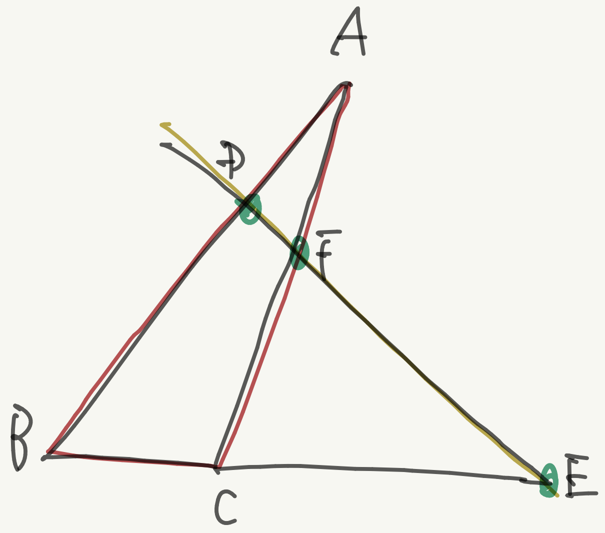
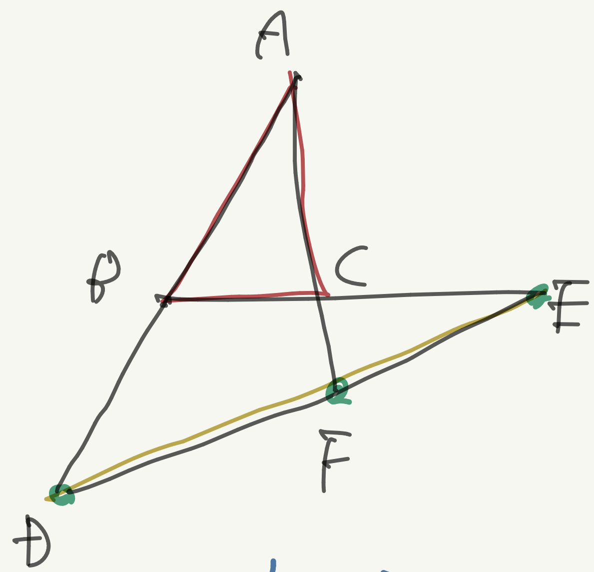
メネラウスとチェバの定理まとめ

