2015年 数IA
センター試験

$$y=-x^2+2x+2 \quad \text{—①}$$

のグラフの頂点の座標は($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$)である。

$$y=f(x)$$

は、その2次関数で、そのグラフは①のグラフをx軸方向に$-p$
y軸方向にqだけ平行移動したものであるとする。

(1) 下の $\boxed{ウ}$, $\boxed{オ}$ に($>$, $<$, $\geqq$, $\leqq$, $\neq$)のどれかを入れよ。
$\boxed{エ}$, $\boxed{カ}$ には数字を入れよ。

$2\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値が $f(2)$ になるような
pの値の範囲は

$$p\ \boxed{ウ}\ \boxed{エ}$$

であり、最小値が $f(2)$ になるようなpの値の範囲は

$$p\ \boxed{オ}\ \boxed{カ}$$

である。

(2) 2次不等式 $f(x)>0$ の解が $-2<x<3$ になるのは

$$p=\frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}},\quad q=\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$$

のときである。

12分

解答解説.

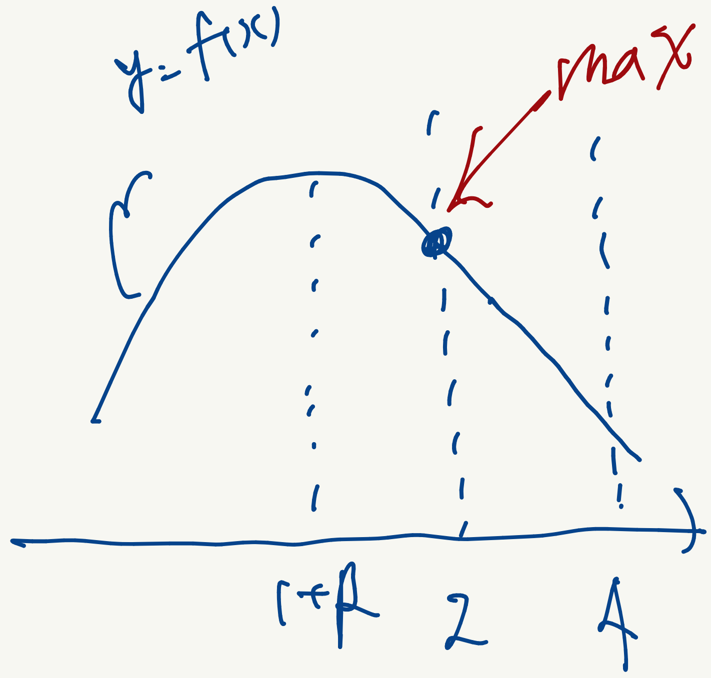
$$y=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3 \quad \cdots ①$$

頂点は $(1,3)$

$y=f(x)$は x方向にk, y方向にq 動かした関数なので,

その頂点は $(1+k, 3+q)$ となる.

$2\leqq x\leqq 4$ で $y=f(x)$の最大値が $f(2)$ になるには次のような場合

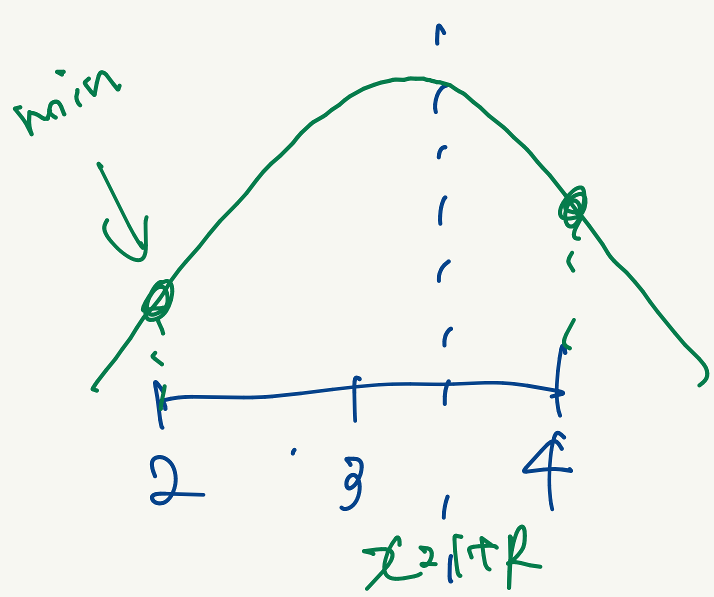


よって軸 $x=1+k$ が 2以下であればよい。

$$1+k\leqq 2$$

$$\therefore k\leqq 1$$

$2\leqq x\leqq 4$ で $y=f(x)$の最小値が $f(2)$ になるには次のような場合.



