + |x|\Delta_y$

$$\text{Do đó: } \delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{|y|\Delta_x + |x|\Delta_y}{|xy|} = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|}$$

Tức là có:

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y \qquad (1.14)$$

Vậy có quy tắc : *Sai số tương đối (Giới hạn) của một tích bằng tổng các sai số tương đối (Giới hạn) của các số hạng của tích. Đặc biệt ta có:*

$$\delta_{(x^n)} = n\delta_x \text{ ; n nguyên dương } \Delta \qquad (1.15)$$

4. Sai số của thương x/y (y ≠ o)

Tương tự như trường hợp tích ta có quy tắc:

Sai số tương đối của một thương bằng tổng các sai số tương đối của các hạng số hạng :

$$\delta_{x/y} = \delta_x + \delta_y \qquad (1.16)$$

5. Công thức tổng quát:

Cho : $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Ta có sai số tuyệt đối : $\Delta_u = \sum_{n=1}^{n} \left|\frac{\delta f}{\delta x_i}\right| \Delta x_i$ (1.17)

Và từ đó ta suy ra sai số tương đối δ_u theo định nghĩa (1.4)

Thí dụ: Tính sai số tuyệt đối (giới hạn) và sai số tương đối (giới hạn) của thể tích cầu:

$$V = \frac{1}{6}đd^3$$

Nếu đường kính d = 3,7 ± 0,05 cm và đ = 3,14.

Giải . Xem đ và d là đối số của hàm V, theo (1.14) và (1.15) ta có:

$\delta_v = \delta_đ + 3\delta_d$

$\delta đ = 0{,}0016/314 = 0{,}0005$

$\delta_d = 0{,}05/3{,}7 = 0{,}0135$

Suy ra: $\delta_V = 0{,}0005 + 3.0{,}0135 = 0{,}04$

Mặt khác: $V = \frac{1}{6}đd^3 = 26{,}5\ cm^3$

Vậy có: $\Delta_V = 26{,}5\ .0{,}04 = 1{,}06 \approx 1{,}1cm^3$

$V = 26{,}5 \pm 1{,}1\ cm^3$

1.5. Sai số tính toán và sai số phương pháp

1. Mở đầu

Khi giải gần đúng một bài toán phức tạp ta phải thay bài toán đã cho bằng một bài toán đơn giản hơn có thể giải được thông qua việc t hực hiện các phép tính thông thường bằng tay hoặc máy tính điện tử. *Phương pháp thay bài toán phức tạp bằng bài toán đơn giản như thế gọi là phương pháp gần đúng*. Sai số do phương pháp gần đúng tạo ra gọi là sai số phương pháp. Để giải bài toán đơn giản ta phải thực hiện các phép tính thông thường, ta luôn luôn phải quy tròn các kết quả trung gian . Sai số tạo ra bởi tất cả các lần quy tròn như vậy gọi là sai số tính toán . Sai số cuối cùng là tổng hợp của hai loại sai số phương pháp và tính toán nói trên.

2. Thí dụ

a) *Tính tổng:*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3}$$

Giải. A là tổng của 6 phân số. Ta có thể tính trực tiếp A mà không phải thay nó bằng một tổng đơn giản hơn . Vì vậy ở đây không có sai số phương pháp . Để tính A ta hãy thực hiện các phép chia dến ba chữ số lẻ thập phân và đánh giá các sai số quy tròn tương ưng:

$\frac{1}{1^3} = \frac{1}{1} = 1{,}000$ với $\theta_1 = 0$

$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ với $\theta_2 = 0$

$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0{,}037$ với $\theta_3 = 4.10^{-4}$

$\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = 0{,}016$ với $\theta_4 = 4.10^{-4}$

$\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ = 0,008 với $\theta_5 = 0$

$\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ = 0,005 với $\theta_6 = 4.10^{-4}$

Vậy A $\approx$ a =1,000 - 0,125 + 0,037 - 0,016 + 0,008 - 0,005 = 0,899

$$|A-a| = \left| \left(\frac{1}{1^3}-1\right) - \left(\frac{1}{2^3}-0{,}125\right) + \left(\frac{1}{3^3}-0{,}037\right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{4^3}-0{,}016\right) + \left(\frac{1}{5^3}-0{,}008\right) - \left(\frac{1}{6^3}-0{,}005\right) \right|$$

$$|A-a| \le \left|\frac{1}{1^3}-1\right| + \left|\frac{1}{2^3}-0{,}125\right| + \left|\frac{1}{3^3}-0{,}037\right| + \left|\frac{1}{4^3}-0{,}016\right| + \left|\frac{1}{5^3}-0{,}008\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{6^3}-0{,}005\right| \le \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 9.10^{-4}$$

Do đó

a = 0,899 là giá trị gần đúng của A với sai số tính toán 9.10^{-4} :

Ta viết A = 0,899 $\pm$ 9.10^{-4} (1.18)

b) *Tính giá trị của đại lượng:*

$$B = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

Với sai số tuyệt đối không vượt quá 5.10^{-3}

Giải . Vế phải của B là hợp lý . Nhưng vế phải lá một " tổng vô hạn số hạng" , ta không thể cộng hết số này đến số khác mãi được . Do đó để tính B ta phải sử dụng một phương pháp gần đúng, cụ thể là thay B bằng tổng của n số hạng đầu:

$$B_n = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3}$$

Bài toán tính B_n đơn giản hơn bài toán tính B . Lúc đó $|B - B_n|$ là sai số phương pháp, và số n phải được chọn sao cho sai số phương pháp ấy cộng với sai số tính toá n vẫn còn nhỏ hơn 5.10^{-3}. Ta có :

$$|B - B_n| = \left|\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots\right| < \frac{1}{(n+1)^3}$$

(theo lí thuyết về chuỗi số đan dấu), với n = 6 ta thấy :

$$|B - B_6| < \frac{1}{7^3} = \frac{1}{334} < 3.10^{-3}$$

Ta chú ý rằng B_6 = A đã tính ở trên (xem 1.18):

B_6 = A = 0,899 $\pm 9.10^{-4}$

Vậy có thể lấy B $\approx$ 0,899. Để xét sai số ta có :

B - 0,889 = B - B_6 + A - 0,899

$|B - 0{,}899| \leq |B - B_6| + |A - 0{,}899|$

$|B - 0{,}899| \leq 3.10^{-3} + 9.10^{-4} < 4.10^{-3}$

Vậy ta đã tính được B $\approx 0{,}899$ với sai số tuyệt đối không vượt quá 4.10^{-3}

Chú ý rằng : trong sai số tổng hợp cuối cùng có phần của sai số phương pháp và có phần của sai số tính toán , cho nên ta phải khéo phân bố sao cho sai số cuối cùng nhỏ hơn sai số cho phép.

PHỤ LỤC 1
SỰ ỔN ĐỊNH CỦA MỘT QUÁ TRÌNH TÍNH

1. Mở đầu

Xét một quá trình vô hạn (tức là gồm vô số bước) để tính ra một đại lượng nào đó. Ta nói quá trình tính là ổn định nếu sai số tính toán tức là các sai số quy tròn tính luỹ lại không tăng vô hạn.

Nếu sai số đó tăng vô hạn thì ta nói quá trình tích là không ổn định.

Rõ ràng nếu quá trình tính không ổn định thì khó có hi vọng tính được đại lượng cần tính với sai số cho phép. Cho nên trong tính toán kị nhất là các quá trình tính không ổn định.

Để kiểm tra tính ổn định của một quá trình tính thường người ta giả sử sai số chỉ xảy ra tại một bước , sau đó cho phép tính đều làm đúng không có sai số , nếu cuối cùng sai số tính toán không tăng vô hạn thì xem như quá trình tính ổn định.

2. Thí dụ

Xét quá trình tính

$$y_{i+1} = qy_i , \qquad (1.19)$$

y_0 và q cho trước .

Giả sử tại bước i xác định nào đó khi tính y_i ta phạm một sai số δ_i (đây không phải là kí hiệu của sai số tương đối như trước đây), nghĩa là thay cho y_i ta chỉ thu được $\tilde{y}_i$. Giả sử :

$$\left| y_i - y_i \right| \qquad (1.20)$$

Sau đó thay cho y_{i+1} ta có $\tilde{y}_{i+1}$ với :

$\tilde{y}_{i+1} = q\tilde{y}_i = \sigma > 0$

Lấy(1.21) trừ (1.19) vế với vế ta được:

$\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1} = q\, y_i - q\, y_i$

$\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1} = q\,(\tilde{y}_i - y_i)$

Tiếp theo ta có:

$$\tilde{y}_{i+2} = q\tilde{y}_{i+1} \;;\; y_{i+2} = q\, y_{i+2}$$

Bằng phép trừ như trên ta lại có:

$$\tilde{y}_{i+2} - y_{i+2} = q(\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}) = q^2 (\tilde{y}_i - y_i)$$

Một cách tổng quát ta có:

$$\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n} = q^n(\tilde{y}_i - y_i)$$

$$\left|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}\right| = |q|^n \left|\tilde{y}_i - y_i\right|`$$

Như vậy, nếu ở bước i ta mắc một sai số $\left|\tilde{y} - y_1\right| = \delta$ và sau đó mọi phép tính đều làm đúng thì ở bước i + n ta sẽ mắc sai số

$$\left|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}\right| = |q|^{n\delta}$$

Ta thấy có hai trường hợp cần phân biệt;

1. Trường hợp $|q| \le 1$ lúc đó $|q|^n$

$$\left|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}\right| \le \delta \text{ với mọi n}$$

nghĩa là sai số tính toán bị chặn (không tăng vô hạn). Vậy quá trình tính ổn định.

2. Trường hợp $|q| \le 1$ - Lúc đó $|q|^n$ tăng khi n và $|q|^n \to \infty$, nên sai số

$$\left|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}\right| \to \infty \text{ khi } n \to \infty$$

Vậy quá trình tính không ổn định

Trong thực tế, mặc dù quá trình tính là vô hạn, người ta cũng chỉ làm một số hữu hạn bước, nhưng vẫn phải đòi hỏi quá trình tính ổn định mới hy vọng một số hữu hạn bước có thể đạt được mức độ chính xác mong muốn.

BÀI TẬP

1. Khi đo một góc ta được các giá trị sau : a = $21^o37'3''$; b = $1^o10''$. Tính sai số tương đối của các số xấp xỉ đó biết sai số tuyệt đối trong các phép đo là 1''

2. Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số xấp xỉ sau đây cho biết sai số tương đối của chúng:

$a = 13267$; $\delta_a = 0,1\%$

$b = 2,32$; $\delta_b = 0,7\%$

3. Hãy xác định số các chữ số đáng tin trong các số đáng tin trong các số a với sai số tuyệt đối như sau:

$a = 0,39410$; $\Delta_a = 0,25 .10^{-2}$

$b = 38,2543$; $\Delta_b = 0,25 .10^{-2}$

4. hãy xác định số những chữ số đáng tin trong các số a với sai số tương đối như sau:

$a = 1,8921$; $\delta_a = 0,1.10^{-2}$

$b = 22,351$; $\delta_b = 0,1$.

5. Hãy quy tròn các số dưới đây (xem là đúng) với ba chữ số đáng tin và xác định sai số tuyệt đối Δ và sai số tương đối δ của chúng:

a) 2,1514; b)0,16152;

c)0,01204; d) - 0,0015281.

6. Hãy xác định giá trị của hàm số dưới đây cùng với sai số tuyệt đối và sai số tương đối ứng với những giá trị của các đối số cho với mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin :

a) $u = \ln (x + y^2)$; $x = 0,97$; $y = 1,132$

b) $u = (x + y^2)/z$; $x = 3,28$; $y= 0,932$; $z= 1,132$.

7. Tính tổng S sau đây với ba chữ số lẻ thập phân đáng tin :

$$S = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17}$$

8. Tính số e: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$

với sai số tuyệt đối không quá 10^{-4}

TRẢ LỜI

1. $\delta_a = 0,13.10^{-4}$; $\delta_b = 0,28.10^{-3}$

2. $\Delta_a = 0,13.10^{2}$; $\Delta_b = 0,16.10^{-1}$

3. a) 2; b) 4.

4. a) 3; b)1.

5. a)2,15; $\Delta = 0,14.10^{-2}$; $\delta = 0,65.10^{-3}$

b) 0,162; $\Delta = 0,48.10^{-3}$; $\delta = 0,3.10^{2}$

c) 0,0120; $\Delta = 0,4.10^{-4}$; $\delta = 0,33.10^{-2}$

d) -0,00153; $\Delta = 0,19.10^{-5}$; $\delta = 125.\ 10^{-2}$

6. a) u = 0,81; $\Delta_u = 0,27.\ 10^{-2}$; $\delta_u = 0,33.\ 10^{-2}$

b) u = 3,665; $\Delta_u = 0,7.\ 10^{-2}$; $\delta_u = 0,20.\ 10^{-2}$

7. S = 0,511.

8. e = 2,7183 ± 0,0001.

CHƯƠNG 2
GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH

2.1. Đặt vấn đề

Cho phương trình f(x) = 0, trong đó f(x) là một hàm số nào đó của x. Chỉ có rất ít trường hợp, khi f(x) là một hàm số đơn giản, chẳng hạn hàm số bậc nhất, bậc hai thì ta mới có thể tìm được nghiệm đúng của phương trình. Vì vậy nhu cầu tìm nghiệm gần đúng của phương trình là một vấn đề tất yếu.

2.2. Nghiệm và khoảng phân ly nghiệm

1. Nghiệm của phương trình

Xét phương trình một ẩn :

$$f(x) = 0 \qquad (2.1)$$

trong đó : f là một hàm số cho trước của đối số x.

