BỘ GIAO THÔNG VẬN TẢI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI

BỘ MÔN: KHOA HỌC MÁY TÍNH
KHOA: CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI GIẢNG
TOÁN RỜI RẠC

TÊN HỌC PHẦN : **TOÁN RỜI RẠC**
MÃ HỌC PHẦN : **17203**
TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO : **ĐẠI HỌC CHÍNH QUY**
DÙNG CHO SV NGÀNH : **CÔNG NGHỆ THÔNG TIN**

HẢI PHÒNG - 2010

MỤC LỤC

Tên học phần: Toán rời rạc **Loại học phần:** 1

Bộ môn phụ trách giảng dạy: Khoa học máy tính

Khoa phụ trách: CNTT

Mã học phần: 17203 **Tổng số TC:** 2

TS tiết	Lý thuyết	Thực hành/Xemina	Tự học	Bài tập lớn	Đồ án môn học
45	45	0	0	0	0

Điều kiện tiên quyết:

Môn học có thể bố trí học từ học kỳ đầu tiên.

Mục tiêu của học phần:

Giúp sinh viên nắm được những kiến thức cơ bản về lý thuyết tổ hợp, toán logic, hệ toán mệnh đề. Phương pháp suy diễn và chứng minh. Đại số Bool.

Nội dung chủ yếu

Giúp sinh viên nắm được những kiến thức cơ bản về lý thuyết tổ hợp, hệ toán mệnh đề, các phương pháp đếm, khái niệm quan hệ, đại số Bool …và làm cơ sở cho các môn học chuyên ngành khác.

Nội dung chi tiết của học phần:

TÊN CHƯƠNG MỤC	PHÂN PHỐI SỐ TIẾT				
	TS	**LT**	**TH/Xemina**	**BT**	**KT**
Chương 1. Đại cương về logic	**16**	**16**	**0**	**0**	**0**
1.1. Phép tính mệnh đề		2			
1.1.1. Khái niệm về mệnh đề và chân trị					
1.1.2. Các phép toán trên mệnh đề					
1.2. Biểu thức logic		2			
1.2.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic					
1.2.2. Sự tương đương logic					
1.2.4. Giá trị của biểu thức logic					
1.3. Các luật logic		3			
1.3.1. Các luật logic					
1.3.2. Các quy tắc thay thế					
1.3.3. Ví dụ áp dụng					
1.4. Các dạng chuẩn tắc		2			

TÊN CHƯƠNG MỤC	PHÂN PHỐI SỐ TIẾT				
	TS	LT	TH/Xemina	BT	KT
1.4.1. Chuẩn tắc tuyển					
1.4.2. Chuẩn tắc hội					
1.5. Quy tắc suy diễn		3			
1.5.1. Đại cương về quy tắc suy diễn					
1.5.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn					
1.5.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản					
1.5.4. Các ví dụ áp dụng					
1.6. Vị từ, lượng từ		4			
1.6.1. Định nghĩa vị từ và ví dụ					
1.6.2. Các phép toán trên vị từ					
1.6.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ					
1.6.4. Quy tắc phủ định mệnh đề có lượng từ					
1.6.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận					
Chương 2. Các phương pháp chứng minh	**6**	**5**	**0**	**0**	**1**
2.1. Các phương pháp chứng minh cơ bản		2			
2.1.1. Khái niệm về chứng minh					
2.1.2. Chứng minh trực tiếp					
2.1.3. Chứng minh phản chứng					
2.1.4. Chứng minh bằng cách phân chia trường hợp					
2.1.5. Phản ví dụ					
2.2. Nguyên lý quy nạp		3			
2.2.1. Đại cương về quy nạp					
2.2.2. Các nguyên lý quy nạp thường dùng					
2.2.3. Các ví dụ					1
Chương 3. Phương pháp đếm	**5**	**5**			
3.1. Tập hợp		2			
3.1.1. Khái niệm tập hợp					
3.1.2. Quan hệ “bao hàm trong” và tập hợp con					
3.1.3. Các phép toán trên tập hợp					
3.1.4. Tích Decartes của các tập hợp					
3.2. Các nguyên lý đếm		3			
3.2.1. Phép đếm					

TÊN CHƯƠNG MỤC	PHÂN PHỐI SỐ TIẾT				
	TS	LT	TH/Xemina	BT	KT
3.2.2. Nguyên lý cộng					
3.2.3. Nguyên lý nhân					
3.2.4. Nguyên lý bù trừ					
3.2.5. Nguyên lý Dirichlet					1
Chương 4. Quan hệ	**7**	**7**			
4.1. Quan hệ hai ngôi		1			
4.1.1. Định nghĩa quan hệ và ví dụ					
4.1.2. Các tính chất của quan hệ					
4.1.3. Biểu diễn quan hệ					
4.2. Quan hệ tương đương		2			
4.2.1. Khái niệm quan hệ tương đương					
4.2.2. Lớp tương đương và tập hợp tương đương					
4.3. Quan hệ thứ tự		3			
4.3.1. Các định nghĩa					
4.3.2. Biểu diễn quan hệ thứ tự					
4.3.3. Tập hữu hạn có thứ tự					
4.3.4. Sắp xếp topo					
4.4. Dàn (lattice - tập bị chặn)		1			
Chương 5. Đại số Bool	**11**	**10**	**0**	**0**	**1**
5.1. Các phép toán		2			
5.1.1. Các định nghĩa					
5.1.2. Các tính chất của phép toán hai ngôi					
5.2. Đại số Bool		2			
5.2.1. Định nghĩa và các tính chất					
5.2.2. Đại số Bool và dàn					
5.3. Các cổng logic và tổ hợp các cổng logic		2			
5.4. Cực tiểu hoá các mạch logic		4			1

Nhiệm vụ của sinh viên :

Tham dự các buổi thuyết trình của giáo viên, tự học, tự làm bài tập do giáo viên giao, tham dự các bài kiểm tra định kỳ và cuối kỳ.

Tài liệu học tập :

- Kenneth Rosen, *Toán học rời rạc và ứng dụng trong tin học*, NXB KHKT Hà nội, 1998.
- Nguyễn Tô Thành và Nguyễn Đức Nghĩa, *Giáo trình toán học rời rạc*, ĐHBK Hà nội, 1994.
- Phan Đình Diệu, *Lý thuyết Ôtômát hữu hạn và thuật toán*, NXB ĐHTHCN, 1977.
- Vương Tất Đạt, *Lôgic học đại cương*, NXB Đại học quốc gia HN, 2002

Hình thức và tiêu chuẩn đánh giá sinh viên:

- Hình thức thi cuối kỳ : Thi viết.
- Sinh viên phải đảm bảo các điều kiện theo Quy chế của Nhà trường và của Bộ

Thang điểm: Thang điểm chữ A, B, C, D, F

Điểm đánh giá học phần: Z = 0,2X + 0,8Y.

CHƯƠNG 1
ĐẠI CƯƠNG VỀ LOGIC

1.1. Phép tính mệnh đề

1.1.1. Khái niệm về mệnh đề và chân trị

Các đối tượng cơ bản mà chúng ta khảo sát ở đây là các phát biểu hay các mệnh đề. Tuy nhiên trong chương nầy ta chỉ xét đến các mệnh đề toán học, và chúng ta nói vắn tắt các mệnh đề toán học là các mệnh đề. Đó là những phát biểu để diễn đạt một ý tưởng trọn vẹn và ta có thể khẳng định một cách khách quan là nó đúng hoặc sai. Tính chất cốt yếu của một mệnh đề là nó đúng hoặc sai, và không thể vừa đúng vừa sai. Giá trị đúng hoặc sai của một mệnh đề được gọi là chân trị của mệnh đề.

Về mặt ký hiệu, ta thường dùng các mẫu tự (như p, q, r, ...) để ký hiệu cho các mệnh đề, và chúng cũng được dùng để ký hiệu cho các biến logic, tức là các biến lấy giá trị đúng hoặc sai. Chân trị "đúng" thường được viết là 1, và chân trị "sai" được viết là 0.

- Ví dụ 1: Các phát biểu sau đây là các mệnh đề (toán học).

1. 6 là một số nguyên tố.
2. 5 là một số nguyên tố.
3. $-3 < 2$
4. Tam giác cân có hai góc bằng nhau.
5. H2O là một axít.

Các mệnh đề 2, 3, và 4 trong ví dụ trên là những mệnh đề đúng. Nói cách khác chận trị của các mệnh đề nầy là đúng. Các mệnh đề 1, 5 là những mệnh đề sai.

- Ví dụ 2 : Các phát biểu sau đây không phải là các mệnh đề (toán học) vì tính đúng sai của chúng không xác định.

1. Ai đang đọc sách? (một câu hỏi)
2. Hãy đóng cửa lại đi!
3. Anh ta rất thông minh.
4. Cho x là một số nguyên dương.
5. a là một số chính phương.
6. $x + y = z$.

Trong việc khảo sát các mệnh đề, người ta còn phân ra làm hai loại: mệnh đề sơ cấp (elementary), mệnh đề phức hợp (compound). Mệnh đề sơ cấp là các "nguyên tử" theo nghĩa là nó không thể được phân tích thành một hay nhiều (từ hai trở lên) mệnh đề thành phần đơn giản hơn. Còn mệnh đề phức hợp là mệnh đề được tạo thành từ một hay nhiều mệnh đề khác bằng cách sử dụng các liên kết logic như từ "không" dùng trong việc phủ định một mệnh đề, các từ nối: "và", "hay", "hoặc", "suy ra", v.v....

•Ví dụ : Xét các mệnh đề sau đây.

p = "15 chia hết cho 3".

q = "2 là một số nguyên tố và là một số lẻ".

Ta có p là một mệnh đề sơ cấp. Nhưng q là một mệnh đề phức hợp, vì mệnh đề q được tạo thành từ hai mệnh đề "2 là một số nguyên tố" và "2 là một số lẻ" nhờ vào liên kết logic "và".

1.1.2. Các phép toán trên mệnh đề

Điều mà chúng ta quan tâm ở đây không phải là xác định tính đúng hoặc sai của một mệnh đề sơ cấp. Bởi vì những mệnh đề nầy thường là những phát biểu nói lên một ý tưởng nào đó trong một phạm vi chuyên môn nhất định. Vấn đề mà ta quan tâm ở đây là làm thế nào để tính toán chân trị của các mệnh đề phức hợp theo các mệnh đề sơ cấp cấu thành mệnh đề phức hợp đó nhờ vào các phép toán logic. Các phép toán logic ở đây là các ký hiệu được dùng thay cho các từ liên kết logic như "không", "và", "hay", "hoặc", "suy ra" hay "nếu ... thì ...", "nếu và chỉ nếu".

Các phép toán logic được định nghĩa bằng bảng chân trị (truth table). Bảng chân trị chỉ ra rõ ràng chân trị của mệnh đề phức hợp theo từng trường hợp của các chân trị của các mệnh đề sơ cấp tạo thành mệnh đề phức hợp. Bảng chân trị của các phép toán logic tất nhiên là phản ánh ngữ nghĩa tự nhiên của các từ liên kết tương ứng. Về mặt tự nhiên của ngôn ngữ, trong nhiều trường hợp c□ng một từ nhưng có thể có nghĩa khác nhau trong những ngữ cảnh khác nhau. Do đó, bảng chân trị không thể diễn đạt mọi nghĩa có thể có của từ tương ứng với ký hiệu phép toán. Điều nầy cho thấy rằng đại số logic là rõ ràng hoàn chỉnh theo nghĩa là nó cho ta một hệ thống logic đáng tin cậy. Đại số logic còn đặc biệt quan trọng trong việc thiết kế mạch cho máy tính.

Bảng chân trị không chỉ dùng để kê ra sự liên hệ chân trị giữa mệnh đề phức hợp với chân trị của các mệnh đề sơ cấp cấu thành nó, mà bảng chân trị còn được dùng với mục đích rộng hơn: liệt kê sự liên hệ chân trị giữa các mệnh với các mệnh đề đơn giản hơn cấu thành chúng.

1.1.2.1. Phép phủ định

Cho p là một mệnh đề, chúng ta dùng ký hiệu $\neg$ p để chỉ mệnh đề phủ định của mệnh đề p. "Sự phủ định" được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	$\neg$ p
0	1
1	0

Ký hiệu $\neg$ được đọc là "không" . Trong một số sách khác, người ta còn dùng các ký hiệu sau đây để chỉ mệnh đề phủ định của một mệnh đề p: ~p, $\overline{p}$

Trong cột thứ nhất của bảng chân trị, ta liệt kê đầy đủ các trường hợp chân trị có thể có của mệnh đề p. Ở cột thứ hai kê ra chân trị tương ứng của mệnh đề $\neg$p theo từng trường hợp chân trị của mệnh đề p. Định nghĩa nầy ph hợp với ngữ nghĩa tự nhiên của sự phủ định : Mệnh đề phủ định $\neg$ p có chân trị là đúng (1) khi mệnh đề p có chân trị sai (0), ngược lại $\neg$ p có chân trị sai (0) khi p có chân trị đúng (1).

- Ví dụ 1 :

Nếu ta ký hiệu p là mệnh đề "5 < 3" thì Øp là ký hiệu cho mệnh đề "5 ≥ 3". Trong trường hợp nầy p sai, $\neg$p đúng. Ta có thể viết p = 0, $\neg$ p = 1.

- Ví dụ 2 : Chỉ ra rằng $\neg$ ($\neg$ p) và p luôn có cng chân trị.

Giải. Lập bảng chân trị của mệnh đề $\neg$ ($\neg$ p):

p	$\neg$ p	$\neg$ ($\neg$ p)
0	1	0
1	0	1

Trên mỗi dòng giá trị trong bảng chân trị ta có chân trị của p và $\neg$ ($\neg$ p) đều bằng nhau (so sánh cột 1 và cột 3 trong bảng). Vậy $\neg$ ($\neg$ p) và p có cng chân trị. Ta cũng nói rằng $\neg$ ($\neg$ p) tương đương logic với p.

Mệnh đề $\neg$ ($\neg$ p) thường được viết là $\neg\neg$ p, vì điều nầy không có gì gây ra sự nhầm lẫn.

1.1.2.2. Phép hội

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hội q" là p $\wedge$ q. Phép "và", ký hiệu là $\wedge$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p $\wedge$ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chân trị của mệnh đề p $\wedge$ q phụ thuộc vào các chân trị của 2 mệnh đề p, q. Ta có 4 trường hợp chân trị của p $\wedge$ q ứng với 4 trường hợp chân trị của cặp mệnh đề (p,q) là (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Trong 4 trường hợp chỉ có một trường hợp mệnh đề p $\wedge$ q đúng, đó là trường hợp p đúng và q đúng.

Qua định nghĩa trên ta nhận thấy rằng các mệnh đề p $\wedge$ q và q $\wedge$ p luôn luôn có cng chân trị, hay tương đương logic. Tuy nhiên, trong ngôn ngữ thông thường các mệnh đề "p và q" và "q và p" đôi khi có ý nghĩa khác nhau theo ngữ cảnh.

Ví dụ: Cho các mệnh đề

p = "5 > -7",

q = "2721 là một số nguyên tố",

r = "một tam giác đều cũng là một tam giác cân".

Khi đó ta có :

$p \wedge q = 0$ (p L q sai, tức là có chân trị bằng 0, vì $p = 1$ và $q = 0$),

$p \wedge r = 1$ (p L r đúng, tức là có chân trị bằng 1, vì $p = 1$ và $r = 1$).

*Nhận xét: Bằng cách lập bảng chân trị, ta có:

•1. Các mệnh đề p và $p \wedge p$ luôn có c□ng chân trị.

•2. Mệnh đề $p \wedge \neg p$ luôn có chân trị bằng 0 (tức là một mệnh đề luôn sai).

Một mệnh đề phức hợp luôn luôn có chân trị là sai trong mọi trường hợp chân trị của các mệnh đề sơ cấp tạo thành nó sẽ được gọi là một sự mâu thuẫn.

1.1.2.3. Phép tuyển

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hay q" là $p \vee q$. Phép "hay", ký hiệu là $\vee$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	**q**	**$p \vee q$**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Chân trị của mệnh đề $p \vee q$ phụ thuộc vào các chân trị của 2 mệnh đề p, q. Trong 4 trường hợp chỉ có một trường hợp mệnh đề $p \vee q$ sai, đó là trường hợp p sai và q sai.

Qua định nghĩa trên ta nhận thấy rằng các mệnh đề $p \vee q$ và $q \vee p$ luôn luôn có c□ng chân trị, hay tương đương logic.

Ví dụ : Cho các mệnh đề

p = "5 > 7",

q = "2721 là một số nguyên tố",

r = "một tam giác đều cũng là một tam giác cân".

Khi đó ta có :

$p \vee q = 0$,

$p \vee r = 1$.

*Nhận xét :

•1. Cho p là một mệnh đề. Lập bảng chân trị của mệnh đề $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$

0	1	1
1	0	1

ta có mệnh đề $p \vee \neg p$ luôn luôn đúng.

- 2. Người ta còn sử dụng phép "hoặc" trong việc liên kết các mệnh đề. Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hoặc q" là $p \underline{\vee} q$. Phép "hoặc", ký hiệu là $\underline{\vee}$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	$p \underline{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Phép "hoặc" còn được gọi là "hay loại trừ". Chân trị của mệnh đề $p \underline{\vee} q$ phụ thuộc vào các chân trị của 2 mệnh đề p, q : mệnh đề $p \underline{\vee} q$ đúng khi trong 2 mệnh đề p và q có một mệnh đề đúng, một mệnh đề sai.

1.1.2.4. Phép kéo theo

Phép kéo theo, ký hiệu bởi $\rightarrow$, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện có dạng : "nếu . . . thì . . .". Cho p và q là 2 mệnh đề, ta sẽ viết $p \rightarrow q$ để diễn đạt phát biểu "nếu p thì q". Phép toán kéo theo $\rightarrow$ được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Mệnh đề $p \rightarrow q$, được đọc là "nếu p thì q", còn được phát biểu dưới các dạng khác sau đây:

- "q nếu p".
- "p chỉ nếu q".
- "p la` điều kiện đủ cho q".
- "q la` điều kiện cần cho p".

1.1.2.5. Phép kéo theo hai chiều

Phép kéo theo 2 chiều hay phép tương đương, ký hiệu bởi $\leftrightarrow$, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện hai chiều có dạng : ". . . nếu và chỉ nếu . . .". Cho p và q là 2 mệnh đề, ta viết $p \leftrightarrow q$ để diễn đạt phát biểu "p nếu và chỉ nếu q". Phép toán tương đương $\leftrightarrow$ được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Mệnh đề $p \leftrightarrow q$, được đọc là "p nếu và chỉ nếu q", còn được phát biểu dưới các dạng khác sau đây:

- "p khi và chỉ khi q".
- "p la` điều kiện cần va` đủ cho q".

Mệnh đề $p \leftrightarrow q$ có chân trị đúng (=1) trong các trường hợp p và q có c□ng chân trị.

1.1.2.6. Độ ưu tiên của các toán tử logic.

Tương tự như đối với các phép toán số học, để tránh phải dùng nhiều dấu ngoặc trong các biểu thức logic, ta đưa ra một thứ tự ưu tiên trong việc tính toán. Ở trên ta có 5 toán tử logic: $\neg$ (không) , $\wedge$ (và), $\vee$ (hay), $\rightarrow$ (kéo theo), $\leftrightarrow$ (tương đương)

$\neg$ ưu tiên mức 1 (cao nhất)

$\wedge$, $\vee$ ưu tiên mức 2 (thấp hơn)

$\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ưu tiên mức 3 (thấp nhất)

trong đó, các toán tử liệt kê trên c□ng dòng có c□ng độ ưu tiên.

Ví dụ :

1. $\neg p \vee q$ có nghĩa là $((\neg p) \vee q)$.
2. $\neg p \vee q \rightarrow r \wedge s$ có nghĩa là $(((\neg p) \vee q) \rightarrow (r \wedge s))$.
3. $\neg p \vee q \wedge r$ là nhập nhằng. Cần phải dùng các dấu ngoặc để chỉ rõ nghĩa.

1.2. Biểu thức logic

1.2.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Trong đại số ta có các biểu thức đại số được xây dựng từ các hằng số, các biến và các phép toán. Khi thay thế các biến trong một biểu thức đại số bởi các hằng số thì kết quả thực hiện các phép toán trong biểu thức sẽ là một hằng số. Trong phép tính mệnh đề ta cũng có các biểu thức logic được xây dựng từ :

- Các mệnh đề hay các giá trị hằng.
- Các biến mệnh đề.
- Các phép toán logic, và cả các dấu ngoặc "( )" để chỉ rõ thứ tự thực hiện của các phép toán.

Giả sử E, F là 2 biểu thức logic, khi ấy $\neg$ E, E $\wedge$ F, E $\rightarrow$ F, E $\leftrightarrow$ F cũng là các biểu thức logic.

Ví dụ: Biểu diễn E(p, q, r) = $(((\neg p) \vee q) \rightarrow (r \wedge s))$ là một biểu thức logic trong đó p, q, r là các biến mệnh đề.

Bảng chân trị

Bảng chân trị của một biểu thức logic là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề. Với một biến mệnh đề, ta có 2 trường hợp là 0 (sai) hoặc 1 (đúng). Với 2 biến mệnh đề p, q ta 4 trường hợp chân trị của bộ biến (p,q) là các bộ giá trị (0,0), (0,1), (1,0), và (1,1). Trong trường hợp tổng quát, với n biến mệnh đề thì ta có 2n trường hợp chân trị cho bộ n biến đó.

Ví dụ 1: Bảng chân trị của các biểu thức logic $p \rightarrow q$ và $\neg p \vee q$ theo các biến mệnh đề p,q như sau:

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$\neg p$**	**$\neg p \vee q$**
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Ví dụ 2: Bảng chân trị của các biểu thức logic $p \vee (q \wedge r)$ theo các biến mệnh đề p, q, r như sau:

Thứ tự	p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	0	1

Thứ tự	p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
8	1	1	1	1	1

1.2.2. Sự tương đương logic

Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic khi E và F luôn luôn có c□ng chân trị trong mọi trường hợp chân trị của bộ biến mệnh đề.

Khi đó ta viết: $E \Leftrightarrow F$

đọc là "E tương đương với F".

Như vậy, theo định nghĩa ta có thể kiểm tra xem 2 biểu thức logic có tương đương hay không bằng cách lập bảng chân trị của các biểu thức logic.

Ví dụ: từ bảng chân trị của các biểu thức logic $p \rightarrow q$ và $\neg p \vee q$ theo các biến mệnh đề p, q ta có:($p \rightarrow q$) <=> ($\neg p \vee q$)

1.2.3. Giá trị của biểu thức logic

Một biểu thức logic được tạo thành từ các biến logic kết hợp với phép toán logic, bởi vậy nên giá trị biểu thức logic cũng chỉ nhận 1 trong 2 giá trị là "đúng" (true hoặc 1) hay "sai" (false hoặc 0) t□y thuộc vào giá trị của các biến logic và quy luật của các phép toán.

Ví dụ: Xét biểu thức logic ($\neg p \vee q$), nếu thay p = 1 và q = 0 ta có:

$\neg 1 \vee 0 = 0 \vee 0 = 0$

1.3. Các luật logic

Các luật logic là cơ sở để ta thực hiện các biến đổi trên một biểu thức logic để có được một biểu thức logic mới tương đương logic với biểu thức logic có trước. Mỗi biểu thức logic cho ta một sự khẳng định về sự tương đương của 2 biểu thức logic. Ta sẽ sử dụng các qui tắc thay thế và các luật logic đã biết để thực hiện các phép biến đổi tương đương trên các biêu thức logic.

Dưới đây, chúng ta sẽ liệt kê ra một số luật logic thường được sử dụng trong lập luận và chứng minh. Các luật nầy có thể được suy ra trực tiếp từ các bảng chân trị của các biểu thức logic.

1.3.1. Các luật logic

- Các luật về phép phủ định
  - $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ (luật phủ định của phủ định)
  - $\neg 1 \Leftrightarrow 0$
  - $\neg 0 \Leftrightarrow 1$
- Luật giao hoán

- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

- Luật kết hợp
  - $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
  - $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- Luật phân bố
  - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Luật De Morgan
  - $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
  - $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- Luật về phần tử bù
  - $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
  - $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$
- Luật kéo theo
  - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- Luật tương đương
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- Các luật đơn giản của phép tuyển
  - $p \vee p \Leftrightarrow p$ (tính lũy đẳng của phép tuyển)
  - $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ (luật này còn được gọi là luật thống trị)
  - $p \vee 0 \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa)
  - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ)
- Các luật đơn giản của phép hội
  - $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (tính lũy đẳng của phép hội)
  - $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa)

- $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ (luật này còn được gọi là luật thống trị)
- $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ)

Một số luật trong các luật trình bày ở trên có thể được suy ra từ các luật khác. Chúng ta có thể tìm ra được một tập hợp luật logic tối thiểu mà từ đó ta có thể suy ra tất cả các luật logic khác, nhưng điều nầy không quan trọng lắm đối với chúng ta. Những luật trên được chọn lựa để làm cơ sở cho chúng ta thực hiện các biến đổi logic, suy luận và chứng minh. Tất nhiên là còn nhiều luật logic khác mà ta không liệt kê ra ở đây.

Các luật kết hợp trình bày ở trên còn được gọi là tính chất kết hợp của phép toán hội và phép toán tuyển . Do tính chất nầy, ta có thể viết các biểu thức logic hội và các biểu thức tuyển dưới các dạng sau:

- $E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_m$
- $E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_m$

và việc tính toán chân trị có thể được thực hiện dựa trên một sự phân bố các cặp dấu ngoặc vào biểu thức một cách t□y ý để xác định một trình tự thực hiện các phép toán.

Ví dụ: Biểu thức $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge E_4$ có thể được tính toán chân trị bởi biểu thức sau:

$(E_1 \wedge E_2) \wedge (E_3 \wedge E_4)$

hay có thể tính toán theo biểu thức:

$E_1 \wedge ((E_2 \wedge E_3) \wedge E_4)$

1.3.2. Các quy tắc thay thế

Dưới đây là các qui tắc để cho ta có thể suy ra những biểu thức logic mới hay tìm ra các biểu thức logic tương đương với một biểu thức logic cho trước.

- ***Qui tắc 1***

Trong một biểu thức logic E, nếu ta thay thế một biểu thức con bởi một biểu thức logic tương đương với biểu thức con đó thì ta sẽ được một biểu thức mới E' tương đương với biểu thức E.

- **Ví dụ:** Cho biểu thức logic $E = q \vee \neg p$. Thay thế q trong biểu thức E bởi biểu thức $\neg\neg q$ (tương đương với q) ta được một biểu thức mới $E' = \neg\neg q \vee \neg p$. Theo qui tắc thay thế 1 ta có: $q \vee \neg p \Leftrightarrow \neg\neg q \vee \neg p$

- **Qui tắc 2**

Giả sử biểu thức logic E là một hằng đúng. Nếu ta thay thế một biến mệnh đề p bởi một biểu thức logic tuỳ ý thì ta sẽ được một biểu thức logic mới E' cũng là một hằng đúng.

Ví dụ: Ta có biểu thức $E(p,q) = (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ là một hằng đúng. Thay thế biến q trong biểu thức E bởi biểu thức $q \wedge r$ ta được biểu thức logic mới:

$E'(p,q,r) = (p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r))$

Theo qui tắc thay thế 2 ta có biểu thức $E'(p,q,r)$ cũng là một hằng đúng.

1.3.3. Ví dụ áp dụng

- **Ví dụ 1:** Chứng minh rằng $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

<u>Chứng minh :</u>

$(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (luật kéo theo)

$\Leftrightarrow q \vee \neg p$ (luật giao hoán)

$\Leftrightarrow \neg q \vee \neg p$ (luật phủ định)

$\Leftrightarrow \neg q \to \neg p$ (luật kéo theo)

- **Ví dụ 2:** Chứng minh rằng biểu thức

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

là một hằng đúng.

<u>Chứng minh.</u>

$((p \to q) \wedge p) \to q$

$\Leftrightarrow ((p \to q) \wedge p) \vee q$ (luật kéo theo)

$\Leftrightarrow (\neg (p \to q) \vee \neg p) \vee q$ (luật De Morgan)

$\Leftrightarrow \neg (p \to q) \vee (\neg p \vee q)$ (luật kết hợp)

$\Leftrightarrow \neg (p \to q) \vee (p \to q)$ (luật kéo theo)

$\Leftrightarrow 1$ (luật về phần tử bù)

Vậy biểu thức $((p \to q) \wedge p) \to q$ là hằng đúng.

- **Ví dụ 3:** Chứng minh rằng biểu thức

$p \wedge q \to p$

là một hằng đúng.

<u>Chứng minh.</u>

$p \wedge q \rightarrow p \Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee p$ (luật kéo theo)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p$ (luật De Morgan)

$\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee p$ (luật giao hoán)

$\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee p)$ (luật kết hợp)

$\Leftrightarrow \neg q \vee 1$ (luật về phần tử bù)

$\Leftrightarrow 1$ (luật đơn giản)

Vậy mệnh đề $p \wedge q \rightarrow p$ là hằng đúng.

•**Ví dụ 4:** Chứng minh rằng biểu thức

$p \rightarrow p \vee q$

là một mệnh đề hằng đúng.

Chứng minh.

$p \rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q)$ (luật kéo theo)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee q$ (luật kết hợp)

$\Leftrightarrow 1 \vee q$ (luật về phần tử bù)

$\Leftrightarrow 1$ (luật đơn giản)

Vậy mệnh đề $p \rightarrow p \vee q$ là hằng đúng.

*__Nhận xét:__ Các ví dụ trên cho ta thấy một quan hệ khác giữa các mệnh đề phức hợp hay các mệnh đề : quan hệ "**suy ra**". Khi mệnh đề $p \rightarrow q$ là hằng đúng, ta nói rằng p suy ra q (về mặt logic). Chúng ta sẽ dùng ký hiệu $\Rightarrow$ để chỉ quan hệ "suy ra". Quan hệ suy ra nầy có tính truyền (hay bắc cầu), nhưng không có tính chất đối xứng.