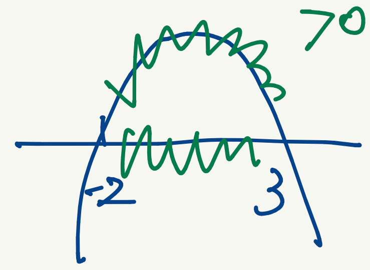
$1+k\geqq 3$ のとき

$$\therefore k\geqq 2$$

(2)

$f(x) > 0$ の解が $-2 \leqq x \leqq 3$ になるのは、

$$f(x) = -(x+2)(x-3) \text{ のとき。}$$



$$\therefore f(x) = -(x+2)(x-3)$$
$$= -x^2 + x + 6$$
$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

よってその頂点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

$y = f(x)$ の頂点は $(1+p,\ 3+q)$ より

$$\begin{cases} 1+p = \frac{1}{2} \\ 3+q = \frac{25}{4} \end{cases} \qquad \therefore\ p = -\frac{1}{2},\quad q = \frac{13}{4}$$

(1) 命題「p_1 かつ p_2 ⇒ q_1 かつ q_2」の対偶は

⓪ $\overline{p_1}$ または $\overline{p_2}$ ⇒ $\overline{q_1}$ または $\overline{q_2}$

① $\overline{p_1}$ または $\overline{q_2}$ ⇒ $\overline{p_1}$ または $\overline{p_2}$

② $\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2}$ ⇒ $\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2}$

③ $\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2}$ ⇒ $\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2}$

(2) 自然数 n に対する条件 p_1, p_2, q_1, q_2 を次のように定める。

p_1 : n は素数である。

p_2 : $n+2$ は素数である。

q_1 : $n+1$ は5の倍数である。

q_2 : $n+1$ は 6の倍数である。

30以下の自然数 n のなかで $\boxed{イ}$ と $\boxed{ウエ}$ は

命題 p_1 かつ p_2 ⇒ q_1 かつ q_2

の反例となる。

6分

解説

(1) p_1かつ$p_2 \Rightarrow q_1$かつq_2 の対偶は

$\overline{q_1かつq_2} \Rightarrow \overline{p_1かつp_2}$

$\Leftrightarrow \overline{q_1}$または$\overline{q_2} \Rightarrow \overline{p_1}$または$\overline{p_2}$