Nghiệm thực của phương trình (2.1) là số thực α thoả mãn (2.1) tức là khi thay α vào x ở vế trái ta được:

$$f(\alpha) = 0 \qquad (2.2)$$

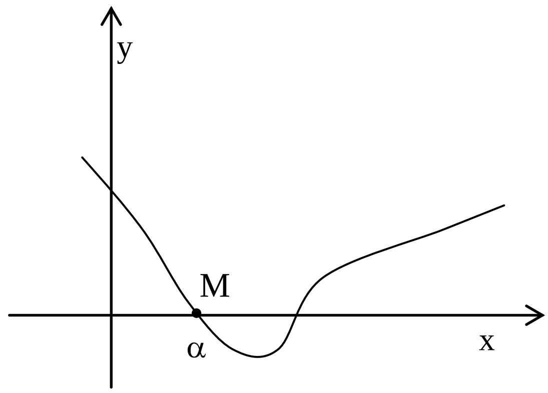
2. Ý nghĩa hình học của nghiệm

Ta vẽ đồ thị của hàm số:

$$y= f(x) \qquad (2.3)$$

trong một hệ toạ độ vuông góc oxy (hình2-1). Giả sử đồ thị cắt trục hoành tại một điểm M thì điểm M này có tung độ y = 0 và hoành độ x = α. thay chúng vào (2.3) ta được:

$$0 = f(\alpha) \qquad (2.4)$$



Hình 2-1

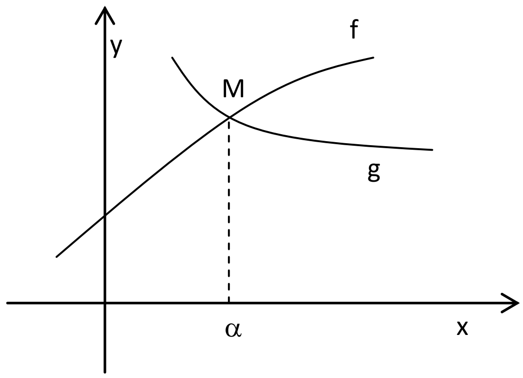
Vậy hoành độ α của giao điểm M chính là một nghiệm của (2.1)

Trước khi vẽ đồ thị ta cũng có thể thay phương trình (2.1) bằng phương trình tương đương :

g(x) = h(x)   (2.5)

rồi vẽ đồ thị của 2 hàm số (hình 2-2)

y = g(x),   y = h(x)   (2.6)



Hình 2.2

Giả sử hai dồ thị ấy cắt nhau tại điểm M có hoành độ x = α thì ta có:

$$g(\alpha) = h(\alpha) \qquad (2.7)$$

Vậy hoành độ α của giao điểm M của 2 đồ thị (2.6) chính là một nghiệm của phương trình (2.5), tức là của phương trình (2.1).

3. Sự tồn tại nghiệm thực của phương trình (2.1)

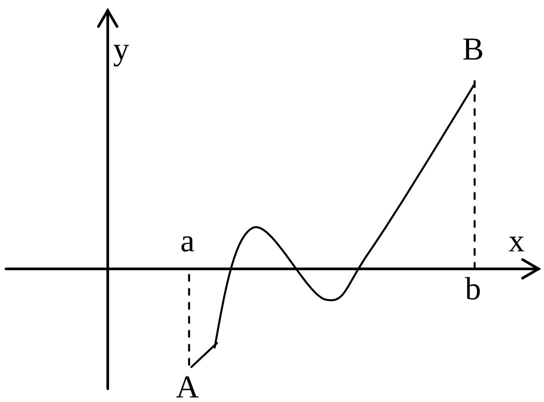
Trước khi tìm cách tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) ta phải tự hỏi xem nghiệm thực ấy có tồn tại hay không . Để trả lời ta có thể dùng phương pháp đồ thị ở mục 2 trên. Ta cũng có thể dùng định lý sau:

Định lí 2.1 - Nếu có 2 số thực a và b (a<b) sao cho f(a) và f(b) trái dấu tức là

$$f(a).f(b) < 0 \qquad (2.8)$$

đồng thời f(x) liên tục trên [a, b] thì ở trong khoảng [a, b] có ít nhất một nghiệm thực của phương trình (2.1).

Điều đó có thể minh hoạ trên đồ thị (hình 2 - 3). Đồ thị của hàm số y = f(x) tại a $\le x \le$ b là một đường liền nối hai điểm A và B , A ở dưới , B ở trên trục hoành, nên phải cắt trục hoành tại ít nhất một điểm ở trong khoảng từ a đến b . Vậy phương trình (2.1) có ít nhất một nghiệm ở trong khoảng [a, b].



Hình 2-3

4. Khoảng phân ly nghiệm (còn gọi là khoảng cách ly nghiệm hay khoảng tách nghiệm)

Định nghĩa 2.1 - Khoảng [a, b] nào đó gọi là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2.1) nếu có chứa một và chỉ một nghiệm của phương trình đó.

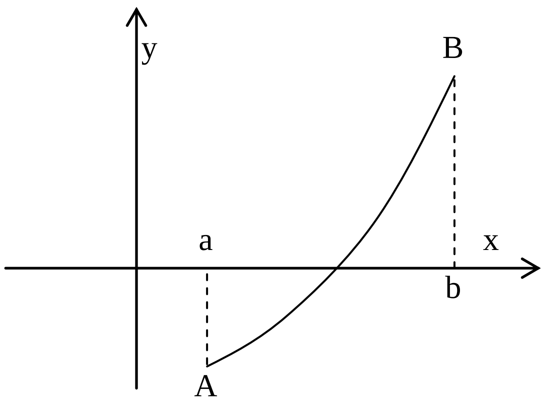
Để tìm khoảng phân ly nghiệm ta có định lý:

Định lý 2.2 - Nếu [a, b] là một khoảng trong đó hàm số f (x) liên tục và đơn điệu , đồng thời f(a) và f(b) trái dấu, tức là có (2.8) thì [a, b] là một k hoảng phân ly nghiệm của phương trình (2.1).

Điều này có thể minh hoạ bằng đồ thị (hình 2 - 4).

Đồ thị của hàm số y = f(x) cắt trục hoành tại một và chỉ một điểm ở trong [a, b]. Vậy [a, b] chứa một và chỉ một nghiệm c ủa phương trình (2.1).

Nếu f(x) có đạo hàm thì điều kiện đơn điệu có thể thay bằng điều kiện *không đổi dấu* của đạo hàm vì đạo hàm không đổi dấu thì hàm số đơn điệu. ta có:



Hình 2-4

*Định lý 2.3 - Nếu [a, b] là một khoảng trong đó hàm f (x) liên tục, đạo hàm f' (x) không đổi dấu và f (a), f(b) trái dấu thì [a, b] là một khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2.1)*Muốn tìm các khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2.1) thường người ta nghiên cứu sự biến thiên của hàm số y = f(x) rồi áp dụng định lý 2.3.

5. Thí dụ

Cho phương trình: $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ (2.9)

Hãy chứng tỏ phương trình này có nghiệm thực và tìm khoảng phân ly nghiệm.

Giải : Trước hết ta xét sự biến thiên của hàm số f(x). Nó xác định và liên tục tại mọi x, và

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \text{ tại } x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ta suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

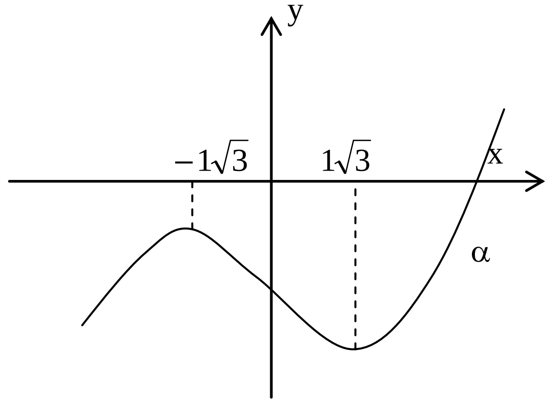
trong đó : M = f (- $\frac{1}{\sqrt{3}}$) = - $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ - 1 <0

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất (h. 2-5), do đó phương trình (2.9) có một nghiệm thực duy nhất, ký hiệu là α.

Ta tính thêm: f(1) = 1^3 - 1 - 1 < 0

f(2) = 2^3 - 2 - 1 > 0

Vậy khoảng [1, 2] chứa một nghiệm của phương trình (2.9)



Hình 2-5

Nhưng vì phương trình này chỉ có một nghiệm nên chính nghiệm ấy phân ly ở trong [1, 2]. Tóm lại, *phương trình (2. 9) có một nghiệm thực duy nhất α*, phân ly ở trong khoảng [1, 2].

2.3. Phương pháp chia đôi

1. Mô tả phương pháp

Xét phương trình (2.1) với giả thiết nó có nghiệm thực α đã phân ly ở trong khoảng [a, b]. Lấy một $\overline{x}$ ∈ [a, b] làm giá trị gần đúng cho α thì sai số tuyệt đối $|\overline{\alpha} - \alpha|$ < b - a. Để có sai số nhỏ ta tìm cách thu nhỏ dần khoảng phân ly nghiệm bằng cách *chia đôi liên tiếp* các khoảng phân ly nghiệm đã tìm ra . Trước hết ta chia đôi khoảng [a, b], điểm chia là c = (a + b)/2. Rõ ràng khoảng phân ly nghiệm mới sẽ là [a, c] hay [c, b]. Ta tính f(c). Nếu f(c) = 0 thì c chính là nghiệm đúng α. Thường thì f(c) ≠ 0. Lúc đó ta so sánh dấu của f (c) với dấu của f(a) để suy ra khoảng phân ly nghiệm thu nhỏ . Nếu f(c) trái dấu f (a) thì khoảng phân ly nghiệm thu nhỏ là [a, c]. Nếu f(c) cùng dấu với f(a) thì khoảng phân ly nghiệm thu nh ỏ là [c, b]. Như vậy sau khi chia đôi khoảng [a, b] ta được khoảng phân ly nghiệm thu nhỏ là [a, c] hay [c, b], ký hiệu là [a_1, b_1], nó nằm trong [a, b] và chỉ dài bằng nửa khoảng [a, b] tức là :

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a).$$

Tiếp tục chia đôi khoảng [$a_{1,}$, b_1] và làm như trên ta sẽ được khoảng phân ly nghiệm thu nhỏ mới, kí hiệu là [a_2, b_2], nó nằm trong [a_1, b_1] tức là trong [a, b] và chỉ dài bằng nửa khoảng [$a_{1,}$, b_1] :

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b - a)$$

Lặp lại việc làm trên đến lần thứ n ta được khoảng phân ly nghiệm thu nhỏ thứ n , kí hiệu là $[a_n, b_n]$, nó nằm trong [a, b] và chỉ dài bằng $1/2^n$ của [a, b] :

$$a_n \le \alpha \le b_n ; \qquad b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n}$$

Vậy có thể lấy a_n làm giá trị gần đúng của α, lúc đó sai số là:

$$|\alpha - a_n| \le b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n} \qquad (2.10)$$

cũng có thể lấy b_n làm giá trị gần đúng của α, lúc đó sai số là:

$$|\alpha - b_n| \le b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n} \qquad (2.11)$$

Do đó với n đủ lớn, a_n hay b_n đều đủ gần α.

Khi $n \to \infty$ thì $a_n \to \alpha$, $b_n \to \alpha$. Nên ta nói phương pháp chia đôi *hội tụ*.

Chú thích: Trong quá trình chia đôi liên tiếp rất có thể gặp một điểm chia tại đó giá trị của f bằng không. Lúc đó ta được nghiệm đúng chính là hoành độ của điểm chia đó.

2. Thí dụ

Xét phương trình (2.9)

Ta đã chứng minh rằng phương trình này chỉ có một nghiệm thực α đã phân ly ở trong khoảng [1, 2]. Vậy:

α ∈ [1, 2] và f(1) = 1 - 1 - 1 < 0

$f(2) = 2^3 - 2 - 1 > 0$

Ta chia đôi khoảng [1, 2] điểm chia là 3/2.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 > 0$ trái dấu f(1). Vậy α ∈ [1, 3/2].

Ta chia đôi khoảng [1, 3/2], điểm chia là 5/4. Ta có f(5/4) < 0, cùng dấu với f(1). Vậy α ∈ [5/4, 3/2].

Ta chia đôi khoảng [5/4, 3/2], điểm chia đôi là 11/8. Ta có f(11/8) > 0, trái dấu f(5/4). Vậy α ∈ [5/4, 11/8].

Ta chia đôi khoảng [5/4, 11/8], điểm chia là 21/16. Ta có f(21/16) < 0, cùng dấu với f(5/4). Vậy α ∈ [21/16, 11/8].

Ta chia đôi khoảng [21/16, 11/8], điểm chia là 43/32. Ta có f (42/32) > 0, trái dấu f(21/16). Vậy α ∈[21/16, 42/32].

Ta dừng quá trình chia đôi tại đây và lấy 21/16 = 1,3125 hay 43/32 = 1,34375 làm giá trị gần đúng của α thì sai số không vượt quá $1/2^5 = 1/32 = 0,03125$.

Vì ta đã chia đôi 5 lần và độ dài khoảng [1,2] là 2 - 1 = 1, (xem công thức (2.10) và (2.11)).

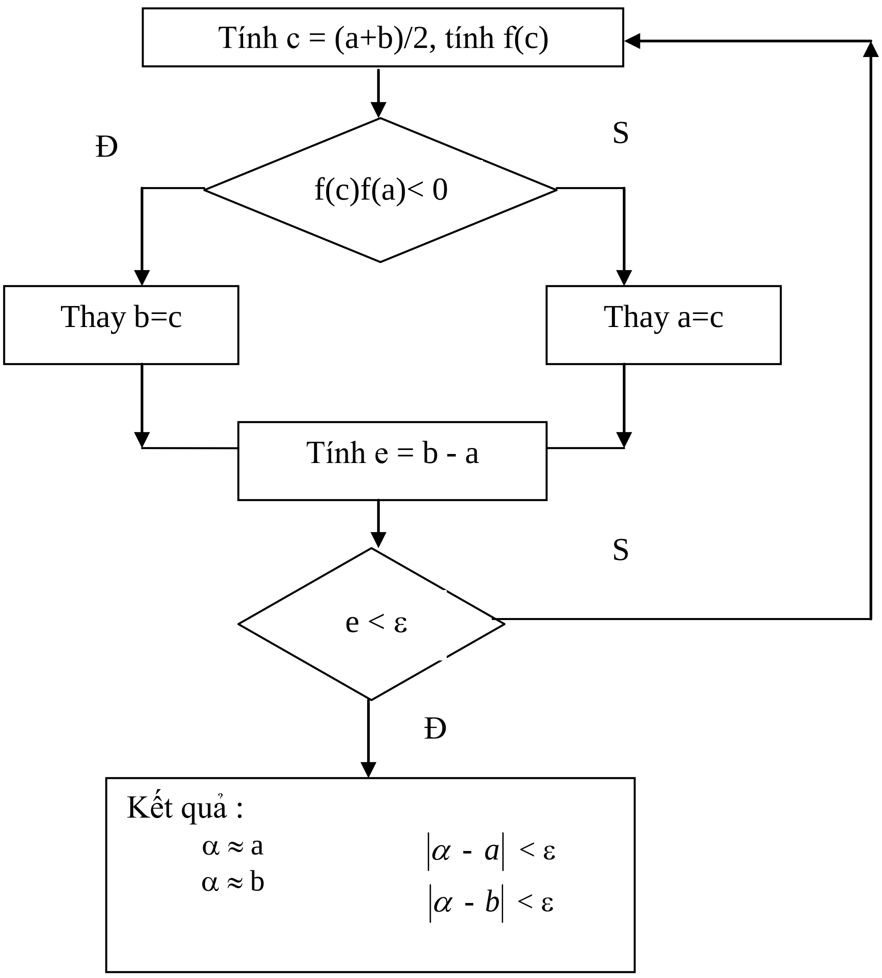
3. Sơ đồ tóm tắt phương trình chia đôi

1) Cho phương trình f(x) = 0

2) Ấn định sai số cho phép ε.