1.4. Các dạng chuẩn tắc

Dạng chuẩn tắc (chính tắc) của 1 biểu thức là biểu diễn biểu thức về dạng đơn giản, chỉ bao gồm các phép toán phủ định, hội tuyển của các mệnh đề.

1.4.1. Chuẩn tắc tuyển

Giả sử $p_1, p_2, \dots$, pn là các biến mệnh đề. Một biểu thức logic F theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \dots, p_n$ được gọi là một *biểu thức hội cơ bản (hội sơ cấp)* nếu nó có dạng sau:

$F = q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n$

với $q_j = p_j$ hoặc $qj = \neg p_j$ ($j = 1, \dots , n$).

Ví dụ: Biểu thức $x \wedge \neg y \wedge z$ là một biểu thức hội cơ bản theo 3 biến mệnh đề x, y, z.

Biểu thức logic $E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \dots, p_n$ được nói là có dạng chính tắc tuyển khi E có dạng:

$$E = E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_m$$

Trong đó mỗi biểu thức con E_i đều có dạng chính tắc tuyển theo các biến $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Ví dụ: Các biểu thức sau đây có dạng chính tắc tuyển:

$E(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

$F(p_1,p_2,p_3,p_4) = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4)$

Định lý :

Mọi biểu thức logic $E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ đều có thể viết dưới dạng chính tắc tuyển (chuẩn tắc tuyển) duy nhất, không kể sự sai khác về thứ tự trước sau của các biểu thức hội cơ bản trong phép tuyển). Nói một cách khác, ta có duy nhất một tập hợp các biểu thức hội cơ bản $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ sao cho biểu thức $E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tương đương logic với biểu thức

$$E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_m.$$

1.4.2. Chuẩn tắc hội

Giả sử $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các biến mệnh đề. Một biểu thức logic F theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \dots, p_n$ được gọi là một *biểu thức tuyển cơ bản (tuyển sơ cấp)* nếu nó có dạng sau:

$F = q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n$

với $q_j = p_j$ hoặc $q_j = \neg p_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Ví dụ: Biểu thức $x \vee \neg y \vee z$ là một biểu thức tuyển cơ bản theo 3 biến mệnh đề x, y, z.

Biểu thức logic $E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \dots, p_n$ được nói là có dạng chính tắc hội khi E có dạng:

$$E = E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_m$$

Trong đó mỗi biểu thức con E_i đều có dạng chính tắc tuyển theo các biến $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Ví dụ: Các biểu thức sau đây có dạng chuẩn tắc hội (chính tắc hội):

$E(x,y,z) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$

$F(p_1,p_2,p_3,p_4) = (p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4)$

Định lý :

Mọi biểu thức logic $E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ đều có thể viết dưới dạng chính tắc hội duy nhất, không kể sự sai khác về thứ tự trước sau của các biểu thức tuyển cơ bản trong phép hội). Nói một cách khác, ta có duy nhất một tập hợp các biểu thức tuyển cơ bản $\{ E_1, E_2, \dots, E_m\}$ sao cho biểu thức $E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tương đương logic với biêu thức $E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_m$.

1.5. Quy tắc suy diễn

1.5.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa. Các tiên đề được giả định là đúng. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng hay đưa ra những khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có. Một số thuật ngữ, khái niệm sẽ không được định nghĩa rõ ràng nhưng được ngầm định nghĩa bởi các tiên đề. Trong một hệ toán học chúng ta có thể suy ra được các định lý. Một định lý là một khẳng định được chứng minh là đúng. Một số loại định lý được xem là các bổ đề, các hệ quả.

Một lập luận (hay lý luận) chỉ ra được tính đúng đắn của mệnh đề phát biểu trong định lý được gọi là chứng minh. Logic là một công cụ cho việc phân tích các chứng minh. Trong phần nầy chúng ta sẽ đề cập đến việc xây dựng một chứng minh toán học. Để thực hiện được một lập luận hay một chứng minh chúng ta cần hiểu các kỹ thuật và các công cụ được sử dụng để xây dựng một chứng minh. Thông thường một chứng minh sẽ bao gồm nhiều bước suy luận mà ở mỗi bước ta đi đến (hay suy ra) một sự khẳng định mới từ những khẳng định đã biết.

Ví dụ về một bước suy diễn:

- 1/ Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì danh sách L là rỗng nên theo sự khẳng định trên ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.
- 2/ Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

Trong 2 suy diễn ở ví dụ trên thì suy diễn 2/ là một suy luận đúng, nhưng suy diễn 1/ là không đúng. Vậy làm thế nào để biết được một suy diễn là đúng hay sai ? Một bước suy luận như thế phải dựa trên một qui tắc suy diễn hợp lý nào đó để nó được xem là một suy luận đúng. Các qui tắc suy diễn là cơ sở để tay biết được một lập luận hay một chứng minh là đúng hay sai. Trong các mục tiếp theo chúng ta sẽ xem xét chi tiết hơn về các qui tắc suy diễn và giới thiệu một số qui tắc suy dễn cơ bản thường được dùng trong việc suy luận và chứng minh.

Định nghĩa qui tắc suy diễn

Tuy có nhiều kỹ thuật, nhiều phương pháp chứng minh khác nhau, nhưng trong chứng minh trong toán học ta thường thấy những lý luận dẫn xuất có dạng:

Nếu p1 và p2 và . . . và pn

thì q.

Dạng lý luận này được xem là hợp lý (được chấp nhận là đúng) khi ta có biểu thức

$(p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_n) \rightarrow q$ là hằng đúng.

Ta gọi dạng lý luận trên là một luật suy diễn và người ta cũng thường viết luật suy diễn trên theo các cách sau đây :

- Cách 1: Biểu thức hằng đúng

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_n) \rightarrow q \Leftrightarrow 1$$

- Cách 2: Dòng suy diễn

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_n) \Rightarrow q$$

- Cách 3: Mô hình suy diễn

p1
. . . .
pn
____
$\therefore$ q

Các biểu thức logic $p_1, p_2, . . ., p_n$ trong luật suy diễn trên được gọi là giả thiết (hay tiền đề), và biểu thức q được gọi là kết luận. Ở đây chúng ta cũng cần lưu ý rằng lý luận trên đúng không có nghĩa là ta có q đúng và cũng không khẳng định rằng $p_1, p_2, . . ., p_n$ đều đúng. Lý luận chỉ muốn khẳng định rằng nếu như ta có $p_1, p_2, . . ., p_n$ là đúng thì ta sẽ có q cũng phải đúng.

Ví dụ : Giả sử p và q là các biến logic. Xác định xem mô hình sau đây có phải là một luật suy diễn hay không?

$p \rightarrow q$
p

$\therefore$ q

Giải: Lập bảng chân trị ta có:

p	q	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\wedge p$	$((p\rightarrow q) \wedge p)\rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1

1	1	1	1	1

Bảng chân trị cho thấy biểu thức $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ là hằng đúng. Do đó, mô hình suy luận trên đúng là một luật suy diễn. Thật ra, ta chỉ cần nhìn vào các cột chân trị của p, q, và $p \rightarrow q$ trong bảng chân trị là ta có thể kết luận được rồi, vì từ bảng chân trị trên ta thấy rằng nếu các giả thiết $p \rightarrow q$ và p đúng (có giá trị bằng 1) thì kết luận q cũng đúng.

Ta có thể khẳng định được mô hình suy luận trên là một luật suy diễn mà không cần lập bảng chân trị. Giả sử $p \rightarrow q$ và p đúng. Khi đó q phải đúng, bởi vì nếu ngược lại (q sai) thì p cũng phải sai (sẽ mâu thuẩn với giả thiết).

1.5.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

Để kiểm tra một suy luận cụ thể là đúng hay không, tức là có "hợp logic" hay không, ta có thể căn cứ vào các qui tắc suy diễn (luật suy diễn). Phép suy luận cụ thể có thể được xem như sự suy diễn trên các mệnh đề phức hợp. Các mệnh đề sơ cấp cụ thể (mà chân trị có thể đúng hoặc sai) trong phép suy luận sẽ được trừu tượng hóa (thay thế) bởi các biến logic. Như thế phép suy luận được trừu tượng hóa thành một qui tắc suy diễn trên các biểu thức logic mà ta có thể kiểm tra xem qui tắc suy diễn là đúng hay không. Đây chính là biện pháp để ta biết được một suy luận cụ thể là đúng hay sai.

<u>Ví dụ 1</u>: Xét sự suy luận sau đây: Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

Trong phép suy luận, ta có các mệnh đề sơ cấp "danh sách L là khác rỗng", "ta có thể lấy ra phần tử đầu (từ danh sách L)". Thay thế các mệnh đề sơ cấp nầy bởi các biến logic p, q tương ứng thì phép suy luận cụ thể trên sẽ được trừu tượng hóa thành một suy diễn trên các biểu thức logic như sau:

$p \rightarrow q$
$\neg q$
————————
$\therefore \neg p$

Mô hình suy diễn nầy chính là qui tắc suy diễn Modus Tollens, đã được biết là đúng. Vậy phép suy luận trên là suy luận đúng.

Ví dụ 2: Xét xem suy luận sau đây có đúng hay không?

Nếu $\sqrt{2}$ là số hữu tĩ thì phương trình m2 = 2n2 có nghiệm nguyên dương m, n. Nếu phương trình m2 = 2n2 có nghiệm nguyên dương m và n thì ta có mâu thuẫn. Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tĩ.

Trừu tượng hóa các mệnh đề sơ cấp "$\sqrt{2}$ là số hữu tĩ", " phương trình m2 = 2n2 có nghiệm nguyên dương m, n " thành các biến logic p, q tương ứng thì phép suy luận trên có dạng mộ hình suy diễn

$p \to q$

$q \to 0$

$\therefore \neg p$

Kiểm tra mô hình suy diễn nầy ta sẽ thấy là đúng. Như thế phép suy luận trên là đúng.

1.5.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

Trong mục này chúng ta nêu lên một số qui tắc suy diễn (đúng) thường được sử dụng mà ta có thể kiểm tra chúng bằng các phương pháp đã được trình bày trong mục trước.

- **Qui tắc Modus Ponens**

$(p\to q) \wedge p \to q$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$p \to q$
p
————————
$\therefore q$

- **Qui tắc Modus Tollens**

$(p\to q) \wedge q \to \neg p$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$p \to q$
$\neg q$
——————
$\therefore \neg p$

- Tam đoạn luận

$(p\to q) \wedge (q\to r) \wedge (p\to r)$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$p \to q$
$q\to r$

$\therefore p\to r$

- Qui tắc chứng minh bằng phản chứng

$p \to q \Rightarrow (p \to \neg q) \to 0$

Qui tắc nầy cho phép ta chứng minh $(p \to \neg q) \to 0$ thay cho $p \to q$. Nói cách khác, nếu ta thêm giả thiết phụ vào tiền đề p mà chứng minh được có sự mâu thuẫn thì ta có thể kết luận q từ tiền đề p.

- Qui tắc chứng minh theo trường hợp

$(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge . . . \wedge (p_n \to q) \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee . . . \vee p_n) \to q$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$p_1 \to q$

$p_2 \to q$

. . .

$p_n \to q$

$\therefore (p_1 \vee p_2 \vee . . . \vee p_n) \to q$

1.5.4. Các ví dụ áp dụng

Dưới đây ta trình bày chứng minh của một số mệnh đề mà không nêu lên một cách chi tiết về các qui tắc suy diễn đã được áp dụng. Người đọc có thể tìm thấy các qui tắc suy diễn được sử dụng trong chứng minh một cách dễ dàng.

Mệnh đề 1: Với mọi số nguyên n, $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Suy nghĩ đầu tiên là ta thấy rằng không thể tìm thấy một thừa số 3 trong biểu thức $n^3 + 2n$. Nhưng khi phân tích ra thừa số thì n3 + 2n = $n(n^2 + 2)$. Phát biểu "$n^3 + 2n$ chia hết cho 3" sẽ đúng nếu n là bội số của 3. Còn các trường hợp khác thì sao?. Ta thử phương pháp phân chứng.

Chứng minh:

Ta có $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$, và số tự nhiên n có một trong 3 dạng ứng với 3 trường hợp dưới đây:

- Trường hợp 1: n = 3k, với k là một số nguyên.

$$n^3 + 2n = 3k(9k^2 + 2) \text{ chia hết cho 3.}$$

- Trường hợp 2: n = 3k+1, với k là một số nguyên.

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (3k+1)((3k+1)^2 + 2) \\ &= (3k+1)(9k^2 + 6k+3) \\ &= (3k+1)3(3k^2 + 2k+1) \text{ chia hết cho 3.} \end{aligned}$$

- Trường hợp 3: n = 3k+2, với k là một số nguyên.

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (3k+2)((3k+2)^2 + 2) \\ &= (3k+1)(9k^2 + 12k+6) \\ &= (3k+1)3(3k^2 + 4k+2) \text{ chia hết cho 3.} \end{aligned}$$

- Trong mọi trường hợp (có thể có) ta đều có $n^3 + 2n$ đều chia hết cho 3.

Vậy ta kết luận $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 đối với mọi số nguyên n.

*Nhận xét : Chứng minh trên có thể được trình bày ngắn gọn hơn bằng cách sử dụng phép đồng dư modulo 3.

○**Mệnh đề 2:**Nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.

Suy nghĩ: Giả sử $n^2 = 2k$ (là số chẵn). Ta thấy khó suy ra n là số chẵn. Nếu biết thông tin gì đó về n thì suy ra điều gì đó về n^2 thì dễ hơn. Ta thử phương pháp phản chứng.

Chứng minh: Ta hãy chứng minh mệnh đề "Nếu n lẻ thì n^2 lẻ".

Cho n là một số lẻ, ta có $n = 2k+1$ (k là một số nguyên).
Do đó $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ là một số lẻ.
Mệnh đề trong cặp nháy kép là đúng nên mệnh đề phản đảo của nó cũng đúng. Vậy, nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.

○Mệnh đề 3:Nếu $p > 3$ và p nguyên tố thì $p^2 -1$ chia hết cho 3.

Chứng minh:

Ta có (p-1), p, (p+1) là 3 số nguyên liên tiếp. Trong 3 số nguyên nầy có một số chia hết cho 3. Nhưng số đó không phải là p vì p là số nguyên tố lớn hơn 3. Do đó (p-1) chia hết cho 3 hoặc (p+1) chia hết cho 3. Suy ra (p-1)(p+1) chia hết cho 3, tức là $p^2 -1$ chia hết cho 3.

○**Mệnh đề 4:**Số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

Chứng minh:

Giả sử phát biểu trong mệnh đề là sai. Tức là chỉ có một số hữu hạn, k, số nguyên tố (dương). Ký hiệu k số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ở đây k là số nguyên dương.

Đặt $n = p_1p_2 \ldots p_k + 1$.

Số n lớn hớn tất cả k số nguyên tố nên n không nguyên tố.

Do đó, từ định lý cơ bản của số học , n phải có một ước số nguyên tố p.

p phải là một trong k số nguyên tố. Do đó $p \mid (p_1p_2 \ldots p_k)$.

Suy ra $p \mid (n - p_1p_2 \ldots p_k)$, hay $p \mid 1$.

Như thế, ta có p là một số nguyên tố và $p \mid 1$. Điều nầy là không thể, hay nói cách khác, ta có một mâu thuẩn.

Vậy, Số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

1.6. Vị từ, lượng từ

1.6.1. Định nghĩa vị từ và ví dụ

Định nghĩa:

Một vị từ là một phát biểu p(x, y, …) phụ thuộc theo các biến x, y, … lấy giá trị trên các miền xác định A, B, … nào đó. Khi thay thế các biến trong vị từ bởi các giá trị cụ thể a, b, … thuộc các miền xác định thì ta được một mệnh đề p(a, b, …) có chân trị đúng hoặc sai.

Gọi B là tập hợp gồm có hai giá trị : Sai (ký hiệu bởi 0), và Đúng (ký hiệu bởi 1). Một vị từ p(x, y, …)

Ví dụ1: P(n) ≡ "n là một số nguyên tố" là một vị từ trên tập hợp các số tự nhiên (hoặc trên tập hợp các số nguyên). Ta có thể thấy rằng:

- P(1) = 0, tức là P(1) ≡ "1 là một số nguyên tố" là một mệnh đề sai.
- P(2) = 1, tức là P(2) ≡ "2 là một số nguyên tố" là một mệnh đề đúng.
- P(12) = 0, tức là P(12) ≡ "12 là một số nguyên tố" là một mệnh đề sai.
- P(17) = 1, tức là P(17) ≡ "17 là một số nguyên tố" là một mệnh đề đúng.

Vị từ "n là một số nguyên tố" có thể được xem là một ánh xạ đi từ tập hợp các số tự nhiên **N** vào tập hợp Boole B:

P : **N** → B

$$P(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi n nguyên tố} \\ 0 & \text{khi n không nguyên tố} \end{cases}$$

Ví dụ2: p(m,n) ≡ "m là một ước số của n", với m và n là các biến số tự nhiên, cho ta một vị từ theo 2 biến m và n thuộc tập hợp các số tự nhiên. Ta có:

p(2,4) = 1, p(3,4) = 0.

1.6.2. Các phép toán trên vị từ

Cho p(x, y, …) là một vị từ theo các biến x, y, … . Phủ định của p, ký hiệu là ¬p, là một vị từ mà khi thay các biến x, y, … bởi các phần tử cụ thể a, b, … tương ứng thì ta được mệnh đề ¬(p(a, b, …)). Nói một cách khác, vị từ ¬p được định nghĩa bởi:

(¬ p) (x, y, …) = ¬(p(x, y, …))

Cho p(x, y, …) và q(x, y, …) là các vị từ theo các biến x, y, … . Phép hội của p và q, ký hiệu là p→ q, là một vị từ mà khi thay các biến x, y, … bởi các phần tử cụ thể a, b, … tương ứng thì ta được mệnh đề p(a, b, …) → q(a, b, …). Nói một cách khác, vị từ p ?q được định nghĩa bởi: $(p \wedge q)(x, y, \ldots) = p(x, y, \ldots) \wedge q(x, y, \ldots)$

Một cách tương tự, các phép toán tuyển, kéo theo và tương đương của 2 vị từ p và q có thể được định nghĩa như sau:

- $(p \vee q)(x, y, \ldots) = p(x, y, \ldots) \vee q(x, y, \ldots)$
- $(p \to q)(x, y, \ldots) = p(x, y, \ldots) \to q(x, y, \ldots)$
- $(p \leftrightarrow q)(x, y, \ldots) = p(x, y, \ldots) \leftrightarrow q(x, y, \ldots)$

1.6.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

Ngoài việc thay thế giá trị cụ thể cho các biến trong vị từ để được một mệnh đề ta còn có một cách quan trọng khác để chuyển từ vị từ sang mệnh đề. Đó là cách sử dụng các lượng từ "*với mọi*" và "*tồn tại*" (hay "có ít nhất một"). Lượng từ được sử dụng để nói lên rằng vị từ đúng đối với mọi giá trị thuộc miền xác định hay chỉ đúng với một phần các giá trị thuộc miền xác định.

Cho P(n) là một vị từ theo biến số tự nhiên n. Phát biểu "<u>với mọi</u> n ∈ **N**, P(n)" hay một cách vắn tắt (hiểu ngầm miền xác định) là "với mọi n, P(n)" có nghĩa là P có giá trị đúng trên toàn bộ miền xác định. Nói cách khác, P là ánh xạ hằng có giá trị là 1. Ta sẽ dùng ký hiệu " ∀ " để thay thế cho lượng từ "**với mọi**".

Phát biểu "<u>Có (ít nhất) một</u> n ∈ **N**, P(n)" hay một cách vắn tắt (hiểu ngầm miền xác định) là "<u>Có (ít nhất) một</u> n , P(n)" có nghĩa là P có giá trị đúng đối với một hay một số giá trị nào đó thuộc miền xác định. Nói cách khác, P không phải là một ánh xạ hằng 0. Ta sẽ dùng ký hiệu "∃ " để thay thế cho lượng từ "**có ít nhất một**". Lượng từ nầy còn được đọc một cách khác là "**tồn tại**".

Trong trường hợp tổng quát, giả sử P(x) là một vị từ theo biến x (biến x lấy giá trị thuộc một miền xác định đã biết nào đó và miền xác định nầy có thể được hiểu ngầm, không cần ghi rõ ra). Các cách viết sau đây:

- $\forall x : P(x)$ (1)
- $\exists x : P(x)$ (2)

lần lượt được dùng để diễn đạt cho các phát biểu sau đây:

"Với mọi x (thuộc miền xác định) ta có P(x) là đúng"

"Có ít nhất mộ x (thuộc miền xác định) sao cho P(x) là đúng"

Các phát biểu (1) và (2) có chân trị hoàn toàn xác định. Nói cách khác chúng là những mệnh đề. Chân trị của các mệnh đề nầy được xác định một cách tự nhiên theo ngữ nghĩa thông thường của các lượng từ. Mệnh đề (1) là đúng khi và chỉ khi ứng với mỗi giá trị t□y ý x thuộc miền xác định ta đều có mệnh đề P(x) có chân trị đúng. Mệnh đề (2) là đúng khi và chỉ khi có một giá trị x nào đó thuộc miền xác định mà ứng với giá trị x đó ta có P(x) có chân trị đúng.

Ghi chú:

Phát biểu "$\forall$ x : P(x)" và phát biểu "$\exists$ x : P(x)" không phải là vị từ theo biến x nữa mà là các mệnh đề có chân trị xác định là đúng hoặc sai. Trong các phát biểu trên biến x đã được lượng từ hóa và chân trị của phát biểu không phụ thuộc theo biến x nữa. Ta cũng nói rằng biến x bị buộc bởi lượng từ.

Đối với một vị từ theo nhiều biến thì ta có thể lượng từ hóa một số biến nào đó trong vị từ để có một vị từ mới theo các biến còn lại. Chẳng hạn, nếu p(x, y, …) là một vị từ theo các biến x, y, … thì ta có biểu thức

$$q(y, \ldots) \equiv \forall x : p(x, y, \ldots)$$

sẽ là một vị từ theo các biến y, … .

Nếu tất cả các biến của vị từ đều được lượng từ hóa thì ta sẽ có một mệnh đề.Chẳng hạn, nếu p(x, y) làmột vị từ theo 2 biến x, y thì biểu thức

$$\forall x, \exists y : p(x, y)$$

sẽ là một mệnh đề, tức là có chân trị xác định và không phụ thuộc vào các biến x, y nữa.

Trong nhiều phát biểu người ta cò dùng cụm từ "tồn tại duy nhất", ký hiệu bởi $!, như là một sự lượng từ hóa đặc biệt.

Ví dụ 1:

1. Cho vị từ P(n) ≡ "n là một số nguyên tố". Mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n ta có n là nguyên tố" có thể được viết như sau:

$$\forall n \in \mathbf{N} : P(n)$$

và mệnh đề nầy có chân trị là 0 (sai).

2. Mệnh đề "Với mọi số nguyên n ta có 2n-1 là một số lẻ" có thể được viết dưới dạng ký hiệu như sau:

$$\forall n \in \mathbf{Z} : 2n\text{-}1 \text{ lẻ}$$

và mệnh đề nầy có chân trị là 1 (đúng).

3. Mệnh đề "Ta có $x^2 > 0$, với mọi số thực x khác 0" có thể được viết là

$\forall x \in \mathbf{R} - \{0\} : x^2 > 0$

và mệnh đề nầy có chân trị là 1 (đúng).

<u>Ví dụ 2</u>: Chứng minh rằng : Nếu n là một số chẵn thì n^2 là số chẵn.

Mệnh đề cần chứng minh (là đúng) được viết dưới dạng

$\forall n \in \mathbf{Z}$: n chẵn $\to n^2$ chẵn.

Từ đó ta có thể trình bày chứng minh như sau: Cho n là một số nguyên t□y ý. Ta có:

n chẵn $\Rightarrow n = 2m$, với m là một số nguyên nào đó $\Rightarrow n^2 = 4m^2 \Rightarrow n^2$ chẵn. Vậy phát biểu trên là đúng.

1.6.4. Quy tắc phủ định mệnh đề có lượng từ

Dựa vào cách xác định chân trị của các mệnh đề có lượng từ theo ngữ nghĩa tự nhiên của các phát biểu, ta có các qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ sau đây:

- $\neg (\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$ (1)
- $\neg (\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$ (2)

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm phủ định của mệnh đề "tồn tại một số thực x sao cho $x^2 < 0$".

Đặt $P(x) \equiv$ "$x^2 < 0$". Mệnh đề đã cho được viết dưới dạng ký hiệu như sau:

$\exists x : P(x)$

Áp dụng luật phủ định mệnh đề có lượng từ, ta có mệnh đề phủ định cần tìm có dạng :

$\forall x : \neg P(x)$.

Vậy mệnh đề phủ định là: "Với mọi số thực x, $x^2 \geq 0$".

*Ghi chú :

Từ các qui tắc trên ta có thể nói chung về qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ như sau: Nếu trong một mệnh đề có lượng từ ta thay thế lượng từ $\forall$ bởi lượng từ $\exists$, lượng từ $\exists$ bởi lượng từ $\forall$, và biểu thức vị từ được thay thế bởi phủ định của nó thì ta sẽ được mệnh đề phủ định của mệnh đề có lượng từ ban đầu. Qui tắc nầy cũng áp dụng được cho các mệnh đề với nhiều lượng từ.

<u>Ví dụ 2</u>:

Cho p(x, y, z) là một vị từ phụ thuộc vào biến bộ ba $(x,y,z) \in AxBxC$. Miền xác định là tích Đê-Cat của 3 tập hợp A, B, C. Trong trường hợp nầy ta nói vị từ p là một vị từ theo 3 biến x, y, z. Miền xác định tương ứng của 3 biến nầy là A, B, C. Hãy tìm phủ định của mệnh đề sau:

$\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C : p(x,y,z)$

Theo qui tắc chung ta có :

$\neg (\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C : p(x,y,z)) \equiv$

$\exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C : \neg p(x,y,z)$

Thật ra nếu thực hiện từng bước theo các qui tắc (1) và (2) ta cũng đạt được mệnh đề phủ định như trên:

$\neg (\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C : p(x,y,z)) \equiv$

$\exists x \in A, \neg (\exists y \in B, \exists z \in C : p(x,y,z)) \equiv$

$\exists x \in A, \forall y \in B, \neg (\exists z \in C : p(x,y,z)) \equiv$

$\exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C : \neg p(x,y,z)$

Ví dụ 3:

Với một hàm số f xác định ở một lân cận của điểm $a \in \mathbf{R}$ (a là một số thực), ta có định nghĩa sự liên tục của f tại a như sau : f liên tục tại a nếu và chỉ nếu cho một số dương ε t□y ý, ta có một số dương δ sao cho $| x-a | < \delta \to | f(x) - f(a) | < \varepsilon$. Như vậy f liên tục tại a khi và chỉ khi mệnh đề sau đây đúng:

"cho số dương ε t□y ý, ta có một số dương δ sao cho với mọi x ta có

$| x-a | < \delta \to | f(x) - f(a) | < \varepsilon$ ".

Hãy tìm phủ định của mệnh đề trên.

Mệnh đề trên được viết là :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall x : | x-a | < \delta \to | f(x) - f(a) | < \varepsilon)$

Theo qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ, phủ của mệnh đề trên là:

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \neg (\forall x : | x-a | < \delta \to | f(x) - f(a) | < \varepsilon)$

$\equiv \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : (\exists x : \neg (| x-a | < \delta \to | f(x) - f(a) | < \varepsilon))$

$\equiv \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : (\exists x : | x-a | < \delta \wedge \neg (| f(x) - f(a) | < \varepsilon))$

$\equiv \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : (\exists x : | x-a | < \delta \wedge | f(x) - f(a) | \geq \varepsilon)$

$\equiv \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x : | x-a | < \delta \wedge | f(x) - f(a) | \geq \varepsilon$

Như vậy ta có thể phát biểu mệnh đề phủ định như sau:: "Tồn tại một số dương ε sao cho ứng với số dương δ t□y ý có một số thực x thoả điều kiện $| x-a | < \delta$ và $| f(x) - f(a) | \geq \varepsilon$ ".

Như vậy ta có thể phát biểu mệnh đề phủ định như sau: "Tồn tại một số dương ε sao cho ứng với mỗi số dương δ t□y ý ta có một số thực x thỏa điều kiện $| x-a | < \delta$ và $| f(x) - f(a) | \geq \varepsilon$ ".

1.6.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

Thay đổi thứ tự lượng từ hóa của 2 biến

Cho một vị từ p(x, y) theo 2 biến x, y. Nếu lượng từ hóa cả 2 biến x, y trong đó ta lượng từ hóa biến y trước và lượng từ hóa biến x sau thì sẽ được 4 mệnh sau đây:

- $\forall$ x, $\forall$ y : p(x,y)
- $\exists$ x, $\forall$ y : p(x,y)
- $\forall$ x, $\forall$ y : p(x,y)
- $\forall$ x, $\forall$ y : p(x,y)

Tương tự ta cũng có 4 mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ p(x, y) trong đó ta lượng từ hóa biến x trước và lượng từ hóa biến y sau:

- $\forall$ y, $\forall$ x : p(x,y)
- $\exists$ y, $\forall$ x : p(x,y)
- $\forall$ y, $\forall$ x : p(x,y)
- $\forall$ y, $\forall$ x : p(x,y)

Định lý dưới đây cho ta một số tính chất liên quan đến thứ tự của việc lượng từ hóa các biến trong các mệnh đề có lượng từ.

Định lý: Giả sử p(x, y) là một vị từ theo 2 biến x, y thì các mệnh đề sau là đúng

- ($\forall$ x, $\forall$ y : p(x,y)) $\leftrightarrow$ ($\forall$ y, $\forall$ x : p(x,y))
- ($\exists$ x, $\exists$ y : p(x,y)) $\leftrightarrow$ ($\exists$ y, $\exists$ x : p(x,y))
- ($\exists$ x, $\forall$ y : p(x,y)) $\rightarrow$ ($\forall$ y, $\exists$ x : p(x,y))

Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng

Qui tắc:

Giả sử một mệnh đề có lượng từ trong đó biến x với miền xác định là A, được lượng từ hóa và bị buộc bởi lượng từ phổ dụng $\forall$, và mệnh đề là đúng. Khi đó nếu thay thế x bởi a $\in$ A thì ta sẽ được một mệnh đề đúng.