(2) まずpについて考える。

p_1 : nは素数である。

p_2 : $n+2$は素数である。

$1 \leqq n \leqq 30$ の自然数の中で nも$n+2$も素数であるのは

$(n, n+2) = (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)$

つまり　p_1かつp_2をみたす $n = 3, 5, 11, 17, 29$

$\boxed{命題\ p_1かつp_2 \Rightarrow q_1かつq_2}$ の反例を探す

$n = 3, 5, 11, 17, 29$ の $\overline{q_1かつq_2}$ を探せばよい。

‖

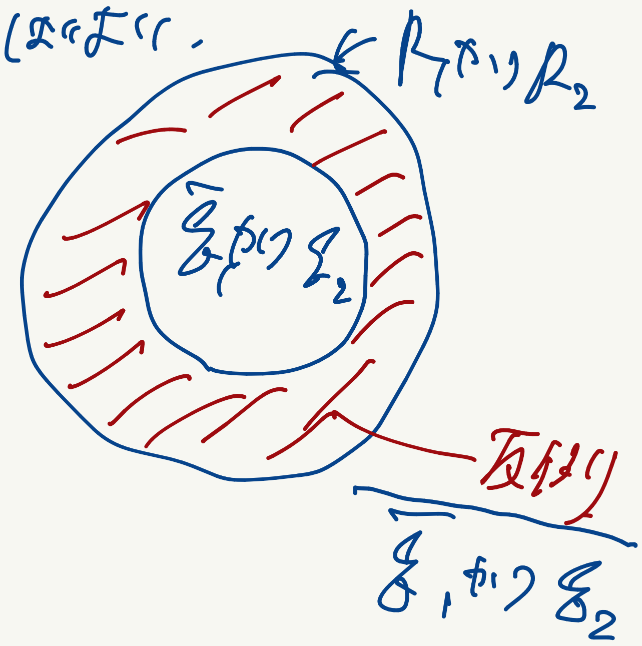
$\overline{q_1}$または$\overline{q_2}$

⇓

nが15の倍数である

または

6の倍数でない。



$n=3, 5, 11, 17, 29$ の $\overline{\overline{q_1} \text{かつ} q_2}$ を探せばよい。

‖

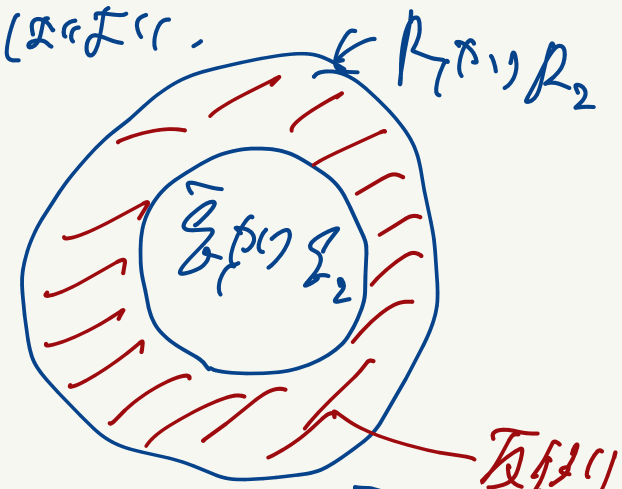
q_1 または $\overline{q_2}$

⇓

$n+1$ が5の倍数である

または

6の倍数でない。



$\overline{\overline{q_1} \text{かつ} q_2}$

‖

q_1 または $\overline{q_2}$

$n+1 = 4, 6, 12, 18, 30$

6の倍数でない。

5の倍数

$n+1 = 4, 30$

$\therefore n = 3, 29$

$\triangle ABC$において $AB=3$, $BC=5$, $\angle ABC=120^\circ$ とする

このとき、$AC=\boxed{オ}$, $\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ であり、

$\sin\angle BCA=\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コサ}}$ である。

直線BC上に点Dを $AD=3\sqrt{3}$ かつ $\angle ADC$ が鋭角となるようにとる。

点Pを線分BD上の点とし、$\triangle APC$ の外接円の半径をRとすると、

Rのとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\leqq R\leqq\boxed{セ}$$ である。

6分

解説

余弦定理より

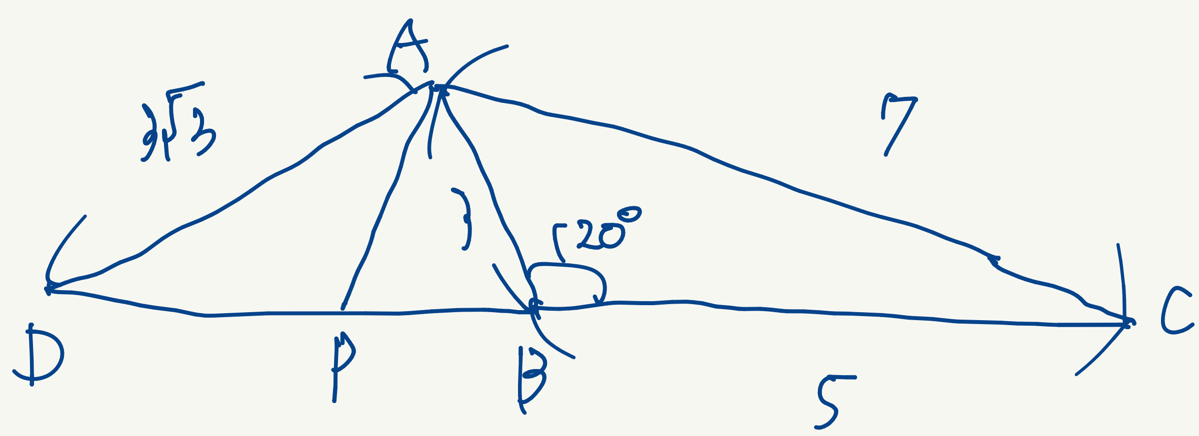
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$$
$$= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$
$$= 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49 \quad \therefore AC = 7$$