3) Xác định khoảng phân ly nghiệm [a, b]

4) Sơ đồ thuật toán:



2.4. Phương pháp lặp

1. Mô tả phương pháp

Xét phương trình (2.1) với giả thiết nó có nghiệm thực α phân ly ở trong khoảng [a,b];

Trước hết ta chuyển phương trình(2.1) về dạng:

$X = \varphi (x)$ (2.12)

Và tương đương với (2.1)

Sau đó ta chọn một số x_0 nào đó $\in$ [a,b] làm xấp xỉ đầu rồi tính dần dãy số x_n theo quy tắc:

$x_n = \varphi (x_{n-1})$, $n = 1,2...$ (2.13)

x_0 cho trước $\in [a,b]$ (2.14)

Quá trình tính này có tính lặp đi lặp lại nên phương pháp ở đây gọi là phương pháp lặp , hàm φ gọi là hàm lặp.

2. Sự hội tụ:

Định nghĩa 2.2 - Nếu dãy $x_n \to \alpha$ khi $n \to \infty$ thì ta nói phương pháp lặp (2.13) (2.14) hội tụ.

Khi phương pháp lặp hội tụ thì x_n càng gần α nếu n càg lớn. Cho nên ta có thể xem x_n với n xác định là giá trị gần đúng c ủa α. Nếu phương pháp lặp không hội tụ thì x_n có thể rất xa α. Vì vậy chỉ có phương pháp lặp hội tụ mới có giá trị . Để kiểm tra xem một phương pháp lặp có hội tụ hay không ta có định lý sau:

Định lý 2.4 - Xét phương pháp lặp (2.13)(2.14) giả sử

1) [a,b] là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (2.1) tức là của (2.12):

2)Mọi x_n tính theo (2.13) (2.14) đều $\in$ [a,b]:

3) Hàm $\varphi(x)$ có đạo hàm thoả mãn:

$|\varphi'(x)| \le q <1, a<x<b$ (2.15)

Trong đó q là một hằng số.

Thế thì phương pháp lặp (2.13) (2.14) hội tụ

$x_n \to \alpha$ khi $n \to \infty$ (2.16)

Chứng minh: Trước hết vì α là nghiệm của (2.12) nên có

$\alpha = \varphi (\alpha)$

Đem đẳng thức này trừ (2.13) vế với vế ta được:

$\alpha - x_n = \varphi(\alpha) - \varphi (x_{n-1})$ (2.17)

Ta sẽ áp dụng công thức Lagrangiơ vào vế phải của đẳng thức trên.

Trước hết ta nhắc lại công thức Lagrangiơ:

Công thức Lagrangiơ - Cho hàm số F (x) liên tục trên [a,b], có đạo hàm trong (a,b) thì tồn tại số $c \in (a,b)$, tức là $c = a+ \theta(b-a)$, $0< \theta<1$ sao cho:

$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$

Áp dụng công thức Lagrangiơ vào (2.17) ta được:

$$\alpha - x_n = \varphi'(c)(\alpha - x_{n-1}) \qquad (2.18)$$

Với $c= a + \theta(\alpha - x_{n-1}) \in (a,b)$

Theo giả thiết (2.15) ta có $|\varphi'(c)| \le q < 1$. Do đó (2.18) cho:

$|\alpha - x_n| = |\varphi'(c)| \quad |\alpha - x_{n-1}| \le q|\alpha- x_{n-1}|$

Vậy có:

$$|\alpha - x_n| \le q\,|\alpha - x_{n-1}| \qquad (2.19)$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi n. Do đó có

$|\alpha - x_n| \le q\ |\alpha - x_{n-1}|$

$|\alpha - x_{n-1}| \le q\ |\alpha - x_{n-2}|$

....

$|\alpha - x_2| \le q|\alpha - x_1|$

$|\alpha - x_1| \le q|\alpha - x_0|$

Nhân các bất đẳng thức này vế với vế ta được

$$|\alpha - x_n| \le q^n|\alpha - x_0| \qquad (2.20)$$

Vì x_0 và α đã xác định, $q^n \to 0$ khi $n \to \infty$ do giả thiết $0 < q < 1$, nên vế phải $\to 0$ và ta có: $|\alpha - x_n| \to 0$ khi $n \to \infty$

Đó chính là kết luận (2.16) của định lý 2.4.

3. Chú thích

Khi hàm φ đã thoả mã giải thiết 3) của định lý 2.4 thì sự thoả mãn giả thiết 2) phụ thuộc việc chọn x_0 và nó thoả mã trong điều kiện sau:

Giả sử $|\varphi'(x)| \le q < 1$.

Nếu $\varphi'(x) > 0$ ta có thể chọn $x_0 \in [a,b]$ một cách bất kỳ, còn nếu $\varphi'(x) < 0$ thì phải chọn x_0 theo quy tắc:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = a \text{ khi } a < \alpha < \dfrac{(a+b)}{2} \\ x_0 = b \text{ khi } \dfrac{(a+b)}{2} < \alpha < b \end{array}\right\} \qquad (2.21)$$

Muốn biết α thuộc nửa khoảng nào ta chỉ việc tính f ($\frac{(a+b)}{2}$) rồi so sánh dấu của nó với dấu của f(a). Kết quả này ta có thể suy từ công thức (2.17)

4. Đánh giá sai số:

Giả sử ta tính theo (2.13) (2.14) n lần và xem x_n là giá trị gần đúng của α. Khi sso sai số $|x - \alpha|$ có thể đánh giá bằng công thức (2.20) và nhận xét $|\alpha - x_0| < b - a$:

$$|\alpha - x_n| \le q^n (b - a) \qquad (2.22)$$

Nhưng công thức này thường cho sai số quá lớn so với thực tế:

Sau đây ta chứng minh hai công thức đánh giá sai số sát hơn:

a) Công thức đánh giá sai số thứ nhất:

Từ (2.19) ta suy ra:

$$|\alpha - x_n| \le q\,|\alpha - x_{n-1}| = q\,\{|\alpha - x_n + x_n - x_{n-1}|\}$$

Do đó:

$$|\alpha - x_n| \le q\{|\alpha - x_n| + |x_n - x_{n-1}|\}$$

Vì $0 \le q < 1$ nên $1 - q > 0$. Chia bất đẳng thức trên cho (1-q) ta được công thức:

$$|\alpha - x_n| \le \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \qquad (2.23)$$

Đó là công thức đánh giá sai số thứ nhất mà ta muốn tìm cho phương pháp lặp

b) Công thức đánh giá sai số thứ hai:

Công thức này tổng quát hơn , nó có thể áp dụng để tính sai số của nhiều phương pháp khác nhau. Đó là nội dung của định lý 2.5 dưới đây.

Định lý 2.5. Xét phương trình

$$F(x) = 0 \qquad (2.24)$$

Có nghiệm $X \in [c,d]$ và $\overline{X}$ là một số $\in [c,d]$ được xem là giá trị gần đúng của X. Lúc đó ta có:

$$|\overline{X} - X| \le \frac{F(\overline{X})}{m} \qquad (2.25)$$

Trong đó m là một số dương thoả mãn:

$$|F'(x)| \ge m > 0,\ c < x < d \qquad (2.26)$$

Chứng minh: Theo giả thiết ta có F(X) = 0 nên có:

$$F(\overline{X}) = F(\overline{X}) - F(X)$$

Áp dụng công thức Langragiơ (2.18) vào vế phải ta được:

$$F(\overline{X}) = F'\,â\,(\overline{X} - X)$$

Trong đó: $\overline{C}$ = X + θ ($\overline{X}$ - X) ∈ (c,d). Theo giả thiết (2.25) ta có:

|F ($\overline{X}$)| = |F'($\overline{C}$)| $\left|\overline{X} - X\right| = m\left|\overline{X} - X\right|$

Từ đó ta suy ra kết luận (2.25).

Bây giờ ta áp dụng định lý 2.5 để đánh giá sai số của phương pháp lặp giải gần đúng phương trình (2.1).

Ta đã biết α là nghiệm phân ly trong khoảng [a, b] và x_n ∈ [a, b]. Vậy công thức (2.25) cho:

$$\left|a - x_n\right| \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{m} \qquad (2.27)$$

Trong đó m là số dương xác định bởi:

$\left|f(x_n)\right| \ge m > 0$ tại x ∈ (a, b).

Công thức 2.27 là công thức đánh giá sai số thứ hai cho phương pháp lặp.

5. Thí dụ:

Xét phương trình 2.9 ở 2.1. Ta đã chứng minh được rằng nó một nghiệm thực α phân ly ở trong khoảng [1, 2]. Bây giờ ta dùng phương pháp lặp để tính gần đúng nghiệm α đó. Muốn thế trước hết ta phải tìm được hàm lặp φ(x) thích hợp để phương pháp lặp hội tụ, tức là φ(x) phải thoả mãn những giả thiết của định lý 2.4.

Từ (2.9) ta có thể viết:

$$x = x^3 - 1 \qquad (2.28)$$

Và đặt: $\varphi(x) = x^3 - 1$.

Nhưng lúc đó:

$$\varphi'(x) = 3x^2 \ge 3 \text{ tại mọi } x \in [1, 2]$$

Với hàm φ chọn như vậy phương pháp lặp không có hy vọng hội tụ.

Bây giờ ta viết (2.9) ở dạng:

$x^3 = x + 1$.

$x = (x + 1)^{1/3}$

Và đặt: $\varphi(x) = (x + 1)^{1/3}$ (2.29)

Lúc đó:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)(x+1)^{-2/3} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

Nên: $0 < \varphi'(x)\ \frac{1}{3}$ tại mọi x ∈ [1, 2]

Như vậy hàm φ(x) cho bởi (2.29) thoả mãn giả thiết của định lý 2.4 và chú thích ở công thức (2.2.1). Do đó để bắt đầu quá trình tính lặp ta chọn x_0 là một số bất kỳ ∈ [1, 2] chẳng hạn $x_0 = 1$. Sau đó ta tính x_n theo công thức lặp (2.13). Dưới đây là một số giá trị x_n xem là giá trị gần đúng của α cùng với sai số đánh giá theo công thức (2.23) trong đó $q = \frac{1}{3}$.

$x_0 = 1$

$x_1 = 1,25992106;\quad |\alpha - x_1| \le 0,13$

$x_2 = 1,312293837;\quad |\alpha - x_2| \le 0,027$

$x_3 = 1,322353819;\quad |\alpha - x_2| \le 0,005$

$x_4 = 1,324268745;\quad |\alpha - x_2| \le 0,00096$

$x_5 = 1,324632625;\quad |\alpha - x_5| \le 0,000182$

Kết quả này có quá nhiều chữ số đáng nghi . Ta quy tròn nó đến bốn chữ số lẻ thập phân bằng cách viết:

$$\alpha - 1,3246 = \alpha - x_5 + x_5 - 1,3246$$
$$|\alpha - 1,3246| \le |\alpha - x_5| + |x_5 - 1,3246|$$
$$|\alpha - 1,3246| \le 0,000182 + 0,00003265$$

Do đó: $|\alpha - 1,3246| \le 0,00025$

Vậy có: α = 1,3246 ± 0,00025.

So với phương pháp chia đôi thì phương pháp lặp ở đây hội tụ nhanh hơn nhiều.

6. Chú ý:

Trong thực tế người ta dừng quá trình tính khi:

$$|x_n - x_{n-1}| < \text{sai số cho phép } \varepsilon.$$

7. Tóm tắt phương pháp lặp:

1) Cho phương trình: f(x) = 0.

2) ấn định sai số cho phép ε.

3) Xác định khoảng phân ly nghiệm [a, b].

4) Tìm hàm lặp hội tụ φ.

5) Chọn xấp xỉư đầu x_0.

6) Tính: $X_n = \varphi(x_{n-1})$, n = 1,2,3,...

cho tới khi $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ thì dừng

7) Kết quả $\alpha \approx x_n$.

Với sai số $| \alpha - x_n | \le \frac{q}{1-q} \varepsilon$

Trong đó q là số dương < 1 thoả mãn

$| \varphi' (x)| \le q< 1$ tại mọi $x \in (a,b)$.

2.5. Phương pháp dây cung

1. Mô tả phương pháp:

Trong phương pháp Niutơn tức là phương pháp tiếp tuyến ở 2.4. Ta đã thay cung đồ thị AB của hàm y = f(x) bởi tiếp tuyến vẽ tại A hay B . Bây giờ ta thay cung AB bởi dây cung AB rồi lấy hoành độ x_1 của giao điểm P của dây cung với trục hoành làm giá trị gần đúng của nghiệm α (hình 2.8).

Phương trình dây cung AB viết: $\dfrac{Y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \dfrac{X - a}{b - a}$

Tại giao điểm P ta có Y = 0, X = x_1, nên có:

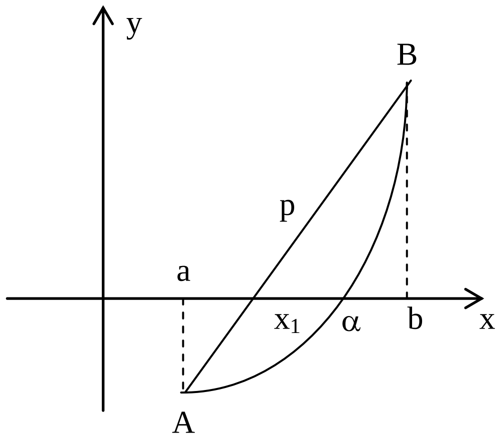
$$\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

Từ đó suy ra:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} \quad (2.41)$$

hay:

$$x_1 = \frac{af(b) - af(a)}{f(b) - f(a)} \quad (2.42)$$



Hình 2.8

Phương pháp tính x_1 như vậy gọi là phương pháp dây cung.

Sau khi tính được x_1 ta có thể xét xem khoảng phân ly nghiệm mới là [a,x_1] hay [x_1, b] rồi tiếp tục áp dụng phương pháp dây cùng vào khoảng phân ly nghiệm mới, nhỏ hơn khoảng cũ. Và cứ thế tiếp tục ta sẽ được các giá trị x_2, x_3,.., x_4, ... ngày càng gần α. Sai số có thể tính bằng công thức (2.27).

2. Thí dụ:

Lại xét phương trình (2.9). Khoảng phân ly nghiệm đã biết là [1, 2].

Ta có:

a = 1; f(a) = f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0.

b = 2; f(b) = f(2) = 2^2- 2 - 1 = 5 > 0.

Vậy (2.42) cho: $x_1 = \dfrac{1.5 - 2.(-1)}{5 - (-1)} = 1{,}167$

Tiếp tục ta có: f(x_1) = -0,58 < 0

Vậy khoảng phân li nghiệm mới là [1,167; 2].