Ví dụ1: Biết rằng phát biểu "mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều là số lẻ" là một mệnh đề đúng. Cho a là một số nguyên tố lớn hơn 2 (cố định nhưng t□y ý). Hãy chứng minh rằng a là một số lẻ.

Giải:

Đặt p(n) $\equiv$ "n là số nguyên tố lớn hơn 2", và q(n) $\equiv$ "n là số lẻ". Ta có p(n) và q(n) là các vị từ theo biến số tự nhiên n, và ta có mệnh đề đúng sau đây:

$\forall$ n : p(n) $\rightarrow$ q(n)

Theo qui tắc trên ta suy ra

p(a) $\rightarrow$ q(a) = 1.

Theo giả thiết ta cũng có

p(a) = 1.

Suy ra

q(a) = 1 (qui tắc suy diễn Modus Ponens).

Vậy ta có mệnh đề "a là một số lẻ" là đúng.

Ví dụ 2: Trong các định lý Toán học ta thường thấy các khẳng định là các mệnh đề lượng từ hóa phổ dụng. Ví dụ như các trường hợp bằng nhau của 2 tam giác bất kỳ. Khi áp dụng ta sẽ đặc biệt hóa cho 2 tam giác cụ thể.

Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng

Qui tắc: Nếu ta thay thế biến x trong vị từ P(x) bởi một phần tử a cố định nhưng t□y ý thộc miền xác định của biến x mà mệnh đề nhận được có chân trị là đúng, tức là P(a) = 1, thì mệnh đề lượng từ hóa

$\forall$ x : P(x)

là một mệnh đề đúng.

Nhận xét: Nếu xem vị từ P(x) như là một hàm lấy giá trị Bool trên miền xác định A của biến x thì ta có mệnh đề lượng từ hóa

$\forall$ x : P(x)

là một mệnh đề đúng khi và chỉ khi P là hàm hằng 1.

Từ các qui tắc trên ta có thể chứng minh được một số tính chất suy diễn được phát biểu trong các mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1: Cho p(x) và q(x) là các vị từ theo biến x lấy giá trị trong tập hợp A (miền xác định của biến x là tập hợp A), và a là một phần tử cố định t□y ý thuộc A. Khi ấy ta có qui tắc suy diễn sau đây:

$$\begin{array}{l} \forall x : p(x) \to q(x) \\ p(a) \\ \hline \therefore q(a) \end{array}$$

Mệnh đề 2: Cho p(x), q(x) và r(x) là các vị từ theo biến x lấy giá trị trong tập hợp A (miền xác định của biến x là tập hợp A). Ta có qui tắc suy diễn sau đây:

$\forall$ x : p(x) $\to$ q(x)

$\forall$ x : q(x) $\to$ r(x)

$\therefore$ $\forall$ x : p(x) $\to$ r(x)

BÀI TẬP

Câu 1: Qui tắc suy diễn là gì? Cho ví dụ về một qui tắc suy diễn và áp dụng qui tắc suy diễn trong một suy luận cụ thể.

Câu 2: Liệt kê những qui tắc suy diễn thường dùng và cho biết tên gọi (nếu có) của mỗi qui tắc suy diễn.

Câu 3: Nêu lên các phương pháp để kiểm tra một qui tắc suy diễn. Ứng với mỗi phương pháp hãy cho một ví dụ minh họa.

Câu 4: Vị từ là gì? Cho ví dụ.

Câu 5: Phát biểu qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ (hay mệnh đề lượng từ hóa) và cho ví dụ cụ thể.

Câu 6: P(n) là vị từ "nếu 4 | n thì 2 | n". Cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

a/ P(12)

b/ P(10)

c/ $\exists$ n : P(n)

d/ $\forall$ n : P(n)

Câu 7: Hãy cho biết chân trị của mỗi mệnh đề dưới đây và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề đó.

a/ $\exists$ x : x+3 = 5

b/ $\forall$ x : x+3 = 5

c/ $\exists$ x, $\exists$ y : x+y = 3

d/ $\exists$ x, $\forall$ y : x+y = 3

e/ $\forall$ x, $\exists$ y : x+y = 3

f/ $\forall$ x, $\forall$ y : x+y = 3

Trong các mệnh đề trên các biến x và y là các biến thực.

Câu 8: Hãy cho biết chân trị của mỗi mệnh đề dưới đây và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề đó.

a/ $\exists x, \exists y : (x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)$

d/ $\exists x, \forall y : (x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)$

e/ $\forall x, \exists y : (x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)$

f/ $\forall x, \forall y : (x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)$

Câu 9: Hãy sử dụng các ký hiệu toán học và logic để viết lại mệnh đề sau đây:

Với mọi số thực dương x, có một số tự nhiên n sao cho x bằng 2^n hoặc x nằm giữa 2^n và 2^{n+1}.

Cho biết mệnh đề nầy đúng hay sai, và viết ra mệnh đề phủ định của nó.

Câu 10: Trong bài tập nầy ký hiệu n chỉ một biến nguyên. Cho các vị từ :

$P(n) \equiv$ "$0 < n^2 \leq 4$"

$R(n) \equiv$ "$0 < n^3 \leq 8$"

$S(n) \equiv$ "$0 < n \leq 2$"

a/ Ứng với mỗi vị từ trên hãy cho biết tập hợp các giá trị n làm cho vị từ có chân trị đúng (=1).

b/ Trong các vị từ trên, những vị từ nào tương đương với nhau.

c/ Mệnh đề "$\forall$ n : $R(n) \rightarrow P(n)$" là đúng hay sai?

CHƯƠNG 2
CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

2.1. Các phương pháp chứng minh cơ bản

2.1.1. Khái niệm về chứng minh

Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa. Các tiên đề được giả định là đúng. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng hay đưa ra những khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có. Một số thuật ngữ, khái niệm sẽ không được định nghĩa rõ ràng nhưng được ngầm định nghĩa bởi các tiên đề. Trong một hệ toán học chúng ta có thể suy ra được các định lý. Một định lý là một mệnh đề được chứng minh là đúng. Một số loại định lý được xem là các bổ đề, các hệ quả.

Một lập luận (hay lý luận) chỉ ra được tính đúng đắn của mệnh đề phát biểu trong định lý được gọi là chứng minh. Logic là cơ sở để thực hiện việc chứng minh, đặc biệt là các luật logic và các luật suy diễn. Trong phần nầy chúng ta sẽ đề cập đến việc xây dựng một chứng minh toán học. Các cấu trúc chứng minh thường được sử dụng là : chứng minh trực tiếp, chứng minh bằng cách phân chia trường hợp (phân chứng), phản chứng, phản ví dụ, và chứng minh qui nạp.

2.1.2. Chứng minh trực tiếp

Chứng minh trực tiếp là phương pháp chứng minh suy diễn trực tiếp dẫn từ giả thiết đến kết luận thông qua việc áp dụng các luật suy diễn (hay qui tắc suy diễn), các định lý, các nguyên lý và các kết quả đã biết. Đây là một kiểu tư duy giải bài toán rất tự nhiên và người ta thường xuyên sử dụng. Trong khi suy nghĩ để tìm ra cách chứng minh theo phương pháp nầy người ta thường phải tự trả lời các câu hỏi sau đây:

- Ta sẽ dùng luật suy diễn nào?
- Các định lý nào, các kết qua nào có thể sử dụng được đề ta suy ra được một điều gì đó từ những sự kiện, những yếu tố hiện đang có?
- Việc áp dụng định lý có khả năng sẽ dẫn đến kết luận hay kết quả mong muốn hay không?
- Trong trường hợp ở một bước suy diễn nào đó có nhiều định lý hay nhiều luật nào đó có thể áp dụng được và cũng có kkhả năng sẽ dẫn đến kết luận hay kết quả mong muốn thì ta sẽ chọn cái nào?
- Đến một giai đoạn nào đó, khi gặp phải sự bế tắc thì ta sẽ phải tự hỏi rằng phải chăng bài toán không có lời giải, hay vì kiến thức của ta chưa đủ, hay ta phải sử dụng một phương pháp chứng minh nào khác?

Quả thật là không thể trả lời được các câu hỏi một cách đầy đủ và chính xác. Nó phụ thuộc chủ yếu vào kiến thức, kinh nghiệm của người giải bài toán và cả sự nhạy bén, tính năng động sáng tạo của họ. Tuy nhiên Những câu hỏi trên cho ta một sự định hướng chung của quá trình suy nghĩ. Ngoài ra, cũng cần nói thêm rằng chúng là cơ sở cho việc phát triển các hệ chương trình trợ giúp giải toán một cách "thông minh" trên máy tính được thiết kế theo phương pháp chứng minh nầy.

Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét một 2 ví dụ về phương pháp chứng minh trực tiếp.

Ví dụ 1: Giả sử p, r, s, t, u là các mệnh đề sau cho ta có các mệnh đề sau đây là đúng:

(1) $p \rightarrow r$

(2) $r \rightarrow s$

(3) $t \vee \neg s$

(4) $\neg t \vee u$

(5) $\neg u$.

Hãy chứng minh mệnh đề p là sai, tức là chứng minh mệnh đề $\neg p$ là đúng.

Chứng minh:

Áp dụng luật suy diễn tam đoạn luận, từ (1) và (2) ta suy ra:

(6) $p \rightarrow s$

Áp dụng luật logic về phép toán kéo theo ta có thể viết lại (3) dưới dạng:

(7) $s \rightarrow t$

Áp dụng luật suy diễn tam đoạn luận, từ (6) và (7) ta suy ra:

(8) $p \rightarrow t$

Áp dụng luật logic về phép toán kéo theo ta có thể viết lại (4) dưới dạng:

(9) $t \rightarrow u$

Áp dụng luật suy diễn tam đoạn luận, từ (8) và (9) ta suy ra:

(10) $p \rightarrow u$

Áp dụng luật suy diễn Modus Tollens, từ (10) và (5) ta suy ra:

(11) $\neg p$

Vậy mệnh đề $\neg p$ là đúng.

Ví dụ 2: Cho p(x), q(x) và r(x) là các vị từ theo biến x ($x \in A$), và a là một phần tử cố định nhưng t□y ý của tập hợp A. Giả sử ta có các mệnh đề sau đây là đúng:

(1) $\forall x \in A : p(x) \to q(x)$

(2) $\forall x \in A : q(x) \to r(x)$

(3) p(a)

Chứng minh rằng mệnh đề r(a) là đúng.

Chứng minh:

Áp dụng kết quả trong mệnh đề 2, Bài 2, mục 2.5, từ (1) và (2) ta suy ra:

(4) $\forall x \in A : p(x) \to r(x)$

Áp dụng kết quả trong mệnh đề 1, Bài 2, mục 2.5, từ (3) và (4) ta suy ra:

(5) r(a)

Vậy mệnh đề r(a) là đúng.

2.1.3. Chứng minh phản chứng

Phương pháp chứng minh trực tiếp không phải bao giờ cũng sử dụng được trong việc chứng minh ngay cả đối với những bài toán khá đơn giản như bài toán sau đây:

Bài toán: Chứng minh rằng không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$

Bằng cách suy nghĩ để tìm một cách chứng minh trực tiếp ta sẽ gặp phải bế tắc: Với q = m/n là một số hữu tỉ cho trước (m và n là các số nguyên dương) ta không biết làm thế nào để suy ra một cách trực tiếp rằng $q^2 \neq 2$.

Để bằng phản chứng một khẳng định hay một mệnh đề nào đó, ta tìm cách rút ra từ mệnh đề đó một điều rõ ràng là vô lý hay một sự mâu thuẫn. Về mặt kỹ thuật ta thường giả sử rằng mệnh đề cần chứng minh là sai rồi từ đó suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay các tiền đề của bài toán, từ đó đi đến kết luận rằng mệnh đề là đúng. Ngoài ra phép chứng minh phản chứng còn có thể được thực hiện như sau: ta giả sử mệnh đề cần chứng minh là sai, kết hợp với giả thiết đã cho để suy ra được một điều mâu thuẫn nào đó rồi từ đó kết luận rằng mệnh đề là đúng. Cơ sở cho phương pháp chứng minh nầy là qui tắc chứng minh phản chứng:

$p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to 0$

Trở lại bài toán trên như một ví dụ, chúng ta có thể thực hiện việc chứng minh một cách dễ dàng nhờ phương pháp chứng minh phản chứng.

Ví dụ: Chứng minh rằng không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$

Chứng minh phản chứng:

Giả sử ta có mệnh đề ngược lại của điều cần phải chứng minh, tức là giả sử rằng:

Có hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Vì một phân số có thể viết dưới dạng tối giản, nên ta có thể giả thiết thêm rằng các số dương m và n trong mệnh đề (1) nguyên tố c□ng nhau, tức là: m và n không có ước số chung lớn hơn 1.

Do $\frac{m}{n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$, từ (1) ta suy ra:

Có hai số nguyên dương m và n nguyên tố c□ng nhau sao cho $m^2 = 2n^2$.

Với m và n là hai số nguyên dương thỏa mãn điều kiện trong mệnh đề (2) ở trên thì ta dễ dàng lần lượt suy ra được các khẳng định sau đây:

m và n nguyên tố c□ng nhau.

$m^2 = 2\,n^2$.

m là số chẵn.

m là số chẵn, tức là m = 2k với k là một số nguyên dương.

$n^2 = 2k^2$.

n^2 là số chẵn.

n là số chẵn.

2 là một ước số chung của m và n, và 2 > 1.

Sự mâu thuẫn do (3) và (10).

Từ lập luận trên ta đi đến kết luận:

không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

✱Ghi chú: Ngoài cách chứng minh phản chứng ta còn có thể thực hiện phép chứng minh gián tiếp mà về thực chất phương pháp nầy là c□ng loại với phương pháp chứng minh phản chứng. Trong cách chứng minh gián tiếp người ta thiệt lập sự đúng đắn của một mệnh đề bằng cách chứng minh rằng mệnh đề ngược lại (tức là mệnh đề phủ định của mệnh đề đó) là sai.

2.1.4. Chứng minh bằng cách phân chia trường hợp

Trong phương pháp chứng minh bằng cách phân chia trường hợp, để chứng minh một sự khẳng định nào đó ta xem xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra đối với các sự kiện hay các yếu tố liên quan trong giả thiết và chứng minh rằng trong mỗi trường hợp ta đó ta đều có mệnh đề cần chứng minh là đúng, và từ đó đi đến kết luận rằng từ giả thiết ta có mệnh đề cần chứng minh là đúng. Cơ sở cho phương pháp chứng minh nầy là qui tắc chứng minh theo trường hợp:

$(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge . . . \wedge (p_n \rightarrow q) \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee . . . \vee p_n) \rightarrow q$

Để chứng minh khẳng định q (là đúng), chúng ta phân tích giả thiết để có được một sự khẳng định đúng dưới dạng:

$p_1 \vee p_2 \vee . . . \vee p_n$

rồi tìm cách chứng minh rằng từ mệnh đề p_k suy ra được mệnh đề q, ứng với mỗi i từ 1 tới n.

Chúng ta hãy trở lại một bài toán về số nguyên đã được trình bày trong phần trước về các ví dụ áp dụng của logic trong việc lập luận và chứng minh.

✱**Ví dụ:** Cho một số nguyên n, hãy chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Tóm tắt chứng minh:

Với một số nguyên n, gọi r là dư số trong phép chia n cho 3, ta có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: r = 0

Trường hợp 1: r = 1

Trường hợp 1: r = 2

Nói cách khác ta có: $(r = 0) \vee (r = 1) \vee (r = 2)$.

Trong mỗi trường hợp ta đều suy ra được $n^3 + 2n$ chia hết cho 3. Ở đây không trình bày lại chi tiết việc tính toán suy diễn trong mỗi trường hợp.

Từ đó đi đến kết luận: $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

2.1.5. Phản ví dụ

Nói một cách tổng quát, phản ví dụ là việc chỉ ra một tình huống hay trường hợp sai của một khẳng định phổ quát để chứng tỏ rằng khẳng định phổ quát đó là sai. Chẳng hạn như để chứng minh mệnh đề

$\forall\, x \in A : P(x)$

là sai ta chỉ cần đưa ra một phần tử a cụ thể thuộc tập hợp A mà P(a) là sai. Thật ra làm như vậy tức là ta đã chứng minh mệnh đề

$\exists\, x \in A : \neg\, P(x)$

(có c□ng chân trị với mệnh đề $\neg\, [\forall\, x \in A : P(x)]$) là đúng.

Chúng ta có thể nêu lên một bài toán khác mà đối với nó ta phải dùng phản ví dụ. Đó là bài toán chứng minh một phép suy diễn từ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ suy ra q là sai. Để chứng minh phép suy diễn là sai ta phải chứng minh rằng

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$$

không phải là hằng đúng. Để làm điều nầy chúng ta chỉ cần tìm và chỉ ra một trường hợp cụ thể của các biến mệnh đề mà ứng với chúng ta có các tiền đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ đều đúng nhưng kết luận q là sai.

__Ví dụ__: Hãy kiểm tra suy luận sau đây

$$\begin{array}{l} p \to r \\ p \\ \neg\, r \to q \\ \text{-----------} \\ \therefore\, q \end{array}$$

Sử dụng các phương pháp để kiểm tra một phép suy luận ta có thể thấy được suy luận trên là không đúng. Để tìm một phản ví dụ ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề sao cho các tiền đề trong phép suy luận là đúng còn kết luận là sai. Về mặt kỹ thuật ta sẽ tìm p, q, và r thỏa mãn các đẳng thức sau đây:

$p \to r = 1$

$p = 1$

$\neg\, r \to q = 1$

q = 0

Dễ dàng tìm thấy một trường hợp phản ví dụ là: p = 1, q = 0, r = 1.

Vậy suy luận đã cho là không đúng.

2.2. Nguyên lý quy nạp

2.2.1. Đại cương về quy nạp

2.2.1.1. Tập hợp số tự nhiên

Tập hợp gồm tất cả các số tự nhiên (hay các số đếm) được ký hiệu là **N**:

N = { 0, 1, 2, . . . }

- **<u>Các phép toán</u>:**

Trên tập hợp số tự nhiên **N** ta có phép toán cộng (ký hiệu là +), và phép toán nhân (ký hiệu là .). Phép toán cộng 2 số tự nhiên a và b cho ta tổng số cũng là một số tự nhiên được viết là a+b; còn phép toán nhân 2 số tự nhiên a và b cho ta tích số cũng là một số tự nhiên được viết là a.b.

Phép toán cộng và nhân các số tự nhiên có các tính chất sau đây:

- Phép cộng (+) và phép nhân (.) có tính giao hoán và kết hợp, nghĩa là với mọi số tự nhiên a, b, c ta có:

- a + b = b + a
- (a + b) + c = a + (b + c)
- a.b = b.a
- (a . b) . c = a . (b . c)

- Phép nhân (.) phân phối đối với phép cộng (+), nghĩa là với mọi số tự nhiên a, b, c ta có:

- a . (b + c) = a . b + a . c

Ở đây, phép toán nhân có độ ưu tiên cao hơn phép toán cộng.

- Phép cộng và phép nhân lần lượt nhận 0 và 1 là phần tử trung hòa, nghĩa là ta có:

- $\forall$ a $\in$ **N** : a + 0 = 0 + a = a
- $\forall$ a $\in$ **N** : a . 1 = 1 . a = a

- **<u>Thứ tự trên N</u>:**

Ngoài các phép toán, trên **N** còn có một quan hệ thứ tự ? được định nghĩa như sau:

$a \le b \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbf{N} : a + c = b$

Đây là một quan hệ thứ tự toàn phần trên **N**, và theo quan hệ thứ tự nầy ta có:

$0 < 1 < 2 < \ldots < n < n+1 < \ldots$

0 là phần tử nhỏ nhất của tập **N**, nhưng tập **N** không có phần tử lớn nhất.

Thứ tự $\le$ trên tập hợp **N** có một tính chất rất quan trọng được phát biểu trong mệnh đề sau đây:

Mệnh đề: Cho A là một tập hợp các số tự nhiên khác rỗng. Khi đó A có phần tử nhỏ nhất, nghĩa là tồn tại $a \in A$ sao cho:

$\forall\, x \in A,\ a \le x$

Ghi chú: Phần tử a trong mệnh đề trên là duy nhất và được ký hiệu là min(A). Tính chất được phát biểu trong mệnh đề là cơ sở cho tính đúng đắn của các qui tắc chứng minh qui nạp sẽ được trình bày trong mục sau.

2.2.2. Các nguyên lý quy nạp thường dùng

Cho n_0 là một số tự nhiên, và P(n) là một vị từ theo biến tự nhiên n ? n_0. Vấn đề được đặt ra là chứng minh tính đúng đắng của mệnh đề sau đây:

$\forall\, n \ge n_0 : P(n)$

Phương pháp chứng minh qui nạp thường được sử dụng để chứng minh khẳng định trên. Phép chứng minh qui nạp được thực hiện dựa vào các nguyên lý qui nạp. Chúng ta sẽ nêu lên hai dạng nguyên lý qui nạp thường được sử dụng. Trong các áp dụng nguyên lý qui nạp, n_0 thường là 0 hoặc 1. Hai dạng nguyên lý qui nạp, được gọi là dạng qui nạp yếu và dạng qui nạp mạnh sẽ được viết dưới dạng mô hình của các luật suy diễn.

Nguyên lý qui nạp dạng yếu:

(cơ sở) $P(n_0)$

(qui nạp) $\forall\, k \ge n_0 : P(k) \ge P(k+1)$

$\therefore\ \forall\, n \ge n_0 : P(n)$

<u>Chứng minh tính đúng đắn của nguyên lý qui nạp trên</u>:

Đặt A là tập hợp các số tự nhiên $n \geq n_0$ mà P(n) sai. Ta chỉ cần chứng minh rằng $A = \varnothing$ (tập hợp rỗng) với giả thiết rằng ta có hai khẳng định trong phần cơ sở và phần qui nạp trong nguyên lý trên. Ta sẽ chứng minh điều nầy bằng phương pháp phản chứng.
Giả sử $A \neq \varnothing$. Theo tính chất của thứ tự trên tập số tự nhiên **N** (xem mệnh đề ở mục trên), A có phần tử nhỏ nhất. Gọi a là phần tử nhỏ nhất của tập hợp A. Vì $P(n_0)$ đúng nên $a \geq n_0+1$, hay $a-1 \geq n_0$. Do a = min(A), nên $a-1 \notin A$ và do đó P(a-1) đúng. Vì P(a-1) đúng nên ta cũng có P(a) đúng theo khẳng định ở phần qui nạp, nghĩa là ta cũng có $a \notin A$. Điều nầy cho ta một sự mâu thuẫn (vì a = min(A)).

Vậy $A = \varnothing$. Ta có điều cần chứng minh.

Nguyên lý qui nạp dạng mạnh:

(cơ sở) $P(n_0)$

(qui nạp) $\forall\, k \geq n_0 : P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$

$\therefore\ \forall\, n \geq n_0 : P(n)$

Theo các nguyên lý trên, chứng minh qui nạp bao gồm 2 bước : bước cơ sở và bước qui nạp. Ở bước cơ sở, ta phải kiểm chứng để khẳng định $P(n_0)$ là đúng. Ở bước qui nạp, ứng với một số tự nhiên k t□y ý, ta phải chứng minh một mệnh đề kéo theo. Giả thiết trong mệnh đề kéo theo ở bước 2 được gọi là **giả thiết qui nạp**. Giả thiết qui nạp ở dạng qui nạp yếu là P(k), và ở dạng mạnh là $P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(k)$.
Nguyên lý qui nạp có rất nhiều biến thể trong việc vận dụng. Chẳng hạn, từ hai nguyên lý trên ta có thể rút ra một nguyên lý qui nạp có dạng sau đây:

(cơ sở) $P(0) \wedge P(1)$

(qui nạp) □ $\forall k \geq 1 : P(k-1) \wedge P(k) \wedge P(k+1)$

$\therefore\ \forall\, n \geq 0 : P(n)$

Trong chứng minh mệnh đề sau đây, ta sử dụng dạng qui nạp biến thể nầy.

Mệnh đề: Cho dãy số

$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$

được định nghĩa bởi :

$x_0 = 0$;

$x_1 = 1$; và

$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$.

Khi đó ta có: $x_n = 2^n - 1$, với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh:

Đặt $P(n) \equiv$ "$x_n = 2^n - 1$".

Dễ thấy rằng P(0) và P(1) là đúng. Bây giờ, ta chỉ cần thực hiện bước qui nạp để hoàn thành phép chứng minh qui nạp.

Giả sử P(k-1) và P(k) đúng với một số tự nhiên (t□y ý) $k \geq 1$.

Thế thì $x_{k-1} = 2^{k-1} - 1$ và $x_k = 2^k - 1$.

Do đó $x_{k+1} = 3x_k - 2x_{k-1}$

$= 3(2^k - 1) - 2(2^{k-1} - 1)$

$= 3*2^k - 3 - 2^k - 2$

$= 2*2^k - 1$

$= 2^{k+1} - 1$

Suy ra P(k+1) đúng.

Vậy theo nguyên lý qui nạp (dạng biến thể được phá biểu ở trên) ta kết luận: P(n) đúng với mọi $n \geq 0$.

2.2.3. Các ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ($n \in \mathbf{N}$) ta có: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1) / 6$

Chứng minh:

Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ ($n \in \mathbf{N}$), đặt

$P(n) \equiv$ "$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1) / 6$"

Ta sẽ chứng minh mệnh đề

$\forall\, n \geq 1 : P(n)$

bằng phương pháp qui nạp (dạng yếu), nghĩa là thực hiện 2 bước chứng minh trong phép chứng minh qui nạp.

◆Bước cơ sở: Khi n = 1 thì P(1) là mệnh đề "1 = 1.(1+1).(2.1+1) /6". Vế phải của đẳng thức trong mệnh đề tính ra bằng 1, nên ta có P(1) đúng.

◆Bước qui nạp: Cho n là một số tự nhiên túy ý lớn hơn 0, nghĩa là $n \geq 1$, và giả sử rằng P(n) đúng, tức là ta có:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1) / 6 \text{ (GTQN)}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh P(n+1) cũng đúng, tức là chứng minh rằng

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = (n+1)(n+2)(2n+3) / 6$$

Thật vậy, từ (GTQN) ta suy ra

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = n(n+1)(2n+1) / 6 + (n+1)^2$$

$= [(n+1) / 6] . [n(2n+1) + 6(n+1)]$

$= [(n+1) / 6] . [2n^2 + 7n + 6]$

$= [(n+1) / 6] . (n+2) (2n+3)$

$= n(n+1)(2n+1) / 6$

Tức là ta đã suy ra được P(n+1) cũng đúng.

Hai phần (phần cơ sở và phần qui nạp) trong phép chứng minh qui nạp đã được chứng minh. Vậy theo nguyên lý qui nạp ta kết luận rằng với mọi $n \geq 1$ ($n \in \mathbf{N}$) ta có:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1) / 6$$

● Ví dụ 2: Chứng minh định lý sau đây:

Cho a và b là 2 số nguyên tự nhiên, với $b \geq 0$. Khi đó, có duy nhất 2 số tự nhiên q và r thỏa 2 điều kiện sau đây:

+ $a = q.b + r$

+ $0 \leq r < b$

Chứng minh:

Tính duy nhất của q và r trong định lý trên có thể kiểm chứng dễ dàng. Ở đây ta sẽ chứng minh sự tồn tại của q và r. Cho b là một số tự nhiên khác 0 t□y ý nhưng cố định. Đặt

P(a) ≡ "Tồn tại các số tự nhiên q và r thỏa mãn 2 điều kiện (1) và (2)"

Ta sẽ chứng minh mệnh đề sau đây là đúng:

$\forall a \in \mathbf{N} : P(a)$

bằng cách sử dụng nguyên lý qui nạp dạng mạnh.

Bước cơ sở: Xét trường hợp $a = 0$, ta thấy với $q = 0$ và $r = 0$ thì các điều kiện (1) và (2) được thỏa mãn. Vậy ta có $P(0)$ đúng.

Bước qui nạp: Cho a là một số tự nhiên t□y ý và giả sử rằng các mệnh đề $P(0), P(1), \ldots, P(a)$ đều đúng (GTQN). Ta sẽ chứng minh $P(a+1)$ cũng đúng bằng cách xét 2 trường hợp.

+ Trường hợp 1: $a+1 < b$.

Ta chọn $q = 0$ và $r = a+1$ thì ta có q và r thỏa các điều kiện

$a+1 = q.b + r$

$0 \le r < b$

Vậy trong trường hợp 1 nầy thì $P(a+1)$ đúng.

+ Trường hợp 2: $a+1 \ge b$.

Đặt $a' = a+1-b$, ta có $0 \le a' \le a$. Từ (GTQN) ta suy ra $P(a')$ đúng, tức là có các số tự nhiên q' và r' sao cho

$a' = q'.b + r'$, và $0 \le r' < b$

Suy ra các số tự nhiên $q = q'+1$ và $r = r'$ sẽ thỏa mãn 2 điều kiện

(1) $a+1 = q.b + r$

(2) $0 \le r < b$

Vậy ta cũng có $P(a+1)$ đúng.

Tóm lại, ta đã chứng minh phần cơ sở và phần qui nạp trong nguyên lý qui nạp. Từ đó có thể kết luận rằng:

$$\forall a \in \mathbf{N} : P(a)$$

Ghi chú : Định lý trên là cơ sở cho việc định nghĩa phép toán *div* (chia lấy thương số) và phép toán *mod* (chia lấy dư số). Định lý nầy còn được gọi là *thuật chia Euclide*. Xem xét việc chứng minh của định lý trên theo phương pháp qui nạp, chúng ta có thể rút ra một thuật toán (khái niệm thuật toán sẽ được trình bày trong chương 3). Dạng tổng quát của định lý, cho các số nguyên, được phát biểu trong bài tập 6.

