△ABCの辺の長さと角の大きさを測ったところ、$AB=7\sqrt{3}$ および

$\angle ABC=60°$であった。したがって△ABCの外接円Oの半径は $\boxed{ア}$

である。

外接円Oの点Cを含む弧AB上で点Pを動かす。

(1) $2PA=3PB$となるのは $PA=\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウエ}}$ のときである。

(2) △PABの面積が最大となるのは、$PA=\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ のときである。

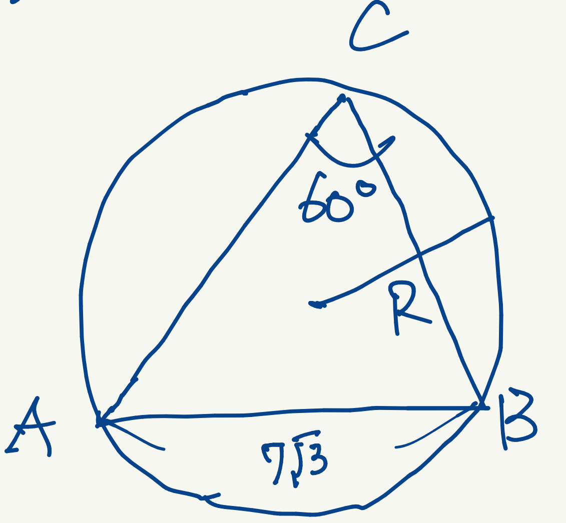
(3) $\sin\angle PBA$の値が最大となるのは $PA=\boxed{キク}$ の時であり、

このとき△PABの面積は

$$\frac{\boxed{ケコ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$$

6分

解説

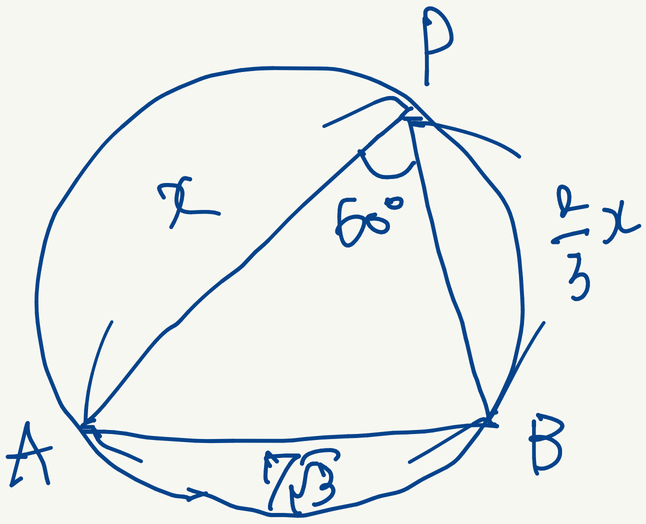


正弦定理より

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{7\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2} = 7$$

(1)



弧ABは一定なので
円周角の定理より $\angle P = 60^\circ$(一定)

$PA = x$ とおくと、

$2PA = 3PB$ より

$$PB = \frac{2}{3}PA = \frac{2}{3}x$$

$\triangle PAB$の余弦定理より、

$$(7\sqrt{3})^2 = x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 2\cdot x\cdot\frac{2}{3}x\cdot\cos 60^\circ$$

