

Tên học phần: **Giải tích**

Mã học phần: **TOA1053** Số tín chỉ: **3**

Thời gian làm bài: **120 phút** (Không kể phát đề)

Loại đề: **Không được sử dụng tài liệu**

**Đề số 2**

**Câu 1** (2 điểm). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{1}{u_n} \right), \quad n \geq 1.$$

(a) Chứng minh  $(u_n)$  là dãy giảm và bị chặn dưới.

(b) Suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  tồn tại và tìm giới hạn đó.

**Câu 2** (2 điểm). (a) Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan(t) dt}{x^2}.$$

(b) Tìm  $a$  để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x} + a, & x < 0 \end{cases}$$

liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 3** (2 điểm). Cho hàm số  $f(x) = \ln(1+x)$ .

(a) Viết khai triển Maclaurin của hàm số  $f(x)$  đến cấp 2.

(b) Áp dụng tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

**Câu 4** (2 điểm). (a) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^4+1}} dx.$$

(b) Minh họa bằng hình học và từ đó suy ra giá trị của tích phân sau (không cần tính toán chi tiết):

$$I = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (\text{với } R > 0 \text{ cho trước}).$$

**Câu 5** (2 điểm). (a) Khảo sát cực trị của hàm số  $z = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$ .

(b) Tính tích phân

$$\iint_D xy dx dy,$$

trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x - 4$  và  $y^2 = 2x$ .