Bây giờ áp dụng (2.42) với a = 1,167, b = 2. Ta được: x_2 = 1,253.

Sai số tính theo (2.27) là 0,15.

Ta thấy rằng phương pháp dây cung hội tụ chậm hơn phương pháp Niutơn.

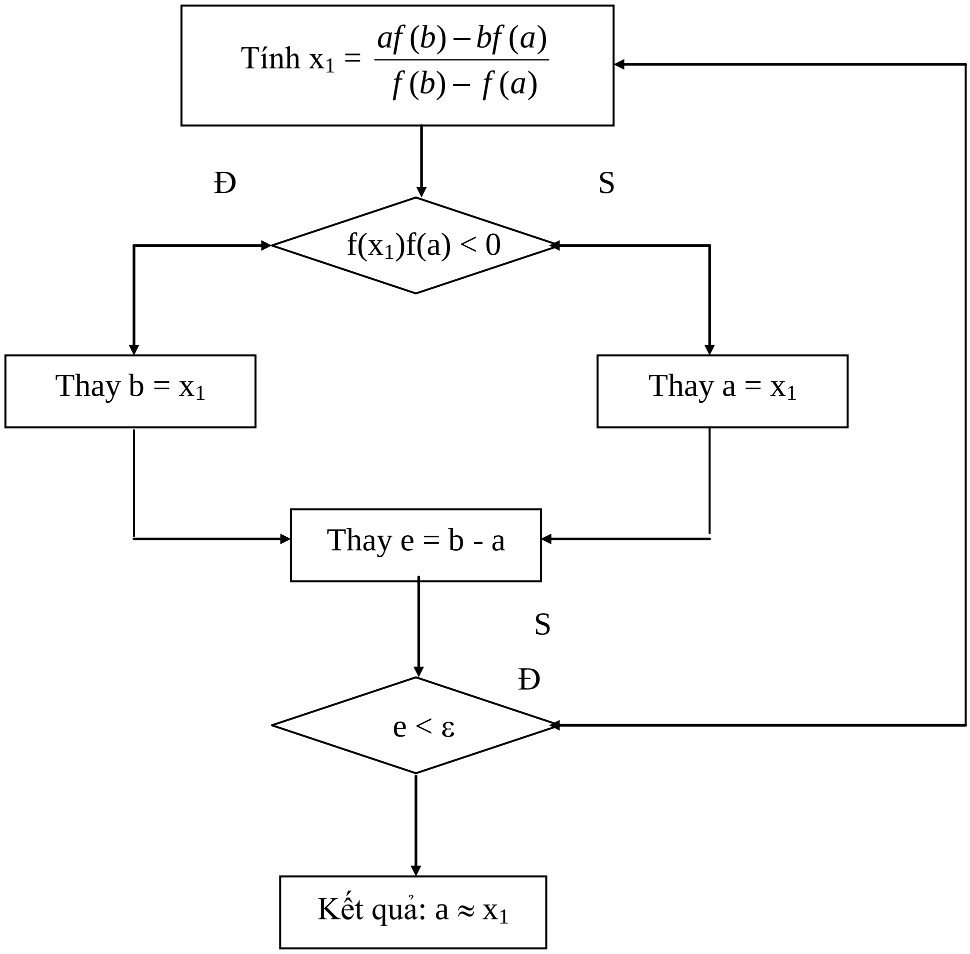
3. Sơ đồ tóm tắt phương pháp dây cung

1) Cho phương trình f(x) = 0.

2) Ấn định sai số cho phép ε.

3) Tìm khoảng phân ly nghiệm [a, b].

4) Sơ đồ thuật toán



Sai số: $|a - x_1| < \frac{|f(x_1)|}{m}$, trong đó: $0 < m < |f'(x)|, \quad x \in (a,b)$

2.6. Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

1. Mô tả phương pháp

Tư tưởng chủ đạo của phương pháp Newton là tìm cách thay phương trình (2.1) phi tuyến đối với x, bằng một phương trình gần đúng, tuyến tính đối với x.

Trước hết ta nhắc lại công thức Taylo : Công thức Taylo Cho hàm số F (x) xác định và có đạo hàm đến cấp n+1 tại x_0 và ở lân cận x_0. Thế thì có công thức sau đây gọi là khai triển Taylo bậc n của F (x) tại x_0:

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}F^n(x_0)$$

$$+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.F^{(n+1)}(c) \qquad (2.30)$$

$$C = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0<\theta<1 \qquad (2.31)$$

Công thức này có giá trị tại x ở lân cận x_0. Công thức (2.31) muốn nói rằng c là một số trung gian giữa x_0 và x.

Bây giờ xét phương trình (2.1) với giả thiết nó có nghiệm thực α phân ly ở trong khoảng [a,b]. Giả sử hàm f có đạo hàm $f'(x) \neq 0$ tại $x \in [a, b]$ và đạo hàm cấp hai f"(x) tại $x \in (a, b)$. Ta chọn $x_0 \in [a, b]$ rồi viết khai triển Taylo bậc nhất của f tại x_0.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c)$$

$$x \in [a, b],\ c = x_0 + \theta(x - x_0) \in (a, b).$$

Như vậy phương trình (2.1) viết:

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c) = 0$$

Ta bỏ qua số hạng cuối cùng và được phương trình:

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$$

Như vậy, ta đã thay phương trình (2.1) bằng phương trình (2.32) đơn giản hơn nhiều vì (2.32) tuyến tính đối với x.

Đương nhiên việc thay thế đó chỉ là gần đúng. Gọi x_1 là nghiệm của (2.32), ta có:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (2.33)$$

Từ x_1 ta tính một cách tương tự ra x_2, v.v.. và một cách tổng quát, khi đã biết x_n ta tính x_{n+1} theo công thức: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (2.34)

x_0 chọn trước $\in$ [a, b]. (2.35)

và xem x_n là giá trị gần đúng của nghiệm α.

Phương pháp tính x_n theo (2.34) (2.35) gọi là phương pháp Niutơn.

Chú ý 1 - Vì phương trình (2.32) dùng để thay cho phương trình (2.1) là tuyến tính đối với x nên phương pháp Niutơn cũng gọi là phương pháp tuyến tính hoá.

Chú ý 2 - Nhìn (2.34) (2.35) ta thấy phương pháp Niutơn thuộc loại phương pháp lặp với hàm lặp:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (2.36)$$

Chú ý 3 - Về mặt hình học thì $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm $y = f(x)$ tại x_0. Xét một trường hợp cụ thể.

Ta vẽ đồ thị trong hình 2-6. Cung đồ thị AB cắt trục hoành tại M có hoành độ chính là nghiệm α. Để tính gần đúng α ta thay một cách gần đúng cung AB bởi tiếp tuyến tại B, B có hoành độ x_0, tiếp tuyến này cắt trục hoành tại P, P có hoành độ x_1 và ta xem x_1 là giá trị gần đúng của α. Để tính x_1 ta viết phương trình tiếp tuyến tại B: với $x_0 = b$ ta có:

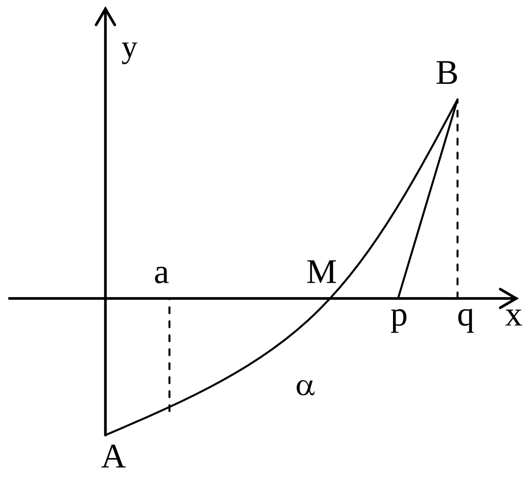
$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)$$

Tại P ta có: $X = x_1$, $Y = 0$,

nên có:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Từ đó ta suy ra (2.33).



Hình 2.6

Cho nên phương pháp Niutơn còn có tên là phương pháp tiếp tuyến.

2. Sự hội tụ và sai số:

Mục đích của ta là tính gần đúng α. Điều đó chỉ có thể thực hiện được bằng phương pháp Niutơn nếu $x_n \longrightarrow \alpha$. Khi $n \to \infty$. Ta có kết quả (không chứng minh) sau:

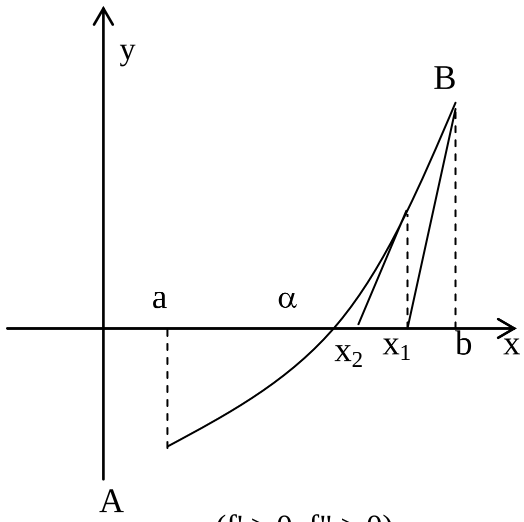
Định lý 2.6. Giả sử [a, b] là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (2.1), f có đạo hàm f', f'' với f và f' liên tục trên [a, b], f' và f'' không đổi dấu trong (a, b). Xấp xỉ đầu x_0 chọn là a hay b sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với f''. Khi đó x_n tính bởi (2.34) (2.35) hội tụ về α khi $n \to \infty$, cụ thể hơn ta có x_n đơn điều tăng tới α nếu $f'f'' < 0$, x_n đơn điệu giảm tới α nếu $f'f'' > 0$.

Dừng lại ở bước thứ n xác định được x_n và xem x_n là giá trị gần đúng của α.

Về sai số, áp dụng định lý 2.5, ta có: $$\left|\alpha - x_n\right| \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{m} \qquad (2.37)$$

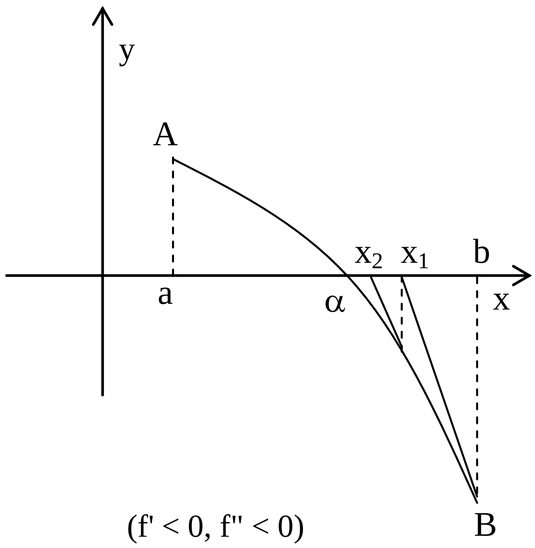
Với: $$0 < m \le \left|f'(x)\right|, \qquad a \le x \le b \qquad (2.38)$$

Ta không chứng minh định lý 2.6, nhưng minh hoạ nó bằng bốn hình vẽ (h.27 a, b, c, d).



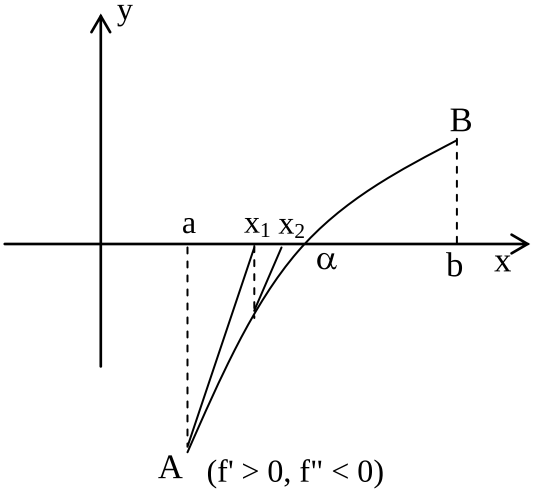
(f' > 0, f'' > 0)

Hình 2-7a



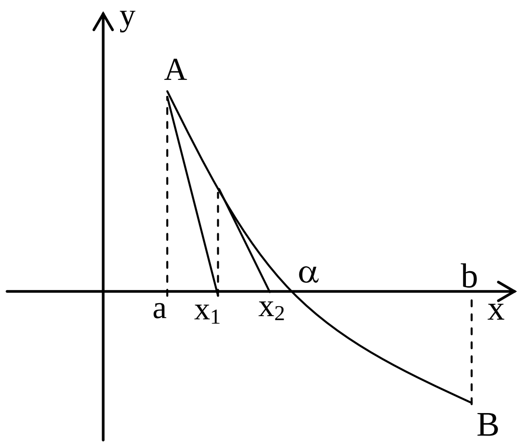
(f' < 0, f'' < 0)

Hình 2-7b



(f' > 0, f'' < 0)

Hình 2-7c



(f' < 0, f'' > 0)

Hình 2-7d

3. Thí dụ:

1. Hãy tính căn bậc hai dương của một số dương a . Muốn thế ta xét phương trình :

$f(x) = x^2 - a = 0$ (2.39)

Rõ ràng có một nghiệm dương của phương trình (2.39) phân li ở trong khoảng [1, 3]. Trong khoảng đó f'(x) = 2x > 0, f''(x) = 2 > 0. Vậy ta có thể áp dụng định lý 2.6. Công thức tính (2.34) viết:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad (2.40)$$

Với a = 2, ta có: $f(2) = 2^2 - 2 > 0$ cùng dấu với f" nên ta chọn $x_0 = 2$. Với x_0 ấy công thức tính (2.40) cho:

$x_1 = 1,5$

$x_2 = 1,417$

$x_3 = 1,41421$

Vì $\sqrt{2} = 1,414213562$, nên ta thấy rõ phương pháp Niutơn hội tụ rất nhanh.

2. Lại xét phương trình (2.9). Ta đã chứng minh được nó có nghiệm thực α phân ly ở trong khoảng [1, 2]. Trong khoảng đó:

$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 3 - 1 = 2 > 0$

$f''(x) = 6x \geq 6 > 0$

Vậy có thể áp dụng định lý 2.6. Để chọn x_0 ta tính $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$ cùng dấu với f".

Ta chọn $x_0 = 2$. Do đó có công thức tính:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$
$$x_0 = 2$$

Sau đây là một số kết quả tính x_n kèm theo sai số tính theo (2.37):

Bảng 2.1

n	**x_n**	**sai số**
0	2	
1	1,545454545	
2	1,359614916	
3	1,325801345	
4	1,324719049	0,0000024
5	1,324717950	2.10^{-10}

4. Chú ý:

Trong thực tế thường người ta dừng quá trình tính khi:

$|x_n - x_{n-1}| <$ sai số cho phép ε.

