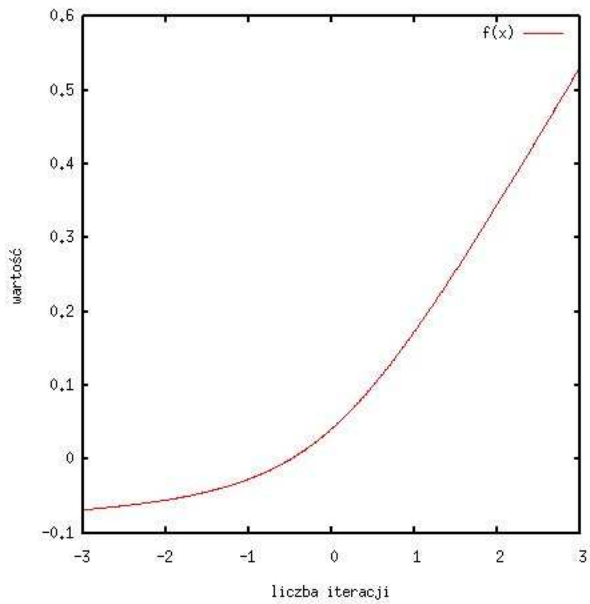
Zadanie 1

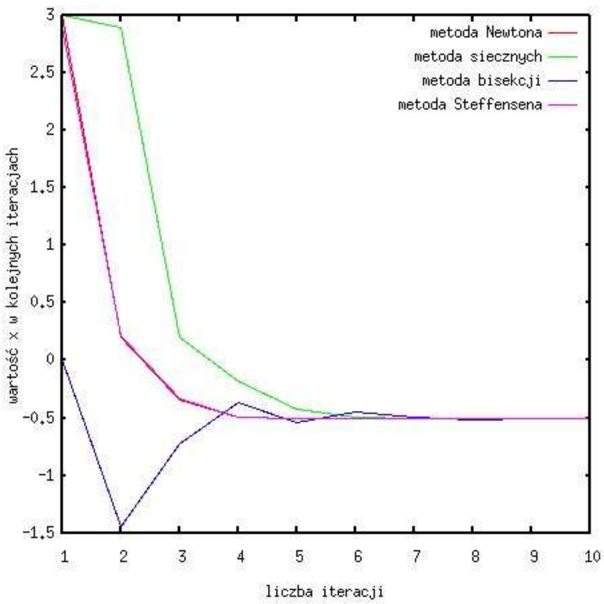
Funkcja $f(x) = \sqrt{x^2+2} + x - 1$ osiąga miejsce zerowe $x^* = -0.5$. Poniżej jej wykres.

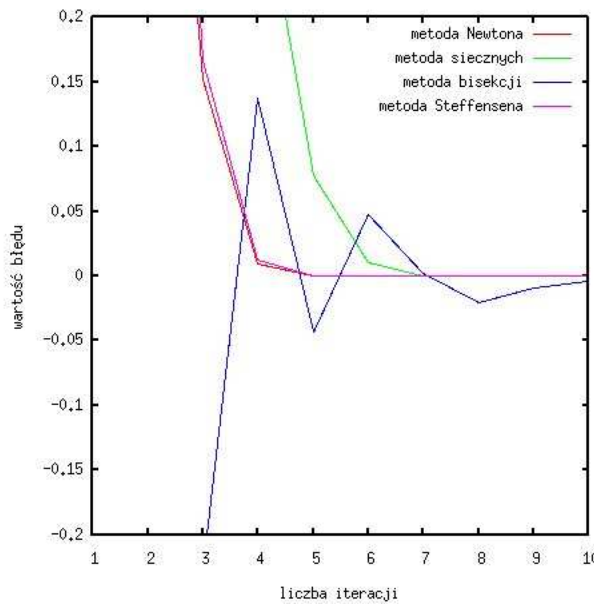


Rysunek 1: wykres badanej funkcji $f(x)$

Metody iteracyjne (Newtona, Steffensena) startują od punktu $x_1 = 3$. W przypadku bisekcji pod uwagę biorę przedział $(-3, +3)$. Dla metody siecznych za x_1 biorę 3 a za x_2 biorę 2.9. Zastanówmy się jak powinien wyglądać wykres błędów powyższych metod. Pochodna $f(x^*)$ wynosi $f'(x^*) = x^*/\sqrt{x^{*2}+2} + 1 = 4/3 > 0$. Stąd metoda Newtona jest zbieżna kwadratowo. Bisekcja jest zbieżna liniowo i rzeczywiście będzie zbiegać do miejsca zerowego (-0.5 jest miedzy -3 a 3). Oczekiwać też będziemy, ze metoda Steffensena będzie zbieżna kwadratowo a siecznych ponad liniowo ($p = (1+\sqrt{5})/2$).

Dalej przedstawiam wykresy dla 10 iteracji. Nie było sensu iterować dalej gdyż to co istotne widać już dla 10. Same wyniki dla metod kwadratowo zbieżnych są już obliczone z dokładnością rzędu 10^{-16}, czyli na granicy dokładności arytmetyki fl.





Na wykresach widać, że metody Newtona i Steffensena zbliżają się do -0.5 najszybciej. Następnie zbiega metoda siecznych (zbieżność nad liniowa). Najgorzej wypada metoda bisekcji (zbieżna liniowo).

```
octave:1> source "zad1.m";
octave:2> (steffensen(3,10))(10) + 0.5
warning: in steffensen near line 56, column 10:
warning: division by zero
ans = NaN
octave:3> (newton(3,10))(10) + 0.5
ans =  5.5511e-17
octave:4> (sieczne(3,2.9,10))(10) + 0.5
ans =  1.1102e-16
octave:5> (bisekcja(-3,3,10))(10) + 0.5
ans = 0.0019531
octave:6>
```

Powyżej „dokładne” błędy dla 10 iteracji. Dla metody Steffensena widzimy, że wystąpiło dzielenie przez 0. Oznacza to, że $f(x_9) = f(x_9 + f(x_9)) = x^*$ (według przeliczeń komputera oczywiście).