メネラウスの定理：三角形と直線に関わる定理



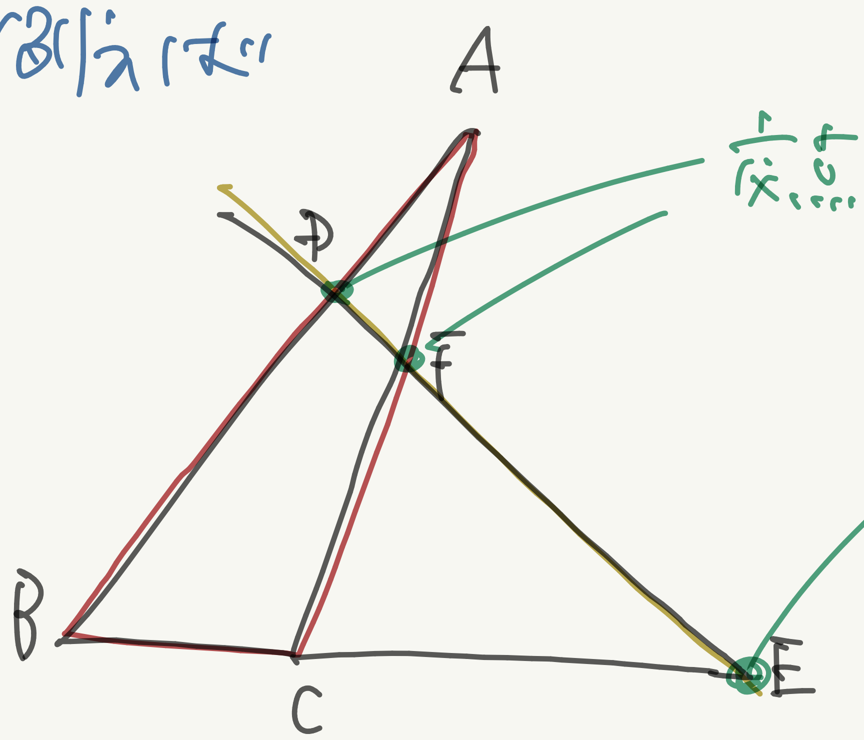


A→交点D→B→交点E→C→交点F→Aの順に交点を必ず経由する

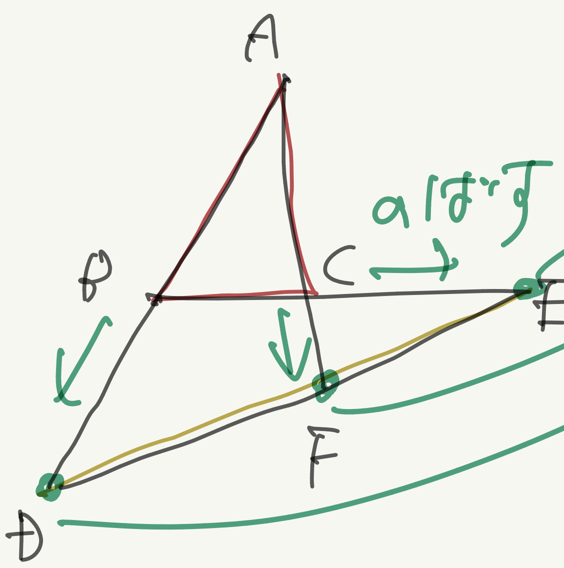
$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

