2018センター 数IA

xを実数とし.

$$A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$$ とおく.

整数nに対して.

$$(x+n)(n+5-x) = x(5-x) + n^2 + \boxed{ア}\,n$$

であり. したがって $X = x(5-x)$ とおくと,

$$A = X\left(X + \boxed{イ}\right)\left(X + \boxed{ウエ}\right)$$ と表せる。

$x = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき. $X = \boxed{オ}$ であり. $A = 2^{\boxed{カ}}$ である。

6分.

解説

$$(x+n)(n+5-x)=(x+n)\{n+(5-x)\}$$
$$=xn+x(5-x)+n^2+n(5-x)$$
$$=xn+5x-x^2+n^2+5n-nx$$
$$=-x^2+5x+n^2+5n$$
$$=x(5-x)+n^2+5n$$

今 $X=x(5-x)$ とおけば、

$(x+n)(n+5-x)=X+n^2+5n$ となる。 ―①

$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ より

①に $n=1$ を代入すると、

$$(x+1)(6-x)=X+1^2+5\cdot1=X+6$$

①に $n=2$ を代入すると、

$$(x+2)(7-x)=X+2^2+5\cdot2=X+14$$

よって $A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$
$$=x(5-x)\cdot(x+1)(6-x)\cdot(x+2)(7-x)$$
$$=X(X+6)(X+14)$$

$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ より

$$X = x(5-x)$$

$$= \frac{5+\sqrt{17}}{2} \cdot \left(5 - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$= \frac{5+\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

$$= \frac{5^2-17}{4}$$

$$= 2$$ となる。

よって $A = X(X+6)(X+14)$ より $X=2$ を代入して

$$= 2 \cdot 8 \cdot 16$$

$$= 2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$$

$$= 2^8$$

2018 センター数IA

四角形ABCDにおいて3辺の長さをそれぞれ AB=5, BC=9, CD=3, 対角線ACの長さをAC=6とする。このとき、

$\cos\angle ABC = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$, $\sin\angle ABC = \dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である。

ここで、四角形ABCDは台形であるとする。
次の $\boxed{カ}$ には ⓪～② , $\boxed{キ}$ には ③, ④ から当てはまるものを1つずつ選べ。

CD $\boxed{カ}$ AB・$\sin\angle ABC$ であるから、$\boxed{キ}$ である。

⓪ <　　① =　　② >

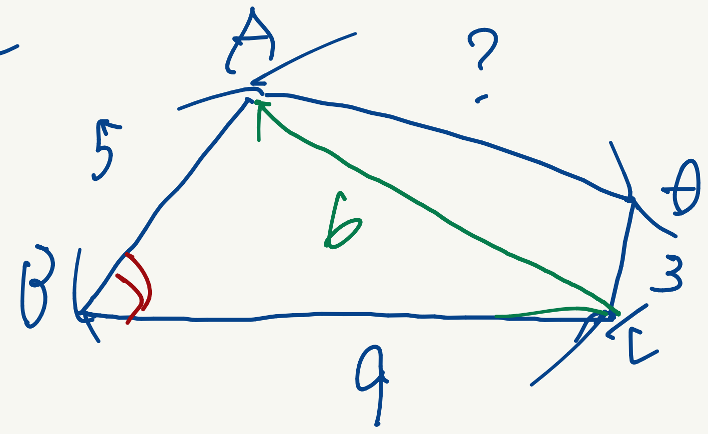
③ 辺ADと辺BCが平行。　④ 辺ABと辺CDが平行。

したがって、

BD = $\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$ である。

6分

解説



△ABCに余弦定理を用いると、

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}$$

$$= \frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot 5\cdot 9}$$

$$= \frac{70}{2\cdot 5\cdot 9} = \frac{7}{9}$$

$\sin\angle ABC > 0$より

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\cos^2\angle ABC}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{32}{81}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$AB\cdot\sin\angle ABC$$

$$= 5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{9}\left(\fallingdotseq\frac{20\times 1.4}{9} = \frac{28.\cdots}{9}\right)$$

