Bài 12.
Các thuật toán sắp xếp nhanh O(nlogn)

- Sắp xếp nhanh – Quick sort
- Sắp xếp trộn - Merge sort
- Vun đống – Heap sort

Chia và trị - Divide and conquer

- Chia và trị là phương pháp thiết kế thuật toán theo kiểu:
  - Phân chia: Chia dữ liệu đầu vào S của bài toán thành 2 tập con rời nhau S_1 và S_2
  - Đệ qui: Giải bài toán với dữ liệu vào là các tập con S_1 và S_2
  - Trị: kết hợp các kết quả của S_1 và S_2 thành kết quả của S
- Trường hợp cơ sở cho thuật toán đệ qui ở đây là các bài toán có kích thước 0 hoặc 1

Sắp xếp nhanh – Quick sort

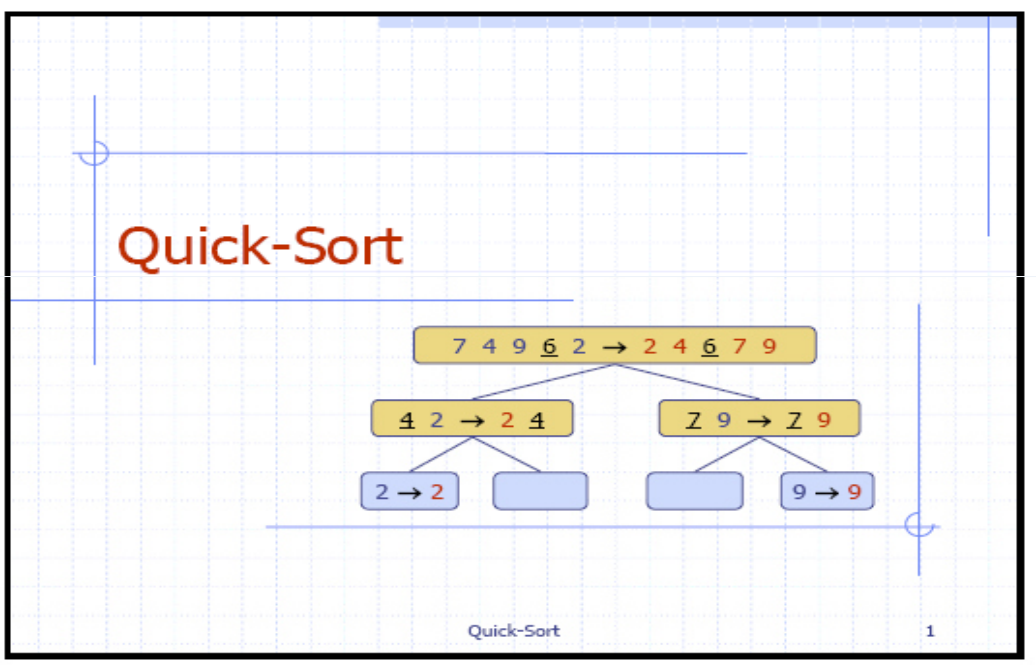
- **Ý tưởng (dùng p.p chia và trị):**
  - Thực hiện phân hoạch dãy S cần sắp thành 3 dãy S1, **S2**, S3. Trong đó:
    - S_2 chỉ có một phần tử, tất cả các phần tử của dãy S3 đều > phần tử của dãy S2.
    - Tất cả các phần tử của dãy S1 đều ≤ phần tử của dãy S2
    - Dãy S1, S3 có thể là rỗng
  - Tiếp tục phân hoạch dãy S1 và S3 độc lập theo nguyên tắc trên đến khi dãy cần thực hiện phân hoạch chỉ có một phần tử thì dừng lại. Khi đó ta được dãy các phần tử được sắp.

Thuật toán sắp xếp Quick sort

- Từ ý tưởng của thuật toán, ta có thể dễ dàng xây dựng thuật toán sắp xếp dưới dạng đệ qui như sau:

```
Algorithm QuickSort (array A, i, j );
Input: Dãy các phần tử A[i],..,A[j] và hai số nguyên i, j
Output: Dãy A[i],..,A[j] được sắp.
 if  i < j then
    Partition (A,i, j, k);  //k lấy chỉ số của phần tử làm S2
    Quicksort (A,i, k-1);
    Quicksort (A,k+1, j);
```

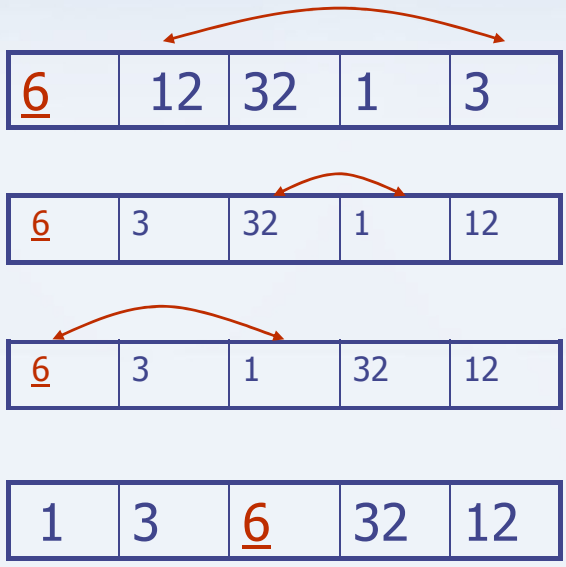
Ví dụ



Vấn đề đặt ra ở đây là phân hoạch dãy S như thế nào?

Thuật toán phân hoạch

- Chọn một phần tử bất kỳ của dãy làm dãy S2 (phần tử này được gọi là phần tử chốt - pivot).
- Thực hiện chuyển các phần tử có khóa ≤ phần tử chốt về bên trái và các phần tử > phần tử chốt về bên phải, sau đó đặt phần tử chốt về đúng vị trí của nó trong dãy.



Sau khi phân hoạch

Chú ý

• Phần tử chốt có thể được chọn là một phần tử bất kỳ của dãy.

- Phần tử chốt có thể chọn là phần tử đầu hoặc giữa hoặc cuối dãy.

- Tốt nhất là chọn phần tử chốt mà nó làm cho việc phân hoạch thành hai dãy S1 và S3 có số phần tử xấp xỉ bằng nhau.

Thuật toán

- **Phân hoạch dãy gồm các phần tử A[i],..,A[j]**

- **Chọn phần tử đầu dãy làm chốt**
- **Sử dụng 2 biến *left* và *right*:**
  - left chạy từ trái sang phải bắt đầu từ i.
  - right chạy từ phải sang trái bắt đầu từ j
  - Biến left được tăng cho tới khi A[left].Key> A[i].Key hoặc left >right
  - Biến right được giảm cho tới khi A[right].Key <= A[i] .Key
  - Nếu left< right thì ta đổi A[left] và A[right]
  - Quá trình trên được lặp lại cho tới khi nào left > right
  - Cuối cùng tráo đổi A[i] và A[right]

Ví dụ phân hoạch

10	3	24	1	4	21	54	5

i j

?