三角形ABCと直線DEの定理。

例えば

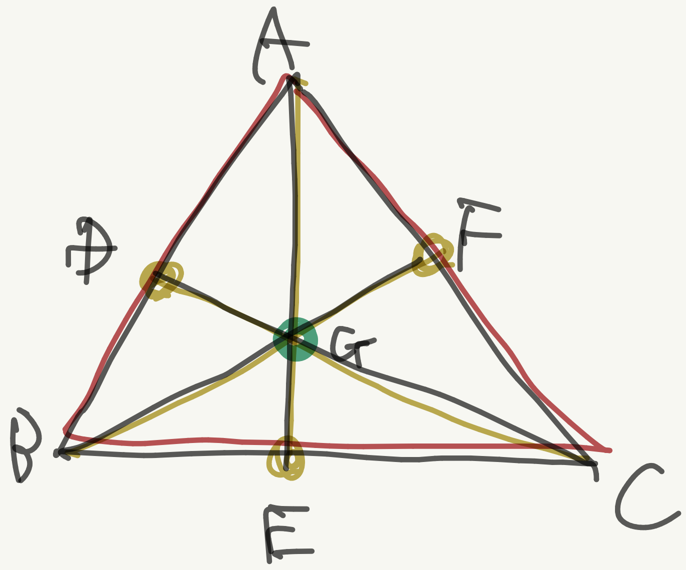


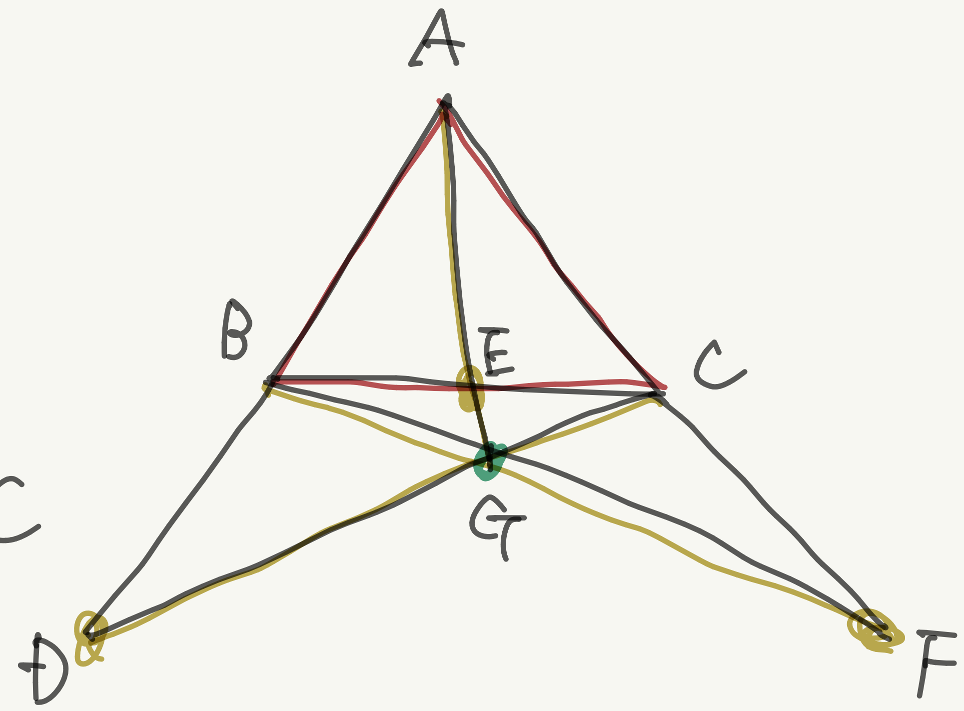
ここも交点
この交点は一見わかりにくいけど
辺BCを延長したときに
直線DEにぶつかる点という形
で交点となる。



これらすべて交点
これも一見わかりにくいけど、
辺AB, BC, ACをのばして
直線DEにぶつかる点と理解する。

チェバの定理：三角形と点に関わる定理（△ABCと点G）





これら交点D,E,Fを必ず経由して

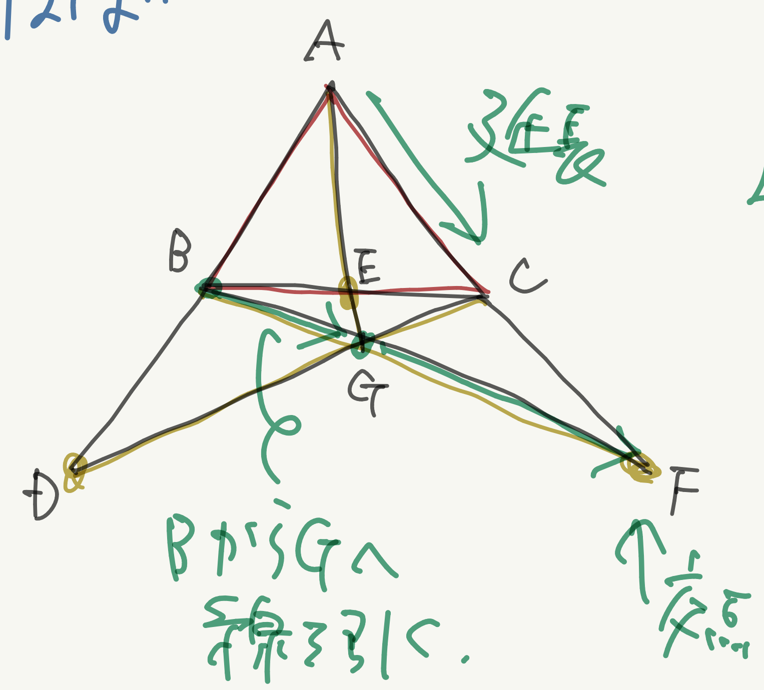
A→交点D→B→交点E→C→交点F→A.