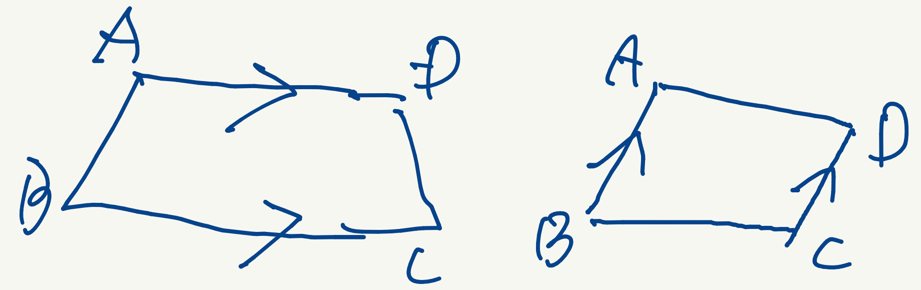
$CD = 3\left(=\frac{27}{9}\right)$より

CDと$AB\sin\angle ABC$を比べると

$$CD < AB\sin\angle ABC$$

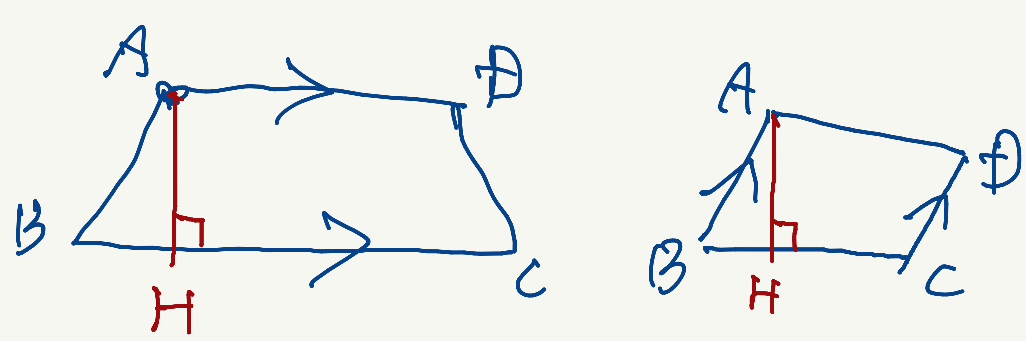
$CD < AB\cdot\sin\angle ABC$の場合

次の2つの台形が見つかる。

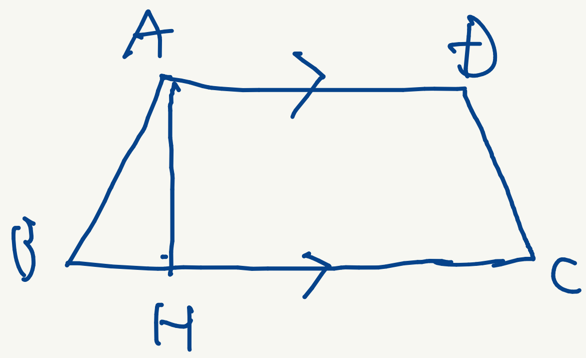


今$AB\cdot\sin\angle ABC$は点AからBCに垂線を下ろした場合の長さAHである

ことに気づかないといけない



まず AD // BC の場合.