また $\sin\angle ABC = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

正弦定理より

$$\frac{3}{\sin\angle BCA} = \frac{7}{\sin\angle ABC}$$

$$\therefore \sin\angle BCA = \frac{3}{7}\sin\angle ABC = \frac{3}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$



△APCの外接円の半径がRだから正弦定理より

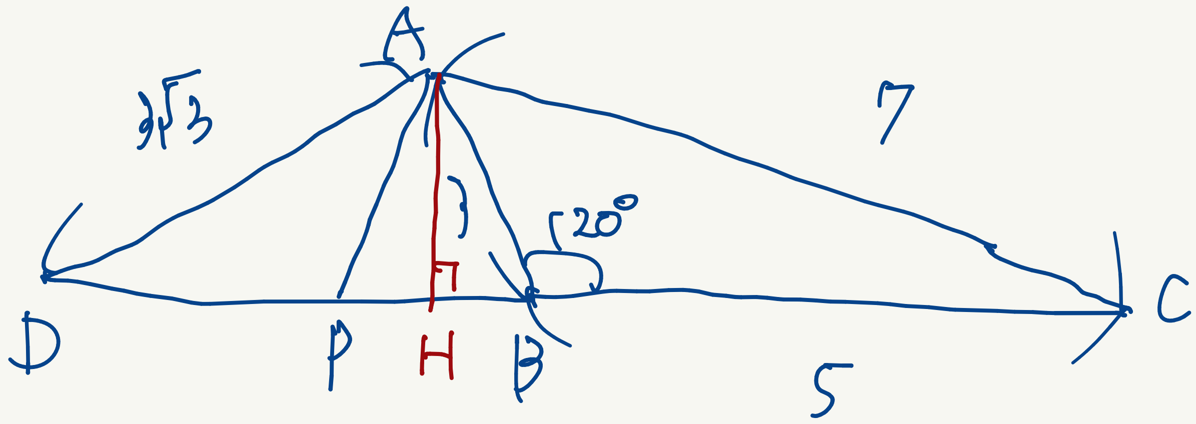
$$2R = \frac{AP}{\sin\angle PCA} = \frac{AP}{\sin\angle BCA} = \frac{AP}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = \frac{14\sqrt{3}}{9}AP$$

$$\therefore R = \frac{7\sqrt{3}}{9}AP$$

$$R=\frac{7\sqrt{3}}{9}AP$$

APのとり得る値の範囲がRのとり得る値の範囲に対応するので、

APの最大最小を調べればよい。



i) 最小は AP=AHのときだから

$$AH=AB\sin\angle ABH$$

$$=3\cdot\sin 60^\circ$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ii) 最大は AP=ADのとき

$$AP=3\sqrt{3}$$

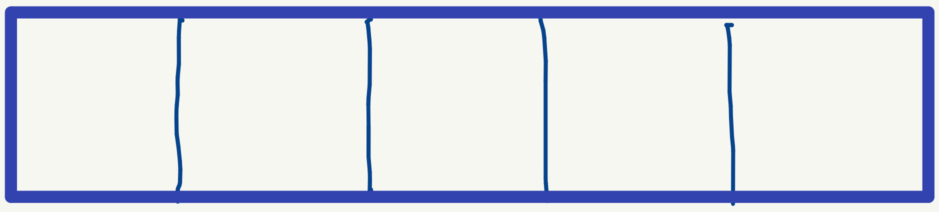
よって i) ii) より、 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqq AP\leqq 3\sqrt{3}$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{9}{7\sqrt{3}}R\leqq 3\sqrt{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{9}\leqq R\leqq 3\sqrt{3}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{7}{2}\leqq R\leqq 7$$