5. Sơ đồ tóm tắt phương pháp tiếp tuyến:

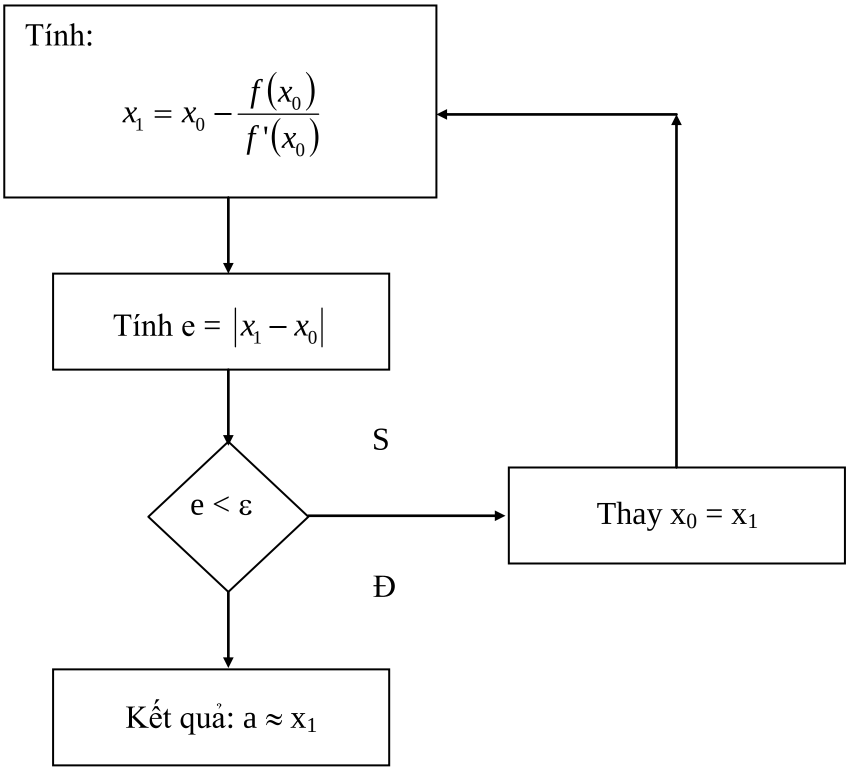
1) Cho phương trình f(x) = 0.

2) Ấn định sai số cho phép ε.

3) Tìm khoảng phân ly nghiệm [a, b] trong đó f' và f'' không đổi dấu.

4) Chọn x_0.

5) Sơ đồ thuật toán



Sai số:

$$|\alpha - x_1| \le \frac{|f(x_1)|}{m}$$

Trong đó:

$$0 < m \le |f'(x)|, \qquad x \in (a, b)$$

BÀI TẬP

1. Giải gần đúng phương trình:

$$x - \sin x = 0{,}25.$$

Bằng phương pháp lặp với kết quả có hai chữ số lẻ thập phân đáng tin.

2. Dùng phương pháp Niutơn tính nghiệm dương của phương trình:

$$1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$$

Với sai số tuyệt đối không quá 10^{-5}.

3. Dùng phương pháp Niutơn tính gần đúng nghiệm của các phương trình sau với sai số tuyệt đối không quá 10^{-5}.

a) $x^2 - \sin\pi x = 0$ b) $x^2 - \cos\pi x = 0$

c) $2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$ d) $\lg x - \frac{1}{x^2} = 0$

e) $x\lg x - 1{,}2 = 0$

4. Dùng phương pháp lặp hãy tính gần đúng nghiệm dương lớn nhất của phương trình:

$$x^3 - x - 1000 = 0$$

Với sai số tuyệt đối không quá 10^{-5}.

TRẢ LỜI

1. 1,17

2. $\alpha = 0{,}29810 \pm 0{,}00001$

3. a) 0,0; 0,78724 b) -0,43843; 0,43840 c) 0,39754

d) 1,89665 e) 2,74065

4. 10,03333

CHƯƠNG 3
XẤP XỈ HÀM

3.1. Đa thức nội suy. Lược đồ Hoócne

1. Vấn đề nội suy

Cho hàm số y = f(x) được cho bằng bảng giá trị: $y_i = f(x_i)$. Khi đó đa thức nội suy của f(x) là đa thức có dạng

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + ... + a_nx_n$

Sao cho $P_n(x_i) = f(x_i)$, i = 1, 2, ... , n.

2. Lược đồ Hoócne

Lược đồ Hoócne để tính giá trị của đa thức $P_n(x)$ là:

$b_0 = a_0$

$b_1 = b_0x + a_1$

$b_2 = b_1x + a_2$

.....

$b_n = b_{n-1}x + a_n$

3. Sự duy nhất của đa thức nội suy

Định lý: Đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số f(x) nếu tồn tại thì duy nhất

Nhận xét: Từ định lý này ta thấy rằng có thể xây dựng đa thức nội suy theo những cách khác nhau, tuy nhiên kết quả thu được không thay đổi, tức là không phụ thuộc vào cách chọn phương pháp nội suy.

3.2. Đa thức nội suy Lagrange

Ta xây dựng đa thức nội suy theo kiểu Lagrange như sau:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Khi đó đa thức Lagrange có dạng: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$

1. Nội suy bậc nhất

Nếu hàm số f(x) được cho bằng 2 cặp điểm thì có thể tìm được đa thức nội suy bậc nhất của f(x).

Áp dụng công thức trên cho trường hợp n = 1 ta được: $P_1(x) = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

2. Nội suy bậc hai

Nếu hàm số f(x) được cho bằng 3 cặp điểm thì có thể tìm được đa thức nội suy bậc hai của f(x). Áp dụng công thức trên cho trường hợp n = 2 ta được:

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

3. Thí dụ

Lập đa thức nội suy Lagrange của hàm cố cho bằng bảng sau:

x	1	2	3	4
y	17	27,5	76	210,5

4. Một số vấn đề về chọn nút:

Có thể chọn nút cách đều hoặc chọn một cách ngẫu nhiên lưới các điểm cho trước của f(x). Tuy nhiên người ta thường chọn các nút cách đều, khi đó việc tính toán sẽ thuận lợi hơn.

3.3. Đa thức nội suy Newton

1. Tỷ hiệu

Trước hết ta đưa vào khái niệm tỷ hiệu. Chẳng hạn tỷ hiệu cấp 1 của y tại x_i, x_j là:

$$y\left[x_i, x_j\right] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

Tỷ hiệu cấp 2 của y tại x_i, x_j, x_k là: $y\left[x_i, x_j, x_k\right] = \dfrac{y[x_i, x_j] - y[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$

Tương tự ta có thể xây dựng được tỷ hiệu cấp 3, cấp 4, ..., cấp n của y tại n điểm chia khác nhau.

2. Đa thức nội suy Newton

Theo cách định nghĩa tỷ hiệu ở trên ta xây dựng được đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0 của hàm f(x) là:

$P_n(x) =$

$$y_0 + (x-x_0)y\left[x_0, x_1\right] + (x-x_0)(x-x_1)y\left[x_0, x_1, x_2\right] + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})y\left[x_0, \ldots x_n\right]$$

Nhận xét: Theo cách của Newton, khi thêm một nút x_{n+1} vào lưới nội suy thì ta chỉ cần thêm váo $P_n(x)$ đúng một số hạng mà không phải xây dựng lại tất cả các đa thức cơ sở như trong cách làm của Lagrange.

Tương tự như trên, người ta cũng xây dựng được đa thức nội suy Newton lùi của f(x) xuất phát từ x_n.

3.4. Phương pháp bình phương bé nhất

1. Mở đầu

Giả sử hai đại lượng x và y có liên hệ với nhau theo một hàm số nào đó. Tuy nhiên dạng hàm cụ thể thì ta chưa xác định được. Người ta có thể tìm một hàm số xấp xỉ của f(x) sao cho sự sai khác xảy ra là nhỏ nhất (theo một quan điểm nào đó)

Phương pháp tìm hàm xấp xỉ của f(x) như vậy gọi là phương pháp bình phương bé nhất. Trong phương pháp này ta sử dụng điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị tại một điểm, đó là đạo hàm tại điểm đó triệt tiêu. Dạng hàm xấp xỉ cần tìm có thể là bậc nhất, bậc hai, bậc ba, hàm lượng giác hay hàm mũ.

2. Trường hợp y = a + bx (đa thức bậc nhất)

Ta tìm hàm xấp xỉ của f(x) dưới dạng bậc nhất, tức là: f(x) = a + bx. Sử dụng điều kiện: Hàm số đạt cực trị tại các điểm tới hạn của nó, ta suy ra hệ phương trình để tìm các hệ số a và b. Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \end{cases}$$

3. Trường hợp y = a + bx + cx^2

Ta tìm hàm xấp xỉ của f(x) dưới dạng bậc hai, tức là: f(x) = a + bx + cx^2. Hệ phương trình chính tắc (để tìm các hệ số a, b và c):

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình trên với ẩn số là a, b, c ta tìm được đa thức xấp xỉ.

4. Các dạng khác

Ngoài các dạng đa thức đã nêu ở trên, còn có các dạng khác là:

$y = a + b.\cos x + c.\sin x$

$y = a.e^{bx}$

$y = a.x^b$

5. Thí dụ

Tìm hàm xấp xỉ bậc nhất và bậc hai bằng phương pháp bình phương bé nhất của hàm cố cho bằng bảng sau:

x	-1,1	2,1	3,2	4,3	5,4
y	0,78	7,3	9,2	11,9	13,5

BÀI TẬP

Bài 1. Hàm f(x) được cho bằng bảng:

x	-2	0	2	3
y	-4	-1	1	2

1. Tìm đa thức nội suy Lagrange của f(x)
2. Tìm đa thức nội suy Newton của f(x)

Bài 2. Hàm f(x) được cho bằng bảng:

x	-2	0	2	3
y	4	-1	1	2

Dùng phương pháp bình phương bé nhất tìm đa thức xấp xỉ bậc 2 của f(x).

Bài 3. Tìm hàm xấp xỉ bậc nhất và bậc hai bằng phương pháp bình phương bé nhất của hàm cố cho bằng bảng sau:

x	-2,1	0,3	2,1	4,2	5,6
y	-1,8	2,5	15,2	8,2	12,5

CHƯƠNG 4

ĐẠO HÀM SỐ. TÍCH PHÂN SỐ

4.1. Tính gần đúng đạo hàm

1. Áp dụng đa thức nội suy

Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại x ta có thể thay f(x) bằng đa thức nội suy Pn(x) của nó. Sao đó dùng công thức đạo hàm của đa thức tại một điểm.

2. Áp dụng công thức Taylo

$f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ với $|h|$ khá bé.

4.2. Tính gần đúng tích phân

1. Mở đầu

Ta đã biết nều F(x) là một nguyên hàm của f(x) trong $[a;b]$ thì:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (công thức Newton Leibnitz)

Tuy nhiên trong thực tế vì những lý do khác nhau không phải lúc nào ta cũng sử dụng công thức trên. Việc tính giá trị gần đúng của tích phân xác định là một nhu cầu phổ biến.

2. Công thức hình thang

Ta chia $[a;b]$ thành n phần bằng nhau bằng các điểm chia $x_i = a + ih$, $h = \dfrac{b-a}{n}$

Khi đó giá trị gần đúng của tích phân theo công thức hình thang là:

$$I_T = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right]$$

3. Công thức Simpson

Ta chia $[a;b]$ thành 2n phần bằng nhau bằng các điểm chia $x_i = a + ih$, $h = \dfrac{b-a}{2n}$

Khi đó giá trị gần đúng của tích phân theo công thức hình thang là:

$$I_S = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})\right]$$

4. Đánh giá sai số

Việc đánh giá sai số của các công thức trên là khá phức tạp. Tuy nhiên người ta chứng minh được rằng:

$$\left|\mathrm{I}-\mathrm{I}_{\mathrm{T}}\right| \le M\frac{h^2}{12}(b-a)\text{, với } M=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(2)}(x)\right|$$

$$\left|\mathrm{I}-\mathrm{I}_{\mathrm{S}}\right| \le M\frac{h^4}{180}(b-a)\text{, với } M=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

5. Thí dụ

Tính gần đúng giá trị của tích phân sau bằng công thức hình thang và công thức Simpson:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

6. Sơ đồ tóm tắt công thức hình thang và công thức Simpson

a. Công thức hình thang:

Phương án 1: Cho trước số khoảng chia n

1) Ấn định số khoảng chia n

2) Chia [a, b] thành n phần bằng nhau, tính: $h=\dfrac{b-a}{n}$

x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, ..., n

y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, ... , n

3) Tính:

$$I_T=h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]$$

4) I ≈ I_T

Phương án 2: Cho trước sai số:

1) Dựa vào sai số cho trước ấn định số khoảng chia n

2) Chia [a, b] thành n phần bằng nhau, tính: $h=\dfrac{b-a}{n}$

x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, ..., n

y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, ... , n

3) Tính:

$$I_T=h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]$$

4) I ≈ I_T

b. Công thứcSimpson:

Phương án 1: Cho trước số khoảng chia 2n

1) Ấn định số khoảng chia 2n

2) Chia [a, b] thành 2n phần bằng nhau, tính: $h = \frac{b-a}{2n}$

x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, ..., 2n

$y_i = f(x_i)$, i = 0, 1, 2, ... , 2n

3) Tính:

$$I_S = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})\right]$$

4) $I \approx I_S$

Phương án 2: Cho trước sai số:

1) Dựa vào sai số cho trước ấn định số khoảng chia 2n

2) Chia [a, b] thành 2n phần bằng nhau, tính: $h = \frac{b-a}{2n}$

x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, ..., 2n

$y_i = f(x_i)$, i = 0, 1, 2, ... , 2n

3) Tính:

$$I_S = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})\right]$$

4) $I \approx I_S$

BÀI TẬP

1. Tính gần đúng giá trị của tích phân: $I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ bằng công thức hình thang và công thức Simpson với số điểm chia là n = 10 (2n = 20)

2. Tính gần đúng giá trị của tích phân: $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ bằng công thức hình thang và công thức Simpson với sai số cho trước là $\varepsilon = 3.10^{-8}$

TRẢ LỜI

1. I = 0,69315 ± 0,00002

2. Theo công thức hình thang: I ≈ 0,9458

Theo công thức Simpson thì: I ≈ 0,946082

CHƯƠNG 5
GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

5.1. Đặt vấn đề

1. Nhận xét mở đầu

Khi giải phương trình vi phân thường ta thu được nghiệm là một họ các hàm. Tuy nhiên trong thực tế việc tìm nghiệm đúng của một phương trình vi phân là rất khó, thậm chí không thể. Vì vậy ta phải đưa ra các phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân nói chung và bài toán Cô si nói riêng.

