

## BÀI TẬP CHƯƠNG 5

### I. Biến đổi Z

#### Bài 1:

(a)  $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$\rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow X(z) = 1 - \frac{1}{1 - za^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$$

(b)  $x[n] = a^n u[-n-1]$

$$\rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow X(z) = 1 + \frac{1}{1 - za^{-1}} = \frac{z-2a}{z-a}, \quad |z| < |a|$$

(c)  $x[n] = \{3, 5, -2, 0, 4, -3\}$

$$\rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-2}^3 x[n] z^{-n} = 5z^2 + 3z - 2 + \frac{4}{z^2} - \frac{3}{z^3}$$

#### Bài 2:

(a)  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$$\rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow X(z) = \frac{z(2z-\frac{5}{6})}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Điểm không:  $z = 0, z = \frac{5}{12}$

Điểm cực:  $z = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$

Vùng Roc:  $|z| > \frac{1}{2}$

(b)  $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

$$\rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] z^{-n} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{z-1}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow X(z) = \frac{(z-\frac{2}{3})(z-\frac{1}{4})}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

Điểm không:  $z = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{4}$

Điểm cực:  $z = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$

Vùng Roc:  $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$

$$(c) \ x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

$$\rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] z^{-n} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z - \frac{2}{3}}{z - \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z(2z - \frac{5}{6})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}, \quad |z| < \frac{1}{3} \text{ và } |z| > \frac{1}{2}$$

Điểm cực:  $z = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$

Vùng Roc:  $|z| < \frac{1}{3}$  và  $|z| > \frac{1}{2}$

### Bài 3:

$$(a) \ X(z) = \frac{z}{z(z-1)(z-2)^2}, \quad |z| > 2$$

$$X(z) = -\frac{1}{4} + \frac{z}{z-1} - \frac{3z}{4(z-2)} + \frac{z}{2(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow x[n] = -\frac{1}{4}\delta[n] + (1 - 3 \cdot 2^{n-2} + n2^{n-2})u[n]$$

$$(b) \ X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{(z-1)(z-2)}, \quad |z| < 1$$

$$X(z) = 2z + \frac{3}{2} + \frac{z}{2(z-2)} - \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow x[n] = 2\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n] - (2^{n-1} + 1)u[-n-1]$$

$$(c) \ X(z) = \frac{3}{z-2}, \quad |z| > 2$$

$$X(z) = \frac{3z}{2(z-2)} - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x[n] = 3 \cdot 2^{n-1} u[n] - \frac{3}{2} \delta[n]$$

$$(d) \ X(z) = \frac{2+z^{-2}+3z^{-4}}{z^2+4z+3}, \quad |z| > 0$$

$$X(z) = -\frac{3z}{z+1} + \frac{29z}{81(z+3)} + \frac{214}{81} - \frac{52}{27z} + \frac{16}{9z^2} - \frac{4}{3z^3} + \frac{1}{z^4}$$

$$\Rightarrow x[n] = (-3(-1)^n - 29(-3)^{n-5})u[n] + \frac{214}{81}\delta[n] - \frac{52}{17}\delta[n-1] + \frac{16}{9}\delta[n-2] - \frac{4}{3}\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

$$(e) \ X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$\Rightarrow x[n] = (n+1)a^n u[n] \quad (\text{tra bảng cho lẹ, thi chắc ko có đâu ^^})$$

## II. Hàm truyền

### Bài 1:

$$x[n] = \{1, 1, 1, 1\} = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$\Rightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

$$h[n] = \{1, 1, 1\} = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$\Rightarrow H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$\rightarrow Y(z) = X(z)H(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

$$\rightarrow Y(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

$$\Rightarrow y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

$$= \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

## Bài 2:

(a) Tín hiệu vào:  $x[n] = u[n] \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$

Tín hiệu ra:  $y[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \rightarrow Y(z) = \frac{2z}{z-\frac{1}{3}}, |z| > \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{12\frac{1}{3}z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{4}{z}$$

$$\Rightarrow \text{Đáp ứng xung: } h[n] = 2\delta[n] - 4\delta[n-1] + 12\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(b) Khi tín hiệu vào là:  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$

$$\rightarrow Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}} = \frac{8z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{6z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Tín hiệu lỗi ra: } y[n] = \left[8\left(\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$$

## Bài 3:

$$y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z) = X(z)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

(a) Hàm truyền:  $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$

(b) Đáp ứng xung:

(c) Đáp ứng nhảy bậc:

## Bài 4:

\*Nhận xét: Đây là sơ đồ loại 2 nên ta chuyển về sơ đồ loại 1 để làm (Tự chuyển 😊)

Từ sơ đồ loại 1 ta sẽ có được mối quan hệ  $X(z)$  và  $Y(z)$ :

$$Y(z) = X(z) + \frac{k}{3}z^{-1}X(z) + \frac{k}{2}z^{-1}Y(z)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{k}{3}z^{-1}}{1 - \frac{k}{2}z^{-1}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k}{2}z^{-1}} - \frac{2}{3}, \quad |z| > \left|\frac{k}{2}\right|$$

Hệ thống ổn định khi:  $\left|\frac{k}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -2 < k < 2$

### III. Ứng dụng của biến đổi Z một phía

**Bài 1:** (thuộc phần Laplace)

**Bài 2:**

(a)  $y[n] - 3y[n-1] = x[n]$  với  $x[n] = 4u[n], y[-1] = 1$

$$\rightarrow Y(z) - 3z^{-1}Y(z) - 1 = X(z)$$

$$\rightarrow Y(z)(1 - 3z^{-1}) = 1 + \frac{4}{1 - z^{-1}}$$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{7}{1 - 3z^{-1}} - \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow y[n] = (7 \cdot 3^n - 2)u[n]$$

(b)  $y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$  với  $x[n] = u[n], y[-1] = 3, y = 2$

$$\rightarrow Y(z) - 5(z^{-1}Y(z) + 3) + 6(z^{-2}Y(z) + 3z^{-1} + 2) = X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{8}{1 - 2z^{-1}} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{1 - 3z^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2} + 2^{n+3} - \frac{1}{2} \cdot 3^{n+2}\right)u[n]$$