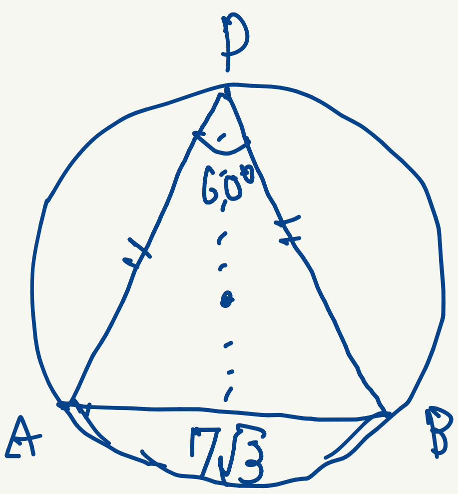
$$= \frac{13}{9}x^2 - \frac{2}{3}x^2$$

$$7^2\cdot 3 = \frac{7}{9}x^2$$

$$\therefore x^2 = 3^3\cdot 7$$

$$\therefore x = 3\sqrt{21}$$

(2) 動点Pが辺ABと垂直のときに$\triangle PAB$の面積が最大になるので、



このとき $PA = PB$ の二等辺三角形で、

$\angle P = 60^\circ$ より $\angle A = \angle B$ となり

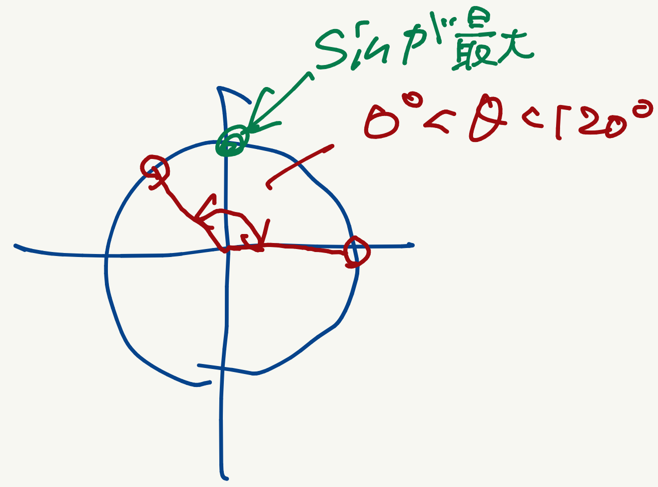
これは$\triangle PAB$が正三角形であることを示しているので、

$$PA = AB = 7\sqrt{3}$$

(3)

$\angle P = 60^\circ$より、$\triangle PAB$は三角形なので、内角の和は180°なので

$0^\circ < \angle PBA < 120^\circ$ の範囲にあることがわかる。

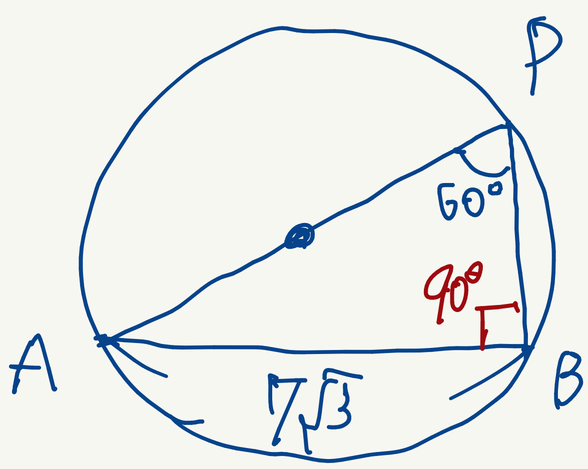


このとき $\sin\angle PBA$ を考えると、

$\sin\angle PBA$が最大になるのは

$\sin\angle PBA = 1$ のときである。

$\therefore\ \angle PBA = 90^\circ$ のときとなる。(下図)



$\boxed{ア}$ より $R=7$だったので $PA=14$

、また $\angle A = 30^\circ$より

$$\sin 30^\circ = \frac{PB}{PA}$$

$$PB = PA\sin 30^\circ$$

$$= 14 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

$\triangle PAB$の面積は

$$AB \times PB \times \frac{1}{2}$$

$$= 7\sqrt{3} \times 7 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{49\sqrt{3}}{2}$$

赤球4個、青球3個、白球5個、合計12個の球がある。これらの12個の玉を袋の中に入れ、この袋からAさんがまず1個取り出し、その球を元に戻さずに続いてBさんが1個取り出す。

（1）AさんとBさんが取り出した2個の球の中に、赤玉か青玉が少なくとも1個含まれている確率は　　　　である。

（2）Aさんが赤球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は　　　　である
これより、Aさんが取りだした球が赤玉であったとき、Bさんが取りだした球が白球である条件付き確率は　　　　である。

（3）Aさんは1球取り出したのち、その色を見ずにポケットの中にしまった。Bさんが取り出した球が白球であることがわかったとき、Aさんが取り出した球も白球であった条件付き確率を求めたい。

Aさんが赤球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は　　　　であり、

Aさんが青球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は　　　　である。

同様にAさんが白球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率を求めることができ、
これらの事象は互いに排反であるから、Bさんが白球取り出す確率は　　　　である。

よって求める条件付き確率は　　　　である。

12分

解説

赤球4個、青球3個、白球5個、合計12個の球がある。これらの12個の玉を袋の中に入れ、この袋からAさんがまず1個取り出し、その球を元に戻さずに続いてBさんが1個取り出す。

（1）AさんとBさんが取り出した2個の球の中に、赤玉か青玉が少なくとも1個含まれている確率は　　　　である。

⇓

少なくとも…なので、

この条件の反対

2人とも白球をとりだす確率をもとめて、全体から引く。

Aさん

$\frac{5}{12}$ の確率で 白

B

$\frac{4}{11}$ の確率で 白

白 はとられるとずつ減る。

$\therefore \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$ （2人とも白球）

よって求める確率は

$$1 - \frac{5}{33} = \frac{28}{33}$$

100%　　$\frac{5}{33}$

赤球4個、青球3個、白球5個、合計12個の球がある。これらの12個の玉を袋の中に入れ、この袋からAさんがまず1個取り出し、その球を元に戻さずに続いてBさんが1個取り出す。