$$\frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA}=1$$

交点の考え方

各点A,B,Cから点Gへ線を引いたときに各辺にぶつかる点

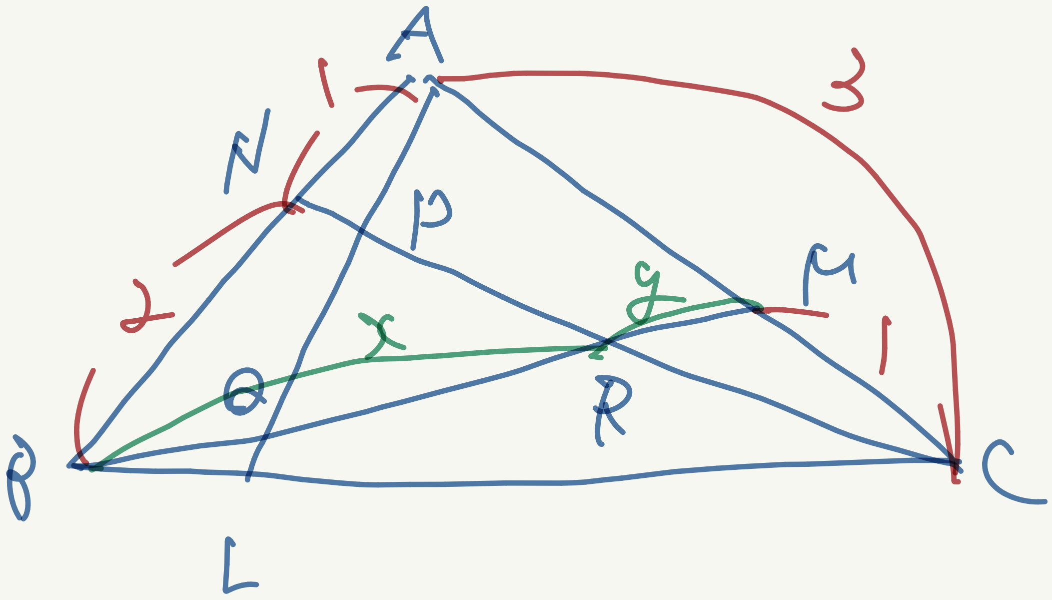
例えば



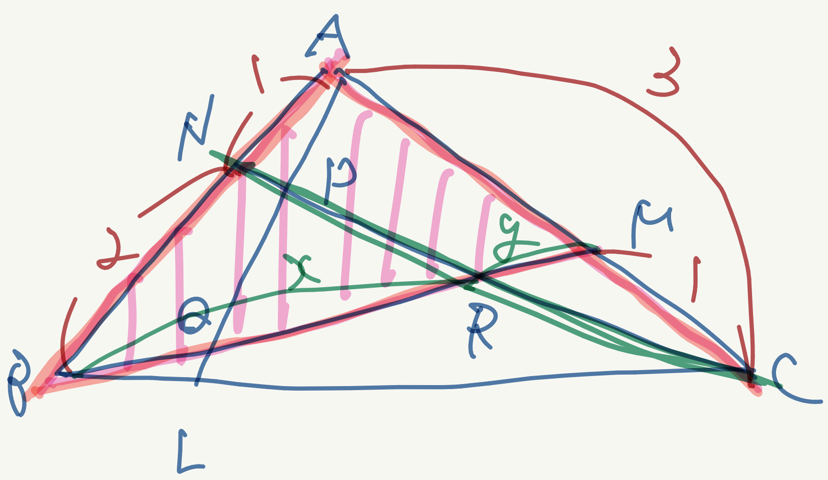
BからGへ線を引くと、
辺ACの延長線とぶつかる.
この点をFとして交点とする.

