Serii de numere reale

October 23, 2022

1 Noţiuni teoretice

Definiţie 1 *Pentru un şir de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *expresia* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte serie numerică cu termenul general* a_n.

Şirul $(s_n)_{n\geq 1}$, definit prin $s_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_n$, $n \geq 1$ se numeşte **şirul sumelor parţiale** ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $s \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci s se numeşte **suma seriei** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dacă $s \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **convergentă**. O serie care nu este convergentă se numeşte **divergentă**.

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Rezultă de aici următorul criteriu de divergenţă:

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

1.1 Serii remarcabile

1) **Seria geometrică** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$, $q \in \mathbb{R}$, este convergentă dacă şi numai dacă $q \in (-1, 1)$. Are loc relaţia

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in (-1,1) \\ +\infty, \text{ dacă } q \in [1, \infty) \end{cases}.$$

Dacă $q \leq -1$, atunci seria geometrică este divergentă.

2) **Seria armonică generalizată** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

Pentru $\alpha > 1$ notăm $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Au loc relaţiile

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ (Euler)}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se numeşte **serie armonică** şi avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

3) O altă serie remarcabilă este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

1.2 Criterii generale de convergenţă

Criteriul general al lui Cauchy. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Criteriul lui Abel-Dirichlet. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă.

Criteriul lui Abel. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir monoton şi mărginit şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă.

Criteriul lui Leibniz. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir descrescător pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Atunci **seria alternată** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ este convergentă.

2 Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

Criteriul raportului (D'Alembert).

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel că există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

i) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

iii) Dacă $l = 1$ criteriul este ineficient.

Criteriul radicalului (Cauchy).

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel că există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

i) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

iii) Dacă $l = 1$ criteriul este ineficient.

Criteriul lui Raabe-Duhamel.

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel că există

$\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

i) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

iii) Dacă $l = 1$ criteriul este ineficient.

Criteriul condensării (Cauchy).

Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător de numere reale pozitive atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ au aceeaşi natură.

Criteriile comparaţiei. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi.

Criteriul 1. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a_n \leq b_n$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci:

i) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul 2. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci:

i) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criterul 3. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, atunci:

i) Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ au aceeaşi natură

ii) Dacă $l = 0$ avem implicaţiile:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă;

În general pentru a decide natura unei serii prin al treilea criteriu al comparaţiei se folosesc seriile armonice generalizate. Se obţine astfel următoarea variantă a criteriului 3 des intâlnită în practică.

Consecinţa criteriului comparaţiei

Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\lim\limits_{n\o\infty} n^{\alpha} a_n = l \in [0, \infty)$ atunci:

a) pentru $\alpha > 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $\alpha \leq 1$ şi $l \neq 0$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

3 Exerciţii şi probleme

Ex. 1 *Să se determine sumele seriilor:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+p)}$, $p \in \mathbb{N}^*$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5...(2n+1)}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2+n+4}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+p)}$; $a > -1$, $p \in \mathbb{N}$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$, $a > 1$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2^n}{1+2^{2n+1}}$;

n) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots;$

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!};$

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!};$

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}.$

Ex. 2 *Să se precizeze natura seriilor:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}a^n,\ a>0;$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n)},\ a>0;$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^\alpha},\ a>0,\ \alpha\neq a;$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R};$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n,\ a>0, c>0;$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n;$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^\alpha},\ \alpha>0;$

h) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln\ln(n)};$

i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\cdots(2-\sqrt[n]{e});$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n},\ a>0;$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+bn+c,}\ a>0,\ b,c\in\mathbb{R};$

l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right);$

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R};$

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}};$

o) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}.$

Ex. 3 *Să se precizeze natura seriilor:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{3^n};$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\cdot\sin\frac{1}{n};$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\cdot\sin n^2}{\sqrt{n}};$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$