CHƯƠNG 3
PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

3.1. Tập hợp

3.1.1. Khái niệm tập hợp

Khái niệm *tập hợp* được dùng để chỉ một sưu tập hay một nhóm các đối tượng nào đó mà ta đang quan tâm xem xét, và sưu tập nầy phải được xác định tốt. Các đối tượng trong sưu tập hay trong nhóm nầy sẽ được gọi là các *phần tử* hay các thành viên của tập hợp. Tính xác định tốt (hay nói vắn tắt là tính xác định) của tập hợp được hiểu theo nghĩa là với một đối tượng nào đó mà ta đang quan tâm thì ta có thể xác định được đích xác rằng trường hợp nào là đúng trong hai trường hợp sau đây:

- Trường hợp 1: đối tượng là một phần tử của tập hợp. Trong trường hợp nầy ta nói đối tượng *thuộc về* tập hợp.
- Trường hợp 2: đối tượng không phải là một phần tử của tập hợp. Trong trường hợp nầy ta nói đối tượng *không thuộc về* tập hợp.

Để thuận tiện cho việc đề cập đến tập hợp về sau, mỗi tập hợp thường được đặt cho một tên, chẳng hạn như A, B, C …. Ta cũng dùng ký hiệu $\in$ để diễn đạt quan hệ "thuộc về" của một phần tử đối với một tập hợp. Khi x là một phần tử thuộc về tập hợp A, thì ta viết

$x \in A$

và đọc là "x thuộc A", hay đọc là "A chứa phần tử x". Ngược lại, nếu x không phải là một phần tử của tập hợp A thì ta viết

$x \notin A$

và đọc là "x không thuộc A", hay đọc là "A không chứa phần tử x".

- Tập hợp bằng nhau: Hai tập hợp A và B sẽ được xem la *bằng nhau* khi chúng có c□ng các phần tử, tức là mỗi phần tử thuộc A đều là phần tử thuộc B và ngược lại. Khi ấy, ta viết là A = B.
- Tập hợp rỗng: Tập hợp không có phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, và được ký hiệu là $\varnothing$.
- Cách xác định một tập hợp: Để *xác định một tập hợp* ta có thể dùng các cách sau đây:
- <u>Cách liệt kê</u>: Ta liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp giữa 2 ký hiệu ngoặc { và } .

Ví dụ:

A = { a, b, c } .

B = { 0, 1 } .

Các nêu đặc trưng của phần tử:

Theo cách nầy, để xác định một tập hợp A ta sẽ nêu lên "tính chất" dùng để xác định xem phần tử trong một không gian U có thuộc về tập hợp A hay không: phần tử x của U sẽ thuộc A khi x thỏa "tính chất", và x không thuộc A khi x không thỏa "tính chất". Từ "tính chất" thường được thể hiện dưới dạng một vị từ p(x) theo biến $x \in U$. Khi ấy, tập hợp A sẽ được viết như sau:

$$A = \{ x \in U : p(x) \}$$

hay vắn tắt (hiểu ngầm tập U) là

&# $A = \{ x : p(x) \}$

Ví dụ:

$A = \{ n \in \mathbf{N} : \text{n là số nguyên tố} \}$ (khái niệm số nguyên tố được định nghĩa trong mục III)

$B = \{ n \in \mathbf{N} : \text{có một số tự nhiên m sao cho } n = m^2 \}$

Cách xác định tập hợp dưới dạng ảnh của một tập hợp khác A' qua một phép tương ứng f mà ứng với mỗi $x \in A'$ ta có một phần tử tương ứng f(x) duy nhất trong U. Khi ấy ta viết

$$A = \{ f(x) : x \in A' \}$$

Ghi chú: Phép tương ứng f được nói trên đây chính là một *ánh xạ*. Khái niệm ánh xạ sẽ được định nghĩa trong mục II.

Ví dụ:

&# $B = \{ n^2 : n \in \mathbf{N} \}$

$C = \{ (2n+1)^2 : n \in \mathbf{N} \}$

3.1.2. Quan hệ "bao hàm trong" và tập hợp con

Định nghĩa:

Cho A và B là hai tập hợp mà các phần tử của chúng đều thuộc một tập hợp lớn U (hay còn gọi là tập vũ trụ). Ta nói tập A *bao hàm trong* (hay chứa trong) tập B nếu mỗi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B. Ta cũng nói rằng B bao hàm A (hay B chứa A), và viết là:

$$A \subset B \text{ (hay } B \supset A).$$

Khi $A \subset B$ ta nói A là một *tập hợp con* của tập hợp B.

Ví dụ:

$\{ 0, 1, 2\} \subset \{ n \in N : n < 10\}$

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, trong đó

N #9; là tập hợp các số tự nhiên,

Z là tập hợp các số nguyên,

Q #9; là tập hợp các số hữu tỉ,

R #9; là tập hợp các số thực,

C #9; là tập hợp các số phức.

Cho X là một tập hợp. Sưu tập tất cả các tập hợp con của X được ký hiệu là P(X). Nói một cách khác, P(X) là một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là một tập hợp con của X.

Tính chất:

- $\varnothing \subset A$ và $A \subset A$, với mọi tập hợp A.
- $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow (A = B)$
- $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$
- $X \subset Y \Rightarrow P(X) \subset P(Y)$
- Nếu tập hợp X có n phần tử ($n \in \mathbf{N}$) thì tập hợp P(X) có 2^n phần tử.

3.1.3. Các phép toán trên tập hợp

Trong mục nầy chúng ta sẽ nêu lên định nghĩa các phép toán tập hợp trên các tập hợp con của một tập hợp vũ trụ U cho trước, và phát biểu một số tính chất liên quan đến các phép toán.

Định nghĩa các phép toán:

- *Giao* của 2 tập hợp A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử của U mà vừa thuộc tập A vừa thuộc tập B.

$$A \cap B = \{ x : (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$

- *Hội* của 2 tập hợp A và B, ký hiệu bởi $A \cup B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử của U sao cho nó thuộc tập A hay thuộc tập B.

$$A \cup B = \{ x : (x \in A) \vee (x \in B) \}$$

- *Hiệu* của 2 tập hợp A và B, ký hiệu bởi A \ B (hay A - B), là tập hợp gồm tất cả các phần tử của U sao cho nó thuộc tập A và không thuộc tập B.

$A - B = \{ x : (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$

Phần bù của tập A (trong U), ký hiệu bởi Ac, là tập hợp tất cả các phần tử của U mà không thuộc A. Nói cách khác,

$Ac = U - A$

Các tính chất của các phép toán:

Tính giao hoán:

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

Tính kết hợp:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Tính phân bố:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Luật De Morgan:

$(A \cap B)^c = Ac \cup Bc$

$(A \cup B)^c = Ac \cap Bc$

Phần tử trung hòa:

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap U = A$

Phần bù:

$A \cup Ac = U$

$A \cap Ac = \varnothing$

Tính thống trị:

$A \cup U = U$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

3.1.4. Tích Decartes của các tập hợp

Tích Descartes của 2 tập hợp:

Cho 2 tập hợp A và B. Tích Descartes của tập hợp A và tập hợp B, được ký hiệu bởi AxB, là tập hợp gồm tất cả các cặp (a,b) sao cho $a \in A$ và $b \in B$.

$$AxB = \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

Trong trường hợp B = A, ta ký hiệu AxB là A^2.

Tích Descartes của nhiều tập hợp:

Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (n > 1). Tích Descartes của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, được ký hiệu bởi $A_1xA_2x \ldots xA_n$, là tập hợp gồm tất cả các bộ n phần tử $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với ai $\in A_i$ với mọi i = 1, …, n.

Trong trường hợp $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ thì tập hợp tích $A_1xA_2x \ldots xA_n$ sẽ được viết là A_n.

3.2. Các nguyên lý đếm

Từ lâu, người ta đã nghiên cứu việc liệt kê, đếm các phần tử hay các đối tượng có những tính chất nào đó để giải quyết một số vấn đề cần thiết được đặt ra. Chẳng hạn, phép đếm được sử dụng trong việc phân tích và đánh giá độ phức tạp của thuật toán. Kỹ thuật đếm còn được sử dụng trong việc tính toán xác suất của các sự kiện.

Trong mục nầy chúng ta sẽ trình bày các qui tắc cơ bản của phép đếm. Chúng sẽ giúp ích rất nhiều cho việc giải nhiều vấn đề liên quan đến việc liệt kê, sắp xếp và đếm.

3.2.1. Phép đếm

Cho A là một tập hợp khác rỗng, để xác định số phần tử của tập hợp A ta thường thực hiện việc đếm bằng cách lần lượt gán cho các phần tử của A các số tự nhiên kế tiếp nhau, và số tự nhiên đầu tiên (được dùng để gán cho phần tử đầu tiên được xem xét) là 1. Nếu quá trình nầy kết thúc với số tự nhiên n (được gán cho phần tử cuối c□ng) thì ta nói A là một tập hợp hữu hạn và có n phần tử. Thật ra khi thực hiện việc đếm như thế chính là thiết lập một song ánh từ A vào tập hợp { 1, 2, . . ., n} . Từ đó ta có thể định nghĩa phép đếm như sau:

Định nghĩa:

Cho A là một tập hợp khác rỗng. Nếu tồn tại một số nguyên dương n và một song ánh f từ A vào { 1, 2, . . ., n} thì ta nói A là một tập hợp hữu hạn và A có n phần tử. Khi đó song ánh

$$f : A \rightarrow \{ 1, 2, \ldots, n\}$$

là sẽ được xem là một *phép đếm* tập hợp A.

Tập hợp rỗng có số phần tử là 0, và cũng được xem là tập hữu hạn. Số phần tử của một tập hợp hữu hạn A được ký hiệu là | A |.

Nếu tập hợp A không hữu hạn, ta nói A là một tập *vô hạn* và viết

$$| A | = \infty$$

Ghi chú: Để khái quát hóa khái niệm *số phần tử* đối với các tập hợp t□y ý và so sánh lực lượng của các tập hợp người ta đưa ra định nghĩa về quan hệ *đồng lực lượng*, và các quan hệ so sánh lực lượng khác dựa vào khái niệm ánh xạ. Chẳng hạn, hai tập hợp A và B được nói là đồng lực lượng khi tồn tại một song ánh f từ A vào B.

Tính chất:

Cho A và B là các tập hợp hữu hạn. Giả sử tồn tại đơn ánh từ A vào B. Khi ấy ta có:

$| A | \le | B |$.

3.2.2. Nguyên lý cộng

Cơ sở của nguyên lý cộng là mối liên hệ giữa số phần tử của một tập hợp với số phần tử của các tập hợp con tạo thành phân hoạch của tập hợp đã cho, được phát biểu trong mệnh đề sau đây:

Mệnh đề: Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là $A \cap B = \varnothing$. Khi ấy ta có:

$| A \cup B | = | A | + | B |$

Một cách tổng quát: Nếu A_1, A_2, ..., An là các tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là phần giao của hai tập hợp bất kỳ trong n tập hợp là rỗng, thì số phần tử của phần hội của các tập hợp trên bằng tổng của các số lượng phần tử trong mỗi tập hợp:

$$| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup An | = | A_1 | + | A_2 | + \ldots + | An |$$

Để chứng minh mệnh đề trên cho trường hợp 2 tập hợp A và B ta có thể gọi m là số phần tử của tập hợp A và n là số phần tử của tập hợp B. Sau đó, từ việc giả sử có các song ánh

$f : A \to \{ 1, 2, \ldots, m\}$ và

$g : B \to \{ 1, 2, \ldots, n\}$,

ta có thể lập dễ dàng một song ánh

$h : A \cup B \to \{ 1, 2, \ldots, m+n\}$

để đi đến kết luận $| A \cup B | = m+n$.

Trong trường hợp tổng quát ta có thể sử dụng nguyên lý qui nạp, với bước cơ sở là việc chứng minh cho trương hợp 2 tập hợp vừa trình bày ở trên.

Ghi chú: Trong trường hợp đối với hai tập hợp hữu hạn A và B t□y ý thì ta có:

$$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$$

Tính chất nầy có thể mở rộng cho trường hợp đối với n tập hợp t□y ý $A_1, A_2, ..., An$ như sau:

$$| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup An | = \Sigma_{1\le r\le n} | Ar | - \Sigma_{1\le r< s\le n} | Ar \cap As |$$

$$+ \Sigma_{1\le r< s< t \le n} | Ar \cap As \cap At | - \ldots + (-1)^n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap An |$$

Nguyên lý cộng : Giả sử ta phải thực hiện công việc và để thực hiện công việc nầy ta có thể chọn một trong hai biện pháp khác nhau theo nghĩa là cách thực hiện biện pháp thứ nhất luôn luôn khác cách thực hiện biện pháp thứ hai. Biện pháp thứ nhất có n cách thực hiện, và đối với biện pháp thứ hai ta có m cách thực hiện. Vậy ta có n+m cách thực hiện công việc.

- Ví dụ 1: Chúng ta cần chọn một sinh viên toán năm thứ 3 hay năm thứ 4 đi dự một hội nghị. Hỏi có bao nhiêu cách chọn lựa một sinh viên như thế biết rằng có 100 sinh viên toán học năm thứ 3 và 85 sinh viên toán học năm thứ tư ?

Lời giải : Ta có thể thực hiện một trong 2 việc chọn lựa khác nhau: chọn một sinh viên toán năm 3, hoặc chọn một sinh viên toán năm 4. Để thực hiện công việc thứ nhất ta có 100 cách, và để thực hiện công việc thứ 2 ta có 85 cách. Vậy để chọn một sinh viên toán theo yêu cầu ta có 100+85 = 185 cách.

Chúng ta có thể mở rộng nguyên lý cộng cho trường hợp nhiều sự chọn lựa hơn như sau: Giả sử ta phải thực hiện một công việc bằng cách chọn một trong m sự chọn lựa các biện pháp khác nhau $T_1, T_2, ..., Tm$. Để thực hiện Ti, $1 \le i \le m$, ta có ni cách. Vậy ta số cách thực hiện công việc trên là $n_1 + n_2 + ... + nm$. Nguyên lý cộng dạng tổng quát nầy có thể được chứng minh bằng qui nạp.

- Ví dụ 2: Một sinh viên có thể chọn một đề tài từ một trong 3 danh sách các đề tài. Số đề tài trong các danh sách đề tài lần lượt là 23, 15, 19. Hỏi sinh viên có bao nhiêu cách chọn một đề tài.

Lời giải: Sinh viên có thể chọn một đề tài trong danh sách thứ thứ nhất theo 23 cách, trong danh sách thứ hai theo 15 cách, và trong danh sách thứ ba theo 19 cách. Do đó số cách chọn đề tài là 23+15+19 = 57.

- Ví dụ 3: Xác định giá trị của k sau khi đoạn chương trình sau đây được thực hiện xong

k := 0

for i_1 := 1 **to** n_1 do

k := k + 1;

for i_2 := 1 **to** n_2 do

k := k + 1;

.

.

.

for im := 1 **to** nm do

k := k + 1;

Lời giải. Giá trị của k ban đầu là 0. Sau đó là m vòng lặp khác nhau. Mỗi thao tác lặp trong một vòng lặp là cộng thêm 1 vào k. Vòng lặp thứ i có ni thao tác, và tất cả m vòng lặp không thể thực hiện 2 vòng lặp nào một cách đồng thời. Do đó số thao tác để thực hiện xong đoạn chương trình trên là $n_1 + n_2 + ... + nm$. Đây cũng chính là giá trị cuối c□ng của k.

3.2.3. Nguyên lý nhân

Cơ sở của nguyên lý nhân là mối liên hệ giữa số phần tử của một tập hợp tích Descartes với số phần tử của các tập hợp thành phần tạo nên tập hợp tích, được phát biểu trong mệnh đề sau đây:

Mệnh đề: Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau. Khi ấy ta có:

$| A \times B | = | A | . | B |$

Một cách tổng quát: Nếu $A_1, A_2, ..., An$ là các tập hợp hữu hạn thì số phần tử của tích Descartes của các tập hợp trên bằng tích của các số lượng phần tử của các tập hợp trên:

$| A_1 \times A_2 \times . . . \times An | = | A_1 | . | A_2 | . . . . . | An |$

Để chứng minh mệnh đề trên cho trường hợp 2 tập hợp A và B ta có thể gọi m là số phần tử của tập hợp A và n là số phần tử của tập hợp B. Sau đó, từ việc giả sử có các song ánh

$f : A \to \{ 1, 2, . . ., m\}$ và

$g : B \to \{ 1, 2, . . ., n\}$,

ta có thể lập dễ dàng một song ánh

$h : A \times B \to \{ 1, 2, . . ., mn\}$

để đi đến kết luận $| A \times B | = mn$.

Trong trường hợp tổng quát ta có thể sử dụng nguyên lý qui nạp, với bước cơ sở là việc chứng minh cho trương hợp 2 tập hợp vừa trình bày ở trên.

Nguyên lý nhân : Giả sử ta phải thực hiện một thủ tục bao gồm hai công việc kế tiếp nhau. Để thực hiện công việc thứ nhất ta có n_1 cách, và ứng với mỗi cách chọn thực hiện công việc thứ nhất ta có n_2 cách thực hiện công việc thứ hai. Vậy ta có số cách thực hiện thủ tục là $n_1 \times n_2$.

Nguyên lý nhân trên có thể được mở rộng và có dạng tổng quát như sau: Giả sử một thủ tục bao gồm m công việc kế tiếp nhau T_1, T_2, . . ., Tm. Nếu công việc T_1 có thể được thực hiện theo n_1 cách, và sau khi chọn cách thực hiện cho T_1 ta có n_2 cách thực hiện T_2, v.v… cho đến cuối c□ng, sau khi chọn cách thực hiện các công việc T_1, T_2, . . ., Tm_{-1} ta có nm cách thực hiện Tm. Vậy ta có $n_1.n_2$. ... .nm cách để thực hiện thủ tục. Nguyên lý nhân ở dạng tổng quát nầy có thể được chứng minh bằng qui nạp từ qui tắc nhân cho trường hợp thủ tục gồm 2 công việc.

Ví dụ 1: Các ghế ngồi trong một hội trường sẽ được ghi nhãn gồm một mẫu tự và một số nguyên dương không lớn hơn 100. Hỏi số ghế tối đa có thể được ghi nhãn khác nhau là bao nhiêu?

Lời giải. Thủ tục ghi nhãn cho một ghế gồm 2 việc : ghi một trong 26 mẫu tự và kế tiếp là ghi một trong 100 số nguyên dương. Qui tắc nhân cho thấy có 26 x 100 = 2600 cách khác nhau để ghi nhãn cho một ghế ngồi. Do đó số ghế lớn nhất có thể được ghi nhãn khác nhau là 2600.

Ví dụ 2: Giả sử ta phải đi từ một địa điểm A đến một địa điểm C, ngang qua một địa điểm B. Để đi từ A đến B ta có 8 cách đi khác nhau, và có 6 cách đi từ B đến C. Hỏi có bao nhiêu cách để đi từ A đến C ?

Lời giải. Một cách đi từ A đến C gồm 2 việc: đi từ A đến B, rồi đi từ B đến C. Việc thứ nhất (đi từ A đến B) có 8 cách thực hiện, việc thứ hai có 6 cách thực hiện. vậy, theo nguyên lý nhân, số cách đi từ A đến C là 8 x 6 = 48.

Ví dụ 3: Hỏi có bao nhiêu chuỗi bit khác nhau có độ dài 8 (tức là gồm 8 bits) ?

Lời giải. Mỗi bit có thể được chọn theo 2 cách, vì mỗi bit là 0 hoặc 1. Do đó, qui tắc nhân cho phép ta kết luận rằng có $2^8 = 256$ chuỗi bit có độ dài 8.

Ví dụ 4: Một mã bao gồm 6 ký tự, trong đó gồm 3 mẫu tự rồi đến 3 ký số thập phân. Hỏi có bao nhiêu mã khác nhau?

Lời giải. Có 26 cách chọn cho mỗi mẫu tự và có 10 cách chọn cho mỗi ký số thập phân. Do đó, theo qui tắc nhân, có tất cả 26.26.26.10.10.10 = 17 576 000 mã khác nhau.

Ví dụ 5: Có bao nhiêu ánh xạ đi từ một tập hợp gồm m phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử ?

Lời giải. Một ánh xạ đi từ tập A gồm m phần tử vào một tập hợp B gồm n phần tử tương ứng với việc chọn lựa một trong n phần tử của B cho mỗi phần tử của A. Do đó, theo qui tắc nhân, có n.n. ... .n = nm ánh xạ từ A vào B.

Ví dụ 6: Có bao nhiêu đơn ánh đi từ một tập hợp gồm m phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử ?

Lời giải. Trước hết ta nhận xét rằng khi m > n thì không có một đơn ánh nào đi từ một tập hợp gồm m phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử. Vậy, cho m ≤ n. Giả sử các phần tử trong miền xác định của ánh xạ là a_1, a_2, . . ., am. Có n cách chọn ảnh qua ánh xạ cho phần tử a_1. Vì ánh xạ là đơn ánh nên đối với phần tử a_2 ta chỉ có n-1 cách chọn ảnh tương ứng (do giá trị ảnh được chọn cho a_1 không thể được chọn lại cho a_2). Tổng quát, giá trị ảnh của phần tử ak chỉ có thể được chọn theo n-k+1 cách. Theo qui tắc nhân, có n.(n-1). ... .(n-m+1) đơn ánh đi từ một tập hợp gồm m phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử.

Ví dụ 7: Phương án đánh số điện thoại.

Giả sử một số điện thoại gồm 10 ký số được chia thành 3 nhóm: 2 nhóm gồm 3 ký số và một nhóm 4 ký số. Do một số lý do nào đó, có một số hạn chế trên các ký số của số điện thoại. Để xác định dạng hợp lệ của một số điện thoại. ta dùng ký hiệu X để chỉ một ký số có thể lấy giá trị từ 0 đến 9, N để chỉ một ký số từ 2 đến 9, và Y chỉ một ký số là 0 hoặc 1. Chúng ta có 2 phương án để đánh số điện thoại : một phương án cũ và một phương án mới. Theo phương án cũ, số điện thoại có dạng NYX NNX XXXX; và theo phương án mới thì số điện thoại có dạng NXX NXX XXXX. Hỏi số lượng số điện thoại khác nhau của mỗi phương án là bao nhiêu?

Lời giải. Do qui tắc nhân, đối với phương án đánh số điện thoại cũ, số trường hợp khác nhau của mỗi nhóm ký số trong 3 nhóm lần lượt là : 8.2.10 = 160 (ứng với dạng NYX), 8.8.10 = 640 (ứng với dạng NNX), và 10.10.10.10 = 10000 (ứng với dạng XXXX). Vậy, trong phương án đánh số điện thoại cũ, số lượng số điện thoại là 160. 640.10000 = 1 024 000 000.

Tương tự Số lượng số điện thoại trong phương án đánh số mới là :

(8.10.10).(8.10.10).(10.10.10.10) = 800.800.10000 = 6 400 000 000.

Ví dụ 8: Cũng theo qui tắc nhân ta thấy rằng sau khi thực hiện đoạn chương trình dưới đây thì giá trị của biến k sẽ là n_1.n_2. ... .nm.

k := 0
for i_1 = 1 **to** n_1 do
for i_1 = 1 **to** n_2 do
.
.
.
for i_1 = 1 **to** nm do
k := k + 1

Ví dụ 9: Sử dụng qui tắc nhân để chứng minh rằng một tập hợp S hữu hạn có tất cả $2^{|S|}$ tập hợp con khác nhau.

Lời giải. Cho S là một tập hợp hữu hạn, |S| = n. Liệt kê các phần tử của S theo một thứ tự bất kỳ. Ta có thể thấy rằng có sự tương ứng một-một trên (song ánh) giữa các tập hợp con của S và tập hợp các chuỗi bit gồm n bits. Một tập con của S được cho tương ứng với một chuỗi bits có bit thứ i là 1 nếu phần tử thứ i trong danh sách liệt kê thuộc tập hợp con, và bit thứ i là 0 trong trường hợp ngược lại. Bởi qui tắc nhân, có 2^n chuỗi bit gồm n bits. Do đó, S có 2^n tập hợp con.

Dưới đây chúng ta sẽ xem xét một số bài toán về phép đếm phức tạp hơn. Nó đòi hỏi chúng ta phải sử dụng cả nguyên lý cộng lẫn nguyên lý nhân.

Ví dụ 10: Trong một version của ngôn ngữ BASIC tên của một biến là một chuỗi gồm 1 hoặc 2 ký tự, mỗi ký tự là mẫu tự hoặc ký số thập lục phân và không phân biệt giữa chữ in hoa và chữ thường. Hơn nữa, một tên biến phải bắt đầu bởi một mẫu tự và tên biến phải khác với 5 chuỗi gồm 2 ký tự đã được dành riêng cho ngôn ngữ. Hỏi có bao nhiêu tên biến khác nhau trong version nầy của BASIC.

Lời giải. Đặt V là số tên biến khác nhau trong version nầy của BASIC, V_1 là số biến gồm một ký tự, và V_2 là số biến gồm hai ký tự. Theo qui tắc cộng ta có

$V = V_1 + V_2$. Vì biến gồm một ký tự phải là một mẫu tự nên $V_1 = 26$. Ngoài ra, theo qui tắc nhân ta có 26.36 chuỗi có độ dài 2 với ký tự đi đầu là mẫu tự và ký tự kế là mẫu tự hoặc ký số thập phân. Tuy nhiên, có 5 chuỗi bị loại ra nên

$V_2 = 26.36 - 5 = 931$. Vậy có $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ tên khác nhau cho các biến của version nầy của BASIC.

Ví dụ 11: Mỗi người sử dụng trên một hệ thống máy tính có một "password" dài từ 6 đến 8 ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ in hoa hoặc là một ký số thập phân. Mỗi "password" phải có ít nhất một ký số. Hỏi có bao nhiêu password khác nhau ?

Lời giải. Đặt P là số lượng tất cả các "password", và P_6, P_7, P_8 lần lượt là số các "password" có độ dài 6, 7, 8. Do qui tắc cộng ta có $P = P_6 + P_7 + P_8$. Chúng ta sẽ tính P_6, P_7, và P_8. Tính trực tiếp P_6 tương đối khó. Để tính P_6 cho dễ, ta tính số chuỗi có độ dài 6 gồm các chữ in hoa hay ký số thập phân, kể cả các chuỗi không có ký số thập phân, và trừ cho số chuỗi (với độ dài 6) không có ký số thập phân. Theo qui tắc nhân, số chuỗi gồm 6 ký tự là 36^6 và số chuỗi không có ký số là 26^6. Suy ra

$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\ 176\ 782\ 336 - 308\ 915\ 776$

$= 1\ 867\ 866\ 560$.

Tương tự, ta có thể tính ra được :

$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\ 364\ 164\ 096 - 8\ 031\ 810\ 176$

$= 70\ 332\ 353\ 920$.

và

$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\ 821\ 109\ 907\ 456 - 208\ 827\ 064\ 576$

$= 2\ 612\ 282\ 842\ 880$.

Từ đó ta tính được :

$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\ 684\ 483\ 063\ 360$.

3.2.4. Nguyên lý bù trừ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho A_1, A_2 là hai tập hữu hạn, khi đó

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Từ đó với ba tập hợp hữu hạn A_1, A_2, A_3, ta có:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$,

và bằng quy nạp, với k tập hữu hạn $A_1, A_2, ..., A_k$ ta có:

$| A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - ... + (-1)^{k-1}N_k$,

trong đó N_m $(1 \le m \le k)$ là tổng phần tử của tất cả các giao m tập lấy từ k tập đã cho, nghĩa là

$$N_m = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le k} | A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_m} |$$

Bây giờ ta đồng nhất tập A_m $(1 \le m \le k)$ với tính chất A_m cho trên tập vũ trụ hữu hạn U nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của U sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất A_m nào. Gọi $\overline{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của U. Ta có:

$\overline{N} = N - | A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = N - N_1 + N_2 - ... + (-1)^k N_k$,

trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho. Công thức này được gọi là **nguyên lý bù trừ**. Nó cho phép tính $\overline{N}$ qua các N_m trong trường hợp các số này dễ tính toán hơn.

Thí dụ 3: Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ.

Mỗi phong bì có n cách bỏ thư vào, nên có tất cả n! cách bỏ thư. Vấn đề còn lại là đếm số cách bỏ thư sao cho không lá thư nào đúng địa chỉ. Gọi U là tập hợp các cách bỏ thư và A_m là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ. Khi đó theo công thức về nguyên lý bù trừ ta có:

$\overline{N} = n! - N_1 + N_2 - ... + (-1)^n N_n$,

trong đó N_m $(1 \le m \le n)$ là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có m lá thư đúng địa chỉ. Nhận xét rằng, N_m là tổng theo mọi cách lấy m lá thư từ n lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có (n-m)! cách bỏ để m lá thư này đúng địa chỉ, ta nhận được:

$N_m = C_n^m (n - m)! = \dfrac{n!}{k!}$ và $\overline{N} = n!(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - ... + (-1)^n \dfrac{1}{n!})$, trong đó $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ là tổ hợp chập m của tập n phần tử (số cách chọn m đối tượng trong n đối tượng được cho). Từ đó xác suất cần tìm là: $1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - ... + (-1)^n \dfrac{1}{n!}$. Một điều lý thú là xác suất này dần đến e^{-1} (nghĩa là còn > $\dfrac{1}{3}$) khi n khá lớn.

Số $\overline{N}$ trong bài toán này được gọi là số mất thứ tự và được ký hiệu là D_n. Dưới đây là một vài giá trị của D_n, cho ta thấy D_n tăng nhanh như thế nào so với n:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_n	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961	14684570

3.2.5. Nguyên lý Dirichlet

3.2.5.1. Mở đầu

Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì ít nhất trong một ngăn có nhiều hơn một con chim. Nguyên lý này dĩ nhiên là có thể áp dụng cho các đối tượng không phải là chim bồ câu và chuồng chim.

Mệnh đề (Nguyên lý): Nếu có k+1 (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp có ít nhất hai đồ vật.

Chứng minh: Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều hơn một đồ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là bằng k. Điều này trái giả thiết là có ít nhất k + 1 vật.