Thuật toán phân hoạch

Algorithm ***Partition (Array A, i, j, k)***
Input: Dãy các phần tử A[i],..,A[j], 2 số nguyên i, j
Output: Dãy A[i],..,A[j] được phân hoạch, k là chỉ số của phần tử làm S2.

```
p ← A[i];
left ← i; right ← j;
while ( left < right )
    while( A[left].Key <= p.Key && left≤right)
        left ← left+1;
    while( A[right].Key > p.Key ) right ←right-1;
    if  left < right  then
            SWAP(A[left],A[right]);
if  i<> right then
            A[i] ← A[right];
            A[right] ← p;
```


Ví dụ Sắp xếp dãy số

A= … | 10 | 3 | 24 | 1 | 4 | 21 | 54 | 5 | …

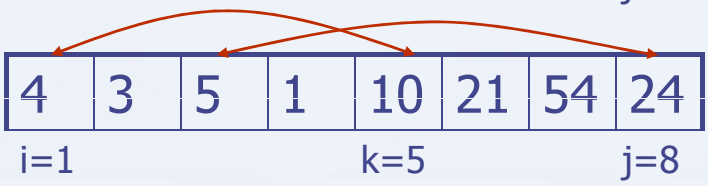
i=1 j=8

?

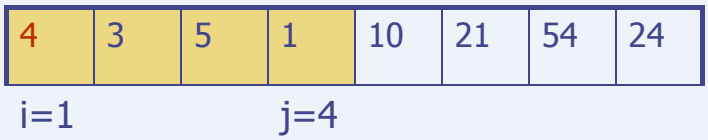
Mô tả quá trình Sắp xếp

Quicksort(A,1, 8)

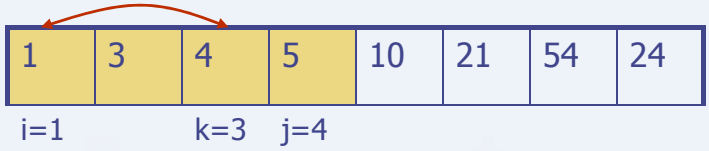
i<j partition(A,1,8,k)



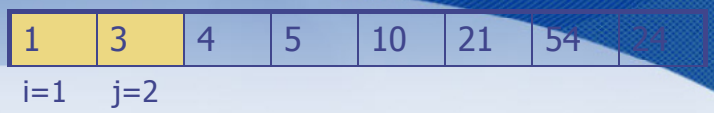
Quicksort(A,1, 4)



i<j partition(A,1,4,k)

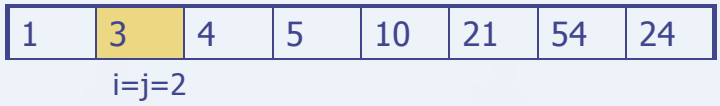


Quicksort(A,1, 2)

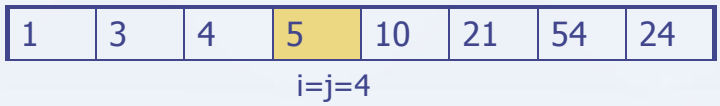


i<j partition(A,1,2,k)

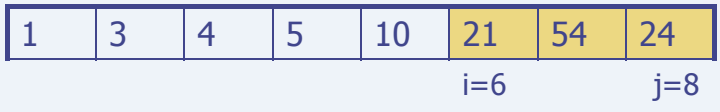
Quicksort(A,2, 2)



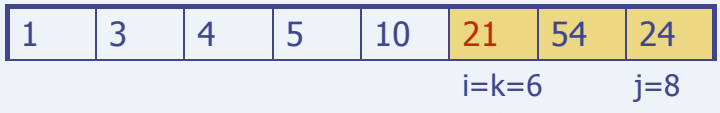
Quicksort(A,4, 4)



Quicksort(A,6, 8)



i<j partition(A,6,8,k)



Quicksort(A,6,5)

1	3	4	5	10	21	54	24

j=5 i=6

Quicksort(A,7,8)
i<j Partition(A,7,8,k)

1	3	4	5	10	21	54	24

i=7 k=j=8

Quicksort(A,7,7)

1	3	4	5	10	21	24	54

i=7 j=7

Quicksort(A,9,8)

1	3	4	5	10	21	24	54

i=9 j=8

Thời gian chạy

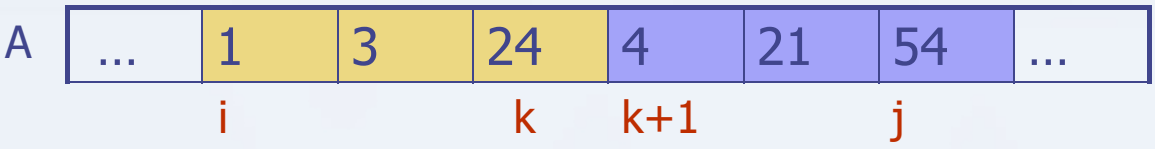
- Thủ tục partition kiểm tra tất cả các phần tử trong mảng nhiều nhất một lần, vì vậy nó mất thời gian tối đa là **O(*n*)**.
- Thủ tục partition sẽ chia phần mảng được sắp thành 2 phần.
- Mặt khác cần chia liên tiếp ***n*** phần tử thành hai phần thì số lần chia nhiều nhất là $\log_2 n$ lần.
- Vậy thời gian chạy của thuật toán QuickSort là ***O(nlogn)***

Thuật toán MergeSort

Ý tưởng:

- Giả sử ta có hai dãy **A[i],..,A[k]** và **A[k+1],..,A[j]** và hai dãy này đã được sắp.
- Thực hiện trộn hai dãy trên để được dãy **A[i],..,A[j]** cũng được sắp
- Do hai dãy **A[i],..,A[k]** và dãy **A[k+1],..,A[j]** đã được sắp nên việc trộn hai dãy thành một dãy được sắp là rất đơn giản.
- Vậy trộn như thế nào?