2. Bài toán Cô si đối với phương trình vi phân cấp một

Bài toán: Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$ với $x_0 \le x \le X$ thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = \alpha$

Điều kiện $y(x_0) = \alpha$ được gọi là điều kiện Cô si hay điều kiện đầu.

Ví dụ: Giải bài toán Cô si

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ở đây hàm cần tìm là y, điều kiện đầu là y(0) = 1. Nếu bằng cách nào đó ta tìm được y dưới dạng họ các nguyên hàm thì nghiệm của bài toán Cô si là đơn giản. Nhưng trong thực tế ta thường tìm nghiệm của bài toán này dưới dạng một bảng, tức là một lưới các điểm.

3. Vấn đề gần đúng nghiệm

Việc tìm nghiệm của bài toán Cô si thường rất phức tạp, cho nên người ta phải nghiên cứu các phương pháp tính gần đúng.

Ta luôn giả thiết: Bài toán đặt ra có nghiệm duy nhất và nghiệm đó đủ trơn, nghĩa là nó có đạo hàm đến cấp đủ cao.

5.2. Phương pháp Euler, Euler cải tiến

1. Mở đầu

Có thể giải bài toán Cô si bằng phương pháp chuỗi Taylo, tức là tìm nghiệm dưới dạng chuỗi. Phương pháp này gọi là phương pháp giải tích. Phương pháp Euler thuộc loại phương pháp số, tức là ta tìm nghiệm dưới dạng số (bảng giá trị).

Mục đích của phương pháp này là tìm cách tính gần đúng giá trị của y(x) chỉ tại các nút x_i chứ không phải tại mọi x $\in$ [x_0; X]

2. Xây dựng công thức tính nghiệm gần đúng bằng phương pháp Euler

Ta chia đoạn [x_0; X] thành n phần bằng nhau bằng các điểm chia $x_i = x_0 + ih$, trong đó h = $\frac{X - x_0}{n}$. Khi đó nghiệm gần đúng của bài toán Cô si được xác định qua các giá trị u_i như sau:

$$\begin{cases} u_0 = y_0 = y(x_0) = \alpha \\ u_i = u_{i+1} + h.f(x_i; u_i) \end{cases}$$

3. Sự hội tụ và sai số

Ta gọi $e_i = u_i - y(x_i)$ là sai số của phương pháp Euler tại điểm x_i. Khi đó

Định nghĩa: Nếu tại x_i xác định, $e_i \to 0$ khi $h \to 0$ thì ta nói rằng phương pháp Euler hội tụ. Ta gọi u_i là giá trị gần đúng của $y(x_i)$.

Định lý: Giả sử $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$; $|y''| \le K$, trong đó L và K là các hằng số thì phương pháp Euler hội tụ và $|e_i| = |u_i - y(x_i)| \le M\left(|e_0| + ah\right)$, trong đó $M = e^{L(x_i - x_0)}$ và $a = \frac{K}{2}$

4. Thí dụ:

Giải bài toán Cô si sau đây bằng phương pháp Euler

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Với $0 \le x \le 1$

5. Phương pháp Euler cải tiến:

Phương pháp Euler có độ chính xác cấp một, tức là tuyến tính so với bước chia h. Để tăng độ chính xác của phương pháp Euler, ta dùng công thức sau:

$u_{i+1}^{(0)} = u_i + h.f(x_i, u_i)$

$u_{i+1}^{(m)} = u_i + \frac{h}{2}[f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1}^{(m-1)})]$, với $i = \overline{o, n-1}$, m = 1, 2, ...

Công thức này có độ chính xác cấp 2, tức là tốt hơn công thức Euler.

5.3. Phương pháp Runger-Kutta

1. Mở đầu

Phương pháp Runge-Kutta là phương pháp có độ chính xác cao và cũng là phương pháp hiện như phương pháp Euler. Nếu phương pháp EWuler chỉ có độ chính xác cấp một thì phương pháp Ruge-Kutta có độ chính xác cấp bốn.

2. Công thức tính nghiệm gần đúng của bài toán Cô si bằng phương pháp Ruge-Kutta

$u_0 = y(x_0) = \alpha$

$k_1 = h.f(x_i; u_i)$

$k_2 = h.f(x_i+0,5h; u_i+0,5k_1)$

$k_3 = h.f\ (x_i+0,5h; u_i+0,5k_2)$

$k_4 = h.f(x_i+h; u_i+k_3)$

$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

NX: So với phương pháp Euler, phương pháp Ruge-Kutta có khối lượng tính toán tăng gấp 5 lần.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho bài toán Côsi: $y' = 2xy$, $0 \le x \le 2$, $y(0) = 1$. Giải gần đúng bài toán bằng phương pháp chuỗi Taylo đến đạo hàm cấp 3.

Bài 2. Cho bài toán Côsi: $y' = x^2 + y^2 + 4$, $0 \le x \le 1$, $y(0) = 2$. Giải gần đúng bài toán bằng phương pháp Ơ-le với n = 10.

TRẢ LỜI

1. Áp dụng công thức: $y = y_0 + \frac{y'(0)}{1}x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3$

2. Chia đoạn [0, 1] thành 10 phần bằng các điểm chia:

$x_i = x_0 + ih = ih$, trong đó h = $\frac{X - x_0}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} = 0,1$. Sau đó áp dụng công thức:

$u_{i+1} = u_i + h.f(x_i; u_i)$

ĐỌC THÊM

CHƯƠNG 6
TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA MỘT HỆ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

6.1. Mở đầu

1. Dạng tổng quát của một hệ đại số tuyến tính

Một hệ đại số tuyến tính có thể có m phương trình n ẩn . ở đây ta chỉ xét những hệ có n phương trình ẩn:

$$\begin{array}{l|} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{array} \qquad (3.1)$$

Trong đó: a_{ij} là hệ số của ẩn x_j của phương trình i, f_i là vế phải của phương trình thứ i . Giả sửa đã biết a_{ij} và f_i ta phải tìm các ẩn x_j.

Ma trận

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3.2)$$

Gọi là ma trận hệ số của hệ (3.1). Các vectơ:

$$f = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{vmatrix} \qquad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix} \qquad (3.3)$$

Được gọi l à vectơ vế phải và vectơ ẩn của hệ. Sau này để tiết kiệm giấy, thay cho cách viết trên ta có thể viết.

$f = (f_1, f_2, \ldots f_n)^T$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

Biết rằng tích của ma trận A với vectơ x, viết là Ax, là một vectơ có tọa độ thứ i là:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Đó chính là vế trái của phương trình thứ i của hệ (3.1)

Vậy hệ (3.1), có thể viết ở dạng vectơ hay dạng ma trận như sau:

Ax - f (3.4).

2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ

Gọi định thức của ma trận A là định thức của hệ , viết là Δ : $\Delta = \det(A)$. Nếu $\Delta = 0$ ta nói ma trận A suy biến và hệ (3.1), tức là (3.4) là hệ suy biến.

Gọi Δ_i là định thức suy từ Δ bằng cách thay cột thứ i bởi cột vế phải. Ta có định lý sau:

Định lý 3.1. (Crame): Nếu $\Delta \neq 0$ tức là nếu hệ không suy biến thì hệ (3.1) có nghiệm duy nhất cho bởi công thức:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.5)$$

3. Chú thích:

Kết quả này rất gọn và rất đẹp về mặt lý thuyết nhưng tính nghiệm bằng công thức (3.5) rất đắt nghĩa là mất rất nhiều công , số các phép tính sơ cấp (+, -, x, :) cần thiết là vào cỡ (n + 1)! n. Ký hiệu số đó là $N_c(n)$ ta có:

$N_C(n) \approx (n + 1)!n$

Với n = 15 ta có $N_C(15) \approx 3.10^{14}$. Đây là một số rất lớn . Sau đây ta trình bày một phương pháp khác tiết kiệm được công tính rất nhiều. đó là phương pháp Gaoxơ.

6.2. Phương pháp Gaoxơ (Gauss)

1. Phương pháp Gaoxơ

Phương pháp gaoxơ dùng cách khử dần các ẩn để đưa hệ đã cho về một hệ có dạng tam giác trên rồi giải hệ tam giác này từ dưới lên trên, không phải tính một định thức nào.

Lấy một thí dự đơn giản: xét hệ

$2x_1 + x_2 = 1$

$4x_1 + 6x_2 = 3$

Khử x_1 khỏi phương trình thứ hai ta được

$2x_1 + x_2 = 1$

$4x_2 = 1$

Hệ này có dạng tam giác. Giải nó từ dưới lên ta được

$x_2 = 0,25$

$x_1 = (1 - x_2)/2 = 0,375$

Ta thấy rằng cách giải bài toán cũng khá đơn giản. Nhưng nếu hệ có nhiều phương trình nhiều ẩn thì vấn đề trở nên phức tạp hơn nhiều.

Để trình bày phương pháp gaoxơ cho dễ hiểu ta chỉ xét hệ gồm 3 phương trình 3 ẩn để suy ra các thức tính, các công thức này suy rộng được cho trường hợp n phương trình n ẩn

Xét hệ:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}$ (3.6a)

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}$ (3.6b)

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}$ (3.6c)

Hệ tam giác mà ta mong muốn có dạng

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= b_{14} \\ x_2 + b_{23}x_3 &= b_{24} \\ x_3 &= b_{34} \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

Các số hạng ở vế phải ta viết là a_{i4} và b_{i4} là cốt để viết các công thức sau này tiện lợi.

Quá trình khử để đưa hệ (3.6) về dạng (3.7) gọi là quá trình xuôi; quá trình giải hệ (3.7) gọi là quá trình ngược.

2. Quá trình xuôi.

Bước 1: Khử x_1. Giả sử a_{11} ở (3.6a) ≠ 0 ta gọi nó là trụ thứ nhất và chia phương trình (3.6a) cho a_{11}, ta được

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \quad (3.8)$$

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, j = 2,3,4 \quad (3.9)$$

Ta dùng (3.8) để khử x_1 khỏi các phương trình (3.6b) và (3.6c). Để khử x_1 khỏi (3.6b), ta nhân (3.8) với a_{21} (hệ số của x_1 ở 3.6b):

$$a_{21}x_1 + a_{21}a_{12}^{(1)}x_2 + a_{21}a_{13}^{(1)}x_3 = a_{21}a_{14}^{(1)}$$

Rồi lấy phương trình (3.6b) trừ phương trình này ta được:

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \qquad (3.10)$$

$$a_{2j}^{(1)} + a_{2j} - a_{21}a_{1j}^{(1)}, j = 2, 3, 4 \qquad (3.11)$$

Để khử x_1 khỏi (3.6c) ta cũng làm tương tự:

Nhân (3.8) với a_{31} (hệ số của x_1 ở 3.6c)).

$$a_{31}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{31}a_{13}^{(1)}x_3 = a_{31}a_{14}^{(1)}$$

Rồi lấy (3.6c) trừ phương trình này:

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \qquad (3.12)$$

$$a_{3j}^{(1)} + a_{3j} - a_{31}a_{1j}^{(1)}, j = 2, 3, 4 \qquad (3.13)$$

Đến đây hai phương trình (3.10) và (3.12) không chứa x_1 nữa.

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)}$$

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)}$$

Chúng tạo thành một hệ gồm hai phương trình hai ẩn x_2 và x_3, tức là có số ít đi một so với số ẩn của hệ ban đầu. Ta lặp lại việc làm trên để khử x_2 khỏi (3.12).

Bước 2: Khử x_2. Giả sử $a_{22}^{(1)}$ ở (3.10) ≠ 0, ta gọi nó là trụ thứ hai và chia (3.10) cho $a_{22}^{(1)}$.

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \qquad (3.14)$$

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, j = 3,4 \qquad (3.15)$$

Nhân (3.14) với $a_{32}^{(1)}$ ở (3.12) (hệ số của x_2 ở (3.12)).

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{32}^{(1)}a_{23}^{(2)} = a_{32}^{(1)}a_{24}^{(2)}$$

Lấy (3.12) trừ phương trình này:

$$a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)} \qquad (3.16)$$

$$a_{3j}^{(2)} + a_{3j}^{(1)} - a_{32}^{1}a_{2j}^{(2)}, j = 3, 4 \qquad (3.17)$$

Phương trình (3.16) không có x_2 nữ

Bước 3: (bước cuối cùng đối với hệ 3 ẩn)

Giả sử $a_{33}^{(2)}$ ở (3.16) ≠ 0. Ta chia (3.16) cho $a_{33}^{(2)}$

$$x_3 = a_{34}^{(3)} \qquad (3.18)$$

$$a_{34}^{(3)} = a_{34}^{(2)}/a_{33}^{(2)} \qquad (3.19)$$

Bây giờ ta ghép các phương trình (3.8) (3.14) và (3.18 lại ta sẽ được hệ tam giác dạng (3.7)

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \qquad (3.20a)$$

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \qquad (3.20b)$$

$$x_3 = a_{34}^{(3)} \qquad (3.20c)$$

3. Quá trình ngược.

Giải hệ tam giác.

Từ (3.20c) ta có x_3, thay x_3 ấy vào (3.20b) ta có x_2, rồi thay x_3, x_2 ấy vào (3.20a) ta có x_1:

$$\left\{\begin{array}{c} x_3 = a_{34}^{(3)} \\ x_2 = a_{24}^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3 \\ x_1 = a_{14}^{(1)} - a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 \end{array}\right\} \qquad (3.21)$$

Vậy là hệ (3.6) đã giải xong mà không phải tính một định thức nào.

4. Thí dụ:

Xét hệ : $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4$ (3.22a)

$3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2$ (3.22b).

$4x_1 + 11X_2 + 7x_3 = 7$ (3.22c)

a) Quá trình xuôi :

Bước 1: Khử x_1. Chia (3.22a) cho $a_{11} = 2$ (hệ số ≠ 0 của x_1 ở (3.22a)):

$x_1 + 2x_2 + 1{,}5_3 = 2$ (3.23)

Nhân (3.23) với 3 (hệ số của x_1 ở (3.22b)) rồi trừ khỏi (3.22b).

$-5x_2 - 6{,}5x_3 = -8$ (3.24)

Nhân (3.23) với 4 (hệ số của x_1 ở (3.22c)) rồi trừ khỏi (3.22c)

$3x_2 + x_3 = 1$ (3.25)

Ta được hệ 2 phương trình 2 ẩn x_2, x_3 : (3.24) (3.25).

Bước 2: Khử x_2 khỏi (3.25). chia (3.24 cho -5 (hệ số ≠ 0) của x_2 ở 3.24):

$x_2 + 1{,}3x_3 = 1{,}6$ (3.26).

Nhân (3.26) với 3 hệ số của x_2 ở (3.25)) rồi trừ khỏi (3.25):

$- 2,9x_3 = - 5,8$ (3.27).