Ex. 4 *Se consideră şirul* $(a_n)_n$ *definit prin relaţia de recurenţă*

$$a_{n+1}=\ln(1+a_n),\ n\geq 1 \text{ şi } a_1=1.$$

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0;$

b) Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

c) Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *este convergentă.*

4 Indicaţii şi răspunsuri

Solutie Ex. 1 *a)* $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{1}{4}$; *c)* $\frac{1}{p \cdot p!}$; *d)* $\frac{1}{2}$;

e) 1; *f)* 1;

g) Folosim identitatea

$$\text{arctg} x - \text{arctg} y = \text{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \quad \forall xy > -1.$$

Avem

$$\begin{aligned} a_n &= \text{arctg} \frac{1}{2n^2} = \text{arctg} \frac{2}{4n^2} = \text{arctg} \frac{2}{1+4n^2-1} = \text{arctg} \frac{2}{1+(2n+1)(2n-1)} \\ &= \text{arctg} \frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)} = \text{arctg}(2n+1) - \text{arctg}(2n-1). \end{aligned}$$

Suma seriei este $\frac{\pi}{4}$; *h)* $\text{arctg}\, 2$; *i)* $\ln 2$;

j) $\frac{1}{p(a+1)(a+2)\cdots(a+p)}$; *k)* $\frac{1}{a-2}$; *l)* $\frac{3\pi}{4}$; *m)* $\frac{\pi}{4}$; *n) Suma este* $\frac{3}{2}\ln 2$. *Se calculeaza* $s_{3n} = \gamma_{4n} - \frac{1}{2}\gamma_n - \frac{1}{2}\gamma_n + \ln \frac{4n}{\sqrt{2n^2}}$. $\lim\limits_{n\to\infty} s_{3n} = \frac{3}{2}\ln 2$. *o)* $5e$; *p)* $15e$; *q)* $2\ln 2$.

Solutie Ex. 2 *a) Pentru* $a < 4$ *seria este convergentă, iar pentru* $a \geq 4$ *seria este divergentă.*

b) Aplicăm criteriul lui Raabe Duhamel. Seria este convergentă pentru $a > 1$ *si divergentă pentru* $a \leq 1$.

c) Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel. Seria converge pentru $\alpha > a$ *şi diverge pentru* $\alpha < a$

d) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă pentru* $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$.

e) Aplicăm criteriul radicalului. Pentru $a \geq c$ *seria este divergentă iar pentru* $a < c$ *seria este convergentă.*

f) Seria este divergentă.

g) Comparăm cu seria armonică. Seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

h) Seria este divergentă.

i) Se foloseşte inegalitatea $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ şi criteriul comparaţiei. Seria este divergentă.

j) Pentru $a \geq 1$ seria este divergentă ($a_n \nrightarrow 0$). Pentru $a < 1$ se aplică criteriul condensării. Seria este convergentă pentru $a < \frac{1}{e}$ şi divergentă pentru $a \geq \frac{1}{e}$. Se poate aplica si Raabe Duhamel.

k) Aplicăm criteriul radicalului. Dacă $a < \frac{1}{e}$ seria este convergentă iar dacă $a > \frac{1}{e}$ seria este divergentă. Pentru $a = \frac{1}{e}$ utilizând inegalitatea $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$ rezultă că seria este divergentă. Pentru $a = \frac{1}{e}$ se poate arata că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

l) Seria este divergentă.

m) Se foloseşte inegalitatea

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Conform criteriului comparaţiei seria este convergentă pentru $\alpha > 2$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 2$. Se poate aplica si criteriul Raabe Duhamel pentru $\alpha \neq 2$.

n) Se compară seria data cu seria armonică. Conform criteriului 3 al comparaţiei seria este divergentă.

o) Aplicăm criteriul condensării. Seria este divergentă.

Solutie Ex. 3 *a) Se aplică criteriul lui Leibnitz. Seria este convergentă.*

b) Se aplică criteriul lui Abel-Dirichlet. Seria este convergentă.

c) Se aplică criteriul lui Abel-Dirichlet. Seria este convergentă.

d) Seria este convergentă.

Solutie Ex. 4 *a) Se arată că sirul este monoton şi mărginit.*

b) Aplicăm criteriul comparaţiei comparând cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

c) Aplicăm criteriul comparaţiei comparând cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.