Ví dụ: Trộn hai dãy sau



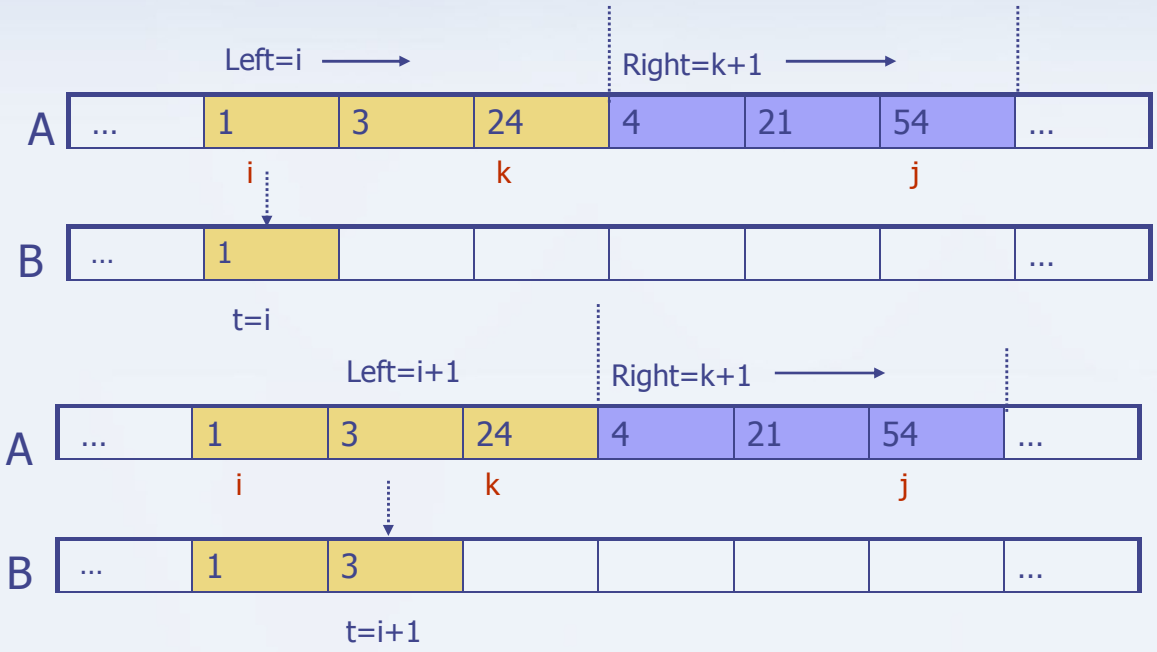
Thuật toán trộn

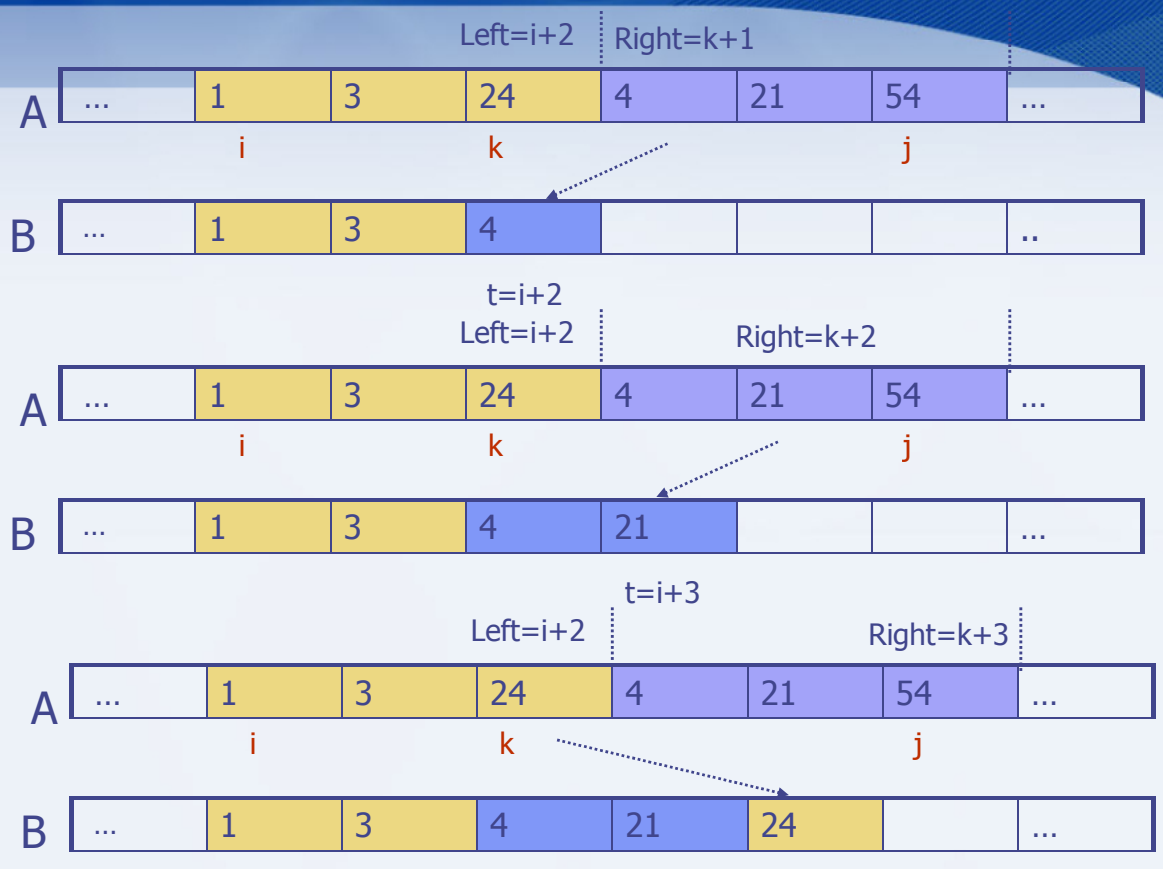
- Sử dụng hai biến left, right, t và sử dụng mảng phụ *B[i],..,B[j]*. left xuất phát từ i, right xuất phát từ k+1, t xuất phát tử i trên mảng phụ B.
- Nếu *A[left].key<A[right].key* thì *B[t]←A[left], t ←t+1* và *left←left+1*
- Nếu *A[left].key≥A[right].key* thì *B[t]←A[right], t ←t+1 và right←right+1*
- Quá trình trên được thực hiện cho đến khi *left>k* hoặc *right>j* thì dừng lại.

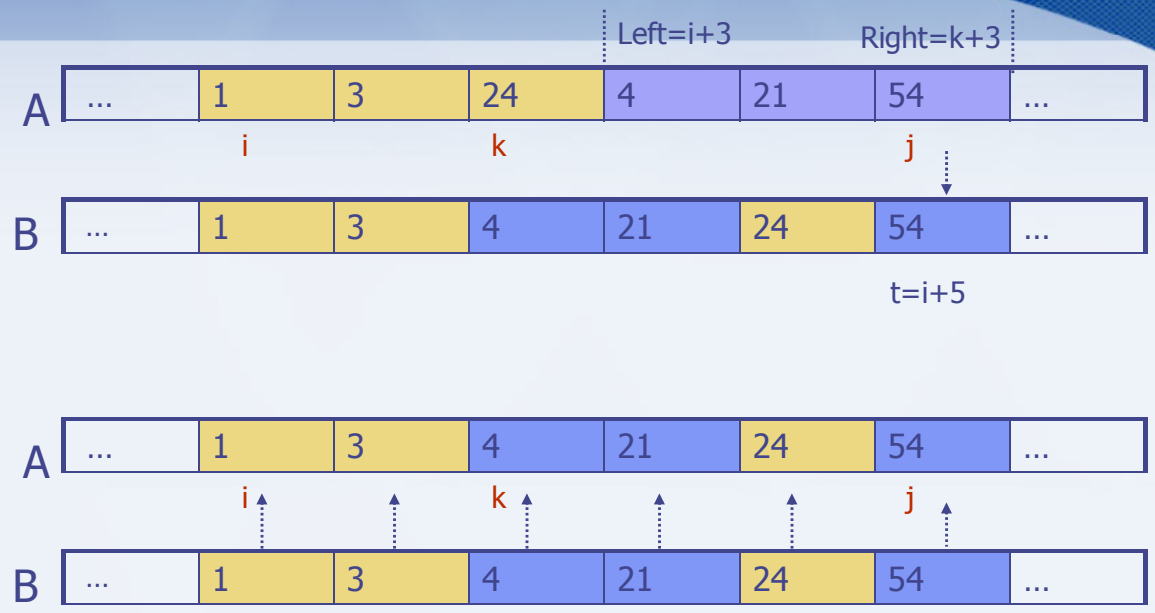
Thuật toán trộn (tiếp)