（2）Aさんが赤球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は　　　　　である
これより、Aさんが取りだした球が赤玉であったとき、Bさんが取りだした球が白球である条件付き確率は　　　　　である。

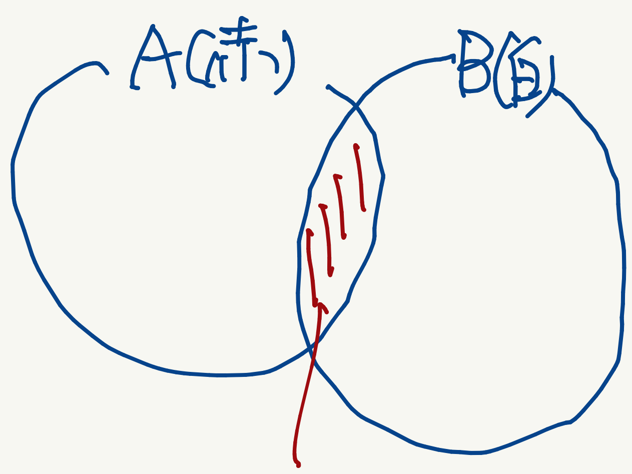
Aさんが赤玉をとりだす $\xrightarrow{\text{つづけて}}$ Bさんが白玉をとり出す。

$$\frac{4}{12} \times \frac{5}{11}$$

$$\rightarrow \quad \frac{4}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{5}{33}$$

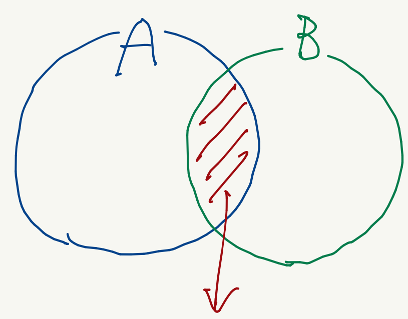
ポイント
動作が続く場合には掛け算になる

今、図はこんなかんじ



ここをもとめる。

条件付き確率のキホン



A∩B
条件Aのもとで Bになる確率

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

・つまり Aの確率の中で Bになる確率をもとめるということ。

これは さっきもとめた。

$$P(A(赤)\cap B(白)) = \frac{5}{33}$$

Aが赤玉をとり出す確率は $P(A(赤)) = \frac{4}{12}$

よって $\dfrac{\frac{5}{33}}{\frac{4}{12}} = \frac{5}{11}$

赤球4個、青球3個、白球5個、合計12個の球がある。これらの12個の玉を袋の中に入れ、この袋からAさんがまず1個取り出し、その球を元に戻さずに続いてBさんが1個取り出す。

（3）Aさんは1球取り出したのち、その色を見ずにポケットの中にしまった。Bさんが取り出した球が白球であることがわかったとき、Aさんが取り出した球も白球であった条件付き確率を求めたい。

Aさんが赤球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は (2) $\frac{5}{33}$ であり、

Aさんが青球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は　　　である。

同様にAさんが白球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率を求めることができ、
これらの事象は互いに排反であるから、Bさんが白球取り出す確率は　　　である。

よって求める条件付き確率は　　　である。

Aが青球　　Bが白球

$$\frac{3}{12} \times \frac{5}{11} = \boxed{\frac{5}{44}}$$

Aが白　Bが白

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$$ (1)で求めた。

Bが白を出すには次の通り

A赤　B白 → $\frac{5}{33}$
A青　B白 → $\frac{5}{44}$
A白　B白 → $\frac{5}{33}$

これらの和は

$$\frac{5}{33} + \frac{5}{44} + \frac{5}{33} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

赤球4個、青球3個、白球5個、合計12個の球がある。これらの12個の玉を袋の中に入れ、この袋からAさんがまず1個取り出し、その球を元に戻さずに続いてBさんが1個取り出す。

(3) Aさんは1球取り出したのち、その色を見ずにポケットの中にしまった。Bさんが取り出した球が白球であることがわかったとき、Aさんが取り出した球も白球であった条件付き確率を求めたい。

