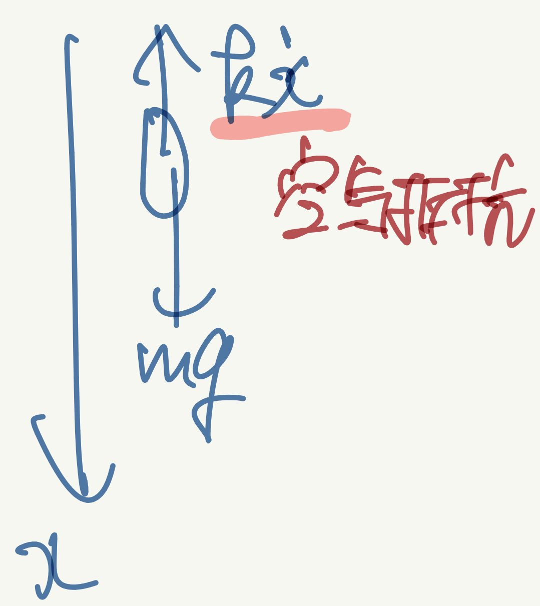
ネイピア数"e"について。

物理的側面。

例えば雨が落ちてくるとき、地上付近では、終端速度といって、速度が一定になって落ちてくる。雨滴には、重力と、速度とともに変化する空気抵抗があると一般的に考える。



$\dot{x} = v$（速度）

運動方程式は $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$

$\dot{x} = v$とすれば $m\dot{v} = -kv + mg$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$$

$v - \frac{mg}{k} = X$、$\frac{k}{m} = K$とすると、

$$\dot{X} = -KX$$

$$\therefore \frac{dX}{dt} = -KX$$ となる。

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

この式のようにある量Xの変化がその量のXできまるような物理法則はいろんなところで見受けられる。何かが拡散していく様子をとらえた拡散方程式なんてのもそう。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$ 偏微分方程式.

ところで $\frac{dx}{dt} = -kx$ をといてみように

これには定石の変数分離という手を使う。

Xで両辺を割る

$$\frac{1}{x}dx = -k\,dt$$

こちらはxだけ　こちらはtだけ

両辺を積分する

$$\int \frac{1}{x}dx = -k\int dt$$

$$\log_e x = -kt + C$$ （Cは積分定数）

$$\log x = -kt + c$$

例えば、$t=0$の時 $x = x_0$ とすると、

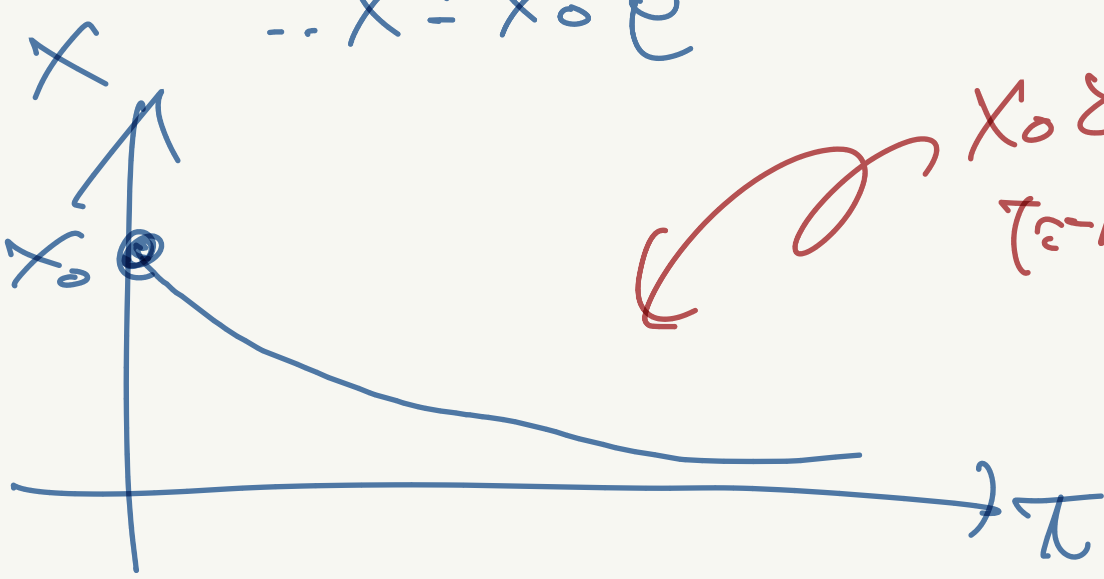
$$\log x_0 = -k \cdot 0 + c \quad \therefore c = \log x_0$$