- Nếu *left>k* thì *B[t]←A[right],..,B[j]←A[j].*
- Nếu right>j thì B[t]←A[left], B[t+1]←A[letf+1],.., B[t+k-left]←A[k].
- Gán A[i] ←B[i], .., A[j] ←B[j]

Quá trình trộn dãy







Thuật toán giả mã

Algorithm ***Merge(array A, int i, int k, int j)***
Input: Hai dãy A[i],..,A[k] và A[k+1],..,A[j] đã được sắp và các số nguyên i, j
Output: Dãy A[i],..,A[j] cũng được sắp

```
left ←i; right←k+1; t ←i;
While (left≤k) and (right≤j)  do
    if A[left].key<A[right].key then
          B[t] ← A[left];
          left ←left+1;
          t ←t+1;
    else
          B[t] ← A[right];
          right ←right+1;
          t ←t+1 ;            //kết thúc while
```

```
If left>k then
   for r←right to j do
          B[t] ← A[r];
          t++;
else
    for r← left to k do
          B[t] ←A[r];
          t++;
for r ←i to j do
  A[r] ← B[r] ;
```

Thuật toán

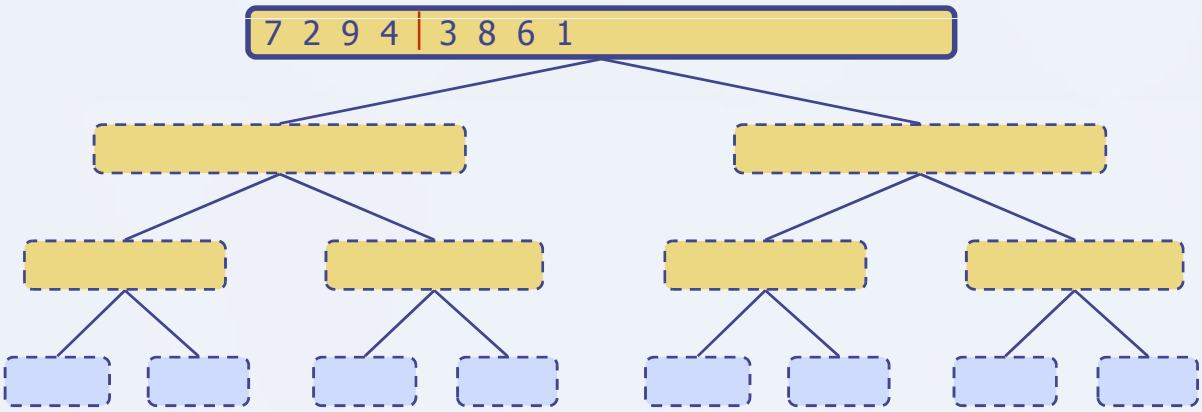
- Để sắp xếp dãy A[1],..,A[n] ta thực hiện như sau:
- Chia dãy trên thành hai dãy:A[1],..,A[k] và dãy A[k+1],..,A[n], trong đó k=(n+1)/2
- Thực hiện sắp xếp 2 dãy A[1],..,A[k] và A[k+1],..,A[n] độc lập cũng theo thuật toán Mergesort.
- Thực hiện trộn hai dãy:A[1],..,A[k] và dãy A[k+1],..,A[n] để được dãy A[1],..A[n] cũng được sắp

Thuật toán giả mã

Algorithm ***Mergesort(array A,int i, int j)***
Input: Dãy các phần tử A[i],..,A[j]
Output:Dãy A[i],..,A[j] được sắp.
if i<j **then**
  k←(i+j)/2;
  Mergesort(A,i, k);
  Mergesort(A, k+1,j);
  Merge(A, i, k, j);

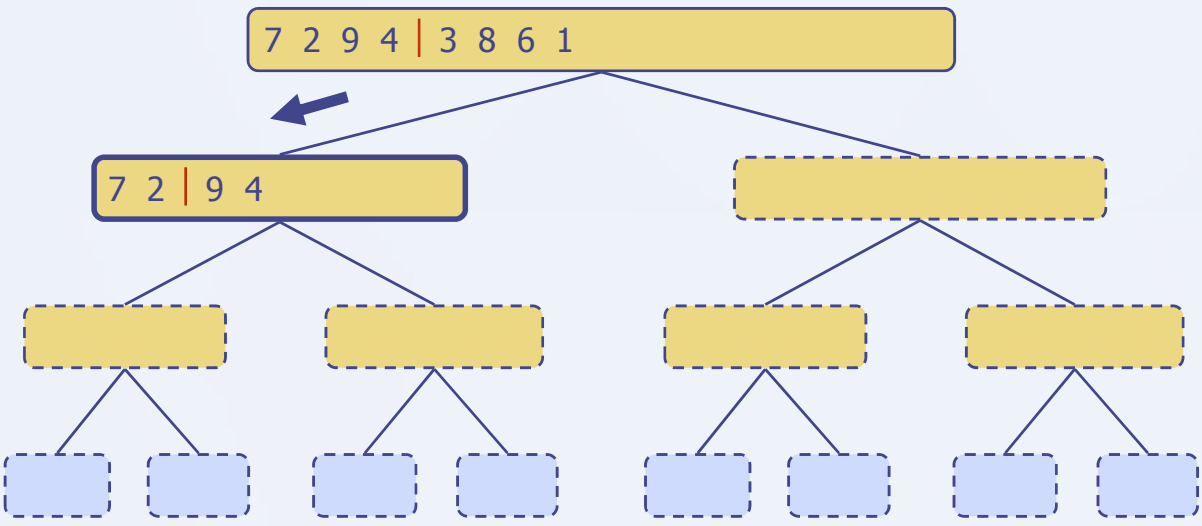
Mô tả quá trình thực hiện sắp xếp

- Ví dụ xắp xếp dãy:A= 7 2 9 4 3 8 6 1
  - Gọi thủ tục MergeSort(A, 1, 8), chia đôi dãy



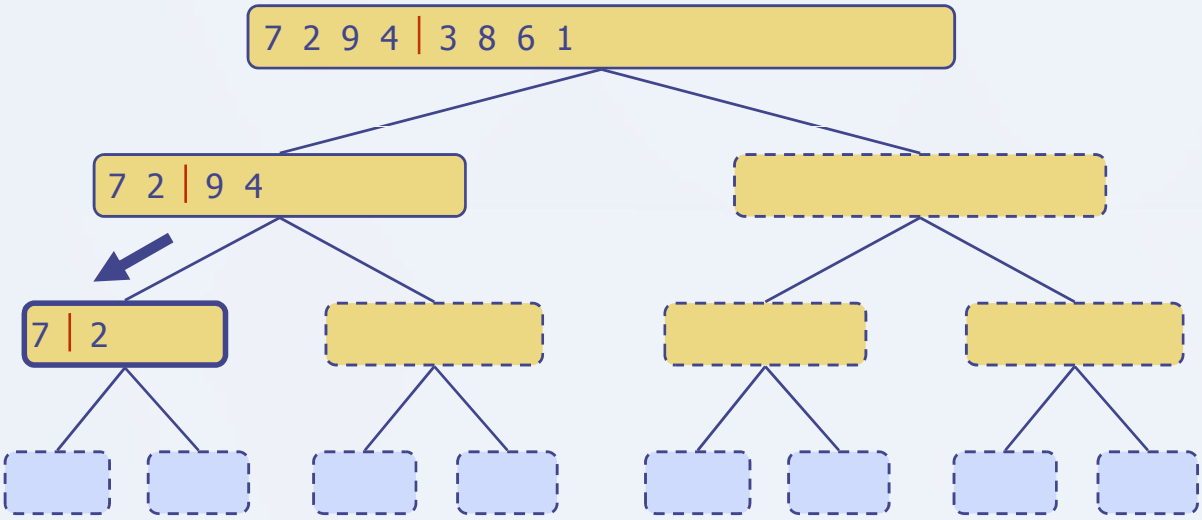
Tiếp

- Gọi đệ qui và phân chia Mergesort(A,1,4)