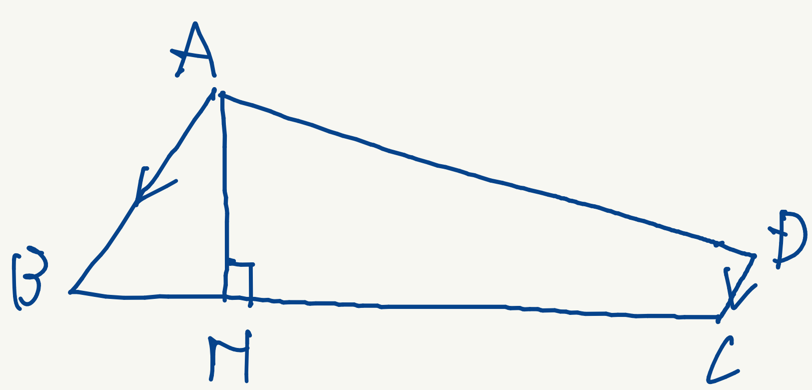
$CD < AB \cdot \sin\angle ABC$

$CD < AH$ となるが AH が AD と BC 間で最小にならないと

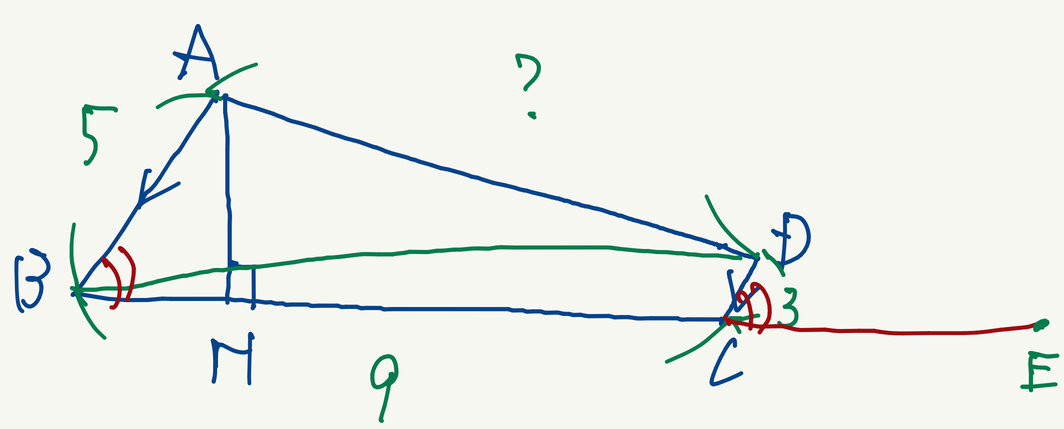
おかしいのでまちがい.

次に AB // CD の場合 、この図から明らかなように.

$CD < AH$ があり得る.



よって 辺ABと辺CDが平行



ここで
AB // CD より
$\angle ABC = \angle DCE$
よって $\angle BCD = 180 - \angle DCE$
$= 180 - \angle ABC$
$\cos\angle BCD$
$= \cos(180 - \angle ABC)$
$= -\cos\angle ABC$
$= -\dfrac{7}{9}$

$\triangle BCD$ に余弦定理を用いると

$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos\angle BCD$

$= 9^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos\angle BCD$

よって
$BD^2 = 9^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) = 132$
$\therefore BD = 2\sqrt{33}$ +

2018 数学IA 確率

一般に事象Aの確率をP（A）で表す。また、事象Aの余事象を$\bar{A}$と表し、二つの事象A、Bの積事象をA∩Bと表す。

大小2個のサイコロを同時に投げる試行において、

Aを《大きいサイコロについて、4の目が出る》という事象
Bを《2個のサイコロの出た目の和が7である》という事象
Cを《2個のサイコロの出た目の和が9である》という事象

とする。

(1) 事象A, B, Cの確率はそれぞれ

$$P(A)=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad P(B)=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\quad P(C)=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

である。

(2) 事象Cが起きたときの事象Aが起こる条件付き確率は $\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。
事象Aが起こったときの事象Cが起こる条件付き確率は $\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。

(3) 次の $\boxed{サ}$ $\boxed{シ}$ に当てはまるものを ⓪～② の中からえらべ。同じものを使ってもよい。

$$P(A\cap B)\ \boxed{サ}\ P(A)P(B)$$

$$P(A\cap C)\ \boxed{シ}\ P(A)P(C)$$

⓪ <　　① =　　② >

(4) 大小2個のさいころを同時に投げる試行を2回繰り返す。

1回目に事象 $A\cap B$ が起こり、2回目に $\overline{A}\cap C$ が起こる確率は

$\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソタ}}$ である。

三つの事象 A, B, C がいずれもちょうど1回ずつ起こる確率は $\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}$

である。

(2分)

解説

まず大小2個のさいころを同時に投げるとき、

すべての場合の数は $6\times 6=36$ 通り.