Bước 3: (bước cuối cùng của quá trình xuôi):

Chia (3.27) cho (-2,9) (hệ số ≠ của x_3 ở đó):

$x_3 = 2$ (3.28).

Ghép các phương trình (3.23) (3.26) (3.28) lại:

$x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 = 2$

$x_2 + 1,3x_3 = 1,6$

$x_3 = 2$

Vậy xong quá trình xuôi.

b) Quá trình ngược : Giải hệ tam giác (3.23) (3.26) (3.28) từ dưới:

$x_3 = 2$

$x_2 = 1,6 - 1,3x_3 = - 1$

$x_1 = 2 - 2x_2 + 1,5x_3 = 1$

Vậy nghiệm của hệ là

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$.

Quá trình tính toán ở trên có thể ghi tóm tắt vào bảng 3.1.

Hệ số của x_1	Hệ số của x_2	Hệ số của x_3	Vế phải	Phương trình
2 3 4	4 1 11	3 -2 7	4 -2 7	(3.22a) (3.22b) (3.22c)
1	2 -5 3	1,5 -6,5 1	2 -8 1	(3.23) (3.24) (3.25)
		1,3 -2,9	1,6 -5,8	(2.26) (3.27)
	1	2	2 -1 1	(3.28)

5. Chọn trụ tối đa

Trong quá trình xuôi của phương pháp gaoxơ ta đã phải giả thiết $a_{11} \neq 0$, $a_{22}^{(1)} \neq 0$, $a_{23}^{(1)} \neq 0$. Nếu một trong các hệ số đó bằng không thì quá trình tính không tiếp tục được . Lúc đó ta phải thay đổi cách tính . Giả sử khi khử x_1 ở các phương trình ở dưới , ta nhìn các hệ số

a_{21}, a_{31}, của x_1 ở các phương trình ở dưới, nếu có cái nào khác không ta có thể lấy nó thay cho vai trò của a_{11} bằng cách hoán vị hai phương trình . Nếu cả ba hệ số a_{11}, a_{21}, a_{31} đề bằng không thì hệ đã cho suy biến . Ta chú ý thêm rằng khi chia cho một số thì s ai số tính toán càng bé khi số chia có trị tuyệt đối càng lớn . Vì vậy để hạn chế bớt sai sối tính toán ta chọn trong các số a_{11}, a_{21}, a_{31} số có trị tuyệt đối lớn nhất làm trụ thứ nhất gọi là trụ tối đại thứ nhất để khử x_1. Khi khử x_2 và x_3 ta cũng làm tương tự . Sau đây ta tính theo cách làm đó trên thì dụ đã xét ở trên (xem bảng 3.2)

Bảng 3.2

Hệ số của x_1	Hệ số của x_2	Hệ số của x_3	Vế phải
2 3 4	4 1 11	3 -2 7	4 -2 7
4 3 2	11 1 4	7 -2 3	7 -2 4
1	2,75 -7,25 - 1,5	1,75 -7,25 -0,5	1,75 -7,25 0,5
	1	1	1
  1	 1 	1 	2 -1 1

Chú ý là khi khử x_1 vì 4 = max {|2|, |3|, |4|} nên ta đã hoán vị dòng thứ nhất với dòng thứ ba ở bảng trên trước khi làm các động tác để khử x_1.

6. Chú ý:

Cách nhớ các công thức tính $a_{ij}^{(k)}$. Xét các công thức (3.11) và (3.9). Chúng cho phép tính $a_{2j}^{(k)}$ theo a_{ij}. Đạt a_{ij} = $a_{ij}^{(0)}$ các công thức đó cho:

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)} a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad ,j = 2,3,4$$

Một cách tương tự, các công thức (3.13) và (3.9) cho:

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j}^{(0)} - \frac{a_{31}^{(0)} a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad ,j = 2,3,4$$

Hai công thức này có thể viết chung thành một :

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)} a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, i = 2,3 ;\ j = 2,3,4$$

Vị trí của các phần tử ở vế trái sắp xếp thành một hình chữ nhật

$$\begin{array}{ll} a_{11}^{(0)} & a_{1j}^{(0)} \\ a_{j1}^{(0)} & a_{ij}^{(0)} \end{array}$$

Hình chữ nhật này có đỉnh trên bên trái là $a_{11}^{(0)}$ (trụ thứ nhất) đỉnh dưới bên phải là $a_{ij}^{(0)}$ (đó là phần tử cần biến đổi thành $a_{ij}^{(0)}$

Sau khi đã xác định được hình chữ nhật trên thì công thức tí nh $a_{ij}^{(0)}$ đã viết ở trên phát biểu thành lời như sau:

a_{ij} (mới) bằng a_{ij} (cũ), trừ tích của a_{i1}(cũ) nhân với a_{1j} (cũ) chia cho a_{11}(cũ); hay là phần tử (mới) nằm ở góc dưới bên phải bằng phần tử (cũ) nằm ở góc dưới bên phải trừ tích của phần tử (cũ) nằm ở góc dưới bên trái nhân với phần tử (cũ) nằm ở góc trên bên phải chia cho phân tử (cũ) nằm ở góc trên bên trái (tức là phần tử trụ cũ).

Quy tắc này gọi là quy tắc hình chữ nhật. Nó giúp ta dễ nhớ cách tính $a_{ij}^{(0)}$.

Cách tính $a_{3j}^{(2)}$ dựa vào (3.17) và (3.15) thông qua $a_{ij}^{(1)}$ cũng có thể nhớ theo quy tắc tương tự

$$\begin{array}{ll} a_{22}^{(1)} & a_{2j}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{3j}^{(1)} \end{array}$$

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} = \frac{a_{32}^{(1)} a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad , \qquad j = 3,4$$

Quy tắc hình chữ nhật có thể giúp ta dễ nhớ cách tính $a_{ij}^{(k)}$ theo $a_{ij}^{(k-1)}$ như sau:

$$\begin{array}{ll} a_{kk}^{(k-1)} & a_{kj}^{(k-1)} \\ a_{ik}^{(k-1)} & a_{ij}^{(k-1)} \end{array}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kj}^{(k-1)}}$$

7. Khối lượng tính và công thức tính đối với một hệ n ẩn.

Phương pháp Gaoxơ có thể áp dụng cho một hệ đại số tuyến tính gồm n phương trình n ẩn.

Số các phép tính + , - , x, : phải làm để giải một hệ n phương trình n ẩn là :

$$N_G(n) = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$$

Với n = 15 thì $N_G(15) = 2570$. Số này ít hơn rất nhiều so với $N_C(15)$ (xem mục 3 (3.1)).

Các công thức tính cho một hệ n phương trình n ẩn phức tạp , ta chỉ nhắc rằng chúng vẫn ở dạng (3.8) (3.10) (3.12) v.v... nhưng giá trị cuối cùng của j ở (3.9) (3.11) (3.13) v.v... phải là n + 1.

8. Sơ đồ tóm tắt phương pháp Gaoxơ.

Xét hệ n phương trình n ẩn.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$

....

....

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$

Khi áp dụng thường người ta sử dụng phương pháp Gaoxơ có chọn trụ tối đại . Cho nên sau đây sẽ trình bầy sơ đồ tóm tắt phương pháp Gaoxơ có chọn trụ tối đại.

Quá trình xuôi:

Với k lần lượt là 1, 2, ..., n - 1.

Tìm r để:

$$\left|a_{rk}^{(k-1)}\right| = \max\left\{\left|a_{kk}^{(k-1)}\right|, \left|a_{k+1,k}^{(k-1)}\right|, ..., \left|a_{nk}^{(k-1)}\right|\right\}.$$

Nếu $a_{rk}^{(k-1)} = 0$ thì dừng quá trình tính và thông báo hệ suy biến nếu $a_{rk}^{(k-1)} \neq 0$ thì đổi chỗ $a_{kj}^{(k-1)}$ với $a_{rj}^{(k-1)}$, j = k, ..., n

$b_k^{(k-1)}$ với $b_r^{(k-1)}$

Tính :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} b_i^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

i = k + 1 , k + 2, ..., n

j = k + 1, k + 2, ..., n

Sau quá trình xuôi ta được hệ tam giác phát triển:

$$a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = b_1^{(n-1)}$$
$$a_{22}^{(n-1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(n-1)}x_n = b_2^{(n-1)}$$
$$\dots$$
$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$$

mà ta viết lại gọn hơn bằng cách bỏ các chỉ số trên thành

$l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots. + l_{1n}x_n = c_1$

$l_{22}x_2 + \dots. + l_{2n}x_n = c_2$

....

$l_{nn}x_n = c_n$

với $l_{ij} = a_{ij}^{(n-1)}, c_i = b_i^{(n-1)}$

Do đó ta có

Quá trình ngược:

Nếu $l_{nn} = 0$ thì dừng quá trình tính và thông báo: hệ suy biến.

Nếu $l_{nn} \neq 0$ thì tính

$x_n = c_n/l_{nn}$

$x_{n-1} = (c_{n-1\,n}\ x_n)/l_{n-1\ n-1}$

...

$x_1 = (c_1 - l_{12}x_2 - \dots - l_{1n-1}x_{n-1})/l_{11}$

9. Chú thích:

Phương pháp Gaoxơ cũng cho phép tính định thức , chẳng hạn, với định thức cấp 3, ta có theo mục 2 (3.2).

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)}$$

Cụ thể, theo thí dụ ở 4 (3.2).

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 2.(-5).(-2{,}9) = 29$$

Phương pháp Gaoxơ cũng cho pohép tính ma trận nghịch đoả , nhưng chúng ta không trình bày ở đây.

6.3. Phương pháp lặp đơn

1. Mô tả phương pháp

Phương pháp Gaoxơ thuộc loại phương pháp đúng , thức là nếu các phép tính sơ cấp làm đúng hoàn toàn thì cuối cùng ta được nghiệm đúng của hệ . Người ta còn nói nó thuộc loại phương pháp trực tiếp. Ngoài ra còn một loại phương pháp khác gọi là phương pháp lặp. ở đây ta chỉ nói sơ về phương pháp lặp đơn.

Xét hệ (3.1) đã viết ở dạng vectơ (xem công thức 3.4):

$$Ax = f \qquad (3.29)$$

Ta chuyển hệ này về một hệ tương đương có dạng

$$x = Bx + g \qquad (3.30)$$

Trong đó ma trận B và vectơ g suy từ A và f cách nào đó, giả sử:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Sau đó ta xây dựng công thức tính lặp

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + g \qquad (3.31)$$

$$x^{(0)} \text{ cho trước} \qquad (3.32)$$

Ta chú ý rằng

$$(Bx)_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \qquad (3.33)$$

Phương pháp tính $x^{(m)}$ theo (3.31) (3.32) gọi là phương pháp lặp đơn. Ma trận B gọi là ma trận lặp.

2. Sự hội tụ

Định nghĩa 3.1. Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ là nghiệm của hệ (3.30) (tức là của hệ (3.29)). Nếu

$x_i^{(m)} \to \alpha_i$ khi $m \to \infty$, $i = 1, 2, ..., n$ thì ta nói phương pháp lặp (3.31) (3.32) hội tụ.

Định nghĩa 3.2 - Cho vectơ

$Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)^T$

thì mỗi đại lượng sau:

$\|Z\|_0 := \max \{|Z_i|\}$

$\|Z\|_1 := |Z_1| + |Z_2| + ... + |Z_n|$

$\|Z\|_2 := (Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2)^{1/2}$

Gọi là một độ dài mở rộng của vectơ Z, người ta còn gọi nó là chuẩn của Z.

Chúng có tính chất giống như độ dài thông thường của một vectơ, hay trị tuyệt đối của một số thực:

Với p = 0 hay 1 hay 2 ta đều có

1) $||z||_p \geq 0$, $||z||_p = 0 \Leftrightarrow z$ = vectơ không

2) $||\lambda z||_p = |\lambda|\ ||z||_p$, λ là một số thực.

3) $||u + v||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$

Hệ quả - Phương pháp lặp (3.31) hội tụ khi và chỉ khi:

$||x^{(m)} - \alpha||_p \to 0$ khi $m \to \infty$ (3.34).

Đối với ma trận vuông $B = (b_{ij})$ ta định nghĩa chuẩn của ma trận B:

$$||B||_0 := \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$$

$$||B||_1 := \max_j \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|$$

$||B||_p$, p = 0,1, thỏa mãn ba tính chất giống ba tính chất của chuẩn của vectơ.

1) $||B||_p \geq 0$, $||B||_p = 0 \Leftrightarrow$ B là ma trận không;

2) $||kB||_p = |k|\ ||B||_p$, k là một số thực.

3) $||B + C||_p \leq ||B||_p + ||C||_p$, C là ma trận cùng cấp với B.

Ngoài ra còn tính chất thứ tư:

4) $||BZ||_p \leq ||B||_p\ ||Z||_p$, Z là vectơ có số chiều bằng cấp của B.

Định lý 3.2 - nếu

$||B||_p < 1$ (3.35)

thì phương pháp lặp (3.31) (3.32) hội tụ với bất kỳ xấp xỉ đầu $x^{(0)}$ nào, đồng thời sai số có đánh giá

$$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \leq \frac{\|B\|_p}{1-\|B\|_p}\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p \qquad (3.36)$$

$$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \leq \frac{\|B\|_p^m}{1-\|B\|_p}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p \qquad (3.37)$$

Trong đó:

p = 0 nếu $||B||_0 < 1$

p = 1 nếu $||B||_1 < 1$

Chứng minh: Vì α là nghiệm của hệ (3.29) tức là hệ (3.30) nên

$\alpha = B\alpha + g$

Lấy (3.31) trừ đẳng thức này vế với vế ta được:

$x^{(m)} - \alpha = B(x^{(m-1)} - \alpha)$.

Do đó: $\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p = \left\|B(x^{(m-1)} - \alpha)\right\|_p \le \|B\|_p \left\|x^{(m-1)} - \alpha\right\|_p$

Vậy có: $\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \le \|B\|_p \left\|x^{(m-1)} - \alpha\right\|_p$ (3.38)

Tương tự: $\left\|x^{(m-1)} - \alpha\right\|_p \le \|B\|_p \left\|x^{(m-2)} - \alpha\right\|_p$

.....

.....

$\left\|x^{(2)} - \alpha\right\|_p \le \|B\|_p \left\|x^{(1)} - \alpha\right\|_p$

$\left\|x^{(1)} - \alpha\right\|_p \le \|B\|_p \left\|x^{(0)} - \alpha\right\|_p$

Nhân các bất đẳng thức này vế với vế và giản ước các thành phần giống nhau ở hai bên ta được :

$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \le \|B\|_p^{\ m} \left\|x^{(0)} - \alpha\right\|_p$

Cho $m \to \infty$ thì $0 \le \|B\|_p < 1$ theo giả thiết nên $\|B\|_p^m \to 0$.

Do đó:

$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \to 0$ khi $m \to \infty$

Đó chính là (3.34). Vậy phương pháp lặp (3.31) và (3.32) hội tụ.