同じ大きさも5枚の正方形の板を1列に並べて図のような掲示板を作り、壁に固定する
赤色、緑色、青色のペンキを用いて、隣り合う正方形同士が異なる色となるようにこの
掲示板を塗り分ける。ただし、3色のペンキを全て使う必要はなく、2色のペンキだけで
塗り分けても良い。



(1) このような塗り方は、全部で $\boxed{アイ}$ 通りである。

(2) 塗り方が左右対称となるのは $\boxed{ウエ}$ 通りである。

(3) 青色と緑色の2色だけで塗り分けるのは $\boxed{オ}$ 通り。

(4) 赤色に塗られる正方形が3枚であるのは $\boxed{カ}$ 通り。

(5) 赤色に塗られる正方形が1枚である場合について考える。

- どちらかの端の1枚が赤色に塗られるのは $\boxed{キ}$ 通り。
- 端以外の1枚が赤色に塗られるのは $\boxed{クケ}$ 通り。

よって赤色に塗られる正方形が1枚であるのは $\boxed{コサ}$ 通り。

(6) 赤色に塗られる正方形が2枚であるのは $\boxed{シス}$ 通り。

12分

(1) このような塗り方は、全部で $\boxed{アイ}$ 通りである。

A	B	C	D	E
3通り	2通り	2通り	2通り	2通り

$3 \times 2^4 =$ 48通り.

(2) 塗り方が左右対称となるのは $\boxed{ウエ}$ 通りである。

A	B	C	D	E

こちらが決まれば

こちらは左と同じにならないと左右対称にならないので1通り

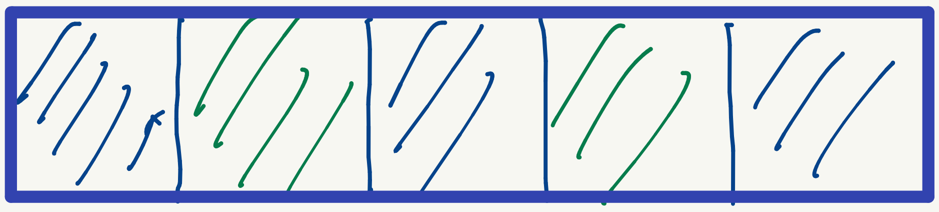
⇓

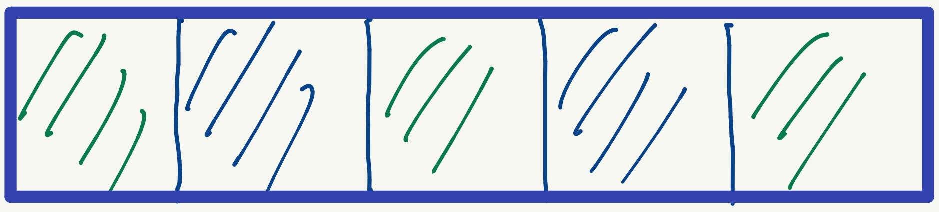
こちらの決め方は

A	B	C
3	2	2

$\Rightarrow 3 \cdot 2^2 =$ 12通り.