(1)

Aについて、大きいさいころが4の目であればいいので、

(大, 小) = (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)

の6通り.

よって $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Bについて 出た目の和が7なので足して7になればよい。

(大, 小) = (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) の6通り

$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

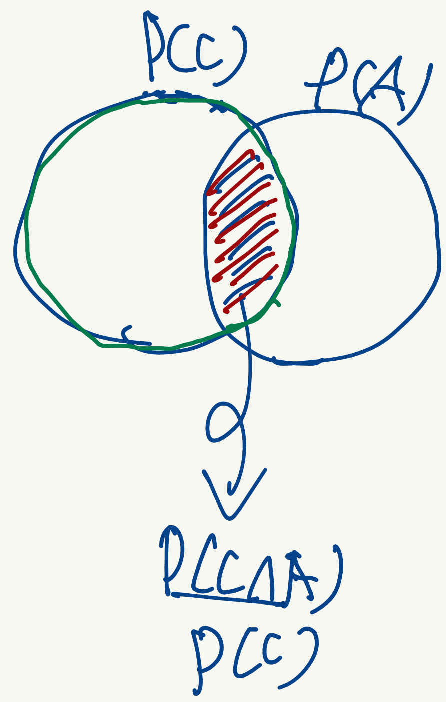
Cについて 出た目の和が9なので

(大, 小) = (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) の4通り.

$P(C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(2) 事象Cが起こったときの事象Aの条件付き確率は.

$$P_C(A) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)}$$



ここで $P(C \cap A)$ を考える。

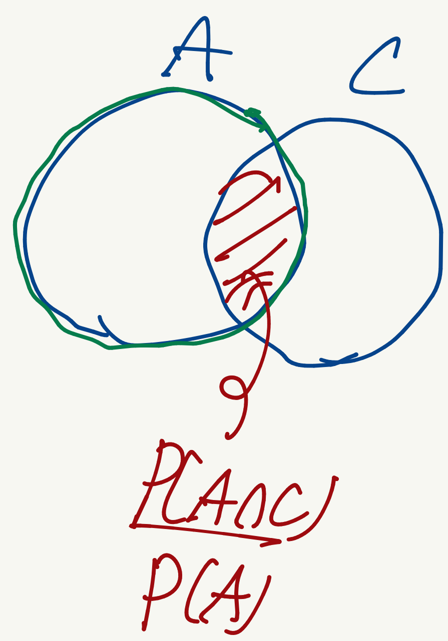
(1)より CとAの共通は $(4,5)$ のみである。

よって $P(C \cap A) = \frac{1}{36}$

$$\therefore\ P_C(A) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

事象Aが起こったときの事象Cが起こる条件付き確率は.

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$$



もちろん $P(C \cap A) = P(A \cap C)$ なので

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36}$$

よって $P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(3) 事象 $A\cap B$ は (1)より $(4,3)$ のみ.

よって $P(A\cap B)=\dfrac{1}{36}$

(1)より

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$\therefore\ P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

事象 $A\cap C$ は (2)より

$$P(A\cap C)=\frac{1}{36}$$

(1)より

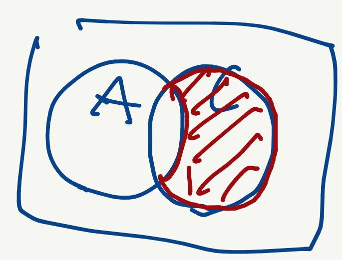
$$P(A)\cdot P(C)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{54}$$

$$\therefore\ P(A\cap C)>P(A)\cdot P(C)$$

(4)

(3)より $P(A\cap B)=\dfrac{1}{36}$

$\overline{A}\cap C$ は Cの中でAとの共通部分以外なので、



$(3,6),(5,4),(6,3)$ の3通り.