さて、では問題ではどう考えるか？

レジェンド282



例えば上のようなBRとRMがわからない場合。



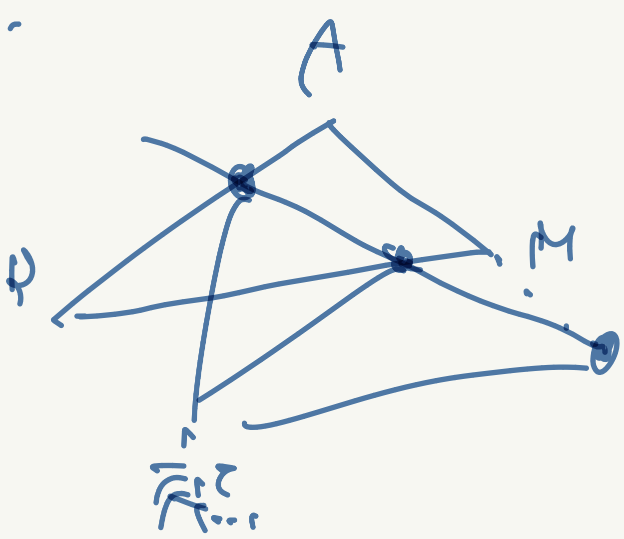
まずチェバにしろ、メネラウスにしろ、何か三角形が辺のセットについて関わっていたので、必ず必要な三角形があるはず。

上のようにわかってる辺のセットに ── とマーキング

わかっていない辺のセットに ── とマーキング

すると三角形ABMが浮かびあがる。

この三角形ABMに対して 直線NCが三角形にぶつかっているので…



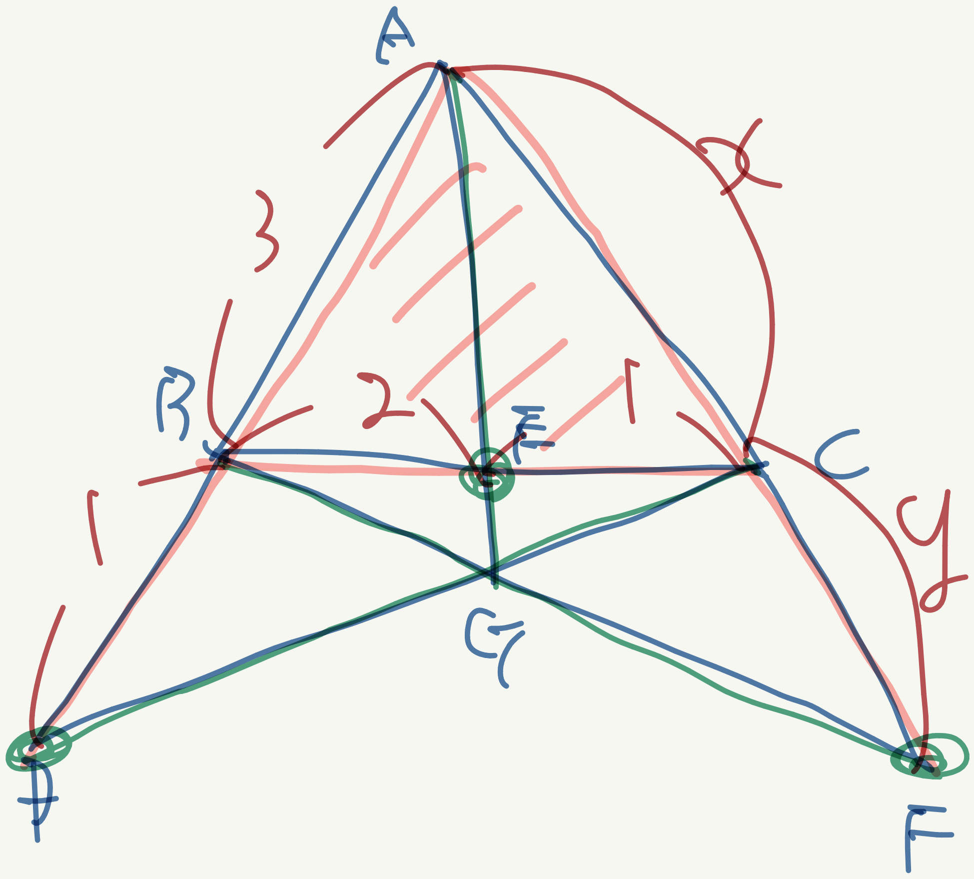
$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BR}{RM}\cdot\frac{MC}{CA}=1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$$\therefore \frac{x}{y}=\frac{6}{1}$$

$x:y=6:1$

例えば…これは？



まず辺の比に マーキング

三角形ABCがうかび上がる.