Nguyên lý này thường được gọi là nguyên lý Dirichlet, mang tên nhà toán học người Đức ở thế kỷ 19. Ông thường xuyên sử dụng nguyên lý này trong công việc của mình.

Thí dụ 4: 1) Trong bất kỳ một nhóm 367 người thế nào cũng có ít nhất hai người có ngày sinh nhật giống nhau bởi vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau.

2) Trong kỳ thi học sinh giỏi, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau?

Theo nguyên lý Dirichlet, số học sinh cần tìm là 102, vì ta có 101 kết quả điểm thi khác nhau.

3) Trong số những người có mặt trên trái đất, phải tìm được hai người có hàm răng giống nhau. Nếu xem mỗi hàm răng gồm 32 cái như là một xâu nhị phân có chiều dài 32, trong đó răng còn ứng với bit 1 và răng mất ứng với bit 0, thì có tất cả 2^{32} = 4.294.967.296 hàm răng khác nhau. Trong khi đó số người trên hành tinh này là vượt quá 5 tỉ, nên theo nguyên lý Dirichlet ta có điều cần tìm.

3.2.5.2. Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Mệnh đề: Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất] N/k [đồ vật.

(Ở đây,] x [là giá trị của hàm trần tại số thực x, đó là số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x. Khái niệm này đối ngẫu với [x] – giá trị của hàm sàn hay hàm phần nguyên tại x – là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x.)

Chứng minh: Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn] N/k [vật. Khi đó tổng số đồ vật là

$\leq$ k ( ] $\frac{N}{k}$ [$-$ 1) < k $\frac{N}{k}$ $= N$.

Điều này mâu thuẩn với giả thiết là có N đồ vật cần xếp.

Thí dụ 5: 1) Trong 100 người, có ít nhất 9 người sinh c□ng một tháng.

Xếp những người sinh c□ng tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một nhóm có ít nhất] 100/12 [= 9 người.

2) Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người c□ng nhận học bổng như nhau.

Gọi N là số sinh viên, khi đó] N/5 [= 6 khi và chỉ khi 5 < N/5 ≤ 6 hay 25 < N ≤ 30. Vậy số N cần tìm là 26.

3) Số mã v□ng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng 0XX - 8XXXXX với X nhận các giá trị từ 0 đến 9).

Có 10^7 = 10.000.000 số điện thoại khác nhau có dạng 0XX - 8XXXXX. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có] 25.000.000/10.000.000 [= 3 có c□ng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã v□ng.

3.2.5.3. Một số ứng dụng của nguyên lý Dirichlet.

Trong nhiều ứng dụng thú vị của nguyên lý Dirichlet, khái niệm đồ vật và hộp cần phải được lựa chọn một cách khôn khéo. Trong phần nay có vài thí dụ như vậy.

Thí dụ 6: 1) Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến n – 1. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là n – 1 (tức là quen tất cả). Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành n –1 nhóm. Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tai một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau.

2) Trong một tháng gồm 30 ngày, một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất 1 trận nhưng chơi không quá 45 trận. Chứng minh rằng tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.

Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày j. Khi đó

$1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{30} < 45$

$15 \leq a_1+14 < a_2+14 < ... < a_{30}+14 < 59$.

Sáu mươi số nguyên a_1, a_2, ..., a_{30}, $a_1+ 14$, $a_2 + 14$, ..., $a_{30}+14$ nằm giữa 1 và 59. Do đó theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 60 số này bằng nhau. Vì vậy tồn tại i và j sao cho ai = aj + 14 (j < i). Điều này có nghĩa là từ ngày j + 1 đến hết ngày i đội đã chơi đúng 14 trận.

3) Chứng tỏ rằng trong n + 1 số nguyên dương không vượt quá 2n, tồn tại ít nhất một số chia hết cho số khác.

Ta viết mỗi số nguyên a_1, a_2,..., a_{n+1} dưới dạng $a_j = 2^{k_j} q_j$ trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số dương lẻ nhỏ hơn 2n. Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 2n nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại i và j sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i= 2^{k_i} q$ và $aj = 2^{k_j} q$. Vì vậy, nếu $k_i \leq k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại ta có a_i chia hết cho a_j.

Thí dụ cuối c□ng trình bày cách áp dụng nguyên lý Dirichlet vào lý thuyết tổ hợp mà vẫn quen gọi là lý thuyết Ramsey, tên của nhà toán học người Anh. Nói chung, lý thuyết Ramsey giải quyết những bài toán phân chia các tập con của một tập các phần tử.

Thí dụ 7. Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là th□. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ th□ lẫn nhau.

Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ th□ của A, điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát, vì $]5/2[= 3$. Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A. nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ c□ng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người th□ lẫn nhau. Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ th□ của A.

CHƯƠNG 4

QUAN HỆ

4.1. Quan hệ hai ngôi

4.1.1. Định nghĩa quan hệ và ví dụ

Giữa các phần tử trong một tập hợp nào đó mà chúng ta đang quan tâm thường có những mối liên hệ hay những quan hệ. Ví dụ: quan hệ lớn hơn giữa các số thực, quan hệ "anh em" giữa người với người, quan hệ đồng dạng giữa các tam giác, v.v.... Mỗi quan hệ trong một tập hợp được đặc trưng bằng một hay một số tiêu chuẩn nào đó thể hiện ngữ nghĩa của quan hệ. Ở đây chúng ta chỉ đề cập đến những quan hệ, được gọi là những quan hệ 2 ngôi, nói lên sự liên hệ giữa mỗi phần tử với các phần tử khác trong tập hợp. Khi ta đang xem xét một quan hệ như thế, thì với hai phần tử x, y t□y ý trong tập hợp chúng sẽ có : hoặc là x có quan hệ với y, hoặc là x không có quan hệ với y. Nói như vậy cũng có nghĩa là tập hợp các cặp (x, y) gồm 2 phần tử có quan hệ có thể xác định được quan hệ đang xét trên tập hợp. Về mặt toán học, một quan hệ 2 ngôi được định nghĩa như sau:

Định nghĩa :

Cho một tập hợp X khác rỗng. Một *quan hệ 2 ngôi* trên X là một tập hợp con R của X^2. Cho 2 phần tử x và y của X, ta nói x có quan hệ R với y khi và chỉ khi $(x,y) \in R$, và viết là x R y. Như vậy:

$$\mathbf{x\ R\ y \Leftrightarrow (x,y) \in R}$$

Khi x không có quan hệ R với y, ta viết: $x\ \overline{R}y$.

<u>Ví dụ</u>:

1. Trên tập hợp X = { 1,2,3,4} , xét quan hệ 2 ngôi R được định nghĩa bởi:

R = { (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)}

Với quan hệ nầy ta có: 2 R 4, nhưng $2\ \overline{R}3$.

2. Trên tập hợp các số nguyên **Z** ta định nghĩa một quan hệ 2 ngôi R như sau:

x R y nếu và chỉ nếu x-y là số chẳn.

hay nói cách khác:

$$R = \{\ (x,y) \in \mathbf{Z}^2 \mid x\text{-}y = 2k \text{ với } k \in \mathbf{Z}\ \}$$

Quan hệ R nầy chính là quan hệ đồng dư modulo 2.

3. Cho n là một số nguyên dương. Nhắc lại rằng quan hệ đồng dư modulo n trên tập hợp các số nguyên **Z**, ký hiệu bởi ≡ (mod n), được định nghĩa như sau:

$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{Z} : (a - b) = k.n$

Quan hệ nầy là một quan hệ 2 ngôi trên **Z**.

4. Quan hệ ≤ trên tập hợp các số thực **R** cũng là một quan hệ 2 ngôi.

5. Cho E là một tập hợp, đặt X = $\mathcal{P}$(E). Mỗi phần tử thuộc X là một tập hợp con của E. Trên E có các quan hệ quen thuộc sau đây:

- quan hệ bao hàm, ký hiệu bởi ⊂

- quan hệ chứa, ký hiệu bởi ⊃

- quan hệ bằng nhau, ký hiệu bởi =

Ghi chú :

- Người ta còn định nghĩa một quan hệ (2 ngôi) giữa một tập hợp A và một tập hợp B là một tập hợp con của AxB.

  Ví dụ: A = { 1, 2, 3, 4, 5} , B = { 0, 1} . Ta có R = { (1,1), (2,0), (3,1), (4,0), (5,0)} là một quan hệ giữa A và B.

- Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa một *quan hệ* giữa các tập hợp A_1, A_2, . . ., An là một tập hợp con của A_1 x A_2 x . . . x An (tích Descartes của các tập hợp A_1, A_2, . . ., An). Như vậy, khi R là một quan hệ giữa các tập A_1, A_2, . . ., An thì mỗi phần tử của R là ột bộ n (a_1, a_2, . . ., an) với ai ∈ Ai (i=1, …, n).

Cách xác định một quan hệ: Dựa vào các phương pháp xác định một tập hợp, ta có thể xác định một quan hệ bằng các phương pháp sau đây:

- Liệt kê: liệt kê tất cả các cặp hay bộ phần tử có quan hệ R (tức là thuộc R). Trong ví dụ 1 ở trên, quan hệ R được cho theo cách liệt kê.

- Nêu tính chất đặc trưng cho quan hệ R, tức là tính chất hay tiêu chuẩn để xác định các phần tử thuộc R hay không. Trong các ví dụ 2 và 3 ở trên, quan hệ R được cho bằng cách nêu lên tính chất xác định quan hệ.

4.1.2. Các tính chất của quan hệ

Một quan hệ 2 ngôi trên một tập hợp có thể có một số tính chất nào đó làm cho tập hợp có một cấu trúc nhất định. Dưới đây là định nghĩa một số tính chất thường được xét đối với một quan hệ 2 ngôi.

Định nghĩa : Giả sử R là một quan hệ 2 ngôi trên một tập hợp X.

- Ta nói quan hệ R có tính *phản xạ* (reflexive) nếu và chỉ nếu x R x với mọi x ∈ X.

- Ta nói quan hệ R có tính *đối xứng* (symmetric) nếu và chỉ nếu

x R y ⇒ y R x với mọi x,y ∈ X.

- Ta nói quan hệ R có tính *phản xứng* (antisymmetric) nếu và chỉ nếu

(x R y và y R x) ⇒ x = y với mọi x,y ∈ X.

- Ta nói quan hệ R có tính *truyền* hay *bắc cầu* (transitive) nếu và chỉ nếu

(x R y và y R z) ⇒ x R z với mọi x,y,z ∈ X.

Ví dụ: Trong ví dụ nầy chúng ta đề cập đến một số quan hệ đã được nêu lên trong các ví dụ của mục 1.1 ở trên, và phát biểu các tính chất của chúng. Việc kiểm chứng các tính chất nầy khá dễ dàng.

1. Quan hệ đồng dư modulo n trên **Z** có 3 tính chất: phản xạ, đối xứng, truyền.

2. Quan hệ ≤ trên tập hợp các số thực có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng, truyền.

3. Cho E là một tập hợp. Quan hệ ⊆ trên P(E) có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng, truyền.

4.1.3. Biểu diễn quan hệ

Ngoài phương pháp biểu diễn một quan hệ 2 ngôi dưới dạng tập hợp các cặp phần tử người ta còn có thể sử dụng ma trận để biểu diễn cho quan hệ trong trường hợp các tập hợp là hữu hạn. Khái niệm ma trận sẽ được định nghĩa và khảo sát chi tiết hơn trong phần "Đại số Tuyến tính". Ở đây chúng ta chỉ cần hiểu ma trận một cách đơn giản là một bảng liệt kê các phần tử thành các dòng và các cột. Ví dụ, bảng liệt kê 6 số nguyên thành 2 dòng và 3 cột sau đây là một ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Một ma trận M gồm m dòng, n cột sẽ được gọi là một ma trận có cấp mxn. Nếu m = n thì ta nói M là một ma trận vuông cấp n.

Giả sử R là một quan hệ 2 ngôi giữa một tập hợp hữu hạn A = { a1, a2, ... , am } và một tập hữu hạn B = {b1, b2, ... , bm} . Quan hệ R có thể được biểu diễn bởi ma trận MR = [mij] gồm m dòng và n cột (tức là ma trận cấp mxn), trong đó

mij = 1 nếu (ai , bj) ∈ R

mij = 0 nếu (ai , bj) ∉ R

Ta gọi ma trận MR là *ma trận biểu diễn* của quan hệ R.

Ví dụ: Với A = { 1,2,3} và B = { a, b, c} , thì các quan hệ sau đây:

R = { (1,a), (1,b), (1,c)}

S = { (1,a), (1,b), (1,c), (2,b), (2,c), (3,c)}

có các ma trận biểu diễn là

$$MR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trong trường hợp R là một quan hệ 2 ngôi trên một tập X hữu hạn và có n phần tử thì ma trận biểu diễn của R là một ma trận có n dòng và n cột (tức là ma trận vuông cấp n).

***Ghi chú:** Ngoài cách biểu diễn quan hệ dưới dạng ma trận ta còn biểu đồ (dạng đồ thị) để biểu diễn quan hệ. Cách biểu diễn nầy sẽ được xét đến trong phần sau, khi nói về biểu đồ Hasse của một cấu trúc thứ tự.

4.2. Quan hệ tương đương

4.2.1. Khái niệm quan hệ tương đương

Định nghĩa:

Một quan hệ 2 ngôi R trên một tập hợp X được gọi là một *quan hệ tương đương* nếu và chỉ nếu nó thỏa 3 tính chất: phản xạ, đối xứng, truyền.

Ví dụ:

Một ví dụ quan trọng về quan hệ tương đương là quan hệ đồng dư modulo n trên **Z**. Ta đã biết quan hệ nầy có 3 tính chất phản xạ, đối xứng, truyền.

Quan hệ ≤ trên **Z** không phải là một quan hệ tương đương vì nó không có tính chất đối xứng.

4.2.2. Lớp tương đương và tập hợp tương đương

Định nghĩa:

Với mỗi phần tử $x \in X$, ta định nghĩa *lớp tương đương* chứa x, ký hiệu $\overline{x}$, là tập hợp tất cả những phần tử (thuộc x) có quan hệ R với x:

$\overline{x} = \{ y \in X : y R x \}$

Như vậy mỗi lớp tương đương là một tập hợp con của X. Người ta đã chứng minh rằng tập hợp các lớp tương đương của quan hệ tương đương R trên X tạo thành một "phân hoạch" của tập hợp X, tức là sưu tập các lớp tương đương khác nhau cho ta một họ các tập con của X rời nhau đôi một và có phần hội bằng X.

Tập hợp các lớp tương đương của quan hệ tương đương R trên Xnầy (là một tập con của P(X)) được gọi là *tập hợp thương* (của quan hệ tương đương R trên X). Quan hệ đồng dư modulo n trên **Z** có tập hợp thương tương ứng, được ký hiệu là **Zn**, gồm n phần tử :

Zn = $\{ \overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1} \}$

trong đó $\overline{k}$ ($k \in$ **Z**) là tập hợp tất cả những số nguyên đồng dư với k modulo n.

Người ta còn chứng minh được rằng việc xác định một quan hệ tương đương trên một tập hợp X tương đương với việc xác định một phân hoạch của tập hợp X, tức là có một song ánh giữa tập hợp tất cả các quan hệ tương đương trên X và tập hợp tất cả các phân hoạch của tập X.

4.3. Quan hệ thứ tự

4.3.1. Các định nghĩa

Đinh nghĩa 1:

Một quan hệ 2 ngôi R trên một tập hợp X (khác rỗng) được gọi là một *quan hệ thứ tự* (hay vắn tắt, là một thứ tự) nếu và chỉ nếu nó có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng, truyền. Khi đó ta cũng nói tập hợp X là một tập có thứ tự. Nếu có thêm tính chất: với mọi x, y $\in$ X ta có xRy hay yRx thì ta nói R là một *quan hệ thứ tự toàn phần* trên X.

Ghi chú :

Trong trường hợp trên X có nhiều quan hệ thứ tự thì khi xét đến thứ tự trên X ta phải nói rõ thứ tự nào, và ta thường viết tập hợp X có thứ tự dưới dạng một cặp (X,R); trong đó R là quan hệ thứ tự đang xét trên X.

Với 2 tập hợp có thứ tự X và Y ta có thể định ra một thứ tự trên tích Descartes XxY dựa vào các thứ tự trên X và trên Y. Từ đó ta XxY trở thành một tập hợp thứ tự (xem phần bài tập).

Ví dụ:

1. Quan hệ $\leq$ trên tập hợp các số thực **R** là một quan hệ thứ tự toàn phần.

2. Cho E là một tập hợp. Quan hệ $\subset$ trên P(E) là một quan hệ thứ tự. Nếu E có nhiều hơn 2 phần tử thì thứ tự nầy không phải là thứ tự toàn phần. Việc kiểm chứng điều nầy được dành cho người đọc.

3. Trên tập hợp các số nguyên **Z**, xét qna hệ "chia hết" hay "ước số của", ký hiệu là $|$, được định nghĩa như sau:

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{Z} : a = k.b$$

Dễ dàng kiểm chứng rằng quan hệ $\mid$ có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng, truyền. Từ đó ta có $(\mathbf{Z}, \mid)$ là một tập hợp có thứ tự.

Ta có 2 số nguyên 2 và 3, không có quan hệ với nhau theo quan hệ $\mid$. Do đó $\mid$ không phải là thứ tự toàn phần trên **Z**.

Nhận xét: Nếu (X,R) là một tập hợp có thứ tự và $A \subset X$ thì quan hệ thứ R thu hẹp trên tập A, cũng được ký hiệu là R (nếu không gây ra nhầm lẫn), là một quan hệ thứ tự trên A. Nói một cách khác, ta có:

(X,R) thứ tự và $A \subset X \Rightarrow$ (A,R) thứ tự

Đối với một tập hợp có thứ tự thì việc đề cập đến các khái niệm như "phần tử nhỏ nhất", "phần tử lớn nhất", ... là điều rất tự nhiên. Dưới đây, chúng ta sẽ giới thiệu một số khái niệm quan trọng khi xét một tập hợp có thứ tự.

Định nghĩa 2: Cho $(X, \leq)$ là một tập hợp có thứ tự, và $A \subset X$.

Ta gọi một phần tử $a \in A$ là một *phần tử nhỏ nhất* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi $x \in A$ ta có : $a \leq x$.

Ta gọi một phần tử $a \in A$ là một *phần tử lớn nhất* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi $x \in A$ ta có : $x \leq a$.

Ta gọi một phần tử $a \in A$ là một *phần tử tối tiểu* của tập hợp A nếu và chỉ nếu không tồn tại $x \in A$ sao cho $x \neq a$ và $x \leq a$.

Ta gọi một phần tử $a \in A$ là một *phần tử tối đại* của tập hợp A nếu và chỉ nếu không tồn tại $x \in A$ sao cho $x \neq a$ và $a \leq x$.

9; Nhận xét:

(1) Phần tử nhỏ nhất (lớn nhất) của một tập hợp, nếu có, là duy nhất.Ta ký hiệu phần tử nhỏ nhất của một tập hợp A là min A hay min (A), và ký hiệu phần tử lớn nhất của A là max A hay max (A).

(2) Phần tử tối tiểu (tối đại) của một tập hợp có thứ tự không nhất thiết là duy nhất. Ví dụ: xét tập hợp $X = \{1,2,3\}$ với quan hệ 2 ngôi ρ được cho bởi $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (3,2)\}$. Chúng ta có thể kiểm chứng rằng (X, ρ) là một tập hợp có thứ tự. Với thứ tự ρ nầy, X có 2 phần tử tối tiểu là 1 và 3.

(3) Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của một tập hợp, nếu có, là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất của tập hợp đó.

<u>Ví dụ</u>:

1. Trong tập hợp có thứ tự (**Z**, ≤), tập hợp A = { m∈ **Z**| $m^2 < 100$} có phần tử nhỏ nhất là -9, và phần tử lớn nhất là 9. Ta có thể viết: min(A) = -9; max(A) = 9.

2. Trong tập hợp có thứ tự (**R**, ≤), tập hợp A = { x∈ **R**| $x^2 < 100$} không có phần tử nhỏ nhất và cũng không có phần tử lớn nhất.

3. Cho E là một tập hợp. Ta đã biết (P(E), ⊂) là một tập hợp có thứ tự. Với thứ tự nầy P(E) có phần tử nhỏ nhất là ∅ , phần tử lớn nhất là E.

Định nghĩa 3: Cho (X, ≤) là một tập hợp có thứ tự, và A ⊂ X.

Ta gọi một phần tử x ∈ X là một *chận dưới* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi a ∈ A ta có : x ≤ a. *Chận dưới lớn nhất* (nếu có), tức là phần tử lớn nhất trong tập hợp tất cả những chận dưới của A được ký hiệu là **inf (A)**.

Ta gọi *một* phần tử x ∈ X là một *chận trên* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi a ∈ A ta có : a ≤ x. *Chận trên nhỏ nhất* (nếu có), tức là phần tử nhỏ nhất trong tập hợp tất cả những chận trên, của A được ký hiệu là **sup (A)**.

Ví dụ: Trong (**R**, ≤), A = { x∈ **R**| $x^2 < 100$} . Ta có sup(A) = 10 và inf(A) = -10.

Nhận xét : Nếu trong một tập hợp A tồn tại phần tử max(A) thì đó cũng chính là sup(A). Tương tự, nếu trong một tập hợp A tồn tại phần tử min(A) thì đó cũng chính là inf(A).

Định nghĩa 4: (Thứ tự tốt)

Một tập hợp có thứ tự được gọi là có *thứ tự tốt* (hay được sắp tốt) nếu và chỉ nếu mọi tập con khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

Ví dụ:

1. Tập hợp có thứ tự (**N**, ≤) là một tập hợp được sắp tốt.

2. Tập hợp có thứ tự (**Z**, ≤) không phải là một tập hợp được sắp tốt vì **Z** không có phần tử nhỏ nhất.

4.3.2. Biểu diễn quan hệ thứ tự

Giả sử R là một quan hệ 2 ngôi giữa một tập hợp hữu hạn A = { a1, a2, ... , am } và một tập hữu hạn B = {b1, b2, ... , bm} . Quan hệ R có thể được biểu diễn bởi ma trận MR = [mij] gồm m dòng và n cột (tức là ma trận cấp mxn), trong đó

mij = 1 nếu (ai , bj) ∈ R

mij = 0 nếu (ai , bj) ∉ R

Ta gọi ma trận MR là *ma trận biểu diễn* của quan hệ R.

Ví dụ: Với A = { 1,2,3} và B = { a, b, c} , thì các quan hệ sau đây:

R = { (1,a), (1,b), (1,c)}

S = { (1,a), (1,b), (1,c), (2,b), (2,c), (3,c)}

có các ma trận biểu diễn là

$$MR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trong trường hợp R là một quan hệ 2 ngôi trên một tập X hữu hạn và có n phần tử thì ma trận biểu diễn của R là một ma trận có n dòng và n cột (tức là ma trận vuông cấp n).

✱**Ghi chú:** Ngoài cách biểu diễn quan hệ dưới dạng ma trận ta còn biểu đồ (dạng đồ thị) để biểu diễn quan hệ. Cách biểu diễn nầy sẽ được xét đến trong phần sau, khi nói về biểu đồ Hasse của một cấu trúc thứ tự.

4.3.3. Tập hữu hạn có thứ tự

4.3.4. Sắp xếp topo

Sắp xếp topo là một vấn đề quan trọng trong *việc* khảo sát các cấu trúc thứ tự hữu hạn và phương pháp sắp xếp topo thường được sử dụng để giải nhiều bài toán thực tế. Chúng ta thử xem bài toán đặt ra như sau:

Giả sử có một đề tài gồm 20 công việc khác nhau. Một số công việc chỉ có thể được thực hiện sau khi một số công việc khác được thực hiện hoàn tất. Chúng ta phải thực hiện các công việc theo thứ tự nào? Để mô hình cho vấn đề, chúng ta đặt X là tập hợp 20 công việc của đề tài; trên X ta xét một thứ tự (hay quan hệ thứ tự) ≤ sao cho a ≤ b nếu và chỉ nếu a và b là 2 công việc trong đó công việc b chỉ có thể được bắt đầu khi công việc a đã được hoàn thành. Muốn có một kế hoạch thực hiện các công việc cho đề tài chúng ta phải tìm ra một thứ tự cho tất cả 20 công việc "tương thích" với thứ tự ≤ nêu trên.

Trước hết chúng ta nêu ra định nghĩa khái niệm “tương thích" như sau:

Định nghĩa:

Cho (X,ρ) là một tập hợp có thứ tự. Một thứ tự toàn phần ≤ trên X được gọi là tương thích với thứ tự ρ nếu và chỉ nếu

$a \,\rho\, b \Rightarrow a \le b$, với mọi $a,b \in X$.

Việc xây dựng thứ tự toàn phần tương thích với một thứ tự cho trước được gọi là **sắp xếp topo** (**topological sorting**).

Thuật toán sắp xếp topo cho một tập hợp hữu hạn có thứ tự dựa vào kết quả nêu trong các định lý trên. Để định nghĩa một thứ tự toàn phần trên (X, ρ), trước hết ta chọn ra một phần tử tối tiểu a_1 của X; phần tử nầy tồn tại do định lý 1. Kế đó, chú ý rằng Nếu tập hợp X - { a_1} ≠ ∅ thì (X - { a_1} , ρ) cũng là một tập hợp hữu hạn (khác rỗng) có thứ tự. Ta lại chọn ra phần tử tối tiểu a_2 trong X - { a_1} , rồi loại a_2 khỏi việc xem xét ở bước tiếp theo để chọn phần tử tối tiểu trong X - { a_1, a_2} nếu tập hợp X - { a_1, a_2} khác rỗng. Tiếp tục quá trình nầy bằng cách chọn phần tử tối tiểu ak_{+1} trong X - { a_1, a_2, ... , ak} khi tập hợp còn phần tử.

Vì X là một tập hợp hữu hạn nên quá trình chọn trên phải dừng. Cuối c□ng ta đã sắp các phần tử của tập hợp X thành một dãy a_1, a_2, ... , an thỏa điều kiện : với mọi i, j sao cho i < j ta có ai ρ aj hoặc ai và aj không có quan hệ trong thứ tự ρ . Như vậy chọn thứ tự toàn phần ≤ trên X được xác định bởi dây chuyền

$a_1 \leq a_2 \leq . . . \leq an$

thì ta được một thứ tự toàn phần trên X tương thích với thứ tự ρ . Thuật toán sắp xếp topo có thể được viết dưới dạng mã giả như sau:

Thuật toán 2. Sắp xếp topo (topological sorting)

Nhập : (X,ρ) là một cấu trúc thứ tự hữu hạn.

Xuất : Dãy S = { a_1, a_2, ... , an} là một sự sắp xếp topo của (X,ρ).

Thuật toán :

1. k := 1

2. S := ∅

3. while X ≠ ∅ do

begin

a_k := một phần tử tối tiểu của X

(xem định lý 1 và thuật toán 1)

S := S ∪ { a_k }

X := X - { a_k }

k := k +1

end

4. Xuất S

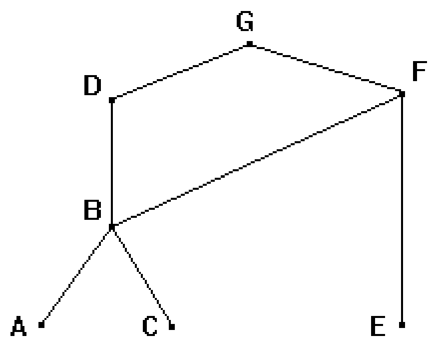
Ví dụ:

Tìm một thứ tự toàn phần tương thích với tập hợp có thứ tự ({ 1,5,2,4,12,20} , |).

Đầu tiên ta chọn một phần tử tối tiểu. Phần tử nầy phải là 1 vì đó là phần tử tối tiểu duy nhất (hay phần tử nhỏ nhất). Kế đó ta chọn phần tử tối tiểu của ({ 5,2,4,20,12} , |). Có 2 phần tử tối tiểu trong tập hợp có thứ tự nầy là 2 và 5. Ta chọn 5. Những phần tử còn lại là { 2,4,20,12} . Trong tập hợp nầy ta chọn một phần tử tối tiểu, ví dụ là 2. Tiếp tục quá trình nầy ta lần lượt chọn ra được các phần tử 4, 20, và 12. Cuối c□ng ta được một thứ tự toàn phần cho bởi:

$1 \le 5 \le 2 \le 4 \le 20 \le 12$.

Giả sử có một đề tài ở một công ty máy tính đòi hỏi phải hoàn thành 7 công việc A, B, C, D, E, F, G. Một số công việc chỉ có thể bắt đầu sau khi đã hoàn thành một số công việc khác. Nói một c ách khác, có một thứ tự ρ được định ra trên tập hợp các công việc như sau : (công việc X) ρ (công việc Y) nếu và chỉ nếu công việc Y chỉ có thể bắt đầu khi công việc X đã được thực hiện hoàn tất. Biểu đồ Hasse cho 7 công việc ứng với thứ tự nầy là :



Hãy tìm một thứ tự thực hiện cho 7 công việc để có thể hoàn thành đề tài.

Giải: Áp dụng phương pháp sắp xếp topo ta đạt được một thứ tự có thể thực hiện cho các công việc là : $A \le C \le B \le D \le E \le F \le G$.

4.4. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Định nghĩa 1:

Cho (L, $\leq$) là một tập hợp có thứ tự. Ta nói (L, $\leq$) là một *dàn* nếu và chỉ nếu với mọi a, b $\in$ L, tập hợp { a,b} có chặn dưới lớn nhất và có chặn trên nhỏ nhất; tức là tồn tại sup(a,b) và inf(a,b). Ta sẽ dùng ký hiệu aVb và aΛ b để chỉ sup(a,b) và inf(a,b) :

a V b = sup(a,b)

a Λ b = inf(a,b)

✱**Nhận xét:**

- 1. Tập hợp có thứ tự toàn phần là một dàn, với a V b = max(a,b) và a Λ b = min(a,b).