よって $P(\overline{A}\cap C)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

よって1回目に $A\cap B$ が起こり、2回目に $\overline{A}\cap C$ が起こる確率は

$$P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap C)=\frac{1}{36}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{432}$$

2回の試行でA, B, Cが1回ずつ起こるには以下の3通りが考えられる

1)

1回目	2回目
$A\cap B$	C

×2 （

1回目	2回目
C	$A\cap B$

）

2)

1回目	2回目
$A\cap C$	B

×2 （

1回目	2回目
B	$A\cap C$

）

3)

1回目	2回目
$B\cap C$	A

×2 （

1回目	2回目
A	$B\cap C$

）

ところが3)については.

$B\cap C$ つまり BとCの共通項がないため 3)は起こらない。
(1)より

それと、1)の2回目のCは $\overline{A}\cap C$ でないと、Aがおきてしまうのでダメ。

よって

1)

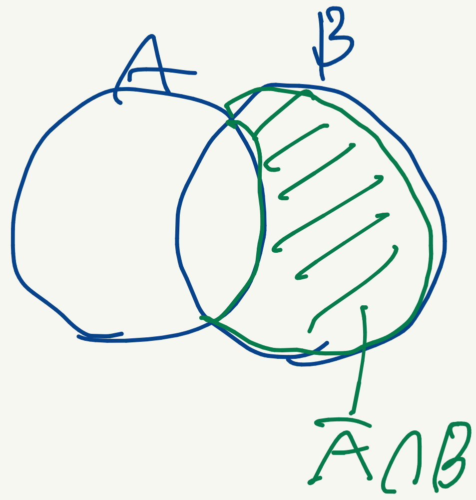
$$P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap C)\times 2$$

$$=\frac{1}{36}\times\frac{3}{36}\times 2=\frac{6}{36^2}$$

2) も同様に

$P(A \cap C) \times P(\overline{A} \cap B) \times 2$ となる。

ここで $\overline{A} \cap B$ は B の中で A との共通項をのぞいた通り



$\overline{A} \cap B$: (1, 6) (2, 5) (3, 4) (5, 2) (6, 1)
の5通り。

$$P(\overline{A} \cap B) = \frac{5}{36}$$

よって $P(A \cap C) \times P(\overline{A} \cap B) \times 2$

$$= \frac{1}{36} \times \frac{5}{36} \times 2$$

$$= \frac{10}{36^2}$$

よって 1)、2) より

$$\frac{6}{36^2} + \frac{10}{36^2} = \frac{16}{36^2} = \left(\frac{4}{36}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

2018 数IAセンター図形

△ABCにおいて AB=2, AC=1, ∠A=90° とする。

∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとすると、

$$BD=\frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$ である。

点Aを通り点Dで辺BCに接する円と辺ABとの交点でAと異なるものをEとすると、

$$AB\cdot BE=\frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$$ であるから、$BE=\frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ である。

— — — — — —

$\frac{BE}{BD}$ $\boxed{コ}$ $\frac{AB}{BC}$ であるから、直線ACと直線DEの交点は辺ACの端点 $\boxed{サ}$ の側の延長上にある。下の選択肢から選べ。

$\boxed{コ}$: ⓪ < ① = ② >

$\boxed{サ}$: ③ A ④ C

その交点をFとすると、$\dfrac{CF}{AF} = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であるから、$CF = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である。

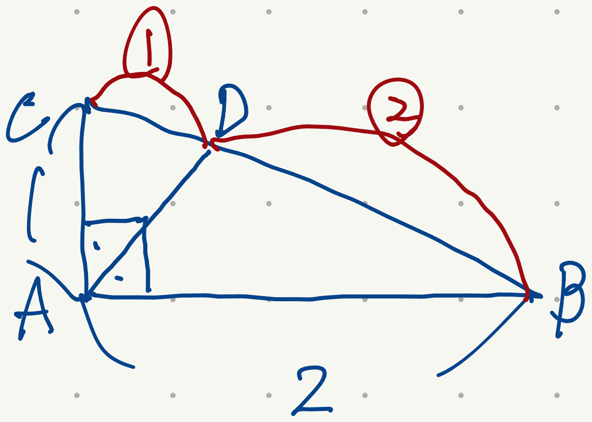
したがって、BFの長さが求まり、$\dfrac{CF}{AC} = \dfrac{BF}{AB}$ であることがわかる。

