2015年 数学IIB センター

[1] Oを原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta+\cos 7\theta, 2\sin\theta+\sin 7\theta)$ を考える。

ただし、$\frac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{ア}$, $PQ = \boxed{イ}$ である。また、

$$OQ^2 = \boxed{ウ} + \boxed{エ}(\cos 7\theta \cos\theta + \sin 7\theta \sin\theta)$$

$$= \boxed{ウ} + \boxed{エ}\cos(\boxed{オ}\theta)$$ である。

よって $\frac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、OQ は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{カ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる。

---

(2) 3点O, P, Qが一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線OPを表す方程式は $\boxed{ク}$ である。

$\boxed{ク}$ にあてはまるものを⓪〜③のうち1つえらべ。

⓪ $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$　① $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

② $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$　③ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより，$\frac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ の範囲で，3点 O，P，Q が一直線上にあるのは $\theta = \frac{\pi}{\boxed{ケ}}$ の時である。

(3)

∠OQP が直角となるのは $OQ = \sqrt{\boxed{コ}}$ の時である。
したがって $\frac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ の範囲で，∠OQP が直角となるのは

$\theta = \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi$ の時である。

8分

解説

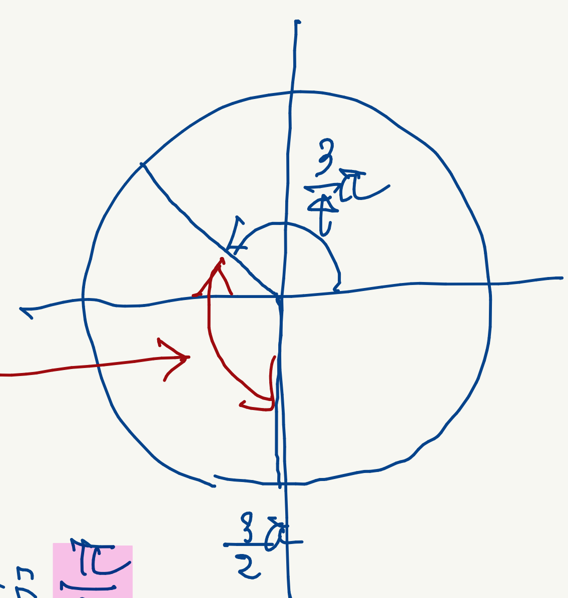
(1) $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$

$$OP^2 = (2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2$$
$$= 4(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 4\cdot 1 = 4$$
$$PQ^2 = (2\cos\theta+\cos 7\theta-2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta+\sin 7\theta-2\sin\theta)^2$$
$$= \cos^2 7\theta + \sin^2 7\theta$$
$$= 1$$

$\therefore\ OP = 4\ ,\ PQ = 1$

$$OQ^2 = (2\cos\theta+\cos 7\theta)^2 + (2\sin\theta+\sin 7\theta)^2$$
$$= 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\cdot\cos 7\theta + \cos^2 7\theta + 4\sin^2\theta + 4\sin\theta\cdot\sin 7\theta + \sin^2 7\theta$$
$$= 4(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + (\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta) + 4(\cos\theta\cos 7\theta+\sin\theta\cdot\sin 7\theta)$$
$$= 4\cdot 1 + 1 + 4(\cos\theta\cos 7\theta+\sin\theta\sin 7\theta)$$
$$= 5 + 4(\cos\theta\cos 7\theta+\sin\theta\sin 7\theta)$$
$$= 5 + 4\cos(7\theta-\theta)$$
$$= 5 + 4\cos 6\theta$$

$\frac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ より $\frac{3\pi}{4} \leqq 6\theta \leqq \frac{3}{2}\pi$

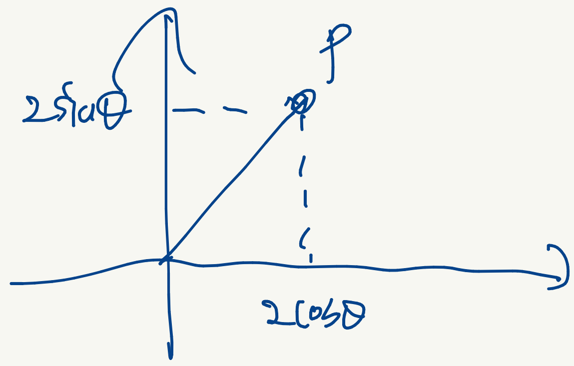


よって $-1 \leqq \cos 6\theta \leqq 0$

OQ の max は $6\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき. $\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$