- 2. Trong dàn (L, $\leq$), phần tử sup(a,b) = aVb được đặc trưng bởi 2 tính chất sau:

  (1) a $\leq$ aVb và b $\leq$ aVb,

  (2) $\forall$ c$\in$ L : (a $\leq$ c và b $\leq$ c) $\Rightarrow$ (aVb $\leq$ c)

- 3. Trong dàn (L, $\leq$), phần tử inf(a,b) = a Λ b được đặc trưng bởi 2 tính chất sau:

  (1) aΛ b $\leq$ a và aΛ b $\leq$ b,

  (2) $\forall$ c$\in$ L : (c $\leq$ a và c $\leq$ b) $\Rightarrow$ (c $\leq$ aΛ b)

Ví dụ 1. Cho E là một tập hợp; Tập hợp (P(E), $\subseteq$) là một dàn. Với mọi A, B $\in$ P(E), ta thấy A$\cup$ B và A$\cap$ B lần lượt chính là chặn trên nhỏ nhất và chặn dưới lớn nhất theo thứ tự $\subseteq$. Nói cách khác, ta có :

A V B = A $\cup$ B

A Λ B = A $\cap$ B

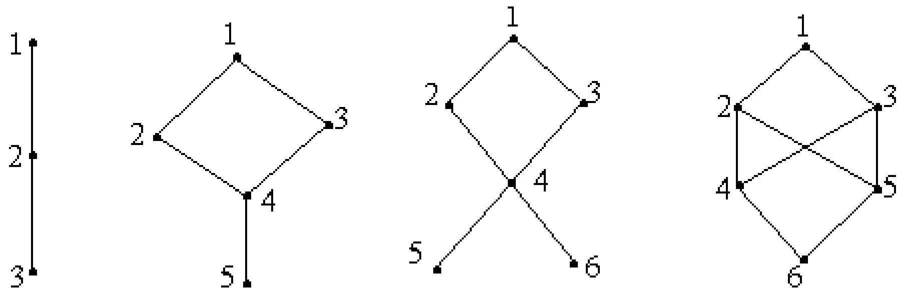
Ví dụ 2. Ta đã biết rằng (**N**,$\mid$) là một tập hợp có thứ tự. Theo thứ tự $\mid$, thứ tự "chia hết", với 2 số tự nhiên a và b ta có chặn trên nhỏ nhất chính là bội số chung nhỏ nhất của chúng, chặn dưới lớn nhất chính là ước số chung lớn nhất của chúng. Vậy (**N**,$\mid$) là một dàn, và ta có :

a V b = [a, b] (bội số chung nhỏ nhất của a và b)

a Λ b = (a, b) (ước số chung lớn nhất của a và b)

Ví dụ 3. Cho n là một số tự nhiên. Đặt Dn là tập hợp tất cả các ước số không âm của n. Ta có (Dn, $\mid$) là một tập hợp có thứ tự. Cho a và b là 2 ước số không âm của n, ta có n là một bội số chung của a và b. Do đó bội số chung nhỏ nhất [a,b] của a và b cũng là một ước số của n. Vậy [a,b] chính là chặn trên nhỏ nhất của a và b trong Dn. Ước số chung lớn nhất (a,b) của a và b cũng là một ước số của n, nên ta có (a,b) chính là chặn dưới lớn nhất của a và b trong Dn. Tóm lại, ta có thể kết luận rằng $(D_n, \mid)$ là một dàn.

Ví dụ 4. Các tập hợp có thứ tự được biểu diễn bởi các biểu đồ Hasse trong hình dưới đây có phải là dàn hay không?



(a) (b) (c) (d)

Các tập hợp có thứ tự được biểu diễn bởi (a) và (b) là các dàn.

Tập hợp có thứ tự được biểu diễn bởi (c) không phải là một dàn vì $5 \wedge 6$ không tồn tại.

Tập hợp có thứ tự được biểu diễn bởi (d) không phải là một dàn vì $4 \vee 5$ không tồn tại.

> ✱**Ghi chú :** Với 2 dàn X và Y ta có thể định ra một thứ tự trên tích Descartes XxY dựa vào các thứ tự trên X và trên Y để XxY trở thành một dàn (xem phần bài tập).

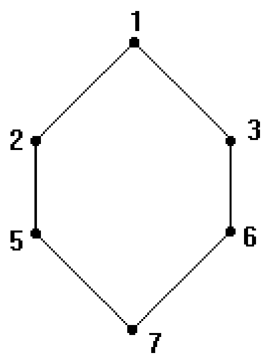
Sau đây chúng ta sẽ giới thiệu tiếp khái niệm “dàn con" và "đồng cấu dàn".

Định nghĩa 2.

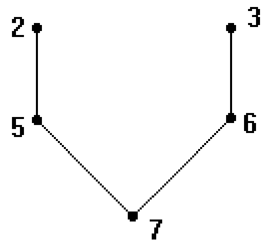
Cho $(L, \leq)$ là một dàn và B là một tập hợp con của L. Ta nói B là một *dàn con* của L khi và chỉ khi với mọi $a,b \in B$ ta có $a \vee b \in B$ và $a \wedge b \in B$.

Ví dụ 5. Cho một số tự nhiên n, ta có Dn là một dàn con của dàn $(N, \mid)$.

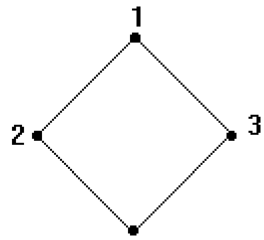
Ví dụ 6. Xem dàn L có biểu đồ Hasse như sau:



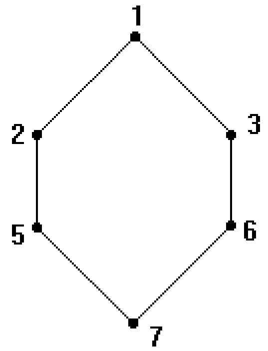
Trong cấu trúc thứ tự có các biểu đồ Hasse như dưới đây, cấu trúc nào là một dàn con của dàn L?



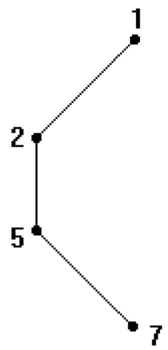
(a)



(b)



(c)



(d)

Tập hợp có thứ tự (a) không phải là một dàn con của L vì 2V3 không thuộc tập hợp đó. Tập hợp có thứ tự (c) cũng không phải là một dàn con của L vì 2Λ 3 không thuộc tập hợp đó. Các tập hợp có thứ tự (b) và (d) đúng là các dàn con của L.

Ví dụ 7. Cho (L, ≤) là một dàn và a, b là các phần tử thuộc L. Đặt

$[a,b] = \{ x \in L \mid a \le x \text{ và } x \le b \}$

Chứng minh rằng [a,b] là một dàn con của L với mọi a, b thỏa $a \le b$.

Việc chứng minh tính chất nầy khá đơn giản và được dành cho phần bài tập.

Định nghĩa 3. Cho (L, ≤) và (M, ≤) là các dàn. Một ánh xạ $f : L \to M$ được gọi là một *đồng cấu dàn* nếu và chỉ nếu

$\forall\, x,y \in L : x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

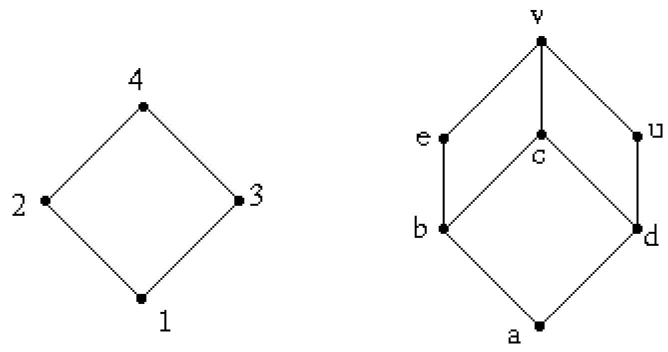
Trường hợp f có thêm tính chất song ánh thì ta nói f là một *đẳng cấu dàn*.

Ghi chú: Ta có thể chứng minh được rằng nếu f : L → M là một đẳng cấu dàn thì với mọi x, y ∈ L ta có:

$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

<u>Ví dụ 8</u>. Xem hai dàn L và M có biểu đồ Hasse như dưới đây:



(a) dàn L (b) dàn M

Ánh xạ f : L → M được định nghĩa bởi :

f(1) = b, f(2) = e, f(3) = c, f(4) = v

là một đồng cấu dàn.

Ánh xạ g : L → M được định nghĩa bởi :

g(1) = a, g(2) = b, g(3) = d, g(4) = v

không phải là một đồng cấu dàn vì g(2) V g(3) = b V d = c,

nhưng g(2V3) = g(4) = v ≠ c.

<u>Ví dụ 9</u>. Cho E = { a,b} . Hai dàn (P(E), ⊂) và (D_{10}, |) đẳng cấu với nhau. Thật vậy, xét ánh xạ f : P(E) → D_{10} được định nghĩa bởi :

f(∅) = 1, f({ a}) = 2, f({ b}) = 5, f({ a,b}) = 10

ta có thể kiểm tra dễ dàng f là một đẳng cấu dàn. Điều nầy có thể thấy rõ khi ta quan sát các biểu đồ Hasse của 2 dàn trên.

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu một số tính chất của dàn. Việc chứng minh các tính chất nầy được xem như bài tập.

Định lý 1. Với mọi phần tử x, y, z thuộc dàn (L, ≤) ta có :

1. x V x = x , x Λ x = x (tính lũy đẳng)

2. x V y = y V x , x Λ y = y Λ x (tính giao hoán)

3. x V (y V z) = (x V y) V z (tính kết hợp)

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

4. $(x \leq y) \Leftrightarrow (x \vee y = y) \Leftrightarrow (x \wedge y = x)$

5. $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$

Định lý 2. Với mọi phần tử a, b, c, d thuộc dàn $(L, \leq)$ ta có :

1. $(a \leq b) \Rightarrow (a \vee c \leq b \vee c$ và $a \wedge c \leq b \wedge c)$

2. $(a \leq b$ và $c \leq d) \Rightarrow (a \vee c \leq b \vee d$ và $a \wedge c \leq b \wedge d)$

Định lý 3. Với mọi phần tử x, y, z thuộc dàn $(L, \leq)$ ta có :

1. $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

2. $(x \leq z) \Rightarrow (x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z)$

CHƯƠNG 5
ĐẠI SỐ BOOL

5.1. Các phép toán

5.1.1. Các định nghĩa

Rất nhiều tập hợp quen thuộc đều có những phép toán trên đó. Trên tập hợp các số nguyên có phép toán cộng, phép toán nhân. Trên tập hợp các số thực khác không có phép toán nhân và còn có cả phép lấy nghịch đảo. Mỗi phép toán trên một tập hợp cho ta một qui tắc nhằm tạo ra một phần tử từ một hay nhiều phần tử nào đó. Phép cộng thực hiện trên 2 số 5 và 7 cho ra số 12; phép lấy nghịch đảo của số 2 cho kết quả là số 0.5. Khi phép toán thực hiện trên 2 phần tử ta nói là phép toán 2 ngôi, phép toán thực hiện trên một phần tử thì được gọi là phép toán một ngôi. Dưới đây ta sẽ nêu lên định nghĩa toán học của các phép toán.

Định nghĩa 1. (phép toán 2 ngôi)

Cho X là một tập hợp khác rỗng. Một phép toán hai ngôi trên tập hợp X là một ánh xạ T đi từ XxX vào X. Ký hiệu của ánh xạ được gọi là ký hiệu của phép toán hay là một toán tử. ảnh của cặp (a,b) qua ánh xạ T được gọi là kết quả thực hiện phép toán T trên 2 phần tử a và b, và thường được viết là a T b.

Như vậy, nếu T là một phép toán 2 ngôi trên X thì ta có ánh xạ:

T : XxX $\rightarrow$ X

(a,b) $\mapsto$ T(a,b) = a T b

Định nghĩa 2. (phép toán 1 ngôi)

Cho X là một tập hợp khác rỗng. Một phép toán 1 ngôi trên tập hợp X là một ánh xạ T đi từ X vào X. Ký hiệu của ánh xạ được gọi là ký hiệu của phép toán hay là một toán tử. ảnh của a qua ánh xạ T được gọi là kết quả thực hiện phép toán T trên phần tử a.

<u>Ví dụ</u>:

1. Trên các tập hợp số **N, Z, Q, R, C** có các phép toán + (cộng) và * (nhân).

2. Trên tập hợp các ma trận số thực vuông cấp n có các phép toán: + (cộng matrận) và * (nhân ma trận).

3. Cho E là một tập hợp. đặt X = P(E). Trên X có các phép toán tập hợp thông thường :

phép giao hai tập hợp, được ký hiệu là ∩ .

phép hội hai tập hợp, được ký hiệu là U .

phép lấy bù của một tập hợp, được ký hiệu là ^{c}. Theo ký hiệu nầy, phần bù của tập A Ì X là Ac.

Phép toán ∩ và U là các phép toán 2 ngôi, phép toán ^{c} là phép toán 1 ngôi.

4. Cho E là một tập hợp khác rỗng. đặt X là tập hợp các ánh xạ đi từ E vào E. Trên X có một phép toán ánh xạ thông thường; đó là phép hợp nối ánh xạ. Phép toán nầy được ký hiệu là o. Đây là một phép toán 2 ngôi trên X.

5. Đặt X là tập hợp tất cả các chuỗi ký tự. Phép nối 2 chuỗi pý tự là một phép toán 2 ngôi trên X.

6. Tập hợp B = { 0,1} gồm 2 phần tử đại diện cho 2 chân trị "sai" và "đúng". Ta đã biết trên tập hợp B có các phép toán logic: ∨ (hay), ∧ (và), ¬ (phủ định), → (kéo theo). Trong các phép toán trên chỉ có phép toán ¬ (phủ định) là phép toán 1 ngôi, còn các phép toán khác đều là các phép toán 2 ngôi.

7. Cho (L, £) là một dàn. Khi đó với mỗi cặp (a,b) gồm các phần tử của L ta có hai phần tử tương ứng là inf(a,b) và sup(a,b), được ký hiệu lần lượt là aÚ b và a□ b. Như vậy trên mỗi dàn ta có hai phép toán 2 ngôi là ∨ và ∧ . Phép toán ∨ thực hiện trên các phần tử a, b sẽ cho kết quả là chận trên nhỏ nhất của a và b. Phép toán ∧ thực hiện trên các phần tử a, b sẽ cho kết quả là chận dưới lớn nhất của a và b.

Ghi chú :

1. Một cách tổng quát, ta có thể định nghĩa phép toán n-ngôi trên một tập hợp X là một ánh xạ đi từ Xn vào X. Ứng với mỗi bộ n phần tử (a_1, ... , an) phép toán sẽ cho ta một phần tử kết quả thuộc X.

2. Trong trường hợp tập hợp X là hữu hạn thì người ta có thể định nghĩa hay xác định phép toán bằng cách liệt kê kết quả thực hiện phép toán cho mọi trường hợp có thể có. Ví dụ X = { a_1, ... , an } gồm n phần tử. Giả sử * là một phép toán 2 ngôi trên X. Khi đó, phép toán * có thể được xác định bởi bảng sau đây:

*	a_1	¼	aj	¼	an
a_1			:		
:			:		
ai	¼	¼	ai* aj		
:					
an					

Bảng trên được gọi là *bảng Cayley* của phép toán 2 ngôi. Như vậy ứng với mỗi phép toán 2 ngôi trên X ta có một ma trận có cấp n với phần tử ở dòng i cột j bằng ai* aj. Về sau, nhiều tính chất của phép toán sẽ được xem xét thông qua ma trận nầy.

Chúng ta đã từng thấy những phép toán 2 ngôi được định nghĩa bằng bảng như thế; đó là các phép toán logic $\vee$ (hay), $\wedge$ (và), $\rightarrow$ (kéo theo).

Ví dụ: Cho n là một số nguyên lớn hơn 1. Trên tập hợp **Zn** = { $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ } , tập hợp thương theo quan hệ đồng dư modulo n trên tập hợp các số nguyên **Z**, ta định nghĩa 2 phép toán + và * như sau:

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$, " a,b □ **Z**

$\overline{a} * \overline{b} = \overline{a*b}$, " a,b □ **Z**

Định nghĩa trên dựa vào phần tử đại diện của lớp tương đương. Tuy nhiên ta có thể kiểm chứng dễ dàng rằng định nghĩa trên là hợp lệ.

Trường hợp n = 3, phép + trên $\mathbf{Z}_3$ có bảng Cayley như sau :

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

trong đó ta viết a thay cho $\overline{a}$ với mọi a = 0, 1, 2.

5.1.2. Các tính chất của phép toán hai ngôi

Trong mục nầy chúng ta nêu lên một số tính chất đại số thường được xem xét đối với các phép toán 2 ngôi.

Định nghĩa 3.

1. Ta nói một phép toán 2 ngôi T trên một tập hợp X có tính *giao hoán* nếu

" x,y $\in$ X : x T y = y T x

2. Ta nói một phép toán 2 ngôi T trên một tập hợp X có tính *kết hợp* nếu

" x,y,z $\in$ X : x T (y T z) = (x T y) T z

Ví dụ:

1. Các phép toán + và * trên các tập hợp số đều có tính chất kết hợp và giao hoán.

2. Phép toán + (cộng) trên tập hợp các ma trận thực vuông cấp n, ký hiệu Mn(**R**), có tính chất giao hoán và kết hợp. Nhưng phép toán * (nhân ma trận) có tính kết hợp nhưng không có tính

giao hoán. Phép nhân trên Mn(**R**) chỉ có tính giao hoán khi n = 1. (Định nghĩa của các phép toán ma trận có thể được tham khảo ở phần đại số tuyến tính)

3. Phép chia trên tập hợp các số hữu tỉ khác 0 không có tính kết hợp và cũng không có tính giao hoán. Bởi vì 1 / 2 ¹ 2 / 1, và (8/4) / 2 = 1 ¹ 4 = 8/(4/2).

4. Đặt X là tập hợp tất cả các ánh xạ đi từ một tật hợp E vào chính nó. Phép toán o (hợp nối ánh xạ) trên X có tính kết hợp. Bởi vì với 3 ánh xạ f, g, h từ E vào E, theo tính chất về ánh xạ hợp, ta có fo(goh) = (fog)oh.

Nói chung phép toán o không có tính giao hoán; phép toán chỉ có tính giao hoán trong trường hợp E có một phần tử. Thật vậy, nếu E có nhiều hơn 1 phần tử thì ta có thể chọn ra 2 phần tử khác nhau a, b trong E. Xét 2 ánh xạ f và g như sau: f(x) = a với mọi x ∈ E, và g(x) = b với mọi x ∈ E. Ta có fog(x) = a với mọi x∈ E, và gof(x) = b với mọi x∈ E; nên fog ¹ gof.

5. Trên một dàn L, các phép toán 2 ngôi Ú và □ có tính chất giao hoán và kết hợp

Cho * là một phép toán 2 ngôi trên một tập hợp X = { a_1, ... , an} . Bây giờ chúng ta sẽ xem xét các tính chất giao hoán và kết hợp của phép toán * có liên quan như thế nào đến các tính chất của ma trận M = (mij) ∈ **Mn**(X) liên kết với phép toán. Nhắc lại là mij = ai* aj.

Phép toán * giao hoán khi và chỉ khi ai* aj = aj* ai với mọi i, j. Điều nầy tương đương với điều kiện : mij = mj $_i$ với mọi i, j. Vậy phép toán giao hoán khi và chỉ khi ma trận liên kết với phép toán là đối xứng.

Đối với tính chất kết hợp chúng ta có thể giả sử rằng X = { 1, 2, ... , n} ,và ta sẽ xây dựng một hàm lấy giá trị Bool ASSOC với đối là một ma trận M có cấp n thuộc **Mn**(X) sao cho

ASSOC(M) = 1 (True) Û phép toán 2 ngôi được liên

kết với ma trận M có tính kết hợp

Nhận xét rằng với M ∈ **Mn**(X), M[i,j]□ X = { 1, 2, ... , n} , hàm ASSOC có thể được viết dưới dạng mã giả như sau:

Function ASSOC (M) : Boole

begin

T ¬ 1

for i=1 **to** n **do**

for j=1 **to** n **do**

for k=1 **to** n **do**

if M[M[i,k],j] ¹ M[i, M[k,j]] **then**

begin

T ¬ 0

goto OUT

end

OUT: **return** T

end

Định nghĩa 4. Cho X là một tập hợp khác rỗng, * là một phép toán 2 ngôi trên X.

1. phép toán * được gọi là *lũy đẳng* khi và chỉ khi

x * x = x , với mọi x∈ X

2. Một phần tử e∈ X được gọi là *phần tử trung hòa* của phép toán * trên X khi và chỉ khi

x * e = e * x = x , với mọi x∈ X

3. Giả sử phép toán * có phần tử trung hòa là e. Ta nói một phần tử x∈ X là *khả nghịch* (hay có nghịch đảo) khi và chỉ khi

$ x'∈ X : x * x' = e = x' * x

Nhận xét :

- Nếu phép toán có tính kết hợp thì phần tử trung hòa (nếu có) là duy nhất, và trong trường hợp tổng quát người ta còn gọi là "phần tử đơn vị".
- Khi phép toán có tính kết hợp và có phần tử trung hòa, với mỗi phần tử x khả nghịch, phần tử x' trong định nghĩa trên là duy nhất. Ta gọi x' là phần tử nghịch đảo của x, và ký hiệu là x^{-1}.

Ghi chú :

1. Trong trường hợp phép toán được ký hiệu là '.' (dấu nhân) thì phần tử trung hòa của phép toán thường được ký hiệu 1, và được gọi là "đơn vị".

2. Khi phép toán được ký hiệu là '+' (dấu cộng) thì phần tử trung hòa của phép toán thường được ký hiệu 0, và được gọi là "zero". Trong trường hợp nầy, mỗi phần tử x thỏa điều kiện khả nghịch sẽ được gọi là "có đối", và phần tử x' trong định nghĩa được gọi là phần tử đối của x. Ta ký hiệu phần tử đối của x là -x.

<u>Ví dụ</u>:

1. Trên tập B = { 0,1} (gồm 2 giá trị Boole), có các phép toán Ú và □ . Phép toán V có các tính chất : giao hoán, kết hợp, có trung hòa là 0, lũy đẳng. Phần tử 1 không khả nghịch đối với phép Ú vì 1 Ú x = 1 ¹ 0 với mọi x∈ B. Phép toán □ có các tính chất : giao hoán, kết hợp, có trung

hòa là 1, lũy đẳng. Phần tử 0 không khả nghịch đối với phép □ vì 0 □ x = 0 ¹ 1 với mọi x∈ B.

2. Phép toán + (cộng) trên các tập hợp số **N, Z, Q, R, C** có các tính chất : giao hoán, kết hợp, có trung hòa (hay phần tử zero) là 0. Trong các tập hợp **Z, Q, R, C** mọi số đều có đối. Phép toán * (nhân) trên các tập hợp số **N, Z, Q, R, C** có các tính chất : giao hoán, kết hợp, có trung hòa (hay phần tử đơn vị) là 1. Trong các tập hợp **Q, R, C** mọi số khác 0 đều khả nghịch.

3. Cho (L, £) là một dàn, chúng ta đã biết rằng trên L có hai phép toán 2 ngôi được ký hiệu là Ú và □ . Các phép toán nầy ngoài tính chất giao hoán và kết hợp còn có tính chất lũy đẳng nữa.

4. Cho E là một tập hợp. Các phép toán U và ∩ trên P(E) đều có tính chất lũy đẳng. Phép toán U có phần tử trung hòa là Æ . Phép toán ∩ có phần tử trung hòa là E.

5. Đặt X = **Mn**(**R**), tập hợp các ma trận thực vuông cấp n. Ký hiệu phép nhân ma trận là *, ta có phép toán * có tính kết hợp và có phần tử trung hòa là ma trận đơn vị

9; 9; 9;
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Phép toán + trên X có tính giao hoán, kết hợp, có trung hòalà ma trận **0**, mọi ma trận đều có ma trận đối tương ứng.

Chúng ta biết rằng trên một cấu trúc dàn ta có một cấu trúc đại số với 2 phép toán Ú và □ ; các phép toán nầy có các tính chất : kết hợp, giao hoán, lũy đẳng. Ngược lại, trong một số trường hợp, trên các cấu trúc đại số ta có thể xây một cấu trúc thứ tự như trong định lý dưới đây.

Định lý 1.

Cho * là một phép toán 2 ngôi giao hoán, kết hợp và lũy đẳng trên một tập hợp X. Khi đó, nếu R là quan hệ 2 ngôi trên X được định nghĩa bởi

(a R b) Û (a * b = b)

thì ta có :

1. R là một quan hệ thứ tự.

2. " a,b ∈ X : sup(a,b) = a * b.

Chứng minh:

1. Quan hệ R phản xạ do tính lũy đẳng của phép toán *. Nếu a R b và b R a thì ta có : b = a * b = b * a = a do tính giao hoán của phép toán *; suy ra quan hệ R phản xứng. Nếu a R b và b R c thì ta có :

c = b * c = (a * b) * c = a * (b * c) = a * c

Suy ra a R c. Vậy R có tính truyền.

R có 3 tính chất : phản xạ, phản xứng, truyền; nên R là một quan hệ thứ tự.

2. Ta có : a R (a*b) vì

a * (a*b) = (a*a)*b = a*b.

Tương tự ta cũng có b R (a*b) vì

b * (a*b) = b*(b*a) = (b*b)*a = b*a = a*b.

Do đó (a*b) là một chặn trên của a và b.

Giả sử k là một chặn trên của a và b. Ta có a*k = k = b*k, nên

(a*b)*k = a*(b*k) = a*k = k. Suy ra (a*b) R k.

Điều nầy chứng tỏ (a*b) là chặn trên nhỏ nhất của a và b.

Trên đây chúng ta đã đề cập đến các tính chất của một phép toán 2 ngôi. Bây giờ chúng ta sẽ nêu lên định nghĩa một tính chất đại số liên quan đến 2 phép toán 2 ngôi: tính phân bố (distributive property).

Định nghĩa 5.

Cho T và * là hai phép toán 2 ngôi trên một tập hợp X. Ta nói phép toán * phân bố bên trái trên phép toán T khi và chỉ khi

a * (b T c) = (a * b) T (a * c)

với mọi a, b, c $\in$ X.

Tương tự, ta nói * phân bố bên phải trên T khi và chỉ khi

(b T c) * a = (b * a) T (c * a)

với mọi a, b, c $\in$ X.

Khi * phân bố bên trái và bên phải trên T thì ta nói chung là * phân bố trên T.

<u>Ví dụ</u>:

Trên tập hợp các số thực **R**, phép toán * (nhân) là phân bố trên phép toán +. Nhưng phép + không phân bố trên phép *.

Cho E là một tập hợp. Trên P(E) ta biết có 2 phép toán được ký hiệu là $\cap$ và $\cup$. Theo các tính chất của các phép toán tập hợp, ta có phép toán $\cap$ phân bố trên U , tức là

$A \cap (B \cup X) = (A \cap B) \cup (A \cap X)$

với mọi A, B, C $\in$ P(E).

Ngược lại, phép toán $\cup$ cũng phân bố trên phép toán $\cap$.

Định nghĩa 6.

Một *đại số* (hay một cấu trúc đại số) là một tập hợp khác rỗng X trên đó có một hay nhiều phép toán thỏa mãn các tính chất nào đó. Giả sử các phép toán tên X là *, T, ... Ta sẽ ký hiệu đại số là (X, *, T, ...).

5.2. Đại số Bool

Trong phần nầy chúng ta sẽ giới thiệu một cấu trúc đại số có liên hệ mật thiết với cấu trúc thứ tự: đại số Bool. Một đại số Bool không nhất thiết phải có một thứ tự trên nó, nhưng ta có thể định nghĩa một thứ tự trên đại số Bool. Từ đó có sự liên hệ giữa dàn và đại số Bool.

5.2.1. Định nghiã và các tính chất

Định nghĩa 1:

Một đại số Bool là một cấu trúc đại số gồm một tập hợp S chứa ít nhất là 2 phần tử, được ký hiệu là 0 và 1, c□ng với hai phép toán 2 ngôi ‘+’ (cộng) và ‘.’ (nhân), và một phép toán 1 ngôi $\bar{\ }$ thỏa mãn các tính chất sau đây:

(1) Các phép toán ‘+’ và ‘.’ có các tính chất : kết hợp, giao hoán, lũy đẳng; tức là với mọi x,y,z $\in$ S ta có:

- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $(x . y) . z = x . (y . z)$
- $x + y = y + x$
- $x . y = y . x$
- $x + x = x$
- $x . x = x$

(2) Mỗi phép toán 2 ngôi phân bố trên phép toán 2 ngôi kia; tức là

- $x . (y + z) = (x . y) + (x . z)$
- $x + (y . z) = (x + y) . (x + z)$

(3) 0 là trung hòa của phép toán '+', và 1 là trung hòa của phép toán '.'; tức là với mọi $x \in S$ ta có :

- $x + 0 = x$
- $x . 1 = x$

(4) Phép toán 1 ngôi $\overline{\ }$ trên S có tính chất :

- $x + \overline{x} = 1$, với mọi $x \in S$
- $x . \overline{x} = 0$, với mọi $x \in S$

Theo đinh nghĩa, tập hợp S có ít nhất 2 phần tử, đó là 0 và 1. Ta thường viết đại số Bool trên dưới dạng (S, +, ., $\overline{\ }$, 0, 1).

Ghi chú :

Tính chất lũy đẳng của các phép toán + và . có thể suy từ các tính chất khác trong định nghĩa trên. Thật vậy, với mọi $x \in S$ ta có :

$x = x + 0$ do (3)

$= x + (x.\overline{x})$ do (4)

$= (x+x).(x+\overline{x})$ do (2)

$= (x+x).1$ do (4)

$= x+x$ do (3)

Tương tự, tính chất $x = x.x$ có thể suy ra từ các tính chất khác.

__**Ví dụ**__:

1. Cho E là một tập hợp. Ký hiệu $\overline{\ }$ là phép lấy phần bù của một tập hợp con trong tập hợp E. Ta có (P(E), $\cup$, $\cap$, $\overline{\ }$, $\varnothing$, E) là một đại số Bool.