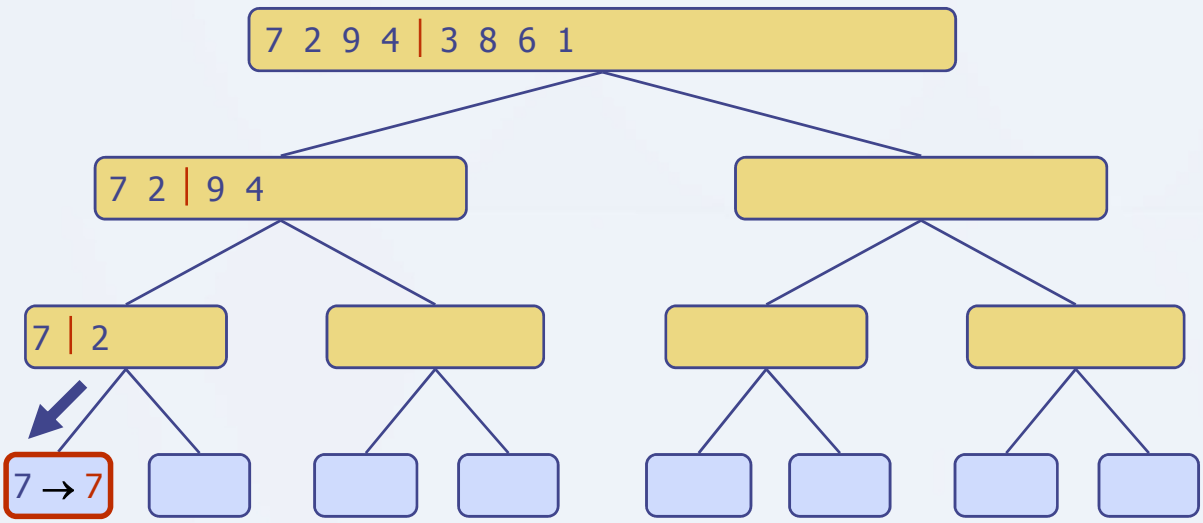
Tiếp

- Gọi đệ qui và phân chia Mergesort(A,1,2)