Bây giờ xét các đánh giá sai số. Ta có:

$x^{(m-1)} - \alpha = \left(x^{(m-1)} - x^{(m)}\right) + x^{(m)} - \alpha$

Ta suy ra:

$\left\|x^{(m-1)} - \alpha\right\|_p \le \left\|x^{(m)} - x^{(m-1)})\right\|_p + \left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p$

Do bất đẳng thức (3.38) cho:

$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \le \|B\|_p \left\{ \left\|x^{(m)} - x^{(m-1)})\right\|_p + \left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \right\}$

Vậy có

$\left(1 - \|B\|_p\right) \left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \le \|B\|_p \left\|x^{(m)} - x^{(m-1)})\right\|_p$

Vì theo giả thiết của định lý $\|B\|_p < 1$ nên $1 - \|B\|_p > 0$.

Ta suy ra:

$$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \leq \frac{\|B\|_p}{1 - \|B\|_p}\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p$$

Đó là đánh giá (3.36)

Bây giờ từ (3.31) ta có

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + g$$

$$x^{(m-1)} = Bx^{(m-2)} + g$$

Trừ hai đẳng thức này vế với vế ta được

$$x^{(m)} - x^{(m-1)} = B(x^{(m-1)} - x^{(m-2)})$$

Do đó:

$$\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p = \left\|B(x^{(m-1)} - x^{(m-2)})\right\|_p$$

Vậy :

$$\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p \leq \|B\|_p \left\|x^{(m-1)} - x^{(m-2)}\right\|_p$$

Ta suy dần ra:

$$\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p \leq \|B\|_p^{m-1} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p$$

Thay vào vế trái của (3.36) ta được (3.37).

3. Thí dụ

Xét hệ:

$$4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8$$

$$0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9$$

$$0{,}04x_1 + 0{,}08x_2 - 4x_3 = 20$$

Giải: Hệ này có dạng (3.29). Ta phải đưa nó về dạng (3.30) sao cho điều kiện hội tụ (3.35) được thỏa mãn. Từ ba phương trình của hệ , bằng cách giải phương trình thứ nhất đối với x_1, phương trình thứ hai đối với x_2, phương trình thứ ba đối với x_3:

$$x_1 = -0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 + 2$$

$$x_2 = -0{,}03x_1 + 0{,}05x_3 + 3$$

$$x_3 = -0{,}01x_1 - 0{,}02x_2 + 5$$

Vậy có x = Bx + g

Với

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{vmatrix} \qquad g = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Để kiểm tra điều kiện (3.35) ta tính

$$\sum_{j=1}^{3}|b_{1j}| = 0 + 0{,}06 + 0{,}02 = 0{,}08$$

$$\sum_{j=1}^{3}|b_{2j}| = 0{,}03 + 0 + 0{,}05 = 0{,}08$$

$$\sum_{j=1}^{3}|b_{3j}| = 0{,}01 + 0{,}02 + 0 = 0{,}03$$

Do đó $\|B\|_o = \max\{0{,}08\ ;\ 0{,}08\ ;\ 0{,}0\} = 0{,}08 < 1$

Vậy theo định lý 3.2 phương pháp lặp đơn

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + g$$

Hội tụ với $x^{(0)}$ chọn trước. Ta chọn $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. Kết quả tính ghi thành bằng 3.3

Bảng 3.3

m	0	1	2	3	4
$x_1^{(m)}$	0	2	1,92	1,9094	1,90923
$x_2^{(m)}$	0	3	3,19	3,1944	3,19495
$x_3^{(m)}$	0	5	5,04	5,0446	5,04485

Để đánh giá sai số ta tính:

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_0 = \max\left\{\left|x_i^{(4)} - x_i^{(3)}\right|\right\}, i = 1, 2, 3.$$

= max {0,00017 ; 0,00055; 0,00025}

= 0,00055

Áp dụng công thức (3.36) với p = 0 ta thu được

$$\left\|x^{(4)} - \alpha\right\|_0 \le \frac{0{,}08}{1 - 0{,}08} \cdot 0{,}00055 \le 0{,}00005$$

Vậy có: $\alpha_1 = 1{,}90923 \pm 0{,}00005$

$\alpha_2 = 3{,}19495 \pm 0{,}00005$

$\alpha_3 = 5{,}04485 \pm 0{,}00005$.

4. Sơ đồ tóm tắt phương pháp lặp đơn

1) Cho hệ phương trình tuyến tính Ax = b.

2) ấn định sai số cho phép ε, ε > 0

3) Đưa hệ Ax = b về hệ tương đương.

$$x = Bx + g.$$

Sao cho điều kiện (3.35) thỏa mãn.

4) Chọn $x^{(0)}$ (tuỳ ý.

5. Tính

$$x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + g,$$

m = 0, 1, 2, ... Cho tới khi

$$\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p < \varepsilon$$

Thì dừng quá trình tính.

Kết quả: $x^{(m)} \approx \alpha$. Với sai số $\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p = \frac{\|B\|_p}{1-\|B\|_p}\varepsilon$

PHỤ LỤC 2
VỀ MỘT HỆ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH KHÔNG ỔN ĐỊNH

Bây giờ ta nêu một hiện tượng đặc biệt đáng chú ý khi giải gần đúng một hệ phương trình đại số tuyến tính.

Xét hai hệ cụ thể:

$x + 2y = 2$ (3.39)

$2x + 3,9y = 2$

$x + 2y = 2$ (3.40)

$2x + 4,1y = 2$

Nghiệm của hệ (3.39) là $x = -38$, $y = 20$

Nghiệm của hệ (3.40) là $\bar{x} = 42$, $\bar{y} = -20$

Ta thấy rằng hai hệ (3.39) và (3.40) chỉ khác nhau ở một hệ số 3,9 và 4,1 với $|4,1 - 3,9| = 0,2$, nhưng nghiệm của chúng khác nhau khá xa.

$|\bar{x} - x| = |42 - (-38)| = 80$

$|\bar{x} - y| = |-20 - 20| = 40$

Hiện tượng "sai một li đi một dặm" này là một hiện tượng không ổn định trong tính toán. Người làm tính cần phải biết để đề phòng.

BÀI TẬP

1. Dùng phương pháp Gaoxơ giải hệ

$2,75x_1 + 1,78x_2 + 1,11x_3 = 13,62$

$3,28x_1 + 0,71x_2 + 1,15x_3 = 17,98$

$1,15x_1 + 2,70x_2 + 3,58x_3 = 39,72$

tính tới ba chữ số lẻ thập phân.

2. Dùng phương pháp Gaoxơ giải các hệ

a) $3,2x_1 - 1,5x_2 + 0,5x_3 = 0,90$

$1,6x_1 + 2,5x_2 - 1,0x_3 = 1,55$

$1,0x_1 + 4,1x_2 + 1,5x_3 = 2,08$

b) $1,5x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 0,4$

$-0,1x_1 + 1,5x_2 - 0,1x_3 = 0,8$

$-0,3x_1 + 0,2x_2 - 0,5x_3 = 0,2$

Các phép tính lấy đến 5 chữ số lẻ thập phân.

3. Giải hệ sau đây bằng phương pháp lặp đơn tính lặp ba lần và cho biết sai số

$$1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795$$

$$-0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849$$

$$-0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398$$

4. Giải hệ:

$$24{,}21x_1 + 2{,}42x_2 + 3{,}85x_3 = 30{,}24$$

$$2{,}31x_1 + 31{,}49x_2 + 1{,}52x_3 = 40{,}95$$

$$3{,}49x_1 + 4{,}85x_2 + 28{,}72x_3 = 72{,}81$$

Bằng phương pháp lặp đơn cho tới khi

$$\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p \leq 10^{-4}$$

Và đánh giá sai số.

TRẢ LỜI

1. $x_1 = 1{,}642$; $x_2 = -2{,}789$; $x_3 = 12{,}672$

2. a) $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1{,}3$; $x_3 = 2{,}5$

   b) $x_1 = 0{,}980$; $x_2 = 0{,}53053$; $x_3 = -0{,}40649$

3. $x_1 = 0{,}980$; $x_2 = 1{,}004$; $x_3 = 1{,}563$

Với sai số tuyệt đối nhỏ hơn $1{,}1.10^{-3}$ nếu chọn xấp xỉ đầu :

$x^{(0)} = (0{,}80 ; 0{,}85; 1{,}40)$

4. $x_1 = 0{,}9444$; $x_2 = 1{,}1743$; $x_3 = 1{,}1775$.

Với sai số theo chuẩn $\|\cdot\|_0$ bé hơn $0{,}5 . 10^{-4}$.

MỘT SỐ ĐỀ THI MẪU

ĐỀ SỐ 1

Câu 1:
Khái niệm số gần đúng và sai số. Cách viết số xấp xỉ. Sự quy tròn số và sai số quy tròn. Các quy tắc tính sai số. Sai số phương pháp và sai số tính toán. Cho ví dụ.
Câu 2:
Tính tổng sau đây với 6 chữ số thập phân:

$$A = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{20}$$

Đánh giá sai số của kết quả tìm được.
Câu 3:
Giải gần đúng phương trình x^2 - sin2x = 0,15 bằng phương pháp lặp với sai số tuyệt đối không quá 10^{-6}.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1:
Trình bày bài toán giải gần đúng phương trình. Định nghĩa nghiệm và khoảng phân ly nghiệm. Trình bày nội dung của phương pháp lặp và phương pháp dây cung.
Câu 2:
Hàm f(x) được cho bằng bảng:

x	-2	0	2	3
y	2	-1	1	2

1. Tìm đa thức nội suy Lagrange của f(x)
2. Tìm đa thức nội suy Newton của f(x)

Câu 3:
Cho bài toán Côsi: $y' = 2xy^2$, $0 \le x \le 2$, y(0) = 1. Giải gần đúng bài toán bằng phương pháp chuỗi Taylo đến đạo hàm cấp 3.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1:
Trình bày khái niệm đa thức nội suy. Nêu công thức tính đa thức nội suy Lagrange và đa thức nội suy Newton.
Câu 2:

1. Khi đo chiều dài của một cái cầu ta được kết quả là 1254,32m với sai số tuyệt đối của phép đo là 0,02m. Tính sai số tương đối của phép đo ấy.

2. Khi đo diện tích của một thửa ruộng ta được kết quả là 452,58m^2 với sai số tương đối của phép đo là 0,001m^2. Tính sai số tuyệt đối của phép đo ấy.

3. Xác định các chữ số đáng tin của số a = 254,321872 biết sai số tuyệt đối của nó là $\Delta_a = 0{,}4.10^{-3}$.

Câu 3:
Cho bài toán Côsi: $y' = x^2 + y^2 + 4$, $0 \le x \le 1$, y(0) = 2. Giải gần đúng bài toán bằng phương pháp Ơ-le với n = 10.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1:
Trình bày công thức tính gần đúng đạo hàm và công thức tính gần đúng tích phân xác định.
Câu 2:
Giải gần đúng phương trình x^2 - sin2x = 0,15 bằng phương pháp lặp với sai số tuyệt đối không quá 10^{-6}.
Câu 3:
Hàm f(x) được cho bằng bảng:

x	-2	0	2	3
y	3	-1	1	2

1. Tìm đa thức nội suy Lagrange của f(x)
2. Tìm đa thức nội suy Newton của f(x)

ĐỀ SỐ 5

Câu 1:
Trình bày phương pháp Euler và phương pháp Runger-Kutta để giải gần đúng bài toán Côsi.
Câu 2:
Dùng công thức hình thang và công thức Simpson với n = 10 tính gần đúng giá trị của tích phân xác định: I = $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x}$. Đánh giá sai số của từng phương pháp.
Câu 3:
Giải gần đúng phương trình x^2 - sin2x = 0,15 bằng phương pháp lặp với sai số tuyệt đối không quá 10^{-6}.

TÓM TẮT ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Đề 1

Câu 1. (3 điểm)
Nêu được khái niệm số gần đúng và sai số.
Có 3 cách viết số xấp xỉ
Nêu được quy tắc làm tròn số. Quy tắc tính sai số: quy tắc cộng và quy tắc nhân.
Phân biệt được sai số tính toán và sai số phương pháp.
Câu 2. (3 điểm)
Tính được giá trị gần đúng của A là: 1,464484
Câu 3. (4 điểm)
Tìm được nghiệm gần đúng của phương trình.

Đề 2

Câu 1. (3 điểm)
Nêu được bài toán giải gần đúng phương trình đại số.
Định nghĩa được nghiệm và khoảng phân ly nghiệm của phương trình
Nêu được nội dung của phương pháp dây cung và phương pháp lặp.
Câu 2. (4 điểm)
Tìm được đa thức nội suy Newton và đa thức nội suy Lagrange của f(x)
Câu 3. (3 điểm)
Dùng công thức chuỗi Taylo tmf được đa thức nội suy cấp 3 của f(x).

Đề 3

Câu 1. (3 điểm)
Trình bày được khái niệm đa thức nội suy. Nêu được công thức tính đa thức nội suy Lagrange và đa thức nội suy Newton.
Câu 2. (3 điểm)
1. Sai số tương đối là: 0,001573
2. Sai số tuyệt đối của phép đo là: 18,3714
3. Các chữ số đáng tin là: 741,321

Câu 3. (4 điểm)
Dùng phương pháp Ơ le với n = 10 giải được nghiệm gần đúng của bài toán Cô si.

Đề 4

Câu 1. (3 điểm)
Trình bày được công thức tính gần đúng đạo hàm và tích phân của hàm số cho trước.
Câu 2. (3 điểm)
Dùng phương pháp lặp giải gần đúng nghiệm của phương trình đã cho.
Câu 3. (4 điểm)
Từ bảng đã cho tìm được đa thức nội suy Lagrange và Newton của hàm số cho bằng bảng.

Đề 5

Câu 1. (3 điểm)
Trình bày được phương pháp Ơ le và phương pháp Runge Kutta giải gần đúng bài toán Cô si trong khoảng cho trước.
Câu 2. (4 điểm)
Dùng công thức hình thang và công thức Simpson với n = 10 tính được giá trị gần đúng của tích phân là I = ln4.
Câu 3. (3 điểm)
Dùng phương pháp lặp với sai số tuyệt đối không quá 10^{-4} tính được nghiệm gần đúng của phương trình.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **Lê Đình Thịnh,** *Phương pháp tính*, NXB KH&KT Hà Nội, 1995.

[2] **Phạm Kỳ Anh,** *Giải tích số*, NXB ĐHQG Hà Nội, 1996.

[3] **Dương Thủy Vỹ,** *Giáo trình Phương pháp tính*, NXB KH&KT Hà Nội, 2006.

[4] **Cao Quyết Thắng,** *Phương pháp tính*, Khoa Sau Đại học, Đại học Hàng hải, 1994.