2. Trên tập hợp B = { 0, 1} ta định nghĩa hai phép toán 2 ngôi cộng (+) và nhân (.) bằng bảng như sau :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

và một phép toán một ngôi $\overline{\ }$ định nghĩa bởi : $\overline{0} = 1$ và $\overline{1} = 0$. Ta có thể kiểm chứng rằng (B, +, ., $\overline{\ }$, 0, 1) là một đại số Bool.

3. Đặt S là tập hợp các ước số (dương) của 30, tức là S = { 1,2,3,5,6,10,15,30} . Trên S ta định nghĩa các phép toán +, ., và $\overline{\ }$ như sau :

a + b = bội số chung nhỏ nhất của a và b

a . b = ước số chung lớn nhất của a và b

$$\bar{a} = \frac{30}{a}$$

với mọi a,b ∈ S.

Khi đó ta cũng có (S, +, ., $\overline{\ }$, 1, 30) là một đại số Bool.

Các định lý dưới đây cho ta một số tính chất tổng quát đúng cho mọi đại số Bool. Việc chứng minh các tính chất nầy được xem như bài tập.

Định lý 1. Với mọi phần tử x thuộc đại số Boole (S, +, ., $\overline{\ }$, 0, 1) ta có :

$$\bar{\bar{x}} = x$$

Định lý 2. Với mọi x, y thuộc đại số Boole (S, +, ., $\overline{\ }$, 0, 1) ta có :

x . (x + y) = x

x + (x . y) = x

Định lý 3. Với mọi x, y thuộc đại số Boole (S, +, ., $\overline{\ }$, 0, 1) ta có :

$$\overline{x + y} = \bar{x} \,.\, \bar{y}$$
$$\overline{x \,.\, y} = \bar{x} + \bar{y}$$

5.2.2. Đại số Bool và dàn

Chúng ta đã biết rằng trong một dàn (L, ≤) có 2 phép toán 2 ngôi được ký hiệu là ∨ và ∧ . Phép toán ∨ cho ta chặn trên nhỏ nhất của 2 phần tử, phép toán ∧ cho ta chặn dưới lớn nhất của 2 phần tử. Hai phép toán nầy có các tính chất : kết hợp, giao hoán, và lũy đẳng. Để trên dàn có một cấu trúc đại số Bool, ta phải có thêm một phép toán 1 ngôi và một số điều kiện nữa. Trước hết chúng ta nêu lên một số khái niệm liên quan đến một dàn.

Định nghĩa 2.

Một dàn L được gọi là một *dàn phân bố* nếu và chỉ nếu hai phép toán ∨ và ∧ trên dàn phân bố lẫn nhau, tức là với mọi x, y, z thuộc L ta có

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Định nghĩa 3.

Cho một dàn (L, ≤). Giả sử L có phần tử nhỏ nhất, ký hiệu là 0 và phần tử lớn nhất, ký hiệu là 1. Một phần tử $x \in L$ được gọi là có (phần tử) bù nếu và chỉ nếu có một phần tử $x' \in L$ sao cho $x \vee x' = 1$ và $x \wedge x' = 0$. Ta nói dàn L là một *dàn bù* nếu mỗi $x \in L$ đều có phần tử bù.

*Ghi chú : Chúng ta có thể chứng minh được rằng phần tử bù x' của x trong định nghĩa trên là duy nhất. Vậy, trong một dàn b∈ L ta có thể định nghĩa một phép toán 1 ngôi $\overline{\ }$ bởi $\overline{x}$ = phần tử bù của x, với mọi $x \in L$.

Qua các định nghĩa trên ta thấy rằng trên một dàn b∈ L ta có thể định nghĩa 3 phép toán tương ứng : $\vee$, $\wedge$, và $\overline{\ }$. Phép toán $\vee$ và phép toán $\wedge$ là các phép toán 2 ngôi, phép toán $\overline{\ }$ là phép toán 1 ngôi. Như thế ta có một cấu trúc (L, $\vee$, $\wedge$, $\overline{\ }$, 0, 1) và người ta đã chứng minh được cấu trúc nầy là một đại số Bool nếu dàn L thỏa thêm điều kiện phân bố.

Định lý 4.

Giả sử (L,≤) là một dàn bù phân bố. Trên L ta định nghĩa các phép toán $\vee$, $\wedge$, và $\overline{\ }$ như trên. Khi đó ta có (L, $\vee$, $\wedge$, $\overline{\ }$, 0, 1) là một đại số Bool.

Định lý nầy cho phép chúng ta có thể xem một dàn bù phân bố là một đại số Bool.

Ví dụ: Cho E là một tập hợp. Ta biết (P(E), ⊂) là một dàn. Trong dàn nầy phép toán $\vee$ chính là phép toán ∪ (hội 2 tập hợp), và phép toán $\wedge$ chính là phép toán ∩ (giao 2 tập hợp). Do tính chất của các phép toán tập hợp, ta có (P(E), ⊂) là một dàn phân bố. Hơn nữa, theo thứ tự ⊂ , P(E) có phần tử nhỏ nhất là ∅ và phần tử lớn nhất là E. Mỗi A ∈ P(E) đều có phần tử bù chính là tập hợp bù Ac của A trong E. Ký hiệu phép toán lấy bù là $\overline{\ }$. Theo định lý 4 nêu trên ta có (P(E), ∪ , ∩ , $\overline{\ }$, ∅ , E) là một đại số Bool, và cấu trúc đại số Bool nầy tương ứng với quan hệ thứ tự ⊂ trên P(E).

Đảo lại với định lý 4, định lý dưới đây chỉ ra rằng trên một cấu trúc đại số Bool ta có thể định nghĩa một thứ tự tương ứng sao cho nó trở thành một dàn bù phân bố, và cấu trúc đại số Bool tương ứng của dàn nầy theo định lý 4 tr□ng với cấu trúc đại số Bool ban đầu. Như vậy, chúng ta có một sự tương ứng 1-1 giữa cấu trúc đại số Bool và cấu trúc dàn bù phân bố.

Định lý 5.

Cho (S, +, ., $\overline{\ }$, 0, 1) là một đại số Boole. Khi đó tồn tại một thứ tự ≤ trên S sao cho (S, ≤) là một dàn bù phân bố. Hơn nữa các phép toán trên S được xác định bởi thứ tự đó như sau :

a + b = sup(a,b)

a . b = inf(a,b)

với mọi a, b ∈ S.

Ghi chú :

- Trong chứng minh định lý trên, thứ tự ≤ trên S có thể được định nghĩa bằng một trong 2 cách sau :

cách 1: a ≤ b ⇔ a + b = b , với mọi a, b ∈ S

cách 2: a ≤ b ⇔ a . b = a , với mọi a, b ∈ S

- Do định lý trên, mỗi đại số Bool hữu hạn sẽ có một biểu đồ Hasse tương ứng vì ta có một cấu trúc thứ tự tương ứng trên đại số Bool.

Dưới đây chúng ta sẽ phát biểu một định lý quan trọng về đại số Bool, được gọi là định lý biểu diễn hay định lý Stone. Chứng minh của định lý nầy có thể tìm thấy trong các sách [1] và [4].

Định nghĩa 4.

Giả sử *B* và *B'* là 2 đại số Bool. Ta nói đại số Bool *B* đẳng cấu với đại số Bool *B'* khi có một song ánh f : *B* → *B'* sao cho đối với mọi a, b ∈ *B* ta có các điều kiện sau đây:

(i) $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$

(ii) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$

(iii) $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$

Nhận xét: Ta có thể chứng minh được rằng điều kiện (iii) trong định nghĩa trên có thể được suy ra từ hai điều kiện (i) và (ii). Do đó, để kiểm tra các điều kiện trên ta chỉ cần kiểm tra 2 điều kiện (i) và (ii). Hơn nữa, nếu f : *B* → *B'* là một đẳng cấu đại số Bool thì f cũng là một đẳng cấu dàn khi xem B và B' là các dàn tương ứng với cấu trúc đại số Bool.

Định lý 6. (Định lý biểu diễn hay định lý Stone)

Mọi đại số Bool hữu hạn **B** luôn đẳng cấu với P(E), trong đó E là một tập hợp hữu hạn.

Hệ quả:

1. Số phần tử của một đại số Bool hữu hạn là một lũy thừa của 2.

2. Hai đại số Bool hữu hạn có cùng số phần tử thì đẳng cấu với nhau.

Hàm boole.

Định nghĩa: Ký hiệu B = {0, 1} và $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B, 1 \le i \le n\}$, ở đây B và B^n là các đại số Boole (xem 2) và 3) của Thí dụ 1). Biến x được gọi là một biến Boole nếu nó nhận các giá trị chỉ từ B. Một hàm từ B^n vào B được gọi là một hàm Boole (hay hàm đại số lôgic) bậc n.

Các hàm Boole cũng có thể được biểu diễn bằng cách dùng các biểu thức được tạo bởi các biến và các phép toán Boole (xem Bảng 1 trong Thí dụ 1). Các biểu thức Boole với các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được định nghĩa bằng đệ quy như sau:

- 0, 1, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biểu thức Boole.
- Nếu *P* và *Q* là các biểu thức Boole thì $\overline{P}$, *PQ* và *P+Q* cũng là các biểu thức Boole.

Mỗi một biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole. Các giá trị của hàm này nhận được bằng cách thay 0 và 1 cho các biến trong biểu thức đó.

Hai hàm n biến F và G được gọi là bằng nhau nếu $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)=G(a_1, a_2, \ldots,a_n)$ với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$. Hai biểu thức Boole khác nhau biểu diễn cùng một hàm Boole được gọi là tương đương. Phần bù của hàm Boole *F* là hàm $\overline{F}$ với $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$. Giả sử F và G là các hàm Boole bậc n. Tổng Boole F+G và tích Boole FG được định nghĩa bởi:

$$(F+G)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)+G(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(FG)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)G(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Thí dụ 2:

Theo quy tắc nhân của phép đếm ta suy ra rằng có 2^n bộ n phần tử khác nhau gồm các số 0 và 1. Vì hàm Boole là việc gán 0 hoặc 1 cho mỗi bộ trong số 2^n bộ n phần tử đó, nên lại theo quy tắc nhân sẽ có 2^{2^n} các hàm Boole khác nhau.

Bậc	Số các hàm Boole
1	4
2	16
3	256
4	65.536

Bảng sau cho giá trị của 16 hàm Boole bậc 2 phân biệt:

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0

trong đó có một số hàm thông dụng như sau:

- Hàm F_1 là hàm hằng 0,
- Hàm F_2 là hàm hằng 1,
- Hàm F_3 là hàm hội, $F_3(x,y)$ được viết là xy (hay $x \wedge y$),
- Hàm F_4 là hàm tuyển, $F_4(x,y)$ được viết là x+y (hay $x \vee y$),

- Hàm F_5 là hàm tuyển loại, $F_5(x,y)$ được viết là $x \oplus y$,
- Hàm F_6 là hàm kéo theo, $F_6(x,y)$ được viết là $x \Rightarrow y$,
- Hàm F_7 là hàm tương đương, $F_7(x,y)$ được viết là $x \Leftrightarrow y$,
- Hàm F_8 là hàm Vebb, $F_8(x,y)$ được viết là $x \downarrow y$,
- Hàm F_9 là hàm Sheffer, $F_9(x,y)$ được viết là $x \uparrow y$.

Thí dụ 3: Các giá trị của hàm Boole bậc 3 $F(x, y, z) = xy + \bar{z}$ được cho bởi bảng sau:

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$F(x, y, z) = xy+\bar{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Định nghĩa: Cho x là một biến Boole và $\sigma \in$ B. Ký hiệu:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x \; khi \, \sigma = 1, \\ \bar{x} \; khi \, \sigma = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng $x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$. Với mỗi hàm Boole *F* bậc n, ký hiệu:

$$T_F = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n \mid F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$$

Và gọi nó là tập đặc trưng của hàm *F*. Khi đó ta có:

$$T_{\overline{F}} = \overline{T_F}\,,\; T_{F+G} = T_F \cup T_G,\; T_{FG} = T_F \cap T_G.$$

Cho n biến Boole $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Một biểu thức dạng:

$$x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$$

trong đó $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in$ B, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ được gọi là một hội sơ cấp của n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Số các biến xuất hiện trong một hội sơ cấp đươc gọi là hạng của của hội sơ cấp đó.

Cho F là một hàm Boole bậc n. Nếu F được biểu diễn dưới dạng tổng (tuyển) của một số hội sơ cấp khác nhau của n biến thì biểu diễn đó được gọi là dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc của F. Dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc hoàn toàn là dạng chuẩn tắc duy nhất của F mà trong đó các hội sơ cấp đều có hạng n.

Thí dụ 4: $\bar{x}y + x\bar{y}$ là một dạng tổng chuẩn tắc của hàm $x \oplus y$.

$\bar{x} + \bar{y}$ và $\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y + x\bar{y}$ là các dạng tổng chuẩn tắc của hàm Sheffer $x \uparrow y$.

Mệnh đề: Mọi hàm Boole *F* bậc n đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in B^i} x_1^{\sigma_1} \ldots x_i^{\sigma_i} F(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \quad (1),$$

trong đó i là số tự nhiên bất kỳ, $1 \le i \le n$.

Chứng minh: Gọi *G* là hàm Boole ở vế phải của (1). Cho $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_F$. Khi đó số hạng ứng với bộ giá trị $\sigma_1 = x_1, \ldots, \sigma_i = x_i$ trong tổng ở vế phải của (1) bằng 1, do đó $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_G$. Đảo lại, nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_G$ tức là vế phải bằng 1 thì phải xảy ra bằng 1 tại một số hạng nào đó, chẳng hạn tại số hạng ứng với bộ giá trị $(\sigma_1, \ldots, \sigma_i)$, khi đó $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_i = \sigma_i$ và $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 1$ hay $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_F$. Vậy $T_F = T_G$ hay $F = G$.

Cho i=1 trong mệnh đề trên và nhận xét rằng vai trò của các biến x_i là như nhau, ta được hệ quả sau.

Hệ quả: Mọi hàm Boole *F* bậc n đều có thể được khai triển theo một biến x_i:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x_i} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) + x_i F(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Cho i=n trong mệnh đề trên và bỏ đi các nhân tử bằng 1 trong tích, các số hạng bằng 0 trong tổng, ta được hệ quả sau.

Hệ quả: Mọi hàm Boole *F* bậc n đều có thể được khai triển dưới dạng:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in T_F} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Chú ý: Từ Hệ quả 8.2.5, ta suy ra rằng mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc hoàn toàn. Như vậy mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn bằng một biểu thức Boole chỉ chứa ba phép tích (hội), tổng (tuyển), bù (phủ định). Ta nói rằng hệ {tích, tổng, bù} là đầy đủ.

Bằng đối ngẫu, ta có thể chứng minh một kết quả tương tự bằng việc thay tích bởi tổng và ngược lại, từ đó dẫn tới việc biểu diễn *F* qua một tích các tổng. Biểu diễn này được gọi là dạng tích (hội) chuẩn tắc hoàn toàn của *F*:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \overline{T_F}} \left(x_1^{\overline{\sigma_1}} + \ldots + x_n^{\overline{\sigma_n}}\right)$$

Thí dụ 5: Dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn của hàm *F* cho trong Thí dụ 3 là:

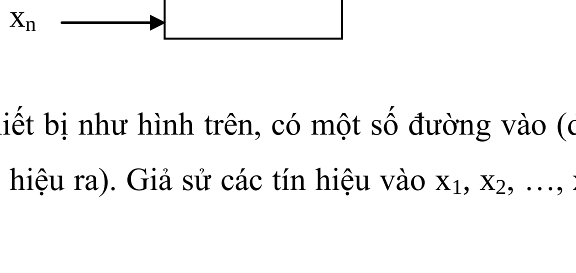
$$F(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + xyz,$$

và dạng tích chuẩn tắc hoàn toàn của nó là:

$$F(x, y, z) = (x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + \overline{z})(\overline{x} + y + \overline{z})$$

5.3. Các cổng logic và tổ hợp các cổng logic

5.3.1. Cổng lôgic



Xét một thiết bị như hình trên, có một số đường vào (dẫn tín hiệu vào) và chỉ có một đường ra (phát tín hiệu ra). Giả sử các tín hiệu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ta gọi là đầu vào hay input) cũng như tín hiệu ra F (đầu ra hay output) đều chỉ có hai trạng thái khác nhau, tức là mang một bit thông tin, mà ta ký hiệu là 0 và 1.

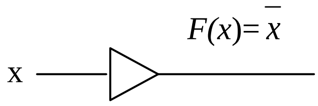
Ta gọi một thiết bị với các đầu vào và đầu ra mang giá trị 0, 1 như vậy là một mạch lôgic.

Đầu ra của một mạch lôgic là một hàm Boole F của các đầu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta nói mạch lôgic trong hình trên thực hiện hàm F.

Các mạch lôgic được tạo thành từ một số mạch cơ sở, gọi là cổng lôgic. Các cổng lôgic sau đây thực hiện các hàm phủ định, hội và tuyển.

1. Cổng NOT: Cổng NOT thực hiện hàm phủ định. Cổng chỉ có một đầu vào. Đầu ra *F(x)* là phủ định của đầu vào *x*.

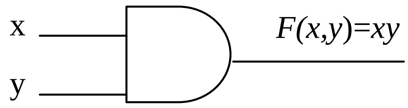
$$F(x) = \bar{x} = \begin{cases} 0\ khi = 1, \\ 1\ khi\ x = 0. \end{cases}$$

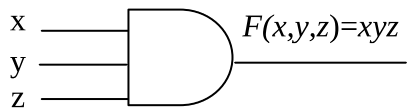


Chẳng hạn, xâu bit 100101011 qua cổng NOT cho xâu bit 011010100.

2. Cổng AND: Cổng AND thực hiện hàm hội. Đầu ra *F(x,y)* là hội (tích) của các đầu vào.

$$F(x,y) = xy = \begin{cases} 1\ khi\ x = y = 1, \\ 0\ \ trong\ các\ trường\ hợp\ khác. \end{cases}$$

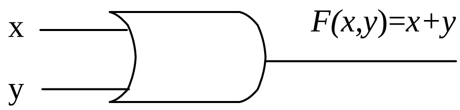


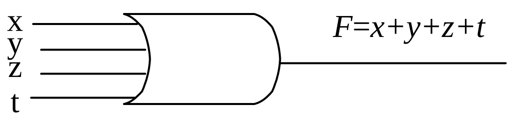


Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010110 qua cổng AND cho 101000100.

3. Cổng OR: Cổng OR thực hiện hàm tuyển (tổng). Đầu ra *F(x,y)* là tuyển (tổng) của các đầu vào.

$$F(x,y) = x + y = \begin{cases} 1\ khi\ x = 1\ hay\ y = 1, \\ 0\ khi\ x = y = 0. \end{cases}$$





Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010100 qua cổng OR cho 111011101.

5.3.2. Mạch lôgic

1. Tổ hợp các cổng: Các cổng lôgic có thể lắp ghép để được những mạch lôgic thực hiện các hàm Boole phức tạp hơn. Như ta đã biết rằng một hàm Boole bất kỳ có thể biểu diễn bằng một biểu thức chỉ chứa các phép −, ., +. Từ đó suy ra rằng có thể lắp ghép thích hợp các cổng NOT, AND, OR để được một mạch lôgic thực hiện một hàm Boole bất kỳ.

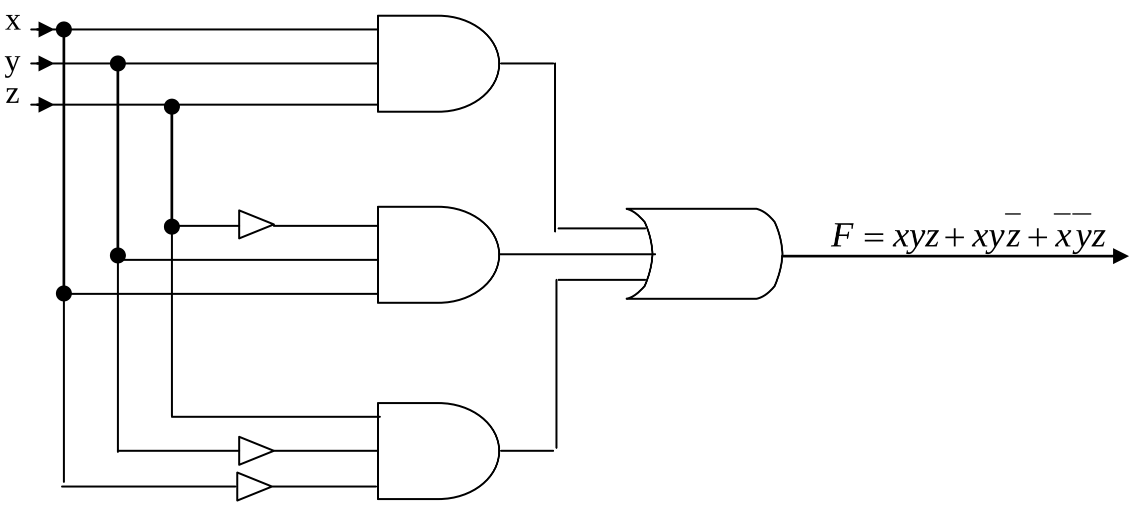
Thí dụ 6: Xây dựng một mạch lôgic thực hiện hàm Boole cho bởi bảng sau.

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Theo bảng này, hàm F có dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc hoàn toàn là:

$F(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$.

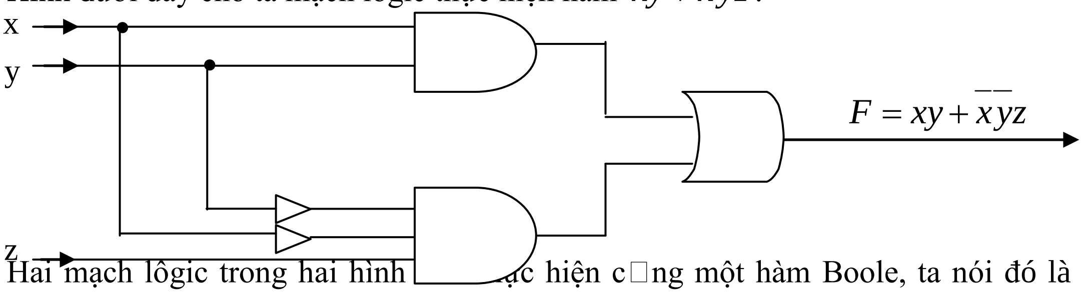
Hình dưới đây vẽ mạch lôgic thực hiện hàm F đã cho.



Biểu thức của *F(x, y, z)* có thể rút gọn:

$xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z = xy(z+\bar{z}) + \bar{x}\bar{y}z = xy + \bar{x}\bar{y}z$.

Hình dưới đây cho ta mạch lôgic thực hiện hàm $xy + \bar{x}\bar{y}z$.



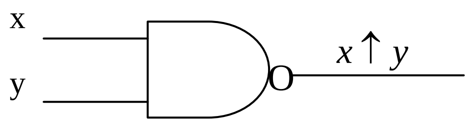
Hai mạch lôgic trong hai hình ực hiện c□ng một hàm Boole, ta nói đó là hai mạch lôgic tương đương, nhưng mạch lôgic thứ hai đơn giản hơn.

Vấn đề tìm mạch lôgic đơn giản thực hiện một hàm Boole F cho trước gắn liền với vấn đề tìm biểu thức đơn giản nhất biểu diễn hàm ấy. Đây là vấn đề khó và lý thú, tuy ý nghĩa thực tiễn của nó không còn như mấy chục năm về trước.

Ta vừa xét việc thực hiện một hàm Boole bất kỳ bằng một mạch lôgic chỉ gồm các cổng NOT, AND, OR.

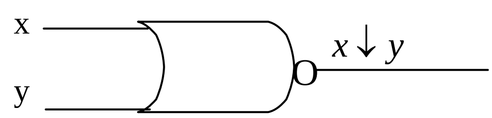
Dựa vào đẳng thức $x + y = \overline{\overline{x}.\overline{y}}$ cũng như $xy = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$, cho ta biết hệ {., −} và hệ {+, −} cũng là các hệ đầy đủ. Do đó có thể thực hiện một hàm Boole bất kỳ bằng một mạch lôgic chỉ gồm có các cổng NOT, AND hoặc NOT, OR.

Xét hàm Sheffer $F(x, y) = x \uparrow y = \begin{cases} 0 \; khi \, x = y = 1, \\ 1 \; khi \, x = 0 \; hay \; y = 0. \end{cases}$ Mạch lôgic thực hiện hàm $\uparrow$ gọi là cổng NAND, được vẽ như hình dưới đây.



Dựa vào các đẳng thức $\overline{x} = x \uparrow x, \; xy = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y), \; x + y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$, cho ta biết hệ {$\uparrow$} là đầy đủ, nên bất kỳ một hàm Boole nào cũng có thể thực hiện được bằng một mạch lôgic chỉ gồm có cổng NAND.

Xét hàm Vebb $F(x, y) = x \downarrow y = \begin{cases} 0 \; khi \, x = 1 \; hay \; y = 1, \\ 1 \; khi \, x = y = 0. \end{cases}$ Mạch lôgic thực hiện hàm $\downarrow$ gọi là cổng NOR, được vẽ như hình dưới đây.

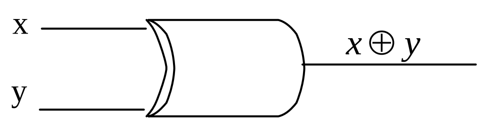


Tương tự hệ {$\downarrow$} là đầy đủ nên bất kỳ hàm Boole nào cũng có thể thực hiện được bằng một mạch lôgic chỉ gồm có cổng NOR.

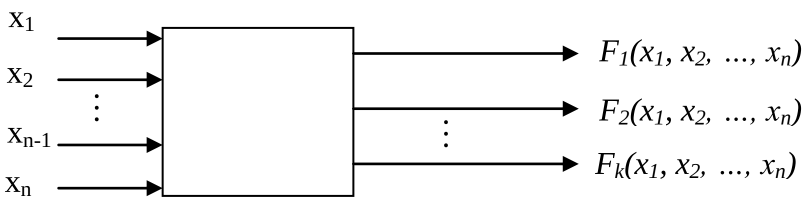
Một phép toán lôgic quan trọng khác là phép tuyển loại:

$$F(x, y) = x \oplus y = \begin{cases} 0 \; khi \, x = y, \\ 1 \; khi \, x \neq y. \end{cases}$$

Mạch lôgic này là một cổng lôgic, gọi là cổng XOR, được vẽ như hình dưới đây.



2. Mạch cộng: Nhiều bài toán đòi hỏi phải xây dựng những mạch lôgic có nhiều đường ra, cho các đầu ra $F_1, F_2, \ldots, F_k$ là các hàm Boole của các đầu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$.



Chẳng hạn, ta xét phép cộng hai số tự nhiên từ các khai triển nhị phân của chúng. Trước hết, ta sẽ xây dựng một mạch có thể duợc dùng để tìm x+y với x, y là hai số 1-bit. Đầu vào mạch này sẽ là x và y. Đầu ra sẽ là một số 2-bit $\overline{cs}$, trong đó s là bit tổng và c là bit nhớ.

0+0 = 00

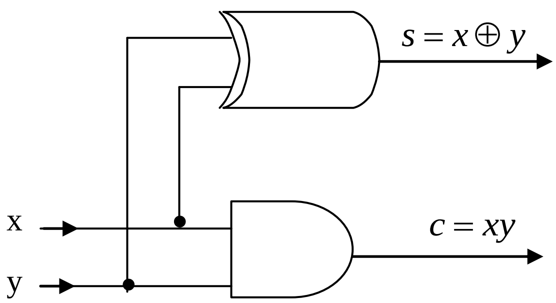
0+1 = 01

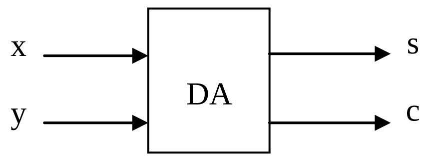
1+0 = 01

1+1 = 10

x	y	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1

Từ bảng trên, ta thấy ngay $s = x \oplus y, c = xy$. Ta vẽ được mạch thực hiện hai hàm $s = x \oplus y$ và $c = xy$ như hình dưới đây. Mạch này gọi là mạch cộng hai số 1-bit hay mạch cộng bán phần, ký hiệu là DA.





Xét phép cộng hai số 2-bit $\overline{a_2a_1}$ và $\overline{b_2b_1}$,

$$\begin{array}{c} a_2\ a_1 \\ \underline{b_2\ b_1} \end{array}$$

Thực hiện phép cộng theo từng cột, ở cột thứ nhất (từ phải sang trái) ta tính $a_1 + b_1$ được bit tổng s_1 và bit nhớ c_1; ở cột thứ hai, ta tính $a_2 + b_2 + c_1$, tức là phải cộng ba số 1-bit.

Cho x, y, z là ba số 1-bit. Tổng $x+y+z$ là một số 2-bit $\overline{cs}$, trong đó s là bit tổng của $x+y+z$ và c là bit nhớ của $x+y+z$. Các hàm Boole s và c theo các biến x, y, z được xác định bằng bảng sau:

x	y	z	c	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Từ bảng này, dễ dàng thấy rằng:

$s = x \oplus y \oplus z$.