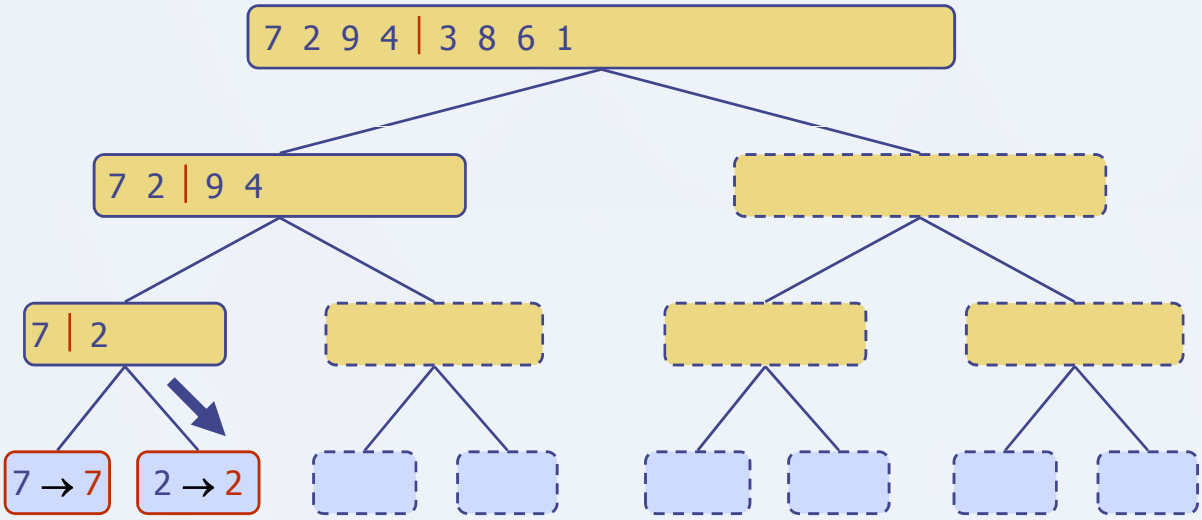
Tiếp

- Gọi đệ qui Mergesort(A,1,1), đây là trường hợp cơ sở



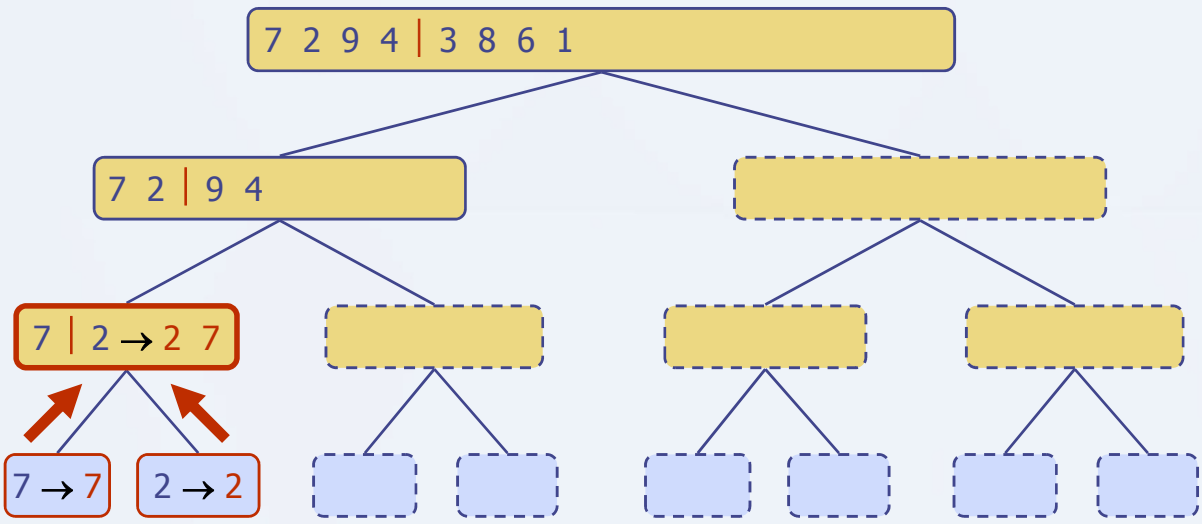
Tiếp

- Gọi đệ qui Mergesort(A,2,2), đây là trường hợp cơ sở



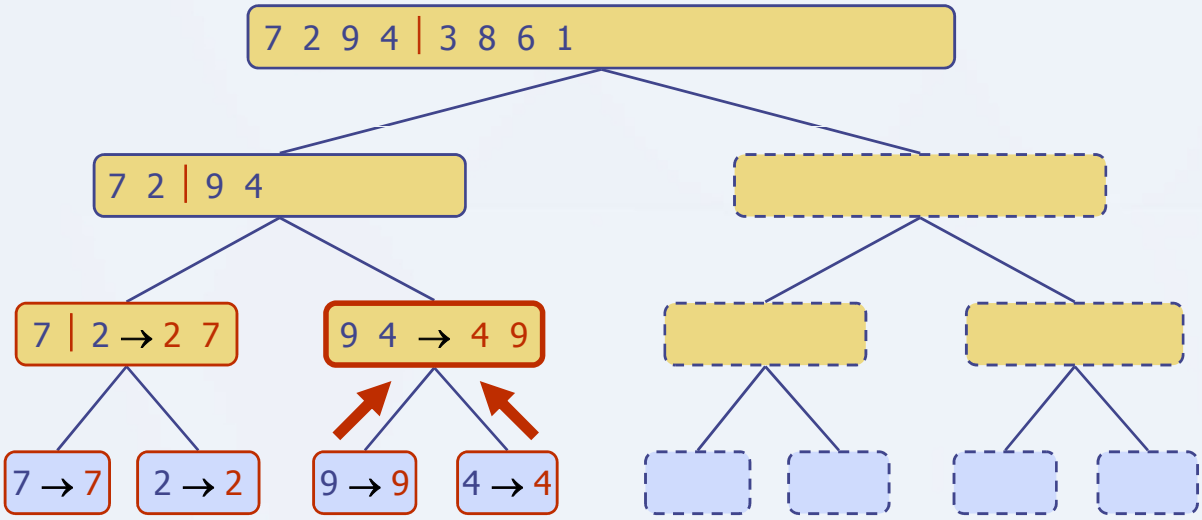
Tiếp

- Trộn merge(A,1,1,2)



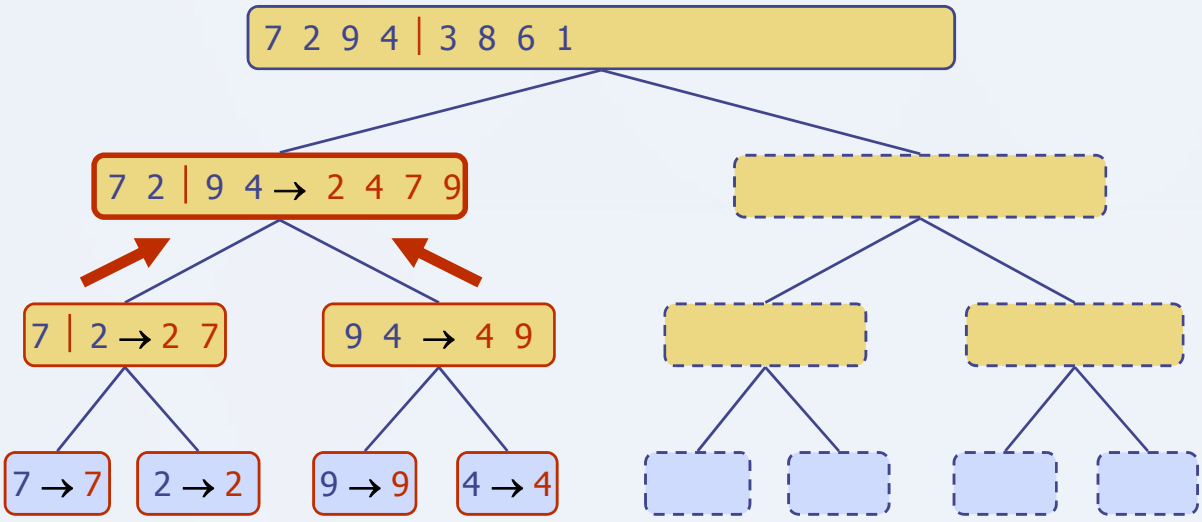
Execution Example (cont.)

- Gọi đệ qui Mergesort(A,3,3), Mergesort(A,4,4) và trộn merge(A,3,3,4)



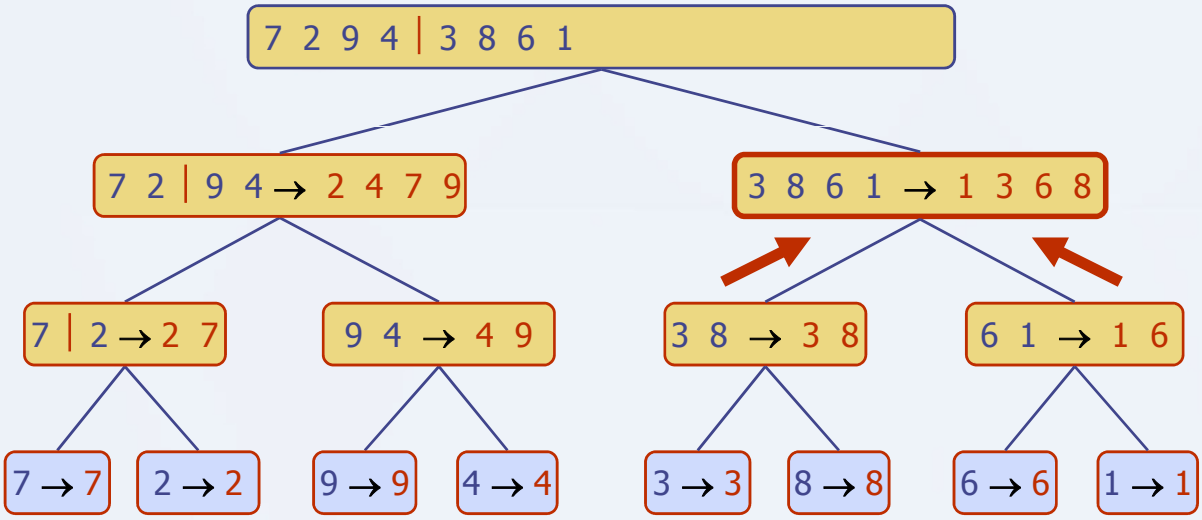
Tiếp

- Trộn merge(A,1,2,4)