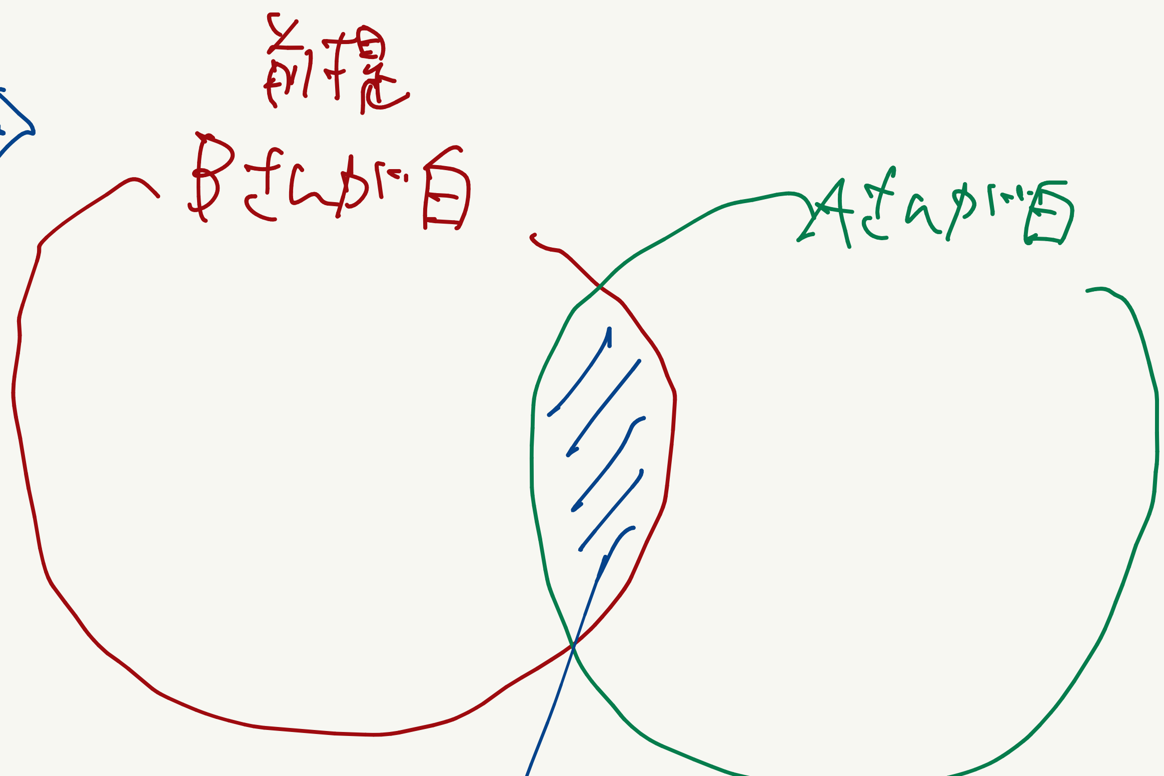
Bさんが白である前提で　　Aさんが白の場合

Aさんが赤球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は　　　　　であり、

Aさんが青球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は　　　　　である。

同様にAさんが白球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率を求めることができ、
これらの事象は互いに排反であるから、Bさんが白球取り出す確率は　　　　　である。

よって求める条件付き確率は　　　　　である。



$P(A_{白} \cap B_{白})$ = AもBも白は $\frac{5}{33}$

$P(B_{白}) = \frac{5}{12}$

$\therefore \frac{P(A_{白} \cap B_{白})}{P(B_{白})} = \frac{\frac{5}{33}}{\frac{5}{12}} = \boxed{\frac{4}{11}}$

2017 センター IA

xは正の実数で $x^2+\frac{4}{x^2}=9$ を満たすとする。このとき、

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=\boxed{アイ}$$

であるから、$x+\frac{2}{x}=\sqrt{\boxed{アイ}}$ である。さらに

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-\boxed{ウ}\right)$$

$$=\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オカ}}$$ である。

$$x^4+\frac{16}{x^4}=\boxed{キク}$$ である。

6分

解説

$x^2+\frac{4}{x^2}=9$ より

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{x}=9$

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4=9$

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=13$

であるから、xが正の実数なので $x+\frac{2}{x}>0$

$x+\frac{2}{x}=\sqrt{13}$ となる。

$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-a\right)$ とおけば、

$=x^3+\frac{4}{x}-ax+2x+\frac{8}{x^3}-\frac{2a}{x}$

$x^3+\frac{8}{x^3}=x^3+(2-a)x+\frac{2(2-a)}{x}+\frac{8}{x^3}$

両辺を比較して

$2-a=0$, $2(2-a)=0$

$\therefore a=2$

よって $x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-2\right)$

$=\sqrt{13}\cdot(9-2)$

$=7\sqrt{13}$

$x^4+\frac{16}{x^4}=(x^2)^2+\left(\frac{4}{x^2}\right)^2$

$=\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\frac{4}{x^2}$

$=9^2-8$

$=73$