するとあきらかに点Gだけひとりぼっち.

点Gと三角形ABCの重心だとわかる.

交点は各ABCの点からGにひいて…D.E.Fが交点.

よって交点を経由して

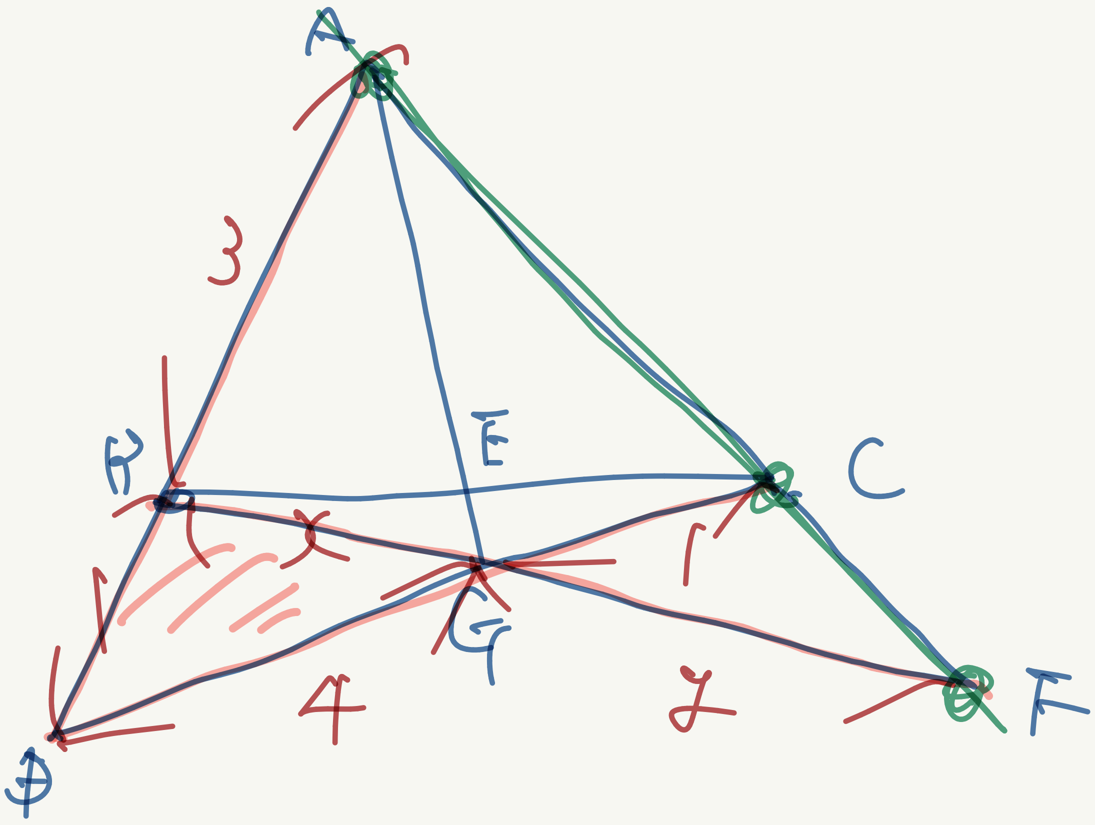
$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

$$\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{y}{x+y}=1$$

$$\frac{y}{x+y}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ x:y=1:7$$

例えばこれは？



四つの辺にマーキング —— をすると三角形BDGが浮かびあがる。
点Eがひとりぼっちなので、チェバかと思うが
点Eへ線を結ぶことができないので違う。
すると直線AFがあやしく、確かに、各辺を延長した線が直線AFにぶつかっており、A, C, Fが交点だとわかる。Dからはじめると、

$$\frac{DA}{AB}\cdot\frac{BF}{FG}\cdot\frac{GC}{CD}=1$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{x+y}{y}\cdot\frac{1}{5}=1$$

$$\frac{x+y}{y}=\frac{15}{4}$$

$$\therefore\ x:y=11:4$$