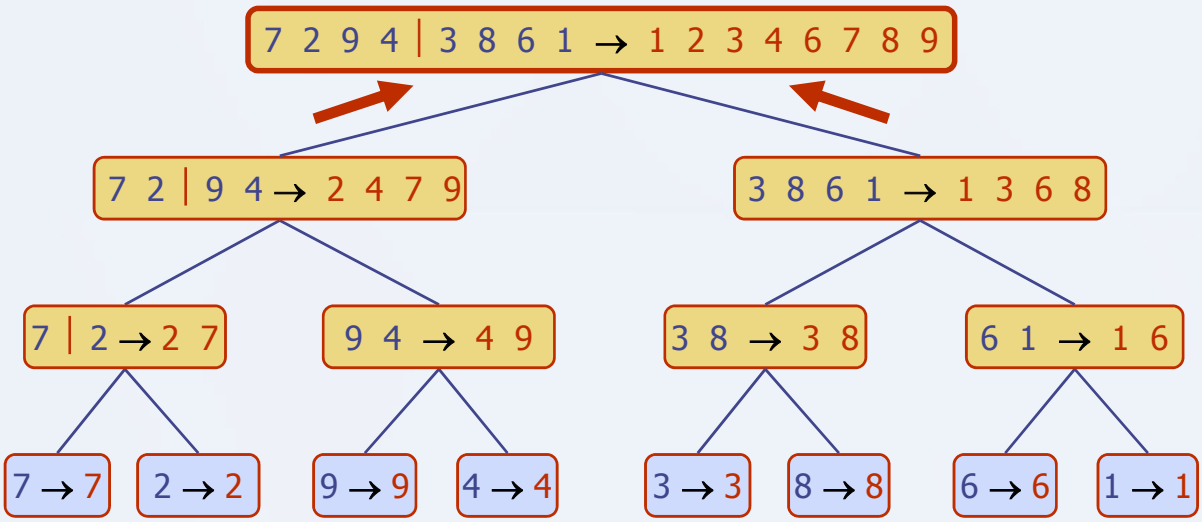
Tiếp

- Tương tự như trên với nửa bên phải của dãy



Tiếp

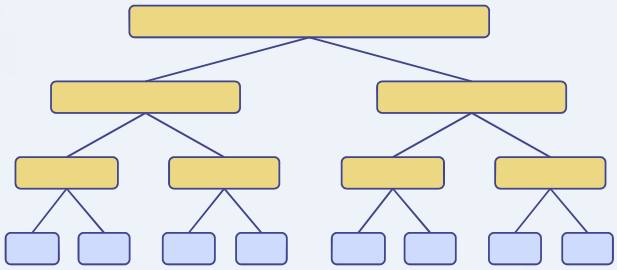
- Trộn hai nửa dãy thành dãy được sắp merge(A, 1, 4, 8)



Thời gian chạy của thuật toán

- Chiều cao h của cây merge-sort là $O(\log n)$
  - Tại mỗi bước gọi đệ qui ta chia dãy cần sắp thành hai phần,
- Thời tổng thời gian làm việc trên các nút ở mức i nhiều nhất là $O(n)$
  - Chúng ta chia và trộn 2^i chuỗi có kích thước là $n/2^i$
  - Chúng ta gọi 2^i+1 lần đệ qui
- Vì vậy, tổng thời gian chạy của thuật toán mergesort là $O(n \log n)$

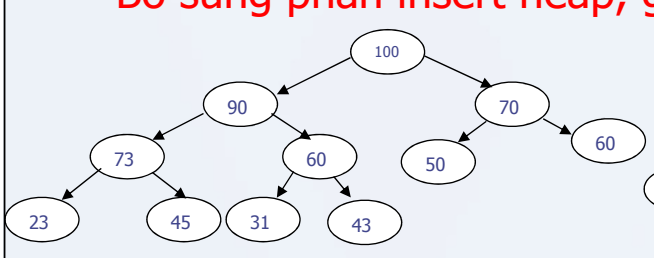
ĐSâu	#dãy	size
0	1	n
1	2	$n/2$
i	2^i	$n/2^i$
...	...	...



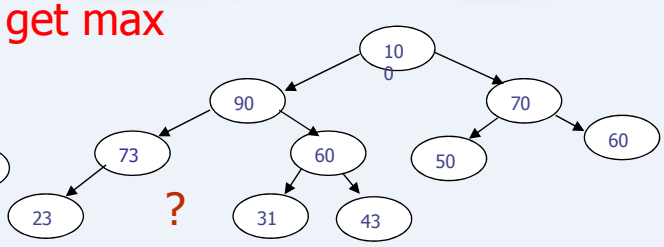
Cây Heap và Thuật toán sắp xếp vun đống Heapsort

- Cây heap (đống) là một cây nhị phân được sắp xếp theo khóa của các nút với các tính chất sau:
  - Giá trị khóa của nút gốc ≥ giá trị khóa của hai con
  - Tất cả các mức đều đầy trừ mức thấp nhất có thể thiếu một số nút
  - Các nút lá phải xuất hiện liên tiếp từ trái qua phải
- Như vậy nút gốc có giá trị khóa lớn nhất
- Ví dụ:

Bổ sung phần insert heap, get max



Cây Heap



Không phải cây Heap

- Các thao tác
- Dậy cho sinh viên các thao tác trên cây heap thêm, lấy, max

Mảng biểu diễn cây heap

- Mảng A[1],..,A[n] là mảng biểu diễn cây heap nếu:
  - A[i]≥A[2i] và A[i]≥A[2i+1] với i=1..n/2
- Như vậy phần tử đầu của mảng có giá trị lớn nhất
- Ví dụ:

A	100	90	70	73	60	50	60	23	45	31	43

A[1] ≥ A[2], A[1] ≥A[3]

A[2] ≥ A[4], A[2] ≥A[5]

A[3] ≥ A[6], A[3] ≥A[7]

A[4] ≥ A[8], A[4] ≥A[9]

A[5] ≥ A[10], A[5] ≥A[11]

Thuật toán sắp xếp vun đống

Ý tưởng:

- Tạo mảng A[1],..,A[n] biểu diễn cây Heap.
- Tráo đổi phần tử A[1] với phần tử A[n].
- Tạo mảng A[1],..,A[n-1] biểu diễn cây heap
- Tráo đổi phần tử A[1] với phần tử A[n-1].
- Lặp lại quá trình trên đến khi mảng chỉ còn 1 phần tử

Tạo đống

?

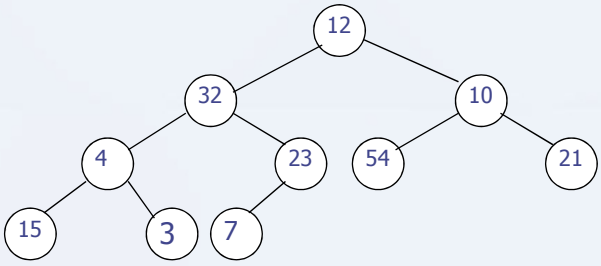
Tạo mảng biểu diễn cây heap

- Theo tính chất của mảng biểu diễn cây Heap thì các phần tử từ n/2+1 đến n không cần điều kiện ràng buộc. Vì vậy ta thực coi các phần tử này đã thỏa mãn điều kiện cây heap.
- Ta thực hiện:
  - Bổ sung phần tử n/2 vào A[n/2+1],..,A[n] để được mảng gồm A[n/2],..,A[n] thỏa mãn kiện
  - Bổ sung phần tử n/2-1 vào A[n/2],..,A[n] để được mảng gồm A[n/2-1] ,..,A[n] thỏa mãn kiện
  - Và cứ tiếp tục làm như vậy cho đến khi bổ sung phần tử A[1] vào A[2],..,A[n] để được mảng gồm A[1],..,A[n] thỏa mãn điều kiện

Ví dụ

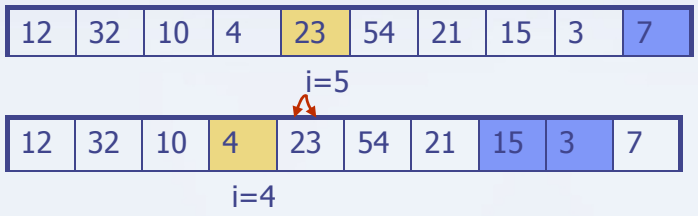
Cho mảng như dưới đây, hãy biến đổi mảng để được mảng thỏa mãn tính chất mảng biểu diễn cây heap