点Dは△ABFの $\boxed{タ}$

$\boxed{タ}$ ：⓪ 外心である　① 内心である。② 重心である。

③ 外心，内心，重心のいずれでもない。

解説.



△ABCは直角三角形なので、

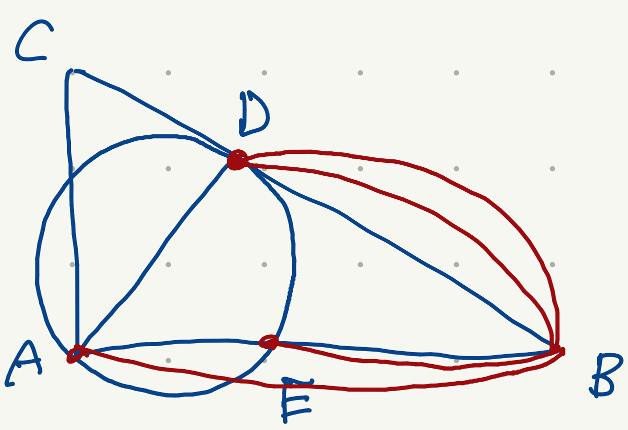
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{5}$$

∠Aの角の二等分線なので、

$$CD : DB = 1 : 2$$

$$\therefore BD = \frac{2}{3} BC$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

, $BD^2 = \frac{20}{9}$

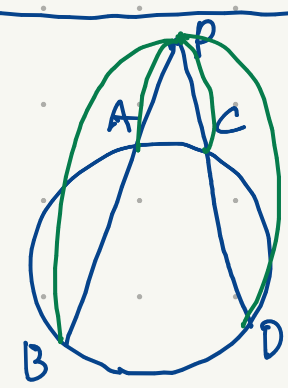


方べきの定理より

$$AB \cdot BE = BD \cdot BD$$
$$\therefore BD^2 = AB \cdot BE$$
$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 2 \cdot BE.$$
$$\therefore BE = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

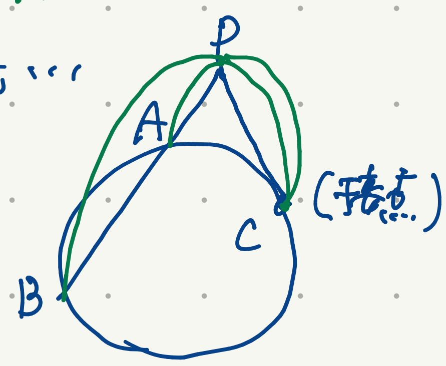
方べきの定理とは?

円と2直線の交点のお話.

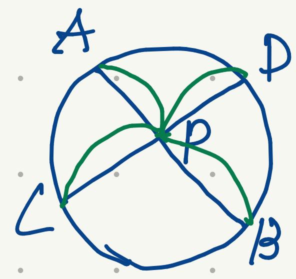


$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

他にも・・・



$PA \cdot PB = PC \cdot PC = PC^2$



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$BE = \frac{10}{9}$, $BD = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ より

$$\frac{BE}{BD} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{2\sqrt{5}}{3}} = \frac{3 \cdot 10}{2\sqrt{5} \cdot 9} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \boxed{\frac{5\sqrt{5}}{15}}$$

