2019年センター数IA.

△ABCにおいて、AB=4, BC=7, AC=5とする.

このとき、$\cos\angle BAC=-\frac{1}{5}$, $\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ である。

△ABCの内接円の半径は $\frac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$ である。

この内接円と辺ABとの接点をD，辺ACとの接点をEとする。

$AD=\boxed{ウ}$ ， $DE=\frac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オカ}}}{\boxed{キ}}$ である。

線分BEと線分CDの交点をP，直線APと辺BCの交点をQとすると，

$\frac{BQ}{CQ}=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$

であるから，$BQ=\boxed{コ}$ であり，△ABCの内心をIとすると，

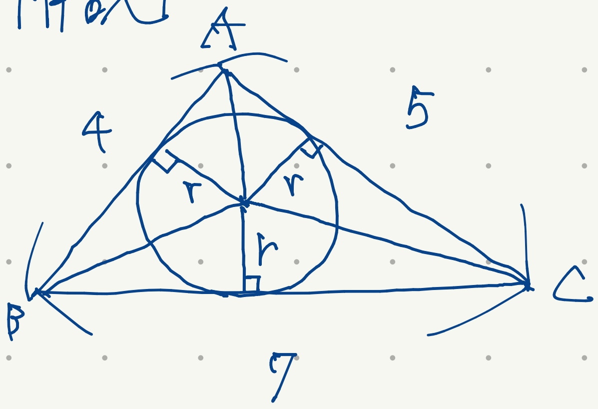
$IQ=\frac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$

である。また直線CPと△ABCの内接円との交点でDとは異なる点をFとすると，

$\cos\angle DFE=\frac{\sqrt{\boxed{スセ}}}{\boxed{ソ}}$ である。

12分

解説



△ABCの面積をSは

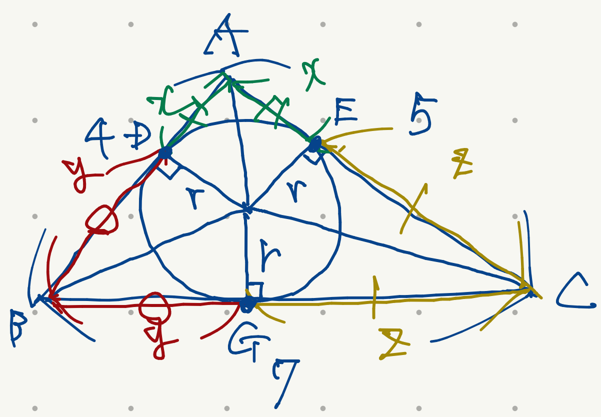
$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$= 4\sqrt{6}$$

△ABCの内接円の半径をrとすると面積は次のようにも表せる。

$$S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC$$
$$= \frac{1}{2}r(AB + BC + AC)$$

$$\therefore\ 4\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot r\,(4+7+5)$$
$$\therefore\ r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

下の図のように内接円なので三角形の各頂点をはさむ接する辺がそれぞれ等しくなる。



$$\begin{cases} x+y=4 & -① \\ y+z=7 & -② \\ z+x=5 & -③ \end{cases}$$

← この連立方程式をとけばよい

①+②+③より

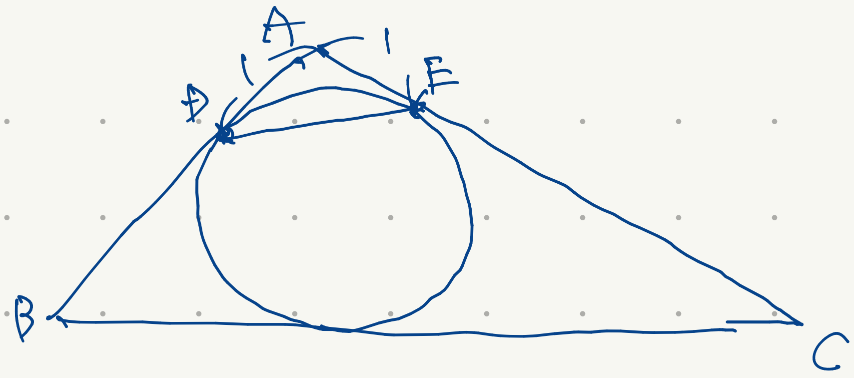
$$2(x+y+z)=16$$
$$\therefore\ x+y+z=8 \quad -④$$