12	32	10	4	23	54	21	15	3	7



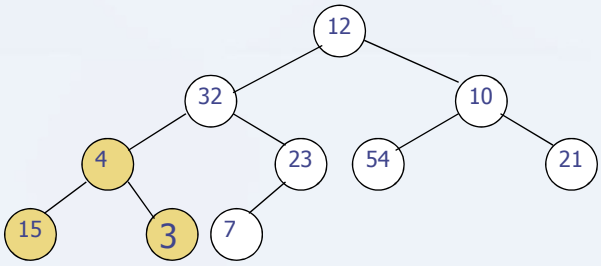
Cây tương ứng với mảng

Mô tả trên mảng: *N=10*



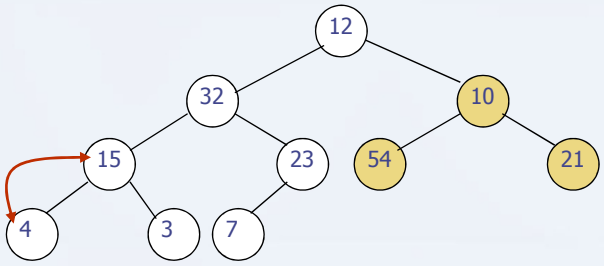
- Đổi chỗ A[5] và A[10] nếu A[5]<A[10]

- Tính max(A[8], A[9]). Nếu A[4]<max thì đổi chỗ A[4] với phần tử đạt max



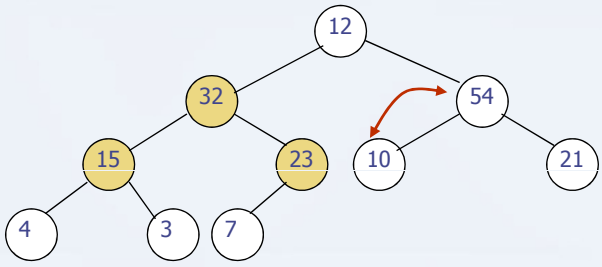
Cây tương ứng với mảng

- Tính max(A[6], A[7]). Nếu A[3]<max thì đổi chỗ A[3] với phần tử đạt max

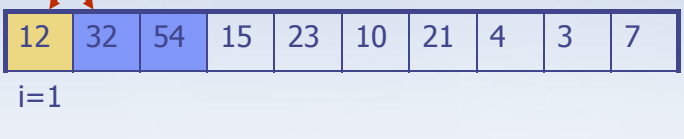


Cây tương ứng với mảng

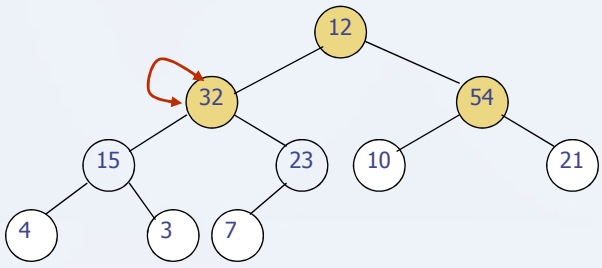
- Tính max(A[4], A[5]). Nếu A[2]<max thì đổi chỗ A[2] với phần tử đạt max



Cây tương ứng với mảng

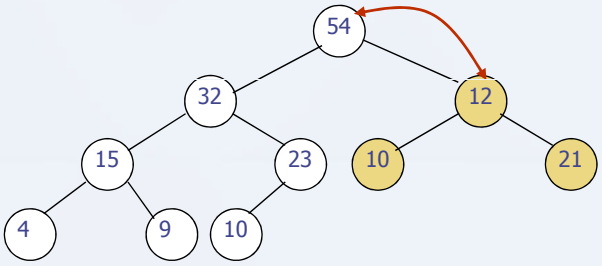


- Tính max(A[2], A[3]). Nếu A[1]<max thì đổi chỗ A[1] với phần tử đạt max

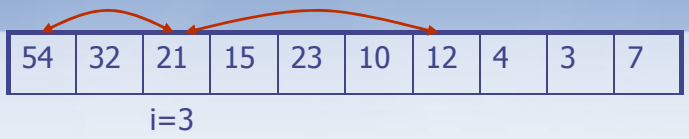


Cây tương ứng với mảng

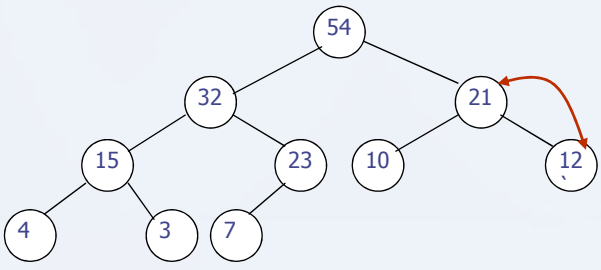
- Tính max(A[6], A[7]). Nếu A[3]<max thì đổi chỗ A[3] với phần tử đạt max



Cây tương ứng với mảng



- Tính max(A[6], A[7]). Nếu A[3]<max thì đổi chỗ A[3] với phần tử đạt max



Cây heap

Thuật toán bổ sung một phần tử để tạo mảng biểu diễn cây heap

Algorithm ***Pushdown (Array A, i, n);***
Input: số nguyên i, n, mảng A[i],..,A[n], trong đó A[i+1],..,A[n] thỏa mãn tính chất cây heap
Output: Mảng A[i],..,A[n] thỏa mãn tính chất cây heap

```
j ← i; kt ← 0;
while ( j≤n/2 ) and (kt=0) do
    if 2*j = n then
        max ← 2*j;
    else
        if A[2*j].key ≤ A[2*j+1].key then
            max ← 2*j+1
        else
            max  ← 2*j;

    if A[j].key < A[max].key then
        swap (A[j], A[max]);
        j ← max;
    else
        kt ←1;
```


Thuật toán sắp xếp vun đống

Algorithm ***Heapsort(Array A, n);***
Input: Mảng A có n phần tử và số nguyên n
Output: Mảng A được sắp theo thứ tự tăng dần của thuộc tính khóa

```
//tạo heap ban đầu
for i=n/2 downto 1 do
    Pushdown(A, i, n);

//thực hiện sắp xếp
for i=n downto 2 do
    swap(A[1], A[i]);
    Pushdown(A, 1, i-1);
```

Ví dụ:

Mô tả quá trình sắp xếp của dãy số

12 43 11 34 23 43 12 435

Thời gian chạy

- Thời gian thực hiện thủ tục Pushdown.
  - Là t/g thực hiện của vòng lặp while.
  - Gọi k là số lần lặp, ta có $i*2^k \leq n$ hay $k \leq \log_2(n/i)$.
  - T/g thực hiện hàm Pushdown (A,i, n) là 0(log(n/i)
- Xét thủ tục HeapSort
  - Vòng lặp for đầu có số lần lặp là n/2
  - Mỗi lần gọi hàm Pushdown 1 lần. Do đó t/g thực hiện là $0(\log_2 n)$.
  - Tương tự, vòng lặp for thứ 2 có số lần lặp là n-1. $0(n\log_2 n)$.
  - Vì vậy t/g thực hiện HeapSort là $O(n\log_2 n)$.

Hết

Bài tập

Xây dựng các thủ tục sắp xếp theo 6 phương pháp đã học