$AB = 2$, $BC = \sqrt{5}$ より

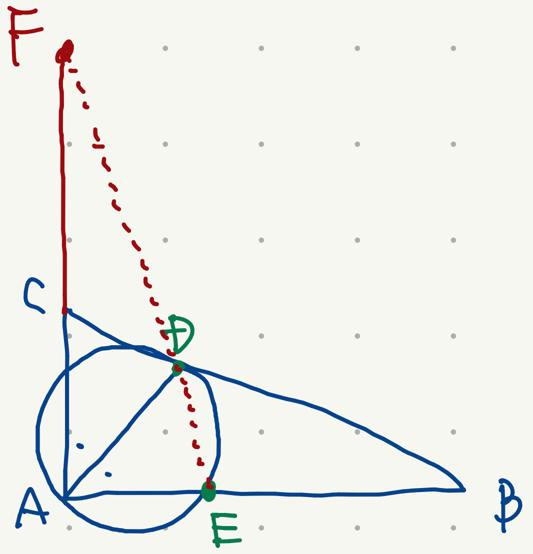
$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \boxed{\frac{6\sqrt{5}}{15}}$$

$\frac{5\sqrt{5}}{15} < \frac{6\sqrt{5}}{15}$ より

$$\frac{BE}{BD} < \frac{AB}{BC}$$

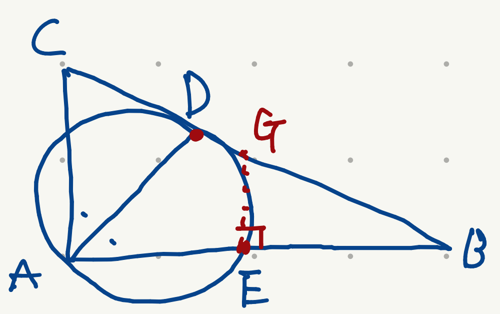
次はすこし難しい。

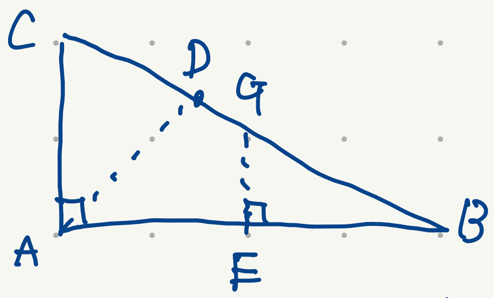
図をしっかりかけば、次のようになりそうだとわかる。



直線ACと直線DEの交点は、辺ACの端点Cの側の延長上にある。 ④

証明は以下





点Eから垂直に上げた点Gを考える。

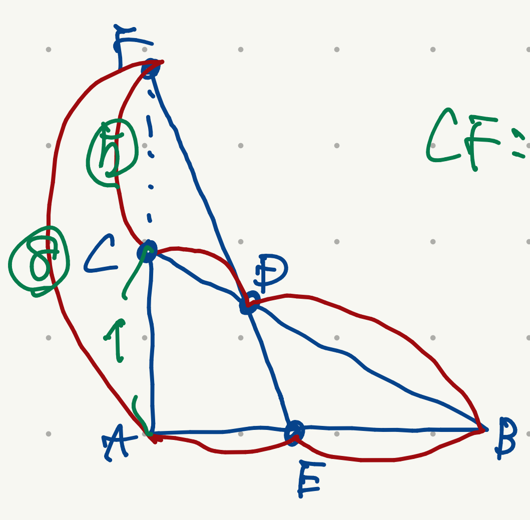
BG < BD, つまり $\frac{1}{BD} < \frac{1}{BG}$ が言えればよい。

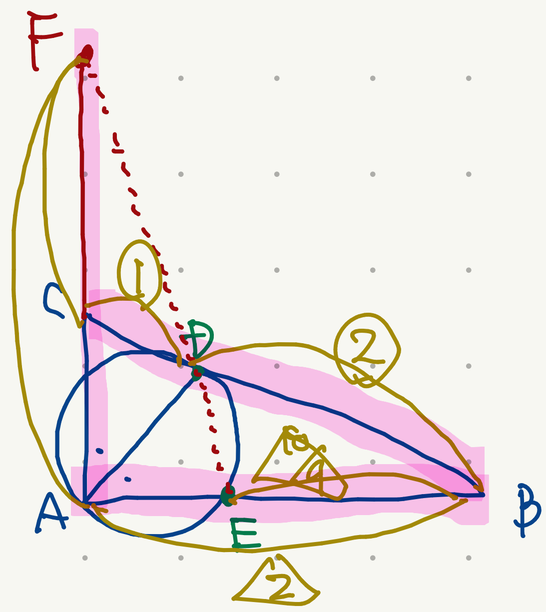
ここで、AC // GE より $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BG}$