このとき $OQ^2 = 5+4\cdot 0$ $\therefore\ OQ = \sqrt{5}$

(2) 点Pは $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ であるから



直線OPは傾き $\frac{2\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ となる。

よって $y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$ が直線OPの式となり、

さらに変形すると、

$\cos\theta \cdot y = \sin\theta \cdot x$ より

$\sin\theta \cdot x - \cos\theta \cdot y = 0$ ③となる

O, P, Qが一直線上にあるということは、Qが直線OP上にあればよいので

$\sin\theta \cdot x - \cos\theta \cdot y = 0$ より

$Q(2\cos\theta + \cos 7\theta, 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ より

$\sin\theta \cdot (2\cos\theta + \cos 7\theta) - \cos\theta \cdot (2\sin\theta + \sin 7\theta) = 0$

$2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 7\theta - 2\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin 7\theta = 0$

$\sin\theta\cos 7\theta - \cos\theta\sin 7\theta = 0$

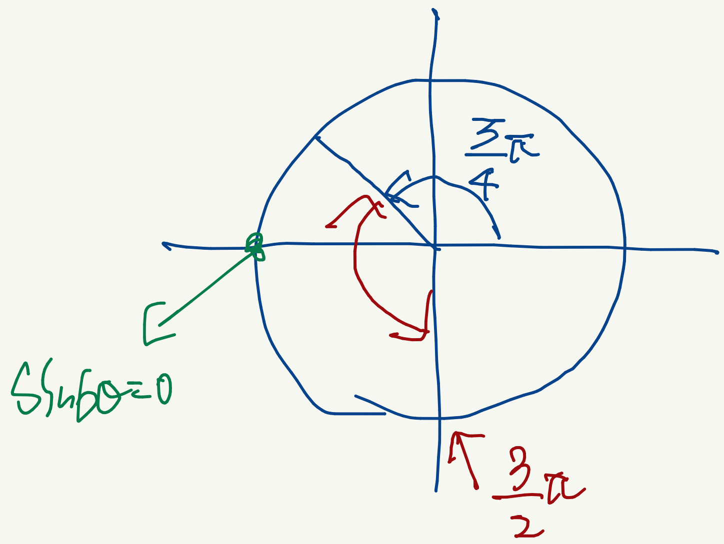
$\sin 7\theta\cos\theta - \cos 7\theta\sin\theta = 0$

$\sin(7\theta - \theta) = 0$

$\therefore \sin 6\theta = 0$

つまり $\sin 6\theta = 0$ が成り立てばよい。

今、$\frac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ であるから、

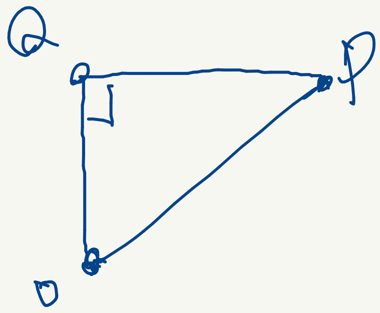


$6\theta = \pi$ のとき

$\sin 6\theta = 0$ となる。

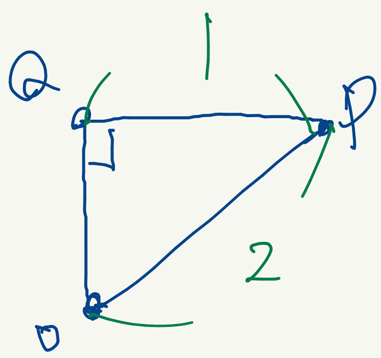
よって $\theta = \frac{\pi}{6}$

(3)