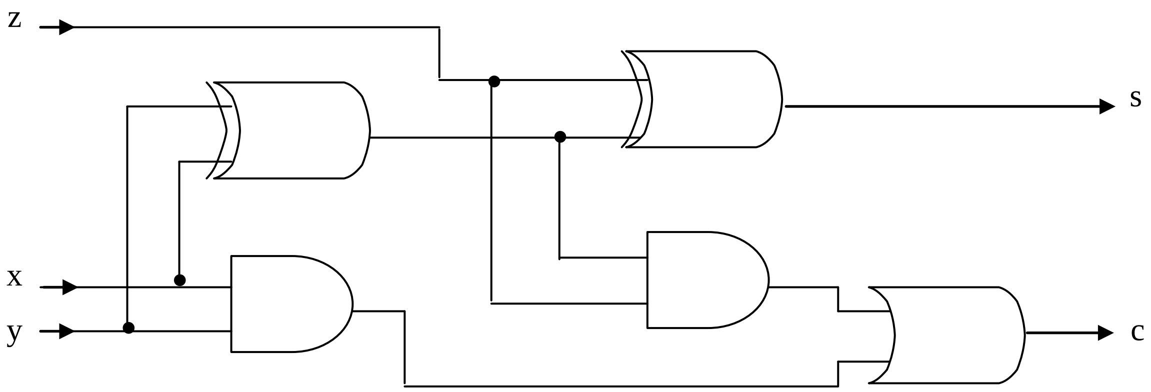
Hàm c có thể viết dưới dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn là:

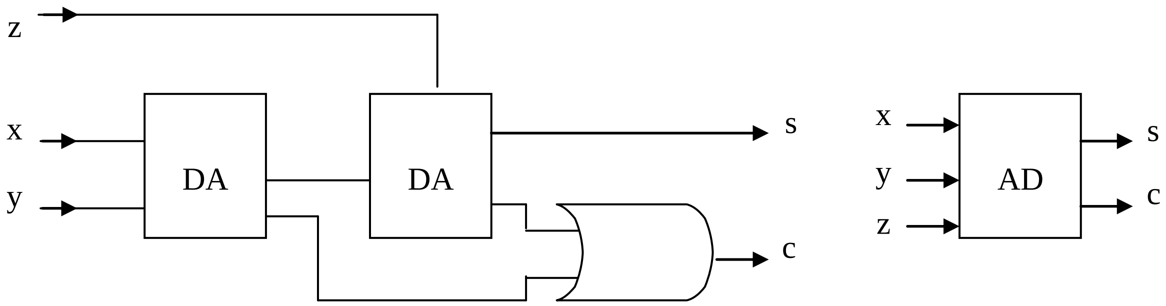
$c = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$.

Công thức của c có thể rút gọn:

$c = z(\bar{x}y + x\bar{y}) + xy(\bar{z} + z) = z(x \oplus y) + xy$.

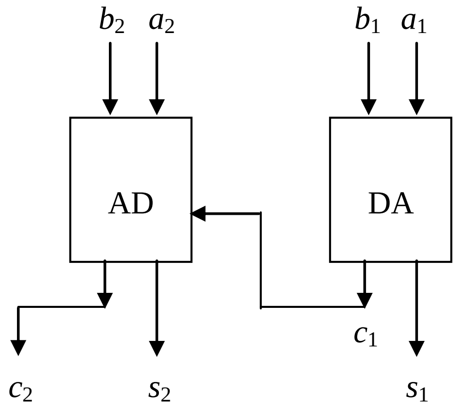
Ta vẽ được mạch thực hiện hai hàm Boole $s = x \oplus y \oplus z$ và $c = z(x \oplus y) + xy$ như hình dưới đây, mạch này là ghép nối của hai mạch cộng bán phần (DA) và một cổng OR. Đây là mạch cộng ba số 1-bit hay mạch cộng toàn phần, ký hiệu là AD.



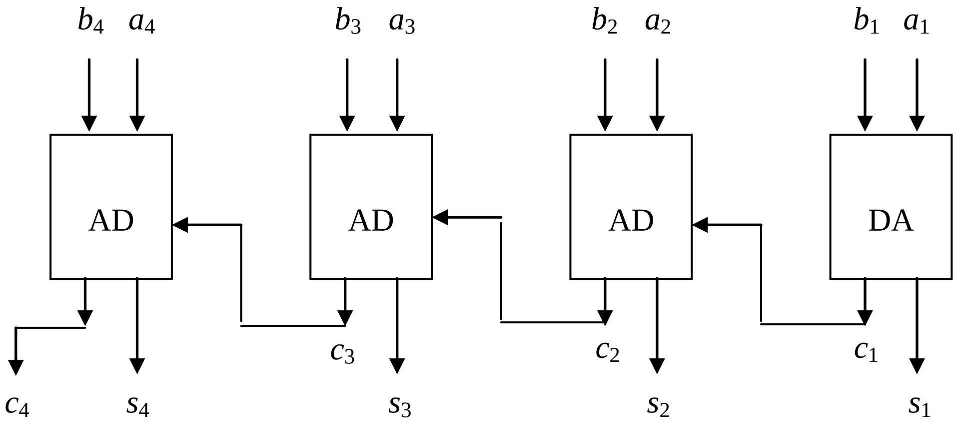


Trở lại phép cộng hai số 2-bit $\overline{a_2a_1}$ và $\overline{b_2b_1}$. Tổng $\overline{a_2a_1}+\overline{b_2b_1}$ là một số 3-bit $\overline{c_2s_2s_1}$, trong đó s_1 là bit tổng của a_1+b_1: $s_1 = a_1 \oplus b_1$, s_2 là bit tổng của $a_2+b_2+c_1$, với c_1 là bit nhớ của a_1+b_1: $s_2 = a_2 \oplus b_2 \oplus c_1$ và c_2 là bit nhớ của $a_2+b_2+c_1$.

Ta có được mạch thực hiện ba hàm Boole s_1, s_2, c_2 như hình dưới đây.



Dễ dàng suy ra mạch cộng hai số n-bit, với n là một số nguyên dương bất kỳ. Hình sau cho một mạch cộng hai số 4-bit.



5.4. Cực tiểu hoá các mạch logic

Hiệu quả của một mạch tổ hợp phụ thuộc vào số các cổng và sự bố trí các cổng đó. Quá trình thiết kế một mạch tổ hợp được bắt đầu bằng một bảng chỉ rõ các giá trị đầu ra đối với mỗi một tổ hợp các giá trị đầu vào. Ta luôn luôn có thể sử dụng khai triển tổng các tích của mạch để tìm tập các cổng lôgic thực hiện mạch đó. Tuy nhiên,khai triển tổng các tích có thể chứa các số hạng nhiều hơn mức cần thiết. Các số hạng trong khai triển tổng các tích chỉ khác nhau ở một biến, sao cho trong số hạng này xuất hiện biến đó và trong số hạng kia xuất hiện phần bù của nó, đều có thể được tổ hợp lại. Chẳng hạn, xét mạch có đầu ra bằng 1 khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hoặc $x = z = 1$ và $y = 0$. Khai triển tổng các tích của mạch này là

$xyz + \overline{x}yz$. Hai tích trong khai triển này chỉ khác nhau ở một biến, đó là biến *y*. Ta có thể tổ hợp lại như sau:

$$xyz + x\overline{y}z = (y + \overline{y})xz = 1xz = xz.$$

Do đó *xz* là biểu thức với ít phép toán hơn biểu diễn mạch đã cho. Mạch thứ hai chỉ dùng một cổng, trong khi mạch thứ nhất phải dùng ba cổng và một bộ đảo (cổng NOT).

5.4.1. Bản đồ Karnaugh:

Để làm giảm số các số hạng trong một biểu thức Boole biểu diễn một mạch, ta cần phải tìm các số hạng để tổ hợp lại. Có một phương pháp đồ thị, gọi là bản đồ Karnaugh, được dùng để tìm các số hạng tổ hợp được đối với các hàm Boole có số biến tương đối nhỏ. Phương pháp mà ta mô tả dưới đây đã được Maurice Karnaugh đưa ra vào năm 1953. Phương pháp này dựa trên một công trình trước đó của E.W. Veitch. Các bản đồ Karnaugh cho ta một phương pháp trực quan để rút gọn các khai triển tổng các tích, nhưng chúng không thích hợp với việc cơ khí hoá quá trình này. Trước hết, ta sẽ minh hoạ cách dùng các bản đồ Karnaugh để rút gọn biểu thức của các hàm Boole hai biến.

Có bốn hội sơ cấp khác nhau trong khai triển tổng các tích của một hàm Boole có hai biến x và y. Một bản đồ Karnaugh đối với một hàm Boole hai biến này gồm bốn ô vuông, trong đó hình vuông biểu diễn hội sơ cấp có mặt trong khai triển được ghi số 1. Các hình ô được gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến.

	y	$\overline{y}$
x	xy	$x\overline{y}$
$\overline{x}$	$\overline{x}y$	$\overline{x}\overline{y}$

Thí dụ 7: Tìm các bản đồ Karnaugh cho các biểu thức:

a) $xy + \overline{x}y$ b) $x\overline{y} + \overline{x}y$ c) $x\overline{y} + \overline{x}y + \overline{x}\overline{y}$

và rút gọn chúng.

Ta ghi số 1 vào ô vuông khi hội sơ cấp được biểu diễn bởi ô đó có mặt trong khai triển tổng các tích. Ba bản đồ Karnaugh được cho trên hình sau.

	y	
x	1	
$\overline{x}$	1	

	1
1	

	y	$\overline{y}$
x		1
$\overline{x}$	1	1

Việc nhóm các hội sơ cấp được chỉ ra trong hình trên bằng cách sử dụng bản đồ Karnaugh cho các khai triển đó. Khai triển cực tiểu của tổng các tích này tương ứng là:

a) y, b) $x\overline{y} + \overline{x}y$, c) $\overline{x} + \overline{y}$.

Bản đồ Karnaugh ba biến là một hình chữ nhật được chia thành tám ô. Các ô đó biểu diễn tám hội sơ cấp có được. Hai ô được

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến. Một trong các cách để lập bản đồ Karnaugh ba biến được cho trong hình bên.

Để rút gọn khai triển tổng các tích ba biến, ta sẽ dùng bản đồ Karnaugh để nhận dạng các hội sơ cấp có thể tổ hợp lại. Các khối gồm hai ô kề nhau biểu diễn cặp các hội sơ cấp có thể được tổ hợp lại thành một tích của hai biến; các khối 2 x 2 và 4 x 1 biểu diễn các hội sơ cấp có thể tổ hợp lại thành một biến duy nhất; còn khối gồm tất cả tám ô biểu diễn một tích không có một biến nào, cụ thể đây là biểu thức 1.

Thí dụ 8: Dùng các bản đồ Karnaugh ba biến để rút gọn các khai triển tổng các tích sau:

a) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

b) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Bản đồ Karnaugh cho những khai triển tổng các tích này được cho trong hình sau:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

Việc nhóm thành các khối cho thấy rằng các khai triển cực tiểu thành các tổng Boole của các tích Boole là:

a) $x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$, b) $\bar{y} + \bar{x}z$, c) $x + \bar{y} + z$.

Bản đồ Karnaugh bốn biến là một hình vuông được chia làm 16 ô. Các ô này biểu diễn 16 hội sơ cấp có được. Một trong những cách lập bản đồ Karnaugh bốn biến được cho trong hình dưới đây.

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
wx	$wxyz$	$wxy\overline{z}$	$wx\overline{y}\,\overline{z}$	$wx\overline{y}z$
$w\overline{x}$	$w\overline{x}yz$	$w\overline{x}y\overline{z}$	$w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$w\overline{x}\,\overline{y}z$
$\overline{w}\,\overline{x}$	$\overline{w}\,\overline{x}yz$	$\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$
$\overline{w}x$	$\overline{w}xyz$	$\overline{w}xy\overline{z}$	$\overline{w}x\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{w}x\overline{y}z$

Hai ô được gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến. Do đó, mỗi một ô kề với bốn ô khác. Sự rút gọn một khai triển tổng các tích bốn biến được thực hiện bằng cách nhận dạng các khối gồm 2, 4, 8 hoặc 16 ô biểu diễn các hội sơ cấp có thể tổ hợp lại được. Mỗi ô biểu diễn một hội sơ cấp hoặc được dùng để lập một tích có ít biến hơn hoặc được đưa vào trong khai triển. Cũng như trong trường hợp bản đồ Karnaugh hai và ba biến, mục tiêu là cần phải nhận dạng các khối lớn nhất có chứa các số 1 bằng cách dùng một số ít nhất các khối, mà trước hết là các khối lớn nhất.

5.4.2. Phương pháp Quine-McCluskey:

5.4.2.1. Mở đầu

Ta đã thấy rằng các bản đồ Karnaugh có thể được dùng để tạo biểu thức cực tiểu của các hàm Boole như tổng của các tích Boole. Tuy nhiên, các bản đồ Karnaugh sẽ rất khó dùng khi số biến lớn hơn bốn. Hơn nữa, việc dùng các bản đồ Karnaugh lại dựa trên việc rà soát trực quan để nhận dạng các số hạng cần được nhóm lại. Vì những nguyên nhân đó, cần phải có một thủ tục rút gọn những khai triển tổng các tích có thể cơ khí hoá được. Phương pháp Quine-McCluskey là một thủ tục như vậy. Nó có thể được dùng cho các hàm Boole có số biến bất kỳ. Phương pháp này được W.V. Quine và E.J. McCluskey phát triển vào những năm 1950. Về cơ bản, phương pháp Quine-McCluskey có hai phần. Phần đầu là tìm các số hạng là ứng viên để đưa vào khai triển cực tiểu như một tổng các tích Boole mà ta gọi là các nguyên nhân nguyên tố. Phần thứ hai là xác định xem trong số các ứng viên đó, các số hạng nào là thực sự dùng được.

5.4.2.2. Định nghĩa:

Cho hai hàm Boole F và G bậc n. Ta nói G là một nguyên nhân của F nếu $T_G \subset T_F$, nghĩa là G $\Rightarrow$F là một hằng đúng.

Dễ thấy rằng mỗi hội sơ cấp trong một dạng tổng chuẩn tắc của F là một nguyên nhân của F. Hội sơ cấp A của F được gọi là một nguyên nhân nguyên tố của F nếu trong A xoá đi một biến thì hội nhận được không còn là nguyên nhân của F.

Nếu $F_1, \ldots, F_k$ là các nguyên nhân của F thì $T_{F_i} \subset T_F,\ 1 \le i \le k$. Khi đó

$T_{\sum_{i=1}^{k} F_i} = \bigcup_{i=1}^{k} T_{F_i} \subset T_F$. Do đó $\sum_{i=1}^{k} F_i$ là một nguyên nhân của F.

Cho S là một hệ các nguyên nhân của F. Ta nói rằng hệ S là đầy đủ đối với F nếu $F = \sum_{G \in S} G$, nghĩa là $T_F = \bigcup_{G \in S} T_G$.

5.4.2.3. Mệnh đề:

Hệ các nguyên nhân nguyên tố của hàm F là một hệ đầy đủ.

Chứng minh: Gọi S là hệ các nguyên nhân nguyên tố của F. Ta có $T_G \subset T_F, \forall g \in S$,

Nên $T_{\sum_{G \in S} G} = \bigcup_{G \in S} T_G \subset T_F$. Giả sử dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn của F là $F = \sum_{G' \in S'} G'$ nên $T_F = \bigcup_{G' \in S'} T_{G'}$.

Xét $G' \in S'$, nếu G' không phải là nguyên nhân nguyên tố của F thì bằng cách xoá bớt một số biến trong G' ta thu được nguyên nhân nguyên tố G của F. Khi đó $T_{G'} \subset T_G$ và $\bigcup_{G' \in S'} T_{G'} \subset \bigcup_{G \in S} T_G$ hay $T_F \subset \bigcup_{G \in S} T_G$. Vì vậy $T_F = \bigcup_{G \in S} T_G$ hay $F = \sum_{G \in S} G$.

Dạng tổng chuẩn tắc $F = \sum_{G \in S} G$ được gọi là dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của F.

5.4.2.4. Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn:

Giả sử F là một hàm Boole n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mỗi hội sơ cấp của n biến đó được biểu diễn bằng một dãy n ký hiệu trong bảng {0, 1, −} theo quy ước: ký tự thứ i là 1 hay 0 nếu x_i có mặt trong hội sơ cấp là bình thường hay với dấu phủ định, còn nếu x_i không có mặt thì ký tự này là −. Chẳng hạn, hội sơ cấp của 6 biến $x_1, \ldots, x_6$ là $\overline{x_1} x_3 x_4 \overline{x_6}$ được biểu diễn bởi 0−11−0. Hai hội sơ cấp được gọi là kề nhau nếu các biểu diễn nói trên của chúng chỉ khác nhau ở một vị trí 0, 1. Rõ ràng các hội sơ cấp chỉ có thể dán được với nhau bằng phép dán $\mathrm{A}x + \mathrm{A}\overline{x} = A$ nếu chúng là kề nhau.

Thuật toán được tiến hành như sau: Lập một bảng gồm nhiều cột để ghi các kết quả dán. Sau đó lần lượt thực hiện các bước sau:

Bước 1: Viết vào cột thứ nhất các biểu diễn của các nguyên nhân hạng n của hàm Boole F. Các biểu diễn được chia thành từng nhóm, các biểu diễn trong mỗi nhóm có số các ký hiệu 1 bằng nhau và các nhóm xếp theo thứ tự số các ký hiệu 1 tăng dần.

Bước 2: Lần lượt thực hiện tất cả các phép dán các biểu diễn trong nhóm i với các biểu diễn trong nhóm i+1 (i=1, 2, …). Biểu diễn nào tham gia ít nhất một phép dán sẽ được ghi nhận một dấu * bên cạnh. Kết quả dán được ghi vào cột tiếp theo.

Bước 3: Lặp lại Bước 2 cho cột kế tiếp cho đến khi không thu thêm được cột nào mới. Khi đó tất cả các biểu diễn không có dấu * sẽ cho ta tất cả các nguyên nhân nguyên tố của *F*.

Thí dụ 9: Tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của các hàm Boole:

$$F_1 = \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}yz + w\overline{x}\,\overline{y}z + w\overline{x}yz + \overline{w}xyz + wxyz,$$

$$F_2 = \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}yz + w\overline{x}yz + wx\overline{y}\,\overline{z} + wx\overline{y}z + wxy\overline{z} + wxyz.$$

0 0 0 1 *	0 − 0 1 *	0 − − 1
0 1 0 1 *	0 0 − 1 *	− 0 − 1
0 0 1 1 *	− 0 0 1 *	− − 1 1
1 0 0 1 *	− 0 1 1 *	
1 0 1 1 *	1 0 − 1 *	
0 1 1 1 *	0 1 − 1 *	
1 1 1 1 *	0 − 1 1 *	
	1 − 1 1 *	
	− 1 1 1 *	

0 0 1 0 *	0 0 1 −	1 1 − −
0 0 1 1 *	− 0 1 1	
1 1 0 0 *	1 1 0 − *	
1 0 1 1 *	1 1 − 0 *	
1 1 0 1 *	1 − 1 1	
1 1 1 0 *	1 1 − 1 *	
1 1 1 1 *	1 1 1 − *	

Từ các bảng trên ta có dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của F_1 và F_2 là:

$$F_1 = \overline{w}z + \overline{x}z + yz,$$

$$F_2 = \overline{w}\,\overline{x}y + \overline{x}yz + wyz + wx.$$

5.4.2.5. Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu:

Sau khi tìm được dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của hàm Boole *F*, nghĩa là tìm được tất cả các nguyên nhân nguyên tố của nó, ta tiếp tục phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu (cực tiểu) của *F* như sau.

Lập một bảng chữ nhật, mỗi cột ứng với một cấu tạo đơn vị của *F* (mỗi cấu tạo đơn vị là một hội sơ cấp hạng n trong dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn của *F*) và mỗi dòng ứng với một nguyên nhân nguyên tố của *F*. Tại ô (i, j), ta đánh dấu cộng (+) nếu nguyên nhân nguyên tố ở dòng i là một phần con của cấu tạo đơn vị ở cột j. Ta cũng nói rằng khi đó nguyên nhân nguyên tố i là phủ cấu tạo đơn vị j. Một hệ S các nguyên nhân nguyên tố của *F* được gọi là phủ hàm *F* nếu mọi cấu tạo đơn vị của *F* đều được phủ ít nhất bởi một thành viên của hệ. Dễ thấy rằng nếu hệ S là phủ hàm *F* thì nó là đầy đủ, nghĩa là tổng của các thành viên trong S là bằng *F*.

Một nguyên nhân nguyên tố được gọi là cốt yếu nếu thiếu nó thì một hệ các nguyên nhân nguyên tố không thể phủ hàm *F*. Các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu được tìm như sau:

tại những cột chỉ có duy nhất một dấu +, xem dấu + đó thuộc dòng nào thì dòng đó ứng với một nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Việc lựa chọn các nguyên nhân nguyên tố trên bảng đã đánh dấu, để được một dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu, có thể tiến hành theo các bước sau.

Bước 1: Phát hiện tất cả các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 2: Xoá tất cả các cột được phủ bởi các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 3: Trong bảng còn lại, xoá nốt những dòng không còn dấu + và sau đó nếu có hai cột giống nhau thì xoá bớt một cột.

Bước 4: Sau các bước trên, tìm một hệ S các nguyên nhân nguyên tố với số biến ít nhất phủ các cột còn lại.

Tổng của các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu và các nguyên nhân nguyên tố trong hệ S sẽ là dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của hàm *F*.

Các bước 1, 2, 3 có tác dụng rút gọn bảng trước khi lựa chọn. Độ phức tạp chủ yếu nằm ở Bước 4. Tình huống tốt nhất là mọi nguyên nhân nguyên tố đều là cốt yếu. Trường hợp này không phải lựa chọn gì và hàm *F* có duy nhất một dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu cũng chính là dạng tổng chuẩn tắc thu gọn. Tình huống xấu nhất là không có nguyên nhân nguyên tố nào là cốt yếu. Trường hợp này ta phải lựa chọn toàn bộ bảng.

Thí dụ 10: Tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của các hàm Boole cho trong Thí dụ 9.

	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$w\bar{x}\bar{y}z$	$w\bar{x}yz$	$\bar{w}xyz$	$wxyz$
$\bar{w}z$	+	+	+				
$\bar{x}z$	+		+	+	+		
yz			+		+	+	+

Các nguyên nhân nguyên tố đều là cốt yếu nên dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của F_1 là:

$$F_1 = \bar{w}z + \bar{x}z + yz$$

	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}xyz$	$wx\bar{y}\bar{z}$	$wx\bar{y}z$	$wxy\bar{z}$	$wxyz$
wx				+	+	+	+
$\bar{w}\bar{x}y$	+	+					
$\bar{x}yz$		+	+				
wyz			+				+

Các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu nằm ở dòng 1 và 2. Sau khi rút gọn, bảng còn dòng 3, 4 và một cột 3. Việc chọn S khá đơn giản: có thể chọn một trong hai nguyên nhân nguyên tố còn lại. Vì vậy ta được hai dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu là:

$F_2 = wx + \overline{w}\overline{x}y + \overline{x}yz$,

$F_2 = wx + \overline{w}\overline{x}y + wyz$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

1. Cho S là tập hợp các ước nguyên dương của 70, với các phép toán •, + và ’ được định nghĩa trên S như sau:

a • b = UCLN(a, b), a + b = BCNN(a, b), a’ = 70/a.

Chứng tỏ rằng S c□ng với các phép toán •, + và ’ lập thành một đại số Boole.

2. Chứng minh trực tiếp các định lý 6b, 7b, 8b (không dùng đối ngẫu để suy ra từ 6a, 7a, 8a).

3. Chứng minh rằng:

a) (a+b).(a+b’) = a;

b) (a.b)+(a’.c) = (a+c).(a’+b).

4. Cho các hàm Boole F_1, F_2, F_3 xác định bởi bảng sau:

x	**y**	**z**	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Vẽ mạch thực hiện các hàm Boole này.

5. Hãy dùng các cổng NAND để xây dựng các mạch với các đầu ra như sau:

a) $\overline{x}$ b) xy c) $x+y$ d) x$\oplus$ y.

6. Hãy dùng các cổng NOR để xây dựng các mạch với các đầu ra được cho trong Bài tập 5.

7. Hãy dùng các cổng NAND để dựng mạch cộng bán phần.

8. Hãy dùng các cổng NOR để dựng mạch cộng bán phần.

9. Dùng các bản đồ Karnaugh, tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu (khai triển cực tiểu) của các hàm Boole ba biến sau:

a) $F = \overline{x}yz + \overline{x}\overline{y}z$.

b) $F = xyz + xy\overline{z} + +\overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z}$.

c) $F = xy\bar{z} + + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$.

d) $F = xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

10. Dùng các bản đồ Karnaugh, tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của các hàm Boole bốn biến sau:

a) $F = wxyz + wx\bar{y}z + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z$.

b) $F = wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.

c) $F = wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.

d) $F = wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.

11. Dùng phương pháp Quine-McCluskey, tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của các hàm Boole ba biến cho trong Bài tập 9 và hãy vẽ mạch thực hiện các dạng tối thiểu tìm được.

12. Dùng phương pháp Quine-McCluskey, tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của các hàm Boole bốn biến cho trong Bài tập 9 và hãy vẽ mạch thực hiện các dạng tối thiểu tìm được.

13. Hãy giải thích làm thế nào có thể dùng các bản đồ Karnaugh để rút gọn dạng tích chuẩn tắc (tích các tổng) hoàn toàn của một hàm Boole ba biến. (Gợi ý: Đánh dấu bằng số 0 tất cả các tuyển sơ cấp trong biểu diễn và tổ hợp các khối của các tuyển sơ cấp.)

14. Dùng phương pháp ở Bài tập 13, hãy rút gọn dạng tích chuẩn tắc hoàn toàn:

$$F = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z).$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Kenneth Rosen. *Toán học rời rạc và ứng dụng trong tin học*. NXB KHKT Hà nội. 1998.

[2]. Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa. *Giáo trình toán học rời rạc*. ĐHBK Hà nội. 1994.

[3]. Ore O. American methematical society. *Theory of Graphs*. 1962.

[4]. Phan Đình Diệu. *Lý thuyết Ôtômát hữu hạn và thuật toán*. NXB ĐHTHCN. 1977.

[5]. Vương Tất Đạt. *Lôgic học đại cương*. NXB Đại học quốc gia HN. 2002

[6]. Đỗ Văn Nhơn. *Giáo trình toán rời rạc*. ĐH Công nghệ thông tin, ĐH Quốc gia TP Hồ Chí Minh.

ĐỀ THI THAM KHẢO

Đề 1:

<u>Câu 1:</u>

Hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị đúng nếu $z \rightarrow x.y$ đúng; nếu không thì hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị sai

a. tìm dạng chính tắc tuyển và chính tắc hội của hàm f
b. tìm dạng tối thiểu của hàm f

<u>Câu 2:</u>

Môn học có 8 đề thi khác nhau cho lớp có 40 học viên.

a. số cách chọn 8 học viên trong lớp học là bao nhiêu ?
b. từ 8 học viên đã chọn , một học viên đã nhận một đề thi trong số 8 đề. Số các cách chọn đề thi còn lại cho 7 học viên kia là bao nhiêu?

<u>Câu 3:</u>

Sử dụng phép tính mệnh đề chứng minh biểu thức sau đúng:

$$((p \wedge q) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Đề 2:

<u>Câu 1:</u>

Hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị đúng nếu $z \leftrightarrow x + y$ sai; nếu không thì hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị sai

a. tìm dạng chính tắc tuyển và chính tắc hội của hàm f
b. tìm dạng tối thiểu của hàm f

<u>Câu 2:</u>

Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5}. Cho R là quan hệ trên A= {(1,1); (2,1); (2,2); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (4,4); (5, 5)}.

a. Quan hệ R trên A là quan hệ thứ tự hay tương đương không, giải thích.
b. Nếu quan hệ R trên A là quan hệ thứ tự, vẽ biểu đồ Hasse cho (A, R).

<u>Câu 3:</u>

Tìm số lượng xâu độ dài 12 thỏa mãn điều kiện:

a. tạo thành từ những ký tự ‘a’, ‘b’, ‘c’
b. tạo thành từ những ký tự ‘a’, ‘b’, ‘c’ theo tỷ lệ xuất hiện như nhau hay theo tỷ lệ 3:4:5

Đề 3:

Câu 1:

Hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị đúng nếu $x \rightarrow y$ đúng và $y \rightarrow z$ đúng; nếu không thì hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị sai

a. tìm dạng chính tắc tuyển và chính tắc hội của hàm f
b. tìm dạng tối thiểu của hàm f

Câu 2:

Cho tập A = { 1, 2, 3, 4 } và quan hệ R_1 = { (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4) } và R_2 = { (1, 1); (2, 2); (3,1); (3, 3); (3, 4); (4,1); (4, 4) } trên A.

a. xác định các quan hệ trên là thứ tự ?
b. nếu các quan hệ là thứ tự, vẽ biểu đồ Hasse cho các quan hệ trên A.

Câu 3:

Tìm số lượng các xâu độ dài 10 chứa các ký số 0, 1, 2 sao cho mỗi xâu không có dãy 01 ở đầu và không có dãy 12 ở cuối xâu.

Đề 4:

Câu 1:

Hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị đúng nếu $z \leftrightarrow x + y$ sai; nếu không thì hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị sai

a. tìm dạng chính tắc tuyển và chính tắc hội của hàm f
b. tìm dạng tối thiểu của hàm f

Câu 2:

Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5}. Cho R là quan hệ trên A= {(1,1); (2,1); (2,2); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (4,4); (5, 5)}.

a. Quan hệ R trên A là quan hệ thứ tự hay tương đương không, giải thích.
b. Nếu quan hệ R trên A là quan hệ thứ tự, vẽ biểu đồ Hasse cho (A, R).

Câu 3:

Sử dụng phép tính mệnh đề chứng minh biểu thức sau đúng:

$$((p \wedge q) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Đề 5:

Câu 1:

Hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị đúng nếu $x \to y$ đúng và $y \to z$ đúng; nếu không thì hàm đại số bool f(x,y,z) nhận giá trị sai

a. tìm dạng chính tắc tuyển và chính tắc hội của hàm f
b. tìm dạng tối thiểu của hàm f

Câu 2:

Cho tập A = { 1, 2, 3, 4 } và quan hệ R_1 = { (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4) } và R_2 = { (1, 1); (2, 2); (3,1); (3, 3); (3, 4); (4,1); (4, 4) } trên A.

a. xác định các quan hệ trên là thứ tự ?
b. nếu các quan hệ là thứ tự, vẽ biểu đồ Hasse cho các quan hệ trên A.

Câu 3:

Tìm số lượng xâu độ dài 12 thỏa mãn điều kiện:

a. tạo thành từ những ký tự ‘a’, ‘b’, ‘c’
b. tạo thành từ những ký tự ‘a’, ‘b’, ‘c’ theo tỷ lệ xuất hiện như nhau hay theo tỷ lệ 3:4:5