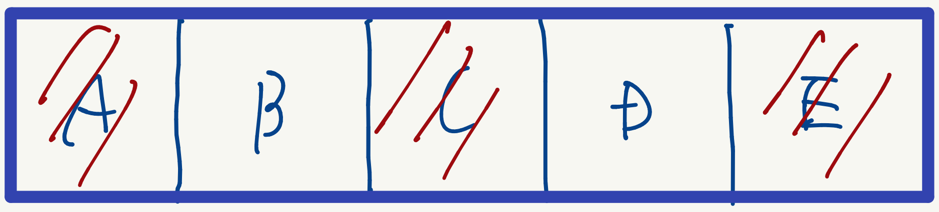
(3) 青色と緑色の2色だけで塗り分けるのは $\boxed{オ}$ 通り。





2通り。

(4) 赤色に塗られる正方形が3枚であるのは $\boxed{カ}$ 通り。



赤色はA.C.E以外に塗れない,

もしBに塗ったら、Dに塗ることになるが
3枚塗れなくなる。

B,Dは赤色以外の2通り。

B , D

2通り　2通り

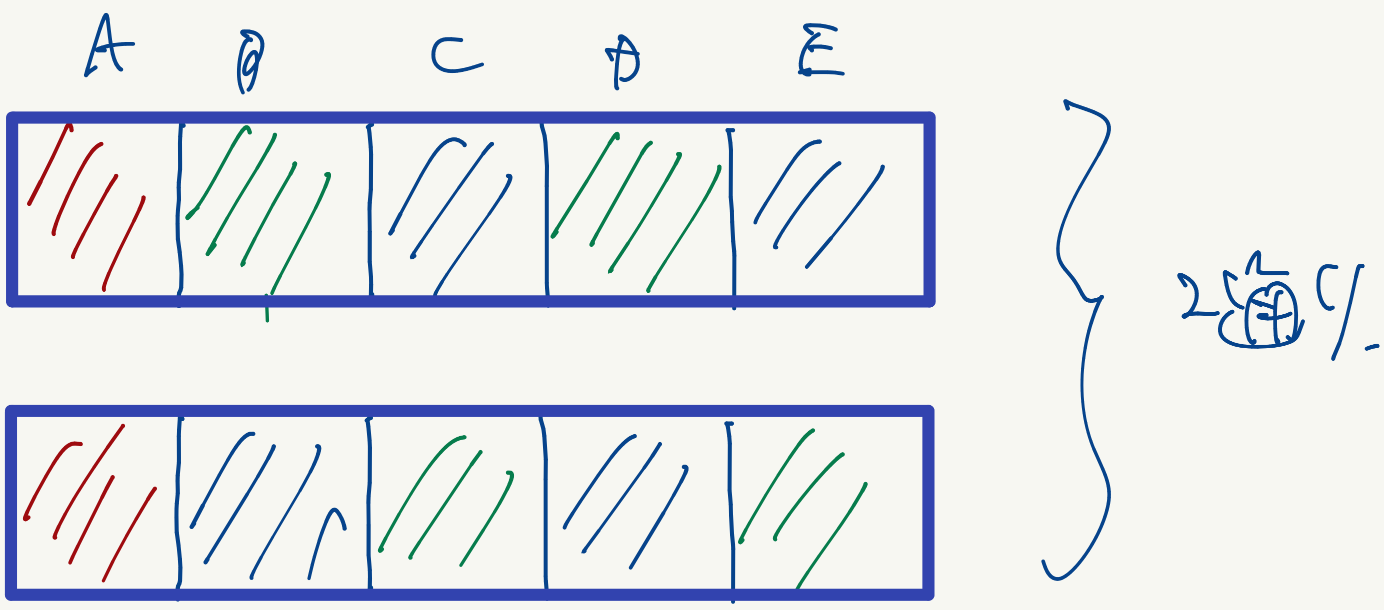
よって $2\times2=$ 4通り

(5) 赤色に塗られる正方形が1枚である場合について考える。

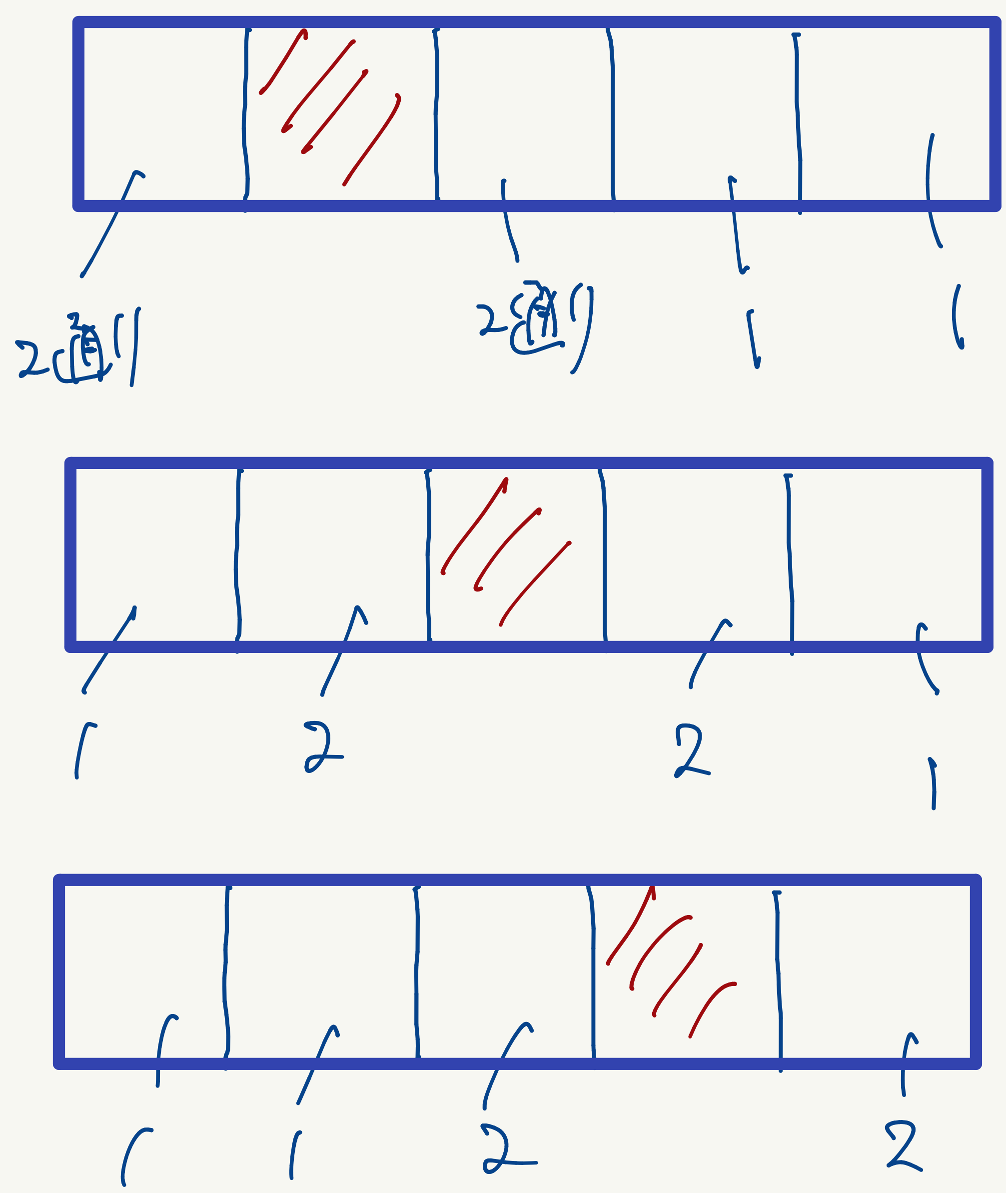
・どちらかの端の1枚が赤色に塗られるのは $\boxed{キ}$ 通り。

・端以外の1枚が赤色に塗られるのは $\boxed{クケ}$ 通り。

よって赤色に塗られる正方形が1枚であるのは $\boxed{コサ}$ 通り。



Eが赤色の場合も2通りなので、2+2=4通り



→ $2\times2=4$

→ $2\times2=4$

→ $2\times2=4$

$4\times3=12$

よって $4+12=16$ 通り

(6) 赤色に塗られる正方形が2枚であるのは $\boxed{ミス}$ 通り。

赤色に塗られる正方形が4枚以上はない。

これまでの問題で (4) 3枚、(5) 1枚 の赤色の塗り分け、(3) 赤色がないときの塗り分け

を計算したので、2枚の塗り分けは、

全体 $-\{(4)+(5)+(3)\}$ となる。

全体は(1)より48だったので

$48-(4+16+2)=26$ 通り