$$\therefore \log x = -kt + \log x_0$$

$$\therefore \log x - \log x_0 = -kt$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-kt}$$

$$\therefore x = x_0 e^{-kt}$$



x_0という初期値から
だんだん減っていって
ある一定値に近づいていく挙動
今回の場合は
$x=0$に近づく。

減衰曲線と言われ、
よくある自然現象。

このようにネイピア数のおかげで、

$$\int \frac{1}{x}dx = \log_e x$$ のように

積分を実行することができ、物理法則を

表すことができるようになったという意味で、

大変意味のある数"e"であることが

わかる。

---

eの誕生、

複利計算からはじまった。

例えば、100万円をかりたとする。

1年後にかえす約束をして、利子をつけてあげるとすると、

その利子のつけ方を年利率とよぶが、

年利率100%の場合

$$100\text{万円} \times \left(1 + \frac{100}{100}\right)$$

100%のこと

2年後にかえすとすると、1年後のお金に $\left(1+\frac{100}{100}\right)$

つまり $(1 + \text{年利率})$

をかけることになり

$$100\text{万円} \times (1 + \text{年利率})^2$$ となる。

このように

$$元本 \times (1+年利率)^{x} \leftarrow x年後$$

(100万のこと)

とするのが一般的。

これを年でなく月単位の複利計算にすると

月なので年利率を12で割ると、

x年後(=12x ヶ月後)は

$$元本 \times \left(1+\frac{年利率}{12}\right)^{12x}$$ となる。

それでは1日で複利計算をすると、

$$元本 \times \left(1+\frac{年利率}{365}\right)^{365x}$$ となる。

このようにどんどん複利計算の期間を

みじかくしていくと、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad (n \to \infty)$$ のような

計算が必要になっていくことが容易にわかる。

この計算をしたのが、かの有名な"オイラー"です。

オイラーは二項定理を用いて理解を深めます.

$$(a+a)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k} a^k$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= {}_nC_0\left(\frac{1}{n}\right)^0 + {}_nC_1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + {}_nC_3\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{n!}{(n-1)!\,1!}\,\frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n!}{(n-3)!\,3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1} + \frac{1}{3!}\,\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1} + \cdots$$

$(n \to \infty)$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

これはまさに $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ となる。

オイラーは二項定理により"e"を発見する。

一方で ネイピアが、大航海時代に対数を発明し、
三角比とネイピア数に次のような関係を見い出して
いました。

$$\underbrace{\text{Sinus}\,\theta}_{\text{当時の三角比 記号}} = 10000000 \times 0.9999999^{\text{logarithms}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{10000000}\right)$$