①と④より
$$x+y+z=8$$
$$4+z=8$$
$$\therefore\ z=4$$

②と④より
$$x+y+z=8$$
$$x+7=8$$
$$\therefore\ x=1$$

③と④より
$$x+y+z=8$$
$$y+5=8$$
$$\therefore\ y=3$$

$$\therefore\ AD = x = 1$$

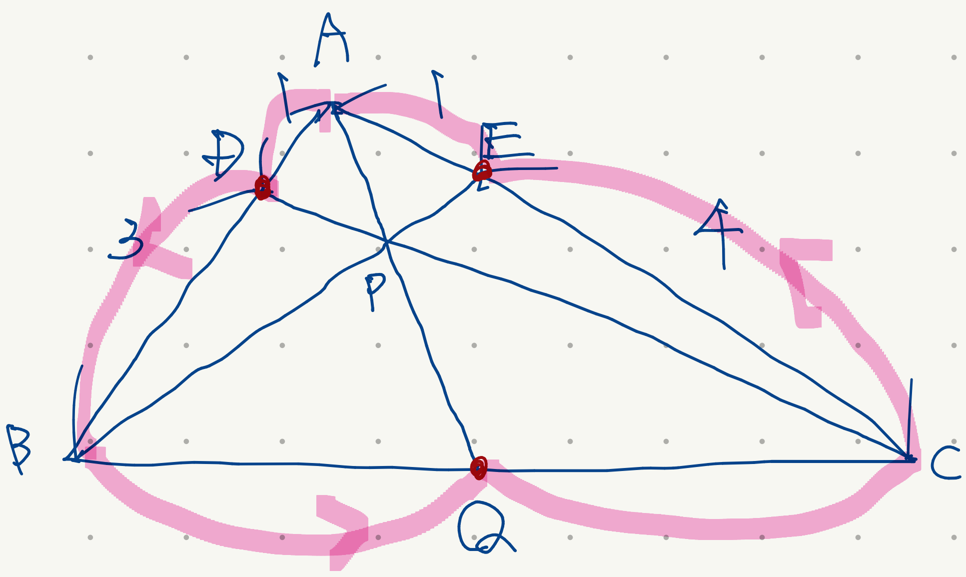


△ADEに余弦定理を用いると、

$$DE^2 = 1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\angle BAC$$
$$= 2 - 2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{12}{5}$$

DE>0より

$$DE=\sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$



D、E、Qが交点で その交点を必ず経由してチェバの定理を行う。

A → 交点D → B → 交点Q → C → 交点E → A

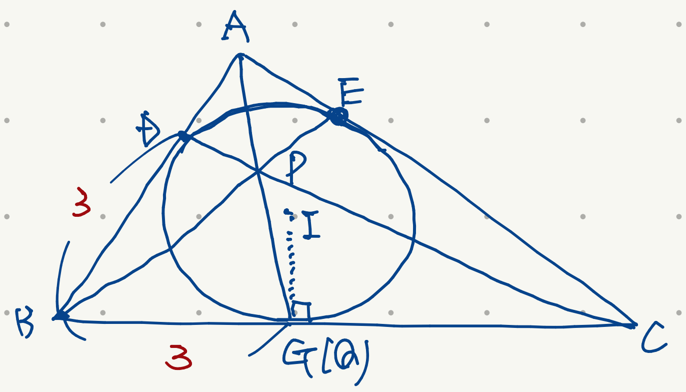
$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{4}{1}=1$$

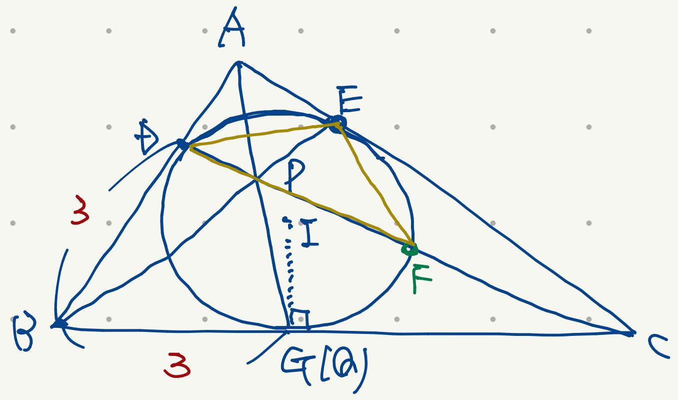
$$\therefore\ \frac{BQ}{QC}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ BQ=\frac{3}{7}BC=\frac{3}{7}\cdot 7=3$$

以上より $BQ=BG=3$ でQとGは同じ点になる.



$$IQ=IG=r=\frac{\sqrt{6}}{2}$$



△DEFの正弦定理より

$$2r=\frac{DE}{\sin\angle DFE}$$

$$\therefore \sin\angle DFE=\frac{DE}{2r}=\frac{\frac{2\sqrt{15}}{5}}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{2\sqrt{15}}{5\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\cos\angle DFE=\sqrt{1-\sin^2\angle DFE}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{15}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$