今 $\frac{BE}{BD} < \frac{AB}{BC}$ より

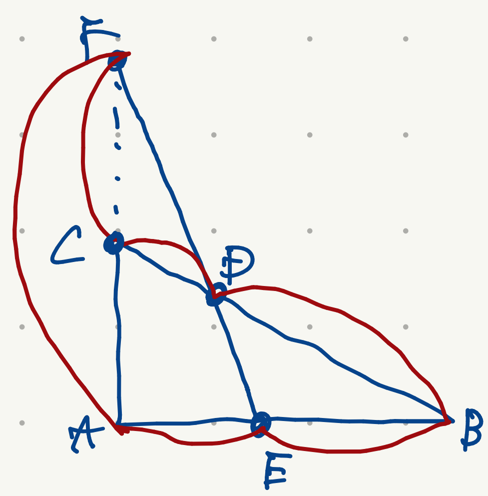
$\frac{BE}{BD} < \frac{BE}{BG} \left(= \frac{AB}{BC}\right)$

∴ $\frac{1}{BD} < \frac{1}{BG}$





△ABCと直線EFに対してメネラウスの定理を用いる



$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{AF}=1$

$\frac{BD}{DC}=\frac{2}{1}=2$, $\frac{AE}{EB}=\frac{2-\frac{10}{9}}{\frac{10}{9}}=\frac{\frac{8}{9}}{\frac{10}{9}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

∴ $\frac{4}{5}\cdot 2\cdot\frac{CF}{AF}=1$

∴ $\frac{CF}{AF}=1\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

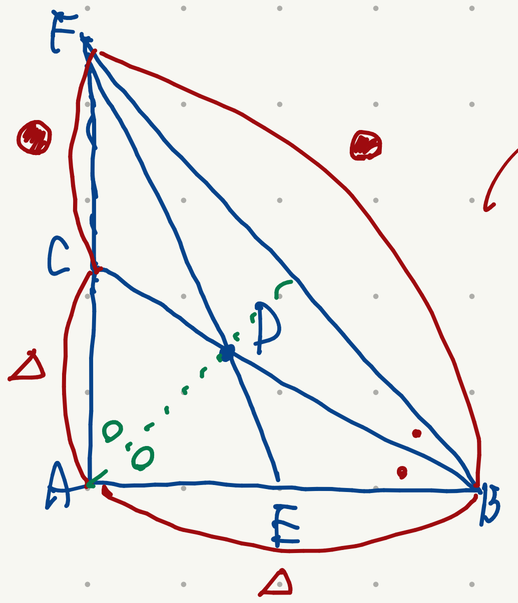
CF : AF = 5 : 8, AC = 1 より

CF : AC = 5 : 3

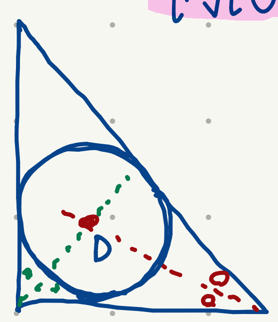
∴ CF = $\frac{5}{3}AC = \frac{5}{3}$

問題文より、$\dfrac{CF}{AC} = \dfrac{BF}{AB}$ とあるので、

$AC : CF = AB : BF$ ということになる。



点Dは∠Bの二等分線と
∠Aの二等分線の
交点になっているので、
内心になる。



結局、角の二等分線と内心とを関連付ける
問題構成！

⇩

角の二等分線とおったら
内心を疑おう°°