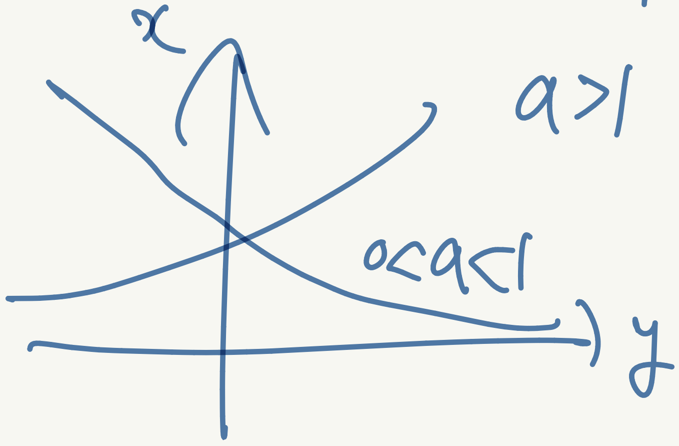
ここにeがあらわれている。

この式をみてみる。

Sinus θ = x , logarithms = y とすると

$$x = 10^7 \times 0.9999999^{y}$$ となる。

底が 0.9999… となっており、底が 1 をさかいに、



大きく値が変化してしまう。
もっとも x が変化しない
ときは $a \fallingdotseq 1$ のときなので

ネイピアは Sinus θ の値ができるだけ大きく変化しない安定した底を探していたので底を 0.999… としていた。

ここで 0.999… はまさに

$$\left(1-\frac{1}{1000\cdots}\right)$$ と同じでこれは "e" であると

いえる。

ネイピアはこの時点で "e" に気づいており、

さらにきちんと定義したのがオイラーであった。

ネイピアが

$$\text{sinus}\ \theta = 10^7 \times 0.99\cdots^{\text{logarithms}}$$ を1614年に

発表し、多くの船乗りたちを助けてから134年後に

オイラーがネイピアのおかげで "e" をみつける

ことになる。

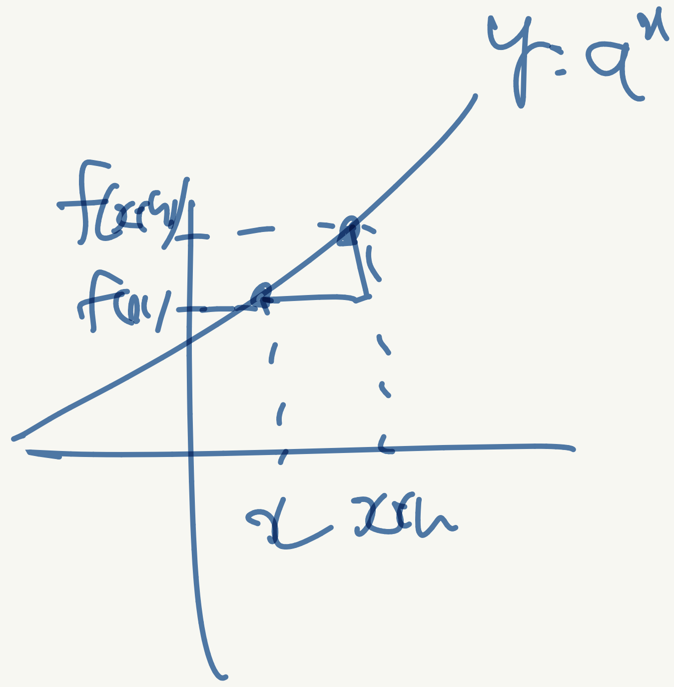
多くの人たちを助けたということで、対数は

神の言葉 (logos ロゴス) であったため

log となった!!

eの性質をまとめてみる。

$f(x) = y = a^x$ を定義する。



その微分は

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

(ここで、もし、$a=e$ なる定数とし、$y=e^x$ が $x=0$ のとき微分1 とすると、

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ となる}$$
)