∠OQPが直角だとすると、△OQPに三平方の定理が成り立つ。

今(1)で OP = 2、PQ = 1 だと計算したので、



$$OQ = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

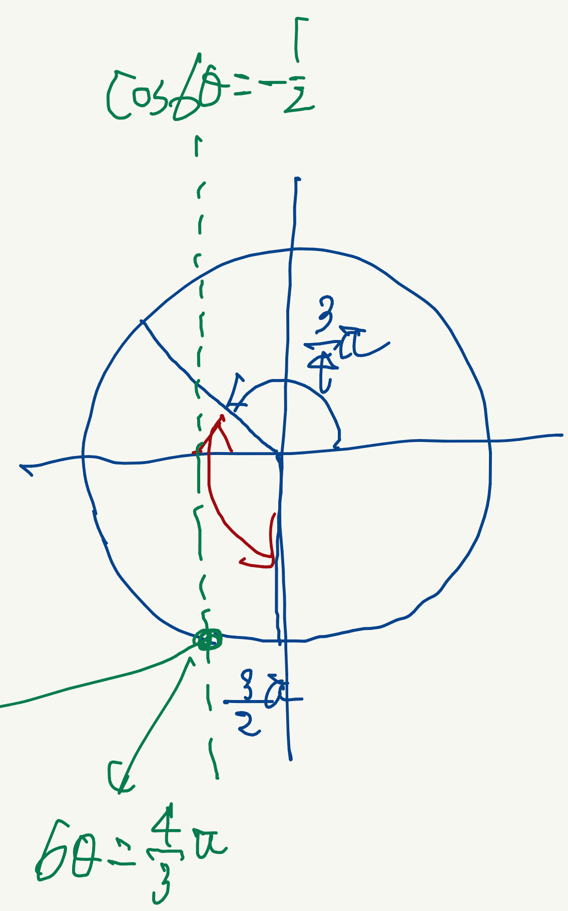
また、(1)より $OQ^2 = 5 + 4\cos 6\theta$ より

$$(\sqrt{3})^2 = 5 + 4\cos 6\theta$$

$\cos 6\theta = -\frac{1}{2}$ より

$$6\theta = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2}{9}\pi$$



a, bを正の実数とする。連立方程式

$$(*) \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}\,y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数x, yについて考えよう。

(1) 連立方程式$(*)$を満たす正の実数x, yは

$x = a^{\boxed{ス}} b^{\boxed{セソ}}$, $y = a^{p} b^{\boxed{タ}}$ となる。

ただし $p = \dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$ である。

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$とする。aが$a>0$の範囲を動くとき、連立方程式$(*)$を満たす正の実数x, yについて、$x+y$の最小値を求めよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$であるから、$(*)$を満たす正の実数x, yは、aを用いて

$x = 2^{\boxed{セソ}} a^{\boxed{トナ}}$, $y = 2^{\boxed{タ}} a^{\boxed{ニ}}$ と表せる。

したがって、相加平均と相乗平均の関係を利用すると、

$x+y$は$a = 2^{q}$のとき最小値$\sqrt{\boxed{ヌ}}$となることがわかる。

ただし $q = \dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハ}}$ である。

7.5点

解説

(1) $\begin{cases} x\sqrt{y^3} = a & \text{—①} \\ \sqrt[3]{x}\,y = b & \text{—②} \end{cases}$ とする.

①より

$$x^2 y^3 = a^2 \quad \text{—③}$$

②より $x \cdot y^3 = b^3 \quad \text{—④}$

$\dfrac{③}{④}$ より $x = \dfrac{a^2}{b^3} = a^{2} \cdot b^{-3} \quad \text{—⑤}$

④より $y^3 = \dfrac{b^3}{x} = \dfrac{b^3}{a^2 b^{-3}} = a^{-2} \cdot b^6$

$\therefore y = (a^{-2} \cdot b^6)^{\frac{1}{3}}$

$= a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{2} \quad \text{—⑥}$

$\therefore k = \dfrac{-2}{3}$

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4} = 2a^{\frac{4}{3}}$ より

⑤に代入すると $x = a^2 \cdot (2a^{\frac{4}{3}})^{-3}$

$= a^2 \cdot 2^{-3} \cdot a^{-4} = 2^{-3} \cdot a^{-2}$

⑥に代入すると

$y = a^{-\frac{2}{3}} \cdot (2a^{\frac{4}{3}})^2$

$= a^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^2 \cdot a^{\frac{8}{3}} = 2^2 \cdot a^{2}$

よって相加・相乗平均より

$$x+y \geqq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2^{-3}\cdot a^{-2}\cdot 2^{2}\cdot a^{2}}$$

$$= 2\sqrt{2^{-1}}$$

$$= \sqrt{2^{2}\cdot 2^{-1}}$$

$$= \sqrt{2}$$

$\therefore x+y \geqq \sqrt{2}$ となり

$x+y$ の最小値は $\sqrt{2}$

等号の成立は $x=y$ より

$$2^{-3}\cdot a^{-2} = 2^{2}\cdot a^{2}$$

$$2^{-5} = a^{4}$$

$$a^{4} = 2^{-5}$$

$$\therefore a = 2^{\frac{-5}{4}}$$

のときである。