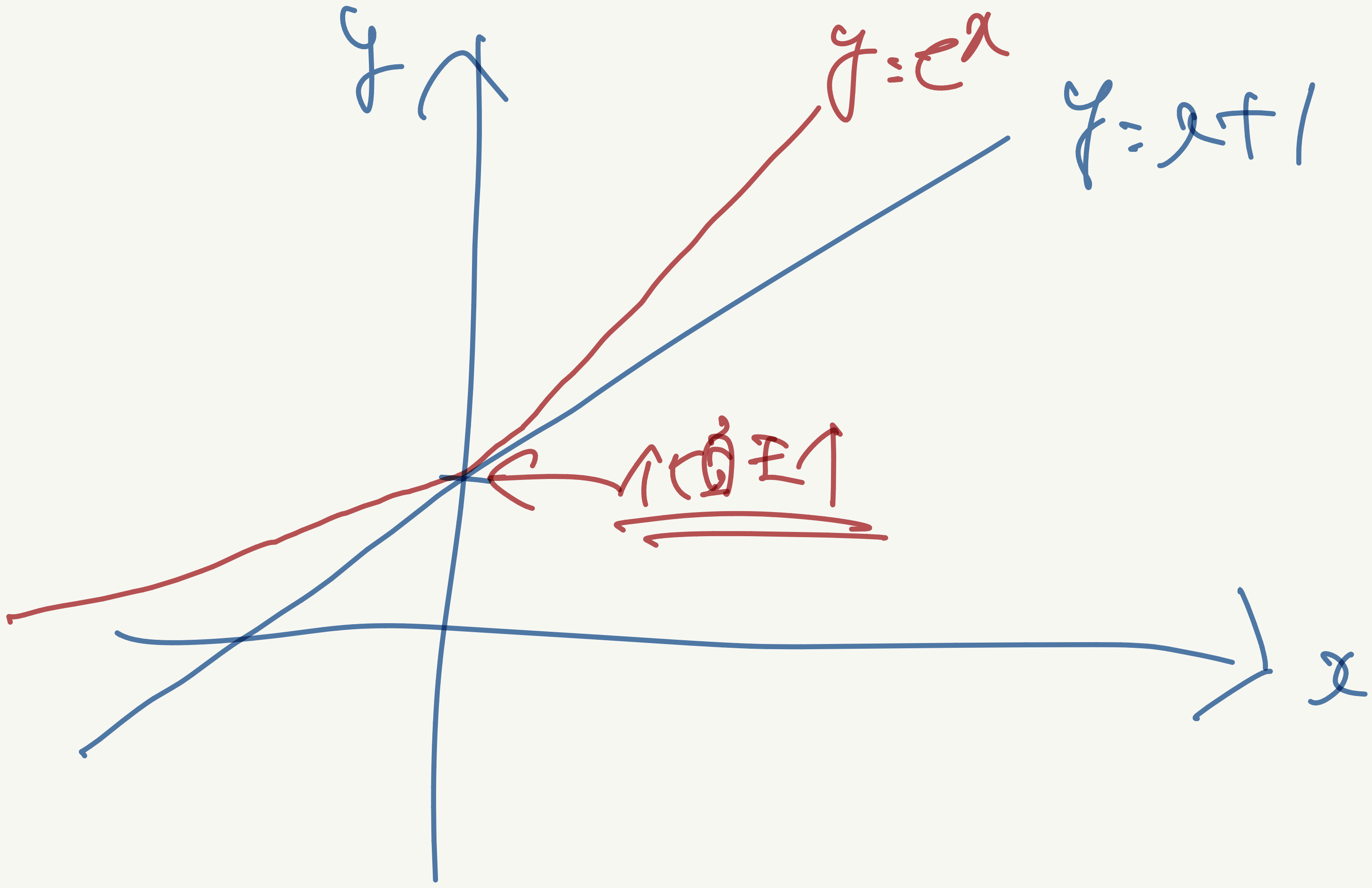
$$= a^x \ (= e^x) \text{ となる。}$$

つまり $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ をみたすとき、$y=e^x$ の微分は $y'=e^x$ となる

よってeは

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$ をみたす値であるとわかる。

$y = e^x$は$x=0$で傾き1である



テイラーの公式について.

マクローリン展開に関する証明

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 2\cdot3a_3x + 3\cdot4\cdot a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

$$f^{(3)}(x) = 2\cdot3a_3 + 2\cdot3\cdot4a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots a_n + \cdots$$

よって

$$f^{(1)}(0) = a_1$$

$$f^{(2)}(0) = 2a_2$$

$$f^{(3)}(0) = 2\cdot3a_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)\cdots a_n$$

$$= n!a_n$$

$\therefore\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ となる

ゆえに

$$f(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$ と表せる。

例えば

$f(x)=e^x$ とすると

$f^{(1)}(x)=e^x$

$f^{(2)}(x)=e^x$

$\vdots$

よって

$f^{(1)}(0)=1$

$f^{(2)}(0)=1$

$\vdots$

$f^{(n)}(0)=1$ となるので

$$f(x)=e^x$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot x^k$$

$$=\frac{1}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

$$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

となる。

ここで

$$e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$x \to ix$ と置きなおすと、

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= \underline{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right)} + i\underline{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)}$$

となる。

ここで $f(x) = \cos x$ とすると

$$f^{(1)}(x) = -\sin x \to f^{(1)}(0) = 0$$

$$f^{(2)}(x) = -\cos x \to f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = +\sin x \to f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \to f^{(4)}(0) = 1$$

よって $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

$$= \frac{1}{0!}x^0 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$= \underline{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots}$$

$f(x)=\sin x$ とおくと

$$f^{(1)}(x)=\cos x \rightarrow f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=-\sin x \rightarrow f^{(2)}(0)=0$$

$$f^{(3)}(x)=-\cos x \rightarrow f^{(3)}(0)=-1$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x \rightarrow f^{(4)}(0)=0$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$=\frac{0}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{0}{2!}x^2+\frac{(-1)}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\cdots$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

よって $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ となっている。

このことから次のおどろくべきことがわかる：

$$e^{i\pi} = -1$$

iもπもよくわからない数なのに、eがかかわると
−1になっちゃう!!

$(-1)\times(-1)$がプラスになる証明

⇓

$$(-1)\times(-1) = e^{i\pi}\times e^{i\pi}$$
$$= e^{i2\pi}$$
$$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$
$$= 1 + 0 = 1$$ プラスだ!!

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ より

$$\log i = \log e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\log i = i\frac{\pi}{2}$$

両辺にiをかけて

$$i\log i = i^2\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \log i^i = -\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$$

虚数の虚数乗は、なんと、実数!!

あと、加法定理も証明できるのだ、
前に説明したけど、やってみて!!